Universität Potsdam

Joachim Schmidt | Wolfgang Bechmann

Zur Anwendung des Skalarprodukts von Kraft und Weg auf reversible Prozesse (Druck-Volumen-Änderung, Dehnung, Elektrostatische Wechselwirkung, Hub)

Die Verwendung äußerer oder systemimmanenter Kräfte

Universität Potsdam

Zur Anwendung des Skalarprodukts von Kraft und Weg auf reversible Prozesse
(Druck-Volumen-Änderung, Dehnung, Elektrostatische Wechselwirkung, Hub)

Joachim Schmidt | Wolfgang Bechmann

Zur Anwendung des Skalarprodukts von Kraft und Weg auf reversible Prozesse (Druck-Volumen-Änderung, Dehnung, Elektrostatische Wechselwirkung, Hub)

Die Verwendung äußerer oder systemimmanenter Kräfte

Universität Potsdam

Universität Potsdam 2014

Online veröffentlicht auf dem
Publikationsserver der Universität Potsdam:
URL http://opus.kobv.de/ubp/volltexte/2014/6973/
URN urn:nbn:de:kobv:517-opus-69732
http://nbn-resolving.de/urn:nbn:de:kobv:517-opus-69732

Zur Anwendung des Skalarprodukts von Kraft und Weg auf reversible Prozesse (Druck-Volumen-Änderung, Dehnung, Elektrostatische Wechselwirkung, Hub).
Die Verwendung äußerer oder systemimmanenter Kräfte

Joachim Schmidt*; Wolfgang Bechmann**
Author Affiliation
*Am Havelblick 2 D-14473 Potsdam, Germany
email: joachim.schmidt57@freenet.de, corresponding author
** Parkstraße 5 D-14469 Potsdam, Germany
email: Wolfgang.Bechmann@kabelmail.de

ABSTRACT
We propose a general algorithm for coming to the right sign in the equations for work and potential energy of reversible processes (pressure-volume-change, stretching, electrostatic interaction, raising) in employment the scalar product of force and displacement. We show that it is possible to use system immanent or external forces. We also show that in the case of using the system immanent force it is necessary to give the scalar product a negative sign. And it is very important to pay attention to all changes of the sign in the separate steps.
We emphasize this because sometimes it is not taken into account that when replacing the path-differential d*s* by the high-differential dh or by the distance-differentials d*r* and d*x* it is necessary to change the sign.

KEYWORDS
Scalar product of force and displacement, reversible processes, system immanent force, pressure-volume work, electrostatic work, law of Coulomb, stretching work, low of Hook, raising work, Newtons low of gravitation, potential energy, gravitational energy, Hawking.

Einführung
Es ist offensichtlich, dass unsere Kenntnis über die Natur und die in ihr herrschenden Gesetzmäßigkeiten auch gegenwärtig stark zunimmt. Neue Wissensgebiete in Physik, Chemie und Biologie werden erschlossen. Dies führt zwangsläufig dazu, dass altes weniger gebrauchtes Wissen in den Hintergrund tritt. Begriffe und ihre Definitionen, die das Fundament der Naturwissenschaften bilden, werden jedoch an ihrer herausragenden Bedeutung für Lehre und Forschung nichts einbüßen.
Dazu zählen wir die Zustandsgrößen Temperatur, Druck, Innere Energie, Enthalpie, Entropie usw., die wir brauchen, um den Zustand eines Systems, seine Veränderungen und gesetzmäßige Zusammenhänge zu beschreiben [1]. Und dazu gehören die Prozessgrößen Arbeit und Wärme, die wir unter anderem verwenden, um spezifische Gleichungen abzuleiten, welche die Abhängigkeit der Arbeit oder der potentiellen Energie eines Systems von inneren und äußeren Einflüssen beschreiben. Diese Ableitungen variieren in der Literatur und enthalten mitunter Fehler. Ein einheitliches korrektes Vorgehen ist wünschenswert. Deshalb

schlagen wir in unserem Beitrag einen allgemeingültigen Algorithmus vor, der ausgehend vom Skalarprodukt aus Kraft und Weg für unterschiedliche Prozesse (Volumenänderung durch Druck, Spannen einer Feder, elektrostatische Wechselwirkung, Hub einer Masse) zum richtigen Vorzeichen für die Arbeit und die potentielle Energie in den damit verbundenen mathematischen Beziehungen führt. Wir bitten um Nachsicht, dass wir dabei auf Lehrbuchwissen nicht verzichten können. Dies geschieht, um die logische Gedankenführung zu verdeutlichen.

Basis des vorgeschlagenen Algorithmus

Wir gehen von folgenden grundlegenden Voraussetzungen aus:

1. Die Arbeit kann in der Physik, speziell für mechanische Prozesse, durch das Skalarprodukt von Kraft und Weg (Verschiebung) definiert werden (Gleichung (1)):

$$\delta w = F_{\text{ext}} \cdot \mathrm{d}s \cdot \cos \alpha \quad . \qquad (1)$$

In dieser Gleichung ist δw eine infinitesimal kleine Arbeitsmenge. F_{ext} ist der Betrag der Kraft, welche von außen auf einen Körper einwirkt; ds ist der Weg (Betrag der Verschiebung), den ein Massepunkt infolge der einwirkenden Kraft zurücklegt und α ist der Winkel zwischen den Vektoren Kraft und Verschiebung.

2. Es ist sinnvoll, die physikalischen oder physikalisch-chemischen Eigenschaften in einem willkürlich räumlich abgegrenzten Bereich der realen Welt zu untersuchen, welchen man als System bezeichnet. Außerhalb des Systems liegt die Umgebung.
In geschlossenen Systemen, die unseren Betrachtungen zugrunde liegen, ist Energieaustausch, aber kein Stoffaustausch mit der Umgebung möglich.

3. In der Physik und Physikalischen Chemie gilt die Konvention: Von der Umgebung am System verrichtete Arbeit bzw. dem System zugeführte Energie wird positiv gewertet, die vom System an der Umgebung verrichtete Arbeit bzw. der Umgebung vom System zugeführte Energie hat ein negatives Vorzeichen. Bezüglich des Zugewinns bzw. des Verlustes betrachtet man die Änderung vom Standpunkt des Systems aus.
Daraus folgt, dass zwischen Arbeit und potentieller Energie des Systems gilt: $w = + \Delta E_{\text{pot.}}$

4. Wir nehmen reversible Prozessführung an. Das heißt, die von außen auf das System wirkenden Kräfte F_{ext} und die diesen entgegenwirkenden systemimmanenten (inneren) Kräfte F_{i} sind nahezu gleich groß. Eine infinitesimal kleine Änderung des Verhältnisses von äußerer und systemimmanenter Kraft führt zu einer Umkehr des Prozesses. Zur Berechnung von Arbeit und Energieänderung können sowohl die äußeren Kräfte als auch die systemimmanenten Kräfte herangezogen werden. Die Ergebnisse müssen sich bei reversibler Prozessführung gleichen.

5. Um der Vorzeichenkonvention bezüglich des Energieaustauschs zwischen System und Umgebung Rechnung zu tragen (siehe 3.) muss bei Verwendung von systemimmanenten Kräften das Skalarprodukt von Kraft und Weg ein negatives Vorzeichen erhalten. Es muss also gelten:

$$\delta w = - F_i \cdot ds \cdot cos\,\alpha \quad . \tag{2}$$

Wir haben mehr als 50 Lehrbücher der Physik und der Physikalischen Chemie, die relevanten Artikel im Repositorium arXiv und die Einträge bei Wikipedia geprüft und in keiner Quelle einen Verweis auf das negative Vorzeichen des Skalarprodukts bei Verwendung systemimmanenter Kräfte gefunden. Unsere diesbezügliche Feststellung scheint also neu zu sein und rechtfertigt unseres Erachtens für sich allein unsere Veröffentlichung. Dazu kommt, dass in der Literatur oft ein notwendiger Vorzeichenwechsel bei Ersatz des Weges *s* durch einen Abstandsparameter (z.B. Höhe *h* oder Abstand *r*) nicht erfolgt. Da sich die Vorzeichenfehler im Skalarprodukt und beim Ersatz des Weges durch einen Abstandsparameter kompensieren können, kommt man im Ergebnis zum richtigen Vorzeichen. Hierin liegt offensichtlich der Grund dafür, dass die Unkorrektheiten leicht zu übersehen sind.
Wir werden nun für die eingangs erwähnten Prozesse, ausgehend vom Skalarprodukt und unter Beachtung der erläuterten Voraussetzungen, die bekannten Gleichungen für die Volumenarbeit, elektrostatische Arbeit, Spannarbeit und Hubarbeit sowie die daraus resultierenden potentiellen Energien ableiten und dabei notwendige Vorzeichenwechsel begründen.

Volumenänderung durch Druck, Volumenarbeit

Kompression eines Gases.
Volumenarbeit wird verrichtet, wenn sich das Volumen eines Systems (meist eines Gases) unter Druckeinfluss verändert. Der Betrag der Arbeit ist verständlicherweise umso größer, je höher der Druck und je größer die Volumenänderung sind. Die Gleichung (3) beschreibt die Größe der reversiblen Volumenarbeit:

$$\delta w = - p \cdot dv \quad . \tag{3}$$

Das negative Vorzeichen entspricht der Konvention, dass am System von der Umgebung verrichtete Arbeit positiv gewertet wird. Bei Expansion verrichtet das System an der Umgebung Volumenarbeit und verliert Energie (d*w* ist negativ); bei Kompression ist d*v* negativ und kompensiert das negative Vorzeichen vor dem rechten Term (d*w* ist positiv).
Die Volumenarbeit spielt eine wichtige Rolle in der Thermodynamik. So unterscheiden sich bekanntlich die Änderung der Inneren Energie d*U* (zwischen System und Umgebung ausgetauschte Wärme bei konstantem Volumen) und die Änderung der Enthalpie d*H* (ausgetauschte Wärme bei konstantem Druck) um die Volumenarbeit:

$$dH = dU + p\,dv \quad . \tag{4}$$

Das Symbol für den Druck in den Gleichungen (3) und (4) hat keinen Index. Es kann sowohl den systemimmanenten Druck (meist den Gasdruck) als auch den Außendruck repräsentieren. Das bedeutet, diese Gleichungen beschreiben reversible Prozesse, bei denen der Außendruck p_{ext} und der systemimmanente Druck p_i nahezu gleich sind. Man sollte sich bewusst machen: Immer wenn man in der Thermodynamik – wie in der Gleichung für ideale

Gase $p \cdot v = n \cdot R \cdot T$ - ohne Indizierung auskommt, beschreiben die Gleichungen entweder einen Gleichgewichtszustand oder reversible Prozesse. Wir wollen nun die Gleichung (3) aus dem Skalarprodukt von Kraft und Weg systematisch ableiten und dabei den Algorithmus der Ableitung verdeutlichen und nötige Vorzeichenwechsel begründen. Als zu beschreibenden Prozess wählen wir die Kompression eines Gases in einem sogenannten Thermodynamischen Zylinder, der bei der Höhe h_1 mit einem massefreien und reibungslos beweglichen Kolben verschlossen ist (Fig.1). Auf den Kolben wirkt der äußere Druck p_{ext}. Ihm entgegen wirkt der infinitesimal geringere Gasdruck p_i. Wenn wir den Kolben nicht arretieren, wird er das Gas komprimieren.

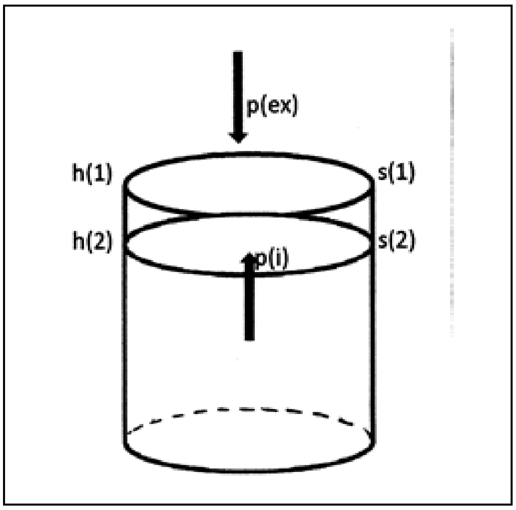

Fig.1: Kompression eines Gases im Thermodynamischen Zylinder, $\Delta s > 0$, $\Delta h < 0$

Die Ableitung soll einmal unter Verwendung der äußeren Kraft F_{ext} (Fall A) und zum anderen unter Verwendung der systemimmanenten Kraft F_i (Fall B) erfolgen. F_i wird durch den Aufprall der Gasmoleküle auf die Gefäßwände hervorgerufen. In der Literatur wird die Gleichung (3) in der Regel nicht für eine Kompression, sondern für eine Expansion abgeleitet und *p* ist der zu überwindende Außendruck. Wir haben die Kompression gewählt, denn es kommt uns darauf an zu zeigen, dass - wie oben behauptet – bei Verwendung der systemimmanenten Kräfte vom Skalarprodukt mit negativem Vorzeichen ausgegangen werden muss, und beim Übergang vom Wegparameter *s* zur Höhe des Zylinders *h* ein Vorzeichenwechsel nötig ist.

<u>Fall A) Ableitung von Gleichung (3), Verwendung der äußeren Kraft $F_{ext.}$</u>

- Weil wir die Gleichung (3) zunächst unter Verwendung der äußeren auf den Kolben wirkenden Kraft ableiten, müssen wir von Gleichung (1), dem Skalarprodukt mit positivem Vorzeichen, ausgehen:

$$\delta w = F_{ext} \cdot ds \cdot \cos \alpha \quad .$$

- Bei einer Kompression zeigen Kraft- und Wegvektor in die gleiche Richtung. Der Winkel α beträgt 0 Grad, $\cos \alpha$ ist 1:

$$\delta w = F_{ext} \cdot ds \;\; .$$

- Beim Fortschreiten auf dem Weg ($ds > 0$) verringert sich die Höhe des Gasvolumens ($dh < 0$), das bedeutet, wenn wir ds durch dh ersetzen wollen, muss das Vorzeichen wechseln:

$$\delta w = - F_{ext} \cdot dh \;\; .$$

- Wir erweitern die Gleichung mit der Fläche des Kolbens A:

$$\delta w = - F_{ext} \cdot dh \cdot \frac{A}{A} \;\; .$$

- Der Quotient F_{ext}/A ist gleich dem Außendruck p_{ext}. Das Produkt $dh \cdot A$ ist gleich der Volumenänderung dv. Durch Einsetzen ergibt sich:

$$\delta w = - p_{ext} \cdot dv \;\; .$$

Dies entspricht bis auf den Index von p der Gleichung (3).

Fall B) Ableitung von Gleichung (3). Verwendung der systemimmanenten Kraft F_i.

- Bei Verwendung der systemimmanenten Kraft müssen wir vom Skalarprodukt mit negativem Vorzeichen Gleichung (2) ausgehen:

$$\delta w = - F_i \cdot ds \cdot \cos \alpha \;\; .$$

- Die Vektoren Weg und Kraft haben in diesem Falle entgegengesetzte Richtung. Der Winkel α beträgt 180 Grad, und $\cos \alpha$ ist gleich -1. Damit wird das Vorzeichen der Arbeitsgleichung positiv

$$\delta w = F_i \cdot ds \;\; .$$

- Beim Ersatz des Weges ds durch die Höhenänderung dh muss wieder das Vorzeichen gewechselt werden:

$$\delta w = - F_i \cdot dh \;\; .$$

- Durch Erweitern mit der Kolbenfläche A und Einführung des Gasdruckes p_i sowie der Volumenänderung dv ergibt sich analog zur Ableitung A) die Gleichung :

$$\delta w = - p_i \cdot dv \;\; .$$

Die Ergebnisse der Ableitungen A) und B) unterscheiden sich nur durch den Index des Druckes. Da der Druck kein Vektor ist (Druck und Gegendruck haben das gleiche Vorzeichen), sowie p_{ext} und p_i bei reversibler Prozessführung nahezu gleich sind, kann letztlich auf den Druckindex verzichtet werden, und wir erhalten die angestrebte Gleichung (3).
Wie bereits oben erwähnt, führen wir dem System bei Kompression Arbeit zu. Man kann die Kompression adiabatisch oder isotherm gestalten. Bei adiabatischer Prozessführung wird sich die Temperatur und damit die Innere Energie des Systems erhöhen.
Bemerkenswert ist, dass in der Thermodynamik der Terminus „Potentielle Energie“ selten verwendet wird, obwohl das Produkt $p \cdot v$ die Dimension einer Energie hat und in ihm das Potential zur Volumenarbeit steckt.
Bei isothermer Prozessführung wird die am System verrichtete Arbeit als Wärme wieder an die Umgebung abgegeben, und bei konstanter Stoffmenge bleibt die Innere Energie konstant und das Potential zur Volumenarbeit unverändert.

In der Figur (1) haben wir zur besseren Verdeutlichung eine merkliche Volumenänderung dargestellt. Diese kann durch Integration der Gleichung (3) berechnet werden. Ist es möglich, den systemimmanenten Druck konstant zu halten, zum Beispiel bei der Kompression durch Verringerung der gasförmigen Stoffmenge n_g infolge von Kondensation oder durch chemische Reaktion, so ist die Kompression wegen $p \cdot \Delta v = \Delta n_g \cdot R \cdot T$ bei konstantem Druck und konstanter Temperatur möglich, und die Integration gestaltet sich besonders einfach:

$$w = -\int_{v(1)}^{v(2)} p\,dv = -p \int_{v(1)}^{v(2)} dv = -p \cdot \Delta v. \qquad (5)$$

Ist der Druck nicht konstant, sondern veränderlich, muss der Zusammenhang zwischen p und v experimentell bestimmt werden, damit p in Gleichung (3) durch eine Potenzreihe von v ersetzt werden kann.
Einfach gestaltet sich bekanntlich auch die Integration bei veränderlichem Druck aber konstanter Stoffmenge und konstanter Temperatur, wenn das System näherungsweise als ideales Gas betrachtet werden kann. Dann ergibt sich:

$$w = -\int_{v(1)}^{v(2)} p\,dv = -nRT \int_{v(1)}^{v(2)} dv/v = -nRT \cdot (\ln v_{(2)} - \ln v_{(1)}). \qquad (6)$$

Nun möchten wir zeigen, dass der Algorithmus, den wir bei der Ableitung der Gleichung (3) für die Volumenarbeit angewandt haben, auch bei anderen reversiblen Prozessen zum richtigen Vorzeichen der Abhängigkeit der potentiellen Energie des Systems von den Abstandsparametern (Abstand r, Auslenkung x, Höhe h) führt.

Elektrostatische Wechselwirkung

Die Elektrostatische Wechselwirkung zweier geladener Teilchen wird durch das Coulombsche Gesetz beschrieben:

$$F_i = +\frac{a \cdot Q_1 \cdot Q_2}{r^2} \quad . \qquad (7)$$

Die beiden geladenen Teilchen betrachten wir als das System und verzichten auf das Modell eines Vektorfeldes. F_i ist der Betrag der systemimmanenten Kraft, mit der sich die beiden Teilchen abstoßen oder anziehen. Q_1 und Q_2 sind die Beträge der Ladungen. Wir interpretieren die Gleichung als eine Beziehung zwischen den Beträgen der Ladungen und dem Betrag der Kraft und verwenden deshalb ein positives Vorzeichen.
Wir wollen nun die Gleichung ableiten, welche die Abhängigkeit der Potentiellen Energie des Systems vom Abstand der geladenen Teilchen beschreibt. Dazu berechnen wir die Arbeit, welche dem System von außen zugeführt werden muss, um zwei positive Ladungen einander zu nähern. Wir verwenden zur Ableitung die systemimmanente Kraft F_i.

Annäherung gleichsinniger Ladungen. Berechnung der Potentiellen Energie unter Verwendung der systemimmanenten Kraft F_i.

- Wegen der Verwendung von F_i gehen wir vom Skalarprodukt mit negativem Vorzeichen aus:

$$\delta w = - F_i \cdot ds \cdot \cos \alpha \quad .$$

- Bei gleichsinnigen Ladungen ist F_i eine abstoßende Kraft. Bei abstoßender Kraft und Annäherung sind die Vektoren Kraft und Weg einander entgegen gerichtet. Der Winkel α zwischen den Vektoren beträgt 180 Grad und cos α ist gleich -1. Daraus folgt

$$\delta w = + F_i \cdot ds \quad .$$

- Nach Einsetzen der Coulombschen Gleichung ergibt sich

$$\delta w = +\frac{a \cdot Q_1 \cdot Q_2}{r^2} \cdot ds \quad .$$

- Um die Gleichung integrieren zu können, müssen wir s durch r ersetzen. Weil bei Annäherung der Ladungen sich der Abstand r verringert, haben wir ds durch -dr zu ersetzen:

$$\delta w = -\frac{a \cdot Q_1 \cdot Q_2}{r^2} \cdot dr \quad .$$

- Wir können nun die Gleichung innerhalb der Grenzen r_2 und r_1 integrieren und erhalten, wenn wir gleichzeitig berücksichtigen, dass die zugeführte Arbeit w mit einer Erhöhung der Potentiellen Energie einhergeht:

$$w = \Delta E_{pot} = +\, a \cdot Q_1 \cdot Q_2 \cdot \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right) \quad . \qquad (8)$$

Bei Annäherung ist $r_2 < r_1$, und die Differenz in der Klammer ist positiv. Die Gleichung spiegelt also richtig wider, dass bei Annäherung gleichsinniger Ladungen die Potentielle Energie des Systems zunimmt.

Aus der Gleichung (8) folgt auch, dass die geladenen Teilchen für $r = \infty$ die potentielle Energie Null haben. Dies ist also nicht, wie häufig zu lesen ist, z.B. in [2, Seite 4,] eine willkürliche Festlegung. Aus Gleichung (8) folgt auch, dass die Potentielle Energie gleichsinnig geladener Teilchen beim Abstand *r* positiv ausfällt.

Hätten wir den obigen Algorithmus für entgegengesetzt geladene Teilchen ausgeführt, so hätten wir als Ergebnis eine zu (8) entsprechende Gleichung aber mit negativem Vorzeichen erhalten. Beim Einsetzen der Ladungsbeträge in diese Gleichung hätten wir richtigerweise für die Annäherung der Ladungen eine Abnahme der Potentiellen Energie und eine negative potentielle Energie für den Abstand *r* berechnet.

Spannen einer Feder

Wir betrachten die Feder als System und wollen die Gleichung für die potentielle Energie einer gespannten Feder berechnen.

- Die Kraft, die dem Spannen einer Feder entgegen wirkt, wird durch das Hooksche Gesetz beschrieben Gleichung (9).

  $$F_i = k \cdot x \qquad (9)$$

  In dieser Gleichung ist F_i der Betrag der systemimmanenten Kraft. Bei nicht zu großer Spannung steigt der Betrag entsprechend der Gleichung (9) proportional zur Auslenkung x in Bezug auf die entspannte Feder $x = 0$. Da F_i und x keine Vektoren, sondern deren Beträge sind, halten wir ein in der Literatur , beispielsweise in [2, Seite 375], häufig anzutreffendes negatives Vorzeichen der rechten Seite von Gleichung (9) für falsch.

- Wir gehen vom Skalarprodukt aus Kraft und Weg unter Verwendung der systemimmanenten Kraft F_i aus

  $$\delta w = -\, F_i \cdot ds \cdot cos\,\alpha \quad .$$

- Beim Spannen der Feder sind die Vektoren von Kraft und Weg einander entgegen gerichtet. Mit α = 180 Grad und cos α = -1 wird das Skalarprodukt zu:

  $$\delta w = +\, F_i \cdot ds \quad .$$

- Einsetzen der Gleichung (9) ergibt

$$\delta w = +k \cdot x \cdot \mathrm{d}s \ .$$

- Der Weg d*s* kann durch die differentielle Auslenkung d*x* ersetzt werden, denn beide sind gleich gerichtet. Berücksichtigen wir die Gleichheit von *w* und $\Delta E_{pot,}$ so folgt:

$$\mathrm{d}E_{\mathrm{pot}} = \delta w = +k \cdot \mathrm{x} \cdot \mathrm{d}x \ .$$

Die Integration in den Grenzen $E_{\mathrm{pot},0}$ und $E_{\mathrm{pot,x}}$ beziehungsweise $x = 0$ und $x = x$ ergibt:

$$E_{\mathrm{pot.}} = \frac{k \cdot x^2}{2} \ .$$

Diese Gleichung beschreibt korrekt die Abhängigkeit der Potentiellen Energie einer gespannten Feder von der Auslenkung *x*.

Hub einer Masse, Gravitation

Wir wollen die Arbeit berechnen, um einen Körper anzuheben. Die Erde mit der Masse m_{E} und den Körper mit der Masse *m* betrachten wir als ein System.

- Die Hubarbeit können wir mit der Gravitationskraft berechnen. Den Betrag der Gravitationskraft F_{i} in Abhängigkeit von den Massen gibt das Newtonsche Gravitationsgesetz Gleichung (10) wieder.

$$Fi = \frac{G \cdot m_E \cdot m}{r^2} \tag{10}$$

- Weil wir die Gravitationskraft als systemimmanente Kraft interpretieren, gehen wir vom Skalarprodukt mit negativem Vorzeichen aus:

$$\delta w = - F_i \cdot \mathrm{d}s \cdot \cos \alpha \ .$$

- Kraft und Weg (Verschiebung) haben beim Hub die entgegengesetzte Richtung; cos α ist gleich -1. Es folgt:

$$\delta w = F_i \cdot \mathrm{d}s \ .$$

- Der Hub d*s* kann ohne Vorzeichenwechsel durch d*r* ersetzt werden, da sich beim Heben der Wegparameter *s* und der Abstandsparameter *r* gleichsinnig ändern. Damit erhält man:

$$\delta w = F_i \cdot \mathrm{d}r \ .$$

Das positive Vorzeichen entspricht der Vereinbarung. Wenn wir einen Körper gegen die Gravitationskraft anheben, verrichten wir am System Arbeit.
Um die potenzielle Energie zu berechnen, integrieren wir in den Grenzen von E_{pot1} und E_{pot2} bzw. r_1 und r_2:

$$\int_{Epot,1}^{Epot,2} dE_{pot} = \int_{r1}^{r2} \frac{G \cdot m \cdot m_E}{r^2} \cdot \mathrm{d}r$$

$$\Delta E_{pot} = -\, G \cdot m_1 \cdot m_E \cdot \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right) \ . \qquad (11)$$

Aus Gleichung (11) folgt beim Hub der erwartete Anstieg der potenziellen Energie, denn beim Anheben ist $r_2 > r$. Der Klammerausdruck ist negativ und kompensiert das negative Vorzeichen der rechten Seite.
Hätten wir das Skalarprodukt fälschlicherweise mit + angesetzt, hätten wir bezüglich des Vorzeichens der Gleichung (11) ein falsches Ergebnis erhalten.
Interessant ist auch die Berechnung der potenziellen Energie (der Gravitationsenergie), wenn wir zwei Massen, z. B. zwei Himmelskörper unendlich weit voneinander entfernen.
Wir integrieren dann in den Grenzen und r_∞ und r

$$\int_{Epot,r}^{Epot,\infty} dE_{pot} = \int_{r}^{r\infty} \frac{G \cdot m1 \cdot m2}{r^2} \cdot \mathrm{d}r$$

Das ergibt nach Ausführen der Integration:

$$E_{pot,\infty} - E_{pot,r} = -\, G \cdot m_1 \cdot m_2 \cdot \left(\frac{1}{r_\infty} - \frac{1}{r} \right) \ .$$

Da $1/r_\infty$ gleich 0 ist, ergibt sich $E_{\mathrm{pot},\infty} = 0$ und

$$E_{pot,r} = -\frac{G \cdot m_1 \cdot m_2}{r} \ . \qquad (12)$$

Das bedeutet, die Gravitationsenergie zweier Himmelskörper im Abstand *r* ist negativ. Wenn man dies ohne Rücksicht auf die allgemeine Relativitätstheorie auf den Kosmos überträgt, ergibt sich die Aussage: Die Gravitationsenergie des Kosmos ist negativ.
Das entspricht den Ausführungen von Stephen Hawking und Leonard Mlodinow in „Der große Entwurf“ [3, Seite 176] :

> *„ Wenn die Gesamtenergie des Universums immer null bleiben muss und es Energie kostet, einen Körper zu erschaffen, wie kann dann ein ganzes Universum aus dem*

Nichts hervorgebracht werden? Hier liegt der Grund, warum es eine Naturkraft wie die Gravitation geben muss. Da die Gravitation anziehend wirkt, ist Gravitationsenergie negativ: Wir müssen Arbeit leisten, um ein gravitativ gebundenes System wie die Erde und den Mond zu trennen. Diese negative Energie kann die zur Erzeugung von Materie erforderliche positive Energie aufwiegen….."

Der Feststellung der Autoren, dass die Gravitationsenergie negativ ist, stimmen wir zu, doch die Begründung der Autoren, dass sie negativ ist, weil die Gravitationskraft anziehend wirkt, können wir nicht nachvollziehen. Warum sie negativ ist, haben wir oben abgeleitet.
Wenn wir das Skalarprodukt mit einem positiven Vorzeichen angesetzt hätten, wären wir in Anwendung des Algorithmus zu einer positiven Gravitationsenergie gekommen. Auch dieser Fall (Hub) bestätigt, dass bei Verwendung systemimmanenter Kräfte das Skalarprodukt von Kraft und Weg mit einem negativen Vorzeichen angesetzt werden muss.

Zusammenfassung

Beim Ableiten von Gleichungen, die bei reversiblen Prozessen der Berechnung der Arbeit und der potentiellen Energie der Systeme dienen, sollte man folgenden Algorithmus einhalten:

1. Man entscheidet, ob man die Berechnung mit einer äußeren Kraft oder mit der systemimmanenten Kraft durchführen will.
2. Man startet mit dem Skalarprodukt von Kraft und Weg (Verschiebung). Wenn man sich für die Berechnung mit der systemimmanenten Kraft entschieden hat, ist das Skalarprodukt mit negativem Vorzeichen anzusetzen.
3. Man prüft, ob die Vektoren Kraft und Weg (Verschiebung) gleich oder einander entgegen gerichtet sind. Im ersten Fall ist $\cos \alpha = 1$. Im zweiten Fall ist $\cos \alpha = -1$.
4. Man prüft, ob die Verschiebung *s* und der Abstandsparameter (*h* oder *r* oder x) gleich oder einander entgegen gerichtet sind und ersetzt das Differential des Wegparameters durch das Differential des Abstandsparameters. Dabei wird ein gegebenenfalls notwendiger Vorzeichenwechsel berücksichtigt.

Wenn man diesen Algorithmus konsequent einhält, wird man stets ein Ergebnis mit richtigem Vorzeichen erhalten und damit den in der Literatur noch häufig anzutreffenden Wirrwarr vermeiden.

Literatur

[1] Bechmann, Wolfgang; Schmidt, Joachim: Einstieg in die Physikalische Chemie für Nebenfächler; Vieweg + Teubner – Verlag: Wiesbaden 4. Auflage 2010

[2] Atkins, Peter W. : Physikalische Chemie; (aus dem Englischen von Anna Schleitzer und Michael Bär) Wiley-VCH: Weinheim, New York, Chichester, Brisbane, Singapore, Toronto 3. Auflage

[3] Hawking, Stephan; Mlodinow, Leonard: Der große Entwurf (aus dem Englischen von Hainer Kober); Rowohlt Taschenbuch Verlag: Reinbek bei Hamburg 2010