

## Untersuchungen zum PISA - Mathematik - Test

*Wolfram Meyerhöfer*

### 1. Problemstellung

In diesem Beitrag werden einige Resultate einer Untersuchung zum mathematischen Leistungstest von PISA vorgestellt (Meyerhöfer 2004, siehe auch Meyerhöfer 2005). Anhand der Aufgabe „Bauernhöfe“ wird das in dieser Untersuchung praktizierte empirische Vorgehen illustriert.

Am Ausgangspunkt meiner Untersuchung stand der Wunsch, Ergebnisse von Schulleistungstests daraufhin zu befragen, inwieweit sie zur Verbesserung von Unterricht beitragen können. Es zeigte sich, dass die von mir untersuchten Tests (TIMSS und PISA) dazu nicht geeignet ist. Das ergibt sich nicht nur aus allgemeinen und strukturellen Problemen des Testens (vgl. Meyerhöfer 2005, Kapitel 1); es zeigte sich zusehend, dass die Testaufgaben selbst erhebliche Messprobleme aufwerfen. So entwickelte sich die Frage, was mathematische Leistungstests eigentlich testen. Die sich zeigenden Probleme schlugen unmittelbar auf Unterricht durch, wenn – wie mit den Bildungsstandards angestrebt und auch bei PISA beansprucht – Tests zum Maßstab unterrichtlichen Handelns werden. Das Problem ist besonders virulent, wenn weder bei PISA noch in der Standards-Debatte der fundamentale Unterschied zwischen einer guten Testaufgabe und einer guten unterrichtlichen Aufgabe thematisch ist.

Die ersten Analysen zeigten, dass die Aufgaben mit erheblichen habituellen Verwerfungen belastet waren. So musste die Rekonstruktion von Elementen eines mathematikdidaktischen Habitus, der sich in den Aufgaben zeigt, zu einem eigenen Untersuchungsschwerpunkt ausgearbeitet werden.

Die Konzentration der Analysen liegt auf den *Testaufgaben*, weil die Geltung der Aussage eines Tests an der Aufgabe erzeugt wird: In der Aufgabe gerinnt das, was Tester als „mathematische Leistungsfähigkeit“ konstruieren. Der Schüler wiederum hat nur die Aufgabe vor sich. Es gibt nur „gelöst“ (ein Punkt) und „ungelöst“ (kein Punkt). Damit der Schüler den Punkt bekommt, muss er an der richtigen Stelle ankreuzen, oder er muss etwas hinschreiben, wofür der Auswerter einen Punkt gibt. Alle Testaussagen ergeben sich aus der Punktzahl.

In Diskussionen wird mitunter über die Sinnhaftigkeit und Üblichkeit der qualitativen Interpretation von quantitativen Erhebungsinstrumenten gestritten. In der Tat ist es ein neuer Ansatz, Testitems explizit einer qualitativen Untersuchung zu unterziehen. Neu ist dabei insbesondere, dass diese Untersuchung einer methodischen Kontrolle unterliegt und dass sie latente Textelemente systematisch erfasst. Die Arbeit versteht sich insofern als Beitrag zum Überdenken des Konflikts zwischen qualitativen und quantitativen Methoden. Die Resultate belegen die Notwendigkeit einer methodisch gesicherteren Erarbeitung von Testitems.

Die *Operationalisierung* eines Konstrukts mathematischer Leistungsfähigkeit in einen Test hinein wird in meiner Untersuchung zwar diskutiert, bei PISA hat so eine Operationalisierung aber nicht stattgefunden.

In der Untersuchung wird mit der *Methode der Objektiven Hermeneutik* (vgl. Meyerhöfer 2005, S. 61-96) gearbeitet, weil sie eine methodisch kontrollierte Analyse der manifesten und der latenten Sinnstruktur eines Textes ermöglicht. Die zwingende Sequentialität des Vorgehens, die Berufung auf die Regelmäßigkeit sozialen Handelns und auf Regeln bei der Geltungserzeugung, den Geltungsanspruch, den Anspruch der Objektivität und die Erschließung von Subjektivem.

Je stärker Tests als wissenschaftliche Instrumente für die Vergabe von Zukunftschancen instrumentalisiert werden, desto wichtiger ist es, dass sie *messen, was sie messen sollen*. Das Konstrukt „mathematische Leistungsfähigkeit“ wird damit zu einem kontingenten. Dabei entsteht der Eindruck einer „Unschärferelation“: Je komplexer die zu messende Fähigkeit, desto schwieriger wird es, diese Fähigkeit scharf zu messen. Es bleibt unklar, ob es überhaupt möglich ist, komplexe Fähigkeiten scharf zu messen, aber die Eindeutigkeit des Messprozesses kann u.a. erhöht werden, wenn

- deutlich zwischen einer guten unterrichtlichen und einer guten Testaufgabe unterschieden wird: Aufgaben sind Initiator einer Lösungspraxis. Das macht sie im Unterricht zu einem Instrument vielfältiger Praxen. Sie sind Initiator von Lernen, Ort der Selbsttätigkeit des Schülers, Instrument der Erfassung von Lernerfolgen, Zwischenerfolgen und Defiziten (also Testinstrument), Protokoll einer fachlichen, habituellen bzw. psychischen Disposition des Aufgabenerstellers (Schüler lernen ihre Lehrer u.a. über die Aufgaben kennen, die sie stellen; Schüler erhalten über Aufgaben ein Bild vom Fach und seinen Vertretern), sie sind an der Herstellung von Sozialität beteiligt. Das Lösen von Aufgaben im Unterricht ist Ort des Trainierens von Fertigkeiten, des Erlangens von Fähigkeiten, des Erwerbs von Wissen, es ist Disziplinierungsinstrument, ist Selbstzweck (was sicherlich oft heißt: Mittel zur Umsetzung eines bestimmten Bildes von Ziel und Praxis von Mathematikunterricht), dient der Überbrückung von Zeitlücken usw. Im Test hingegen sind Aufgaben ausschließlich Messinstrument. Daraus resultieren wesentliche Unterschiede in den Anforderungen an gute unterrichtliche und gute Testaufgaben.
- man sich zunächst deutlich machte, was man eigentlich messen möchte, und wenn dementsprechend eine Operationalisierung eines Messkonstruktes stattfände. Die Beurteilung einer Aufgabe muss dabei davon ausgehen, auf welche Weise die Aufgabe gelöst werden kann. Bei TIMSS und PISA ging man hingegen davon aus, auf welche Weise sich die Tester eine Lösung wünschen.
- das Auseinanderlaufen und Gegeneinanderlaufen von latentem und manifestem Aufgabentext verhindert wird. Das bisherige Expertenverfahren kann dies offenbar nicht leisten.

Bei TIMSS und PISA werden in erheblichem Umfang *Testfähigkeiten* mitgemessen. Viele Aufgaben enthalten Irritationen, welche von testerfahrenen Schülern leichter überwunden werden können als von testunerfahrenen. Es gibt Aufgaben, die gelöst werden können, ohne dass man über die Fähigkeit verfügt, die getestet werden soll. Umgekehrt gibt es Aufgaben, die man eventuell nicht lösen kann, obwohl man über diese Fähigkeit verfügt. Als wesentliches Element von Testfähigkeit stellt sich heraus, weder das gestellte mathematische Problem noch

die angeblichen realen Probleme ernst zu nehmen, sondern sich statt dessen auf das zu konzentrieren, was die Tester angekreuzt oder hingeschrieben sehen wollen. Prinzipiell erweist es sich als günstig, auf intellektuelle Tiefe in der Auseinandersetzung mit den Aufgaben zu verzichten.

Man kann bei Multiple-Choice-Tests raten. Die PISA-Gruppe behauptet zwar, dieses Problem technisch überwinden zu können, dies erweist sich aber als Fehleinschätzung.

Je stärker Tests für die Vergabe von Zukunftschancen in Schulsysteme eingebunden werden, desto wichtiger ist es, dass das Gemessene das ist, was gelernt werden soll. Dazu ist eine Darstellung dessen notwendig, was gelernt werden soll. Hieraus ist wiederum in einem *Operationalisierungsprozess* ein *Messkonstrukt* zu erstellen, was bei TIMSS und PISA nicht stattgefunden hat. Dort wurde der Testerstellungsvorgang lediglich mit einem eklektischen, unverbundenen Theoriegemisch „umstellt“. In meiner Untersuchung habe ich versucht, folgende *theoretische Konstrukte* genauer zu verfolgen:

Für die inhaltliche Beurteilung von Aufgaben wird auf die „*Theorie der mentalen Situationsmodelle*“ von Reusser (1989) und die grundlegenden Arbeiten von Kintsch und van Dijk (Kintsch 1974, 1994; Kintsch & van Dijk 1978; van Dijk & Kintsch 1983) verwiesen. Leistungen und Grenzen dieses Ansatzes werden diskutiert. Als gravierend erweisen sich die Vernachlässigung der latenten Textebene, mangelnde methodische Kontrolle und die Vernachlässigung der Frage, *wovon* ein Situationsmodell erstellt wird. Es stellt sich heraus, dass die TIMSS-Gruppe (das reproduziert sich später bei PISA) nicht mit dieser Theorie gearbeitet haben kann, sondern sie lediglich als theoretischen Mantel für Ad-hoc-Deutungen benutzt.

1. Das Konzept der „*Mathematical Literacy*“ (vgl. PISA 2000, S. 141ff) stellt die intellektuelle Abreicherung des Freudenthalschen didaktischen Konzepts der „*Realistic Mathematics Education*“ (vgl. ebd.) in ein Fähigkeitskonzept dar. Der darauf basierende PISA-Test soll untersuchen, ob Schüler „grundlegende mathematische Konzepte so verstanden haben, dass sie mit diesen Werkzeugen Problemsituationen aus unterschiedlichen Kontexten behandeln können“ (ebd., S.143). Dies leisten die Aufgaben nicht, obwohl sie (auch) mathematische Fähigkeiten messen, und obwohl einige Aufgaben das Potential zur Entwicklung (nicht aber zum Messen) dieses Verständnisses haben. Es bleibt unklar, worin die Stärke des „realistic“-Gedankens bestehen soll, da er in den Aufgaben das Verstehen nicht befördert.
2. PISA beruft sich auf eine *Theorie des Modellierungsprozesses*, welche *jede* Aufgabe als Modellierungsaufgabe vorstellt (ebd., S.143 ff). Dieser Ansatz ist bereits in sich nicht schlüssig, da das wesentliche Element des Modellierungsprozesses der Übergang zwischen Realsituation und mathematischem Modell ist. Zusätzlich hilft der theoretische Ansatz wenig bei der Erstellung, bei der Lösung oder der Interpretation von Aufgaben. Die PISA-Gruppe verwendet ihn selbst nicht. Auch in den Aufgaben finden sich keine Elemente, die - entsprechend der Theorie - Teile eines Modellierungsprozesses sinnvoll ersetzen, stattdessen werden in Aufgaben Modellierungsanforderungen zerstört. Es ist nicht gelungen, eine Aufgabe zu finden, bei der wirklich ein reales Problem zu bearbeiten ist - gleichzeitig kritisiert die PISA-Gruppe eingekleidete Aufgaben undifferenziert, statt ihr Potential zu reflektieren.

3. Im Zusammenhang mit der Promotion wurde eine Dekonstruktion des *Kompetenzstufenmodells* erarbeitet, mit welchem die PISA-Gruppe die Testwerte inhaltlich interpretiert (Meyerhöfer 2004a). Es wird gezeigt, dass die Vielfalt der möglichen Lösungswege bei komplexeren (also bei fast allen) Aufgaben die Erstellung von Kompetenzstufenbeschreibungen verhindert. Die für das Modell vorgenommene Kategorienbildung wird verworfen.

Testaufgaben sind auch Protokoll einer Testerstellungspraxis. Bei der Untersuchung des PISA-Tests schoben sich zunehmend Probleme in den Vordergrund, die nicht nur den Charakter des Messinstruments betrafen, sondern als *Elemente eines mathematikdidaktischen Habitus* sich quasi aufdrängen: Manifeste Orientierung auf Fachsprachlichkeit und latente Zerstörung des Mathematischen, Illusion der Schülernähe als Verblendung, Kalkülorientierung statt mathematischer Bildung, Misslingen der „Vermittlung“ von Realem und Mathematischem bei realitätsnahen Aufgaben. Letzteres gründet in der Nichtbeachtung der Authentizität sowohl des Realen als auch des Mathematischen. Ich habe die genannten Habituselemente unter dem Stichwort der „Abkehr von der Sache“ zusammengefasst.

Anhand der nachfolgend dargestellten Analyse der Pisa-Aufgabe „Bauernhöfe“ soll das Vorgehen der Untersuchung gezeigt werden. Die Aufgabe wird von der PISA-Gruppe als exemplarisch für das PISA-Konzept angegeben, und in ihr zeigen sich beispielhaft viele der angegebenen Probleme.

## 2. Die PISA-Aufgabe „Bauernhöfe“

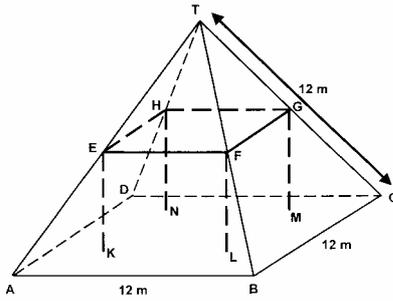
Zur Illustration meines Vorgehens möchte ich Ausschnitte der Interpretation der Aufgabe „Bauernhöfe“ vorstellen:

### *BAUERNHÖFE*

*Hier siehst du ein Foto eines Bauernhauses mit pyramidenförmigem Dach.*



*Nachfolgend siehst du eine Skizze mit den entsprechenden Maßen, die eine Schülerin vom Dach des Bauernhauses gezeichnet hat.*



Der Dachboden, in der Skizze  $ABCD$ , ist ein Quadrat. Die Balken, die das Dach stützen, sind die Kanten eines Quaders (rechtwinkliges Prisma)  $EFGHKL MN$ .  $E$  ist die Mitte von  $\overline{AT}$ ,  $F$  ist die Mitte von  $\overline{BT}$ ,  $G$  ist die Mitte von  $\overline{CT}$  und  $H$  ist die Mitte von  $\overline{DT}$ . Jede Kante der Pyramide in der Skizze misst 12 m.

*Bauernhöfe 1. Berechne den Flächeninhalt des Dachbodens  $ABCD$ .*

Der Flächeninhalt des Dachbodens  $ABCD = \underline{\hspace{2cm}} \text{ m}^2$ .

*Bauernhöfe 2. Berechne die Länge von  $\overline{EF}$ , einer der waagerechten Kanten des Quaders.*

Die Länge von  $\overline{EF} = \underline{\hspace{2cm}} \text{ m}$ .

### 3. Lösungswege zu „Bauernhöfe 2“ und ihre Zuordnung zu den PISA-Kompetenzstufen<sup>1</sup>:

- Intuition<sup>2</sup>:  $E$ ,  $F$ ,  $G$  und  $H$  sind Mittelpunkte von Pyramidenseiten. Es liegt nahe anzunehmen, dass  $EF$  halb so lang wie die gegebenen 12 m der Grundseite  $AB$  ist. Man kann das ausgehend von der Intuition auch nachmessen bzw. rechnerisch überprüfen, aber das intuitive Lösen stellt einen eigenen Weg der Lösungsgenerierung dar. In der Kompetenzstufentheorie hat dieser Weg keinen Platz, obwohl auch die PISA-Gruppe ihn sieht. (PISA 2000, S. 151)
- Messen: Hier kann direkt in der Zeichnung gemessen werden, man kann aber auch vorher eine maßstäbliche Zeichnung anfertigen und in ihr messen. Das Messenkönnen bewegt

<sup>1</sup> Hier wird versucht, die grundsätzlich denkbaren Wege zur Erlangung des Punktes für die richtige Lösung zu betrachten. Vollständigkeit wird angestrebt, ist aber für die Argumentation nicht notwendig. Die einzelnen Wege werden durch den Aufgabentext zwar gestärkt bzw. geschwächt, das Testziel ist aber lediglich die Erlangung des Lösungspunktes. Jede Möglichkeit, diesen Punkt zu erhalten, verweist auf Bestandteile dessen, was die Aufgabe misst. Die Explizierung von Lösungswegen ist immer idealtypisch zu verstehen. Empirisch werden alle möglichen Mischformen vorkommen.

<sup>2</sup> In der mathematikdidaktischen Debatte um Aufgaben spielt Intuition kaum eine systematische und theoretisch reflektierte Rolle und sie findet auch im Kompetenzstufenmodell keinen Platz. Sie ist aber nicht nur Bestandteil vieler Problemlöseprozesse, sondern kann auch als eigenständiger Lösungsweg auftreten. Dabei ist zu beachten, dass es sich bei intuitivem Vorgehen im Kern um Hypothesenbildung handelt. Das macht auch die Unsicherheit intuitiven Vorgehens aus, denn es ist eine Hypothesenprüfung notwendig, die außerhalb des Intuitiven stattfinden muss. Es gibt Aufgaben, bei denen die Hypothesenprüfung so einfach ist, dass man auch sie (fälschlich) als intuitiv wahrnimmt. Bei der vorliegenden Aufgabe erfolgt die Hypothesenprüfung auf einem der nachfolgend dargestellten Lösungswege. Man erkennt auch, dass die Unsicherheit des *rein* intuitiven Lösens darin besteht, dass keine Hypothesenprüfung stattgefunden hat. Da es beim Lösen aber nur um das richtige Resultat geht, liegt trotzdem eine vollwertige Lösung vor.

sich zwar außerhalb dessen, was man mit „mathematisch“ bezeichnet, hat aber seine eigene Bedeutung. Das Messen als empirisches Vorgehen ist hier keine Annäherung an geometrische Operationen, sondern eine Abkehr von ihr, weil es ihre Unnötigkeit zur Erlangung des Lösungspunktes unterstreicht. In jedem Fall ist das Ausmessen einer Strecke eine Fähigkeit, die man auf Stufe I<sup>3</sup> (Wissen auf Grundschulniveau) verweisen würde. Setzt man den Fokus auf die Modellierungsanforderung, könnte man aber die Grenze zu Stufe II schon überschritten sehen.

- Lösen über den Satz von der Mittellinie des Dreiecks: Dazu muss man EF als Mittellinie des Dreiecks ABT erkennen und wissen, dass die Mittellinie eines Dreiecks halb so lang wie seine Basis ist. Dieser Weg verlangt lokales mathematisches Fakten- bzw. Satzwissen. Man würde ihn wohl auf Stufe II (wegen der Einfachheit der Modellierung) oder III (wegen der Verankerung des Wissensinhalts in der Sekundarstufe) einordnen.
- Lösen über den 2. Strahlensatz: Dieser Weg setzt die Erkenntnis voraus, dass die Strecken AT und BT durch ihre Mittelpunkte halbiert sind. Außerdem muss erkannt werden, dass eine Konstruktion vorliegt, die über den Strahlensatz bearbeitet werden kann. Das kann z.B. durch die Anwendung der Umkehrung des Strahlensatzes oder durch eine entsprechende Modellannahme geschehen. Über eine allgemeine Betrachtung oder über das Einsetzen von Zahlen bzw. Variablen gelangt man mit Hilfe des zweiten Strahlensatzes zur Lösung. Dieser Weg verlangt genuin mathematisches Denken. Man würde ihn auf Stufe IV (umfangreiche technische Verarbeitungsprozesse, wenn man mit den Werten arbeitet) oder V (wenn man mit Hälften argumentiert) ansiedeln.
- andere innermathematische Argumentationen: Man kann zum Beispiel die drei Mittelpunkte der Dreiecksseiten miteinander verbinden und dann Kongruenzen der entstehenden Dreiecke betrachten. Man kann aber auch das obere Teildreieck klappen oder spiegeln. Hier sind auf jeden Fall komplexe Argumentationen nötig, die aber z.T. auch rein intuitiv abgesichert sein können. Sie können auch auf einen Beweis des Satzes von der Mittellinie des Dreiecks führen. Dieses Vorgehen verweist auf Stufe V.

Bereits an dieser Stelle wird deutlich, dass die Aufgabe inhaltlich nicht einer einzigen Kompetenzstufe zugeordnet werden kann. Für diese Aufgabe kann eine Kompetenzstufenzuordnung (die PISA-Gruppe ordnet sie Stufe III zu) also nicht bestätigt werden.

#### 4. Textanalyse

„*Bauernhöfe*“

Diese Überschrift (es handelt sich der Form im Testheft nach um eine Überschrift, nicht nur um eine Aufgabenbezeichnung) konstruiert einen Widerspruch zum Inhalt, da es in der Aufgabe nicht um Bauernhöfe geht. Man darf etwas erwarten, das mit Bauernhöfen zu tun hat: Statistiken über Bauernhöfe, irgendwelche Rechenaufgaben zu dortigen Lebens- bzw. Arbeitsweisen, vielleicht auch architektonisch-geometrische Betrachtungen zu Bauernhöfen. Wir wissen, dass nichts davon passiert. Es geht lediglich um das *Dach eines Bauernhauses*. Es geht also nicht um Bauernhöfe, sondern um *einen* Bauernhof. Konkreter: Es geht nicht um einen Bauernhof, sondern um ein *Bauernhaus*. Es geht nicht um ein Bauernhaus, sondern um das *Dach* eines Bauernhauses. Wenn es sich überhaupt um ein Bauernhaus handelt, so hat die Bauernzuschreibung nichts mit

---

<sup>3</sup> Beschreibung der Kompetenzstufen siehe PISA 2000 (S.159 f.)

dem Problem zu tun. Die Überschrift verspricht also größere Reichhaltigkeit, als die Aufgabe liefert. Der Schüler wird nicht nur - quasi dreieinhalbfach - in die Irre geführt, sondern auch an der Nase herumgeführt. Die Ernsthaftigkeit des Gegenstandes der Aufgabe wird dementiert. Dies kennzeichnet einerseits einen mathematikdidaktischen Habitus, ist aber gleichzeitig wegen seiner Irritationshaltigkeit auch ein Messproblem.

Habituell ist nun die Frage, warum man hier nicht einfach sagen kann, worum es in der Aufgabe geht: Es ist ja kein „Versehen“, dass über einer Aufgabe mit einem Hausdach die Überschrift „Bauernhöfe“ steht. Hier zeigt sich zunächst eine romantisierende Tendenz. Es liegt aufgrund der theoretischen Konstruktionen von PISA (die zugehörige Ebene heißt „situations and contexts“) nahe anzunehmen, dass das dort verwendete Konzept der Schülernähe dem gleichen Habitus folgt. Die Romantisierungstendenz erzeugt hier allerdings eine zusätzliche Verwerfung, weil – nähme man das Schülernähekonzent ernst – es viel näher läge, ein Stadthaus zu betrachten. Scheinbar projizieren die Aufgabenersteller die eigenen romantisierenden Bauernhofvorstellungen auch noch auf die Schüler, denen es näher zu kommen gilt. Man würde darüber mehr erfahren, wenn die PISA-Gruppe ihre Aufgabekategorisierungen vollständig veröffentlichen würde: Sie suggeriert in ihrem Theoriekonstrukt, dass die Aufgaben in verschiedene Stufen der Schülernähe eingeteilt wären (OECD 1999, S.50). Es wäre interessant zu erfahren, ob ein Bauernhof dort einen höheren „Schülernäheindex“ erhält als ein Stadthaus.

*Hier siehst du ein Foto eines Bauernhauses...*

Die Aufmerksamkeit des Lesers wird auf das Foto gelenkt. Es hat damit nicht nur illustrativen Charakter, sondern direkten Bezug zum Text. Dieser Bezug wird im Weiteren nicht eingelöst, das Bauern(?)haus selbst spielt im Folgenden keine Rolle mehr. Sowohl das Foto selbst als auch die Verbindung zum Text produzieren einen Anspruch, der nicht eingelöst wird. Das wäre z.B. möglich, indem die folgenden Geometrieaufgaben irgendeine inhaltliche Rückführung auf das Haus erhalten würden. Diese Logik der Nichtbedeutung des Gegenstandes (die sich bereits mehrfach in der Überschrift fand) findet sich weiter in der Formulierung *ein Foto eines*: Wohlgeformt wären ... *das Foto eines* ... (Spezifizierung des Fotos, Entspezifizierung des Gegenstandes) oder ... *ein Foto des* ... mit nachfolgender Spezifizierung des Hauses (Entspezifizierung des Fotos, Spezifizierung des Gegenstandes). Die gewählte Formulierung schafft eine doppelte Entspezifizierung, zugespitzt: Es ist völlig egal, welches Foto welches Hauses du hier siehst.

*... mit pyramidenförmigem Dach.*

Die klare Hinführung zur Pyramidenform schafft einen Fokus. Kontrastierend kann man nach *mit* jedes Sujet einführen. Man erkennt, dass der Fokus weg vom Haus hin zum Sujet gelenkt wird. Man kann auch noch Kombinationen mit den Kontrastvarianten zu ... *ein Foto eines* ... betrachten. Die sprachliche Verwer-

fung zwischen der manifesten Bedeutung des realen Gegenstandes „Haus“ und der latenten Vernichtung dieser Bedeutung wiederholt sich hier.

Am Ende des ersten Satzes kann man den objektiven Aufgabentext polemisch zusammenfassen: Wir tun mal so, als ob wir über Bauernhöfe reden. Du siehst hier irgendein Foto irgendeines Hauses. Du sollst dich auf die Pyramidenförmigkeit seines Daches konzentrieren.

..., die eine Schülerin vom Dach des Bauernhauses gezeichnet hat.

Der Schüler wird erneut an der Nase herumgeführt, denn natürlich hat keine Schülerin die Skizze gezeichnet, sondern der professionelle Grafiker, den die PISA-Gruppe dafür bezahlt hat. Hier soll offenbar wiederum ein Schülerbezug konstruiert werden - der sich gleich selbst dementiert. Wahrscheinlich kann man die Aufgabe durch diesen „Schülerbezug“ auf der dritten PISA-Konstruktionsebene „Situations and contexts“ in die Kategorie „daily life“ einordnen. Auch diesbezüglich wäre die Veröffentlichung der Zuordnungen der Aufgaben zu den Kategorien interessant: Steigt der Schülernäheindex, wenn man behauptet, eine Schülerin hätte hier gezeichnet? Und steigt er noch mehr, wenn man wirklich eine Schülerin zeichnen lässt? Oder steigt dann nur noch der Wirklichkeitsindex?

Die Schlinge, die latent schon gelegt war, wird nun auch manifest langsam gezogen: Wir sind ausgehend von den Bauernhöfen über das Bauernhaus beim Dach gelandet. Spätestens jetzt wird deutlich, dass das bisherige Manifeste nur „schmückendes und störendes“ Beiwerk war. Jetzt kommt noch einmal der Dachboden, danach ist die Einkleidung vergessen, man benötigt sie nie wieder - das sieht man jetzt bereits ohne Analyse der latenten Textebene. Selbst in den Fragen wird die Einkleidung nur noch der Dekoration dienen. Die Illusion eines ernstzunehmenden authentischen Realitätsbezugs der Aufgabe ist aber bereits hier zerstört.

*Der Dachboden, in der Skizze ABCD, ist ein Quadrat.*

Der Begriff Dachboden (Raum zwischen dem obersten Geschoß und dem Dach eines Gebäudes) wird hier regelabweichend verwendet. Für die Figur ABCD gibt es in der Umgangssprache lediglich die Bezeichnung „Boden des Dachbodens“, die hier wahrscheinlich vermieden werden sollte. Man könnte auch vom „Boden des Daches“ oder vom „Boden des Dachgeschosses“ sprechen. Alle vier Formulierungen enthalten Irritationspotential, es ist nicht vermeidbar, wenn man unbedingt bei diesem Gegenstand verbleiben will.

Weder der Dachboden noch der Boden des Dachbodens *ist* ein Quadrat. Kein Dachboden ist ein Quadrat. Und kein Boden eines Dachbodens ist ein Quadrat. Er kann höchstens quadratisch sein.

Der Unterschied zwischen beiden Formulierungen lässt uns erkennen, wie mathematische Fachsprache in die Umgangssprache eingeflossen ist: Wenn ein Kind sich im Verlauf der Sprachentwicklung das Wort „quadratisch“ aneignet, so hat es bereits ein „Vorkonzept“ von einem Quadrat entwickelt. Es weiß dann

bereits - eher implizit als explizit -, dass etwas, das man quadratisch nennt, vier Seiten hat, dass diese gleich lang sind und dass sie senkrecht aufeinander stehen. All diese Eigenschaften werden aber im Verlauf mathematischer „Weiter-Bildung“ erst expliziert und fließen in den Begriff des Quadrats ein. Man wird also - und Experimente sind hier leicht vorstellbar - Kinder finden, die das Wort *quadratisch* verstehen bzw. verwenden können, die eventuell sogar das Wort *Quadrat* verstehen bzw. verwenden können, ohne dabei über ein Konzept des Quadrates in mathematischen Begriffen zu verfügen. Vielleicht kann man das „umgangssprachliche Konzept des Quadrats“ nennen. Daneben gibt es ein Konzept des Quadrats *in mathematischen Begriffen*, etwa: Ein Quadrat ist eine geometrische Figur, bestehend aus vier gleich langen Seiten, von denen die je zwei benachbarten senkrecht aufeinander stehen. „Mathematisierung“ des Quadratbegriffs bedeutet hier, die Alltagsvorstellungen in theoriegeleitete Begrifflichkeiten zu überführen und deren Besonderheiten (Idealisierung, Nichtempirie usw.) zu kennzeichnen.

Nun ist klar, dass es Zwischenstufen geben kann, auf denen der umgangssprachliche Begriff schon überwunden ist, ohne dass bereits ein explizit in mathematischen Begriffen arbeitendes Konzept vorläge. Auf dieser Zwischenstufe würde ein Kind zu einer quadratischen Gehwegplatte schon nicht mehr sagen, sie sei ein Quadrat. Es würde sagen, sie sei quadratisch.<sup>4</sup> Es könnte aber noch nicht begründen, warum es nicht vom Quadrat redet. Bereits auf dieser Stufe von Sprachentwicklung würde aber der Begriff *Quadrat* bereits in das Reich der Mathematik verweisen, wohingegen *quadratisch* ins Reale gehört. Der Aufgabentext bewegt sich *unterhalb* dieser Entwicklungsstufe und dieses Abstraktionsniveaus.

Diese Erkenntnis lässt sich in kontrastierenden Textvarianten vertiefen:

1. Der Boden des Dachbodens ist/sei quadratisch.
2. ABCD ist/sei ein Quadrat.
3. ABCD ist/sei quadratisch.
4. Der Boden des Dachbodens ist/sei ein Quadrat.

Auffallend ist die mangelnde Wohlgeformtheit von 3. Es ist eine besonders grobe Regelabweichung, wenn eine geometrische Figur als „quadratisch“ bezeichnet wird, nicht nur umgekehrt die Benennung eines realen Gegenstandes als Quadrat (Variante 4). Mit der vorliegenden Formulierung bewegt sich die Aufgabe auf einer Sprachebene, auf der der Unterschied zwischen Quadrat und quadratisch noch nicht realisiert ist. Der vorliegende Text stellt sozusagen eine Mesalliance der wohlgeformten Gelingenvarianten 1 und 2 dar. Hier wird also das Mathematische im Begriff „Quadrat“ zerstört, es wird aber auch das Reale zerstört, indem es in seiner Autonomie verleugnet und als Mathematisches be-

<sup>4</sup> Diese Exemplifizierung der Zwischenstufe stellt nur eine These dar. Man mag das Bedürfnis verspüren, sie zu überprüfen. Zum Beispiel ist ebenso denkbar, dass der Unterschied zwischen dem Substantiv und dem Adjektiv nicht erst mit der genaueren Kenntnis des Objekts „Quadrat“ auftritt, sondern sich bereits vorher erschließt - dann bewegt sich der Aufgabentext ebenfalls vor dieser Stufe der Sprachentwicklung.

zeichnet wird. Eine für die Lösung hilfreiche Hinführung des Realen zum Mathematischen, also Hilfestellung durch Vorausführung von Teilen des Modellierungsprozesses, findet hingegen nicht statt. Auch eine Positionierung des Mathematischen zum Realen bzw. des Realen zum Mathematischen findet nicht statt.

Die konstruierten Varianten lassen auch eine Untersuchung der vorliegenden Modellierungsanforderung zu: Die höchste Modellierungsanforderung würde durch das Weglassen dieser Information entstehen. Der Schüler müsste dann einerseits selbständig seine Aufmerksamkeit auf die Fläche bzw. Figur richten und er müsste selbständig ermitteln, um welche Fläche es überhaupt geht. 1 bis 4 vermitteln im Vergleich dazu eine zusätzliche Information, nämlich die Information des Quadratischseins. Die Mitteilung des quadratischen Charakter selbst ist für die Flächeninhaltsbestimmung eigentlich überflüssig, denn mitteilungsbedürftig wäre für ein reales Problem lediglich, wenn die Hauswände *nicht* rechteckig zueinander stünden, wenn der Boden also *nicht* quadratisch wäre. Die Angabe der Längengleichheit der Bodenseiten ist zusätzlich redundant.

Die vorgeschlagenen Formulierungen und mit ihnen der Aufgabentext erweisen sich somit als überflüssig. Sie antworten auf eine nicht gestellte und auch sachlich nicht naheliegende Frage: Stehen die Seiten des Vierecks senkrecht aufeinander? Mit der Antwort auf diese aus gutem Grunde nicht gestellte Frage wird das Reale nicht ernst genommen - denn die Untersuchung der Möglichkeit seiner Schiefheit ist absurd und konstruiert. Eine eventuelle Schiefe müsste explizit mitgeteilt werden.

Auch der Modellierungsgedanke wird nicht ernst genommen - es wird zwar so getan, als ob hier eine Modellierungsbedingung mitgeteilt würde, aber es handelt sich nicht um die Herstellung einer Verbindung zwischen Realität und Modell, sondern um eine in beiden „Welten“ überflüssige Information. Eine mögliche Erklärung für diese überflüssige Mitteilung mag darin liegen, dass der Pyramidenbegriff in der Mathematik Körper mit beliebigen konvexen  $n$ -Ecken als Grundfläche einschließt. Das macht die Mitteilung aber noch abstruser, weil unter Behauptung mathematisch präziser Information lediglich unterstellt wird, der Schüler könnte ein „pyramidenförmiges Dach“ anders als quadratisch modellieren. In dieser ursprünglich unterrichtlich orientierten Aufgabe zeigt sich darin ein Habitus der Vermeidung von Provokationen<sup>5</sup>. In einer Testaufgabe führt dies

---

<sup>5</sup> In der Wahrnehmung der Schüler ist es oftmals willkürlich vom Lehrer bestimmt, welche Modellierung für ein Problem verwendet wird. Der Schüler kann nun mit dieser Willkür spielen, indem er andere Modellierungen vorschlägt. Dazu muss er in diesem Fall die offensichtlich gemeinte Alltagsdeutung von „pyramidenförmig“ verzerren und auf der mathematischen Deutung des Pyramidenbegriffs bestehen. Diesem notwendigen Infragestellen des Gegebenen kann man eigentlich nur mit professioneller Gelassenheit begegnen bzw. sie produktiv nutzen - indem man andere Modellierungen diskutiert. Man kann aber auch wie im Aufgabentext versuchen, solchen Provokationen vorzubauen. Damit produziert man dann Verwerfungen wie in dieser Aufgabe, die wiederum zu Provokationen Anlass geben.

zwar äußerlich zur Vermeidung nicht gewollter, also „falscher“ Modellierungen, erzeugt aber im Gegenzug die hier diskutierten Verwerfungen.

*Die Balken, die das Dach stützen, sind die Kanten eines Quaders (rechtwinkliges Prisma) EFGHKLMN.*

Hier liegt zunächst eine Falschaussage vor. Die Balken sind nicht *die* Kanten dieses Quaders, sie sind Kanten dieses Quaders. Das Hinzufügen des *die* ist also eine Entexaktifizierung. Man kann weder behaupten, dass dies der Realsituation geschuldet wäre, noch dass es eine sprachliche Vereinfachung darstellen würde. Eine Konstruktion wie ... *eines Quaders (rechtwinkliges Prisma)* ... schafft offensichtlich Irritationspotential: Wer nicht weiß, was ein Quader ist, weiß mit Sicherheit auch nicht, was ein rechtwinkliges Prisma ist, hingegen gibt die Tatsache des Angebens der Information „rechtwinkliges Prisma“ eine zusätzliche Aufgabe: Finde heraus, ob diese Information relevant für das Finden der richtigen Antwort ist. Der Schüler weiß das ja zunächst nicht und kann es bei Unkenntnis des Begriffs Prisma nur schwer entscheiden - hier entsteht also Irritationspotential. Wenn er den Begriff kennt, so steht die Frage „Wozu wird das mitgeteilt?“ Schließlich ist für einen Schüler, der den (ausgesprochen schwierigen) Begriff Prisma kennt, trivial, dass ein Quader rechtwinklig ist. Für ihn liegt hier also ohne zunächst sichtbaren Grund eine überflüssige Information vor. Selbst für den Schüler, der den Begriff kennt, entsteht also Irritationspotential. Sollte die Klammer dazu dienen, Redundanz zu schaffen und die Aufgabe damit zu erschweren, so muss man fragen, zu welchem Zweck das dient, denn die Redundanz liegt nicht im Problem begründet wie bei offenen Problemen. Sie ist künstlich hergestellt und spricht keine auf die Problemlösung bezogene Fähigkeit an, sondern nur die Fähigkeit, eine künstliche Irritation zu überwinden, also Testfähigkeit. Die künstliche Verschwierigung ist aber nicht nur ein Messproblem, sondern auch Ausdruck eines Habitus.

*E ist die Mitte von  $\overline{AT}$ , F ist die Mitte von  $\overline{BT}$ , G ist die Mitte von  $\overline{CT}$  und H ist die Mitte von  $\overline{DT}$ .*

Die Wiederholung der immer gleichen Information wiederholt die bereits diskutierte Struktur der für die Lösung überflüssigen bzw. redundanten Information, die das intuitive Vorgehen stärkt.

Der Begriff *Mitte* bewegt sich innerhalb von Umgangssprache, ist hier gleichwohl in die geometrische Terminologie der Punkte und Strecken eingebunden. Das ist äußerlich zunächst irritierend, denn ausgesprochen steht dort ja: Der Punkt E ist die Mitte der Strecke AT. In konsequent geometrischer Terminologie würde dort *Mittelpunkt* stehen. Trifft man auf Punktbezeichnungen wie E, insbesondere aber auf die Streckenterminologie  $\overline{AT}$ , so liegt ein Verweis auf geometrische Terminologie vor. Das verweist auf eine Sprachlichkeit außerhalb von Umgangssprachlichkeit, obwohl Fachsprachlichkeit immer auch in Umgangssprache einfließen kann. Schauen wir uns das näher an:

Bei Dachbalken kann man von einer Mitte sprechen. Diese Mitte ist etwas anderes als ein mathematischer Mittelpunkt, sie ist eine *empirische Mitte*. Sie hat eine Breite, die von der Anforderung abhängt: Will man unter der Mitte eines Dachbalkens einen Stuhl positionieren, so kann diese Mitte durchaus 10 cm breit sein. Will man einen Nagel in die Mitte eines Balkens schlagen, so ist diese Mitte nur einen Millimeter breit. Bezeichnet man diese Mitte nun innerhalb der Bezeichnungsregeln für Punkte, so ist damit nicht der Dachbalken geleugnet, sondern es findet ein Modellierungsschritt statt - nämlich eine Mathematisierung. Gleiches gilt für die Streckenbezeichnungen. Das zeigt, dass dabei nicht einfach Fachsprache in die Umgangssprache fließt, sondern dass dieser Übergang auch eine gewisse (Vor-)Form von Fachlichkeit herstellt: Auch wenn dieser Punkt und diese Strecke noch empirisch gedacht werden, so liegen sie doch schon nahe an einem geometrischen Umgang mit dem Gegenstand. Das Seltsame an der Verwendung von *Mitte* statt *Mittelpunkt* bleibt damit aber bestehen: Mit der Verwendung der Punktbezeichnungen E, A und T ist der Gedanke von Punkten ja bereits dreifach eingebracht. Die Verwendung von *Mitte* wird damit nicht zu einem Verzicht auf den Terminus *Mittelpunkt*, sondern sie ist ein Schritt zurück in die Realsituation - als ob jemandem plötzlich eingefallen ist, dass man hier doch nicht einfach vom Mittelpunkt sprechen kann. Hier wird verweigert, sich klar innerhalb des Modellierungsprozesses zu verorten. Sequentiell gedacht, geht hier jemand einen Schritt in die Welt der Punkte, geht dann wieder raus und dann „vielleicht“ wieder rein. Damit liegt eine Wiederholung der bereits gezeigten Struktur der statischen Verwerfung von Realem und Modell vor. Auf eine Zueinanderführung bzw. Vermittlung zwischen Realem und Modell wird auch hier verzichtet.

Das Problem kann noch präziser gefasst werden: Es besteht das Problem, zwischen dem Realem und dem Modell zu „vermitteln“ – diesen Begriff benutzt die PISA-Gruppe (siehe Meyerhöfer 2005, Abschnitt 4.2., Stichwort Modellbildung). Diese Vermittlung soll durch die Teilprozesse mathematisieren → verarbeiten → interpretieren → validieren innerhalb des Modellierungsvorganges stattfinden. Man möchte sich bei Aufgaben nicht darauf beschränken, entweder das Reale oder das Modell vorzugeben: Würde man nur das Reale vorgeben, so würde die Aufgabe zumindest als Testaufgabe zu schwer bzw. zu aufwendig. Würde man nur das Modell vorgeben, so wäre keine Modellierungsanforderung gegeben. Man muss also bereits in der Aufgabenstellung zwischen dem Realem und dem Modell „vermitteln“. Das kann beispielsweise geschehen, indem man Teile einer Mathematisierung angibt oder Verarbeitungs- oder Interpretationshilfen einbaut. Dabei muss einerseits sowohl das Reale als auch das Mathematische (bzw. das Modell) in seiner Autonomie und Authentizität respektiert und aufgenommen werden. Andererseits soll das Reale in das Modell fließen und umgekehrt soll das Modell das Reale widerspiegeln und die mit Hilfe des Modells gewonnenen Erkenntnisse sollen auf das Reale projizierbar sein.

Das in dieser Aufgabe auftretende Phänomen ist nun nicht einfach eine Nicht-Vermittlung. Es ist der gescheiterte Versuch einer Vermittlung. Das Scheitern

besteht in einem unsystematischen und unvermittelten Ineinanderschieben der beiden Elemente, die vermittelt werden sollen - also in einer Verwerfung. Ursache ist die Nichtrespektierung und Nichtaufnahme der Autonomie und Authentizität sowohl des Realen als auch des Mathematischen.

*Jede Kante der Pyramide in der Skizze misst 12 m.*

Hier wiederholt sich die bereits rekonstruierte Struktur der für die Lösung überflüssigen bzw. redundanten Informationen, die das intuitive Vorgehen stärkt.

Manifest liegt eine Modellierungshilfe vor, wie die PISA-Gruppe sie wegen der sonst zu hohen Aufgabenschwierigkeit begründet hat. Man mag die Frage stellen, ob diese Information nicht an irgendeiner Stelle gegeben werden muss: Im Sinne der Mitteilung, dass die Seitenlänge 12 m ist, ist die Information redundant, weil die Seitenlänge in der Zeichnung verzeichnet ist. Durch die Mitteilung wird also ein weiterer Informationskanal eröffnet und damit die Bearbeitungswahrscheinlichkeit eventuell vergrößert. Gleichzeitig wird nochmals die Ernsthaftigkeit des Realproblems zerstört, denn eine Schülerin, die ein Dach skizziert, hätte keinen Grund, diesen Satz dazuzuschreiben.

Im Sinne einer Modellierung ist die Information nicht nötig, weil ein Modellierungsschritt in der Annahme der Regelmäßigkeit des Daches bestehen würde: Drei Seitenlängen sind in der Zeichnung bereits angegeben, und es liegt nicht nahe anzunehmen, dass die anderen Pyramidenkanten andere Längen haben. Wenn man etwas anderes annimmt, dann erhält man ein anderes Ergebnis. Das wäre in einer Klassenarbeit auch kein Problem, denn auch mit der eher abseitigen Modellierung eines schiefen Daches kann man arbeiten. Im vorliegenden Aufgabentext ist dieser Weg aber durch das Quadratische des Bodens verstellt.

An dieser Stelle des Textes geht es nur noch um eine Pyramide. Der Real-schnörkel ist jetzt endgültig abgelegt, wir scheinen endgültig in der Mathematik angekommen zu sein. Der Text kann sich aber auch hier nicht vollständig aus dem Empirischen in die Mathematik verabschieden, denn die Kante ist nicht 12 m lang, sie *misst*.

*1. Berechne den Flächeninhalt des Dachbodens ABCD.*

*Der Flächeninhalt des Dachbodens ABCD = \_\_\_\_\_ m<sup>2</sup>.*

Hier wiederholen sich die Struktur der Verwerfung von Modell und Realität und des Nichternstnehmens des Problems. Der Dachboden ist nur noch Attrappe. Die Verwerfung wird nochmals zugespitzt: Jetzt ist der Dachboden nicht mehr nur „in der Skizze ABCD“, jetzt *ist* der Dachboden selbst ABCD. Um Modellierung geht es aber wiederum nicht, es geht ausschließlich um Berechnung. In der Aufgabenstellung steht also eine komplex verworfene Einkleidung gegen eine triviale Rechenoperation: Zu berechnen ist lediglich  $12 \cdot 12$ .

Die weitere Reduzierung des inhaltlichen Anspruchs durch Vorgabe der Einheit stellt ebenfalls nur eine Wiederholung von bereits Vorgefundenem dar.

Die unzulässige Vermengung eines deutschen Satzes mit mathematischen Symbolen reproduziert die bereits herausgearbeitete Struktur der Zerstörung des Fachsprachlichen.

2. Berechne die Länge von  $\overline{EF}$ , einer der waagerechten Kanten des Quaders.

Die Länge von  $\overline{EF}$  = \_\_\_\_\_ m.

Hier wird nicht einmal mehr der Anschein aufrechterhalten, es ginge um etwas Reales. Auf bizarre Weise wiederholt sich die auch hier überflüssige Bezugnahme auf den Quader. Zur Wiederholung der Verwerfungsstruktur kommt auch hier die Reduzierung des Aufgabenanspruchs auf das Berechnen: An *Rechnung* ist nur die Halbierung von Zwölf zu leisten. Hier werden gar nicht Lösungswege geschwächt – denn es gibt keinen Lösungsweg, der sich im Halbieren von Zwölf erschöpfen würde. Hier werden die wesentlichen Teile des Lösungsprozesses unterlaufen. Die Formulierung *Bestimme* ist eine einfache Alternative, deren Generierung offenbar habituell nicht möglich war.

Ich beende die Interpretation an dieser Stelle, weil sie empirisch bereits gesättigt ist. Offensichtlich ist es unfruchtbar, anhand der Aufgabenstellungen einen weiteren Falsifikationsversuch für die bisher herausgearbeiteten Strukturen vorzunehmen.

## 5. Fazit

Die Aufgabe „Bauernhöfe“ wird von der PISA-Gruppe als typisches Beispiel für den *Realistic Mathematics Education*-Ansatz bezeichnet:

„Charakteristisch ist vor allem wieder, dass eine außermathematische Situation (Foto) sogleich durch eine schematische Zeichnung ergänzt wird, sodass beides, außer- und innermathematische Zusammenhänge, gleichzeitig angezeigt sind.

Das Item „Bauernhöfe 1“ fragt nach dem Flächeninhalt des Dachbodens. Dies erfordert eine rechnerische Modellierung, die auf einen einfachen Standardalgorithmus (Berechnung des Flächeninhalts eines Quadrats) führt. Mit diesen Anforderungen liegt die Aufgabe noch auf Kompetenzstufe II. „Bauernhöfe 2“ ist ebenfalls eine rechnerische Modellierungsaufgabe. Die Berechnung der Länge des Balkens EF erfordert jedoch, zusätzliche schulische Kenntnisse heranzuziehen. Solches Wissen kann - dahingestellt, ob es bewusst angewandt wird oder nicht und ob es vom Bearbeiter so benannt wird oder nicht - Kenntnis der Strahlensätze oder Kenntnisse über die Mittellinie eines Dreiecks bedeuten. Allerdings ist auch denkbar, dass man die korrekte Antwort (6 m) intuitiv abschätzt.“ (PISA 2000, S.151)

Bereits die Generierung von Lösungswegen hat gezeigt, dass die Aufgabe mehr bzw. anderes misst als die PISA-Gruppe hier darstellt. Sie misst zunächst auch andere Kompetenzen. Zusätzlich misst die Aufgabe in vielerlei Weise Testfähigkeiten wie Resistenz gegen Realitätsbehauptungen, gegen Verhöhnung („Ander-Nase-herumgeführt-werden“) und gegen verbale Umstellungen des Problems, Irritationsresistenz, Durchhaltefähigkeit.

„Ziel des PISA-Tests ist es ... zu prüfen, ob Schülerinnen und Schüler grundlegende mathematische Konzepte so verstanden haben, dass sie mit diesen Werkzeugen Problemsituationen aus unterschiedlichen Kontexten behandeln können.“ (ebd., S.143)

In der Aufgabe Bauernhöfe 1 ist der Flächeninhalt eines Quadrats in einem Kontext zu bestimmen. Von einem „grundlegenden mathematischen Konzept“ kann man hier sicher nur schwerlich sprechen, das mathematische Konzept des Quadrates wird außerdem beschädigt. Für die Aufgabe Bauernhöfe 2 bleibt unklar,

welches „grundlegende mathematische Konzept“ der Schüler hier „verstanden“ haben soll. Die Mittellinie des Dreiecks? Intuition als grundlegendes mathematisches Konzept? Messen? Strahlensatz? Auch hier würde man nicht von „grundlegenden mathematischen Konzepten“ sprechen, die der Test erfassen möchte. Der Text dementiert die Orientierung an Konzepten zusätzlich, indem er auf die Anforderung des *Berechnens* fokussiert, wobei lediglich zwölf mal zwölf und zwölf durch zwei zu rechnen ist.

Die Analyse dieser exemplarischen Aufgabe zeigt eine Reihe von Problemen:

1. Die reale Situation wird nicht ernst genommen. Sie hat keine Bedeutung für das mathematische Problem. Dies zeigt sich erstmals in der Überschrift „Bauernhöfe“. Es geht in keiner Weise um Bauernhöfe und die Überschrift verspricht eine Reichhaltigkeit, die die Aufgabe nicht liefert.

Die Aufmerksamkeit des Lesers wird auf irgendein Foto irgendeines Bauernhauses gelenkt, welches dann aber auch nicht weiter interessiert. Zusätzlich wird die manifeste Bedeutung des Hauses sofort durch die Fokussierung auf die Pyramidenförmigkeit des Daches zerstört.

Die Struktur wiederholt sich in der Zerstörung der Bedeutung des Realen durch die Konstruktion mit *Der Dachboden ... ist ein Quadrat*. Mit *Jede Kante der Pyramide ... ist das Reale* endgültig versunken und muss in den Aufgabenstellungen nur noch als Dekoration erhalten. Ein Rückbezug auf das Dach findet nicht statt, die Aufgabenstellungen haben mit dem Dach auch gar nichts zu tun.

Diese Struktur führt direkt zu einer weiteren Aussage:

2. Der Schüler wird in seiner Rolle als Problemlöser nicht ernst genommen. Der Schüler wird einerseits an der Nase herumgeführt, wenn er sich auf die Realsituation einlässt. Er wird dann vergeblich nach in der Überschrift versprochenen Inhalten suchen. Hier liegt auch ein gewisser Zynismus gegenüber jenem Schüler, welcher sich interessanten Themenstellungen ernsthaft zuwendet. Er soll sich ein angebliches Bauernhaus ansehen, ohne dass sich ein Grund dafür zeigen wird. Ihm wird erzählt, eine Schülerin - also quasi eine Kollegin - habe eine Skizze angefertigt. Es gibt aber keine Skizze, sondern eine Zeichnung, und die wurde nicht von einer Schülerin angefertigt. Der Schüler wird sprachlich auf ein Niveau zurückverwiesen, auf dem er kein mathematisches Konzept eines Quadrats hat und auf dem er nicht einmal unterscheiden könnte, ob eine Gehwegplatte ein Quadrat oder quadratisch ist. Zu guter Letzt werden ihm zwei in dieser Konstellation triviale mathematische Probleme in einer präntiösen und sprachlich verschwierigenden Verpackung präsentiert.
3. Die Aufgabe ist sprachlich unnötig verschwierigt. Dies ist nicht der realen Situation oder dem mathematischen Inhalt geschuldet. Eine Anforderung an den Schüler besteht darin, diese Verschwierigung zu überwinden, um zur - relativ dazu - einfachen mathematischen Aufgabe vorzudringen. Eine zweite Anforderung besteht darin, Irritationen durch sprachliche Regelverletzungen zu überwinden.

In jeder Kommunikationspraxis erfolgt eine gedankliche Heilung von Regelverletzungen („Das hat sie wohl so gemeint“). Sonst wäre Kommunikation gar nicht möglich.<sup>6</sup> Der ge-

---

<sup>6</sup> Dies merkt man besonders klar bei Transkriptionen von Unterrichtssituationen: Würden im Unterricht nicht ständig gedankliche Heilungen und Interpretationen passieren, würde niemand etwas verstehen. Beim ersten Lesen eines Unterrichtstranskripts findet man oft nicht heraus, was der Inhalt des Textes ist. Man muss sich dazu erst in die mündliche, immerfort Regelverletzungen heilende und halbe Sätze gedanklich vervollständigende mündliche Situation versetzen.

dankliche Heilungsaufwand ist bei schriftlichen Texten besonders hoch, weil sie in besonderer Weise dem Anspruch an Wohlgeformtheit unterliegen.<sup>7</sup> Bei schriftlichen Prüfungen ist dieser Anspruch nochmals verschärft: Je wertvoller die durch die Prüfung zu vergebende Zukunftschance, desto bedeutender wird die sprachliche Wohlgeformtheit der Aufgabenstellung (und der Lösung) - desto stärker aber auch der intellektuelle Anspruch, um mangelnde Wohlgeformtheit zu heilen. Der Prüfling kann einerseits nicht einfach sagen: Ach, „die“ werden das schon so und so gemeint haben. Er muss andererseits immer in Erwägung ziehen, dass der Umgang mit der Abweichung von sprachlicher Wohlgeformtheit zur Prüfungsanforderung gehört.

Im Text liegen mehrere sprachliche Verschwierigungen vor. Alle aufgefundenen Verschwierigungen sind unnötig. Alternativen sind leicht zu finden. Alle Verschwierigungen hängen aber mit der Konstruktion einer Modellierungsillusion zusammen.

4. Statt den Schüler im Übergang von der Realität zum mathematischen Modell zu begleiten, werden das Reale und das Mathematische in ihrer Autonomie und Authentizität nicht ernst genommen, sondern miteinander verworfen. Das deutet sich in der Struktur des Nichternstnehmens und an-der-Nase-Herumführens im Vortext an, zeigt sich dann erstmals deutlich in der verworfenen Aussage *Der Dachboden ... ist ein Quadrat*. Das Reale wird mit dem Modell gleichgesetzt, ebenso bei den Balken, die *Kanten eines Quaders sind*. Mit der überflüssigen Quadrataussage wird eine Frage beantwortet, die weder in der Realität noch im Modell steht. Gleichzeitig wird dadurch manifest ein Modellierungsgedanke konstruiert, der sich aber als nicht existent erweist. Auch eine Modellierungsanforderung besteht gar nicht mehr, nur noch die Aufgabe, den Flächeninhalt eines Quadrats zu berechnen.

Manifest wird im Aufgabentext eine Verbindung zwischen dem Dach bzw. seinen Stützbalken und dem Modell gezogen. Die dabei vermittelte Information läuft aber ins Leere, weil sie für die Problemlösung überflüssig ist. Es liegt also keine Verbindung zwischen der Realität und dem Modell als Modell für eine Problemlösung vor. Es findet kein Modellierungsvorgang statt, er wird nur behauptet.

Der durch die Klammer implizierte Satz ‚*Die Balken sind Kanten des rechtwinkligen Prismas EFGHKL MN.*‘ dementiert (wenig wohlgeformt) eine Modellierungsanforderung, verbunden mit dem äußeren Anschein einer fachlichen Präzisierung, die keine Präzisierung ist.

Im nächsten Satz und in den Aufgabenstellungen wiederholt sich die Verwerfung von Realem und Modell. Sie findet sich also in jedem Satz des mathematischen Haupttextes.

5. Das Mathematische wird in dieser Aufgabe missachtet. Im vorigen Punkt wurde bereits gezeigt, dass das Mathematische in seiner Autonomie und Authentizität gegenüber dem Realen zerstört wird. Es wurde auch bereits darauf hingewiesen, dass hier inhaltlich einfache Aufgaben stehen: Man muss den Flächeninhalt eines Quadrats bestimmen und man muss intuitiv die Länge der Mittellinie eines gleichseitigen Dreiecks bestimmen, kann hier aber auch andere, anspruchsvollere Lösungswege beschreiten. Die Einfachheit wird durch

---

Trotz der Normalität des Heilens von Regelverletzungen erfordert die Heilung intellektuellen Aufwand. (Extrembeispiel: Nur Eltern verstehen anfangs ihre Kinder. Je ferner von Sprachregeln die Kinder sprechen, desto weniger Personen sind bereit bzw. in der Lage, die „Heilungsarbeit“ auf sich zu nehmen.)

<sup>7</sup> Das wird durch das Aufkommen privater E-Mails besonders gut illustriert: Je vertrauter wir mit dieser schriftlichen Form sind, umso leichter fällt es uns, ihre mangelnde Wohlgeformtheit gedanklich zu heilen und umso größere Nichtwohlgeformtheit wagen wir. Orthographische, grammatikalische oder Ausdrucksfehler werden quasi überlesen. Diese gegenseitige vergrößerte Heilungsbereitschaft begründet den Charakter dieser Form als zwischen mündlichen und schriftlichen Texten stehend.

sprachliche Verschwierigungen, sprachliche Irritationen bzw. Verwerfungen und pseudo-motivationale Aufblähungen zuge deckt. Durch die Zerstörung der Modellierungsanforderung wird auch mathematischer Anspruch zerstört. Ein Dachboden wird als Quadrat eingeführt, damit wird der mathematische Begriff des Quadrats beschädigt, der Begriff des Mittelpunkts hingegen wird verweigert. Die Struktur zieht sich bis in den letzten Satz durch: Nicht einmal im dort sprachlich konstruierten mathematischen Raum darf die Länge mathematisch sein, sie bleibt empirisch.

6. Redundante Informationen erwachsen nicht aus der Problemstellung, sondern werden künstlich erzeugt.
7. Die Problemstellung und der Aufgabentext fördern für Aufgabe 2 den Lösungsweg über Intuition. Das Herausarbeiten solcher Präferenzen mit Hilfe der Objektiven Hermeneutik ermöglicht, verschiedene Lösungshäufigkeiten von Aufgaben zu deuten. In Meyerhöfer (2004, S. 188-190; 2005, S. 153-156) werden zum Beispiel die unterschiedlichen Lösungshäufigkeiten dreier mathematisch ähnlicher PISA-Aufgaben auf diese Weise diskutiert. Die objektiv-hermeneutischen Interpretationen gestatten dabei tiefere Einsichten in die Gründe für die erhaltenen Daten. Die entsprechenden Deutungen erweisen sich dabei als fraglich.

Beide Aufgaben gehören zur Leitidee „Raum und Form“ und werden dem Typ 1B „rechnerische Modellierung“ zugerechnet: „Zur Lösung der Aufgabe ist eine Modellierung erforderlich. Diese ist jedoch unter Rückgriff auf einen einzigen Algorithmus, eine einzige Formel möglich. Es ist also die passende Formel, das passende Verfahren, die passende Prozedur aus dem vorhandenen Wissen auszuwählen und dann anzuwenden. Das zur Modellierung erforderliche Wissen stammt aus einem einzigen mathematischen Gebiet“ (Neubrand u.a. 2001, S.52). Die Analyse hat gezeigt, dass hier keine Modellierungen vorzunehmen sind, weil jegliche Modellierungsanforderung bereits zerstört ist. Mathematisch besteht die Aufgabe darin, ebene Probleme aus einem zunächst räumlichen Problem herauszuschälen und diese ebenen Probleme dann zu lösen. Die PISA-Gruppe hat allerdings ihren Modellierungsbegriff so weit gefasst, dass sie selbst das Herausschälen eines ebenen Aspekts aus einem räumlichen Problem noch als Modellierung bezeichnen wird. Das zeigt aber nicht, dass hier modelliert werden muss, sondern dass der PISA-Modellierungsbegriff keine Trennschärfe besitzt.

Wegen der zerstörten Modellierungsanforderung gehört die Aufgabe „Bauernhöfe 1“ zum „Typ mathematischen Arbeitens“ 1A „technische Aufgaben“: „Die Aufgabe erfordert nur technische Fertigkeiten und/oder den Abruf von Faktenwissen“ (Neubrand u.a. 2001, S. 52). Die Einordnung in die internationale Competency Class „reproduction, definitions and computations“ (siehe OECD 2000, S. 47) kann bestätigt werden.

Für die Aufgabe „Bauernhöfe 2“ kann man eine Einordnung nur schwerlich vornehmen. Der intuitive Weg findet keinen Platz im Kategoriensystem der PISA-Gruppe. Der Weg des Messens und der Weg über die Mittellinie des Dreiecks kann unter 1A oder 1B eingeordnet werden, je nachdem wie weit man dem PISA-Modellierungsbegriff folgt. Der Weg über den Strahlensatz könnte dementsprechend unter 1A eingeordnet werden, wenn man dem PISA-Modellierungsbegriff folgt unter 2B. Die Einordnung in die internationale Kate-

gorie „connections and integration for problem solving“ kann nur für den Weg über den Strahlensatz bestätigt werden, diese Einordnung widerspricht aber der deutschen Einordnung unter 1B, hier deuten die nationale und die internationale PISA-Gruppe die Kategorien bzw. die Aufgabe wohl verschieden.

Die Aufgabe „Bauernhöfe 1“ wird bei einer internationalen Lösungshäufigkeit von 61 % (Deutschland 51 %) bei 492 Punkten und damit auf Kompetenzstufe II eingeordnet. Wenn man sich auf die Kompetenzstufenbeschreibung der PISA-Gruppe einlässt (zu Schwierigkeiten mit dieser Beschreibung vergleiche Meyerhöfer 2004), dann kann man dieser Einordnung nach der Analyse folgen, und zwar unabhängig von der Zuordnung zum Typ mathematischen Arbeitens. Bei „Schwierigkeits“vergleichen mit nationalen Aufgaben ist allerdings zu beachten, dass die nationalen Aufgaben nur aufgrund der nationalen Lösungshäufigkeiten in die Skala eingeordnet werden, die internationalen Aufgaben hingegen aufgrund der internationalen Werte. Diese Aufgabe würde mit ihrem nationalen Lösungswert von 51% auf Stufe III eingeordnet werden, also plötzlich „schwerer“ sein, eine weitere Illustration der problematischen Konstruktion des Kompetenzstufenmodells.

Die Aufgabe „Bauernhöfe 2“ wird bei einer internationalen Lösungshäufigkeit von 55 % (Deutschland 41 %) bei 524 Punkten und damit auf Kompetenzstufe III eingeordnet. Bereits bei Betrachtung der verschiedenen Lösungswege zeigt sich, dass diese Einordnung inhaltlich nicht gerechtfertigt werden kann, da die verschiedenen Lösungswege bereits auf verschiedene Kompetenzstufen verweisen. Die nochmalige Brechung der Kompetenzstufenzuordnung durch die sprachlichen Verwerfungen kommt hinzu.

*Konsequenz: Dass unsere Analyse die Einstufungen der PISA-Gruppe bezüglich der „Typen mathematischen Arbeitens“ und bezüglich der inhaltlichen Füllung der „Kompetenzstufen“ nicht bestätigt, verweist auf die Notwendigkeit der besonderen Beachtung dieses Problems.*

Für die Untersuchung des PISA-Tests wurden in einem kontrastierenden Verfahren weitere Aufgaben ausgewählt und interpretiert. Die sich bereits in der Aufgabe „Bauernhöfe“ andeutenden Probleme reproduzieren sich dort. Überraschend ist, dass die Zerstörungen des Mathematischen sich auch in Aufgaben zeigen, die keinen Bezug zum Realen haben, so dass nicht davon auszugehen ist, dass diese Zerstörungen erst mit den fehlgeschlagenen Vermittlungen von Mathematischem und Realem entstehen.

Es finden sich auch einige Testaufgaben, in denen keine Verwerfungen auftauchen und solche, die den Gegenstand ernst nehmen.

Insgesamt zeigt sich allerdings, dass der PISA-Mathematiktest als Instrument zur Messung mathematischer Leistungsfähigkeit nicht geeignet ist: Es bleibt unscharf, was gemessen wird und was gemessen werden soll. Es tritt ein breites Spektrum an Testfähigkeiten zutage, welche unkontrolliert in das Messergebnis einfließen. Das Problem des Ratens ist auch bei PISA ungelöst. Es hat nicht nur keine Operationalisierung eines Messkonstrukts stattgefunden, auch die statt

dessen vorgenommene Zuordnung der Testaufgaben zu Aufgabenkategorien erweist sich als nicht stimmig. Das Kompetenzstufenmodell, mit welchem (wegen des fehlenden Testkonstrukts) die Resultate interpretiert werden, erweist sich als nicht haltbar (vgl. Meyerhöfer 2004a). In den Aufgaben zeigen sich problematische Elemente eines mathematikdidaktischen Habitus: Manifeste Orientierung auf Fachsprachlichkeit und latente Zerstörung des Mathematischen, Illusion der Schülernähe als Verblendung, Kalkülorientierung statt mathematischer Bildung, Misslingen der „Vermittlung“ von Realem und Mathematischem bei realitätsnahen Aufgaben. Letzteres gründet in der Nichtbeachtung der Authentizität sowohl des Realen als auch des Mathematischen. Ich habe die genannten Habituselemente unter dem Stichwort der „Abkehr von der Sache“ zusammengefasst.

## 6. Literatur:

- Kintsch, W. (1974): The representation of meaning in memory. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.
- Kintsch, W. (1994): Kognitionspsychologische Modelle des Textverstehens: Literarische Texte. In K. Reusser, M. Reusser-Weyenet (Hrsg.), Verstehen. Psychologischer Prozeß und didaktische Aufgabe, S. 39 – 54. Bern: Verlag Hans Huber.
- Kintsch, W. & van Dijk, T.A. (1978): Toward a model of text comprehension and production. *Psychological Review*, 85, pp 363-394.
- Meyerhöfer, W. (2004): Was testen Tests? Objektiv-hermeneutische Analysen am Beispiel von TIMSS und PISA. Potsdam: Universität Potsdam. (Promotion an der Mathematisch-naturwissenschaftlichen Fakultät der Universität Potsdam)
- Meyerhöfer, W. (2005): Tests im Test. Das Beispiel PISA. Leverkusen: Barbara Budrich Verlag.
- Meyerhöfer, W. (2004a): Zum Kompetenzstufenmodell von PISA, *Journal für Mathematik-Didaktik* 3/4, auch unter [http://www.math.uni-potsdam.de/prof/o\\_didaktik/mita/me/Veroe](http://www.math.uni-potsdam.de/prof/o_didaktik/mita/me/Veroe)
- Neubrand, M.; Biehler, R.; Blum, W.; Cohors-Fresenborg, E.; Flade, L.; Knoche, N.; Lind, D.; Löding, W.; Möller, G. & Wynands, A. (Deutsche PISA-Expertengruppe Mathematik) (2001): Grundlagen der Ergänzung des internationalen PISA-Mathematik-Tests in der deutschen Zusatzerhebung. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 33 (2), S. 45-59.
- PISA 2000: Deutsches PISA-Konsortium (Hrsg.) (2001): PISA 2000. Basiskompetenzen von Schülerinnen und Schülern im internationalen Vergleich. Opladen: Leske + Budrich.
- Reusser, K. (1989): Vom Text zur Situation zur Gleichung. Kognitive Simulation von Sprachverständnis und Mathematisierung beim Lösen von Textaufgaben. Habilitationsschrift, Universität Bern. (Neudruck Zürich 1995)
- OECD (1999): Measuring student knowledge and skills. Paris: OECD.
- Van Dijk, T.A. & Kintsch, W. (1983): *Strategies of Discourse Comprehension*. N.Y.: Academic Press.