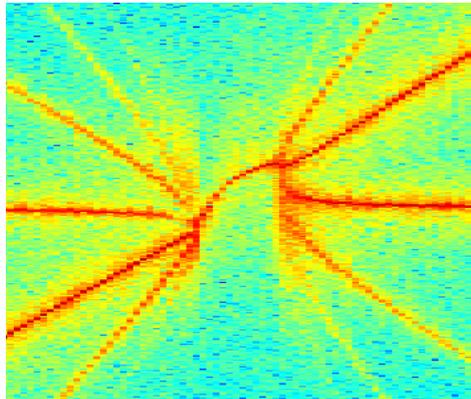




Institut für Physik und Astronomie der Universität Potsdam

Arbeitsgruppe: Statistische Physik und Chaostheorie

# Über Synchronisationsphänomene nichtlinearer akustischer Oszillatoren



Diplomarbeit  
von

Jost Fischer

Matrikel-Nummer: 130742  
jost.fischer@uni-potsdam.de

vorgelegt am 23. Juli 2012

Betreuer und Erstgutachter: Prof. Dr. Markus Abel  
Zweitgutachter: Prof. Dr. Michael Rosenblum

Dieses Werk ist unter einem Creative Commons Lizenzvertrag lizenziert:  
Namensnennung - Keine kommerzielle Nutzung - Weitergabe unter gleichen Bedingungen 3.0  
Deutschland

Um die Bedingungen der Lizenz einzusehen, folgen Sie bitte dem Hyperlink:

<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/de/>

Online veröffentlicht auf dem  
Publikationsserver der Universität Potsdam:  
URL <http://opus.kobv.de/ubp/volltexte/2013/6361/>  
URN [urn:nbn:de:kobv:517-opus-63618](http://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:kobv:517-opus-63618)  
<http://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:kobv:517-opus-63618>

Jost Fischer  
Hans-Sachs-Str. 13  
14471 Potsdam

Hiermit versichere ich, dass ich die von mir vorgelegte Arbeit selbstständig verfasst habe, dass ich die verwendeten Quellen, Internet-Quellen und Hilfsmittel vollständig angegeben habe und dass ich die Stellen der Arbeit – einschließlich Tabellen, Karten und Abbildungen –, die anderen Werken oder dem Internet im Wortlaut oder dem Sinn nach entnommen sind, auf jeden Fall unter Angabe der Quelle als Entlehnung kenntlich gemacht habe.

Potsdam, den 23. Juli 2012

---

Jost Fischer



*meinen Töchtern Helena und Marika*



# Kurzfassung

## deutsch

In dieser Arbeit werden die Effekte der Synchronisation nichtlinearer, akustischer Oszillatoren am Beispiel zweier Orgelpfeifen untersucht. Aus vorhandenen, experimentellen Messdaten werden die typischen Merkmale der Synchronisation extrahiert und dargestellt. Es folgt eine detaillierte Analyse der Übergangsbereiche in das Synchronisationsplateau, der Phänomene während der Synchronisation, als auch das Austreten aus der Synchronisationsregion beider Orgelpfeifen, bei verschiedenen Kopplungsstärken. Die experimentellen Befunde werfen Fragestellungen nach der Kopplungsfunktion auf. Dazu wird die Tonentstehung in einer Orgelpfeife untersucht. Mit Hilfe von numerischen Simulationen der Tonentstehung wird der Frage nachgegangen, welche fluiddynamischen und aero-akustischen Ursachen die Tonentstehung in der Orgelpfeife hat und inwiefern sich die Mechanismen auf das Modell eines selbsterregten akustischen Oszillators abbilden lässt. Mit der Methode des Coarse Graining wird ein Modellansatz formuliert.

## english

In this study, synchronization properties observed in a system of nonlinear acoustic oscillators in form of two coupled organ pipes are investigated. From given measurements we extract the effects of synchronization one would expect typically. Furthermore we set our focus to the domains of transition into the synchronization region, when the system is complete synchronized and when it tears off, under the condition of different coupling strengths. We analyse and discuss the observed phenomena concerning their nonlinearities. Using numerical, fluiddynamimic and aero-acoustic simulation techniques we investigate how an organ pipe can be understand as a self-sustained, acoustic oscillator. With the results of the numerical simulations we show, how to reduce the complex fluiddynamical interplay with the acoustic field inside the pipe to a self-sustained acoustic oscillator. For this process we use the coarse graining method.



# Inhaltsverzeichnis

<b>Abbildungsverzeichnis</b>	<b>ix</b>
<b>Tabellenverzeichnis</b>	<b>xi</b>
<b>1. Einführung</b>	<b>1</b>
1.1. Eine thematische Einstimmung . . . . .	1
1.2. Motivation und Zielsetzung . . . . .	2
1.3. Aufbau und Kapitelübersicht . . . . .	4
<b>2. Grundlagen</b>	<b>5</b>
2.1. Theorie der Synchronisation . . . . .	6
2.1.1. Grundbegriffe . . . . .	7
2.1.2. Synchronisation . . . . .	12
2.1.3. Verkürzte Gleichungen für die Phasendifferenz und die Amplitude . . . . .	19
2.1.4. Gegenseitige Synchronisation zweier van der Pol Systeme . . . . .	23
2.2. Fluiddynamische Grundlagen . . . . .	25
2.2.1. Erhaltungsgleichungen . . . . .	25
2.2.2. Die Navier-Stokes-Gleichungen . . . . .	28
2.2.3. Die akustische Wellengleichung . . . . .	29
2.2.4. Akustischer Monopol, Dipol und Quadrupol . . . . .	33
2.3. Akustische Grundlagen . . . . .	35
<b>3. Daten und Resultate</b>	<b>39</b>
3.1. Messaufbau und Experiment . . . . .	39
3.2. Audio-Daten und Schalldruckpegelspektren . . . . .	40
3.3. Schalldruckpegelspektren im Bereich der 1. Harmonischen . . . . .	41
3.4. Frequenzen und Schalldruck . . . . .	43
3.5. Synchronisationsplateaus . . . . .	45
3.6. Arnoldzunge und Kopplungsfunktion . . . . .	47
3.7. Diskussion . . . . .	48
3.8. Modellierung . . . . .	50
3.8.1. Coarse Graining . . . . .	51
3.8.2. Theoretische Betrachtungen . . . . .	52
<b>4. Simulationen</b>	<b>55</b>
4.1. CFD/CAA-Modellierung der Tonentstehung in der Orgelpfeife . . . . .	55
4.2. Reynolds-Zahl, Kolmogorov-Skalen, Turbulenz-Modell, Gitterweiten . . . . .	56
4.3. Pre-Processing . . . . .	57
4.3.1. Hardware . . . . .	57
4.3.2. Software . . . . .	57
4.4. Post-Processing . . . . .	60
4.5. Simulationsläufe, Strömungsprofil des Jets . . . . .	61
4.6. Stabilität der Simulation . . . . .	61

<b>5. Auswertung der Simulationen</b>	<b>63</b>
5.1. Der Jet als Generator . . . . .	63
5.1.1. Einfluss der Freistrah-Charakteristik . . . . .	64
5.1.2. Einfluss des akustischen Feldes des Resonators . . . . .	67
5.1.3. Der Einfluss des akustischen Dipols an der Spitze des Oberlabiums . . . . .	69
5.1.4. Diskussion . . . . .	70
5.2. Identifizierung der Kopplungsregion . . . . .	72
5.2.1. Der Aufschnitt - Sample cs0 . . . . .	72
5.2.2. Kopplung des Windfeldes an das akustische Feld - Samples cs1-cs5 . . . . .	75
5.3. Der Resonator - Sample cs resonator . . . . .	83
5.4. Der Außenraum - Abstrahlung . . . . .	86
5.4.1. Probenpunkte A, B . . . . .	87
5.4.2. Probenpunkt C . . . . .	88
5.4.3. Probenpunkte D-G . . . . .	88
5.4.4. Schall-Intensitäten an den Probenpunkten . . . . .	90
5.5. Einfluss der geometrischen Randbedingungen auf die Tonentstehung in der Orgelpfeife	91
5.6. Phasenbeziehungen in der Orgelpfeife . . . . .	92
5.7. Zusammenfassung . . . . .	95
<b>6. Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>97</b>
<b>Literatur</b>	<b>99</b>
<b>Danksagung</b>	<b>101</b>
<b>A. Visualisierungen</b>	<b>103</b>
A.1. Film-Sequenzen der Simulation . . . . .	103
A.2. Probenpunkte und Querschnitte . . . . .	103
A.2.1. Probenpunkte A - G . . . . .	104
A.2.2. Samples cs jet 00 - cs jet 09 . . . . .	104
A.2.3. Sample cs dipol . . . . .	105
A.2.4. Samples cs0 -cs5 . . . . .	105
A.2.5. Sample cs resonator . . . . .	106
A.3. Darstellungen der Samples cs0 -cs5 . . . . .	107
A.3.1. turbulente kinetische Energie . . . . .	107
A.3.2. Geschwindigkeit in x-Richtung . . . . .	109
A.3.3. Geschwindigkeit in y-Richtung . . . . .	111
A.3.4. Druck p . . . . .	113
A.4. Sequenzen des Druckes, der Geschwindigkeit und der turbulenten kinetischen Energie .	114
<b>B. Mathematik</b>	<b>119</b>
B.1. Vom van der Pol Oszillator zur Adler-Gleichung . . . . .	119
B.2. Vom Rayleigh-Oszillator zum van der Pol-Oszillator . . . . .	124
B.3. Die freie Green's Funktion - Retardiertes Potential . . . . .	125
B.4. LES - Large Eddy Simulation . . . . .	126
B.5. Fourier Analyse . . . . .	129
<b>C. Quelltextauszüge</b>	<b>133</b>
C.1. Verzeichnisstruktur OpenFoam 2.0 . . . . .	133
C.2. Quellcodes . . . . .	133

# Abbildungsverzeichnis

1.1.	<i>Flussdiagramm der vorgelegten Arbeit (grau) und mögliche Weiterführung der Forschung. . .</i>	3
2.1.	<i>Aufbau einer labialen Orgelpfeife aus Holz. (1) Pfeifenkorpus aus Holz, (2) Kern, (3) Oberlabium (oft nur Labium), (4) Aufschnitt (auch Mund), (5) Kernspalt, (6) Vorschlag (entspricht dem Unterlabium einer Metallpfeife), (7) Pfeifenfuß, (8) Fußloch. Quelle: [2] . . . . .</i>	6
2.2.	<i>(a) Periodische Bewegungen eines konservativen, linearen Systems im Phasenraum. Besitzt das System eine periodische Lösung, so auch gleich eine ganze Familie von periodischen Lösungen, die durch die Anfangsbedingungen festgelegt sind. Störungen des Systems bedeuten eine andere Energie. Die neuen Lösungen sind benachbarte, ebenfalls geschlossene Kurven im Phasenraum. (b) Ein erregbares, lineares System. Das unendliche Anwachsen der Amplitude wird im Phasenraum durch eine nach außen wachsende Spirale dargestellt. Der Fixpunkt im Zentrum ist instabil. (c) Die Darstellung eines dissipativen, linearen Systems durch Spiralen mit nach innen abnehmender Amplitude im Phasenraum. Anfangs große Amplituden der Oszillation klingen im zeitlichen Verlauf ab. Die Trajektorie steuert auf den einzigen stabilen Fixpunkt des Systems zu, seine Ruhelage. (d) Selbsterregtes System. Trotz unterschiedlicher Anfangsbedingungen wickelt sich die Trajektorie nach endlicher Zeit auf den Grenzzyklus auf.</i>	7
2.3.	<i>(a) Der harmonische Oszillator als Beispiel für ein konservatives System. (b) Der gedämpfte harmonische Oszillator, ein dissipatives System. (c) Der harmonische Oszillator mit negativer Dämpfung, ein erregbares System. (d) Der van der Pol Oszillator als Beispiel für einen selbsterregten Oszillator. . . . .</i>	9
2.4.	<i>(Links) Die Nachbartrajektorien <math>\vec{x}(t)</math> einer Ljapunov-stabilen Trajektorie <math>\vec{x}_r(t)</math> bleiben in der Nähe. (Rechts) Bei asymptotischer Stabilität werden die Nachbartrajektorien angezogen, so dass der Abstand mit der Zeit gegen Null konvergiert. Bildquelle: [14] . . . . .</i>	10
2.5.	<i>(a) Eine stationäre, selbsterregte Oszillation kann durch die Rotationsbewegung des Phasenraumpunktes auf dem Grenzzyklus beschrieben werden. Seine Polarkoordinaten entsprechen der Amplitude <math>A</math> und der Phase <math>\phi(t)</math> der Oszillation und beschreiben somit die Dynamik des Systemzustands vollständig. (b) In einem rotierenden Koordinatensystem entspricht der Zustand stationärer Oszillationen einem ruhenden Punkt (schwarz). Eine Störung befördert den Phasenraumpunkt aus dem Grenzzyklus heraus. Während die Störung der Amplitude nach einer gewissen Zeit wieder abklingt (der Phasenraumpunkt kehrt zurück auf den Grenzzyklus), bleibt die Störung der Phase bestehen. . . . .</i>	11
2.6.	<i>In dem mit der Frequenz <math>\omega</math> rotierenden Bezugssystem entsprechen die Oszillationen auf dem Grenzzyklus Rotationsbewegungen des Phasenraumpunktes. Sie verlaufen entweder entgegen (a) oder in Uhrzeigerrichtung (c), je nach Vorzeichen der Verstimmung <math>\omega_0 - \omega</math>. Ist die Verstimmung gleich Null, ruht der Phasenraumpunkt. Das zeigt Abbildung (b). Die Position des Phasenraumpunktes wird durch die Winkelvariable <math>\phi - \phi_e</math>, also der Differenz der Phase des autonomen minus der Phase des treibenden Systems, charakterisiert. Sie wächst in (a), bleibt konstant in (b) und verringert sich in (c). . . . .</i>	13

- 2.7. Eine schwache, externe Kraft kann die Amplitude des Grenzyklus nicht nachhaltig beeinflussen, aber sie kann die Phase  $\phi$  des Oszillators verschieben. Der Effekt des Treibens hängt von der Phasendifferenz  $\phi - \phi_e$  ab. In den Punkten 3 und 4 ist der Effekt maximal, während die Kraft in den Punkten 1 und 2 ausschließlich radial am Phasenraumpunkt angreift und die Phase somit nicht entlang des Grenzyklus zu verschieben vermag. In der Nähe des Punktes 2 wird die Phase durch die Kraft vom Punkt 2 weggeschoben. Den Punkt 2 nennt man Repeller. In der Nähe des Punktes 1 hingegen wird der Phasenraumpunkt zur stabilen Gleichgewichtslage im Punkt 1 hingezogen. Diesen Punkt nennt man einen Punkt-Attraktor. Die externe Kraft produziert also zwei Gleichgewichtslagen auf dem Grenzyklus, eine stabile und eine instabile. 14
- 2.8. Kleine Verstimmung mit  $\omega_0 > \omega$ . Der Phasenraumpunkt rotiert langsam entgegen dem Uhrzeigersinn (rote Pfeile). Die Rotation des Phasenraumpunktes wird beeinflusst durch die externe, treibende Kraft (dicker, schwarzer Pfeil), welche die Rotation entweder beschleunigt oder bremst, in Abhängigkeit von der Phasendifferenz  $\phi - \phi_e$ . Im Punkt 1 balanciert die treibende Kraft die Rotation des Phasenraumpunktes gerade aus. Der Phasenraumpunkt wird durch die treibende, externe Kraft gestoppt und eine stabile Phasenverschiebung bildet sich heraus. Mögliche Werte von  $\Delta\phi$  liegen im Intervall von  $-\pi/2 < \Delta\phi < \pi/2$ . Das ist die stabile Gleichgewichtslage. Eine instabile Gleichgewichtslage gibt es im Punkt 2. . . . . 16
- 2.9. (a) Frequenzdifferenz des getriebenen Oszillators  $\Omega$  und des treibenden Oszillators  $\omega$  als Funktion von  $\omega$  für einen festen Wert der treibenden Amplitude  $\varepsilon$ . In der Nähe der Frequenz des autonomen Oszillators  $\omega_0$ , wird die Frequenzdifferenz  $\Omega - \omega$  exakt Null. Das nennt man **Frequenzkopplung** oder auch **Modenkopplung**. Bei zu großer Verstimmung  $\omega_0 - \omega$  bricht die Synchronisation auf. Die Kraft ist jetzt zu klein, um den Oszillator zu synchronisieren, aber die treibende Frequenz „zieht“ die Frequenz des getriebenen Oszillators an. Die gestrichelte Linie zeigt  $\omega_0 - \omega$  vs.  $\omega$ . (b) Die Familie  $\Omega - \omega$  vs.  $\omega$  für verschiedene Amplituden  $\varepsilon$  den treibenden Oszillators bildet eine Region, in der die Frequenz des getriebenen Oszillators  $\Omega$  gleich der Frequenz des treibenden Oszillators  $\omega$  ist. Diese Region, dargestellt in grau, nennt man **Arnoldzunge** (c). . . . . 17
- 2.10. Typische Phasendynamik beim Durchgang durch die Synchronisation. Die Phasendifferenz ist in (b) für verschiedene Frequenzen  $\omega$  der treibenden Kraft gezeigt. Diese Werte sind in (a) durch die Punkte 1 - 5 gekennzeichnet. In den Systemzuständen der Synchronisation (Punkte 1 und 2) ist die Phasendifferenz konstant (Linien 1 und 2). Die Phasendifferenz ist gleich Null genau im Zentrum der Synchronisationsregion (Punkt 1) und sonst innerhalb der Arnoldzunge konstant (Punkt 2). Außerhalb der Arnoldzunge ist die Dynamik der Phase intermittent, d. h. die Phasendynamik ist eine Sequenz aus Zeitspannen mit fast synchronem Verhalten und sehr schnellen Phasensprüngen (Punkt 3, Kurve 3). Mit fortschreitendem Abstand zur Grenze der Synchronisationsregion tendiert die Phasendynamik mehr und mehr hin zu einem gleichmäßigen Anwachsen. (Punkte und Kurven 4, 5). Der Durchgang durch die Synchronisation durch den rechten Rand der Synchronisationsregion geschieht in analoger Weise, nur dass die Phasendifferenz nun nicht wächst, sondern sinkt. Im Allgemeinen müssen die Durchgänge links und rechts durch die Grenze der Arnoldzunge nicht symmetrisch sein. . . . . 19
- 2.11. (a) Für die Parameter  $\mu = 0.1$  und  $\omega_0 = 1$  Hz und mit der Annahme keiner Verstimmung  $\Delta \approx \omega_0 - \omega = 0.1$  Hz schneidet die horizontale Linie  $\frac{4\sqrt{\mu}\omega\Delta}{B}$  die Funktion  $\cos\varphi$  in zwei Punkten, den Fixpunkten  $\varphi_1$  und  $\varphi_2$ . Die Fixpunkt  $\varphi_1$  ist instabil und der Fixpunkt  $\varphi_2$  ist stabil. (b) Die treibende Kraft  $B$  in Abhängigkeit vom nichtlinearen Dämpfungsparameter  $\mu$ . . . . . 22
- 3.1. Der Messaufbau. Die zwei Labialpfeifen P1, P2 aus Holz sind in definierten Abständen zueinander fixiert. Die rechte Pfeife (P2) ist mit dem Schrittmotor ausgestattet. Man erkennt zwei Mikrophone direkt unter den Aufschnitten der Orgelpfeifen. Zwei zusätzliche Mikrophone sind an der linken Pfeife (P1) so angebracht, dass sie Schallsignale direkt aus dem Resonatorinnenraum aufnehmen können. In Vordergrund ist das Mikrophon zu erkennen, welches die Schallsignale im Fernfeld aufnimmt. . . . . 40
- 3.2. (a) Audio-Signal der Messung Abstand 1mm, 25. Datensatz. (b) Detail desselben Signals. . . . . 41

3.3.	(a) Schalldruckpegelspektrum der Messung Abstand 1mm, 25. Datensatz. (b) Detailansicht desselben Schalldruckpegelspektrums im Bereich der 1. Harmonischen (Grundfrequenz) der Pfeife P1. . . . .	41
3.4.	(a) Farbcodierte Grafik aller Schalldruckpegelspektren für den Abstand der Orgelpfeifen von $d = 1$ mm zueinander. Die Farbcodierung stellt den Schalldruckpegel dar. Der mit dem Rechteck markierte Bereich ist der Frequenzbereich der 1. Harmonischen des Systems. (b) Detailansicht der farbcodierten Grafik der Schalldruckpegelspektren für den Abstand $d = 1$ mm im Frequenzbereich der 1. Harmonischen des Systems. . . . .	42
3.5.	Spektren des Grundtons der beiden Orgelpfeifen in Abhängigkeit vom Abstand $d$ der Orgelpfeifen zueinander. Auf der Abzisse ist die Verstimmung $\Delta f = \frac{1}{2\pi}(\omega - \omega_0)$ aufgetragen. Die Ordinate zeigt die Frequenz $f = \frac{\omega}{2\pi}$ . (a) Bei einem Pfeifenabstand von 1 mm ist eine ausgeprägte Synchronisationsregion im Verstimmungsbereich von $\pm 3$ Hz zu erkennen. (b) Pfeifenabstand $d = 10$ mm. Die Synchronisationsregion ist immer noch sehr ausgeprägt, jedoch in einem kleineren Verstimmungsbereich von etwa $\pm 2.25$ Hz. (c) Abstand der Pfeifen $d = 30$ mm. Die Synchronisationsregion ist deutlich kleiner, aber immer noch gut zu erkennen. (d)-(h) Die Synchronisationsregionen werden mit wachsendem Abstand immer schmaler. (i) Schließlich ist bei einem Pfeifenabstand von 400 mm die Synchronisationsregion nur noch marginal. . . . .	43
3.6.	Die Entwicklung der 1. Harmonischen der beiden Orgelpfeifen im Verlauf der Verstimmung von P2 in Abhängigkeit vom Abstand $d$ . Die grüne (-diamond-) Kurve zeigt die Frequenzänderung der Pfeife P2. Die blaue Kurve (-x-) zeigt die Frequenzänderung von P1. . . . .	44
3.7.	Die Amplituden der 1. Harmonischen der beiden Orgelpfeifen als Schalldruckpegel in Abhängigkeit vom Abstand $d$ . . . . .	45
3.8.	Die Synchronisationsplateaus der in Abhängigkeit vom Abstand $d$ . . . . .	46
3.9.	Konstruktion der Arnoldzunge. (a) Die Synchronisationsplateaus in Abhängigkeit vom Abstand der Pfeifen zueinander. (b) Zeigt die Synchronisationsplateaus über dem inversen Abstand aufgetragen. (c) Detailansicht der Plateaus über den inversen Abstand aufgetragen. (d) Trägt man den Abstand logarithmisch auf, erhält man für die Grenzregionen der Synchronisationsplateaus eine Gerade. (e) Die Interpolation dieser Geraden ergibt die Kopplungsfunktion. (f) Die Rücktransformation der Ordinate führt auf die atypische Kopplungsfunktion. . . . .	49
3.10.	Die Kopplungsfunktion zeigt eine logarithmische Abhängigkeit der Breite der Synchronisationsplateaus vom Abstand der Orgelpfeifen zueinander. . . . .	50
3.11.	Coarse Graining I - Flussdiagramm der Tonentstehung in der Orgelpfeife. . . . .	51
3.12.	Coarse Graining II - Reduziertes Modell der Orgelpfeife . . . . .	52
4.1.	Das mit <code>blockMesh</code> aus der Datei <code>blockMeshDict</code> erzeugte Gitter. Detailansicht des Rechengitters im Bereich des Resonators der Orgelpfeife und im Bereich des Jets (roter Rahmen). . . . .	58
4.2.	Entwicklung der Courant-Zahl während der Simulation. (a) Simulationszeit $t_s = 100$ ms. Aufgetragen ist maximale Courant-Zahl $C_{0,max}$ . Der maximale Wert liegt bei etwa 0.09. Abb. (b) zeigt die mittlere Courant-Zahl $C_{0,mean}$ . Die Simulationszeit beträgt $t_s = 100$ ms. Die konservative Schätzung der Entwicklung der mittleren Courant-Zahl ist als rote Kurve eingezeichnet. . . . .	62
5.1.	(a) Propagation des Jets in den Aufschnitt ( $t = 0.1$ ms). (b) Entwicklung des Geschwindigkeitsprofils des Jets bei der Propagation in den Aufschnitt. Aus dem Zylinderprofil wird ein Glockenprofil. . . . .	64
5.2.	Als Anfangsbedingung der Geschwindigkeit an der Kernspalte (Injektionsregion) wird ein Zylinderprofil des Jets angenommen. Die Anfangsgeschwindigkeit des Jets in der vorgestellten Simulation beträgt $\vec{v}_{jet} = const = 18$ m/s. Die halbe Breite der Kernspalte ist $b = 0.3$ mm. Im zeitlichen Verlauf wird aus dem Zylinderprofil ein Glockenprofil. Der Winkel $\theta$ ist der Öffnungswinkel des Jets. (Die Darstellung ist nicht maßstabsgetreu). . . . .	65
5.3.	(a) Sinusoidale Störung des Jets. (b) Variköse Störung des Jets. . . . .	65
5.4.	(a) Farbcodierte Darstellung der Geschwindigkeit des Modell-Freistrahls nach Gl. 5.5. (b) Geschwindigkeitsprofil des Modell-Freistrahls an den Querschnitten <code>cs jet 01</code> - <code>cs jet 09</code> . . . . .	66

5.5.	(a) Unmittelbar nach der initialen Injektion propagiert der Jet in den Aufschnitt. Dabei erkennt man eine leichte Auslenkung in den Außenraum. (b) Die Geschwindigkeitsprofile der Querschnitte csjet 01 - 09 zu diesem Zeitpunkt zeigen eine leichte Asymmetrie. die zentrale Geschwindigkeit der Profile wird mit wachsender Propagationslänge $x$ in den Außenraum verschoben. . . . .	68
5.6.	(a) Zu Beginn der Simulation ( $t = 0.05$ ms) wird eine initiale Druckwelle erzeugt, die sich mit Schallgeschwindigkeit im Resonator ausbreitet. (b) Nach Reflexion am oberen Ende der Orgelpfeife ( $x = 106$ mm) wandert die Druckwelle (Schallwelle) zurück in Richtung Aufschnitt. Das Hin- und herlaufen benötigt die Zeit $t = 0.618$ ms. Diese Zeitspanne nennt man retardierte Zeit. . . . .	69
5.7.	(a) Die Diagonalelemente von $ReJ(x, t)$ ergeben die mittlere Auslenkung des Jets in $y$ -Richtung als Funktion der Höhe $x$ des Aufschnittes. (b) Betrag der mittleren Auslenkung des Jets. Die Kurven fit1 und fit2 geben eine Abschätzung des Wachstumsparameters $\pm\mu$ . . . . .	70
5.8.	Isobaren des Druckes im Bereich des Jets. Herausbildung eines schwingenden Dipols an der Spitze des Oberlabiums. . . . .	71
5.9.	(a) Das Drucksignal des Dipols an der Schneide des Oberlabiums. (b) Das Druck-Pegelspektrum des Dipols. Der Dipol schwingt mit der Frequenz von $f_{Dipol} = 1387$ Hz und kann somit als Ursache der 2. Harmonischen in den Probenpunkten im Außenraum identifiziert werden. . .	71
5.10.	Skizze des sich ausbildenden akustischen Dipols an der Schneide, an deren Außenseite gerade ein Überdruck herrscht. Der Vergleich mit der Simulation zur Zeit $t = 0.75$ ms in Abb. 5.8 zeigt weitgehende Übereinstimmung mit dem Dipol-Modell. . . . .	72
5.11.	(a)-(d) Farbcodierte zeitliche Entwicklung der turbulenten kinetischen Energie $k$ , des Druckes $p$ und der horizontalen und vertikalen Geschwindigkeitskomponenten $v_x$ und $v_y$ durch den Querschnitt cs0. (e)-(h) Die über den Querschnitt cs0 integrierte Druckschwankung und die Signale Geschwindigkeitskomponenten $v_x, v_y$ , sowie das Schalldruckspektrum und das Schallschnellepektrum von $v_y$ . . . . .	74
5.12.	(a) Profile der turbulenten kinetischen Energie $k$ durch die Querschnitte cs1-cs5. (b) Zeitlich gemittelte und über die jeweiligen Querschnitte integrierten Werte von $k$ durch cs1-cs5 und die Interpolation (rot) in semi-logarithmischer Darstellung. Der Punkt des Querschnitts cs1 (gelb) ist nicht Teil des Fits, da in diesem Bereich der Jet agiert, also Anfachung stattfindet. (c) Die Interpolation ergibt in linearer Darstellung ein exponentielles Abklingverhalten. . . .	76
5.13.	(a) Zeitlich gemittelte Profile von $v_x$ durch die Querschnitte cs1-cs5. (b) Die Absolutbeträge der zeitlich gemittelten Profile von $v_x$ . (c) Die Punkte sind die zeitlich gemittelten und über den jeweiligen Querschnitt integrierten Geschwindigkeitssignale von $v_x$ durch die Querschnitte. Die rote Kurve interpoliert die Punkte und zeigt ein exponentielles Abklingen der Absolutbeträge der mittleren Geschwindigkeitskomponente $ v_x $ . Interpoliert wird hier über alle Querschnitte cs1-cs5. . . . .	77
5.14.	(a) Zeitlich gemittelte Profile von $v_y$ durch die Querschnitte cs1-cs5. (b) Die Absolutbeträge der zeitlich gemittelten Profile von $v_y$ . (c) Die Punkte sind die zeitlich gemittelten und über den jeweiligen Querschnitt integrierten Geschwindigkeitssignale von $v_y$ . Die rote Kurve interpoliert die Punkte und zeigt ein exponentielles Abklingen der Absolutbeträge der mittleren Geschwindigkeit $ v_y $ an den jeweiligen Querschnitten. Bei der Interpolation geht der Querschnitt cs1 nicht mit ein, weil $v_y$ hier noch eine Anfachung erfährt. . . . .	77
5.15.	(a) Verhalten des zeitlich gemittelten Signals der Geschwindigkeitskomponente $v_y$ in der Kopplungsregion. Mit rot sind die positiven (in Richtung Pfeifenfront), mit blau die negativen (in Richtung Pfeifenrückwand) zeitgemittelten Anteile von $v_y$ dargestellt. Die schwarze Kurve markiert die Differenz beider Anteile, also den Effektivwert der zeitgemittelten nichtlinearen Anteile von $v_y$ . Die Anstiege von $v_y$ in den Wirbelzentren sind linear. Daraus folgen konstante zeitgemittelte Winkelgeschwindigkeiten $\Omega$ der Wirbelzentren. Die Zentren verhalten sich demnach im Mittel wie Starrkörperwirbel. (b) Zeigt das Verhalten der zeitgemittelten Komponente von $v_x$ in der Kopplungsregion. Der Effektivwert von $v_x$ ist negativ, also aus dem Resonatorraum heraus, in Richtung Pfeifenboden gerichtet. Man erkennt, dass die Nichtlinearitäten für Positionen $x > 30$ mm verschwinden. Übrig bleiben gleich große mittlere positive und negative Anteile von $v_x$ , die als Schallschnelle identifiziert wird. . . . .	78

5.16. (a) Effektivwert des Betrags der Geschwindigkeit $ v $ im Bereich der Kopplungsregion. Die zeitliche Mittelung erstreckt sich über die gesamte Simulationszeit $t = 100$ ms. (b) Effektivwert des Geschwindigkeitsbetrags $ v $ in der Kopplungsregion (Querschnitt $cs\_resonator$ ). Mit den Interpolationen lassen sich die Nichtlinearitäten der Geschwindigkeit in der Kopplungsregion klassifizieren. Man erkennt die Anfachung (grün) und die Dämpfung (rot). Im vorderen Teil ( $0 < x < 5.5$ mm) erkennt man jene nichtlinearen Geschwindigkeitskomponenten, die in Richtung Aufschnitt wandern. In diesem Anteil ist auch die Schallschnelle und somit das Schallsignal enthalten. . . . .	80
5.17. (a) Gezeigt ist der Effektivwert der zeitgemittelten turbulenten kinetischen Energie $k$ . Die hohe Randspitze entsteht durch Reibung in der Randschicht am Pfeifenboden. Das ausgeprägte Maximum bei $x = 10$ mm kennzeichnet die Region, in der es zu den größten Reibungseffekten kommt. Diese entstehen in der Scherschicht zwischen Primär- und Sekundärwirbel und in den Randschichten zur Resonatorwand. (b) Dargestellt ist der Effektivwert des Druckes $p$ in der Kopplungsregion. Das zeitgemittelte lokale Druckminimum auf Höhe der Schneide entsteht durch die Rotation des Zentrums des Primärwirbels. Das kleine lokale Minimum gehört zur Rotation des Sekundärwirbelzentrums. Die Interpolation der Entwicklung des Effektivwertes des Druckes in der Kopplungsregion ergibt ein Verhalten $\sim -1/x^2$ . Für $x > 30$ mm sind die Nichtlinearitäten abgeklungen. . . . .	81
5.18. (a) Zeitlich gemittelte Profile des Druckes durch die Querschnitte $cs1$ - $cs5$ . (b) Die Punkte sind die zeitlich gemittelten und über den jeweiligen Querschnitt integrierten Drucksignale. Die rote Kurve interpoliert die Punkte und zeigt das Abklingen des durch die Strömung bedingten dynamischen Druckes von $-110$ Pa auf den mittleren Schalldruck im Resonator von ca. $-60$ Pa, was einem Schalldruckpegel von ca. $130$ dB entspricht. Der Prozess verhält sich $\sim -1/x^2$ . . .	81
5.19. Druckverteilung im Resonator. Die grüne Kurve zeigt das, relativ zum abgestrahlten Schalldrucksignal, im Resonator schwingende Drucksignal zum Zeitpunkt $t = 100$ ms. Die rote Kurve stellt die räumliche Verteilung des über die Simulationszeit $t_s = 100$ ms gemittelten Überdruckes im Resonator relativ zum Abstrahlsignal aus dem Aufschnitt ( $cs0$ ) dar, 5-fach überhöht. Die blaue Kurve zeigt die räumliche Verteilung des entsprechenden zeitlich gemittelten Unterdruckes im Resonator relativ zum Abstrahlsignal aus dem Aufschnitt, ebenfalls 5-fach überhöht. Jeweils gestrichelt sind die idealen Einhüllenden eines halboffenen Helmholtz-Resonators derselben Geometrie dargestellt. Die schwarze Kurve ist die Differenz aus roter und blauer Kurve, also der zeitlich gemittelte Effektivwert der nichtlinearen Anteile des Druckes im Resonator. Nur im vorderen Teil des Resonators, dort wo sich Primär- und Sekundärwirbel herausbilden, weicht das Verhalten des Resonators der linearen Theorie ab. Der Effektivwert im Bereich des Primär- und Sekundärwirbels verhält sich $\sim -1/x^2$ . . . . .	84
5.20. Verhalten des Signals der Geschwindigkeitskomponente $v_x$ im Resonator. . . . .	85
5.21. Verhalten des Signals der Geschwindigkeitskomponente $v_y$ im Resonator. . . . .	86
5.22. Der Wechseldruck am Probenpunkt A. (a) Das Signal ist periodisch mit überlagertem Rauschen des Jets. (b) Das Schalldruckpegelspektrum lässt deutlich den Peak der Fundamentalschwingung (1. Harmonische) bei $693$ Hz erkennen. Die 3., 5. und 7. Harmonische sind schwach ausgeprägt. Weitere Harmonische gehen im Rauschen des Jets unter. Interessanterweise ist eine 2. Harmonische bei etwa $1381$ Hz mit $100$ dB sichtbar. . . . .	87
5.23. Der Wechseldruck am Probenpunkt C. (a) Die Amplituden des Wechseldruckes sind etwa 4-mal höher als in den Probenpunkten A und B. Im Resonator kommt es also zu einer Verstärkung des Signals. Außerdem erkennt man, dass das Signal sehr viel glatter ist. Das Rauschen des Jets ist hier nicht mehr zu sehen. (b) Der Schalldruckpegel der 1. Harmonischen ist mit $138$ dB wesentlich höher als in den Probenpunkten A und B. Deutlich sind die Peaks bis hin zur 13. Harmonischen zu erkennen. Auch die 2. Harmonische ist sichtbar. . . . .	88
5.24. Der Wechseldruck am Probenpunkt G. Im Schalldruckpegelspektrum sind Eigenmoden bis zur 13. Harmonischen gut zu identifizieren. Die geradzahligigen Harmonischen sind ebenfalls zu erkennen. . . . .	90

5.25. Die relativen Schall-Intensitäten $I$ an den Probenpunkten A, D, E, F und G. Als blaue Kurve ist das Abstrahlverhalten einer akustischen Punktquelle $I(r) \sim 1/r^2$ dargestellt. Die Punkte E, F und G zeigen eine gute Übereinstimmung mit dem Abstrahlverhalten. Die Punkte A und D zeigen Abweichungen von der Theorie. . . . .	91
5.26. (a) Geschwindigkeitssignale $v_x$ und $v_y$ durch den Querschnitt cs0. Im direkten Vergleich mit den Signalen $v_x$ und $v_y$ durch den Querschnitt cs1 (b) erkennt man, dass die Komponenten der Geschwindigkeit die Rollen tauschen. . . . .	91
5.27. (a) Detailansicht der über den Querschnitt cs1 integrierten Größen Schalldruck und Schallschnelle. (b) Das Phasenspektrum von Schalldruck und Schallschnelle durch cs1. Der Schalldruck eilt der Geschwindigkeitskomponente $v_x$ um ca. $\Delta\phi \approx 90^\circ$ voraus. (c) Die Kreuz-Korrelation von Schalldruck und Schallschnelle durch den Querschnitt cs1 ergibt eine Zeitverzögerung von ca. 0.35 ms. . . . .	92
5.28. (a) Detailansicht der über den Querschnitt cs0 integrierten Größen Schalldruck und Schallschnelle. (b) Das Phasenspektrum von Schalldruck und Schallschnelle durch cs0. Der Schalldruck eilt der Schallschnelle um ca. $\Delta\phi = 70^\circ$ voraus. (c) Kreuz-Korrelation von Schalldruck und Schallschnelle durch den Querschnitt cs0. Die Signale haben eine Zeitverzögerung von ca. 0.5 ms. . . . .	93
5.29. (a) Die Drucksignale durch die Querschnitte cs0 und cs1 im Vergleich. (b) Phasenspektrum im Bereich der 1. Harmonischen. Die Phasendifferenz beträgt $\Delta\phi = -20.55^\circ$ . (c) Die Kreuz-Korrelation ergibt die zeitliche Verzögerung $\tau = 0.05$ ms beider Signale. . . . .	93
5.30. (a) Die Geschwindigkeitssignale $v_y$ durch cs0 und $v_x$ durch cs1 im Vergleich. (b) Phasenspektrum im Bereich der 1. Harmonischen. Die Phasendifferenz beträgt $\Delta\phi \approx 180^\circ = \pi$ . Die Signale laufen fast exakt gegenphasig, wobei die Komponente $v_x$ durch cs1 der Komponente $v_y$ durch cs0 voraus eilt. (c) Aus der Kreuz-Korrelation beider Signale liest man die zeitliche Verzögerung $\tau = 0.75$ ms ab. . . . .	94
5.31. (a) Phasenportrait durch den Aufschnitt cs0. Aufgetragen ist $\dot{v}_y$ über $v_y$ . (b) Phasenportrait durch den Querschnitt cs1. Aufgetragen ist $\dot{v}_x$ über $v_x$ . Die Einschwingvorgänge sind rot gekennzeichnet. Das Signal enthält neben der Schallschnelle auch noch Anteile des Strömungsfeldes. Daher ist die Trajektorie durch das Rauschen des Jets beeinflusst. Dennoch ist die Ausbildung eines Grenzyklus zu erkennen. Die leichte Abweichung von der Kreisform zeigt, dass die Nichtlinearitäten im System klein sind. Die Form der Abweichungen erinnert an die eines van der Pol Oszillators mit kleiner Nichtlinearität und Rauschen. . . . .	95
A.1. Die Positionen der Probenpunkte A - G in der Orgelpfeife und im Außenraum. . . . .	104
A.2. Die Positionen der Querschnitte cs jet 01 - 09 im Aufschnitt. Jedes Sample besteht aus 200 Datenpunkten und ist 8.6 mm lang. . . . .	104
A.3. Position des Querschnittes cs dipol. Das Sample beinhaltet 400 Messpunkte und ist 1.9 mm lang. . . . .	105
A.4. Lage der definierten Samples cs0 - cs5 im Rechengitter. Das Sample des Aufschnittes cs0 hat 272 Datenpunkte. Jedes vertikale Sample (cs1 - cs5) beinhaltet 100 Datenpunkte. . . . .	105
A.5. Lage des Samples cs resonator im Rechengitter. Das Sample hat 1927 Datenpunkte und ist 106 mm lang. . . . .	106
A.6. Zeitlicher Verlauf der turbulenten kinetischen Energie durch die Querschnitte cs1-cs5 (a)-(e). . . . .	107
A.7. Zeitlicher Verlauf der Geschwindigkeitskomponente $v_x$ durch die Querschnitte cs1-cs5 (a)-(e). . . . .	109
A.8. Zeitlicher Verlauf der Geschwindigkeitskomponente $v_y$ durch die Querschnitte cs1-cs5 (a)-(e). . . . .	111
A.9. Zeitlicher Verlauf des Drucksignals durch die Querschnitte cs1-cs5 (a)-(e). . . . .	113
A.10.v.l.o.n.r.u. Simulation der Anströmung des Labiums einer Orgelpfeife durch einen Jet. Die Sequenz zeigt die Abstrahlung von Schallwellen in den Außenraum. Gezeigt ist der Druck $p$ . . . . .	115
A.11.v.l.o.n.r.u. Simulation der Anströmung des Labiums einer Orgelpfeife durch einen Jet. Ausbildung eines hin und her schwingenden Luftblattes und Abriss von Wirbeln. Gezeigt ist der Betrag der Geschwindigkeit $ v $ (in der dargestellten Filmsequenz mit $U$ Magnitude bezeichnet). . . . .	116
A.12.v.l.o.n.r.u. Simulation der Anströmung des Labiums einer Orgelpfeife durch den Jet. Ausbildung eines hin und her schwingenden Luftblattes und Abriss von Wirbeln. Gezeigt ist die turbulente kinetische Energie $k$ , die logarithmisch skaliert ist. . . . .	117

B.1. <i>Weg eines Signals (Sägezahn) vom Ortsraum in den Frequenzraum durch die Fourier-Transformation. (vgl. Karrenberg, Signale, Prozesse, Systeme, 2005 . . . . .</i>	130
C.1. <i>Beispiel der Verzeichnisstruktur einer OpenFOAM Simulation . . . . .</i>	133



# Tabellenverzeichnis

2.1. Ausgewählte Werte von Schalldruckpegel ( $L_p$ ), Schalldruck ( $p$ ), Schallschnelle ( $v$ ) und Schallintensität ( $I$ ). . . . .	37
4.1. Die wichtigsten geometrischen Parameter des Rechengitters. . . . .	58
5.1. Frequenzen und Schalldruckpegel der ungeradzahigen Harmonischen des integrierten Drucksignals durch den Querschnitt $cs_0$ . . . . .	75
5.2. Frequenzen und Schalldruckpegel der ungeradzahigen Harmonischen des integrierten Geschwindigkeitssignals in $y$ -Richtung durch den Querschnitt $cs_0$ . . . . .	75
5.3. Positionen der Probenpunkte A bis G relativ zum Koordinatenursprung. . . . .	87
5.4. Der Wechseldruck am Probenpunkt A. Frequenzen und Schalldruckpegel der Harmonischen. In der zweiten Zeile sind die Abweichungen Frequenzwerte der Harmonischen aus der Simulation bezüglich der theoretischen Werte der Harmonischen angegeben. . . . .	87
5.5. Der Wechseldruck am Probenpunkt B. Frequenzen und Schalldruckpegel der Harmonischen. In der zweiten Zeile sind wieder die Abweichungen Frequenzwerte der Harmonischen aus der Simulation bezüglich der theoretischen Werte der Harmonischen angegeben. . . . .	88
5.6. Der Wechseldruck am Probenpunkt C. Frequenzen und Schalldruckpegel der Harmonischen. In der zweiten Zeile stehen die Abweichungen der Frequenzwerte der Harmonischen aus der Simulation bezüglich der theoretischen Werte der Harmonischen angegeben. . . . .	89
5.7. Der Wechseldruck am Probenpunkt D. Frequenzen und Schalldruckpegel der Harmonischen. In der zweiten Zeile stehen die Abweichungen der Frequenzwerte der Harmonischen aus der Simulation bezüglich der theoretischen Werte der Harmonischen angegeben. . . . .	89
5.8. Der Wechseldruck am Probenpunkt E. Frequenzen und Schalldruckpegel der Harmonischen. In der zweiten Zeile stehen die Abweichungen der Frequenzwerte der Harmonischen aus der Simulation bezüglich der theoretischen Werte der Harmonischen angegeben. . . . .	89
5.9. Der Wechseldruck am Probenpunkt F. Frequenzen und Schalldruckpegel der Harmonischen. In der zweiten Zeile stehen die Abweichungen der Frequenzwerte der Harmonischen aus der Simulation bezüglich der theoretischen Werte der Harmonischen angegeben. . . . .	89
5.10. Der Wechseldruck am Probenpunkt G. Frequenzen und Schalldruckpegel der ungeradzahigen Harmonischen. . . . .	89
5.11. Wechseldruck am Probenpunkt G. Die Tabelle fasst alle erkennbaren geradzahigen Harmonischen noch einmal zusammen. . . . .	89
A.1. Positionen der Probenpunkte A bis G relativ zum Koordinatenursprung. . . . .	104



# 1. Einführung

*Auskünfte aus erster Hand gibt nur die Natur selbst.  
Sie ist also zu befragen, will man nicht zeitlebens am  
Krückstock von Autoritäten humpelnd lernen.*

ROGER BACON, MÖNCH ZU OXFORD, 13. JH.

## 1.1. Eine thematische Einstimmung

### Eine seltsame Art von Sympathie

Das Thema der Synchronisation streift fast jeden Teil unserer Erfahrungswelt. Wir finden dieses Phänomen zum Beispiel, wenn wir die Hin- und Herbewegung unserer beiden Zeigefinger koordinieren wollen. Wir haben keine Mühe, die gegenläufigen (antisymmetrischen) Beuge- und Streckbewegungen der Zeigefingermuskulatur zu kontrollieren, solange die wiederholte Abfolge von Beugen und Strecken, also dessen **Frequenz** moderat bleibt. Erhöhen wir langsam aber stetig die Abfolgegeschwindigkeit dieser Bewegungen, so geraten wir dabei mehr und mehr aus dem Takt. Werden wir noch schneller, geht die Bewegung nach einer kurzen, undurchsichtigen Einschwingphase über in eine gleichläufige (symmetrische) Abfolge von Beuge- und Streckbewegung des rechten und linken Fingers. Ab jetzt können wir die Frequenz dieser Bewegung ohne weiteres erhöhen, ohne aus dem Takt zu geraten. Die Bewegungen verlaufen synchron, genauer gesagt antiphasen-synchron. Offenbar sind wir dabei an eine gewisse Grenze der Verarbeitungsgeschwindigkeit unseres zentralen Nervensystems gestoßen. Gleiche, dh. einander symmetrische Muskelpartien zu koordinieren, scheint uns leichter zu fallen, als verschiedene. Das klappt natürlich auch mit allen anderen Fingern. Ab einer gewissen Frequenz synchronisieren wir die Fingerbewegung beider Hände. Jeder Pianist, Gitarrist und jede Schlagzeugerin kennt dieses Phänomen als negatives Element seiner bzw. ihrer musikalischen Fertigkeiten. Deshalb übt er oder sie die unabhängige Koordination der Hände bzw. Arme solange, bis sie dem Gehirn vertraut sind. Entscheidende Hilfe dabei leistet der von außen vorgegebene Takt, der, entweder durch Noten, einen Rhythmus oder einfach durch die Musik der Bandmitglieder vorgegeben wird. Von Tänzern hört man ähnliches. So einfach und plausibel diese Beispiele klingen, so komplex und zum Teil noch unverstanden ist die nichtlineare Dynamik, die ihnen zugrunde liegt. Das Beispiel des Musikers, der sich durch Übung zu konditionieren vermag, oder die Tänzer, die dann besonders harmonisch zusammen tanzen, wenn sie sich besonders sympathisch sind, sich riechen können, wie mag sagt, zeugen davon. Schaut man in die Natur, so finden sich zahllose Beispiele für diese Art der Dynamik. Seien es zehntausende, paarungswillige, männliche Glühwürmchen, die ihre Leuchtbotschaften in sommerlichen Nächten aussenden und ihre Leuchtfrequenzen untereinander synchronisieren [22], seien es fein aufeinander abgestimmte Herz- und Atemrhythmen, synchrone Neuronenreize im Gehirn oder Menstruationszyklen, seien es Walgesänge [16], Räuber-Beute-Zyklen in Ökosystemen [9], Sonnenaktivitätszyklen [25], Funkuhren, Pendelbewegungen von Metronomen oder eben Orgelpfeifen, die über eine gewisse Distanz miteinander zu kommunizieren scheinen. Synchronisation findet sich auf nahezu allen Skalen. Den genannten Beispielen gemein ist die Fähigkeit, sogenannte **selbsterregte Schwingungen** ausführen zu können. Diese fundamentale Eigenschaft wird in Kapitel 2 detailliert besprochen.

Der Niederländische Astronom, Mathematiker und Physiker Christiaan Huygens (1629-1695) war der erste, dem eine genaue, wissenschaftliche Untersuchung dieses Phänomens gelang. Damals benötigte die schnell wachsende Seeschifffahrt genaue, hochseetaugliche Zeitmesser um sicher entlang der geographischen Länge segeln zu können. 1620 wurde die Vereinigte Ostindien Kompanie in Amsterdam

gegründet, um die Schifffahrt und den Welthandel nach Südasien (Indonesien, Japan, Taiwan und Sri Lanka) und entlang der südostasiatische Küste zu unterstützen. In dieser Zeit war die Kompanie das größte Geschäftsunternehmen der Welt. 1621 begann die Niederländische Westindien-Kompanie mit der Entwicklung des Handels mit Brasilien und der Verwaltung von New Amsterdam (1625-1664, heute New York). Huygens entwickelte unter anderem eben solche Präzisionsuhren und an ihnen bemerkte er, oft über lange Zeit synchrone Pendelbewegungen, sofern sie an einem gemeinsamen Holzbalken angebracht waren. Durch gezielte Experimente fand er heraus, dass es, mit dem bloßen Auge nicht bemerkbare, feinste Schwingungen der Balken waren, die seine Uhren synchronisierten [18]. Huygens sprach von *Sympathie seiner Uhren*. Wir kommen auf seine Beobachtungen zurück.

In den folgenden 200 Jahren blieb Huygens Beschreibung der Synchronisation im Wesentlichen unberücksichtigt. Das lag zum einen daran, dass konservative Oszillatoren<sup>1</sup> im Fokus des wissenschaftlichen Interesses standen, welche seit Newton in der Mechanik eingehend untersucht wurden [26]. Andererseits war der mathematische Rahmen, um dieses Phänomen adäquat beschreiben zu können, gerade erst im Entstehen. Mitte des 19. Jahrhunderts beschrieb Lord Rayleigh das Phänomen der Synchronisation in akustischen Systemen in seinem berühmten Buch *The Theory of Sound* wie folgt:

*When two organ-pipes of the same pitch stand side by side, complications ensue which not unfrequently give trouble in practice. In extreme cases the pipes may reduce one another to silence. Even when the mutual influence is more moderate, it may still go so far as to cause the pipes to speak in absolute unison, in spite of inevitable small differences.*

Rayleigh beobachtete also nicht nur die gegenseitige Synchronisation beider Orgelpfeifen, sondern auch den Effekt des sogenannten Oszillatortods, wenn die gegenseitige Kopplung zur Auslöschung, *engl.*: quenching der Schwingungsamplituden führt.

Erst mit der Entwicklung der Elektronik und der Radiotechnik Anfang des 20. Jahrhunderts wurden die Beobachtungen von Huygens und Rayleigh wieder aufgegriffen, beispielsweise indem elektrische Trioden-Generatoren und deren Kopplung genauer untersucht wurden. Physiker wie die Engländer Eccles und Appleton und der Niederländer van der Pol sind hier federführend gewesen. Besonders sowjetischen Physikern und Mathematikern, zum Beispiel Andronov, gelang es, die in dieser Zeit beobachteten Phänomene in einen modernen, mathematischen Formalismus, den der nichtlinearen Dynamik, einzubetten. Heute interessieren sich sehr viele, unterschiedliche Disziplinen für Synchronisation. Oft geht es dabei um das tiefe Verständnis komplexer Systeme als auch um Möglichkeiten, auf diese gerichteten Einfluss zu nehmen, sie also in gewissen Grenzen steuern zu können. Oft möchte man bestimmte Synchronisationseffekte unterbinden oder aber auch gerade diese forcieren.

## 1.2. Motivation und Zielsetzung

Die vorliegende Arbeit greift bestimmte Zielsetzungen aus der Akustik auf. Speziell Orgelbauer kennen die, sich auf das Hörempfinden meist negativ auswirkenden, Phänomene von Synchronisation. Ihre seit Jahrhunderten gemachten handwerklichen Erfahrungen führten zu den heute gängigen Orgelbauweisen. Beispielsweise werden leicht gegeneinander verstimmte Orgelpfeifenregister, die sogenannten Schwebungsregister möglichst weit voneinander entfernt positioniert, um eine gegenseitige *Anziehung*<sup>2</sup> der Frequenzen zu vermeiden. Gerade für tiefe Frequenzen, also lange Wellenlängen, stößt man hier an baulich bedingte Grenzen. Die Wechselwirkungen der Orgelpfeifen untereinander führen zu schwer kontrollierbaren Effekten während der Intonation des Instruments. Auf einem nur bedingt stimmbaren Instrument lässt sich kaum exakt spielen. Der Höreindruck bleibt minderwertig. Oft möchte man die Lautstärke von Orgelpfeifen einer bestimmten Frequenz relativ zu den übrigen Pfeifen erhöhen.

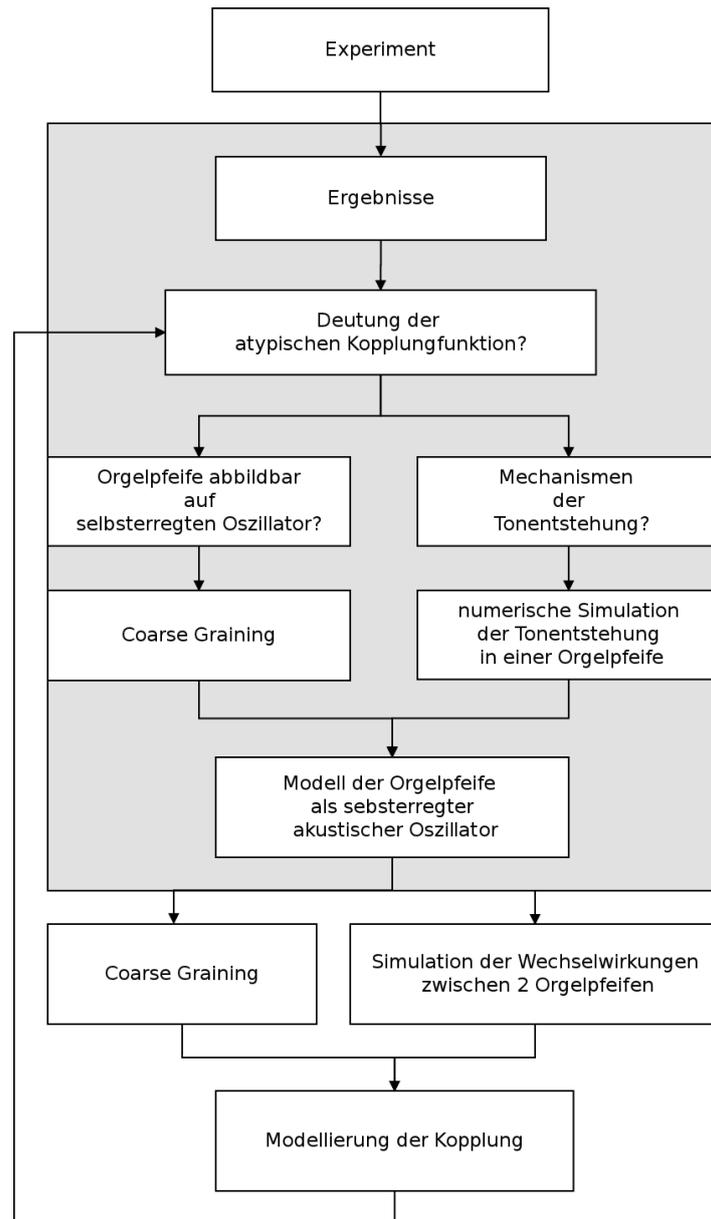
---

<sup>1</sup>Bei konservativen Oszillatoren, wie in allen konservativen Systemen, ist die Energie eine Erhaltungsgröße.

<sup>2</sup>Wenn sich zwei oder mehrere leicht gegeneinander verstimmte Orgelpfeifen auf eine gemeinsame Frequenz einigen, nennt man dies bei den Orgelbauern Anziehung.

Dies kann gelingen, wenn man entweder den Pfeifen den unteren Halbraum zur Abstrahlung nimmt oder auch durch symmetrische Phasenkopplung der betreffenden Pfeifen. In beiden Fällen erfordert dies bestimmte Anordnungen und Bauweisen der Orgel. Die genannten Beispiele aus der Praxis der Orgelbauer sind eine gute Motivation, die Physik hinter den Fragestellungen intensiv zu beleuchten.

Die vorliegende Arbeit ist eine Weiterführung der Forschungen von Prof. M. Abel, Dr. K. Ahnert und Dr. S. Bergweiler [1] von 2009, die das Synchronisationsverhalten einer Orgelpfeife unter Einfluss einer treibenden, periodischen Kraft, realisiert durch einen Lautsprecher, zum Thema hatte. Jetzt wird das Synchronisationsverhalten zweier Orgelpfeifen untersucht. Dabei liegt der Fokus auf zwei Themen, der Identifikation der Kopplungsfunktion und der physikalischen Deutung der Kopplungsfunktion. Letzteres erfordert ein tieferes Verständnis der fluiddynamischen und aero-akustischen Ursachen für die Tonentstehung einer Orgelpfeife. Beiden Themen widmet sich diese Arbeit.



**Abbildung 1.1.:** Flussdiagramm der vorgelegten Arbeit (grau) und mögliche Weiterführung der Forschung.

Das Flussdiagramm in Abb. 1.1 veranschaulicht die Struktur der Arbeit und ihre Einbettung in

das Forschungsfeld. Die Deutung der Kopplungsfunktion ist eine komplexe Fragestellung, für die der Rahmen einer Diplomarbeit nicht ausreicht. Die hier gewonnenen Erkenntnisse sind aber wichtige Bausteine auf dem Weg hin zu einer physikalischen Erklärung der komplexen Wechselwirkungen und deren fluiddynamischen und aero-akustischen Ursachen. Die Arbeit ist daher keine Endstation, sondern vielmehr ein wichtiger Meilenstein für das Verständnis von Synchronisation zwischen Orgelpfeifen.

### **1.3. Aufbau und Kapitelübersicht**

Das hier untersuchte System zweier miteinander wechselwirkender, labialer Orgelpfeifen ist ein kompliziertes, aero-akustisches, nichtlineares, ausgedehntes, dynamisches System mit Randbedingungen. Deshalb werden im Kapitel 2 Grundlagen aus mehreren Teilbereichen der Physik bereitgestellt. Neben dem Aufbau der Orgelpfeife werden die Grundzüge der Synchronisationstheorie, der Fluidodynamik und der Akustik vorgestellt.

In Kapitel 3 werden, ausgehend von einer kurzen Beschreibung der experimentell gewonnenen Messdaten, die Ergebnisse der Datenanalyse präsentiert. Es werden die gefundenen Synchronisationsphänomene besprochen und über die Konstruktion der Arnoldzunge die Kopplungsfunktion bestimmt. Aus den gewonnenen Erkenntnissen wird mit der Methode des Coarse Graining ein konzeptionelles Oszillator-Modell der Orgelpfeife entwickelt. Die sich daraus ergebenden Fragestellungen führen in das Kapitel 4, in dem die durchgeführten numerischen Simulationen der Tonentstehung in der Orgelpfeife vorgestellt werden. In Kapitel 5 wird eine der Simulationsrechnungen im Detail ausgewertet und analysiert. Dabei werden die Mechanismen der Tonentstehung identifiziert und lokalisiert.

Die Schlussbetrachtungen des Kapitels 6 fassen die gewonnenen Erkenntnisse der vorgelegten Arbeit zusammen und setzen die Arbeit in den Kontext zukünftiger Forschungsfelder. Im Anhang werden weitere Visualisierungen der Simulation bereitgestellt. Darüber hinaus finden sich hier mathematische Ergänzungen und wichtige Teile des Quellcodes der Simulation. Auf dem der Arbeit beigelegten Datenträger sind Film-Sequenzen hinterlegt, die die Simulationsergebnisse veranschaulichen. Das Inhaltsverzeichnis des Datenträgers befindet sich im Anhang.

## 2. Grundlagen

*Wie verstanden die Alten das Naturgesetz? Für sie war es eine innere Harmonie, sozusagen statisch und unveränderlich; oder es war ein Idealbild, dem nach zustreben die Natur sich bemühte. Für uns hat ein Gesetz nicht mehr diese Bedeutung; es ist eine unveränderliche Beziehung zwischen der Erscheinung von heute und der von morgen; mit einem Wort: es ist eine Differentialgleichung.*

HENRI POINCARÉ, „DER WERT DER WISSENSCHAFT“

Das in dieser Arbeit untersuchte System zweier miteinander wechselwirkender, labialer Orgelpfeifen ist ein kompliziertes, aero-akustisches, nichtlineares, ausgedehntes, dynamisches System mit Randbedingungen. Den vielen, vorangestellten Adjektiven lässt sich entnehmen, dass hier Physik aus sehr unterschiedlichen Teildisziplinen am Wirken ist. Um dieser Vielfalt Rechnung zu tragen, ist es notwendig, einige ausgewählte Grundlagen aus den jeweiligen Teilbereichen der Physik bereitzustellen. Dieses Kapitel ist deshalb in drei Teile geordnet. Es werden die für die Beschreibung der Synchronisation erforderlichen Aspekte der Nichtlinearen Dynamik, die fluiddynamischen als auch die daraus abgeleiteten akustischen Grundlagen bereitgestellt. Zu Beginn möchte ich jedoch einige Erklärungen zum Aufbau einer Orgelpfeife geben.

### Aufbau einer Orgelpfeife

Wie in Kapitel 3 noch beschrieben werden wird, bestand der experimentelle Aufbau aus zwei gedackten Labialpfeifen aus Holz mit rechteckigem Querschnitt. Kennzeichnend für diese Art von Orgelpfeifen ist, dass deren oberes Ende geschlossen ist und dass sie ein sogenanntes **Labium** besitzen, einen spitzen Keil, welcher mitverantwortlich ist für die Tonerzeugung (vgl. Abb. 2.1). Im Orgelbau nennt man solch geschlossene Orgelpfeifen auch **gedackte** Pfeifen. Das Verschließen des oberen Endes der Orgelpfeife hat zur Folge, dass der von einer solchen Pfeife erzeugte Ton eine Oktave tiefer klingt, als die Resonatorlänge es erwarten ließe. Das liegt daran, dass eine stehende Druckwelle im Resonatorraum durch Reflexion am Rohrende dort nicht einen Schwingungsknoten, sondern erzwungenermaßen einen Schwingungsbauch ausbildet. Innerhalb der Pfeife liegt dann statt der Hälfte, wie bei einer offenen Pfeife, nur ein Viertel der Schwingung vor. Die Wellenlänge einer gedackten Orgelpfeife ist dem entsprechend doppelt so groß, der erklingende Ton halb so hoch wie bei einer offenen Pfeife. Daraus folgt auch, dass eine gedackte Pfeife im Wesentlichen nur **ungeradzahlige Harmonische** ausbilden kann. Die 1. Harmonische nennt man den **Grundton**. Der erste **Oberton** des Grundtons ist demnach die 2. Harmonische. Ein harmonischer Oberton schwingt mit einem ganzzahligen Vielfachen der Frequenz des Grundtons. Die Obertöne sind stehende Wellen mit der Wellenlänge  $\lambda_n$ . Die Frequenzen  $f_n$  und die Wellenlängen der Harmonischen lassen sich leicht berechnen

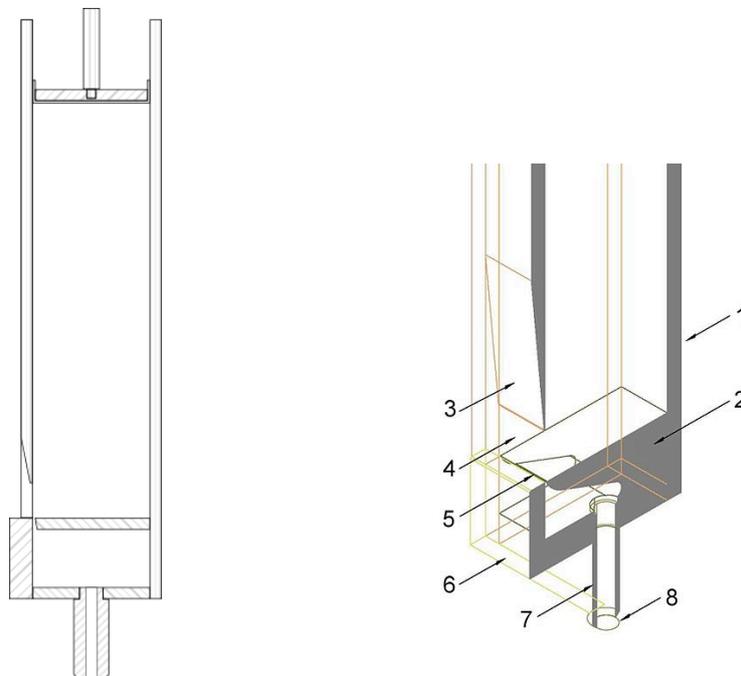
$$f_n = \frac{n \cdot c}{4 \cdot L} \quad (2.1)$$

$$\lambda_n = \frac{4 \cdot L}{(2n + 1)}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.2)$$

Dabei ist  $c$  die **Schallgeschwindigkeit** des Mediums und  $L$  die Resonatorlänge. Mit der Angabe der Schallgeschwindigkeit muss immer auch die Angabe des Druckes und der Temperatur einhergehen. In

dieser Arbeit wird die Schallgeschwindigkeit für Luft bei 20 °C und dem Normaldruck von 101325 Pa verwendet. Unter diesen Randbedingungen gilt:  $c_{Luft} = 343 \text{ m/s}$ . Die Reflexion der Druckschwankung am oberen Ende einer offenen Orgelpfeife, findet nicht unmittelbar beim Übertritt in die umgebende Luft statt, sondern etwas weiter außerhalb. Die akustische Länge einer Pfeife ist also immer etwas größer, als ihre Längenabmessung, und zwar um die Mündungskorrektur. Sie ist abhängig vom Pfeifenradius. Exakter Weise muss man auch noch eine zweite Mündungskorrektur für den **Aufschnitt** am Labium einführen. Mit Aufschnitt meint man die Maße der schmalen Öffnung, direkt unterhalb des Labiums. Diese Öffnung wird in englischer Literatur auch mit **mouth**, also Mund bezeichnet. (vgl. Abb. 2.1). Die Größenordnung der Mündungskorrektur am Aufschnitt ist für Orgelbauer oft vernachlässigbar. Für die Analyse in dieser Arbeit wird sie jedoch benötigt.

Die Länge einer Orgelpfeife, genauer ihres Resonatorinnenraumes, bestimmt im Wesentlichen die Tonhöhe. Der Querschnitt der Pfeife, die Labienbreite, als auch die Höhe des Aufschnittes prägen die **Klangfarbe**. Die Klangfarbe der Orgelpfeife wird außerdem von der Anzahl und Form der **Kernstiche**, kleinen Kerben auf dem Unterlabium sowie durch die **Expression**, einem Stimmschlitz im oberen Drittel des Resonatorcorpusses bestimmt. Alle diese Maße einer Pfeife fasst man unter dem Begriff **Mensur** zusammen. Abbildung 2.1 zeigt den schematischen Aufbau einer labialen Orgelpfeife aus Holz.



**Abbildung 2.1.:** Aufbau einer labialen Orgelpfeife aus Holz. (1) Pfeifenkorpus aus Holz, (2) Kern, (3) Oberlabium (oft nur Labium), (4) Aufschnitt (auch Mund), (5) Kernspalt, (6) Vorschlag (entspricht dem Unterlabium einer Metallpfeife), (7) Pfeifenfuß, (8) Fußloch. Quelle: [2]

## 2.1. Theorie der Synchronisation

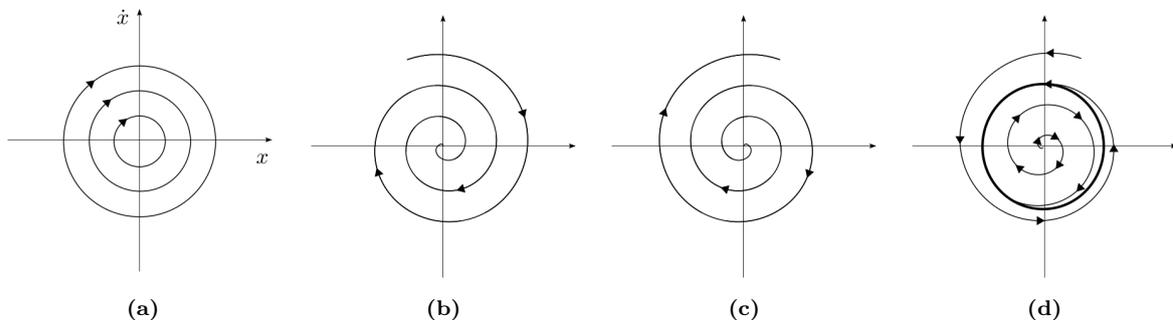
In diesem Abschnitt werden die Grundzüge der Synchronisationstheorie vorgestellt. Die Betrachtungen folgen den hervorragenden Ausführungen des Buches *Synchronization - A universal concept in nonlinear sciences* von A. Pikovsky, M. Rosenblum und J. Kurths [27]. Der zentrale Begriff der Synchronisationstheorie ist der des **selbsterregten Oszillators**, *engl.: self-sustained oscillator*. Darunter versteht man die Eigenschaft eines dissipativen, **autonomen**, also zeitunabhängigen Systems, nicht abklingende und gegen kleine Störungen stabile Oszillationen auszuführen. Wie passt das

zusammen?

### 2.1.1. Grundbegriffe

#### Dissipation, Nichtlinearität, Stabilität

Alle natürlichen, **makroskopischen Systeme** dissipieren Energie, d.h. in ihnen wird Energie irreversibel in andere Energieformen umgewandelt, z.B. durch Reibung, elektrische Widerstände, akustische Impedanzen und weitere Mechanismen. Diese Eigenschaft unterscheidet sie von **konservativen** (lat.: conservare: bewahren) Systemen, bei denen die Energieumwandlung stets reversibel ist. Oszillationen **dissipativer** (lat.: dissipare: zerstreuen) Systeme würden also ohne eine ständige Zufuhr von Energie mehr oder weniger schnell abklingen. Auch rein **erregbare** (lat.: excitare: erregen) Systeme, z.B. Systeme mit ausschließlich negativer Reibung, können keine stabilen Oszillationen ausbilden. In diesem Fall führt die permanente Energiezufuhr zu einem unendlichen Anwachsen der Energie des Systems und seiner Schwingungsamplituden. Die Abbildungen 2.2a - 2.2c verdeutlichen die drei Sachverhalte.



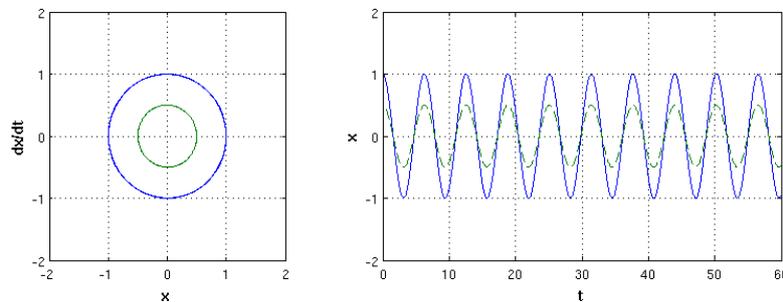
**Abbildung 2.2.:** (a) Periodische Bewegungen eines konservativen, linearen Systems im Phasenraum. Besitzt das System eine periodische Lösung, so auch gleich eine ganze Familie von periodischen Lösungen, die durch die Anfangsbedingungen festgelegt sind. Störungen des Systems bedeuten eine andere Energie. Die neuen Lösungen sind benachbarte, ebenfalls geschlossene Kurven im Phasenraum. (b) Ein erregbares, lineares System. Das unendliche Anwachsen der Amplitude wird im Phasenraum durch eine nach außen wachsende Spirale dargestellt. Der Fixpunkt im Zentrum ist instabil. (c) Die Darstellung eines dissipativen, linearen Systems durch Spiralen mit nach innen abnehmender Amplitude im Phasenraum. Anfangs große Amplituden der Oszillation klingen im zeitlichen Verlauf ab. Die Trajektorie steuert auf den einzigen stabilen Fixpunkt des Systems zu, seine Ruhelage. (d) Selbsterregtes System. Trotz unterschiedlicher Anfangsbedingungen wickelt sich die Trajektorie nach endlicher Zeit auf den Grenzyklus auf.

Selbsterregte Oszillatoren führen hingegen stabile Oszillationen aus. Das heißt, es existiert ein systemimmanentes Energiereservoir und ein interner Mechanismus, über den der Oszillator gerade so viel Energie aus dem Reservoir zu ziehen vermag, wie gerade benötigt wird, um die dissipativen Energieverluste auszugleichen. Es zeigt sich, dass der interne Mechanismus, mathematisch betrachtet, immer durch eine **Nichtlinearität** in den Gleichungen des Systems repräsentiert wird. Auch lineare Erregung und nichtlineare Dissipation ist denkbar. Rein lineare Systeme hingegen können keine selbsterregten Oszillationen ausführen. Die Eigenschaft der **Stabilität** des Oszillators gegenüber Störungen unterscheidet den selbsterregten Oszillator von allen anderen angesprochenen Systemtypen. Geometrisch kann man die selbsterregten Oszillatoren über die Existenz eines **Grenzyklus** definieren (vgl. Abb. 2.2d). Der Begriff des **Grenzyklus** (engl: **limit cycle**) wurde von dem französischen Mathematiker und Vater der nichtlinearen Dynamik, **Henri Poincaré** (1854-1912) eingeführt:

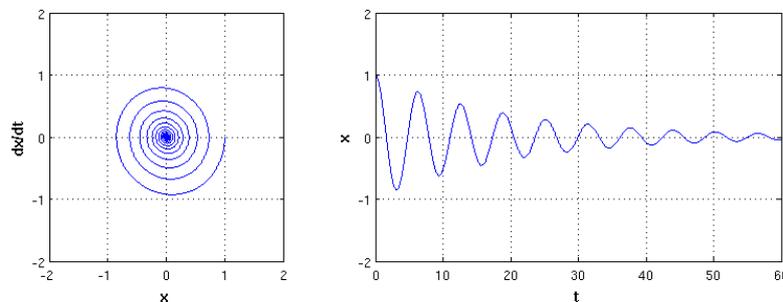
Wenn alle **Trajektorien** eines Systems im Phasenraum zu einer kompakten Menge hin konvergieren, die selbst keinen **Fixpunkt** enthält, dann erhält man als Grenzmenge einen geschlossenen Orbit. Eine solche geschlossene Trajektorie heißt **Grenzyklus**.

Als **Trajektorie** bezeichnet man im Allgemeinen die Bahnkurve der Lösung einer Differentialgleichung. In der Physik, speziell in der nichtlinearen Dynamik ist die Trajektorie die Kurve einer Lösung im Phasenraum. Als **Fixpunkt** wird in der Theorie der dynamischen Systeme ein Punkt bezeichnet, bei dem sich die zeitliche Entwicklung des Systems nicht ändert, d.h bei dem die zeitliche Änderung des Systems gleich Null ist.

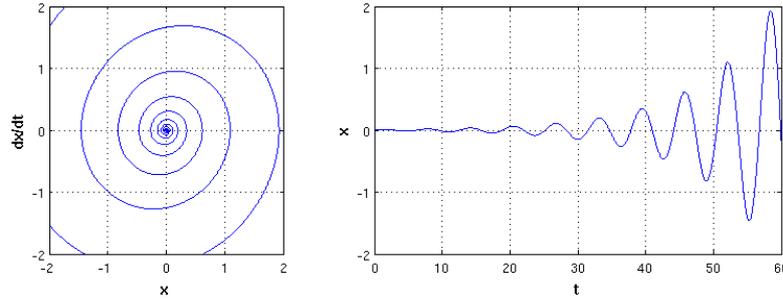
Man unterscheidet, grob gesprochen, stabile und instabile Grenzzyklen, je nachdem, ob die Trajektorien in unmittelbarer Nachbarschaft auf den Grenzzyklus zu laufen oder sich von ihm entfernen. Stabile Grenzzyklen werden oft auch **Attraktoren** genannt, weil sie auf die Trajektorien in ihrer Nähe anziehend wirken. Somit lassen sich selbsterregte Oszillatoren immer eindeutig durch ihr **Phasenportrait** identifizieren, den Grenzzyklus. Die Form des Grenzzyklus kann stark von der eines Kreises abweichen. Physikalisch heißt das, die Art und Weise der Oszillationen kann stark von einer gleichmäßigen, periodischen Bewegung abweichen. Sind die internen Parameter des Oszillators so determiniert, dass die Nichtlinearität klein ist gegenüber den linearen Termen, so wird sich das System ähnlich zu einem harmonischen Oszillator verhalten. Man spricht dann von **quasi-linearen** Systemen. In diesem Fall wird die Darstellung des Grenzzyklus im Phasenraum nur wenig von der Kreisform der Trajektorie des harmonischen Oszillators abweichen. Bei starken Nichtlinearitäten kann es komplizierte Formen des Grenzzyklus geben und somit auch ein entsprechend kompliziertes Verhalten der Oszillationen des Systems. In Abbildung 2.3 sind noch einmal beispielhaft die verschiedenen Systemtypen dargestellt, links im Phasenraum und rechts in der Ort-Zeit-Darstellung. Das Bild 2.3a zeigt exemplarisch zwei Lösungen des harmonischen Oszillators, ein konservatives System, ohne Dämpfung. Es gibt zu jeder Lösung genau eine geschlossene Trajektorie. Dies sind jedoch **keine Grenzzyklen!**, denn verschiedene Anfangsbedingungen führen zu verschiedenen geschlossenen Kurven, (vgl. Abb. 2.2a und 2.3a). Das Bild 2.3b zeigt die Lösung des gedämpften harmonischen Oszillators, offenbar ein dissipatives System (vg. Abb. 2.2b). Im Bild 2.3c ist die Lösung für den harmonischen Oszillator mit rein negativer Dämpfung gezeigt, ein erregbares System (vgl. Abb. 2.2c). Im Bild 2.3d schließlich sind zwei Lösungen eines selbsterregten Oszillators dargestellt, hier des sogenannten **van der Pol Oszillators** mit vergleichsweise kleiner Nichtlinearität. Zwei sehr unterschiedliche Anfangsbedingungen führen auf denselben stabilen Grenzzyklus des Systems (vgl. Abb. 2.2d).



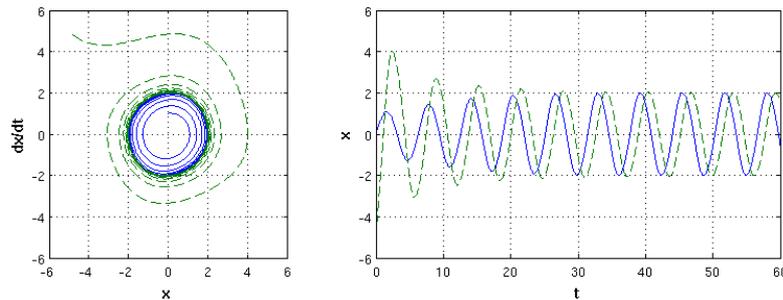
(a) Der harmonische Oszillator:  $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$ ,  $\omega_0 = 1.0$ . Gezeigt sind zwei Lösungen für die Anfangsbedingungen:  $x_1(0) = 1.0$ ,  $\dot{x}_1 = 0.0$ , und  $x_2(0) = 0.5$ ,  $\dot{x}_2 = 0.0$ .



(b) Der gedämpfte harmonische Oszillator:  $\ddot{x} + \gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = 0$ ,  $\omega_0 = 1.0$ ,  $\gamma = 0.1$ . Die Anfangsbedingungen sind:  $x(0) = 1.0$ ,  $\dot{x} = 0.0$



(c) Der negativ gedämpfte harmonische Oszillator:  $\ddot{x} + \gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = 0$ ,  $\omega_0 = 1.0$ ,  $\gamma = -0.18$ . Die Anfangsbedingungen sind:  $x(0) = 0.0$ ,  $\dot{x} = 0.01$



(d) Der van der Pol Oszillator:  $\ddot{x} - \mu(1 - x^2)\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$ ,  $\omega_0 = 1.0$ ,  $\mu = 0.08$ . Die jeweiligen Anfangsbedingungen der zwei Lösungen sind:  $x_1(0) = 0.0$ ,  $\dot{x}_1 = 1.0$ ,  $x_2(0) = -5.0$ ,  $\dot{x}_2 = 5.0$

**Abbildung 2.3.:** (a) Der harmonische Oszillator als Beispiel für ein konservatives System. (b) Der gedämpfte harmonische Oszillator, ein dissipatives System. (c) Der harmonische Oszillator mit negativer Dämpfung, ein erregbares System. (d) Der van der Pol Oszillator als Beispiel für einen selbsterregten Oszillator.

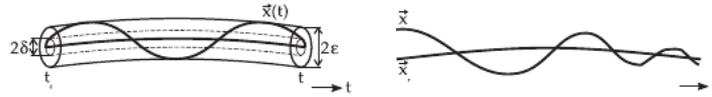
Die Form des Grenzyklus ist aufgrund der kleinen Nichtlinearität ähnlich dem Trajektorienbild des harmonischen Oszillators, das heißt nach einer gewissen Einschwingzeit, oszilliert der van der Pol Oszillator fast so sinusoidal wie der harmonische Oszillator. Wegen dieser Ähnlichkeit nennt man schwingungsfähige Systeme mit kleinen Nichtlinearitäten auch **quasi-harmonische** Systeme. Betrachtet man die Differentialgleichung des van der Pol Oszillators genauer, so wird klar, wie die quadratische Nichtlinearität im System wirkt und es stabilisiert.

$$\ddot{x} - \mu(1 - x^2)\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad (2.3)$$

Der nichtlineare Dämpfungsparameter  $\mu$  ist positiv definit, d.h. es gilt  $\mu \geq 0$ . Für kleine Auslenkungen  $|x| < 1$  bleibt der Term in der Klammer positiv und somit das Vorzeichen des gesamten Dämpfungsterms  $\mu(1 - x^2)$  negativ. Negative Dämpfung aber bedeutet Anregung. Das System beginnt zu schwingen, seine Amplituden wachsen an. Dabei lässt sich aus dem Phasenraumbild erkennen, dass die Zuwachsrates der Amplituden pro Umlauf abnimmt. Nach hinreichend vielen Umläufen erreicht die Trajektorie, vom inneren Gebiet kommend, den Grenzyklus. Werden als Anfangsbedingungen Amplituden  $|x| > 1$  gewählt, so ist der Term in der Klammer negativ. Damit ist das Vorzeichen des gesamten Dämpfungsterms positiv und die Auslenkungen des Systems werden gedämpft. Auch hier nimmt die Rate der Dämpfung pro Umlauf ab. Die Trajektorie erreicht, von außen kommend, nach hinreichend vielen Umläufen den Grenzyklus. Die abnehmende Rate der Anregung, sowie die Rate der Dämpfung pro Umlauf lässt sich auch anders formulieren, nämlich: Kleine Störungen bleiben klein. Dies ist, salopp gesprochen, genau der Inhalt der sogenannten **Ljapunov-Stabilität**:

Eine Trajektorie  $x_r(t)$  heißt Ljapunov-stabil wenn sich  $\forall \epsilon > 0$  ein Wert  $\delta(\epsilon) > 0$  finden

lässt, so dass gilt: Jede Lösung mit  $|\vec{x}(t_0) - \vec{x}_r(t_0)| < \delta$  erfüllt  $\forall t > t_0$  die Bedingung  $|\vec{x}(t) - \vec{x}_r(t)| < \epsilon$ .



**Abbildung 2.4.:** (Links) Die Nachbartrajektorien  $\vec{x}(t)$  einer Ljapunov-stabilen Trajektorie  $\vec{x}_r(t)$  bleiben in der Nähe. (Rechts) Bei asymptotischer Stabilität werden die Nachbartrajektorien angezogen, so dass der Abstand mit der Zeit gegen Null konvergiert. Bildquelle: [14]

Auf den russischen Mathematiker Alexander Ljapunov, (1857-1918), gehen wesentliche Arbeiten zur Stabilität einer Bewegung zurück. Seinen Namen findet man in vielen unterschiedlichen Schreibweisen wie z.B, Ljapunoff, Lyapunov, oder Liapunov. Gemeint ist jedoch immer dieselbe Person. Der betrachtete Grenzyklus des van der Pol Oszillators ist also attraktiv, und Ljapunov-stabil. Solche Grenzyklen heißen **asymptotisch stabil**.

## Phase und Amplitude

Der Begriff der **Phase** spielt eine Schlüsselrolle in der Theorie der Synchronisation. Im Folgenden wird die Phase am Beispiel des quasi-linearen Oszillators eingeführt. Die Gleichung für den quasi-linearen Oszillator lautet

$$\ddot{x} + \omega_0^2 = f(x, \dot{x}) = \mu \quad (2.4)$$

Die Funktion  $f(x, \dot{x})$  stellt dabei die kleine Nichtlinearität  $\mu$  dar, die im Allgemeinen von  $x$  und  $\dot{x}$  abhängt. Die Form des Grenzyklus eines quasi-linearen Oszillators ist sehr ähnlich zu einem Kreis, (vgl. Abb. 2.3d) und somit können seine Oszillationen durch eine amplituden-modulierte Sinuskurve beschrieben werden

$$x(t) = A(t) \cdot \sin(\omega_0 t + \phi_0) \quad (2.5)$$

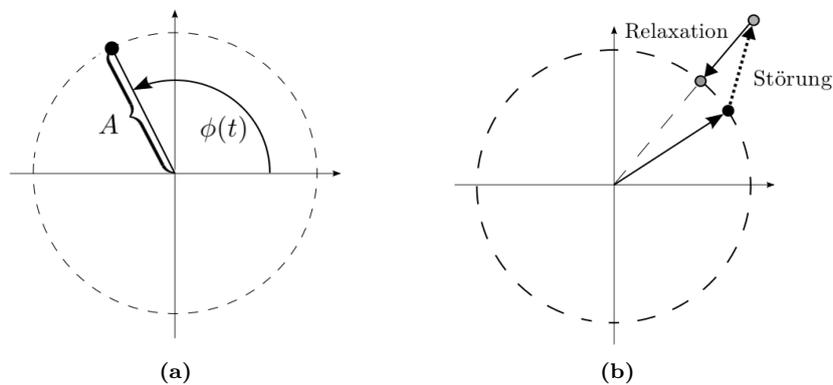
Dabei ist  $\omega_0$  die Kreisfrequenz. Sie ist mit der Periode  $T$  über  $\omega_0 = 2\pi/T$  verknüpft und sollte unterschieden werden von der zyklischen **Frequenz**  $f_0 = 1/T = \omega_0/2\pi$ . Wenn im Folgenden dieses Kapitels von der Frequenz gesprochen wird, so ist jedoch eine Kreisfrequenz  $\omega$  gemeint, nicht  $f$ . Die Intensität der Oszillationen wird durch die **Amplitude**  $A(t)$  beschrieben. Die Größe

$$\phi(t) = \omega_0 t + \phi_0 \quad (2.6)$$

nennt man **Phase**. Die Phase ist eine prinzipiell unbeschränkte Größe. Da jedoch der Sinus eine periodische Funktion ist, d.h. es gilt:  $\sin(\phi) = \sin(\phi + 2\pi)$ , gehören zwei Phasen, die sich um den Wert  $2\pi$  unterscheiden zu ein und demselben physikalischen Zustand. Deshalb gibt man die Phase häufig als Größe zwischen 0 und  $2\pi$  an. Die Größe  $\phi_0$  nennt man **Anfangsphase**. Im Gegensatz zur Amplitude, die sich nach einer gewissen Einschwingzeit, unabhängig vom Anfangszustand auf den Grenzyklus einstellt, hängt die Phase sehr wohl von ihrem Anfangszustand, der Anfangsphase  $\phi_0$  ab. Abbildung 2.5a stellt die Bewegung des Phasenraumpunktes  $(A, \phi)$  des Oszillators auf seinem Grenzyklus grafisch dar. Die Radialkomponente ist die Amplitude, die Winkelkoordinate ist die Phase. Der Phasenraumpunkt rotiert mit der Kreisfrequenz (Winkelgeschwindigkeit)  $\omega_0$  auf dem Grenzyklus, zum Beispiel gegen den Uhrzeigersinn. Die Phase  $\phi(t)$  wächst dann während einer Periode  $T$ , also einem Umlauf, um  $2\pi$ . Was passiert, wenn diese Bewegung gestört wird?

## Stabile Amplitude, freie Phase

Wie schon erwähnt, klingen Störungen der Amplitude mit der zeitlichen Entwicklung ab. Die Störung der Amplitude bedeutet eine transversale Störung des Grenzzyklus und daher kann man sagen, dass der Grenzzyklus in transversaler Richtung stabil ist. Das ist vergleichbar mit einem U-förmigen Potential, bei dem jede kleine Störung zurück ins Potentialminimum führt. Störungen der Phase hingegen können als tangentialer Störungen des Grenzzyklus aufgefasst werden. Solche Störungen bleiben bestehen. Weder nehmen sie zu, noch ab. Es gibt keinen bevorzugten Wert für die Phase, alle Anfangsphasen  $\phi_0$  sind zufällig verteilt, und äquivalent. Das heißt, in tangentialer Richtung besitzt der Grenzzyklus **neutrale**, oder **indifferente Stabilität**. Vergleichbar ist das mit einem planparallelen Potential. Jeder Punkt kann mit der gleichen Wahrscheinlichkeit eingenommen werden. Das Bild der Abb. 2.5b illustriert die Störung der Bewegung des Phasenraumpunktes auf dem Grenzzyklus. Es ist nun klar, dass sehr kleine Kräfte ausreichen, um die Phase zu stören. Die Hauptkonsequenz dessen ist, dass sich die Phase sehr leicht von solchen, externen Kräften **justieren** lässt. Dies ist der Grund dafür, warum selbsterregte Oszillatoren synchronisieren können!



**Abbildung 2.5.:** (a) Eine stationäre, selbsterregte Oszillation kann durch die Rotationsbewegung des Phasenraumpunktes auf dem Grenzzyklus beschrieben werden. Seine Polarkoordinaten entsprechen der Amplitude  $A$  und der Phase  $\phi(t)$  der Oszillation und beschreiben somit die Dynamik des Systemzustands vollständig. (b) In einem rotierenden Koordinatensystem entspricht der Zustand stationärer Oszillationen einem ruhenden Punkt (schwarz). Eine Störung befördert den Phasenraumpunkt aus dem Grenzzyklus heraus. Während die Störung der Amplitude nach einer gewissen Zeit wieder abklingt (der Phasenraumpunkt kehrt zurück auf den Grenzzyklus), bleibt die Störung der Phase bestehen.

## Die Phase eines beliebigen Grenzzyklus

Es soll jetzt der Grenzzyklus eines beliebigen, selbsterregten Oszillators mit Periode  $T$  betrachtet werden. Die Form kann stark von der eines Kreises abweichen. Wählt man einen beliebigen Startpunkt  $t = t_0$ , so kann man die Phase des Oszillators definieren über

$$\phi(t) := 2\pi \frac{t - t_0}{T} + \phi_0, \quad \phi_0 = \phi(t = t_0) \quad (2.7)$$

Die so definierte Phase ist eine Größe, die entlang der Trajektorie monoton wächst, d.h. es gilt

$$\frac{d\phi}{dt} = \omega_0 \quad (2.8)$$

und zwar über eine Periode genau um den Wert  $2\pi$ . Obgleich die Phase gleichförmig wächst, kann die Bewegung des Phasenraumpunktes auf dem Grenzzyklus sehr ungleichmäßig sein. Intervalle sehr

schneller Bewegungen können sich mit Intervallen sehr langsamer Bewegungen abwechseln. Solche Oszillationen nennt man **Relaxationsoszillationen**. Die besprochenen Eigenschaften, die transversale Stabilität und die tangentielle Neutralität des Grenzyklus, bleiben davon jedoch unberührt. In der nichtlinearen Dynamik werden diese Stabilitätseigenschaften durch den **Ljapunov-Exponenten** charakterisiert. Dabei entspricht die Konvergenzeigenschaft der Trajektorien einem negativen Ljapunov-Exponenten. Divergierende Trajektorien entsprechen einem positiven Ljapunov-Exponenten. Ist der Ljapunov-Exponent gleich Null, so liegt die neutrale Stabilitätseigenschaft vor. Genau dies gilt für die soeben definierte Phase. Die Phase ist **neutral-stabil**. Eine Störung der Phase nimmt mit der Zeit weder zu noch ab, sie ist also konstant (vgl. Gl. 2.8). Man kann auch sagen, die Phase ist Ljapunov-stabil, jedoch nicht asymptotisch stabil.

## 2.1.2. Synchronisation

### Synchronisation durch eine schwache, externe Kraft

Der einfachste Fall von Synchronisation ist das Mitführen eines selbsterregten Oszillators durch eine externe Kraft. Dieses Phänomen lässt sich auch als Synchronisation zweier Oszillatoren verstehen, wobei die Kopplung unidirektional ist, das heißt, ein Oszillator, (die externe, periodische Kraft) wirkt auf den zweiten Oszillator, (den selbsterregten Oszillator), jedoch nicht umgekehrt. Diese Situation findet sich in sehr vielen Beispielen wieder. Man denke an Funkuhren, die durch ein externes, sehr schwaches, jedoch äußerst präzises Signal in ihrer Ganggenauigkeit gesteuert werden, oder an die Tages- und Nachtrhythmen vieler Tier- und Pflanzenarten aufgrund der Rotation der Erde um sich selbst. Auch das Bild des auf einer hin- und her schwingenden Schaukel sitzenden Kindes, dem man zu den „richtigen“ Zeiten einen kleinen Schubs gibt, kann dienlich sein. Der Einfachheit halber sei der selbsterregte Oszillator quasi-linear, also

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = f(x, \dot{x}) \quad (2.9)$$

mit einer sehr schwachen Nichtlinearität  $f(x, \dot{x})$ . Die Lösung

$$x(t) = A \sin(\omega_0 t + \phi_0) \quad (2.10)$$

ist dann harmonisch mit der Frequenz  $\omega_0$  und der Amplitude  $A$ . Die externe Kraft sei ebenfalls harmonisch

$$f(t) = \varepsilon \cos(\omega t + \bar{\phi}_e) \quad (2.11)$$

mit der Frequenz  $\omega$  und der Amplitude  $\varepsilon$ . Die Phase der externen Kraft sei

$$\phi_e(t) = \omega t + \bar{\phi}_e \quad (2.12)$$

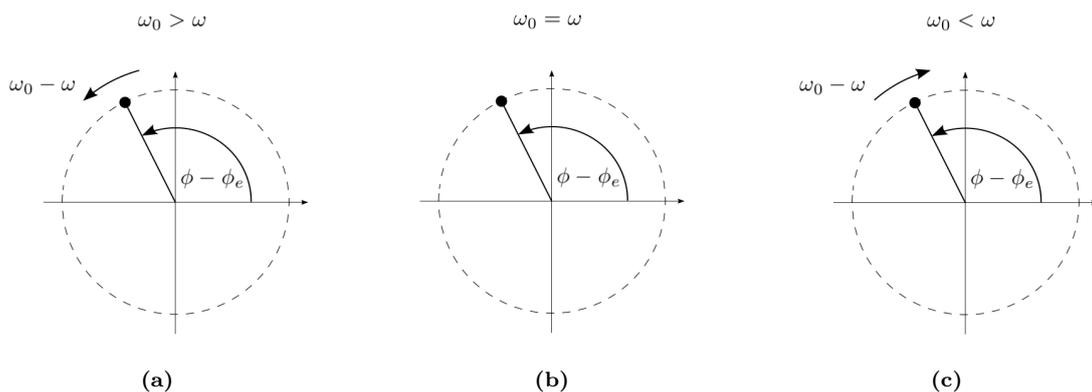
Wichtig hierbei ist, dass die Frequenz  $\omega$  der externen Krafteinwirkung im Allgemeinen ungleich ist zur **natürlichen Frequenz**<sup>1</sup>  $\omega_0$  des Oszillators. Die Differenz zwischen den Frequenzen  $\omega - \omega_0$  nennt man **Verstimmung**, *engl.*: **detuning**. Welche Folge hat nun das Angreifen der externen Kraft? Generell erwartet man, dass es zu einer Schwebung aufgrund der leichten Verstimmung kommt und somit zu einer Modulation der Amplitude. Mit dem Wissen des vorangegangenen Abschnittes (Amplitude stabil, Phase neutral) folgt jedoch, dass eine schwache, externe Kraft lediglich Einfluss auf die Phase nehmen kann, nicht jedoch auf die Amplitude. Somit kann man sich auf die Betrachtung der Phasendynamik beschränken. Es sei hier angemerkt, dass die oben eingeführte der Phase für autonome, nicht getriebene Oszillatoren definiert wurde. Unter Einfluss einer treibenden, externen Kraft wird die

<sup>1</sup>natürliche Frequenz, *engl.*: **natural frequency**.

Rotationsbewegung des Phasenraumpunktes nicht mehr gleichmäßig, sondern von komplexerer Natur sein.

### Der autonome Oszillator und die treibende, externe Kraft im rotierenden Bezugssystem

Wie gezeigt, ist der Grenzyklus des quasi-linearen Oszillators ein Kreis und der Phasenraumpunkt rotiert mit gleichmäßiger Winkelgeschwindigkeit  $\omega_0$  (vgl. Abb. 2.5). Um die Phasendynamik des getriebenen Systems zu untersuchen, ist es praktisch, in ein Bezugssystem zu wechseln, welches mit der Frequenz  $\omega$  der externen Kraft in dieselbe Richtung rotiert (z.B. gegen den Uhrzeigersinn). Als erste Überlegung sei die Amplitude der externen Kraft  $\varepsilon = 0$ . Für eine Verstimmung  $\omega_0 > \omega$  rotiert dann der Phasenraumpunkt im neuen Bezugssystem ebenfalls entgegen dem Uhrzeigersinn. Ist die Verstimmung Null, d.h. gilt  $\omega_0 = \omega$ , so ruht der Phasenraumpunkt im neuen Bezugssystem. Für  $\omega_0 < \omega$  rotiert der Phasenraumpunkt im Uhrzeigersinn. Abbildung 2.6 veranschaulicht diese drei Fälle. Die Position des Phasenraumpunktes lässt sich demnach durch die Differenz der Phasen des autonomen Systems minus der Phase des treibenden Oszillators  $\phi - \phi_e$  charakterisieren, welche entweder mit konstanter Winkelgeschwindigkeit  $\omega_0 - \omega$  anwächst, konstant bleibt, oder sich mit konstanter Winkelgeschwindigkeit  $\omega_0 - \omega$  verringert. Bislang gibt es noch keinerlei Erkenntnisgewinn durch die Betrachtung der Phasendynamik im rotierenden Bezugssystem. Für eine externe Kraft mit der Amplitude  $\varepsilon = 0$  scheint es daher erst einmal sinnlos die Phasendifferenz  $\phi - \phi_e$  des autonomen und des treibenden Systems einzuführen. Dies ändert sich grundlegend, wenn man die Kraft „anschaltet“, also  $\varepsilon \neq 0$  annimmt.



**Abbildung 2.6.:** In dem mit der Frequenz  $\omega$  rotierenden Bezugssystem entsprechen die Oszillationen auf dem Grenzyklus Rotationsbewegungen des Phasenraumpunktes. Sie verlaufen entweder entgegen (a) oder im Uhrzeigerrichtung (c), je nach Vorzeichen der Verstimmung  $\omega_0 - \omega$ . Ist die Verstimmung gleich Null, ruht der Phasenraumpunkt. Das zeigt Abbildung (b). Die Position des Phasenraumpunktes wird durch die Winkelvariable  $\phi - \phi_e$ , also der Differenz der Phase des autonomen minus der Phase des treibenden Systems, charakterisiert. Sie wächst in (a), bleibt konstant in (b) und verringert sich in (c).

Wie in Abbildung 2.7 dargestellt, ist die periodische Kraft  $\varepsilon \cos(\omega t + \bar{\phi}_e)$  in dem mit der Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  rotierenden Bezugssystem, ein Vektor mit konstanter Länge  $\varepsilon$ , der in einem gewissen Winkel  $\phi^0$  am Phasenraumpunkt angreift. Der Effekt der externen Kraft auf den Phasenraumpunkt hängt jetzt also von der Phasendifferenz  $\phi - \phi_e$  ab! In den Punkten 1 und 2 ist die Kraft orthogonal zum Verlauf der Trajektorie und kann daher keinen Einfluss auf die Phase nehmen. In den Punkten 3 und 4 ist der Effekt der Kraft maximal, weil sie hier tangential, also gerade in Richtung der Phase angreift. In den Punkten 6 und 7 ist der Effekt der Kraft durch mittlere Werte bestimmt. Die wichtige Beobachtung dabei ist, dass es auf dem Grenzyklus sowohl Regionen gibt, in denen der Phasenraumpunkt durch die externe Kraft in Uhrzeigerrichtung verschoben wird, als auch Regionen in denen der Phasenraumpunkt entgegen dem Uhrzeigersinn verschoben wird. Außerdem erkennt man, dass Punkt 1 ein **stabiler Gleichgewichtspunkt** ist, während Punkt 2 einen **instabilen Gleichgewichtspunkt** markiert. Mathematisch betrachtet, ist der stabile Gleichgewichtspunkt bei  $\phi^0$  asymptotisch stabil,

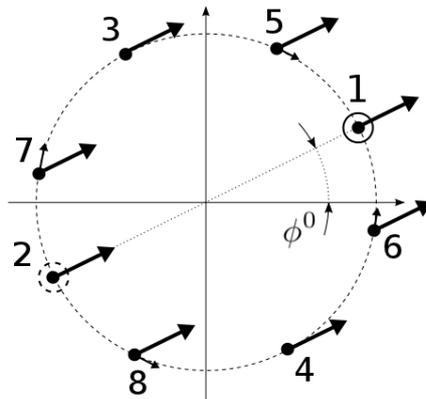
während die Phase des nichtgetriebenen Systems **marginal-stabil** aber nicht asymptotisch stabil ist. In der nichtlinearen Dynamik nennt man instabile Fixpunkte wie den Punkt 2 auch **Repeller**. Stabile Fixpunkte wie Punkt 1 heißen **Punkt-Attraktoren**. Zusammenfassend findet man folgende Effekte der Verstimmung und des Treibens:

- 1.) Verstimmung ohne treibende Kraft korrespondiert mit einer Rotation des Phasenraumpunktes mit der Winkelgeschwindigkeit  $\omega_0 = \omega$ .
- 2.) Ein Treiben ohne Verstimmung produziert zwei Gleichgewichtslagen auf dem Grenzyklus, eine stabile und eine instabile Gleichgewichtslage.

Im folgenden Abschnitt wird gezeigt, wie das Wirken beider Faktoren, der Verstimmung und der externen Kraft zu Bedingungen führt, bei denen die Kraft den Oszillator synchronisieren kann.

### Phasen- und Modenkopplung (phase locking, mode locking)

Es soll zuerst der einfachste Fall betrachtet werden, nämlich dass die Verstimmung gleich Null ist. Das heißt die Frequenz  $\omega$  der treibenden, externen Kraft ist gleich der Frequenz des autonomen Systems, der natürlichen Frequenz  $\omega_0$ . Es gilt  $\omega_0 - \omega = 0$ . In Abbildung 2.7 ist dieser Fall veranschaulicht. Die Anfangsphase  $\phi_0$  des autonomen Systems ist per Definition beliebig. Unabhängig von der Anfangsphasendifferenz  $\phi_0 - \phi_e$  wandert der Phasenraumpunkt unter Einfluss der externen Kraft zur stabilen Gleichgewichtslage. Das heißt, die Anfangsphase des Oszillators wird durch die externe, treibende Kraft auf den Wert  $\phi = \phi_e + \phi^0$  justiert. Noch einmal: Es genügt eine verschwindend kleine Kraft, um den Phasenraumpunkt in die Gleichgewichtslage zu verschieben, da der Grenzyklus in tangentialer Richtung neutral-stabil ist. In diesem Fall dauert es allerdings eine sehr lange Zeit, bis die Gleichgewichtslage erreicht wird. Ist die Gleichgewichtslage schließlich erreicht, so existiert von nun an die  **feste Phasenbeziehung**  $\phi = \phi_e + \phi^0$  zwischen dem Oszillator und der treibenden Kraft. Die Phase  $\phi$  des Oszillators ist durch die externe Kraft **synchronisiert** worden. Dieser Fall ist insofern trivial, da ja beide Systeme laut Voraussetzung die gleiche Frequenz haben (Verstimmung  $\omega_0 - \omega = 0$ ).



**Abbildung 2.7.:** Eine schwache, externe Kraft kann die Amplitude des Grenzyklus nicht nachhaltig beeinflussen, aber sie kann die Phase  $\phi$  des Oszillators verschieben. Der Effekt des Treibens hängt von der Phasendifferenz  $\phi - \phi_e$  ab. In den Punkten 3 und 4 ist der Effekt maximal, während die Kraft in den Punkten 1 und 2 ausschließlich radial am Phasenraumpunkt angreift und die Phase somit nicht entlang des Grenzyklus zu verschieben vermag. In der Nähe des Punktes 2 wird die Phase durch die Kraft vom Punkt 2 weggeschoben. Den Punkt 2 nennt man Repeller. In der Nähe des Punktes 1 hingegen wird der Phasenraumpunkt zur stabilen Gleichgewichtslage im Punkt 1 hingezogen. Diesen Punkt nennt man einen Punkt-Attraktor. Die externe Kraft produziert also zwei Gleichgewichtslagen auf dem Grenzyklus, eine stabile und eine instabile.

Jetzt soll es eine Verstimmung  $\neq 0$  zwischen der externen, treibenden Kraft und dem autonomen Oszillator geben. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit soll  $\omega_0 > \omega$  gelten. Es gibt dann Bereiche auf dem Grenzzyklus, wo die Wirkung der treibenden Kraft gegen die Wirkung der Verstimmung arbeitet. Die treibende Kraft versucht die Phasen  $\phi$  und  $\phi_e + \phi^0$  gleich zu machen, während die Verstimmung (Rotation entgegen dem Uhrzeigersinn) versucht, die Phasen auseinander zu treiben. Je nach Größe der Verstimmung  $\omega_0 - \omega$  und der Amplitude  $\varepsilon$  der treibenden Kraft gewinnt eine der beiden Faktoren. Folglich lassen sich zwei qualitativ unterschiedliche Regime unterscheiden. Im folgenden Abschnitt werden beide Möglichkeiten beschrieben, unter der Annahme, dass die Amplitude der treibenden Kraft  $\varepsilon$  einen festen Wert hat, und die Verstimmung  $\omega_0 - \omega$  variiert.

### Kleine Verstimmung: Synchronisation

Eine kleine Verstimmung  $\omega_0 - \omega$ , mit  $\omega_0 > \omega$  bedeutet, dass der Phasenraumpunkt langsam entgegen dem Uhrzeigersinn rotiert. In Abbildung 2.8 wird dies durch die roten Pfeile verdeutlicht. Die unter dem Winkel  $\phi^0$  angreifende Kraft ist durch den dicken, schwarzen Pfeil mit konstanter Länge  $\varepsilon$  dargestellt, Der Anteil der treibenden Kraft, der tangential zum Grenzzyklus angreift ist als dünner, schwarzer Pfeil gekennzeichnet. Jetzt wird die Wirkung der externen Kraft auf den langsam rotierenden Phasenraumpunkt diskutiert. Die Wirkung des Treibens hängt, wie erwähnt, von der Differenz  $\phi - \phi_e$  ab. Wie in Abb. 2.8 zu sehen, gibt es Regionen auf dem Grenzzyklus, in denen die Kraft und die Verstimmung gegeneinander wirken (Punkte 1, 3, 4) als auch Regionen, in denen sich beide Effekte in ihrer Wirkung verstärken (z.B. Punkt 4). Bei einem bestimmten Wert der Phasendifferenz  $\Delta\phi = \phi - \phi_e - \phi^0$  (Punkt 1) balanciert die treibende, externe Kraft die Rotation des Phasenraumpunktes gerade aus und stoppt den Phasenraumpunkt. Die Frequenz des **getriebenen Oszillators**, man bezeichnet sie mit  $\Omega$  und nennt sie die **beobachtete Frequenz**, ist gleich der des treibenden Oszillators  $\omega$ , es gilt also  $\Omega = \omega$ . Eine feste Phasenbeziehung

$$\phi - \phi_e = \phi^0 + \Delta\phi$$

stellt sich ein. Diese Bewegung nennen wir **synchron**. In den Termini der Akustik nennt das dies den **Mitnahme-Effekt**. Man sieht, dass Synchronisation nicht etwa aufgrund einer Gleichheit der Phasen auftritt, sondern aufgrund einer festen Phasendifferenz, wobei man den Winkel  $\Delta\phi$  die **Phasenverschiebung**, *engl.: phase shift* nennt. Die Phasenverschiebung kann Werte im Intervall von  $-\pi/2 < \Delta\phi < \pi/2$  annehmen. Aus Abb. 2.8 erkennt man außerdem, dass es noch einen zweiten Punkt (Punkt 2) gibt, in dem die externe Kraft die Rotation des Phasenraumpunktes gerade kompensiert. Dieser Punkt ist jedoch instabil. Im Vergleich mit Abb. 2.7 ist schließlich zu erkennen, dass sich die Fixpunkte 1 und 2 auf dem Grenzzyklus infolge des „Anschaltens“ der kleinen Verstimmung aufeinander zubewegt haben. Als nächstes soll der Fall großer Verstimmung diskutiert werden.

### Große Verstimmung: quasi-periodische Bewegung

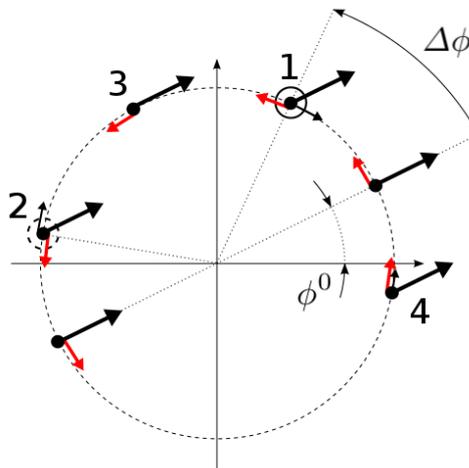
Überschreitet die Größe der Verstimmung einen kritischen Wert, wird der Einfluss der externen Kraft zu schwach, um die Rotation des Phasenraumpunktes noch zu stoppen. In Abb. 2.8 ist zu erkennen, dass mit wachsender Verstimmung die Fixpunkte in Richtung Punkt 3 wandern, wo der Bremseffekt der externen treibenden Kraft maximal ist. Bei weiterer Verstimmung nähern sich die Fixpunkte so sehr, dass sie im Punkt 3 kollidieren und sich auslöschten. Der Phasenraumpunkt beginnt dann mit der sogenannten **Schwebungsfrequenz**, *engl.: beat-frequency*. Der Begriff kommt vom Höreindruck, den solche Schwingungen verursachen. Das Beschleunigen und Bremsen des Phasenraumpunktes auf zwei bestimmte, minimale und maximale Frequenzen wird akustisch als **Schwebung** wahrgenommen. Aus der Überlagerung folgt auch ein Anwachsen und Abklingen der Amplitude. Der Höreindruck ist ein rhythmisches Schlagen.  $\Omega_b$  zu rotieren. Obwohl jetzt die externe, treibende Kraft zu klein ist, um den Oszillator zu synchronisieren, nimmt sie dennoch Einfluss auf die Bewegung des Phasenraumpunktes. Die Kraft lässt den Phasenraumpunkt nun ungleichmäßig auf dem Grenzzyklus rotieren. Da die Kraft im Mittel die Rotation dennoch bremst, gilt

$$\Omega_b < \omega_0 - \omega$$

Zur Erinnerung:  $\omega_0 - \omega$  ist die Winkelgeschwindigkeit des Phasenraumpunktes des autonomen Oszillators und bei den angestellten Betrachtungen wurde angenommen, dass  $\omega_0 > \omega$  ist. Kehrt man zurück in das nichtrotierende Bezugssystem so zeigt sich, dass der Oszillator mit der Frequenz  $\omega + \Omega_b < \omega_0$  schwingt und dass sein Phasenwachstum moduliert ist durch die Schwebungs-Frequenz  $\Omega_b$ . Die Bewegung ist also durch zwei Frequenzen charakterisiert,  $\omega + \Omega_b$  und  $\Omega_b$ . Man nennt solche Bewegungen **quasi-periodisch**. Etwas präziser: Eine Bewegung ist genau dann quasi-periodisch, wenn das Verhältnis  $(\omega + \Omega_b)/\Omega_b$  inkommensurabel, also irrational ist. Dies ist in der Praxis der typischer Fall.

Zusammenfassend lässt sich folgendes festhalten:

- 1.) Ist die Verstimmung klein, reichen kleinste Kräfte aus, um den Oszillator zu synchronisieren. In der Akustik nennt man dies **Mitnahme-Effekt**.
- 2.) Je größer die Verstimmung, desto größer muss die externe, treibende Kraft sein, um den Oszillator zu synchronisieren.

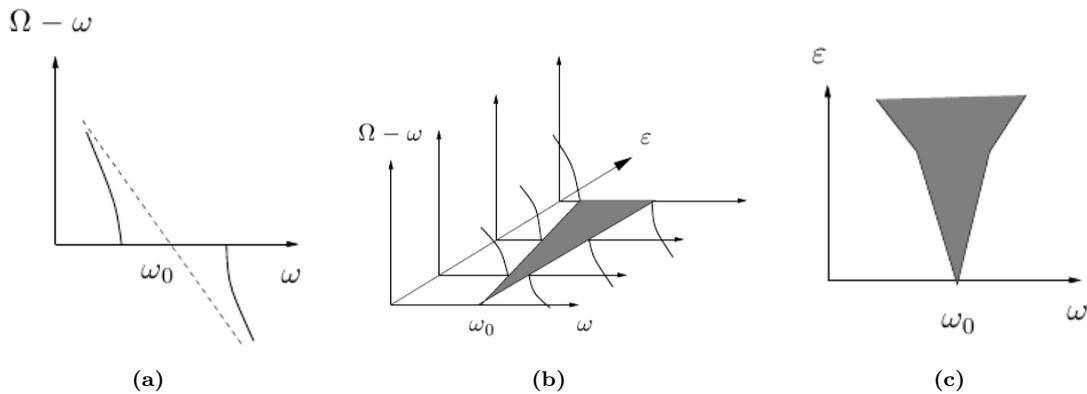


**Abbildung 2.8.:** Kleine Verstimmung mit  $\omega_0 > \omega$ . Der Phasenraumpunkt rotiert langsam entgegen dem Uhrzeigersinn (rote Pfeile). Die Rotation des Phasenraumpunktes wird beeinflusst durch die externe, treibende Kraft (dicker, schwarzer Pfeil), welche die Rotation entweder beschleunigt oder bremst, in Abhängigkeit von der Phasendifferenz  $\phi - \phi_e$ . Im Punkt 1 balanciert die treibende Kraft die Rotation des Phasenraumpunktes gerade aus. Der Phasenraumpunkt wird durch die treibende, externe Kraft gestoppt und eine stabile Phasenverschiebung bildet sich heraus. Mögliche Werte von  $\Delta\phi$  liegen im Intervall von  $-\pi/2 < \Delta\phi < \pi/2$ . Das ist die stabile Gleichgewichtslage. Eine instabile Gleichgewichtslage gibt es im Punkt 2.

### Synchronisationsplateaus, Arnoldzunge

In den letzten Abschnitten wurde gezeigt, dass für einen festen Wert der Amplitude  $\varepsilon$  der externen, treibenden Kraft die Frequenz des getriebenen Oszillators von der Verstimmung  $\omega_0 - \omega$  abhängt. Für ausreichend kleine Verstimmungen führt das externe Treiben dazu, dass die Frequenz des getriebenen Oszillators  $\Omega$  auf die Frequenz des treibenden Systems  $\omega$  justiert wird. Die Gleichheit  $\Omega = \omega$  nennt man **Modenkopplung**, *engl.:* **mode locking** oder **Synchronisation**. Die Justierung auf die gleiche Frequenz ist das wesentliche Merkmal für Synchronisation. Übersteigt die Verstimmung einen bestimmten kritischen Wert, reißt diese Gleichheit ab. In Abb. 2.9a wird die Situation veranschaulicht. Man erkennt eine Region, in der die Frequenzdifferenz  $\Omega - \omega$  des getriebenen Systems und des treibenden Systems Null ist. Diese Region nennt man **Synchronisationsplateau**, genauer 1 : 1 Synchronisationsplateau, da es sich hier um die Synchronisation der Grundfrequenzen der beiden Systeme

handelt. Es sei angemerkt, dass es auch Synchronisation höherer Ordnungen gibt, zum Beispiel 2 : 1 wenn gilt  $2\omega = \Omega$ , oder 2 : 3 für  $2\omega = 3\Omega$ , allgemein  $m : n$ . Trägt man die Synchronisationsplateaus für verschiedene treibende Amplituden  $\varepsilon$  auf, also für eine ganze Familie von Synchronisationsplateaus, so ergibt sich das Bild in Abb. 2.9b. Die Kurven bilden dann eine Region in der  $(\omega, \varepsilon)$ -Ebene, welche den Zustand der Synchronisation des Oszillators in Abhängigkeit von der Kopplungsstärke  $\varepsilon$  darstellt. Diese **Synchronisationsregion** nennt man **Arnoldzunge**, [27]. Für kleine Werte von  $\varepsilon$  sind die Grenzbereiche der Arnoldzunge gerade Linien. Dies ist ein generelles Merkmal schwach gekoppelter Oszillatoren. Für große Kopplungsstärken  $\varepsilon$  hängt die Form der Arnoldzunge von den speziellen Eigenschaften des Oszillators und der treibenden Kraft ab. In Abb. 2.9c ist die Arnoldzunge für die 1 : 1 Synchronisation schematisch gezeigt. Für höhere Ordnungen  $m : n$  gibt es im allgemeinen sehr schmale Nebenzungen links und rechts der 1 : 1 Arnoldzunge. Es ist wichtig zu bemerken, dass die Arnoldzunge die  $\omega$ -Achse berührt. Das heißt, dass der Oszillator für Verstimmung Null durch eine infinitesimale Kraft synchronisiert werden kann. Wie schon erwähnt dauert es in solchen Fällen unendlich lange, bis der Zustand der Synchronisation erreicht wird.



**Abbildung 2.9.:** (a) Frequenzdifferenz des getriebenen Oszillators  $\Omega$  und des treibenden Oszillators  $\omega$  als Funktion von  $\omega$  für einen festen Wert der treibenden Amplitude  $\varepsilon$ . In der Nähe der Frequenz des autonomen Oszillators  $\omega_0$ , wird die Frequenzdifferenz  $\Omega - \omega$  exakt Null. Das nennt man **Frequenzkopplung** oder auch **Modenkopplung**. Bei zu großer Verstimmung  $\omega_0 - \omega$  bricht die Synchronisation auf. Die Kraft ist jetzt zu klein, um den Oszillator zu synchronisieren, aber die treibende Frequenz „zieht“ die Frequenz des getriebenen Oszillators an. Die gestrichelte Linie zeigt  $\omega_0 - \omega$  vs.  $\omega$ . (b) Die Familie  $\Omega - \omega$  vs.  $\omega$  für verschiedene Amplituden  $\varepsilon$  den treibenden Oszillators bildet eine Region, in der die Frequenz des getriebenen Oszillators  $\Omega$  gleich der Frequenz des treibenden Oszillators  $\omega$  ist. Diese Region, dargestellt in grau, nennt man **Arnoldzunge** (c).

### Phasenkopplung - konstante Phasenverschiebung

Die Synchronisation wird oft mit Hilfe der **Phasenkopplung** beschrieben. Wie gezeigt, entspricht die nicht-synchrone Bewegung einem unbeschränkten Anwachsen der Phasendifferenz, während sich eine synchrone Bewegung durch eine feste, gebundene Phasendifferenz auszeichnet. In diesem Fall existiert eine konstante Phasenverschiebung zwischen den Phasen des getriebenen Oszillators und der treibenden Kraft

$$\phi(t) - \phi_e(t) = \text{const.} \quad (2.13)$$

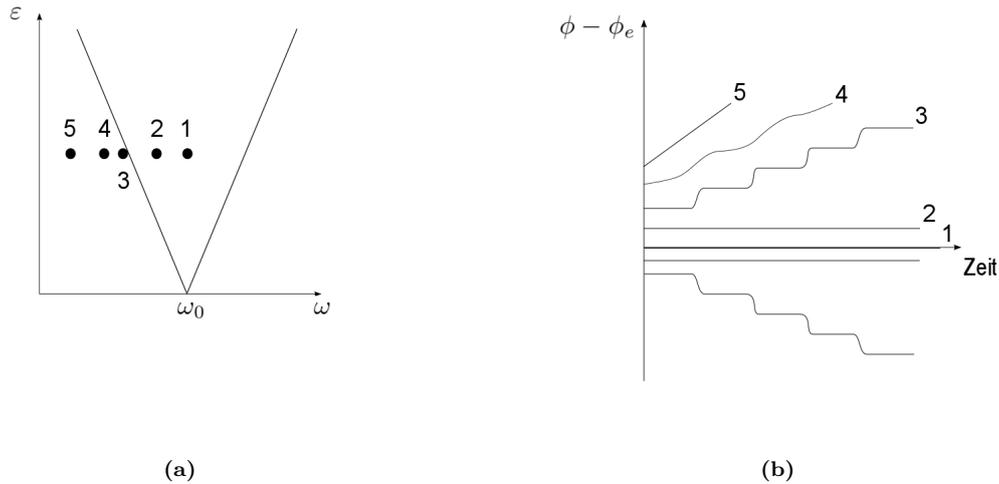
wobei die Konstante dem Wert von  $\phi^0 + \Delta\phi$  entspricht. Die Phasenverschiebung  $\Delta\phi$  hängt von der anfänglichen Verstimmung beider Systeme ab. Wird die Synchronisationsregion entlang einer festen

Kopplungsstärke  $\varepsilon$  durchlaufen, zum Beispiel wenn die Amplitude  $\varepsilon$  der treibenden Kraft konstant gehalten wird und man die Frequenz  $\omega$  des treibenden Systems variiert, so ändert sich die Phasendifferenz um den Wert  $\pi$ . Die Phasendifferenz ist nur Null, wenn die Verstimmung Null ist. Dies ist in der Mitte der Synchronisationsregion der Fall. Man erinnert sich, dass der konstante Winkel  $\phi^0$  von der Anfangsphase der treibenden Kraft abhängt und davon, wie diese auf den Oszillator wirkt. Es wird betont, dass die Vorstellung der Phasenkopplung impliziert, dass die Phasendifferenz gebunden ist und zwar in einen endlichen Bereich der Verstimmung, nämlich dem Bereich innerhalb der Synchronisationsplateaus.

## Durchgang durch die Synchronisation - Phasensprung und Periodizität

Es soll nun kurz der Durchgang durch die Synchronisationsregion besprochen werden. Dazu wird ohne Beschränkung der Allgemeinheit angenommen, dass die treibende Amplitude  $\varepsilon$  einen festen Wert hat und die Frequenz  $\omega$  variiert wird. Die in Abbildung 2.10a dargestellte Arnoldzunge mit den eingezeichneten fünf Punkten entlang einer gedachten, horizontalen Linie soll diese Situation veranschaulichen. Im Punkt 1 befindet man sich in der Mitte des Synchronisationsplateaus innerhalb der Synchronisationsregion, der Arnoldzunge. Dort liegt keine anfängliche Verstimmung vor, es gilt  $\omega_0 = \omega$ . Keine Verstimmung bedeutet aber, dass die Phasendifferenz gleich  $\phi^0$  ist. Der Klarheit halber setzen wir  $\phi^0 = 0$ . In den Abbildungen 2.10a und 2.10b ist dies der Fall 1. Mit zunehmender Verstimmung bildet sich eine Phasenverschiebung aus. Dies wird in Abb. 2.10a durch den Punkt 2 und in Abb. 2.10b durch die Kurve 2 charakterisiert. Wenn der Punkt die Grenze der Synchronisationsregion passiert (Punkt 3), kommt es zur „Zerstörung“ der Synchronisation. Die Phasendifferenz wächst nun ungebunden ins Unendliche (Kurve 3). Man sieht, dass die Phasendifferenz dabei nicht stetig anwächst, sondern dass es Zeitspannen gibt, in denen die Phasendifferenz nahezu konstant bleibt und andere, sehr viel kürzere Zeitspannen, in denen die Phasendifferenz rapide um  $2\pi$  wächst. Man nennt diese schnellen Phasenänderungen **Phasensprünge**, *engl.*: **phase slips**.

Das Abwechseln von nahezu konstanten Phasendifferenzen mit Phasensprüngen bedeutet, dass das System für bestimmte, lange Zeitintervalle in etwa synchron mit der treibenden Kraft oszilliert, und es dann plötzlich zu einer zusätzlichen Umdrehung des Systems kommt, bzw. zu einer Umdrehung weniger, wenn das System am rechten Rand aus der Synchronisationsregion austritt. In der Repräsentation von Abb. 2.7 entspricht das der Tatsache, dass der Phasenraumpunkt, der ja die Phase des Oszillators darstellt, fast immer mit derselben Winkelgeschwindigkeit rotiert, wie die Phase der treibenden Kraft und dass er dann plötzlich stark beschleunigt, bzw. abgebremst wird und dadurch einen Umlauf mehr bzw. einen weniger, relativ zum treibenden Oszillator vollführt. Um dieses Verhalten zu verstehen, kann man die Analogie zu der Bewegung eines Teilchens in einem gewellten Potential heranziehen. Der Verlust von Synchronisation entspricht dem Herauswandern aus einem lokalen Minimum des Potentials. Das Teilchen bewegt sich dort sehr langsam, wo das Potential flach ist. Es kommt fast zur Ruhe, wo das Potential nahezu horizontal verläuft, während es sich wieder relativ schnell bewegt, wo das Potential steil ist. Das Alternieren der beschriebenen Phasendynamik von schnell auf langsam und so fort, nennt man **intermittent**, *lat.*: intermittere: unterbrechen. Mit weiterer, wachsender Verstimmung werden die Zeiten, in denen synchrone Oszillationen vollführt werden, immer kleiner (Punkt 4 bzw. Kurve 4). Die Phasendifferenz wird immer gleichmäßiger anwachsen. Schließlich sind beide Systeme vollständig entkoppelt (Punkt 5 bzw. Kurve 5). Aus der Sicht der Frequenzen bedeutet der Verlust von Synchronisation einen Übergang von einer Bewegung mit nur einer Frequenz  $\Omega = \omega$  hin zu einer quasi-periodischen Bewegung mit zwei Frequenzen  $\omega_0$  und  $\omega$ . Der Durchgang durch die Synchronisation durch den rechten Rand der Synchronisationsregion geschieht in analoger Weise. Im Allgemeinen müssen die Durchgänge links und rechts durch die Grenzen der Synchronisationsregion nicht symmetrisch sein.



**Abbildung 2.10.:** *Typische Phasendynamik beim Durchgang durch die Synchronisation. Die Phasendifferenz ist in (b) für verschiedene Frequenzen  $\omega$  der treibenden Kraft gezeigt. Diese Werte sind in (a) durch die Punkte 1 - 5 gekennzeichnet. In den Systemzuständen der Synchronisation (Punkte 1 und 2) ist die Phasendifferenz konstant (Linien 1 und 2). Die Phasendifferenz ist gleich Null genau im Zentrum der Synchronisationsregion (Punkt 1) und sonst innerhalb der Arnoldzunge konstant (Punkt 2). Außerhalb der Arnoldzunge ist die Dynamik der Phase intermittent, d. h. die Phasendynamik ist eine Sequenz aus Zeitspannen mit fast synchronem Verhalten und sehr schnellen Phasensprüngen (Punkt 3, Kurve 3). Mit fortschreitendem Abstand zur Grenze der Synchronisationsregion tendiert die Phasendynamik mehr und mehr hin zu einem gleichmäßigen Anwachsen. (Punkte und Kurven 4, 5). Der Durchgang durch die Synchronisation durch den rechten Rand der Synchronisationsregion geschieht in analoger Weise, nur dass die Phasendifferenz nun nicht wächst, sondern sinkt. Im Allgemeinen müssen die Durchgänge links und rechts durch die Grenze der Arnoldzunge nicht symmetrisch sein.*

### 2.1.3. Verkürzte Gleichungen für die Phasendifferenz und die Amplitude

Für die Dynamik der Phasendifferenz und der Amplitude möchte man Gleichungen formulieren, die eine entsprechende Analyse erlauben. Beispielhaft wird dies anhand des van der Pol Oszillators besprochen. Ausgehend vom autonomen van der Pol Oszillator

$$\ddot{x} - \mu(1 - x^2)\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad (2.14)$$

kann man eine treibende, externe, periodische Kraft  $f(t)$  einführen, die unidirektional auf den van der Pol Oszillator wirkt. Die einfachste Möglichkeit dafür lautet

$$f(t) = \varepsilon \cos(\omega t) \quad (2.15)$$

mit der Amplitude der erregenden, externen Kraft  $\varepsilon$  und der treibenden, externen Frequenz  $\omega$ . Die Gleichung für den so getriebenen van der Pol Oszillator lautet dann

$$\ddot{x} - \mu(1 - x^2)\dot{x} + \omega_0^2 x = \varepsilon \cos(\omega t) \quad (2.16)$$

Es gibt bislang keine exakte, analytische Lösung der Gleichung 2.16 für beliebige Parameter  $\mu$ ,  $\varepsilon$  und  $\omega_0$ . Unter bestimmten Annahmen lassen sich jedoch Näherungslösungen analytisch finden. Die ausführliche Rechnung dazu findet sich im Anhang B.1. Die Gleichungen, die man schließlich erhält, sind

die verkürzten Gleichungen für die Amplitude  $A$  der getriebenen Oszillationen und für die Phasendifferenz  $\varphi$  zwischen dem getriebenen und dem treibenden, externen System.

$$\dot{A} = \frac{\mu}{2}A - \frac{1}{8}A^3 - \frac{B}{2\omega} \sin \varphi \quad (2.17)$$

$$\dot{\varphi} = \Delta - \frac{B}{2\omega A} \cos \varphi \quad (2.18)$$

Dabei führt man die **Frequenzverstimmung**  $\Delta$  zwischen dem ungestörten und dem getriebenen System ein

$$\Delta = \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{2\omega} \approx \omega_0 - \omega \quad (2.19)$$

Die Gleichung 2.18 der Phasendifferenz ist auch bekannt unter dem Namen **Adler-Gleichung** [3]. Beides sind nichtlineare Differentialgleichungen erster Ordnung. Die Gleichungen sind gekoppelt, das heißt, Amplitude und Phase beeinflussen sich gegenseitig. Es sind die Fundamentalgleichungen für die Beschreibung von Synchronisation. Sehr interessant dabei ist, dass die Analyse des **nicht-autonomen** Systems des getriebenen van der Pol Oszillators reduziert wird auf die Analyse eines **autonomen**, also nicht explizit zeitabhängigen Systems. Statt der perioden Orbits werden jetzt also Fixpunkte analysiert, was erheblich leichter ist. Fixpunkte der Gleichungen 2.17, 2.18 bedeuten, dass die Phasendifferenz  $\varphi$  zwischen dem Oszillator und der treibenden, externen Kraft sich zeitlich nicht verändert ( $\varphi = \text{const.}$ ), wenn zum Beispiel die externe Kraft das System synchronisiert hat und die Oszillationen periodisch mit konstanter Amplitude und Frequenz  $\omega$  der treibenden, externen Kraft schwingen (vgl. Abschnitt 2.1.2). Das heißt, das Auffinden der Bedingungen, wann die Fixpunkte stabil sind, ist gleichbedeutend mit dem Auffinden der Bedingungen für welche eine 1 : 1 Synchronisation entsteht. Es ist schwierig diese Gleichungen in ihrer ganzen Allgemeinheit zu analysieren. Deshalb werden hier nur einige spezielle Fälle dargestellt.

### Die Amplitude des ungestörten van der Pol Systems bei kleiner Nichtlinearität

Der van der Pol Oszillator ohne treibende, externe Kraft ( $B = 0, \omega = 0$ ) lautet

$$\ddot{x} - \mu(1 - x^2)\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad (2.20)$$

Die dazu korrespondierenden Amplituden- und Phasengleichungen lauten

$$\dot{A} = \frac{\mu}{2}A - \frac{1}{8}A^3 \quad (2.21)$$

$$\dot{\varphi} = \omega_0 \quad (2.22)$$

Gleichung 2.21 beschreibt die langsame Relaxation der Amplitude zur Stationarität, dem Grenzzyklus des Systems. Zur Analyse setzt man  $\dot{A} = 0$  und löst die algebraische Gleichung

$$f_A(A) = \frac{\mu}{2}A - \frac{1}{8}A^3 = 0 \quad (2.23)$$

Man erhält formal drei Fixpunkte  $A_{01} = 0$ ,  $A_{02} = 2\sqrt{\mu}$  und  $A_{03} = -2\sqrt{\mu}$ . Da die Amplitude per Definition positiv definit ist, betrachtet man nur die erste und die zweite Lösung. Die Lösung  $A_{01} = 0$  spiegelt den Fall von Nichtoszillation des Systems wieder. Die zweite Lösung  $A_{02} = 2\sqrt{\mu}$  impliziert Oszillationen mit der Amplitude  $A_0 \sim \sqrt{\mu}$ . Die Stabilitätsanalyse der Fixpunkte ergibt für  $\mu > 0$

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial f_A(A)}{\partial A} \right|_{A=0} &= \left. \frac{\mu}{2} - \frac{3}{8}A^2 \right|_{A=0} = \frac{\mu}{2} > 0 && \Rightarrow \text{instabiler Fixpunkt} \\ \left. \frac{\partial f_A(A)}{\partial A} \right|_{A=2\sqrt{\mu}} &= \left. \frac{\mu}{2} - \frac{3}{8}A^2 \right|_{A=2\sqrt{\mu}} = \frac{\mu}{2} - \frac{3}{8}4\mu = -\mu < 0 && \Rightarrow \text{stabiler Fixpunkt} \end{aligned}$$

Der Fall der Nichtoszillation des Systems ist demnach instabil, der Fall von Oszillation ist stabil. Das heißt, das ungestörte System, ohne treibende, externe Kraft ( $B = 0$ ), oszilliert, wie erwartet, mit seiner natürlichen Frequenz  $\omega_0$ . Der Grenzzyklus existiert bei  $|A^2| = 4\mu$ . Die Lösung der Phasengleichung erlaubt die Addition einer beliebigen, konstanten Phase. Das bedeutet, dass man die Phase auf dem Grenzzyklus beliebig verschieben kann, ohne dass sich dadurch die Energie des Systems verändert. Die Phase ist also frei beweglich auf dem Grenzzyklus, sie lässt sich demnach durch ein äußeres, treibendes System justieren (vgl. Abschnitt 2.1.1). Die Möglichkeit zu dieser Justierung ist genau das, was wir in Abschnitt 2.1.2 als Synchronisierung, genauer als **Phasenkopplung** bezeichnet hatten.

### Analyse der verkürzten Gleichungen für schwaches Treiben des van der Pol Systems

Jetzt werden die Gleichungen B.39 und B.40 für eine schwache, treibende Kraft analysiert. Wie schon angedeutet ist die Analyse für beliebige Werte von  $B$  und  $\omega$  schwierig. Deshalb wird jetzt ein spezieller Fall betrachtet, um die analytische Lösung zu approximieren. Es sei

$$B \ll \mu A_0 \quad (2.24)$$

angenommen, das heißt, die Amplitude des gestörten Systems sei nicht wesentlich verschieden von der Amplitude  $A_0$  des ungestörten Systems. Man kann dann in der Gleichung für die Phasendifferenz  $\varphi$ , B.40, die Amplitude  $A = A_0$  setzen. Damit wird Gleichung B.40 unabhängig von  $A$  und man erhält

$$\dot{\varphi} = \Delta - \frac{B}{4\sqrt{\mu\omega}} \cos \varphi = f_\varphi(\varphi) \quad (2.25)$$

Die Fixpunkte dieser Gleichung ( $\dot{\varphi} = 0$ ) findet man, indem man die algebraische Gleichung

$$\cos \varphi = \frac{4\sqrt{\mu\omega}\Delta}{B} \quad (2.26)$$

löst. Aus Abbildung 2.11a ist erkennbar, dass  $\cos \varphi$  die horizontale Linie  $\frac{4\sqrt{\mu\omega}\Delta}{B}$  an zwei Stellen schneidet. Daher gibt es zwei Lösungen

$$\varphi_1 = \arccos \frac{4\sqrt{\mu\omega}\Delta}{B} \quad \text{und} \quad \varphi_2 = 2\pi - \arccos \frac{4\sqrt{\mu\omega}\Delta}{B} \quad (2.27)$$

die dann existieren, wenn gilt

$$4\sqrt{\mu\omega} |\Delta| \leq B \quad (2.28)$$

Die Stabilität ist vom Vorzeichen von  $\partial f_\varphi(\varphi)/\partial \varphi$  abhängig. Man findet

$$\begin{aligned}
\left. \frac{\partial f_\varphi(\varphi)}{\partial \varphi} \right|_{\varphi_1} &= \frac{B}{4\sqrt{\mu\omega}} \sin\left(\arccos \frac{4\sqrt{\mu\omega}\Delta}{B}\right) \\
&= \frac{B}{2A_0\omega} \sqrt{1 - \cos^2\left(\arccos \frac{4\sqrt{\mu\omega}\Delta}{B}\right)} \\
&= \frac{B}{4\sqrt{\mu\omega}} \sqrt{1 - \left(\frac{4\sqrt{\mu\omega}\Delta}{B}\right)^2} \geq 0
\end{aligned} \tag{2.29}$$

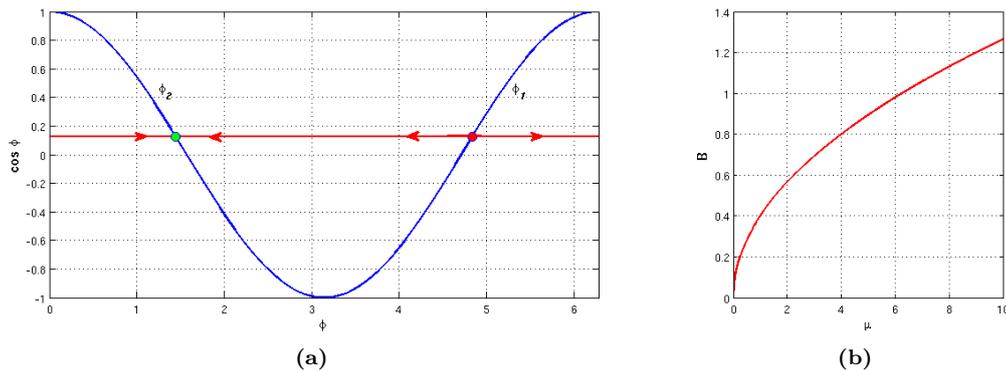
und

$$\begin{aligned}
\left. \frac{\partial f_\varphi(\varphi)}{\partial \varphi} \right|_{\varphi_2} &= \frac{B}{4\sqrt{\mu\omega}} \sin\left(2\pi - \arccos \frac{4\sqrt{\mu\omega}\Delta}{B}\right) \\
&= \frac{B}{4\sqrt{\mu\omega}\Delta} \left[ \sin 2\pi \times \cos\left(\arccos \frac{4\sqrt{\mu\omega}\Delta}{B}\right) - \cos 2\pi \times \sin\left(\arccos \frac{4\sqrt{\mu\omega}\Delta}{B}\right) \right] \\
&= -\frac{B}{4\sqrt{\mu\omega}} \sqrt{1 - \cos^2\left(\arccos \frac{4\sqrt{\mu\omega}\Delta}{B}\right)} \\
&= -\frac{B}{4\sqrt{\mu\omega}} \sqrt{1 - \left(\frac{4\sqrt{\mu\omega}\Delta}{B}\right)^2} \leq 0
\end{aligned} \tag{2.30}$$

Das heißt, der Fixpunkt  $\varphi_1$  ist instabil und der Fixpunkt  $\varphi_2$  ist stabil. Wenn in der Bedingung 2.24 die Gleichheit gilt, dann löschen sich die Fixpunkte in einer **Sattel-Knoten-Bifurkation** gegenseitig aus. Das bedeutet, die Phasendifferenz zwischen dem Oszillator und der treibenden Kraft ist dann nicht länger konstant. Die Gleichung

$$B = 4\sqrt{\mu\omega} |\Delta| \tag{2.31}$$

beschreibt somit die Grenze der 1 : 1 Synchronisationsregion für kleine Amplituden der treibenden Kraft (vgl. Abschnitt 2.1.2).



**Abbildung 2.11.:** (a) Für die Parameter  $\mu = 0.1$  und  $\omega_0 = 1$  Hz und mit der Annahme keiner Verstimmung  $\Delta \approx \omega_0 - \omega = 0.1$  Hz schneidet die horizontale Linie  $\frac{4\sqrt{\mu\omega}\Delta}{B}$  die Funktion  $\cos \varphi$  in zwei Punkten, den Fixpunkten  $\varphi_1$  und  $\varphi_2$ . Die Fixpunkt  $\varphi_1$  ist instabil und der Fixpunkt  $\varphi_2$  ist stabil. (b) Die treibende Kraft  $B$  in Abhängigkeit vom nichtlinearen Dämpfungsparameter  $\mu$ .

## 2.1.4. Gegenseitige Synchronisation zweier van der Pol Systeme

In den vorangegangenen Abschnitten wurde am Beispiel des getriebenen van der Pol Oszillators der einfachste Fall von Synchronisation besprochen, ein System, welches durch eine externe, periodische Kraft unidirektional getrieben wird. Jetzt soll der Fall besprochen werden, bei dem zwei selbsterregte Oszillatoren miteinander interagieren. Dazu werden beispielhaft zwei bidirektional gekoppelte van der Pol Oszillatoren betrachtet. Man schreibt

$$\ddot{x}_1 - (\mu_1 - x_1^2) \dot{x}_1 + \omega_{01}^2 x_1 = D_1(x_2 - x_1) + B_1(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) \quad (2.32)$$

$$\ddot{x}_2 - (\mu_2 - x_2^2) \dot{x}_2 + \omega_{02}^2 x_2 = D_2(x_1 - x_2) + B_2(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) \quad (2.33)$$

Dabei ist die Kopplung beider Systeme linear in den Variablen  $x_{1,2}$  und  $\dot{x}_{1,2}$ . Die Kopplung ist proportional zu den Differenzen der Variablen und deren 1. Ableitungen. Die Kopplung verschwindet also genau dann, wenn  $x_1 = x_2$  und  $\dot{x}_1 = \dot{x}_2$ . Diese Art Kopplung wird auch als **diffusive Kopplung** bezeichnet [5]. Treten nur Terme in  $x_{1,2}$  auf, d. h.  $B_{1,2} = 0$ , spricht man von rein **dissipativer Kopplung**. Treten nur Terme in  $\dot{x}_{1,2}$ , d. h.  $D_{1,2} = 0$ , so spricht man von rein **reaktiver Kopplung**.

Eine andere mögliche Art ist die **direkte Kopplung**

$$\ddot{x}_1 - (\mu_1 - x_1^2) \dot{x}_1 + \omega_{01}^2 x_1 = D_1 x_2 + B_1 \dot{x}_1 \quad (2.34)$$

Der Unterschied zwischen diffuser und direkter Kopplung wird beim Phänomen des Oszillatortods deutlich. Siehe dazu [27].

### Verkürzte Gleichungen für schwach nichtlineare Oszillatoren

Wie für den Fall eines selbsterregten Oszillators, der durch eine periodische Kraft getrieben wird, lassen sich auch im Fall zweier gekoppelter, schwach nichtlinearer, selbsterregter Oszillatoren verkürzte Gleichungen finden. Mit dem Ansatz

$$x_{1,2} = A_{1,2}(t) \cos(\omega t + \varphi_{1,2}(t)) = \frac{1}{2} (a_{1,2}(t) e^{i\omega t} + a_{1,2}^*(t) e^{-i\omega t}) \quad (2.35)$$

wobei die komplexen Amplituden  $a_{1,2}$  und ihre komplex-konjugierten  $a_{1,2}^*$  durch reale Amplituden  $A_{1,2}$  und Phasen  $\varphi_{1,2}$  ausgedrückt werden,

$$a_{1,2} = A_{1,2} e^{i\varphi_{1,2}}, \quad a_{1,2}^* = A_{1,2} e^{-i\varphi_{1,2}}$$

findet man nach längerer Rechnung [6] die verkürzten Gleichungen für die Amplituden und die Phasendifferenz  $\theta = \varphi_2 - \varphi_1$ .

$$\dot{A}_1 = \frac{\mu_1}{2} A_1 - \frac{1}{8} A_1^3 + \frac{D}{2} (A_2 \cos(\theta) - A_1) + \frac{B}{2\omega} A_2 \sin(\theta) \quad (2.36)$$

$$\dot{A}_2 = \frac{\mu_2}{2} A_2 - \frac{1}{8} A_2^3 + \frac{D}{2} (A_1 \cos(\theta) - A_2) + \frac{B}{2\omega} A_1 \sin(\theta) \quad (2.37)$$

$$\dot{\theta} = \Delta - \frac{D}{2} \sin(\theta) \left( \frac{A_2}{A_1} + \frac{A_1}{A_2} \right) + \frac{B}{2\omega} \cos(\theta) \left( \frac{A_2}{A_1} - \frac{A_1}{A_2} \right) \quad (2.38)$$

Die Verstimmung  $\Delta$  ist dabei definiert als

$$\Delta = \frac{\omega_2^2 - \omega_1^2}{2\omega} \approx \omega_2 - \omega_1 \quad (2.39)$$

Eine rein dissipative Kopplung bedeutet, dass der Kopplungsparameter  $B = 0$  ist. Es gelte  $\mu_1 = \mu_2 = \mu$ , d. h. beide Oszillatoren haben dieselben nichtlinearen Parameter. Man erhält dann folgende Gleichungen

$$\dot{A}_1 = A_1 \left( \frac{\mu}{2} - \frac{1}{8}A_1^2 - \frac{D}{2} \right) + \frac{D}{2}A_2 \cos(\theta) \quad (2.40)$$

$$\dot{A}_2 = A_2 \left( \frac{\mu}{2} - \frac{1}{8}A_2^2 - \frac{D}{2} \right) + \frac{D}{2}A_1 \cos(\theta) \quad (2.41)$$

$$\dot{\theta} = \Delta - \frac{D}{2} \sin(\theta) \left( \frac{A_2}{A_1} + \frac{A_1}{A_2} \right) \quad (2.42)$$

Die Gleichungen 2.40 und 2.41 sind symmetrisch bezüglich  $A_1$  und  $A_2$ , so dass für  $A_1 = A_2 = A$  beide Gleichungen auf eine reduziert werden kann. Gl. 2.42 hat wieder die Form der Adler-Gleichung. Symmetrische Lösungen korrespondieren zu  $\dot{A} = 0$  ( $A \neq 0$ ) und  $\dot{\theta} = 0$ . Man erhält

$$\dot{A} = \frac{A}{2} \left( \mu - D - \frac{A^2}{4} \right) + \frac{D}{2} \cos(\theta) \quad (2.43)$$

$$\dot{\theta} = \Delta - D \sin(\theta) \quad (2.44)$$

Symmetrische Lösungen für Synchronisierung bedeuten  $\dot{A} = 0$  ( $A \neq 0$ ) und  $\dot{\theta} = 0$ . Aus Gl. 2.44 die nicht von  $A$  abhängt, findet man  $\theta$  zu

$$\Delta - D \sin(\theta) = 0 \quad \sin(\theta) = \frac{\Delta}{D} \quad (2.45)$$

$$\theta_1 = \arcsin\left(\frac{\Delta}{D}\right) \quad \theta_2 = \pi - \arcsin\left(\frac{\Delta}{D}\right) \quad (2.46)$$

Das bedeutet,  $\theta_{1,2}$  existieren solange, wie  $|\Delta| \leq D$  gilt. Die Linien  $\Delta = \pm D$  sind die Grenzlinien der Synchronisationsregion. Die Amplituden  $A$  für  $\theta_{1,2}$  lauten

$$\tilde{A}_{1,2}^2 = 4 \left( (\mu - D) \pm \sqrt{D^2 - \Delta^2} \right) \quad (2.47)$$

Eine Stabilitätsanalyse wie im besprochenen Fall des periodisch getriebenen Oszillators ergibt, dass die Lösungen  $(\tilde{A}_1, \theta_1)$  stabil sind, während die Lösungen  $(\tilde{A}_2, \theta_2)$  instabil sind. Auch hier löschen sich die Fixpunkte an den Grenzregionen über eine Sattel-Knoten-Bifurkation aus.

## 2.2. Fluiddynamische Grundlagen

Die Ausführungen dieses Abschnittes folgen im Wesentlichen den einführenden Darstellungen von [17] und [30].

Ausgangspunkt für die fluiddynamische Beschreibung der Vorgänge der Tonerzeugung in einer Orgelpfeife und der Propagation der generierten akustischen Wellen in den Außenraum sind die Navier-Stokes-Gleichungen. Sie sind die Hauptgleichungen für ein reibungsbehaftetes, wärmeleitendes Fluid. Den Kern der Gleichungen bildet der Impulserhaltungssatz, der jedoch um die Massenbilanz (Kontinuitätsgleichung) und den Energieerhaltungssatz erweitert wird. Dies soll im Folgenden kurz skizziert werden.

### 2.2.1. Erhaltungsgleichungen

#### Die Kontinuitätsgleichung

Die Erhaltung der Masse kann über die Dichteänderung des betrachteten Volumenelements an einem festen Ort beschrieben werden. Sie lautet

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad \text{bzw.} \quad (2.48)$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} + \nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad \text{bzw.}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \text{div } \mathbf{v} = \rho \frac{D}{Dt} \left( \frac{1}{\rho} \right)$$

Die dritte Formulierung der Gleichung besagt, dass die Divergenz der Geschwindigkeit gleich der Änderungsrate des Volumenelements pro Einheitsvolumen ist, folgt man der Bewegung des Fluids. Für inkompressible Fluide gilt  $\text{div } \mathbf{v} = 0$ . Die Bezeichnung  $\frac{D(\cdot)}{Dt}$  heißt totale Ableitung oder auch Lagrange'sche Ableitung (siehe 2.2.2).

#### Die Impulserhaltungsgleichung

Die Impulserhaltungsgleichung<sup>2</sup> lautet

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \mathbf{v}) + \nabla \cdot (\mathbf{P} + \rho \mathbf{v} \mathbf{v}) = \mathbf{f} \quad \text{bzw.} \quad (2.49)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho v_i) + \frac{\partial}{\partial x_j} (P_{ij} + \rho v_j v_i) = f_i \quad (2.50)$$

Hier ist  $\mathbf{P} = P_{ij}$  der negative Spannungstensor. Dieser kann mit Hilfe des viskosen Spannungstensors  $\boldsymbol{\tau}$  geschrieben werden als

$$\mathbf{P} = p \mathbf{I} - \boldsymbol{\tau} \quad \text{bzw.} \quad (2.51)$$

$$P_{ij} = p \delta_{ij} - \tau_{ij} \quad (2.52)$$

---

<sup>2</sup>Das dyadische Produkt zweier Vektoren  $\mathbf{v}$  und  $\mathbf{w}$  ergibt den Tensor  $\mathbf{vw} = (v_i w_j)$

wobei  $\mathbf{I} = (\delta_{ij})$  der Einheitstensor und  $\delta_{ij}$  des Kronecker-Symbol ist. Für ein Stokes'sches Fluid<sup>3</sup> gilt

$$\boldsymbol{\tau} = \eta (\nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^T) - \frac{2}{3} \eta (\nabla \cdot \mathbf{v}) \mathbf{I} \quad \text{bzw.} \quad (2.53)$$

$$\tau_{ij} = \eta \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \eta \left( \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \right) \delta_{ij} \quad (2.54)$$

mit der dynamischen Viskosität  $\eta$ . Die Beziehung  $(\nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^T)$  beschreibt die Deformationsrate des Volumenelements. Damit schreibt sich die Impulserhaltung als

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \mathbf{v}) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \mathbf{v}) = -\nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \mathbf{f} \quad \text{bzw.} \quad (2.55)$$

mit der Lagrange'schen Ableitung

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \mathbf{f} \quad (2.56)$$

Diese Gleichung repräsentiert das Newtonsche Grundgesetz für Kontinua, mit der Masse pro Einheitsvolumen  $\rho$  mal der Beschleunigung  $\frac{D\mathbf{v}}{Dt}$  auf der linken Seite und der Summe der Oberflächenkräfte  $-\nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}$  und der Volumenkräfte  $\mathbf{f}$  auf das betrachtete Volumenelement auf der rechten Seite.

### Die Energieerhaltungsgleichung

Der Energieerhaltungssatz lässt sich generell so formulieren

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho \left( e + \frac{1}{2} v^2 \right) + \nabla \cdot \left( \rho \mathbf{v} \left( e + \frac{1}{2} v^2 \right) \right) = -\nabla \cdot \mathbf{q} - \nabla \cdot (p \mathbf{v}) + \nabla \cdot (\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{v}) + \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \quad (2.57)$$

wobei  $v = |\mathbf{v}|$  und  $e$  die innere Energie pro Einheitsmasse, also die spezifische innere Energie ist. Mit  $\mathbf{q}$  bezeichnen wir die Wärmestromdichte aufgrund von Wärmeleitung. Dafür verwendet man für gewöhnlich das Fouriergesetz

$$\mathbf{q} = -\lambda \nabla T \quad (2.58)$$

mit dem Wärmeleitfähigkeitskoeffizienten  $\lambda$ .

Unter Verwendung des Ersten Hauptsatzes der Thermodynamik

$$T ds = de + p d(\rho^{-1}) \quad (2.59)$$

und der Gleichung für die mechanische Energie erhält man durch Bildung des inneren Produktes der Impulsgleichung mit  $\mathbf{v}$  eine Gleichung für die Entropie

$$\rho T \left( \frac{\partial s}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla s \right) = -\nabla \cdot \mathbf{q} + \nabla \cdot (\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{v}) - \mathbf{v} \cdot (\nabla \cdot \boldsymbol{\tau}) \quad \text{bzw.} \quad (2.60)$$

$$\rho T \left( \frac{\partial s}{\partial t} + v_i \frac{\partial s}{\partial x_i} \right) = -\frac{\partial q}{\partial x_i} + \tau_{ij} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \quad (2.61)$$

<sup>3</sup>Bei einem Stokes'schen Fluid nimmt man an, dass das Fluid lokal im thermodynamischen Gleichgewicht ist, so dass der Druck und der thermodynamische Druck äquivalent sind.

Für die Annahme eines isentropen <sup>4</sup> Flusses kann man die Terme  $\nabla \mathbf{q}$  und  $\nabla \cdot (\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{v}) - \mathbf{v} \cdot (\nabla \cdot \boldsymbol{\tau})$  vernachlässigen. Man erhält dann eine Erhaltungsgleichung für die Entropie in der Form

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla s = 0 \quad (2.62)$$

### Schließungsbedingung

Die formulierten Gleichungen der Massenbilanz (Kontinuitätsgleichung), der Impuls- und Energiebilanz enthalten noch mehr Unbekannte als Gleichungen. Deshalb ist eine Schließungsbedingung erforderlich. Hier gibt es mehrere Möglichkeiten. Zum Beispiel kann man annehmen, dass innere Energie eine Funktion der Dichte und der Entropie ist, also  $e = (\rho, s)$ . Mit dem Ersten Hauptsatz der Thermodynamik folgt dann für den Druck

$$p = \rho^2 \left( \frac{\partial e}{\partial \rho} \right)_s \quad (2.63)$$

$$T = \left( \frac{\partial e}{\partial s} \right)_\rho \quad (2.64)$$

Als alternative Schließungsbedingung kann man auch annehmen, dass Druck und Dichte über eine Beziehung

$$p = p(\rho, s), \quad s = \text{const.} \quad (2.65)$$

miteinander verknüpft sind. Dann erhält man folgende Schließungsbedingung in Differentialform:

$$dp = c^2 d\rho + \left( \frac{\partial p}{\partial s} \right)_\rho ds \quad (2.66)$$

mit dem Quadrat der Schallgeschwindigkeit des isentropen Mediums

$$c^2 = \left( \frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s \quad (2.67)$$

Man nennt den Fluss *homogen*, wenn die thermodynamische Variable  $c(\rho, s)$  für den gesamten Fluss gleich bleibt. Ist der Fluss homogen und isentrop ( $ds = 0$ ), so nennt man den Fluss *homotrop*. Im folgenden sei die Wärmekapazität bei konstantem Volumen  $C_V$  definiert als reversibler Prozess

$$C_v = \left( \frac{\partial e}{\partial T} \right)_V \quad (2.68)$$

Für ein ideales Gas gilt

$$e(T) = \int_0^T C_V dT \quad (2.69)$$

Für ein ideales Gas mit konstanten thermischen Eigenschaften vereinfacht sich diese Beziehung zu

---

<sup>4</sup>Den Fluss nennt man *abiatisch*, wenn der Wärmetransport  $\nabla \mathbf{q}$  vernachlässigbar ist. Isentrop heißt ein Fluss, wenn der Prozess zusätzlich dazu ein reversibler ist.

$$e = C_V T \quad (2.70)$$

Für Luft bei atmosphärischem Normaldruck ist der Druck

$$p = \text{const.} \cdot \rho^\gamma \quad (2.71)$$

mit dem Adiabaten- bzw. Isentropenkoeffizienten

$$\gamma = \frac{C_p}{C_V}, \quad (\text{für Luft gilt: } \gamma \approx 1.4) \quad (2.72)$$

## 2.2.2. Die Navier-Stokes-Gleichungen

Die Navier-Stokes-Gleichungen sind ein System nichtlinearer, gekoppelter, partieller Differentialgleichungen. In ihrer allgemeinen Form (ohne Berücksichtigung elektromagnetischer Effekte) lauten sie

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = -\nabla\Phi - \frac{1}{\rho}\nabla p - 2(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}) + \nu\nabla^2\mathbf{v} + \mathbf{f} \quad (2.73)$$

Diese drei Gleichungen beinhalten insgesamt fünf Unbekannte, die drei Geschwindigkeitskomponenten  $\mathbf{v}$ , die Dichte  $\rho$  und den Druck  $p$ . Das Gravitationspotential  $\Phi$  (bzw. die Gravitationsbeschleunigung  $-\nabla\Phi = g$ ) und die Winkelgeschwindigkeit  $\boldsymbol{\Omega}$  des Systems sind messbare Größen. Die kinematische Viskosität  $\nu$  ist eine Materialkonstante des Mediums und kann ebenfalls experimentell bestimmt werden ( $\nu_{Luft} = 1,433 \cdot 10^{-5} m^2/s$ ). Zu den einzelnen Termen in den Navier-Stokes-Gleichungen: Die totale Beschleunigung des betrachteten infinitesimalen Volumenelementes

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} \quad (2.74)$$

heißt Lagrange'sche Ableitung<sup>5</sup>. Sie besteht aus zwei Termen, der partiellen Ableitung der Geschwindigkeit des Teilchens nach dem Ort  $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}$  und der Feldbeschleunigung  $(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v}$  auch Konvektionsbeschleunigung genannt. Mit der Lagrange'schen Ableitung beschreibt man die Dynamik der Systemvariablen im mitbewegten System. Auf der rechten Seite der Navier-Stokes-Gleichungen stehen fünf Terme, die Gravitationsbeschleunigung  $\nabla\Phi$ , die Beschleunigung hervorgerufen durch den Druckgradienten  $\frac{1}{\rho}\nabla p$ , die Coriolisbeschleunigung  $2(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v})$ , die Beschleunigung durch Reibung  $\nu\nabla^2\mathbf{v}$ , und die Beschleunigung durch eine äußere Kraft  $\mathbf{f}$ . Um aus den Navier-Stokes-Gleichungen geeignete Gleichungen für unser System zu erhalten, führt man zunächst einige charakteristische dimensionslose Zahlen ein:

$$\text{Strouhal Zahl} \quad St = \frac{\text{Trägheitskraft}}{\text{Bewegungskraft}} = \frac{|(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v}|}{|\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}|} \sim \frac{UT}{L} \quad (2.75)$$

$$\text{Froude Zahl} \quad Fr = \frac{\text{Trägheitskraft}}{\text{Gravitationskraft}} = \frac{|(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v}|}{|g|} \sim \frac{U^2}{Lg} \quad (2.76)$$

$$\text{Euler Zahl} \quad Eu = \frac{\text{Trägheitskraft}}{\text{Druckgradientenkraft}} = \frac{|(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v}|}{|\frac{1}{\rho}\nabla p|} \sim \frac{\rho U^2}{\Delta p} \quad (2.77)$$

$$\text{Rossby Zahl} \quad Ro = \frac{\text{Trägheitskraft}}{\text{Corioliskraft}} = \frac{|(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v}|}{|2(\mathbf{v} \times \boldsymbol{\Omega})|} \sim \frac{U}{\mathbf{f}L} \quad (2.78)$$

$$\text{Reynolds Zahl} \quad Re = \frac{\text{Trägheitskraft}}{\text{Reibungskraft}} = \frac{|(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v}|}{|\nu \cdot \nabla^2 \mathbf{v}|} \sim \frac{UL}{\nu} \quad (2.79)$$

<sup>5</sup>Die **Lagrange'sche Ableitung** heißt auch oft **Materialableitung**, **advective Ableitung**, (*lat.*: advehi: heranbewegen), oder auch **substantielle Ableitung**.

Darin bezeichnen  $\rho$  die Dichte,  $\mathbf{f}$  den Coriolisparameter,  $g$  die Gravitationsbeschleunigung und  $\nu$  die kinematische Viskosität.  $U$ ,  $T$  und  $L$  sind die charakteristischen Größen für Geschwindigkeit, Zeit und Länge des Systems. Die Navier-Stokes-Gleichungen schreiben sich mit diesen Zahlen als

$$\frac{1}{St} + 1 = -\frac{1}{Fr} - \frac{1}{Eu} + \frac{1}{Re} + \frac{1}{Ro} + \mathbf{f} \quad (2.80)$$

$$10^{-1} + 1 = -10^{-5} - 10^{-1} + 10^{-3} + 10^{-6} + \mathbf{f}$$

Eine Dimensionsanalyse unseres Systems mittels dieser Kennzahlen zeigt, dass die Gravitationsbeschleunigung und der Coriolisterm für die Beschreibung unserer Orgelpfeifen vernachlässigt werden können.

Wir nehmen für das Medium Luft an, dass sie durch eine **Stokes'sche Flüssigkeit** beschrieben wird. Dann gilt für den Reibungsterm

$$\nu \nabla^2 \mathbf{v} = \eta \left( \nabla^2 \mathbf{v} + \frac{1}{3} \nabla(\operatorname{div} \mathbf{v}) \right) \quad (2.81)$$

mit der dynamischen Viskosität  $\eta = \nu \cdot \rho$ . Wir erhalten so spezielle Navier-Stokes-Gleichungen, die an unser System angepasst sind, nämlich

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\nabla p + \eta \left( \nabla^2 \mathbf{v} + \frac{1}{3} \nabla(\operatorname{div} \mathbf{v}) \right) + \mathbf{f} \quad (2.82)$$

Wie sich zeigen wird, muss man für die Generierung der akustischen Wellen am Labium und für die Propagation der Wellen im Raum getrennte Ansätze machen. diese unterschiedlichen Ansätze werden dann gekoppelt, d.h. man koppelt die generierte Schallwelle an das sogenannte **Schallfeld**.

### 2.2.3. Die akustische Wellengleichung

Für die Propagation akustischer Wellen im Raum sollten wir eine Wellengleichung schreiben können. Dazu machen wir folgende Annahmen. Wir gehen von einem stationären, also zeitunabhängigen, nicht-viskosen ( $\eta = 0$ ) Schallfeld aus, d. h. wir haben einen gemittelten Druck  $p_0$  und eine gemittelte Dichte  $\rho_0$ . Wir bezeichnen die Druck- und Dichteschwankungen um die gemittelten Größen als  $\acute{p}$  und  $\acute{\rho}$ , wobei  $\frac{\acute{p}}{p_0} \ll 1$  und  $\frac{\acute{\rho}}{\rho_0} \ll 1$ . Damit erhalten wir aus Gleichung (2.82) die linearisierte Gleichung

$$\rho_0 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla \acute{p} = \mathbf{f} \quad (2.83)$$

Auch die Kontinuitätsgleichung (2.48) lässt sich linearisieren. Für spätere Zwecke führen wir dabei ein gewisses Volumen  $q(\mathbf{x}, t)$  ein, das die akustische Quelle beschreiben soll:

$$\frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} + \operatorname{div} \mathbf{v} = q \quad (2.84)$$

Der Quellterm  $q$  beschreibt die Änderungsrate des akustischen Quellvolumens pro Einheitsvolumen, also zum Beispiel einen kleinen, pulsierenden Körper im Fluid. Die linearisierte Kontinuitätsgleichung lautet damit

$$\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \acute{\rho}}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{v} = q \quad (2.85)$$

Man eliminiert  $\mathbf{v}$  zwischen den Gleichungen 2.83 und 2.84 und erhält

$$\frac{\partial^2 \dot{\rho}}{\partial t^2} + \nabla^2 \dot{p} = \rho_0 \frac{\partial q}{\partial t} - \operatorname{div} \mathbf{f} \quad (2.86)$$

Eine Gleichung für  $\dot{p}$  von  $q$  und  $\mathbf{f}$  erhält man durch Einführung der homotropen Relation 2.65. Für die ungestörten und gestörten Zustände gilt

$$p_0 = p(\rho_0, s), \quad p_0 + \dot{p} = p(\rho_0 + \dot{\rho}, s) \approx p(\rho_0, s) + \left( \frac{\partial p}{\partial \rho}(\rho, s) \right)_0 \dot{\rho} \quad (2.87)$$

Die Ableitung wird an den ungestörten Werten für Druck und Dichte  $(p_0, \rho_0)$  ausgewertet. Man identifiziert die Ableitung mit dem Quadrat der Schallgeschwindigkeit  $c_0^2$  des Mediums (vgl. 2.67)

$$c_0 = \sqrt{\left( \frac{\partial p}{\partial \rho}(\rho, s) \right)_s} \quad (2.88)$$

wobei aufgrund der Homotropie bei konstanter Entropie abgeleitet wird. Mit  $\dot{\rho} = \dot{p}/c_0^2$  und Umbenennung von  $\dot{p}$  nach  $p$  erhält man schließlich die inhomogene Wellengleichung für die Generierung akustischer Wellen durch eine Quelle  $q$  und eine Volumenkraft  $\mathbf{f}$

$$\left( \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \right) p = \rho_0 \frac{\partial q}{\partial t} - \operatorname{div} \mathbf{f} \quad (2.89)$$

Im Allgemeinen ist es sehr schwierig eine vollständige Beschreibung der akustischen Quelle durch  $q$  und  $\mathbf{f}$  zu erhalten. Deshalb werden diese Terme nur dann eingeführt, wenn der entsprechende Mechanismus vollständig verstanden ist. Nichtlinearitäten im Mechanismus der Schallgeneration können hier zu großen Fehlern führen. Ist die Volumenkraft  $\mathbf{f} = 0$ , so impliziert dies die Existenz eines Geschwindigkeitspotentials  $\varphi$ , so dass  $\mathbf{v} = \nabla \varphi$  und somit

$$p = -\rho_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t} \quad (2.90)$$

Die Wellengleichung schreibt sich dann als

$$\left( \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \right) \varphi = -q(\mathbf{x}, t) \quad (2.91)$$

Dies ist die allgemeine Wellengleichung der klassischen Akustik.

### Pulsierende Kugel

Für eine pulsierende Kugel als Schallquelle mit kleinen Amplituden um den mittleren Radius  $a$ , der Normalkomponente der Geschwindigkeit  $v_n(t)$  und keinen Schallquellen im Fluid ( $q = 0$ ) gilt

$$\left. \begin{array}{l} \nabla^2 \varphi = 0, \\ \partial \varphi / \partial r = v_n(t), \end{array} \right\} \text{wobei } r = |\mathbf{x}| \quad \left. \begin{array}{l} r > a \\ r = a \end{array} \right\}$$

Die Bewegung ist radial-symmetrisch, so dass

$$\nabla^2 \varphi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) \varphi = 0, \quad r > a$$

Mit

$$\varphi = \frac{A}{r} + B$$

wobei  $A = A(t)$  und  $B = B(t)$ .  $B(t)$  kann man vernachlässigen, weil die Druckschwankungen ( $\sim -\rho_0 \partial \varphi / \partial t$ ) für  $r \rightarrow \infty$  verschwinden. Mit  $\partial \varphi / \partial r = v_n$  bei  $r = a$  folgt

$$\varphi = -\frac{a^2 v_n(t)}{r}, \quad r > a \quad (2.92)$$

Der Druck

$$p = -\rho_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \rho_0 \frac{a^2 dv_n}{dt}(t)$$

klings mit  $1/r$  ab und stellt hier jedoch noch die unphysikalische Eigenschaft dar, sich instantan zu ändern, wenn  $dv_n/dt$  sich ändert. Der Volumenfluss  $q(t)$  des Fluids durch eine geschlossene Oberfläche um die Kugel ist für alle Zeiten  $t$  gleich. Für jede Sphäre  $S$  mit Radius  $r > a$  findet man

$$q(t) = \oint_S \nabla \varphi \cdot d\mathbf{S} = 4\pi a^2 v_n(t)$$

und man kann schreiben

$$\varphi = \frac{-q(t)}{4\pi r}, \quad r > a \quad (2.93)$$

Die unphysikalische Eigenschaft, dass die Druckänderung instantan überall vor sich geht, wenn  $dv_n/dt$  sich ändert, wird durch die Einführung eines retardierten Potentials behoben.

### Retardiertes Potential

Um eine allgemeine Formel für das retardierte Potential der Schallausbreitung im freien Raum zu erhalten, ist es sinnvoll von einer simplen Schallquelle aus zu starten und das Prinzip anschließend zu generalisieren. Die einfachste Schallquelle, die vorstellbar ist, ist eine punktförmige, stoßartig pulsierende Schallquelle  $\delta(\mathbf{x})\delta(t)$ . Sie ist die Lösung von

$$\left( \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \right) \varphi = \delta(\mathbf{x})\delta(t). \quad (2.94)$$

Die punktförmige, stoßartig pulsierende Schallquelle existiert nur für eine infinitesimal kleine Zeit bei  $t = 0$ , d.h. zu allen früheren Zeiten  $t < 0$  gilt  $\varphi(\mathbf{x}, t) = 0$  überall. Die Lösung ist wieder radial-symmetrisch und man hat

$$\frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) \varphi = 0, \quad r > 0 \quad (2.95)$$

zu lösen. Mit der Identität

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) \varphi \equiv \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r\varphi) \quad (2.96)$$

lässt sich Gl. 2.95 als eindimensionale Wellengleichung für  $r\varphi$  schreiben

$$\frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (r\varphi) - \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r\varphi) = 0, \quad r > 0 \quad (2.97)$$

Die allgemeine Lösung lautet

$$\varphi = \frac{\Phi\left(t - \frac{r}{c_0}\right)}{r} + \frac{\Psi\left(t + \frac{r}{c_0}\right)}{r}, \quad r > 0 \quad (2.98)$$

Der erste Term stellt die Propagation in Richtung steigender Werte von  $r$  mit der Schallgeschwindigkeit  $c_0$  dar, also eine von der Schallquelle ausgehende Welle. Der zweite Term repräsentiert eine einlaufende Welle. Da sich Schallwellen im freien Raum immer von der Quelle weg ausbreiten gibt, es keinen einlaufenden Term, d.h. es gilt  $\Psi = 0$ . Dies ist eine Kausalitätsbedingung, die konsistent ist mit dem Zweiten Hauptsatz der Thermodynamik. Um die Funktion  $\Phi$  zu bestimmen schreibt man

$$\varphi = \frac{\Phi\left(t - \frac{r}{c_0}\right)}{r} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\Phi\left(t - \frac{r}{c_0}\right)}{(r^2 + \epsilon^2)^{\frac{1}{2}}}, r \geq 0 \quad (2.99)$$

Einsetzen in die Gleichung 2.94 und Ausführen des Grenzübergangs  $\epsilon \rightarrow 0$  führt mit

$$\nabla^2 \varphi = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r\varphi) = -\frac{3\epsilon^2 \Phi\left(t - \frac{r}{c_0}\right)}{(r^2 + \epsilon^2)^{\frac{5}{2}}} - \frac{2\epsilon^2 \Phi'\left(t - \frac{r}{c_0}\right)}{c_0 r (r^2 + \epsilon^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{\Phi''\left(t - \frac{r}{c_0}\right)}{c_0^2 (r^2 + \epsilon^2)^{\frac{1}{2}}}$$

und

$$\frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \frac{\Phi''\left(t - \frac{r}{c_0}\right)}{c_0^2 (r^2 + \epsilon^2)^{\frac{1}{2}}}$$

auf

$$\begin{aligned} \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \nabla^2 \varphi &= \frac{3\epsilon^2 \Phi\left(t - \frac{r}{c_0}\right)}{(r^2 + \epsilon^2)^{\frac{5}{2}}} + \frac{2\epsilon^2 \Phi'\left(t - \frac{r}{c_0}\right)}{c_0 r (r^2 + \epsilon^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &\rightarrow 4\pi \Phi(t) \delta(t) + 0, \quad \text{für } \epsilon \rightarrow 0 \end{aligned} \quad (2.100)$$

Durch Vergleich von Gl. 2.100 mit Gl. 2.94 findet man

$$\Phi(t) = \frac{1}{4\pi} \delta(t) \quad (2.101)$$

Die Lösung 2.99 schreibt sich somit als

$$\varphi(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi r} \delta\left(t - \frac{r}{c_0}\right) = \frac{1}{4\pi |\mathbf{x}|} \delta\left(t - \frac{|\mathbf{x}|}{c_0}\right) \quad (2.102)$$

## 2.2.4. Akustischer Monopol, Dipol und Quadrupol

### Monopol

Die im vergangenen Abschnitt beispielhaft betrachtete punktförmige, stoßartig pulsierende Schallquelle  $q(t)\delta(\mathbf{x})$  als Modell für eine pulsierende Sphäre nennt man **Monopol** oder einfach Punktquelle. Man schreibt die Gleichung

$$\left(\frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2\right) \varphi = -q(t)\delta(\mathbf{x}) \quad (2.103)$$

Die Lösung lässt sich nun mit Hilfe von Gl. B.52 und durch Ersetzen von  $p$  durch  $\varphi$  schreiben als

$$\varphi(\mathbf{x}, t) = \frac{-q\left(t - \frac{|\mathbf{x}|}{c_0}\right)}{4\pi|\mathbf{x}|} \equiv \frac{-q\left(t - \frac{r}{c_0}\right)}{4\pi r} \quad (2.104)$$

Diese Gleichung unterscheidet sich von der Lösung für das inkompressible Medium, der Gl. 2.93 durch die Abhängigkeit von der retardierten Zeit  $t - \frac{r}{c_0}$ . Physikalisch gesehen ist das realistischer, da die Schallgenerierung am Aufschnitt der Orgelpfeife ein zeitversetztes Feedback durch die im Resonator reflektierte Welle erhält. Die Länge der Zeitversetzung bis zur Wechselwirkung mit dem Jet am Aufschnitt bestimmt die Frequenz, mit der das Luftblatt sich einschwingt und somit die Tonhöhe der Orgelpfeife.

### Dipol

Die Region der Schallquelle der Orgelpfeife ist jedoch keine Punktquelle, sondern ein ausgedehnter Bereich. Mit einem zeitabhängigen Vektor  $\mathbf{f} = \mathbf{f}(t)$  schreibt sich die Schallquelle für diesen Bereich dann als ein sogenannter **Punkt-dipol**, nämlich als

$$\mathcal{F}(\mathbf{x}, t) = \text{div}(\mathbf{f}(t)\delta(\mathbf{x})) \equiv \frac{\partial}{\partial x_j}(f_j(t)\delta(\mathbf{x})) \quad (2.105)$$

wobei  $j = 1, 2, 3$ . Die Gleichung 2.105 ist äquivalent zu einer Kraftverteilung  $\mathbf{F} = -\mathbf{f}(t)\delta(t)$  pro Einheitsvolumen. Der generierte Schall des Dipols schreibt sich als

$$p(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi} \iiint_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial y_j}(f_j(\tau)\delta(\mathbf{y})) \frac{\delta\left(t - \tau - \frac{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}{c_0}\right)}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} d^3\mathbf{y} d\tau \quad (2.106)$$

Partielle Integration über alle  $y_j$  ( $\delta(\mathbf{y}) = 0$  für  $y_j = \pm\infty$ ) und der Beziehung

$$\frac{\partial}{\partial y_j} \frac{\delta\left(t - \tau - \frac{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}{c_0}\right)}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} = -\frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\delta\left(t - \tau - \frac{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}{c_0}\right)}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} \quad (2.107)$$

führt zu

$$\begin{aligned}
p(\mathbf{x}, t) &= \frac{1}{4\pi} \iint_{-\infty}^{+\infty} f_j(\tau) \delta(\mathbf{y}) \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\delta\left(t - \tau - \frac{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}{c_0}\right)}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} d^3\mathbf{y} d\tau \\
&= \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial x_j} \iint_{-\infty}^{+\infty} f_j(\tau) \delta(\mathbf{y}) \frac{\delta\left(t - \tau - \frac{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}{c_0}\right)}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} d^3\mathbf{y} d\tau
\end{aligned}$$

und schließlich zu

$$p(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{f_j\left(t - \frac{|\mathbf{x}|}{c_0}\right)}{4\pi|\mathbf{x}|} \right) \quad (2.108)$$

Ganz analog gilt für eine Verteilung von Dipolquellen des Typs  $\mathcal{F}(\mathbf{x}, t) = \text{div}(\mathbf{f}(\mathbf{x}, t))$

$$p(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial x_j} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f_j\left(\mathbf{y}, t - \frac{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}{c_0}\right)}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} d^3\mathbf{y} \quad (2.109)$$

Ein Punktdipol am Ursprung, mit der Orientierung in Richtung des Einheitsvektors  $\mathbf{n}$  ist also äquivalent zu zwei akustischen Monopolen mit gleichen, aber entgegengesetzten Stärken, welche sehr nah beieinander liegen, d.h. die Entfernung der Monopole ist viel kleiner, als die akustische Wellenlänge. Wenn zum Beispiel der Einheitsvektor  $\mathbf{n}$  parallel zur x-Achse ist und die Entfernung der akustischen Monopole mit  $\epsilon$  bezeichnet wird, dann sind die zwei Monopole

$$\begin{aligned}
q(t) \delta\left(x - \frac{\epsilon}{2}\right) \delta(y) \delta(z) - q(t) \delta\left(x + \frac{\epsilon}{2}\right) \delta(y) \delta(z) \\
\approx -\epsilon q(t) \delta'(x) \delta(y) \delta(z) \equiv -\frac{\partial}{\partial x} (\epsilon q(t) \delta(\mathbf{x}))
\end{aligned}$$

Das ist der Volumendipol des Fluids. Die Relation  $p = -\rho_0 \partial\varphi/\partial t$  impliziert, dass die äquivalente Dipolquelle in den Gleichungen 2.89 und B.49 die Form

$$-\rho_0 \frac{\partial}{\partial x} (\epsilon \dot{q}(t) \delta(\mathbf{x})) \quad (2.110)$$

hat, wobei der Punkt die Zeitableitung repräsentiert.

### Quadrupol

Eine Schallquelle, die zwei räumliche Ableitungen enthält ist äquivalent zu vier akustischen Monopolen, deren Quellstärke zusammen gleich Null ist. Dies nennt man einen akustischen **Quadrupol**. Der Quellterm des Quadrupols hat die Form

$$\mathcal{F}(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial^2 T_{ij}}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x}, t). \quad (2.111)$$

Die korrespondierende Gleichung für den Druck ist

$$p(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{T_{ij}(\mathbf{y}, t - |\mathbf{x} - \mathbf{y}|/c_0)}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} d^3\mathbf{y} \quad (2.112)$$

Es kann gezeigt werden, dass  $T_{ij}$  dem sogenannten **Lighthill-Tensor** entspricht (siehe z. B. [17]).

$$T_{ij} = \rho v_i v_j + (p - p_0) \delta_{ij} - \sigma_{ij} - c_0^2 (\rho - \rho_0) \delta_{ij} \quad (2.113)$$

Dabei ist  $\sigma_{ij}$  der Reynoldssche-Spannungstensor. Mit Hilfe des Lighthill-Tensors lässt sich die Schallabstrahlung ausgedehnter Schallquellen auf elegante Weise numerisch behandeln.

## 2.3. Akustische Grundlagen

Schall ist die Erscheinung der longitudinalen Ausbreitung einer Druckschwankung durch ein Medium, hervorgerufen durch eine Kraft. Dabei werden die Moleküle um einen gewissen Betrag, nämlich den der **Schallauslenkung**  $\vec{\xi}$  aus ihrer Ruhelage bewegt. Die Geschwindigkeit dieser Auslenkbewegung nennt man die **Schallschnelle**  $\vec{v}$ . Sie ist eine Partikelgeschwindigkeit.

$$\vec{v} = \frac{d\vec{\xi}}{dt} = \dot{\vec{\xi}} \quad (2.114)$$

Bei periodischen Auslenkbewegungen schreibt man

$$\vec{v} = \vec{\xi} \cdot \omega = \vec{\xi} \cdot 2\pi \cdot f \quad (2.115)$$

Die Schallschnelle darf nicht verwechselt werden mit der Schallgeschwindigkeit  $c_0$  des Mediums.

Da die Schallschnelle oft über mehrere Größenordnungen schwankt führt man eine logarithmierte Skalierung ein, den sogenannten **Teilchengeschwindigkeitspegel**  $L_v$ , oder im anglo-amerikanischen Sprachraum PVL, **Particle Velocity Level**

$$L_v = 20 \log_{10} \left( \frac{v}{v_0} \right) \text{ dB} \quad (2.116)$$

Der Bezugswert  $v_0 = 5.0 \cdot 10^{-8}$  m/s. Die Einheit Dezibel, dB, ist dimensionslos.

Die **Schallbeschleunigung** ergibt sich zu

$$\vec{a} = \frac{d\dot{\vec{v}}}{dt} = \ddot{\vec{\xi}} \quad (2.117)$$

Das Produkt der Masse  $M$  der bewegten Partikel und der Schallbeschleunigung wirkend auf eine Fläche  $A$  ergibt den **Schalldruck**

$$p = \frac{M\vec{a}}{A} = \frac{\vec{F}}{A} \quad (2.118)$$

Der Schalldruck ist die wichtigste Schallfeldgröße in der Akustik. Sie beschreibt den Wechseldruck, der dem statischen Druck  $p_0$  (z.B. dem Luftdruck) des umgebenden Mediums überlagert ist. Daher der Begriff Druckschwankung. Der Schalldruck ist mathematisch betrachtet eine skalare Feldgröße. In der Akustik spricht man von **Schall** oder **Ton**, wenn der zeitliche Verlauf des Schalldruckes als eine harmonische Schwingung dargestellt werden kann, etwa

$$p(t) = \hat{p} \sin(2\pi \cdot f \cdot t) = \hat{p} \sin(\omega t) \quad (2.119)$$

mit der Schalldruckamplitude  $\hat{p}$  und der Kreisfrequenz  $\omega = 2\pi \cdot f$ . Weiterhin verwendet man häufig den **Effektivwert** des Schalldruckes

$$\tilde{p} = \frac{\hat{p}}{\sqrt{2}} \quad (2.120)$$

Da sich die Schwankungen des Schalldruckes oft über mehrere Größenordnungen erstrecken, definiert man den sogenannten **Schalldruckpegel**  $L_p$ , auch **Sound Pressure Level**  $SPL$  genannt, als logarithmisches Maß für das Verhältnis des Schalldruckes zum Bezugswert  $p_0$

$$L_p = SPL = 10 \log_{10} \left( \frac{\tilde{p}^2}{p_0^2} \right) \text{ dB} = 20 \log_{10} \left( \frac{\tilde{p}}{p_0} \right) \text{ dB} \quad (2.121)$$

Für das Medium Luft beträgt der Bezugswert  $p_0 = 2 \cdot 10^{-5}$  Pa. Dieser Druck entspricht etwa der Hörschwelle des menschlichen Gehörs bei einer Frequenz von 1 kHz. Zum Vergleich, der Druck einer Atmosphäre,  $1 \text{ atm} = 10^5$  Pa, entsprechen ca. 194 dB. Ein sehr lautes Geräusch von ca. 120 dB entspricht somit einer relativen Druckschwankung von

$$\frac{p_0}{p} \approx \frac{2 \cdot 10^{-5}}{10^5} \cdot 10^{\left(\frac{120}{20}\right)} = 2 \cdot 10^{-4} \ll 1 \quad (2.122)$$

Mit der **Schallintensität**  $\vec{I}$  beschreibt man den Energiefluss im Schallfeld.

$$\vec{I} = p \cdot \vec{v} \quad (2.123)$$

Aus den gleichen Gründen wie beim Schalldruck gibt man die Schallintensität auch oft über das logarithmierte Verhältnis des Betrags der Intensität zur Bezugsintensität an, nämlich dem **Schallintensitätspegel**  $L_I$ , der auch oft als  $SIL$ , **Sound Intensity Level** bezeichnet wird

$$L_I = SIL = 10 \log_{10} \left( \frac{|\vec{I}|}{I_0} \right) \text{ dB} \quad (2.124)$$

wobei der Bezugswert  $I_0 = 10^{-12} \text{ W/m}^2$  ist. Im Schallfeld einer ebenen Welle berechnet sich die Schallintensität  $I$  durch

$$I = \frac{1}{T} \int_0^T \tilde{p}(t) \cdot v(t) dt \quad (2.125)$$

mit dem Effektivwert des Schalldruckes  $\tilde{p}$  und der Schallschnelle  $v$ . Führt man schließlich noch die **Schalleistung**  $P$  ein,

$$P = \int \vec{I} \cdot d\vec{A} \quad (2.126)$$

so findet man für eine Kugelwelle

$$I(r) = \frac{P}{A} = \frac{P}{4\pi \cdot r^2} \quad (2.127)$$

Sei  $k = \omega/c_0$  der Wellenvektor der Kugelwelle. Dann nimmt für  $k \cdot r \ll 1$  die Schallintensität der Schallquelle quadratisch mit dem Abstand ab

$$I \propto \frac{1}{r^2} \quad (2.128)$$

Man spricht in diesem Fall von dem sogenannten **Nahfeld**. Schallschnelle und Schalldruck propagieren gegenphasig. Der Schalldruck eilt der Schallschnelle um maximal  $90^\circ$  voraus.

Im **Fernfeld**,  $k \cdot r \gg 1$ , gibt es nur noch ebene Wellen. Die Schallintensität nimmt umgekehrt proportional zum Abstand ab

$$I \propto \frac{1}{r} \quad (2.129)$$

Schalldruck  $p$  und Schallschnelle  $v$  propagieren im Fernfeld phasengleich.

In Tabelle 2.1 sind häufig verwendete Schalldruckpegel, deren Schalldrücke, Schallschnellen und Schallintensitäten zusammengestellt.

$L_p$ (dB)	0	20	40	60	80	100	120	140
$p$ (Pa)	$2 \cdot 10^{-5}$	$2 \cdot 10^{-4}$	$2 \cdot 10^{-3}$	0.02	0.2	2	20	200
$v$ (m/s)	$5 \cdot 10^{-8}$	$5 \cdot 10^{-7}$	$5 \cdot 10^{-6}$	$5 \cdot 10^{-5}$	$5 \cdot 10^{-4}$	$5 \cdot 10^{-3}$	0.05	0.5
$I$ (W/m <sup>2</sup> )	$1 \cdot 10^{-12}$	$1 \cdot 10^{-10}$	$1 \cdot 10^{-8}$	$1 \cdot 10^{-6}$	$1 \cdot 10^{-4}$	$10^{-2}$	1	10

**Tabelle 2.1.:** Ausgewählte Werte von Schalldruckpegel ( $L_p$ ), Schalldruck ( $p$ ), Schallschnelle ( $v$ ) und Schallintensität ( $I$ ).

Über die **akustische Feldimpedanz**  $Z_F$  ist der Schalldruck mit der Schallschnelle verknüpft.

$$p = Z_F \cdot v \quad (2.130)$$

In einen freien Schallfeld, ohne Hindernisse oder Barrieren wird die akustische Feldimpedanz durch die Eigenschaften des Ausbreitungsmediums charakterisiert

$$Z_F = \rho_0 \cdot c_0 \quad (2.131)$$

mit der Dichte  $\rho_0$  und der Schallgeschwindigkeit  $c_0$  des Fluids.

Die **akustische Flussimpedanz** oder einfach **akustische Impedanz** ist das Verhältnis einer Potentialgröße zu einer Flussgröße

$$\text{Impedanz} = \frac{\text{Potentialgröße}}{\text{Flussgröße}} = \frac{p}{q} \quad (2.132)$$

und beschreibt ganz allgemein den Widerstand, der der Schallausbreitung in Rohren und ähnlichen Geometrien entgegengesetzt wird. Der Schallfluss  $q$  wird dabei definiert als

$$q = \int \vec{v} d\vec{A} \quad (2.133)$$

Akustische Impedanzen können zum Beispiel durch Reibungsverluste an Grenzflächen oder durch Energiedissipation durch Turbulenz und Wirbelbildung bewirkt werden. In Analogie zur Elektrodynamik schreibt man die akustische Impedanz als komplexwertige Größe

$$Z = R + iX \quad (2.134)$$

mit dem Realteil  $\text{Re}\{Z\} = R$ , der **Resistanz** und dem Imaginärteil  $\text{Im}\{Z\} = X$ , der **Reaktanz**. Der Kehrwert der Impedanz heißt **Admittanz**.

Die **Schallgeschwindigkeit**  $c_0$  ist die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Druckschwankung als Schallwelle durch das Fluid. Sie ist im Gegensatz zur oben eingeführten Schallschnelle also eine Gruppengeschwindigkeit und darf daher nicht mit der Teilchengeschwindigkeit verwechselt werden. Es gilt

$$c_0 = \sqrt{\left. \frac{\partial p}{\partial \rho} \right|_0} = \sqrt{\frac{1}{\rho_0 \kappa_0}} \quad (2.135)$$

wobei  $\rho_0$  die Dichte und  $\kappa_0$  der Kompressibilität der Fluids ist. Die Schallgeschwindigkeit in Luft ist nicht abhängig vom Druck, da Druck und Dichte sich zeitgleich in gleichen Raten ändern, sehr wohl aber von der Temperatur  $T$  des Mediums. Es gilt

$$c_0 = \sqrt{\frac{\partial E_0}{\partial \rho_0}} \Leftrightarrow \frac{1}{\kappa_0} = \rho_0 c_0^2 \quad (2.136)$$

mit dem Elastizitätsmodul  $E_0$  des Fluids. Hier ist die Ähnlichkeit zu einen elastischen Festkörper recht anschaulich. Mit der Beziehung 2.131 lässt sich die Schallgeschwindigkeit in Luft schnell berechnen. Mit der Luftdichte bei  $20^\circ\text{C}$  von  $\rho_{Luft} = 1.204 \text{ kg/m}^3$  und der akustischen Feldimpedanz von  $Z_F = 413 \text{ Ns/m}^3$  findet man  $c_0 = 343 \text{ m/s}$ .

Die Schallgeschwindigkeit in Gasen und Flüssigkeiten ist im Allgemeinen viel höher als die Partikelgeschwindigkeit der Fluidteilchen. Über die Beziehung

$$v \approx \frac{p}{\bar{\rho}_0 \cdot c_0} \quad (2.137)$$

sind die Schallgeschwindigkeit  $c_0$  des Mediums, der Schalldruck  $p$ , die mittlere Dichte  $\bar{\rho}_0$  des Mediums und die Partikelgeschwindigkeit  $v$  miteinander verknüpft.

Die akustische Wellenausbreitung wird beschrieben durch die akustische Wellengleichung welche in Abschnitt 2.2.3 hergeleitet wurde. Sie stammt von Leonhard Euler (1759) und lautet

$$\left( \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \right) p = 0 \quad (2.138)$$

oder, äquivalent dazu

$$\left( \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \right) v = 0 \quad (2.139)$$

Auf der linken Seite steht der Wellenoperator, auf  $p$  versus  $v$  wirkend. Die rechte Seite ist 0, d.h das Vektorfeld ist rotationsfrei und daraus folgt, dass das Feld als ein Gradientenfeld eines Potentials  $\varphi$  dargestellt werden kann, also

$$v = \nabla \varphi \quad (2.140)$$

und somit

$$\left( \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \right) \varphi = 0 \quad (2.141)$$

## 3. Daten und Resultate

*Alles, was man tun muss, ist, die richtige Taste zum richtigen Zeitpunkt zu treffen.*

JOHANN SEBASTIAN BACH, (1685 - 1750), DEUTSCHER KOMPONIST,  
ORGANIST, HOFKAPPELLMEISTER UND UNIVERSITÄTS-MUSIKDIREKTOR IN  
LEIPZIG

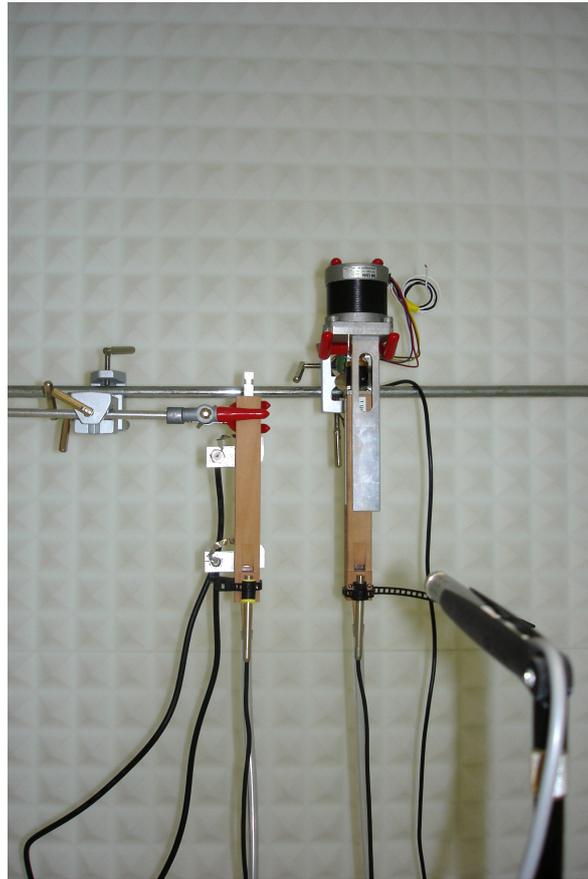
Dieses Kapitel beschäftigt sich mit der Auswertung der experimentell gewonnenen Daten. Bevor die Resultate vorgestellt und diskutiert werden, wird kurz der Messaufbau und das Experiment erläutert. Erstes Ziel der Auswertung ist es, die hörbare Synchronisation der Orgelpfeifen in Abhängigkeit von ihrem Abstand zu untersuchen. Zum Zweiten werden aus den Daten Informationen gewonnen, die Aufschluss über die Kopplungsfunktion geben. Auf der Grundlage dieser Erkenntnisse kann dann eine Modellierung erfolgen.

### 3.1. Messaufbau und Experiment

Bei den in dieser Arbeit untersuchten Daten handelt es sich um Audio-Daten in einem entsprechenden Audio-Format. Die Daten wurden 2006 von Herrn Dr. Steffen Bergweiler im Rahmen seiner Dissertation im Akustiklabor an der Universität Potsdam aufgenommen. Die untersuchten Orgelpfeifen wurden von der Firma Alexander Schuke Potsdam Orgelbau GmbH gefertigt. Es handelt sich dabei um gedackte, also am oberen Resonantorende verschlossene Labialpfeifen aus Holz. Die Verschließung erfolgt durch einen mit einer umlaufenden Lederdichtung versehenen Holzstempel, den man **Spund** nennt. Der Stempel lässt sich in Resonatorlängsachse verschieben. Dadurch kann das Volumen des Resonatorinnenraumes variiert und so die Orgelpfeife auf die gewünschte Grundtonhöhe gestimmt werden. Eine der Orgelpfeifen, wir nennen sie im Folgenden P1, wird auf diese Weise auf die Grundtonfrequenz von 720 Hz gestimmt. Der Spund der zweiten, baugleichen Orgelpfeife, im Folgenden P2, kann durch einem Präzisionsschrittmotor bewegt werden. Durch das Verfahren des Schrittmotors wird der Resonatorinnenraum verkleinert oder vergrößert. Auf diese Weise kann die Orgelpfeife mit einer Schrittweite von 0.5 Hz in einem Frequenzbereich von  $720 \pm 20$  Hz durchgestimmt werden. Beide Orgelpfeifen sind in einer schallreflexionsarmen Messbox nebeneinander aufgestellt. Die Orgelpfeifen werden mit separaten Druckschläuchen an einen Wind-Erzeuger und einen Balg angeschlossen, welche außerhalb der Messbox aufgestellt werden. Der Winddruck ist auf 75 mmWs eingestellt, dem typischen Anblasdruck solcher Orgelpfeifen. Für die Messung der akustischen Signale werden Präzisions-Messmikrofone direkt am Aufschnitt der Orgelpfeifen sowie in einer Entfernung von 1 m symmetrisch in Höhe der Aufschnitte platziert. Abbildung 3.1 zeigt den Messaufbau.

Mit der beschriebenen Messanordnung ist folgendes Experiment durchgeführt worden. Für definierte Abstände der Orgelpfeifen zueinander von 1 mm, 10 mm, 30 mm, 50 mm, 75 mm, 100 mm, 200 mm, 300 mm und 400 mm wurde die Orgelpfeife P2 in jeweils 0.5 Hz-Schritten in einem Frequenzbereich von etwa 700 Hz - 740 Hz relativ zur Orgelpfeife P1 durchgestimmt. Dabei wurde für jeden Frequenz-Halbschritt ein Signal von 8 s aufgezeichnet. Daraus folgen pro Abstand 80 Datensätze von jeweils 8 s Länge. Die Frequenzauflösung pro Datensatz beträgt ca. 0.125 Hz. Für bestimmte Abstände wurden auch Messreihen von nur 40 Datensätzen aufgezeichnet. Für nähere Informationen zum Messaufbau,

den Dämpfungsparametern der Messbox, den verwendeten Mikrofonen, dem Vorverstärker und der Soundkarte sei auf die Dissertationsschrift von Herrn Dr. Steffen Bergweiler [7] verwiesen.



**Abbildung 3.1.:** Der Messaufbau. Die zwei Labialpfeifen P1, P2 aus Holz sind in definierten Abständen zueinander fixiert. Die rechte Pfeife (P2) ist mit dem Schrittmotor ausgestattet. Man erkennt zwei Mikrophone direkt unter den Aufschnitten der Orgelpfeifen. Zwei zusätzliche Mikrophone sind an der linken Pfeife (P1) so angebracht, dass sie Schallsignale direkt aus dem Resonatorinnenraum aufnehmen können. In Vordergrund ist das Mikrophon zu erkennen, welches die Schallsignale im Fernfeld aufnimmt.

## 3.2. Audio-Daten und Schalldruckpegelspektren

Die Audio-Daten wurden gesichtet und auf etwaige Fehlerhaftigkeit untersucht. Leider haben die Messreihen der verschiedenen Abstände unterschiedliche Längen. Für die Abstände 1 mm, 50 mm, 100 mm, 200 mm, 300 mm und 400 mm gibt es 80 Datensätze. Für die Abstände 10 mm, 30 mm und 75 mm sind es jeweils 40 Datensätze. Die Abbildungen 3.2a und 3.2b zeigen exemplarisch das Audio-Signal der 25. Messung bei einem Pfeifenabstand von 1mm und eine Detailansicht desselben Signals. Nach Sichtung der Daten werden aus den Einzelmessungen, also den jeweils 40 bzw. 80 Audio-Signalen für jeden gemessenen Abstand die Amplituden- und Schalldruckpegelspektren generiert. Dafür wird entsprechender Matlab-Code geschrieben. In den Abbildungen 3.3a und 3.3b ist beispielhaft das Schalldruckpegelspektrum des 25. Datensatzes des Abstandes 1 mm dargestellt.

Um eine Darstellung aller Schalldruckpegelspektren für einen bestimmten Abstand zu erhalten, werden die Schalldruckpegelspektren aller 40 bzw. 80 Datensätze pro Abstand zu einem farbcodierten Bild zusammengefasst. Dabei stellt die Farbcodierung die Amplitude des Schalldruckes als Pegel in der

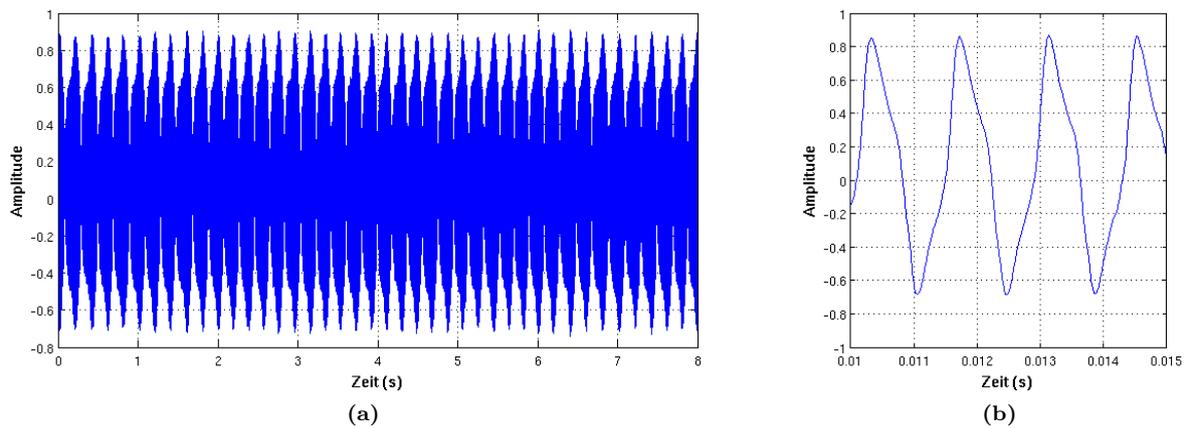


Abbildung 3.2.: (a) Audio-Signal der Messung Abstand 1mm, 25. Datensatz. (b) Detail desselben Signals.

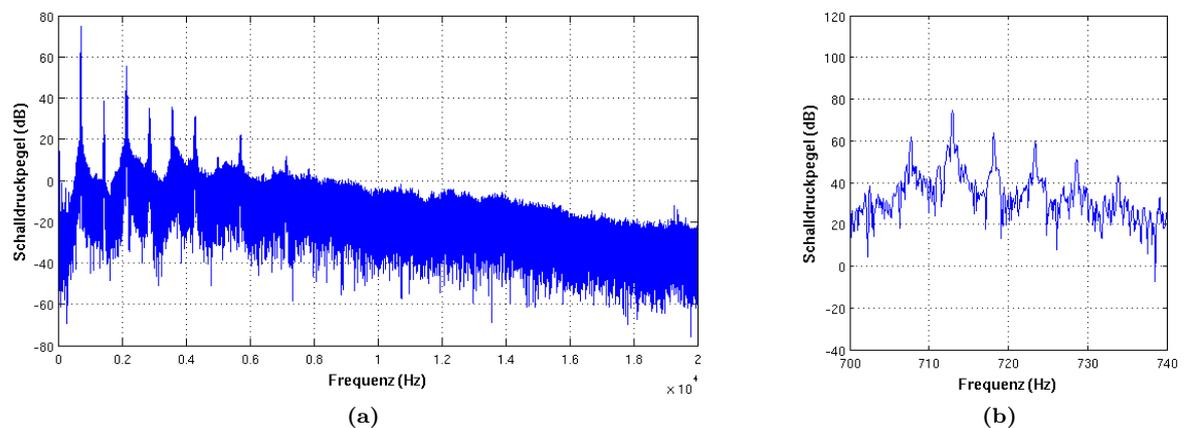
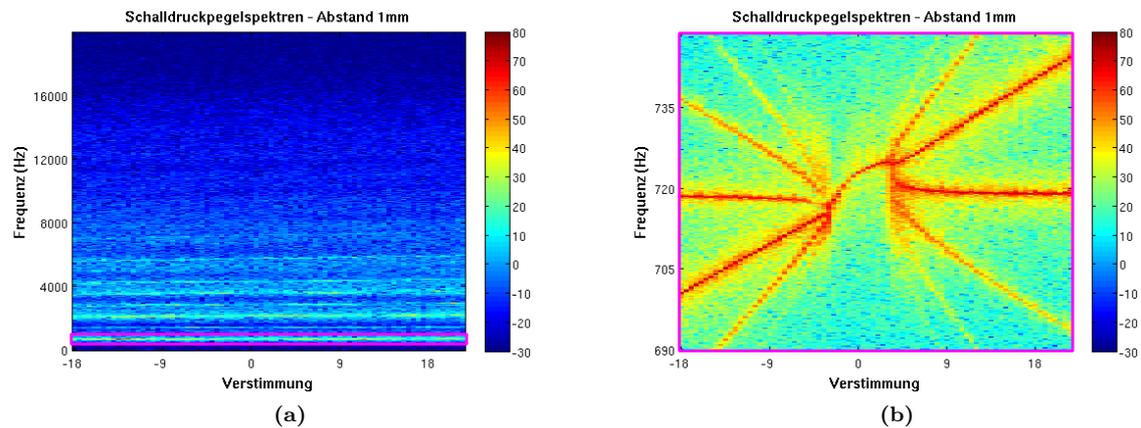


Abbildung 3.3.: (a) Schalldruckpegelspektrum der Messung Abstand 1mm, 25. Datensatz. (b) Detailansicht desselben Schalldruckpegelspektrums im Bereich der 1. Harmonischen (Grundfrequenz) der Pfeife P1.

Einheit Dezibel (dB) dar. Der farbcodierte Bereich des Schalldruckpegels geht von  $-30$  dB bis  $80$  dB. Abbildung 3.4a zeigt dies am Beispiel der 80 Datensätze für den Abstand  $1$  mm. Auf der Abszisse ist die Verstimmung, auf der Ordinate die Frequenz aufgetragen. Die Samplingfrequenz der Audio-Signale beträgt  $40000$  Hz. Daraus ergibt sich ein darstellbarer Frequenzbereich von  $0$  Hz- $20000$  Hz. Das Rechteck markiert den Bereich der 1. Harmonischen beider Orgelpfeifen von etwa  $690$  Hz- $750$  Hz. Die Abbildung 3.4b zeigt den Ausschnitt des Bereiches der 1. Harmonischen des Systems. Dieser Bereich wird nun für jeden Abstand genauer analysiert.

### 3.3. Schalldruckpegelspektren im Bereich der 1. Harmonischen

Für die verschiedenen Abstände der zusammen betriebenen Orgelpfeifen P1 und P2 sind die farbcodierten Schalldruckpegelspektren im Bereich der 1. Harmonischen in den Abbildungen 3.5a - 3.5i dargestellt, wobei die **Verstimmung**  $\Delta f$  über der Frequenz  $f$  aufgetragen ist. Mit Verstimmung ist



**Abbildung 3.4.:** (a) Farbcodierte Grafik aller Schalldruckpegelspektren für den Abstand der Orgelpfeifen von  $d = 1$  mm zueinander. Die Farbcodierung stellt den Schalldruckpegel dar. Der mit dem Rechteck markierte Bereich ist der Frequenzbereich der 1. Harmonischen des Systems. (b) Detailsicht der farbcodierten Grafik der Schalldruckpegelspektren für den Abstand  $d = 1$  mm im Frequenzbereich der 1. Harmonischen des Systems.

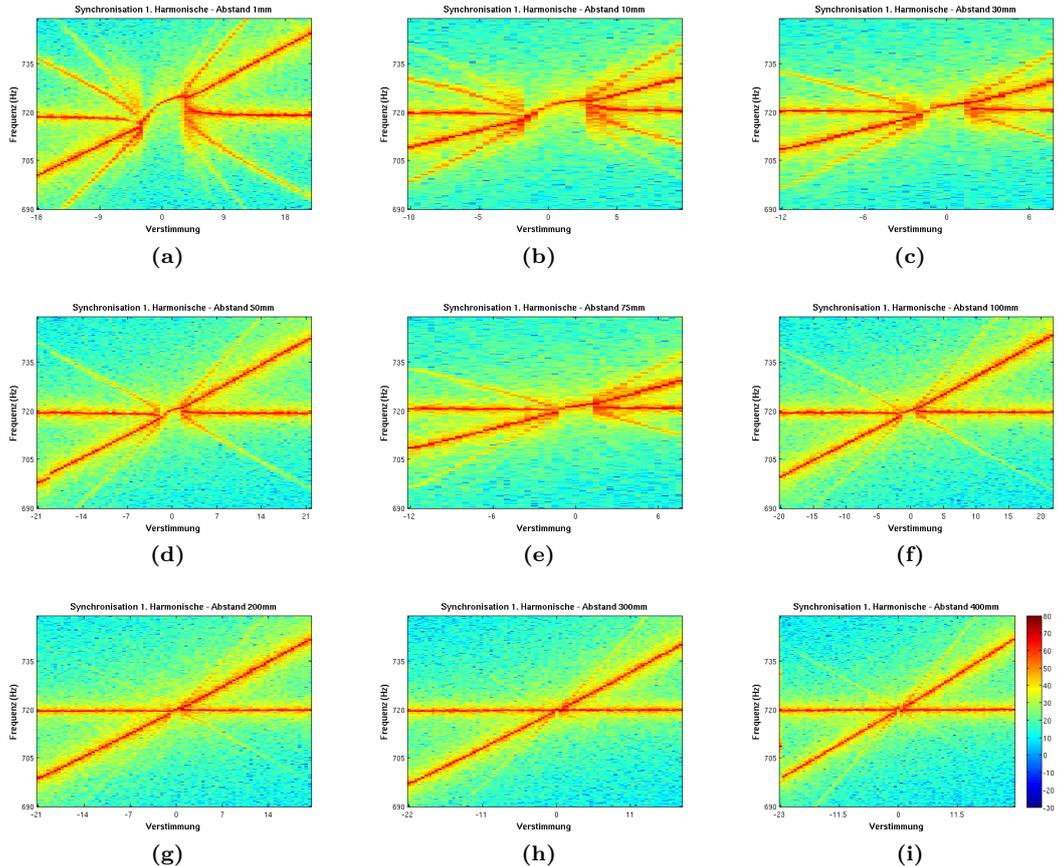
die Frequenzdifferenz der Pfeife P2, minus der Grundfrequenz der einzeln betriebenen (autonomen) Pfeife P1 gemeint. Die Farbcodierung stellt den Schalldruckpegel dar. Am linken Rand der Abbildung 3.5a ist die Grundfrequenz der Pfeife P1 bei etwa 719 Hz und die Grundfrequenz der Pfeife P2 bei etwa 701 Hz zu sehen. Man erkennt, dass hier die beiden Pfeifen um etwa 18 Hz gegeneinander verstimmt sind. Im weiteren Verlauf der Grafik steigt die Frequenz der Pfeife P2 mit einer Schrittweite von etwa 0.5 Hz relativ zur Pfeife P1 an. Deutlich ist ein Absenken der Frequenz von P1 mit wachsender Frequenz von P2 zu erkennen. Das weist darauf hin, dass die Pfeifen sich in ihrem Schallabstrahlverhalten gegenseitig beeinflussen. Die Frequenzen „ziehen sich an“, wie man im Orgelbau sagt. Huygens beschrieb dieses Phänomen, wie erwähnt, als „eine seltsame Art von Sympathie“. Die Seitenbänder unterhalb und oberhalb der Grundfrequenzen, welche durch die höheren Harmonischen hervorgerufen werden, laufen ebenfalls aufeinander zu.

Mit kleiner werdender Verstimmung wächst die gegenseitige Beeinflussung. Ab einer Verstimmung von ca.  $-3$  Hz wird die Frequenz von P1 auf die von P2 justiert. Nun sind die Frequenzen beider Pfeifen synchronisiert. Auch die Seitenbänder sind auf die Frequenz der durchstimmbaren Pfeife P2 justiert. Wird P2 weiter verstimmt, bleibt die Synchronisation über einen Verstimmungsbereich von ca. 6 Hz bestehen. Bei einer Verstimmung von etwa  $+3$  Hz bricht die Synchronisation auf.

Im weiteren Verlauf wird die gegenseitige Beeinflussung der beiden Pfeifen schwächer. Man erkennt, dass die Grundfrequenzen sich immer mehr denen des jeweiligen autonomen Systems annähern. Auch die Seitenbänder sind wieder ausgeprägt. Die Abbildung 3.5b zeigt ein ähnliches Bild für den Abstand  $d = 10$  mm. Der Synchronisationsbereich ist allerdings nicht ganz so breit. Er umfasst einen Verstimmungsbereich von etwa 4.5 Hz. In den folgenden Abbildungen 3.5c - 3.5h ist zu sehen, wie der Synchronisationsbereich in Abhängigkeit vom größer werdenden Abstand der Pfeifen zueinander immer kleiner wird. Schließlich ist bei einem Abstand von 400 mm der Synchronisationsbereich nur noch marginal.

Aus den farbcodierten Grafiken der Schalldruckpegelspektren für die Abstände 1 mm, 10 mm, 30 mm, 50 mm, 75 mm, 100 mm, 200 mm, 300 mm und 400 mm lassen sich erste wichtige Erkenntnisse gewinnen. Zum Einen ist deutlich eine Frequenzkopplung der 1. Harmonischen bei kleinen und mittleren Abständen zu sehen. Die Frequenzen der Orgelpfeifen synchronisieren in einem gewissen Bereich kleiner Verstimmung. Die Ausdehnung dieses Bereiches ist abhängig vom Abstand der Orgelpfeifen zueinander. Stehen die Pfeifen sehr dicht nebeneinander (Abstand  $d = 1$  mm), erstreckt sich der Bereich der Synchronisation über etwa 6 Hz. Dabei wird die Frequenz der Pfeife P1 um etwa 10 Hz mitgenommen.

Bei größeren Abständen nimmt der Synchronisationsbereich nichtlinear ab. Bei einem Abstand der Orgelpfeifen von 400 mm ist die Synchronisation nur noch marginal. Dieser Abstand liegt im Bereich der Wellenlänge  $\lambda_0 = 476$  mm der einzeln betriebenen Orgelpfeife mit der Frequenz von 720 mm. Aus den gewonnenen Ergebnissen lässt sich schließen, dass es sich bei den Orgelpfeifen um selbsterregte, akustische Oszillatoren handeln muss. Nur diese Klasse von Oszillatoren zeigt Synchronisationsverhalten im Sinne der in Kapitel 2 eingeführten Begrifflichkeiten, vgl. [27]. Weiterhin ergibt sich aus den Ergebnissen die Fragestellung nach der Kopplungsfunktion der Orgelpfeifen. Dieser Frage wird in den nächsten Abschnitten nachgegangen.



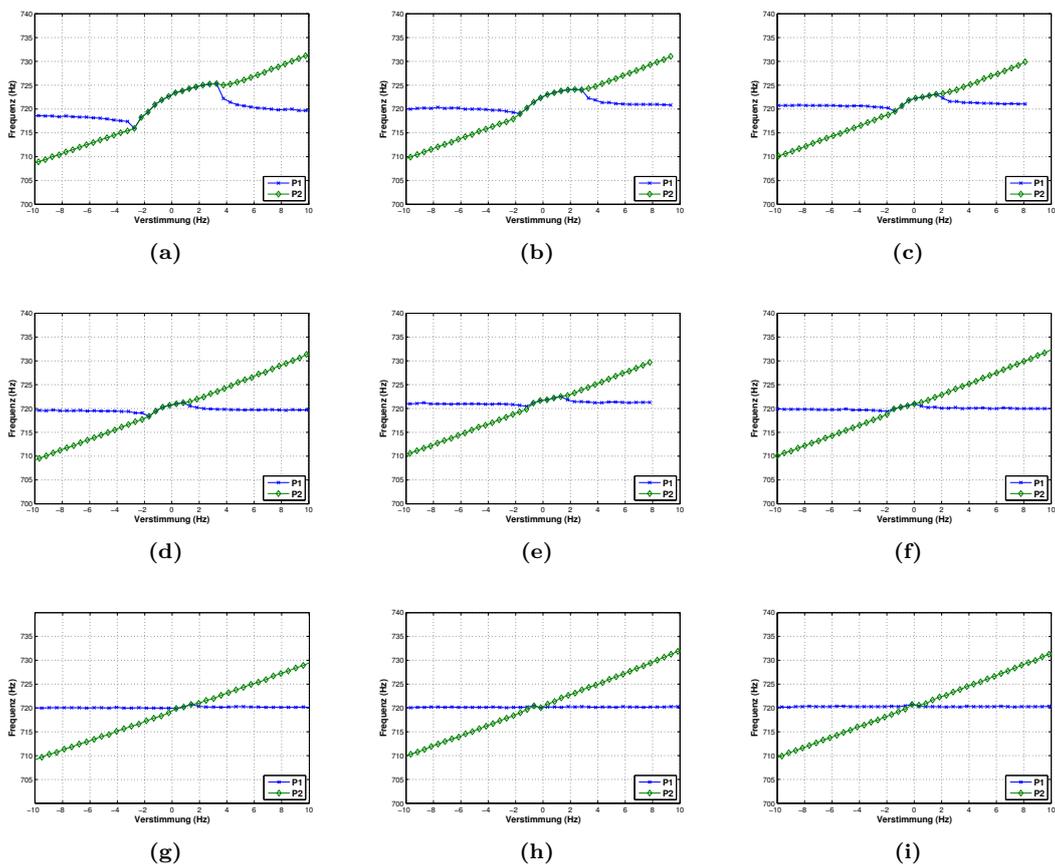
**Abbildung 3.5.:** Spektren des Grundtons der beiden Orgelpfeifen in Abhängigkeit vom Abstand  $d$  der Orgelpfeifen zueinander. Auf der Abzisse ist die Verstimmung  $\Delta f = \frac{1}{2\pi}(\omega - \omega_0)$  aufgetragen. Die Ordinate zeigt die Frequenz  $f = \frac{\omega}{2\pi}$ . (a) Bei einem Pfeifenabstand von 1 mm ist eine ausgeprägte Synchronisationsregion im Verstimmungsbereich von  $\pm 3$  Hz zu erkennen. (b) Pfeifenabstand  $d = 10$  mm. Die Synchronisationsregion ist immer noch sehr ausgeprägt, jedoch in einem kleineren Verstimmungsbereich von etwa  $\pm 2.25$  Hz. (c) Abstand der Pfeifen  $d = 30$  mm. Die Synchronisationsregion ist deutlich kleiner, aber immer noch gut zu erkennen. (d)-(h) Die Synchronisationsregionen werden mit wachsendem Abstand immer schmaler. (i) Schließlich ist bei einem Pfeifenabstand von 400 mm die Synchronisationsregion nur noch marginal.

### 3.4. Frequenzen und Schalldruck

Um die Frage der Kopplungsfunktion zu behandeln, muss man die Synchronisationsplateaus finden und aus diesen dann die Arnoldzunge konstruieren. Die Synchronisationsplateaus sind Darstellungen

der Verstimmung  $\Delta f = \frac{1}{2\pi}(\omega - \omega_0)$  über der Frequenzdifferenz  $\frac{1}{2\pi}(\Omega - \omega)$ . Dabei ist  $\Omega$  die Kreisfrequenz des beobachteten Systems der gemeinsam betriebenen Pfeifen P1 und P2 minus der Frequenz von P2. Die Kopplungsfunktion sollte zumindest eine Aussage darüber liefern, wie sich die Breite der Synchronisationsregion in Abhängigkeit vom Abstand der Orgelpfeifen zueinander verhält. Wünschenswert wäre zudem ein Ausdruck für die Kopplungsfunktion, der über die Direktionalität der Kopplung Auskunft gibt, das heißt, ob die Kopplungsstärken beider Pfeifen gleich groß sind, oder ob die Kopplung von einer Pfeife dominiert wird. Im zweiten Fall hätten wir es dann mit einer mehr oder weniger unidirektionalen Kopplung zu tun. Erst einmal gibt es keinen Grund zu der Annahme, dass von zwei baugleichen Pfeifen eine der beiden einen bevorzugten Part im Wechselspiel einnimmt, der zur Synchronisation führt.

Das Prozedere, um zu den Synchronisationsplateaus zu gelangen, ist Folgendes. Indem man aus den farbcodierten Grafiken die jeweiligen Maxima der 1. Harmonischen von P1 und P2 für jeden Datensatz bestimmt und voneinander abzieht, erhält man die Frequenzdifferenz  $\frac{1}{2\pi}(\Omega - \omega)$ . Anschließend trägt man die Verstimmung über der Frequenzdifferenz auf. Um die genannten Maxima zu bestimmen, wurde wieder entsprechender Matlab-Code geschrieben. Die Abbildungen 3.6a - 3.6i zeigen die Ergebnisse. Zu sehen sind die aus den farcodierten Grafiken extrahierten Schalldruckpegelmaxima der 1. Harmonischen beider Pfeifen für die genannten Abstände. Die Maxima von P1 sind mit blau (-x-), die Maxima von P2 sind mit grün (-diamond-) markiert. Die Abbildungen 3.7a - 3.7i zeigen die Schalldruckpegel (Amplituden) der jeweiligen Maxima für die angegebenen Abstände. Die Abbildungen 3.8a - 3.8i zeigen die aus den Differenzen der Frequenzmaxima bestimmten Synchronisationsplateaus.



**Abbildung 3.6.:** Die Entwicklung der 1. Harmonischen der beiden Orgelpfeifen im Verlauf der Verstimmung von P2 in Abhängigkeit vom Abstand  $d$ . Die grüne (-diamond-) Kurve zeigt die Frequenzänderung der Pfeife P2. Die blaue Kurve (-x-) zeigt die Frequenzänderung von P1.

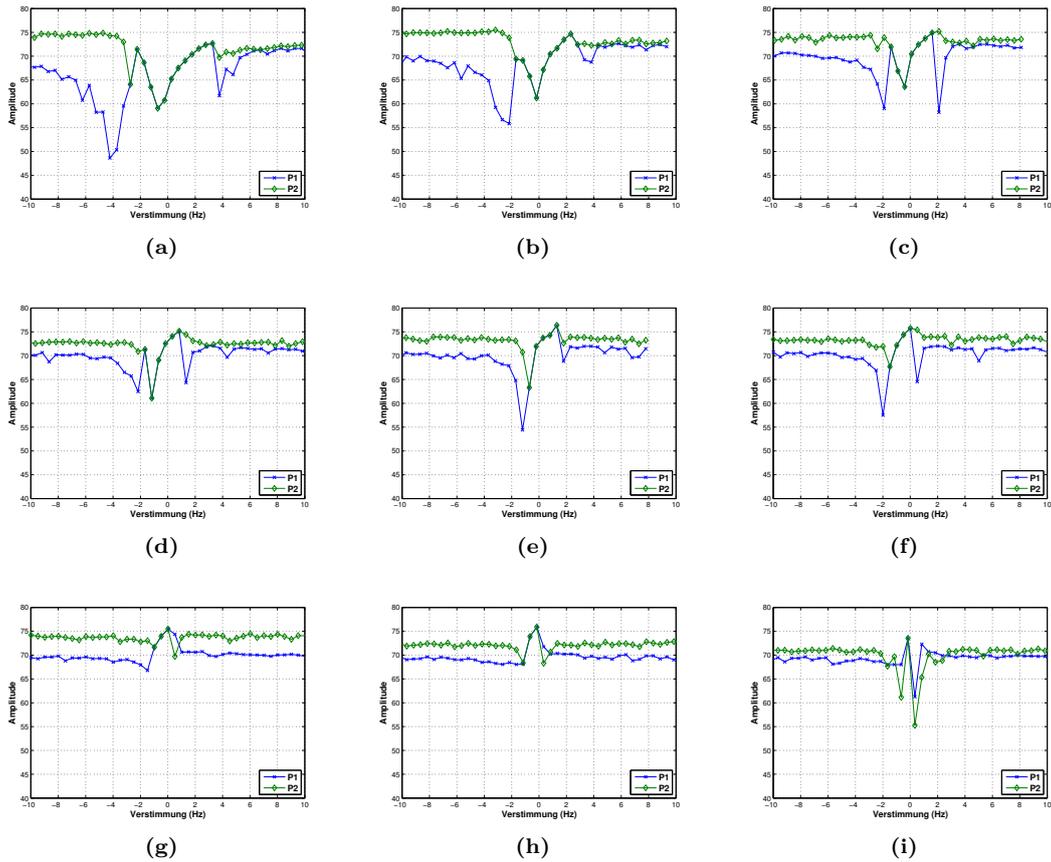


Abbildung 3.7.: Die Amplituden der 1. Harmonischen der beiden Orgelpfeifen als Schalldruckpegel in Abhängigkeit vom Abstand  $d$ .

### 3.5. Synchronisationsplateaus

Man erkennt, dass die 1. Harmonische von P2 außerhalb der Synchronisationsbereiche streng der Gerade folgt, die durch die schrittweise Verstimmung um 0.5 Hz pro Datensatz vorgegeben wird. Es gibt keine Frequenzerhöhung oder Frequenzabsenkung von P2 außerhalb der Synchronisationsregionen. Bei P1 erkennt man hingegen eine Frequenzabsenkung mit wachsenden Werten von  $\Delta f$ . Besonders stark ist dies bei kleinen und sehr kleinen Abständen ausgeprägt.

In den Abbildungen 3.6a - 3.6i fällt auf, dass die Synchronisationsregionen einen mehr oder weniger gut ausgeprägten Bogen beschreiben. Am deutlichsten ist dies für die kleinen Abstände 1 mm, 10 mm und 30 mm zu sehen. Aber auch bei größeren Abständen der Pfeifen zueinander, erkennt man die nichtlineare Entwicklung der Frequenz während der Synchronisation. Es sei bemerkt, dass die Verstimmung auch in diesem Bereich um schrittweise 0.5 Hz erfolgt.

Innerhalb der Synchronisationsregion findet eine Phasenverschiebung  $\Delta\phi$  um den Wert  $\pi$  statt. Die Amplitude des Schalldruckpegels nimmt im Zentrum der Synchronisationsregion ein Minimum an (vgl. Abb. 3.7a - 3.7d). Das heißt, hier ist die Phasendifferenz beider Pfeifen maximal. Die Pfeifen schwingen im Zentrum der Synchronisationsregion offenbar gegenphasig. An den Rändern der Synchronisationsregion beträgt die Phasendifferenz  $\pm\pi/2$ , oder anders formuliert, hier schwingen die Pfeifen in Phase. Die Schalldruckpegel nehmen hier lokale Maxima an. Dies ist besonders gut am rechten Rand der Synchronisationsregionen für die kleinen Abstände 1 mm, 10 mm und 30 mm zu erkennen.

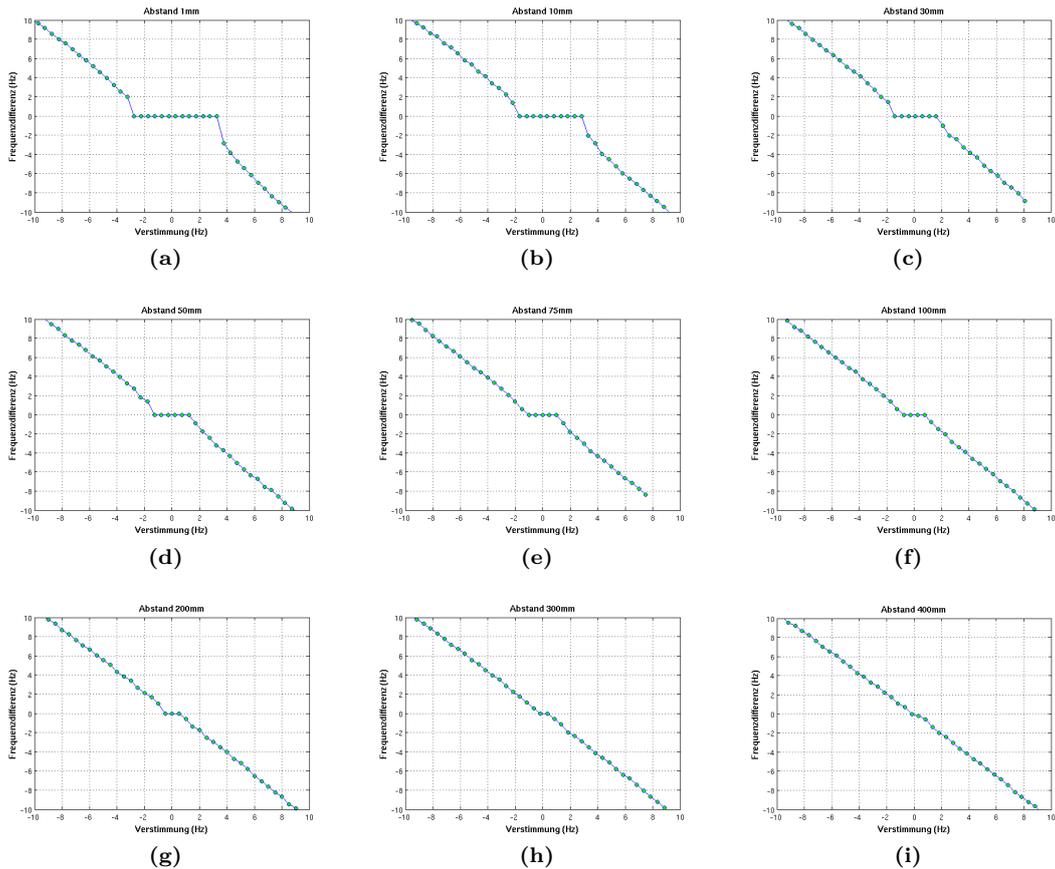


Abbildung 3.8.: Die Synchronisationsplateaus der in Abhängigkeit vom Abstand  $d$ .

Bei größeren Abständen wird die Interpretation schwierig. Auch hier erkennt man ein relativ starken Abfall der Amplituden der Schalldruckpegel. Dies geschieht jedoch schon beim Eintritt in die Synchronisationsregion. Während des Durchlaufens der Synchronisationsregion steigt die Amplitude bis zum rechten Rand auf ein lokales Maximum. Dies lässt darauf schließen, dass auch hier die Phasenverschiebung um den Wert  $\pi$  Verantwortung trägt für das Anwachsen der Amplitude in der Synchronisationsregion. Mit einer feineren, schrittweisen Verstimmung um beispielsweise 0.1 Hz könnte auch für größere Abstände eine genauere Analyse erfolgen.

Beim Austritt aus der Synchronisationsregion fällt der Schalldruckpegel von P1 signifikant ab. Hier tritt ein Phasensprung auf, das heißt, die Pfeifen schwingen nur noch für kurze Zeiten annähernd gleich. Da die Verstimmung beider Pfeifen jetzt zu groß ist, kommt es zum Aufbrechen der synchronen Schwingung. Die Frequenz von P1 „hinkt“ nun der Frequenz von P2 hinterher. Ein ähnliches Verhalten findet man auch kurz vor dem Eintritt in die Synchronisationsregion. Hier eilt die Frequenz von P1 der Frequenz von P2 voraus.

Die Darstellungen der Amplituden in Abb. 3.7a - 3.7d zeigen, dass P2 durchweg stärkere Amplituden hat als P1. Die Gegenseitige Wechselwirkung der Orgelpfeifen wird durch die Pfeife P2 dominiert. Man kann hier von verschiedenen Kopplungsstärken beider Pfeifen ausgehen. Ein weiteres Indiz dafür ist, dass die Frequenz von P1 auf die Frequenz von P2 justiert wird. P1 folgt P2 in ihrem Verhalten. Datensätze bei denen beide Pfeifen die gleichen Amplituden besitzen stehen leider nicht zur Verfügung. Es werden nun die Synchronisationsplateaus erläutert.

Die in den Abbildungen 3.8a - 3.8i dargestellten Synchronisationsplateaus für die verschiedenen Abstände zeigen eine sehr gute Übereinstimmung mit der Theorie der Synchronisation [27]. Für kleine

Abstände sieht man ausgeprägte Plateaus um die Verstimmung  $\Delta f = 0$  herum. Man erkennt, dass das Hineinlaufen und das Herausgehen aus dem Synchronisationsplateau dem theoretisch vorhergesagten Wurzelgesetz folgt. Interessant ist die Breite der Synchronisationsregion bei kleinen Abständen. Für den Abstand 1 mm (Abb. 3.8a) erstreckt sich das Plateau über etwa 6 Hz. Die Pfeife P2 nimmt die Frequenz von P1 über einen hörbar großen Frequenzbereich mit (daher Mitnahme-Effekt), obwohl P1 auf die fixe Frequenz von 720 Hz gestimmt worden war und nach wie vor ist. Während der Synchronisation schwingt diese Pfeife also in einer Art und Weise, die aus ihrer Geometrie heraus eigentlich nicht möglich ist. Nur in Anwesenheit (Wechselwirkung) der zweiten Pfeife P2 kann die Pfeife P1 über diesen großen Frequenzbereich der Frequenz von P2 folgen, oder besser gesagt, sie muss der Pfeife P2 folgen. Mit wachsendem Abständen werden die Synchronisationsplateaus schmaler (Abb. 3.8b - 3.8g). Bis zu einem Abstand von 300 mm (Abb. 3.8h) sind sie sehr gut zu erkennen.

Erst bei einem Pfeifenabstand von 400 mm (Abb. 3.8i) ist das Plateau nicht mehr deutlich beobachtbar. Bei diesem Abstand können die Pfeifen demnach nicht mehr messbar synchronisieren. Die gegenseitige Kopplung ist zu schwach. Dieser Abstand liegt etwa im Bereich der Wellenlänge  $\lambda_0 = 476$  mm der 1. Harmonischen von 720 Hz.

Es sei bemerkt, dass es sich bei den besprochenen Synchronisationsplateaus um 1:1 Synchronisationsplateaus handelt. Höhere Synchronisationen konnten in den experimentellen Daten nicht gesehen werden. Synchronisationsplateaus höherer Ordnung sind offenbar zu schmal, um durch die im Experiment verwendete Schrittweite für die Verstimmung von 0.5 Hz aufgelöst zu werden.

### 3.6. Arnoldzunge und Kopplungsfunktion

Aus den ermittelten Synchronisationsplateaus (Abb. 3.8a - 3.8i) wird nun die sogenannte Arnoldzunge konstruiert. Dazu werden die detektierten Maxima für jeden Abstand in separate Datensätze geschrieben und über weitere Matlab-Routinen zusammengesetzt. Dabei werden die Plateaus in den Daten ausgelesen und mit einem Vektor in Verbindung gesetzt, der die Abstände enthält. Anschließend werden die Plateaus über dem Abstand grafisch dargestellt. In Abbildung 3.9a ist diese Darstellung zu sehen. Auf der Abzisse ist die Verstimmung  $\Delta f$ , auf der Ordinate der Abstand  $d$  aufgetragen. Da die Kopplungsstärke(n) der Wechselwirkung mit dem Abstand abnimmt, ist der kleinste Abstand oben und der größte gemessene Abstand unten aufgetragen.

Um aus dieser Darstellung einen Ausdruck für die Kopplungsfunktion abzuleiten bemüht man das Schallabstrahlverhalten eines einzelnen akustischen Oszillators. Im Fernfeld verhält sich die Schallabstrahlung eines einzelnen akustischen Oszillators invers proportional zum Abstand, also  $\sim \frac{1}{d}$ . Das Auftragen der Synchronisationsplateaus über den inversen Abstand würde dann zu einer V-förmigen Arnoldzunge führen, mit geradlinigen Rändern der (1:1)-Synchronisationsplateaus. Deshalb werden die Synchronisationsplateaus über den inversen Abstand aufgetragen, wie in Abbildung 3.9b dargestellt. Man sieht, dass die Ränder der Plateaus keine Geraden bilden. Somit ist das Schallabstrahlverhalten des synchronisierten Systems nicht vergleichbar mit dem eines einfachen akustischen Strahlers. Abbildung 3.9c zeigt eine Detailansicht der Grafik 3.9b.

Als nächstes wird die Ordinate der Darstellung 3.9a, also der Abstand  $d$ , logarithmisch aufgetragen. Diese Darstellung zeigt Abbildung 3.9d. In der semi-logarithmischen Darstellung findet man nun geradlinige Randbereiche der Arnoldzunge. Die Randbereiche der Arnoldzunge können durch eine Fit-Funktion interpoliert werden, wie in Abbildung 3.9e zu sehen. Die anschließende Rücktransformation in die Darstellung 3.9a und die Vertauschung von Abzisse und Ordinate ergibt einen Ausdruck für die Abhängigkeit der Verstimmung vom Abstand der Pfeifen. Das ist die gesuchte Kopplungsfunktion. Die Fit-Funktion an die Arnoldzunge in der semi-logarithmischen Darstellung 3.9d lautet:

$$d(\Delta f)_{fit} = 500 \cdot e^{-|2\Delta f|} \quad (3.1)$$

Die Rücktransformation

$$\begin{aligned}
 d(\Delta f)_{fit} &= 500 \cdot e^{-|2\Delta f|} && | \div 500 \\
 \frac{d(\Delta f)_{fit}}{500} &= e^{-|2\Delta f|} && | \ln(\cdot) \\
 \ln(d(\Delta f)_{fit}) - \ln 500 &= -|2\Delta f| && | \div (-2) \\
 -\frac{1}{2} \ln\left(\frac{d(\Delta f)_{fit}}{500}\right) &= |\Delta f|
 \end{aligned}$$

führt auf die Kopplungsfunktion:

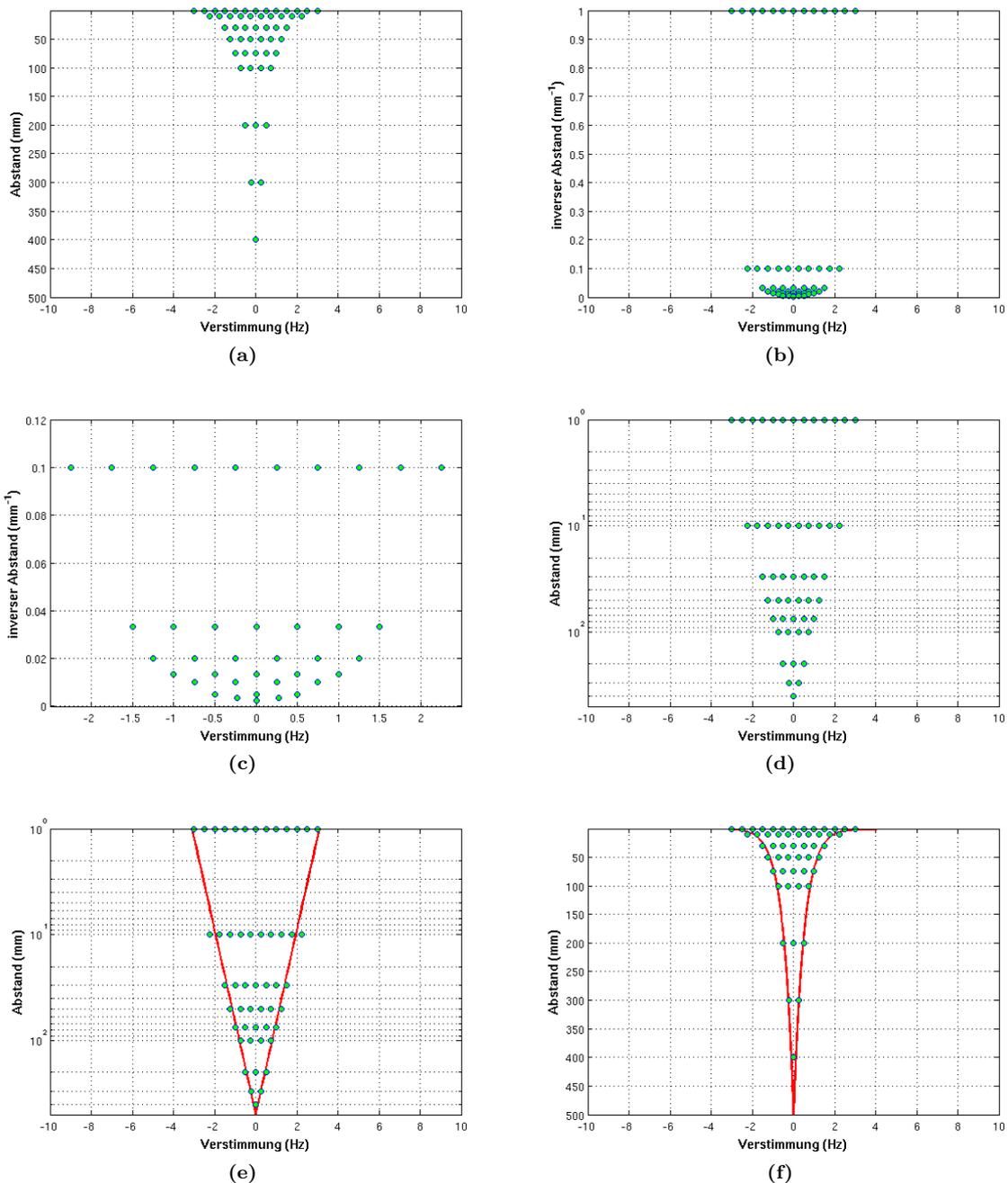
$$\Delta f(d) = -\frac{1}{2} \ln\left(\frac{|d|}{\lambda_0}\right) \quad (3.2)$$

mit der Wellenlänge des autonomen Systems  $\lambda_0 = c_0/f_0$ . Für  $f_0 = 720$  Hz und  $c_0 = 343$  m/s ergibt sich  $\lambda_0 = 476$  mm. Die Kopplungsfunktion ist in Abbildung 3.10 dargestellt. Die gefundene Kopplungsfunktion ist atypisch. Sie unterscheidet sich stark von dem, was man für das Abstrahlverhalten eines akustischen Oszillators kennt. Die Ergebnisse werden nun diskutiert.

### 3.7. Diskussion

Die Analysen des Experiments zeigen, Orgelpfeifen selbsterregte, akustische Oszillatoren verstanden werden können. Die Pfeifen zeigen ein ausgeprägtes Synchronisationsverhalten für kleine und mittlere Abstände. Erst bei einem Abstand von 400 mm ist Synchronisation nur noch marginal nachweisbar. Dieser Abstand liegt im Bereich der Wellenlänge der 1. Harmonischen der einzeln betriebenen Pfeife mit der Grundfrequenz von 720 Hz. Die Breite der Synchronisationsplateaus ist abhängig vom Abstand der Pfeifen zueinander. Für den sehr geringen Abstand von 1 mm umfasst der Synchronisationsbereich eine Verstimmung von etwa 6 Hz. In der Synchronisation wird dabei die Frequenz von P1 um etwa 10 Hz mitgenommen. Für größere Abstände findet man gleiches Verhalten, nur dass die Breite der Synchronisationsregionen mit dem Abstand nichtlinear abnimmt. Auch der Frequenzmitnahmebereich während der Synchronisation ist geringer.

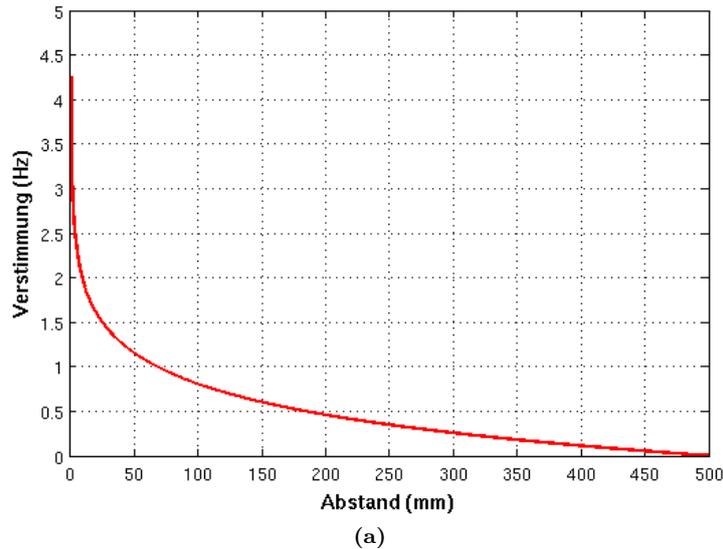
Die Schalldruckpegel der durchstimmbaren Pfeife P2 sind zu Beginn der Messungen, also bei großer Verstimmung, durchweg größer als die der Pfeife P1. Daraus ergibt sich, dass die Kopplungsstärken von P2 und P1 nicht gleich sind. Vielmehr dominiert die Pfeife P2 die Wechselwirkung. Das erkennt man der Frequenzabsenkung von P1 relativ zu P2 bei wachsender Durchstimmung von P2. In den Synchronisationsregionen ist der Frequenzverlauf von nicht mehr linear, sondern beschreibt ausgeprägten Bogen. Das lässt sich durch die Phasenverschiebung innerhalb der Synchronisationsregionen um den Wert  $\pi$  erklären. Im Zentrum der Synchronisationsregion ist die Phasendifferenz der Pfeifen maximal. Die Orgelpfeifen schwingen hier gegenphasig. Das äußert sich in einem Abfall des Schalldruckpegels auf ein lokales Minimum. An den Rändern der Synchronisation ist der Schalldruckpegel lokal maximal, da hier die Pfeifen in Phase schwingen. Beim Eintritt in und beim Austritt aus der Synchronisation kommt es zu Phasensprüngen, die zu einem Abfall des Schalldruckpegels der fixen Pfeife führt. Die untersuchte Abhängigkeit der Breite der Synchronisationsplateaus vom Abstand der Orgelpfeifen führt auf eine atypische Kopplungsfunktion, die nicht mit dem normalen Abstrahlverhalten eines akustischen Oszillators im Fernfeld vereinbar ist. Die Kopplungsfunktion macht keine Aussage über die Direktionalität der Wechselwirkung, wohl aber über die gesamte Kopplungsstärke in Abhängigkeit vom Abstand der Pfeifen zueinander. Die Ausgangspegel der Pfeifen entscheiden darüber, wer den dominanten Part bei der Wechselwirkung spielt, der zur Synchronisation führt. Nach der Theorie sollte auch eine kleine, periodische Kraft ausreichen, um ein System zu synchronisieren. Als klein - im Sinne



**Abbildung 3.9.:** Konstruktion der Arnoldzunge. (a) Die Synchronisationsplateaus in Abhängigkeit vom Abstand der Pfeifen zueinander. (b) Zeigt die Synchronisationsplateaus über dem inversen Abstand ausgetragen. (c) Detailansicht der Plateaus über den inversen Abstand aufgetragen. (d) Trägt man den Abstand logarithmisch auf, erhält man für die Grenzregionen der Synchronisationsplateaus eine Gerade. (e) Die Interpolation dieser Geraden ergibt die Kopplungsfunktion. (f) Die Rücktransformation der Ordinate führt auf die atypische Kopplungsfunktion.

der Theorie - könnte man in dem untersuchten, realen System eine kleine Schalldruckpegeldifferenz zwischen den Pfeifen verstehen. Das müsste durch weitere Experimente untersucht werden.

Die vollständige Erklärung der atypischen Kopplungsfunktion muss vorerst offen bleiben. Dennoch



**Abbildung 3.10.:** Die Kopplungsfunktion zeigt eine logarithmische Abhängigkeit der Breite der Synchronisationsplateaus vom Abstand der Orgelpfeifen zueinander.

wird im Folgenden versucht, mögliche Erklärungsansätze zu formulieren. Um die Kopplungsfunktion deuten zu können, müssen jedoch tiefer greifende Überlegungen angestellt werden. Die Frage der Kopplung ist eng verknüpft mit der Frage, welche fluiddynamischen und aero-akustischen Ursachen die Schallentstehung des Systems hat.

### 3.8. Modellierung

Die Schallentstehung in einer einzelnen Orgelpfeife wurde in den letzten Jahrzehnten intensiv beforscht. Dabei hat man sich vor allem auf die Auswertung diverser Strömungsexperimente konzentriert. Es stellte sich heraus, dass die Schallentstehung in der Orgelpfeife ein komplizierter, nicht endgültig verstandener Prozess ist. Strömungsmechanische Aspekte spielen dabei ebenso eine Rolle, wie gewisse aero-akustische Kopplungsmechanismen innerhalb der Orgelpfeife. Auf theoretischer Ebene wurde aus den Navier-Stokes-Gleichungen eine Quellterm-Formulierung der inhomogenen Wellengleichung gewonnen, die sogenannte Lighthill-Analogie [20][21], mit dessen Hilfe sich zumindest das Abstrahlverhalten einer einzelnen Orgelpfeife hinreichend gut beschreiben lässt, ohne dabei die internen fluiddynamischen Mechanismen genau zu kennen. In dieser Arbeit wird an anderer Weg beschritten.

Das Vermögen zur Synchronisation impliziert, dass es sich bei zumindest einer der beiden Orgelpfeifen um einen selbsterregten, akustischen Oszillator handeln muss. Da beide Pfeifen baugleich sind, sollte die Tonentstehung nach den selben Prinzipien funktionieren. Man kann also davon ausgehen, dass es sich bei beiden Orgelpfeifen um selbsterregte, akustische Oszillatoren handelt. Wenn es gelingt, die internen Mechanismen der Tonentstehung in einer einzelnen Orgelpfeife auf das Modell eines selbsterregten Oszillators abzubilden, dann muss es auch möglich sein, die Kopplung zweier Orgelpfeifen auf ein Modell zweier gekoppelter, selbsterregter Oszillatoren abzubilden und dies mit den experimentellen Befunden zu vergleichen.

Der Weg, die ermittelte Kopplungsfunktion zu deuten, führt also über die Klärung der Fragen

- 1.) Welche fluiddynamischen und aero-akustischen Mechanismen begründen die Tonentstehung in einer einzelnen Orgelpfeife?

- 2.) Lassen sich diese Mechanismen auf das Modell eines selbsterregten Oszillators abbilden und wenn ja, wie?

Um die erste Fragestellung zu behandeln, wurden numerische Simulationen der Tonentstehung in einer Orgelpfeife durchgeführt, die im Folgenden Kapitel im Detail vorgestellt werden. Dabei werden kompressible Navier-Stokes-Gleichungen in einem entsprechenden Rechengitter gelöst. Die zweite Fragestellung bedarf einer Methode, die die Wechselwirkungsmechanismen zwischen Windfeld und akustischem Feld in der Orgelpfeife in geeigneter Weise klassifiziert, dabei schrittweise den Grad der Komplexität verringert, um schließlich zu dem Modell eines selbsterregten akustischen Oszillators zu gelangen. Wir wenden dafür die Methode des **Coarse Graining**, dt.: vergöbern, an. Im folgenden Abschnitt wird das Coarse Graining näher erläutert, auch wenn damit schon wichtige Ergebnisse der Simulationen benannt und somit vorweggenommen werden.

### 3.8.1. Coarse Graining

#### 1. Schritt

Der erste Schritt des Coarse Graining ist es, die gesamte, in den Simulationen beobachtete, Komplexität der Tonentstehung in der Orgelpfeife strukturiert zu erfassen.

Die Mechanismen und Wechselwirkungen der Tonentstehung in der Orgelpfeife sind äußerst komplex. Die Details werden im Kapitel 5 vorgestellt und untersucht. Durch geeignete Strukturierung nach wirkenden Mechanismen, lassen sich Regionen klassifizieren und die Mechanismen in Einzelprozesse zerlegen. Das Flussdiagramm in Abb. 3.11 fasst die Struktur und den Regelkreis der Tonentstehung in der Orgelpfeife zusammen.

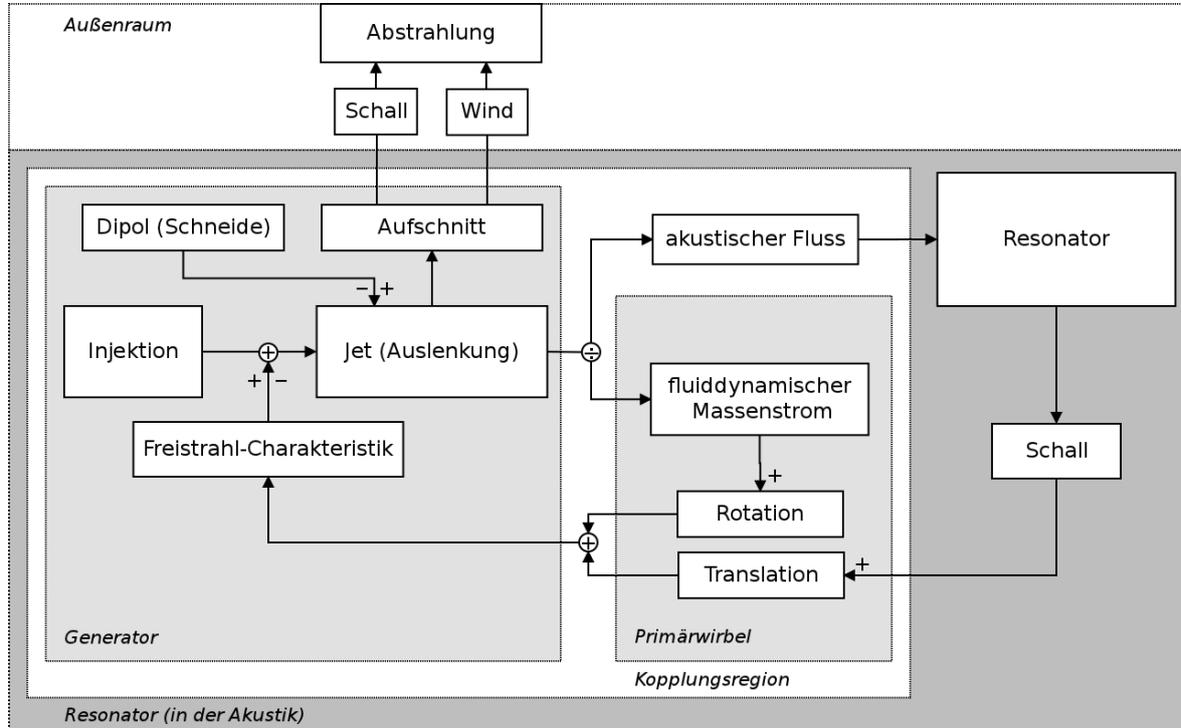


Abbildung 3.11.: Coarse Graining I - Flussdiagramm der Tonentstehung in der Orgelpfeife.

## 2. Schritt

Im zweiten Schritt reduzieren wir diese Strukturen und deren Abhängigkeiten schrittweise auf ein gröberes Modell. Dabei wird die zeitliche Entwicklung der durchgeführten 2D-Simulationen (dies entspricht 3 Freiheitsgraden), abgebildet auf gewisse Querschnitte und schließlich auf Punkte. Dies führt auf das reduzierte Modell, welches in Abbildung 3.12 dargestellt ist.

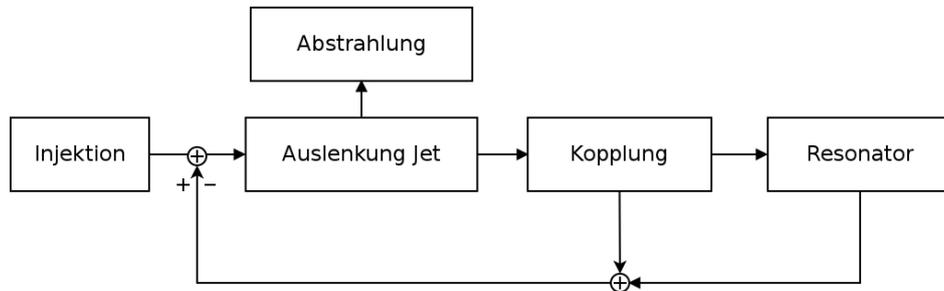


Abbildung 3.12.: Coarse Graining II - Reduziertes Modell der Orgelpfeife

Die Vorzeichen stehen für anfachende (+) bzw. dämpfende (-) Wirkungen. Das reduzierte Modell abstahiert den Regelkreis in der Orgelpfeife soweit, dass eine Zuordnung zu Termen des selbsterregten akustischen Oszillators möglich wird.

## 3. Schritt

Im dritten Schritt kann die Formulierung des Modells der Orgelpfeife als selbsterregter akustischer Oszillator erfolgen. Lord Rayleigh schrieb für einen allgemeinen selbsterregten akustischen Oszillator folgende Schwingungsgleichung auf

$$\ddot{u} + \kappa \dot{u} + \kappa' \dot{u}^3 + n^2 u = 0 \quad (3.3)$$

wobei er  $\kappa$  und  $\kappa'$  als klein annahm, vgl. [28]. Dies ist der sogenannte Rayleigh-Oszillator. Die Variable  $u$  ist die Auslenkung der Luftteilchen durch den Schall. Durch Differentiation und geeignete Substitution der Variablen lässt sich aus dem Rayleigh-Oszillator der van der Pol Oszillator gewinnen. Details dazu findet man im Anhang B.2.

$$\ddot{x} - \mu (1 - x^2) \dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad (3.4)$$

Der van der Pol Oszillator besitzt einen linearen Term  $-\mu \dot{x}$  der eine negative Reibung darstellt, wenn  $\mu > 0$  ist, also anfachend wirkt. Der Term  $+\mu x^2 \dot{x}$  ist nichtlinear und beschreibt echte Dämpfung durch positive Reibung, wenn  $\mu > 0$  gilt. Die Balance beider Mechanismen begründet die Ausbildung eines Grenzzyklus und somit die Fähigkeit, selbsterregte Schwingungen zu vollführen. Im Falle der Kopplung an ein zweites, äußeres, periodisch schwingendes System, z. B. an einen Lautsprecher [1], oder an einen zweiten selbsterregten Oszillator, kann es zu zur Synchronisation kommen. Bei zwei selbsterregten akustischen Oszillatoren, wie den Orgelpfeifen findet diese Kopplung über das Schallfeld statt.

### 3.8.2. Theoretische Betrachtungen

Es wird an dieser Stelle ein Ansatz vorgestellt, wie die Resultate der numerischen Simulation zu einem Oszillator-Modell zusammengezogen werden können. Dabei werden schon jetzt einige Resultate

genannt. Die Idee dabei ist, die Komplexität der Prozesse der Tonentstehung in der Orgelpfeife auf das Modell eines selbsterregten akustischen Oszillators abzubilden. Dabei wird die akustische Analogie zum elektrischen Schwingkreis benutzt.

Die akustische Schwingungsgleichung ohne Dämpfung lässt sich aus der akustischen Wellengleichung für den Druck

$$\left(\frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2\right) p = 0 \quad (3.5)$$

herleiten. Dazu schreibt man für die Lösung den Produktansatz  $p(\vec{x}, t) = p(\vec{x}) \cdot p(t)$ . Durch zweimaliges Ableiten und Einsetzen in die Wellengleichung lässt sich die Wellengleichung in zwei gewöhnliche Differentialgleichungen überführen, eine zeitabhängige und eine stationäre. Die zeitabhängige Gleichung ist Ausgangspunkt für unsere Betrachtungen. Sie lautet

$$N_a \ddot{p}_{out} + \frac{1}{M_a} p_{out} = 0 \quad (3.6)$$

Dabei ist  $M_a = \frac{\rho l}{A}$  die akustische Masse und  $N_a = \frac{A \cdot l}{\gamma p_0}$  die akustische Nachgiebigkeit. Die Größe  $\gamma$  ist der Adiabatenkoeffizient, vgl. 2.72.

Wir führen jetzt eine Inhomogenität in Form eines Quellterms  $-\dot{q}$  ein. Der Quellterm stellt die zeitliche Änderung des akustischen Flusses  $q = v \cdot A$  dar. Er setzt sich aus einem linearen, anfachend wirkendem, und einem nichtlinearen, dämpfend wirkenden Term zusammen. Wir motivieren dies mit den Ergebnissen, die wir bei der Analyse Simulation, insbesondere der Kopplungsregion gewonnen haben. Dort wird gezeigt, dass der Effektivwert der Geschwindigkeit  $|v|$  in der Kopplungsregion entsprechend interpoliert werden kann (vgl. Abschnitt 5.2.2). Die Nichtlinearität der echten Dämpfung ergibt eine Exponentialfunktion (Gl. 5.23). Die Exponentialfunktion lässt sich als Reihe schreiben, deren erste Glieder

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots \quad (3.7)$$

sind. Die Frage, welche der Glieder für die Abstrahlung des Schalls in den Außenraum noch zur Verfügung stehen, nachdem die Druckschwankung den Resonator passiert hat, wird durch die Geometrie des Resonators beantwortet. Der Resonator wählt die ungeradzahigen Terme aus. Man kann daraus schließen, dass die nichtlineare Dämpfung in der Orgelpfeife aus den ungeradzahigen Anteilen der ermittelten Exponentialfunktion besteht. Bricht man nach dem kubischen Term ab, so erhält man, in Analogie zur Strom-Spannungskennlinie eines elektrischen van der Pol-Systems, die kubische Kennlinie des akustischen Flusses in Abhängigkeit vom Druck  $q(p_{in})$ . Dieses Argument ist zwar plausibel, kann aber im Rahmen dieser Arbeit nicht endgültig bewiesen werden. Um den tatsächlichen Verlauf der Kennlinie  $q(p_{in})$  zu ermitteln, müssen weitere Simulationsläufe mit verschiedenen Anfangsgeschwindigkeiten des Jets ausgewertet werden.

Folgt man der Annahme, dass die Kennlinie des akustischen Flusses  $q(p_{in})$  kubischer Natur ist, dann kann man dies schreiben als

$$q(p_{in}) = \frac{-\alpha N_a}{g} p_{in} + \frac{\beta N_a}{3g^3} p_{in}^3 + const.$$

$$p_{in} = g \cdot p_{out}$$

mit gewissen, die Kennlinie näher beschreibenden Konstanten  $\alpha, \beta$  und  $g$  als Parameter. Einsetzen ergibt

$$q = v \cdot A = -\alpha N_a p_{out} + \frac{\beta N_a}{3} p_{out}^3 + const. \quad (3.8)$$

Die zeitliche Änderung des akustischen Flusses, bei konstantem Querschnitt ist dann

$$\begin{aligned} \dot{q} &= \frac{dv}{dt} A = -\alpha N_a \dot{p}_{out} + \beta N_a p_{out}^2 \cdot \dot{p}_{out} \\ &= (-\alpha N_a + \beta N_a p_{out}^2) \dot{p}_{out} \\ &= N_a (-\alpha + \beta p_{out}^2) \dot{p}_{out} \end{aligned}$$

Setzt man dies als Inhomogenität in die akustische Schwingungsgleichung 3.6 ein, so erhält man zunächst

$$N_a \ddot{p}_{out} + \frac{1}{M_a} p_{out} = -N_a (-\alpha + \beta p_{out}^2) \dot{p}_{out} \quad (3.9)$$

Nach Umsortierung der Terme findet man die Gleichung für den selbsterregten akustischen Oszillator

$$\ddot{p}_{out} - \alpha \left( 1 - \frac{\beta}{\alpha} p_{out}^2 \right) \dot{p}_{out} + \frac{1}{M_a N_a} p_{out} = 0 \quad (3.10)$$

Der Parameter  $\alpha$  gibt die Stärke der Nichtlinearität an, der Parameter  $\beta$  gibt die Stärke der nichtlinearen Dämpfung an. Für dieses Oszillator-Modell der Orgelpfeife, müssen beide Parameter aus der Kennlinie des akustischen Flusses  $q(p_{in})$  bestimmt werden. Dies ist Aufgabe weiterer Forschung. Die Arbeiten von [1] stützen diesen Modellansatz.

Das nun folgende Kapitel 4 widmet sich der numerischen Simulation der Tonentstehung in der Orgelpfeife. Die Ergebnisse der Simulationen werden dann im darauf folgenden Kapitel 5 besprochen. Dabei dienen die formulierten Fragestellungen nach den fluiddynamischen und aero-akustischen Ursachen der Tonentstehung in der Orgelpfeife sowie nach der Abbildbarkeit auf das Modell eines selbsterregten akustischen Oszillators als Leitlinie.

## 4. Simulationen

*„Zweiundvierzig“, sagte Deep Thought mit unsagbarer Erhabenheit und Ruhe.*

DOUGLAS ADAMS, PER ANHALTER DURCH DIE GALAXIS.

Die Analyse der experimentell gewonnenen Audio-Daten brachte eine atypische Kopplungsfunktion hervor. Die Interpretation dieses Ergebnisses bleibt vorerst offen, wirft aber Fragen hinsichtlich der fluiddynamischen Mechanismen der Tonentstehung in einer Orgelpfeife und dessen Schallabstrahlung auf. Die folgenden Untersuchungen haben das Ziel, einen tieferen Einblick in die fluiddynamischen Ursachen der Tonentstehung in einer Orgelpfeife und ihrer Schallabstrahlung zu geben und einen Ansatz zu erarbeiten, der eine konzeptionellere Beschreibung ermöglicht. Dies könnte zu einem aeroakustisch begründeten Erklärungsansatz für die im vorherigen Kapitel besprochene Kopplungsfunktion führen. Dazu wird folgender Weg beschritten. Im ersten Teil dieses Kapitels wird die numerische Simulation der Orgelpfeife vorgestellt. Dabei werden die kompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen in einem entsprechenden Rechengitter gelöst. Die anschließende Analyse der Simulationsrechnung führt zu den wirkenden fluiddynamischen und aeroakustischen Mechanismen, die für die Tonentstehung in einer Orgelpfeife verantwortlich sind.

### 4.1. CFD/CAA-Modellierung der Tonentstehung in der Orgelpfeife

Die beiden Begriffe **CFD**<sup>1</sup> und **CAA**<sup>2</sup> stehen normalerweise für die getrennte numerische Behandlung von Strömungsdynamik und Aero-Akustik. Dies hat historische Gründe und wird vor allem in den Ingenieurwissenschaften so praktiziert. Man nimmt hierbei die Ergebnisse der CFD und setzt diese als Quellterm in die numerische Behandlung der Akustik mittels inhomogener Wellengleichung ein. Der Quellterm wird dabei oft als Lighthill-Tensor dargestellt. Mit diesem Verfahren kann der oft sehr hohe Rechenaufwand, der mit der Berechnung kompressibler Probleme einhergeht, zumindest zum Teil auf ein erträgliches Maß gedrückt werden. Wie schon erwähnt, ist die hier vorgestellte Simulation jedoch vollständig kompressibel gerechnet. Das heißt, die Strömungsdynamik und die daraus resultierende Schallentstehung und Schallabstrahlung wird simultan erfasst. In diesem Sinne darf man die folgenden Betrachtungen als CFD/CAA-Simulation verstehen.

Zur numerischen Analyse der Tonentstehung in der Orgelpfeife modelliert man die Dynamik des Jets und des Schallfeldes im Resonator und im Außenraum, dem Abstrahlraum der Orgelpfeife. Dies ist insofern besonders anspruchsvoll, weil man einerseits die Strukturen des Jets auflösen möchte, welche mittlere Geschwindigkeiten von ca. 10 – 20 m/s besitzen, andererseits weil man das Schallfeld, in welchem sich die Schallwellen mit der sehr viel höheren Schallgeschwindigkeit ausbreiten, darstellen möchte. Dies erfordert eine sehr feine räumliche Auflösung sowie sehr kleine Zeitschritte bei der numerischen Behandlung des Problems und somit einen hohen Rechenaufwand. Um die Feinheit des Rechengitters abzuschätzen, macht man folgende Überlegungen. Zuerst schätzt man die **Reynoldszahl** (vgl. [29]) des Problems ab, um zu entscheiden ob das Problem **laminar** oder **turbulent** ist. Anschließend lassen sich mit Hilfe der **Kolmogorov-Skalen** (vgl. [19]) die kleinsten Längen- und Zeitskalen abschätzen, auf der die (turbulente) kinetische Energie in innere Energie dissipiert. Diese Skalen ergeben die kleinsten Gitterweiten des Rechengitters, wenn man alle Skalen numerisch auflösen möchte. Führen die Abschätzungen zu einem dramatisch hohen Rechenaufwand, muss man durch

---

<sup>1</sup>CFD, engl.: Computational Fluid Dynamics

<sup>2</sup>CAA, engl.: Computational Aero-Acoustics

geeignete Gitterweiten in Verbindung mit gewissen Filter-Methoden, die den Energietransport durch die kleinen und kleinsten Skalen modelliert, das Problem derart reduzieren, dass der Rechenaufwand verträglich wird.

## 4.2. Reynolds-Zahl, Kolmogorov-Skalen, Turbulenz-Modell, Gitterweiten

Die Reynolds-Zahl gibt das Verhältnis aus Trägheits- und Zähigkeitskräften an. Mit ihr lässt sich abschätzen, ob die Strömungsverhältnisse des Problems laminar oder turbulent sind. Allgemein gilt

$$Re = \frac{\rho \cdot v \cdot l}{\eta} = \frac{v \cdot l}{\nu} \quad (4.1)$$

mit den im Problem charakteristischen Größen der Dichte des Mediums  $\rho$ , der mittleren Geschwindigkeit  $v$ , der Länge  $l$  und der dynamischen Viskosität  $\eta$ . Die Reynolds-Zahl wird oft mit der kinematischen Viskosität  $\nu = \eta/\rho$  formuliert.

Die Kolmogorov-Länge lautet

$$\eta_k = \left( \frac{\nu^3}{\epsilon} \right)^{1/4} \quad (4.2)$$

Dabei ist  $\epsilon$  die Dissipationsrate der turbulenten kinetischen Energie. Für die größten Skalen lässt sich  $\epsilon$  abschätzen durch

$$\epsilon \sim \frac{v^3}{l} \quad (4.3)$$

Für mittlere Geschwindigkeiten von  $v = 15 \text{ m/s}$  und der Länge des Aufschnittes  $l = 5.5 \cdot 10^{-3} \text{ m}$  als charakteristischem Längenmaß, ergibt sich mit  $\nu = 1.51 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$  eine Reynolds-Zahl von ca.  $Re = 5500$ . Für Rohrströmungen liegt die kritische Grenze, ab der die Strömung turbulent wird, bei ca.  $Re_{krit} = 2300$ . Damit ist das hier vorgestellte Problem schwach turbulent.

Für die Dissipationsrate erhält man  $\epsilon \approx 6.1 \cdot 10^5 \text{ m}^2/\text{s}^3$ . Damit ergibt sich eine Kolmogorov-Länge von  $\eta_k \approx 8.6 \cdot 10^{-6} \text{ m}$ .

Die korrespondierende Kolmogorov-Zeitskala, definiert als

$$\tau_k = \frac{\nu^{1/2}}{\epsilon^{1/2}} \quad (4.4)$$

ergibt sich dann zu  $\tau_k \approx 5.0 \cdot 10^{-6} \text{ s}$ . Berücksichtigt man die mittlere Schallgeschwindigkeit von  $c = 340 \text{ m/s}$  bei diesen Betrachtungen, so erhält man für die Kolmogorov-Länge  $\eta_{k,c} \approx 8.3 \cdot 10^{-7} \text{ m}$  und für die Kolmogorov-Zeit  $\tau_{k,c} \approx 4.6 \cdot 10^{-8} \text{ s}$ .

Für die Simulation auf einem 3D-Rechengitter von  $200 \times 200 \times 200 \text{ mm}$  ergeben sich daraus ca.  $10^{13}$  bzw.  $10^{16}$  Gitterpunkte  $\times$  der Zeitschritte  $10^7 \text{ s}^{-1}$  bzw.  $10^8 \text{ s}^{-1}$ . Dies übersteigt die verfügbaren Kapazitäten bei Weitem.

Um den Rechenaufwand im verfügbaren Rahmen zu halten, wurde ein 2D-Modell mit mittleren Gitterweiten von  $0.11 < \delta x < 0.62 \text{ mm}$  bzw.  $0.03 < \delta y < 0.65 \text{ mm}$  und den Abmessungen  $x \approx 268 \text{ mm}$  bzw.  $y \approx 171 \text{ mm}$ , d.h. ca. 250000 Gitterpunkte, konstruiert. Mit der gewählten Zeitschrittweite von ca.  $10^{-7} \text{ s}$ , welche im Bereich der Kolmogorov-Zeitskala liegt, und einer Simulationszeit von 100 ms kommt man so auf ca.  $2.5 \cdot 10^{11}$  Rechenschritte. Das räumliche Gitter ist ca. 1000-fach zu grob bezüglich der

Kolmogorov-Länge. Daher lassen sich nur großskalige turbulente Strukturen auflösen. Für die Behandlung des Energietransfers in die sogenannten Sub-grid-Skalen wird deshalb ein Turbulenz-Modell benötigt. Es wird ein **LES**<sup>3</sup>-Turbulenzmodell implementiert. Dabei handelt es sich um ein sogenanntes Eingleichungsmodell. Eine detaillierte Beschreibung des verwendeten LES-Turbulenzmodells ist im Anhang B.4 zu finden.

## 4.3. Pre-Processing

### 4.3.1. Hardware

Die numerische Simulation wurde auf einem X86-64 'GenuineIntel' 6.42.7 Intel(R) Core(TM) i7-2600 CPU @ 3.40GHz Rechner realisiert. Es wurde parallel auf 6 Kernen gerechnet.

### 4.3.2. Software

Für die numerische Simulation wurde die unter der GNU General Public Licence stehende C++-Bibliothek OpenFOAM 2.0 verwendet. OpenFOAM 2.0 (Open Field Operation and Manipulation) ist ein in C++ geschriebenes, freies Simulationssoftwarepaket für die numerische Behandlung kontinuumsmechanischer Probleme der Strömungsmechanik. Die C++ Bibliothek OpenFOAM 2.0 zerfällt in zwei Unterkategorien, den sogenannten **solvers**, welche an spezielle strömungsmechanische Probleme angepasst sind und die **utilities**, die die Datenmanipulation erlauben. OpenFOAM 2.0 arbeitet auf einer Verzeichnisstruktur, die alle für die jeweilige Simulation notwendigen Parameter listet und ordnet. Eine Simulationsrechnung in OpenFOAM 2.0 wird als **case** bezeichnet. Ein **case** hat immer drei Unterverzeichnisse, **/system**, **/constant** und **/0**. Im Verzeichnis **/system** werden Ein- und Ausgabeparameter, Simulationszeiten, numerische Schemata sowie diverse Kontrollparameter des verwendeten Löser festgelegt. Das Verzeichnis **/constant** enthält die Konstruktionsparameter für das **Rechengitter**, thermophysikalische Parameter sowie die Parameter des verwendeten Turbulenzmodells. Im Verzeichnis **/0** definiert man die Anfangsbedingungen aller zu berechnenden physikalischen Größen. Ein Beispiel für den prinzipiellen Aufbau einer solchen Verzeichnisstruktur befindet sich im Anhang C.1.

### Der Löser für die Navier-Stokes Gleichungen

OpenFOAM bietet für die Behandlung kompressibler, laminarer sowie turbulenter Strömungsprobleme den Transient-Löser **rhoPimpleFoam**. In den Löser wurde das **dynamische SGS-k-Modell oneEqEddy** implementiert. Dieses LES-Modell beinhaltet eine Transportgleichung für die turbulente, kinetische Energie  $k$ . Großräumige Wirbelstrukturen werden damit gut dargestellt. Näheres dazu findet sich im Anhang B.4. Der Quellcode des Löser **rhoPimpleFoam** ist im Anhang C.1 - C.5 gelistet.

### Das Rechengitter (Mesh)

Ein Rechengitter zu konstruieren, welches den speziellen Erfordernissen der Strömungsdynamik und gleichzeitig der Aero-Akustik gerecht wird, ist eine schwierige Angelegenheit. OpenFOAM 2.0 bietet die Möglichkeit ein Rechengitter mittels eines sogenannten Mesh-Files **blockMeshDict** zu konstruieren. Aus diesem wird dann mittels der Sub-Routine **blockMesh** das Rechengitter generiert. Die Datei **blockMeshDict** definiert alle Punkte, Flächen und Zellen des Rechengitters als auch die verschiedenen Arten der Randbedingungen für die verwendete Geometrie. Im Anhang C.12 ist die Datei **blockMeshDict** gelistet, die für die Erzeugung des Rechengitters des Problems geschrieben wurde. Andere Werkzeuge zur Erstellung eines Rechengitters, wie z.B. Programme wie *Gmsh* oder *MeshLab*

---

<sup>3</sup>LES, engl.: Large Eddy Simulation

wurden getestet und verworfen, da es nicht genügend Freiheiten gab, das Rechengitter individuell anzupassen. Das Rechengitter benötigt eine sehr gute Auflösung im Bereich des Jets und innerhalb des Resonators, insbesondere in den Grenzschichtbereichen. Auch in der Region des Aufschnittes benötigt man ein sehr feinmaschiges Gitter. In den übrigen Regionen kann ein gröberes Gitter gewählt werden. Dabei ist es wichtig, stetige Übergänge zwischen den verschiedenen Gitterweiten zu gewährleisten, um numerischen Reflexionen vorzubeugen. Das erzeugte Rechengitter ist in Abbildung 4.1 zu sehen. Die Grundparameter des Gitters sind in Tabelle 4.1 zusammengefasst.

Punkte	Flächen	Zellen
251272	499285	124550

Tabelle 4.1.: Die wichtigsten geometrischen Parameter des Rechengitters.

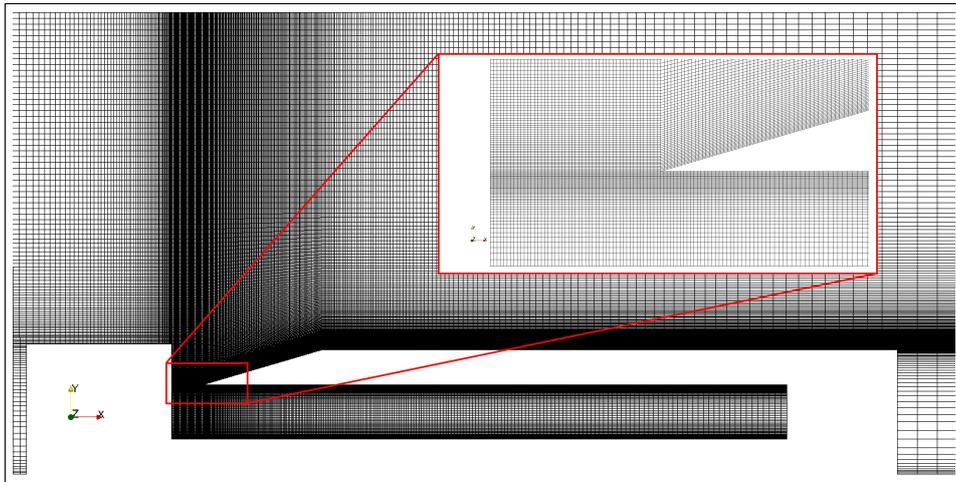


Abbildung 4.1.: Das mit `blockMesh` aus der Datei `blockMeshDict` erzeugte Gitter. Detailansicht des Rechengitters im Bereich des Resonators der Orgelpfeife und im Bereich des Jets (roter Rahmen).

## Thermophysikalische Eigenschaften

Für die Simulation müssen einige thermophysikalische Eigenschaften festgelegt werden. Dies geschieht in der Datei `thermophysicalProperties` im Ordner `/constant`. Das gewählte thermophysikalische Modell `hPsiThermo` basiert auf der Berechnung der Enthalpie  $h_s$  und der Kompressibilität  $\psi$ . Das Medium, in dem die Orgelpfeife arbeitet, ist Luft. Die Eigenschaften dieses Gasmischtes müssen abgebildet werden. Luft besteht zu rund 78% aus molekularem Stickstoff und zu rund 21% aus molekularem Sauerstoff. Beide Moleküle haben ähnliche molare Massen ( $M_{N_2} = 28.013 \text{ g/mol}$ ,  $M_{O_2} = 31,998 \text{ g/mol}$ ) und ähnliche Van der Waals Radien ( $R_{N_2} = 71 \text{ pm}$ ,  $R_{O_2} = 73 \text{ pm}$ ). Deshalb wurde vereinfachend angenommen, dass es sich bei Luft um nur eine Molekülsorte mit der molaren Masse von  $28.9 \text{ g/mol}$  handelt. Für die spezifische, isobare Wärmekapazität wurde ein konstanter Wert von  $C_p = 1004.5 \text{ Jkg}^{-1}\text{K}^{-1}$  gewählt. Das heißt, das modellierte Gas ist ein perfektes Gas. Für die latente Wärme wird ein Wert von  $H_f = 2.544 \cdot 10^6 \text{ J}$  vorgegeben, welcher in etwa der Verdunstungswärme von Wasser in Luft bei Normalbedingungen entspricht. Die Transporteigenschaften werden durch die kinematische Viskosität  $\mu = 1.8 \cdot 10^{-5} \text{ Pas}$  und die Prandtl-Zahl  $Pr = 0.7$  bestimmt. Die Datei `thermophysicalProperties` ist in Anhang C.13 gelistet.

## Ein- und Ausgabeparameter, Simulationszeit

Für die Simulation müssen diverse, grundsätzliche Ein- und Ausgabeparameter festgelegt werden. Das geschieht in der Datei `controlDict` im Verzeichnis `/system`. Dazu zählen unter anderem die Angabe des Löser, die Simulationszeit, die Angabe der Zeitschrittweite, das Ausgabeintervall, das Ausgabeformat, die Präzision der Ausgaben und die maximal zulässige Courantzahl. Darüber hinaus wurden gewisse zusätzliche physikalische Größen in der Datei `controlDict` definiert, die zur Laufzeit berechnet werden sollen, zum Beispiel die gemittelten Geschwindigkeits-, Druck- und Dichteamplituden, und deren Effektivwerte. Außerdem wurden hier gewisse Messpunkte, die sogenannten Probenpunkte, festgelegt. Die Datei `controlDict` ist im Anhang C.14 gelistet.

## Probenpunkte und Samples

Im Rechengitter wurden insgesamt 7 Probenpunkte, definiert. Die Positionen der Probenpunkte im Rechengitter sind im Anhang A.1 dargestellt. An diesen Messpunkten wurden folgende Feldparameter herausgeschrieben und ausgewertet:

- $p$  der **Wechseldruck**,<sup>4</sup>
- $\rho$  die **Dichte**,
- $v_x, v_y$  die **Geschwindigkeitskomponenten**,
- $k$  die **turbulente, kinetische Energie**,
- $T$  die **Temperatur**,
- $\omega$  die **Wirbelstärke**, *engl.: vorticity*

Um die Mechanismen der Tonentstehung in der Orgelpfeife genauer zu analysieren und zu lokalisieren, werden Querschnitte im Rechengitter definiert, sogenannte **Samples**. Die Analyse der Samples wird zur Spezifikation gewisser Regionen führen. Die definierten Querschnitte heißen

- *cs0*: 1 Querschnitt , ( $|\vec{v}|, v_x, v_y, p, \rho, k$  )
- *cs1 - cs5*: 5 äquidistante Querschnitte , ( $|\vec{v}|, v_x, v_y, p, \rho, k$  )
- *cs jet 01 - 09*: 9 äquidistante Querschnitte , ( $v_x, v_y, p, k$ ),
- *cs dipol*: 1 Querschnitt , ( $p$ ) und
- *cs resonator*: 1 Querschnitt , ( $v_x, v_y, p, k$ ).

Die Positionen der Querschnitte, das Ausgabeformat und die jeweiligen physikalischen Ausgabegrößen werden in der Datei `sampleDict` im Ordner `/system` festgehalten, welche im Anhang C.17 gelistet ist. Im Anhang A.2 bis A.5 sind die Positionen der Querschnitte im Rechengitter dargestellt.

## Schemata für die numerische Behandlung der einzelnen Terme

Die Festlegung der Art der Finite-Volumen-Diskretisierung und Integrationsschemata erfolgt in der Datei `fvSchemes` im Ordner `/system`. Die Datei ist im Anhang C.15 gelistet. Die ersten Zeitableitungen werden mit dem `backward` Verfahren berechnet, einem impliziten Verfahren zweiter Ordnung. Das Schema für die Berechnung von Gradienten erfolgt mit dem Interpolationsschema `Gauss linear`, dem Gauss'schen Integrationsschema zweiter Ordnung. Terme mit Divergenz, wie z.B.  $\nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \mathbf{v})$  werden mit speziellen linearen, gefilterten Gauss'schen Interpolationsschemata behandelt. Für die Behandlung

---

<sup>4</sup>Der **Wechseldruck** wird im Folgenden einfach nur als Druck bezeichnet. Gemeint ist aber die relative Druckschwankung bezüglich des Referenzdruckes  $p_0 = 101325$  Pa

von Termen mit Laplace-Operatoren, z.B. des Terms  $\nabla \cdot (\mu_{eff} \nabla \mathbf{v})$ , wird ein lineares Korrektor-Gauss-Interpolationsschema verwendet. Für eine detaillierte Erläuterung der einzelnen Schemata sei auf die umfangreiche Dokumentation von OpenFOAM 2.0 [23] verwiesen.

### Spezifikationen der Löser der linearen Gleichungen und weiterer Algorithmen

Für das Lösen der linearen Gleichungen werden spezielle Löser benötigt. Dies wird in der Datei `fvSolution` im Ordner `/system` festgelegt. Für lineare Druck- und Dichtegleichungen wird der Löser PCG verwendet, welcher speziell für symmetrische Matrizen gedacht ist. Für die linearen Teilgleichungen der Geschwindigkeit, der Enthalpie, der turbulenten, kinetischen Energie und der kinematischen Viskosität wird der Löser PBiCG verwendet, welcher speziell für den Umgang mit asymmetrischen Matrizen entwickelt wurde. Des Weiteren werden die dabei zulässigen Fehlertoleranzen und die Vorkonditionierungstechniken zur Behandlung der Matrizen festgelegt. Auch hier sei, für weitere Informationen, auf die Dokumentation von OpenFOAM 2.0 verwiesen. Die Datei `fvSolution` ist im Anhang C.16 gelistet.

### Parallelisierung und Simulationslauf

Um die Rechenzeit auf ein erträgliches Maß zu drücken, wurde die gesamte Simulation parallelisiert. Dazu wurde das Programm `openMPI` benutzt, weil OpenFOAM 2.0 gut darauf abgestimmt ist. Es wurde die Kontrolldatei `decomposeParDict` im Ordner `/system` angelegt. Die Datei enthält alle nötigen Angaben für die Parallelisierung, wie z.B. die Anzahl der Prozessoren oder die Verteilung der Aufgaben auf jeden Prozessor. Die Simulation wurde auf insgesamt 6 Prozessorkerne verteilt. Damit konnte die reine Rechenzeit auf weniger als  $4\frac{1}{2}$  Tage gedrückt werden. Nach Anlegen der Kontrolldatei erfolgt die Parallelisierung mit der Routine `decomposePar` der OpenFOAM 2.0 Bibliothek im entsprechenden `/case`-Wurzelverzeichnis. Dabei wird für jeden Prozessor ein Unterverzeichnis angelegt, `/processor1` bis `/processor6`. Die Simulation wird über den Befehl

```
mpirun -np 6 rhoPimpleFoam -parallel > log &
```

im `/case`-Wurzelverzeichnis gestartet. Die Kontrollausgaben der Simulation erfolgen dabei in die angegebene Datei `log`. Für die Ablage der eigentlichen Simulationsergebnisse wird pro ausgegebenem Zeitschritt je ein Unterordner in den Prozessorverzeichnissen angelegt. Die Ausgabe der Dateien mit den Ergebnissen für die Probenpunkte erfolgt zur Laufzeit in einen separaten Ordner mit dem Namen `/probes/0`. Mit der Routine `foamJob` lassen sich bestimmte Kontrollparameter, wie die Courantzahl zur Laufzeit verfolgen. Nach Beendigung der Simulation müssen die Ergebnisse wieder zusammengesetzt werden. Dazu bietet OpenFOAM 2.0 die Routine `reconstructPar` an. Mit ihr wird für jeden Zeitschritt ein Ordner angelegt, in dem sich die zusammengesetzten Ergebnisse befinden. Danach kann man mit der Routine `foamLog` alle für die Numerik relevanten Kontrollparameter aus der `log`-Datei extrahieren und gegebenenfalls auswerten. Anschließend wird die Routine `sample` aufgerufen, um die definierten Querschnitte zu extrahieren. Die Samples werden in das gesonderte Verzeichnis `/sets` geschrieben.

## 4.4. Post-Processing

Mit der OpenFOAM 2.0 Routine `foamCalc` lassen sich viele weitere Größen berechnen. Die graphische Darstellung der Simulationsergebnisse erfolgt über die OpenFOAM 2.0 Routine `paraFoam`, welche die Datenstrukturen sammelt und an das Programm `paraView` weitergibt. Mit `paraView` lassen sich komplexe Datenstrukturen visualisieren. Die Sequenzen der Simulationsläufe finden sich in den Anhängen A.10 - A.12 sowie in den Filmen auf dem der Arbeit beiliegenden Datenträger. Die Filme

wurden mit *paraView* erstellt. Die Graphiken der Auswertungen und die Filme der Entwicklung der physikalischen Größen im Querschnitt *cs resonator* wurden mit Matlab generiert.

## 4.5. Simulationsläufe, Strömungsprofil des Jets

Es wurden insgesamt 10 Simulationsläufe für unterschiedliche Anfangsparameter, insbesondere für verschiedene Anfangsgeschwindigkeiten des Jets von  $v_{jet} = 8 \text{ m/s}$ ,  $18 \text{ m/s}$ ,  $28 \text{ m/s}$  und  $38 \text{ m/s}$  gerechnet. Pro Simulation wurden dabei etwa 130 GB Daten erzeugt und gesichtet. Für die Auswertung in dieser Arbeit wird allerdings im Wesentlichen nur ein Simulationslauf näher betrachtet, nämlich jener mit der Anfangsgeschwindigkeit des Jets von  $v_{jet} = 18 \text{ m/s}$ . Die Geschwindigkeitsverteilung des Jets an der Kernspalte (Injektionsregion) ist uniform, hat also ein Zylinderhut-Strömungsprofil, *engl.: top hat profile*. Die Simulationslaufzeit betrug 100 ms. Aufgrund des sehr feinen Rechengitters und der konservativ gewählten, numerischen Parameter blieben alle Simulationsläufe äußerst langzeitstabil. Dies ist ein erfreuliches Ergebnis. Die nachfolgenden Fourieranalysen erreichen eine Frequenzauflösung von 10 Hz, in der Langzeitsimulation über 200 ms sogar 5 Hz. Das Ausgabeintervall von jedem 500-sten gerechneten Zeitschritt bei einer Simulationsschrittweite von  $\delta t = 10^{-7} \text{ s}$  und einer Gesamtsimulationszeit von  $t_s = 100 \text{ ms}$  erzeugt 2000 abgetastete Zeitschritte.

$$\frac{10^7 \text{ Zeitschritte/s} \cdot 0.1 \text{ s}}{500} = 2000 \text{ abgetastete Zeitschritte} \quad (4.5)$$

Damit ergibt sich eine Abtastrate, auch **Samplingfrequenz** genannt, von

$$\frac{\text{abgetastete Zeitschritte}}{\text{Simulationszeit}} = \frac{2000}{0.1 \text{ s}} = 20000 \text{ Hz} \quad (4.6)$$

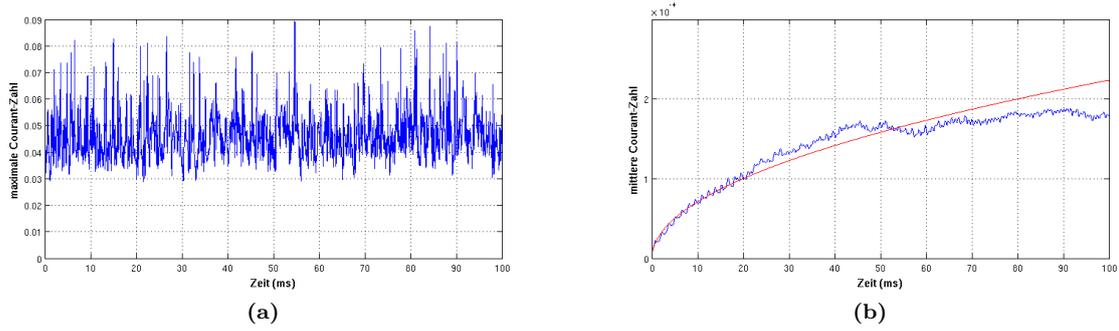
## 4.6. Stabilität der Simulation

Die numerische Stabilität wird durch die Courant-Zahl bestimmt, welche aus der von Neumann'schen Stabilitätsanalyse abgeleitet wird. Auch für nichtlineare hyperbolische Differentialgleichungen wie der Euler- und der Navier-Stokes-Gleichung kann gezeigt werden, dass die Courant-Zahl das entscheidende Stabilitätskriterium ist [12]. Die Courant-Zahl ist definiert durch

$$C_0 = \frac{\delta t |\mathbf{v}|}{\delta x} \quad (4.7)$$

mit dem Zeitschritt  $\delta t$ , dem Betrag der Geschwindigkeit  $|\mathbf{v}|$  durch die zu rechnende Zelle und der Gitterweite der Zelle  $\delta x$  in Richtung der jeweiligen Geschwindigkeitskomponente. Für eine stabile Simulation muss sichergestellt sein, dass mindestens  $C_0 < 1$  gilt, in jeder Zelle, zu jeder Zeit. Um dieses Kriterium abzusichern, wurde das Rechengitter so konstruiert und die Zeitschrittweite so gewählt, dass man in jedem Falle unter diesem Wert bleibt. Die mittleren Gitterweiten  $\delta x$  in x- und  $\delta y$  in y-Richtung liegen in der Größenordnung von 0.5 mm (an den Grenzschichten und im Bereich des Jets, sind diese sehr viel kleiner), die Zeitschritte betragen  $\delta t = 10^{-7} \text{ s}$  und für den maximalen Geschwindigkeitsbetrag wurde ein Wert von  $|\mathbf{v}| = 50 \text{ m/s}$  angenommen. Damit ergibt sich theoretisch eine mittlere Courant-Zahl von 0.01 über die gesamte Simulationszeit. Zusätzlich wurde eine maximal zulässige Courant-Zahl von 0.5 gewählt.

Die Abbildungen 4.2a und 4.2b zeigen die Entwicklung der maximalen und der mittleren Courant-Zahl während der Simulation. Man erkennt, dass die Courant-Zahl einen Maximalwert von knapp 0.09 erreicht und damit weit unter dem vorgegebenen maximalen Wert von 0.5 liegt. Weiterhin sieht man, dass die mittlere Courant-Zahl während der Simulation auf einen Wert von ca.  $2 \cdot 10^{-4}$  anwächst. Das zeitliche Wachstum der Courant-Zahl wurde durch ein Wurzelgesetz abgeschätzt. Die weitere



**Abbildung 4.2.:** Entwicklung der Courant-Zahl während der Simulation. (a) Simulationszeit  $t_s = 100$  ms. Aufgetragen ist maximale Courant-Zahl  $C_{0,max}$ . Der maximale Wert liegt bei etwa 0.09. Abb. (b) zeigt die mittlere Courant-Zahl  $C_{0,mean}$ . Die Simulationszeit beträgt  $t_s = 100$  ms. Die konservative Schätzung der Entwicklung der mittleren Courant-Zahl ist als rote Kurve eingezeichnet.

Entwicklung der Courant-Zahl nach diesem Wurzelgesetz konnte durch eine Folgesimulation mit einer Gesamtsimulationszeit von  $t_s = 200$  ms bestätigt werden. Die konservative Schätzung der zeitlichen Entwicklung der mittleren Courant-Zahl als rote Kurve eingetragen. Sie lautet

$$Fit_{C_{0,mean}}(t) = \sqrt{\frac{t \cdot \delta t}{t_e \cdot 2t_s}} \quad (4.8)$$

mit der Zeitschrittweite  $\delta t = 10^{-7}$  s, der Zeitskala  $t_e = 1$  s und der Simulationszeit  $t_s$ . Die durchgeführte Langzeitsimulation bleibt dauerhaft unter der konservativen Schätzung. Das bestätigt die außerordentlich hohe Langzeitstabilität der durchgeführten Simulationen. Unter der Annahme, dass die mittlere Courant-Zahl der konservativen Schätzung folgt, wäre ein Wert von 0.5 erst nach einer Simulationszeit von ca. 140 h erreicht.

# 5. Auswertung der Simulationen

*Yes, we can.*

BARACK OBAMA, 44. PRÄSIDENT DER VEREINIGTEN STAATEN VON AMERIKA , 8. JANUAR 2008, NEW HAMPSHIRE

In diesem Kapitel werden die Simulationsergebnisse vorgestellt und analysiert. Dabei wird im Wesentlichen der Simulationslauf mit der Anfangsgeschwindigkeit  $v_{jet} = 18 \text{ m/s}$  näher betrachtet. Für die Analyse werden die genannten Sätze von Probenpunkte und Querschnitte (Samples), herangezogen. Mit Ihnen lässt sich das gesamte Simulationsgebiet **bezüglich der wirkenden Mechanismen** in vier Gebiete gliedern, nämlich

- den **Generator**,
- die **Kopplungsregion**
- den **Resonator** und
- den **Außenraum**, oder auch **Abstrahlraum**.

Diese Grobstrukturierung folgt der intuitiven Beschreibung der Orgelpfeife durch einen selbsterregten Oszillator. Der in der Akustik gebräuchliche Begriff des Resonators ist **nicht deckungsgleich** mit dem hier eingeführten Gebiet gleichen Namens! Vielmehr gilt dort der gesamte Innenraum einer Orgelpfeife, als auch die Bereiche unmittelbar vor den Öffnungen (beschrieben durch die Mündungskorrekturen), als Resonator. Die hier vorgenommene Strukturierung dient der Identifikation und der Lokalisierung der wirkenden Mechanismen, die zur Tonentstehung in der Orgelpfeife führen. Generator, Kopplungsregion und Aufschnitt zusammen bilden also, räumlich betrachtet, das, was man in der Akustik den Resonator nennt.

## 5.1. Der Jet als Generator

Der Jet agiert im vorderen Teilgebiet dessen, was man in der Akustik den Resonator nennt. Diesen Teilbereich nennen wir den Generator. Der Jet ist, räumlich betrachtet, auch schon Teil der Kopplungsregion, stellt aber bezüglich der wirkenden Mechanismen für uns eine separate Region dar. Für die Analyse des Jets wurden 9 Querschnitte *cs\_jet01 - cs\_jet09* definiert. Näheres zu den Positionen und Längen der Querschnitte findet sich im Anhang A.2 und C.17. Aus den Querschnitten wurde die räumliche Entwicklung des Strömungsprofils in den Aufschnitt zum Zeitpunkt  $t = 0.1 \text{ ms}$  extrahiert. Bis zu einer Zeit von  $t = 0.5 \text{ ms}$  nach Eintritt in den Aufschnitt erfährt der Jet noch keine signifikante Auslenkung. Die Abbildungen 5.1a und 5.1b zeigen den Jet unmittelbar nach Eintritt in den Aufschnitt bei  $t = 0.1 \text{ ms}$ . In Abb. 5.1b ist das Zylinderprofil des Jets direkt an der Kernspalte, der Austrittsposition  $x = 0.0 \text{ mm}$  in den Aufschnitt gezeigt. Weiterhin ist das Abklingen des Profils zu einem Glockenprofil mit wachsender Propagationslänge  $x$  zu erkennen.

Der in den Aufschnitt propagierende Jet kann als Freistrahle angesehen werden, der auf seinem Weg mehreren Arten von Einflüssen unterliegt, die destabilisierend wirken können und dann zu seiner Auslenkung führen. Die verschiedenen Einfluss- bzw. Störgrößen werden im Folgenden besprochen.

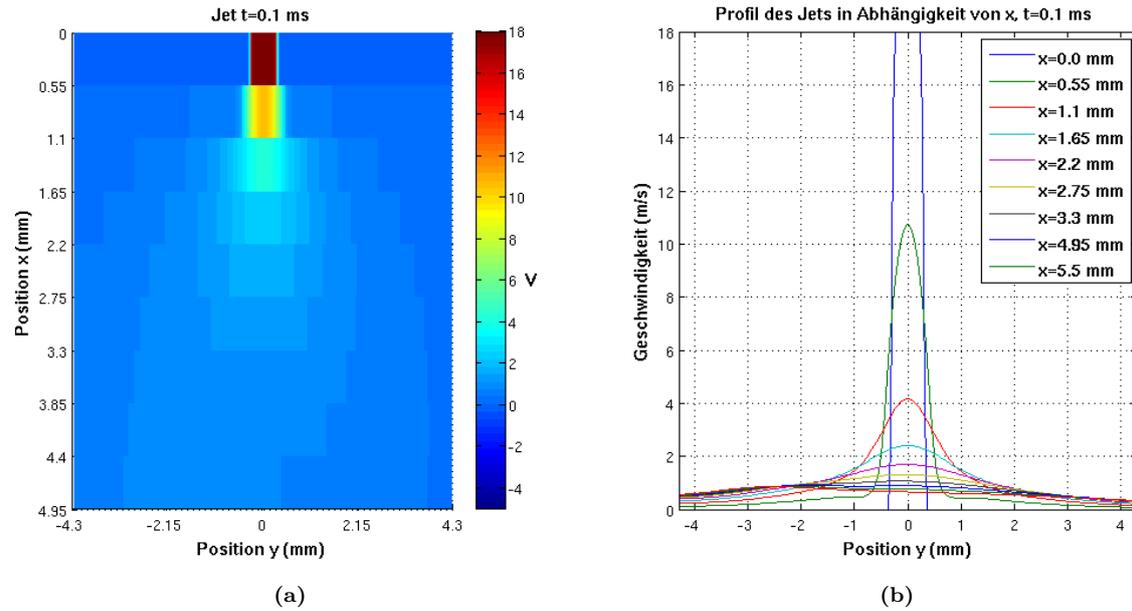


Abbildung 5.1.: (a) Propagation des Jets in den Aufschnitt ( $t = 0.1 \text{ ms}$ ). (b) Entwicklung des Geschwindigkeitsprofils des Jets bei der Propagation in den Aufschnitt. Aus dem Zylinderprofil wird ein Glockenprofil.

### 5.1.1. Einfluss der Freistrah-Charakteristik

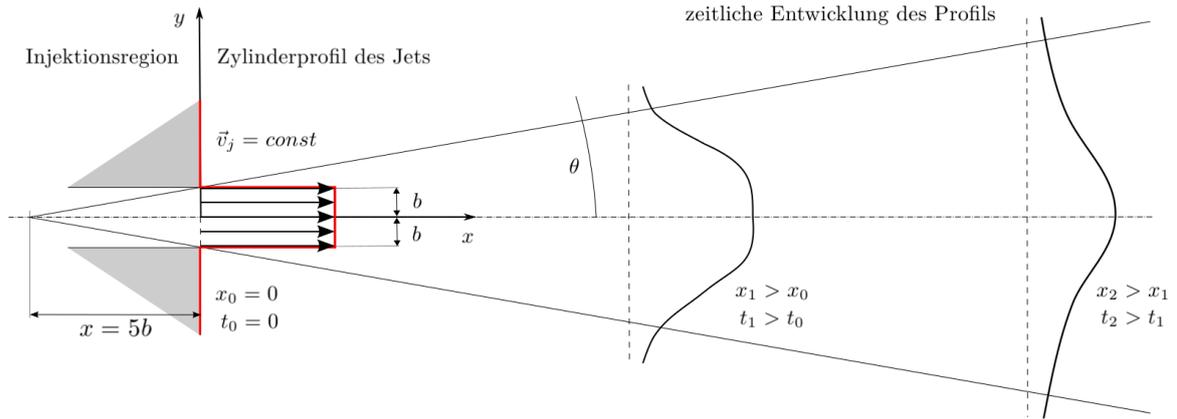
Das Anfangsgeschwindigkeitsprofil  $v(y, t = 0)$  des Jets an der Kernspalte ist ein Zylinderprofil, engl.: **top hat profile**. Das Medium, in das dieses Profil einströmt, befindet sich in Ruhe. Man schreibt diese Anfangskonfiguration als

$$v(y, 0) = \begin{cases} \text{const.} & -b \leq y \leq b \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (5.1)$$

wobei  $b$  die halbe Breite der Kernspalte ist. Das Zylinderprofil der Anfangsgeschwindigkeit an der Kernspalte  $v(y, 0)$  geht im zeitlichen Verlauf mit wachsender Propagationslänge  $x$  näherungsweise in ein glockenförmiges Strömungsprofil über. Abbildung 5.2 verdeutlicht dies. Grund für das Dispergieren des Zylinderprofils sind Reibungseffekte an den Grenzschichten vgl. [32] des Jets zu seiner ruhenden Umgebung, den sogenannten **Scherschichten**. Dies wird im nächsten Abschnitt genauer besprochen.

Es ist klar, dass aufgrund der unterschiedlichen Geschwindigkeiten des Jets und seiner unmittelbaren Umgebung Reibung entsteht, die zur Ausbildung zweier Scherschichten oberhalb und unterhalb des Geschwindigkeitsprofils des Jets führt. Die Scherschichten bewirken, dass der Jet senkrecht zu seiner Hauptströmungsrichtung gestört wird. Man nennt diesen Typ von Instabilität **Kelvin-Helmholtz-Instabilität** [11]. Dabei wachsen die Scherschichten und damit ihr Einfluss auf den Jet in Stromabrichtung an, wenn die Dämpfung durch Viskosität des Mediums nicht ausreicht, die die Störung abklingen zu lassen [34]. Schon Rayleigh zeigte 1894, dass zwei Schichten, die sich mit Geschwindigkeiten  $\pm V/2$  gegeneinander bewegen, aufgrund der entstehenden Scherströmungen instabil werden. Die Instabilitäten entstehen, weil das Geschwindigkeitsprofil Wendepunkte besitzt (1. Rayleigh-Theorem, Tollmien-Theorem). Das Wachstumsgesetz der Störung lautet nach [28]

$$h_{\text{störung}} = \exp(\pm \mu x) \quad (5.2)$$



**Abbildung 5.2.:** Als Anfangsbedingung der Geschwindigkeit an der Kernspalte (Injektionsregion) wird ein Zylinderprofil des Jets angenommen. Die Anfangsgeschwindigkeit des Jets in der vorgestellten Simulation beträgt  $\vec{v}_{jet} = const = 18 \text{ m/s}$ . Die halbe Breite der Kernspalte ist  $b = 0.3 \text{ mm}$ . Im zeitlichen Verlauf wird aus dem Zylinderprofil ein Glockenprofil. Der Winkel  $\theta$  ist der Öffnungswinkel des Jets. (Die Darstellung ist nicht maßstabsgetreu).

mit dem Wachstumsparameter der Störung  $\pm\mu$ . Die zwei Vorzeichen lassen erkennen, dass der Einfluss der Scherschichten destabilisierend (+), aber auch stabilisierend (-) wirken kann.

Rayleigh gab zwei verschiedene Störtypen an, die sinusoidale und die variköse Störung (Abbildungen 5.3a und 5.3b).



**Abbildung 5.3.:** (a) Sinusoidale Störung des Jets. (b) Variköse Störung des Jets.

Die Propagationsgeschwindigkeiten  $u$  der Störungen ergeben sich zu

$$u_{sinuous} = \frac{V}{1 + \cosh kb} \quad \text{und} \quad u_{varicose} = \frac{V}{1 + \tanh kb} \quad (5.3)$$

Die Wachstumsparameter der Störungen schreiben sich dann als

$$\mu_{sinuous} = k(\coth kb)^{1/2} \quad \text{und} \quad \mu_{varicose} = k(\tanh kb)^{1/2} \quad (5.4)$$

Dabei ist  $b$  die halbe Breite der Kernspalte,  $k = 2\pi/\lambda$  die Wellenzahl der Störung. Für große Wellenlängen (kleine Wellenzahlen) streben die Terme gegen Null. Für kleine Wellenlängen werden die Terme groß. Berücksichtigt man die Viskosität des Mediums, dann gilt nach [8] für die Geschwindigkeit eines laminaren Jets mit infinitesimaler Anfangsbreite direkt an der Kernspalte ( $x = 0$ )

$$V(x, y) = a \cdot \operatorname{sech}^2\left(\frac{y}{b}\right) \quad (5.5)$$

Das Profil des Jets der Simulation lässt sich mit dieser Gleichung approximieren. Dies ist das Freistrahlm-Modell für unseren Jet. Wir erhalten für die Parameter

$$a = 3 \cdot 10^{-5} \left(\frac{K^2}{\nu x}\right)^{1.3} \quad (5.6)$$

und der lokalen halben Breite des Jets  $b$  von

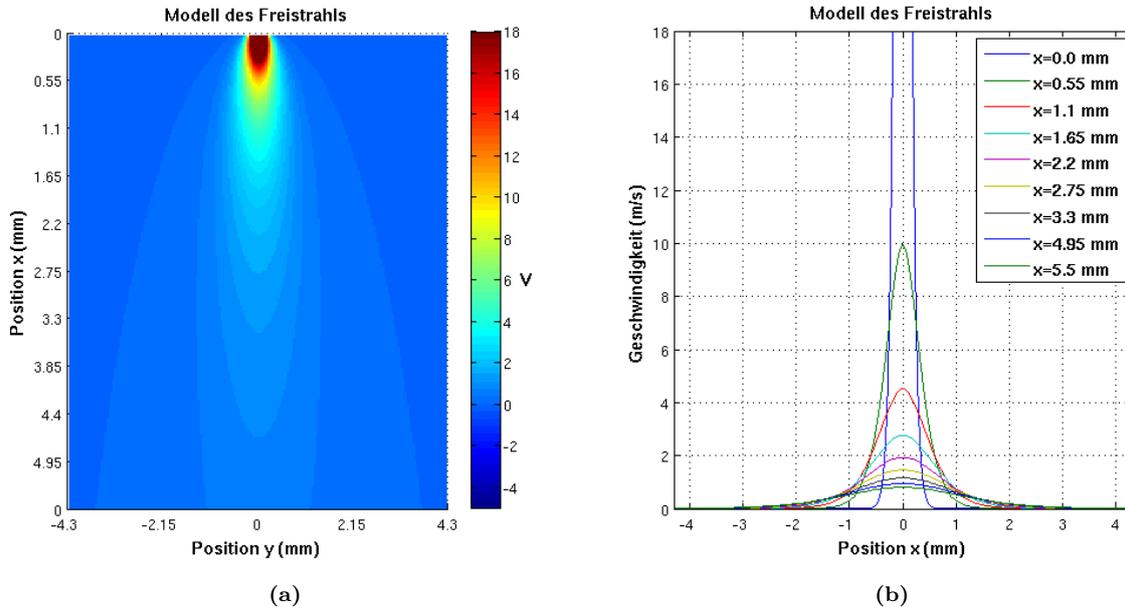
$$b = 700 \cdot \left(\frac{\nu^2}{K}\right)^{1/3} x^{2/3} \quad (5.7)$$

Dabei ist  $\nu$  die kinematische Viskosität ( $\nu_{Luft} \approx 1.5 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2\text{s}^{-1}$ ) und  $K$  das Fluss-Integral, welches dem Quotienten aus totalem Impulsstrom im Jet  $M$  und der Dichte  $\rho$  entspricht.  $M$  ist über alle vertikalen Querschnitte entlang des Jets konstant.

$$M = \rho K = \rho \int_{-\infty}^{+\infty} V^2 dy \quad (5.8)$$

Aus Gl. 5.5 erkennt man, dass das Profil des Modelljets ein Glockenprofil annimmt, welches in  $x$ -Richtung abklingt und in sich  $y$ -Richtung verbreitert. Die lokale Breite  $b$  des Jets wächst  $\sim x^{2/3}$ . Die zentrale Geschwindigkeit des Profils klingt  $\sim x^{-1.3}$  ab.

Dieser Sachverhalt ist konform zu den Ergebnissen der Simulation. Die Abbildungen 5.4a und 5.4b zeigen den Jet nach Gl. 5.5 und sein Profil im Vergleich zu den in der Simulation gewonnenen Ergebnissen (vgl. Abb. 5.1a und 5.1b).



**Abbildung 5.4.:** (a) Farbcodierte Darstellung der Geschwindigkeit des Modell-Freistrahls nach Gl. 5.5. (b) Geschwindigkeitsprofil des Modell-Freistrahls an den Querschnitten cs jet 01 - cs jet 09.

Aus dem Verhältnis der Propagationslänge  $x_j$  und der Öffnungsbreite  $y_j$  des Jets, gemessen von seiner axialen Symmetrieachse ( $y = 0$ ) aus, lässt sich der Öffnungswinkel des Jets bestimmen. Dabei findet die Breite der Kernspalte  $2b$  Berücksichtigung, in dem zu der Propagationslänge  $x_j$  noch der Korrekturterm  $5b$  addiert wird.

$$\tan \theta = \frac{y_j}{x_j + 5b} \quad (5.9)$$

Der Öffnungswinkel des simulierten Jets beträgt ca.  $11.8^\circ$ , was dem theoretischen Wert für einen turbulenten Jet entspricht. Bickleys Glockenprofil in Gl. 5.5 beschreibt zwar den laminaren Fall, also Strömungen mit der Reynolds-Zahl  $Re \approx 1000$ , jedoch ist dies eine gute Näherung der Anfangssituation des Jets in der Orgelpfeife.

### 5.1.2. Einfluss des akustischen Feldes des Resonators

Nach [31] besitzt eine sinusoidale Störung entlang des Jets die Propagationsgeschwindigkeit

$$u \sim (K/\omega)^{1/3} \quad (5.10)$$

Arbeiten von [10] und [13] zeigen, dass das Verhältnis  $u/V$  über einen großen Frequenzbereich nahezu konstant 0.5 ist. Daraus folgt für die Propagationsgeschwindigkeit der Störung entlang des Jets

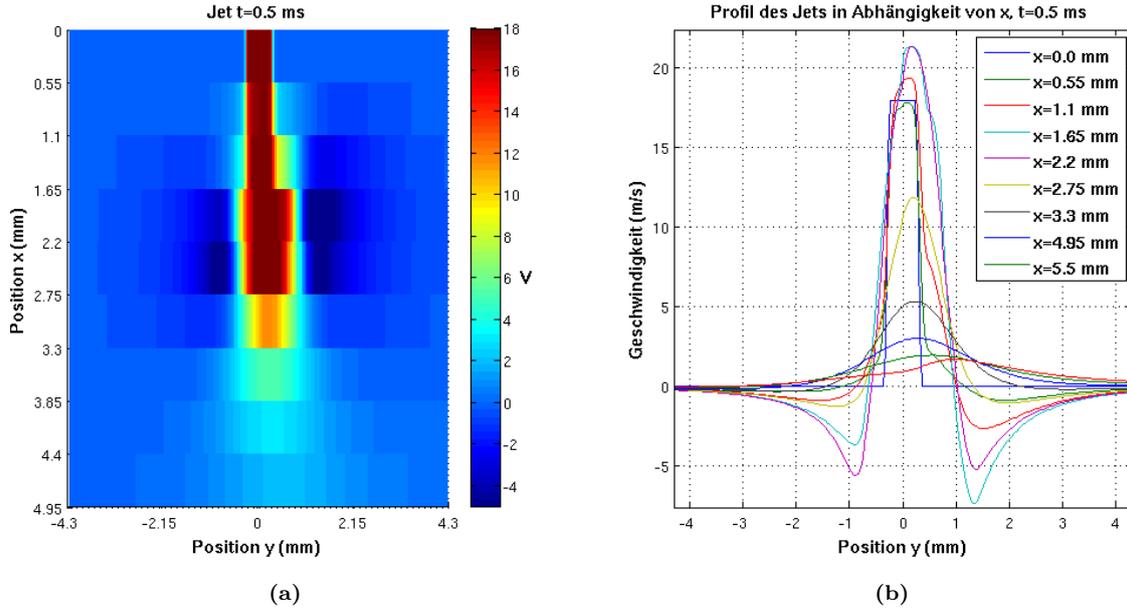
$$u \approx 0.5 \cdot V \quad (5.11)$$

Die Auslenkung des Jets durch das akustische Feld des Resonators lässt sich als eine solche sinusoidale Störung auffassen. Die Störung hat folgende Ursache. Nach Einströmen in den Aufschnitt trifft der Jet auf das Oberlabium. Dieses stellt für den Jet ein massives Hindernis dar. Das Oberlabium zwingt den Jet dazu, seine Richtung zu ändern. Dabei gibt es prinzipiell zwei Möglichkeiten. Entweder der Jet strömt an der Außenseite des Oberlabiums entlang in den Außenraum oder an der Innenseite desselben in den Resonatorinnenraum. Das hängt von den jeweiligen Randbedingungen, wie der Position der Kernspalte relativ zum Oberlabium, dem Neigungswinkel des Oberlabiums, der Höhe des Aufschnittes und der Geometrie des Resonators ab. Wie in Abb. 5.5a und 5.5b zu sehen, wird der Jet zunächst ( $t = 0.5$  ms) in den Außenraum abgelenkt, obwohl sich die Oberkante der Kernspalte auf einer Höhe mit der Innenkante des Oberlabiums befindet (vgl. Abb. A.2).

Das erklärt sich wie folgt. Durch das erste Einströmen des Jets in den Aufschnitt, auch **Anblasen** genannt, wird eine initiale akustische Druckschwankung hoher Amplitude erzeugt (vgl. Abb. 5.6a), die sich mit Schallgeschwindigkeit in alle möglichen Richtungen ausbreitet, also auch in den Resonatorinnenraum.

Hier propagiert die Druckschwankung, die wir **Schallwelle** nennen, bis zum geschlossenen Ende der Pfeife, wo es zu einer annähernd schallharten Reflexion kommt. Schallhart bedeutet, dass die Reflexion ohne nennenswerte Verluste verläuft, das Signal also ohne Phasenverschiebung und ohne Dämpfung reflektiert wird. Ideal schallharte Wände bedeuten unendlich hoher akustischer Widerstand, auch **akustische Impedanz**  $Z$  genannt. Anschließend wandert die Schallwelle wieder zurück in Richtung Aufschnitt. Das Hin- und Herlaufen der initialen Schallwelle im Resonator benötigt die Zeit von ca.  $t = 0.618$  ms. Am Jet angekommen, der in dieser Zeit ca.  $3/4$  der Aufschnitthöhe propagiert ist, drückt die intertiale Schallwelle den Jet nach außen. Die Schallwelle kann in den Außenraum entweichen. Schon in [31] wurde gezeigt, dass Jets sensibel gegenüber akustischen Druckschwankungen reagieren.

Im Fall der Orgelpfeife ist der Jet selbst die Ursache für die akustische Druckschwankung, durch die er, nach der Laufzeit der Schallwelle im Resonator, gestört wird. Die benötigte Laufzeit nennt man **retardierte Zeit**. Sie ist von den Abmessungen des Resonators abhängig. Die Geometrie des Resonators bestimmt die Frequenz  $\omega$  der akustischen Moden, die prinzipiell abgestrahlt werden können.



**Abbildung 5.5.:** (a) Unmittelbar nach der initialen Injektion propagiert der Jet in den Aufschnitt. Dabei erkennt man eine leichte Auslenkung in den Außenraum. (b) Die Geschwindigkeitsprofile der Querschnitte csjet 01 - 09 zu diesem Zeitpunkt zeigen eine leichte Asymmetrie, die zentrale Geschwindigkeit der Profile wird mit wachsender Propagationslänge  $x$  in den Außenraum verschoben.

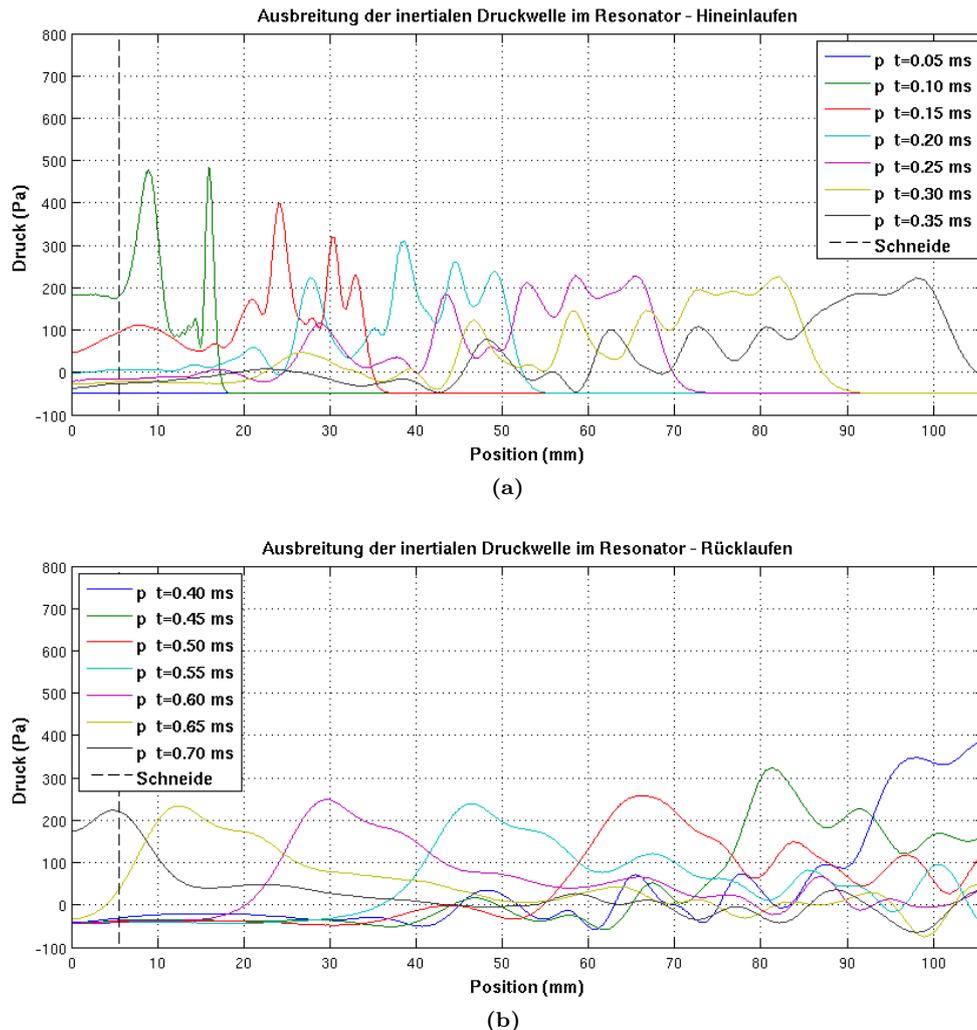
Der Resonator wählt somit aus dem Rauschspektrum des einströmenden Jets diejenigen akustischen Moden aus, die seinen Abmessungen entsprechen. Die Auslenkung des Jets in  $y$ -Richtung durch die akustischen Moden des Resonators lässt sich nach [13] darstellen als

$$h_1(y, t) = -j \left( \frac{v_y}{\omega} \right) e^{j\omega t} \quad (5.12)$$

Diese Störung greift über die gesamte Propagationslänge des Jets im Aufschnitt an, also auch direkt an der Kernspalte  $x = 0$ . Von hier aus breitet sich die Störung nun entlang des Jets mit der Geschwindigkeit  $u$  aus, wobei sie, wie vorher besprochen, exponentiell mit dem Wachstumsparameter  $\mu$  anwächst. Nach [28] ist auch ein negativer Wachstumsparameter möglich, (vgl. Gl. 5.2). Eine Kombination beider Fälle führt auf  $\cosh \mu x$ . Die gesamte Auslenkung des Jets aufgrund seiner Freistrahls-Charakteristik und der Auslenkung durch die akustischen Moden des Resonators am Punkt  $x$  im Aufschnitt lässt sich somit durch die Gleichung

$$J(x, t) = -j \left( \frac{v_y}{\omega} \right) \left\{ e^{j\omega t} - \cosh(\mu x) e^{j\omega \left( t - \frac{x}{u} \right)} \right\} \quad (5.13)$$

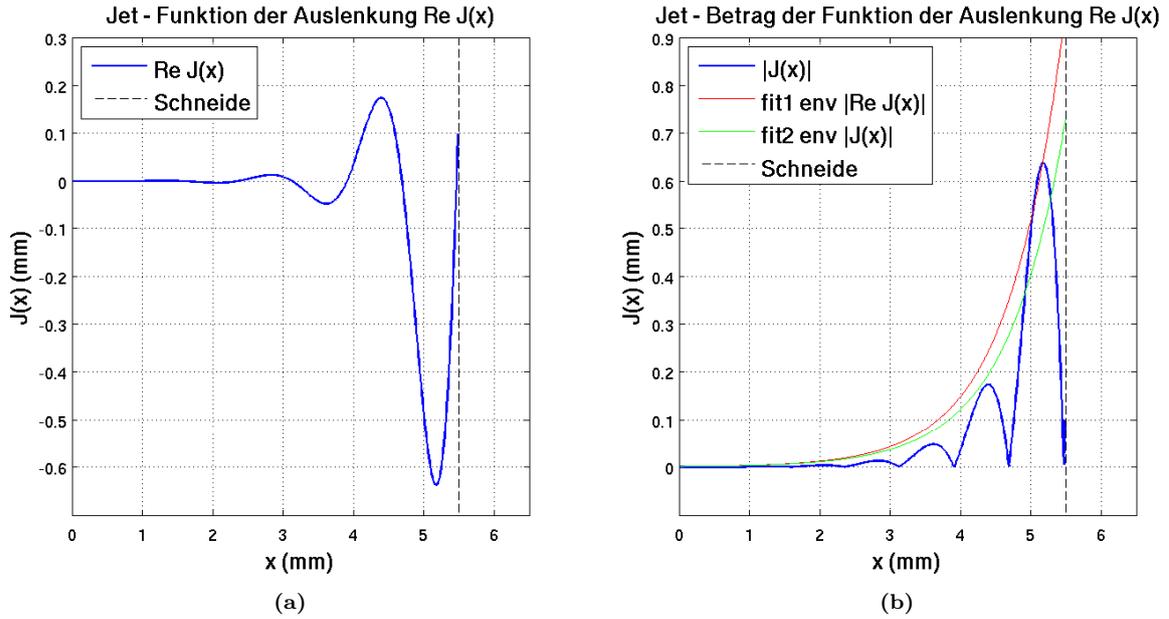
beschreiben. Im einfachsten Fall nimmt man  $\mu$  und  $u$  als konstant entlang des Jets an. Für  $x < 1/\mu$  sind die Auslenkungen noch gering. Für größere Werte von  $x$  dominiert der zweite Term in Gl. 5.13 und man erhält exponentiell wachsende Auslenkungen, sogenannte **Pendelmoden**. In realen Jets kann man davon ausgehen, dass  $\mu$  und  $u$  nicht mehr konstant sind, sondern Funktionen von  $x$  sind. Die Abbildungen 5.7a - 5.7b zeigen die Diagonalelemente des Realteils der Funktion  $J(x, t)$  aus Gl. 5.13 und deren Betrag für den Jet mit den Parametern der Simulation. Für die Frequenz  $\omega$  wurde die Frequenz der 1. Harmonischen von 693 Hz angenommen. Der Wachstumsparameter der Störung liegt bei  $\mu = 1/2b$ .



**Abbildung 5.6.:** (a) Zu Beginn der Simulation ( $t = 0.05 \text{ ms}$ ) wird eine initiale Druckwelle erzeugt, die sich mit Schallgeschwindigkeit im Resonator ausbreitet. (b) Nach Reflexion am oberen Ende der Orgelpfeife ( $x = 106 \text{ mm}$ ) wandert die Druckwelle (Schallwelle) zurück in Richtung Aufschnitt. Das Hin- und herlaufen benötigt die Zeit  $t = 0.618 \text{ ms}$ . Diese Zeitspanne nennt man retardierte Zeit.

### 5.1.3. Der Einfluss des akustischen Dipols an der Spitze des Oberlabiums

Es gibt noch eine weitere Störung, die die Auslenkung des Jets beeinflusst [17]. Wie in Abb. 5.8 zu erkennen, bildet sich an der Spitze des Oberlabiums, der **Schneide**, ein **schwingender akustischer Dipol** heraus, im Folgenden auch nur Dipol genannt. Im Film *p\_contour\_jet.avi* ist dies noch deutlicher zu erkennen. Seine Frequenz beträgt die der 2. Harmonischen, also ca. 1387 Hz. Das über den Querschnitt *cs dipol* gewonnene Drucksignal und sein Pegelspektrum sind in Abb. 5.9a und 5.9b dargestellt. Der Druckgradient des entstehenden dipolartigen Feldes führt unter bestimmten Umständen auch zu einer Anfachung der Auslenkung des Jets. Die Einzelheiten dieses Effektes sind noch nicht vollständig geklärt und werden deshalb hier nur kurz angerissen. Wenn die Dipolschwingungen phasengleich zu den Pendelmoden schwingen, kommt es zu einer zusätzlichen Quergeschwindigkeit des Jet in  $y$ -Richtung aufgrund des Druckgradienten an der Schneide und somit zu einer zusätzlichen Auslenkung. Auch an der Kernspalte ergibt sich dann eine entsprechend umgekehrt gerichtete Quergeschwindigkeit. Abb. 5.10a skizziert den Dipol an der Schneide für den Fall, dass der Dipol an der Außenseite der Schneide gerade einen Überdruck ausbildet. Wir gehen hier davon, dass auch diese Störung entlang des Jets mit der Geschwindigkeit  $u$  propagiert und mit dem Wachstumsparameter  $\mu$



**Abbildung 5.7.:** (a) Die Diagonalelemente von  $\text{Re}J(x, t)$  ergeben die mittlere Auslenkung des Jets in  $y$ -Richtung als Funktion der Höhe  $x$  des Aufschnittes. (b) Betrag der mittleren Auslenkung des Jets. Die Kurven  $\text{fit1}$  und  $\text{fit2}$  geben eine Abschätzung des Wachstumsparameters  $\pm\mu$ .

wächst. Das Dipolmoment  $\vec{D}$  des schwingenden Dipols berechnet sich zu

$$\vec{D} = 2d \cdot q \cdot \vec{e}_y \quad (5.14)$$

mit der Länge der Dipolachse  $2d$ , und der Dipolstärke  $q$ . Der Richtungsvektor  $\vec{e}_y$  gibt die Ausrichtung der Dipolachse an. Die resultierende Dipolkraft ergibt sich aus dem Druckgradienten in  $y$ -Richtung zu

$$\vec{F}_{Dipol} = -\frac{m}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \quad (5.15)$$

wobei der Druck  $p$  die periodische Funktion

$$p(y, t) = \hat{p} \cdot e^{j2\omega t} \quad \text{bzw. ihr Realteil} \quad \hat{p} \cdot \cos(2\omega \cdot t) \quad (5.16)$$

mit der Kreisfrequenz der 2. Harmonischen  $2\omega$  ist. Die Größen  $m$  und  $\rho$  sind die Masse und die Dichte des bewegten Volumenelementes.

#### 5.1.4. Diskussion

Die Schlüsselrolle bei der Schallentstehung und der Schallabstrahlung spielt der Generator. Das ist die Region, in der der Jet agiert. Die periodischen vertikalen Auslenkungen  $J(x, t)$  des Jets sind sowohl verantwortlich für Tonentstehung als auch für die Schallabstrahlung über den Aufschnitt in den Außenraum. Die Auslenkung des Jets wird durch drei Arten von Störungen bedingt. Das sind

- Störung aufgrund der Freistrah-Charakteristik des Jets (Kelvin-Helmholtz-Instabilität)
- Störung durch die rücklaufenden Schallwellen des Resonators.

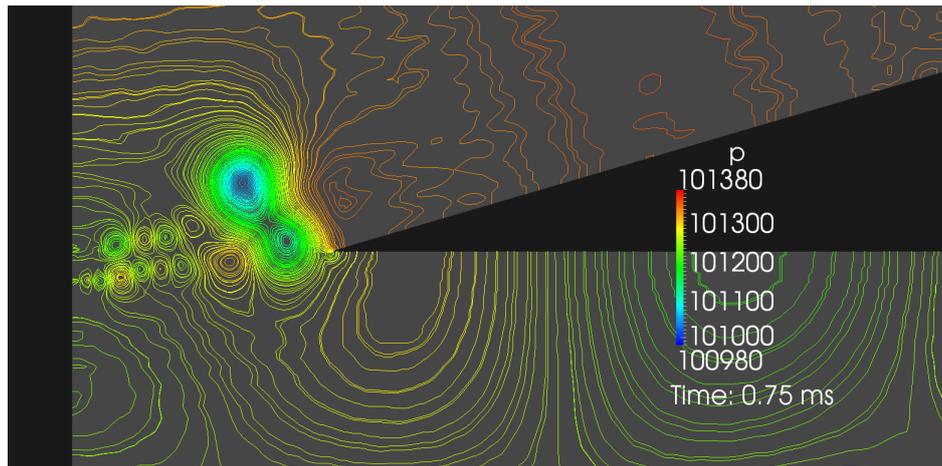


Abbildung 5.8.: Isobaren des Druckes im Bereich des Jets. Herausbildung eines schwingenden Dipols an der Spitze des Oberlabiums.

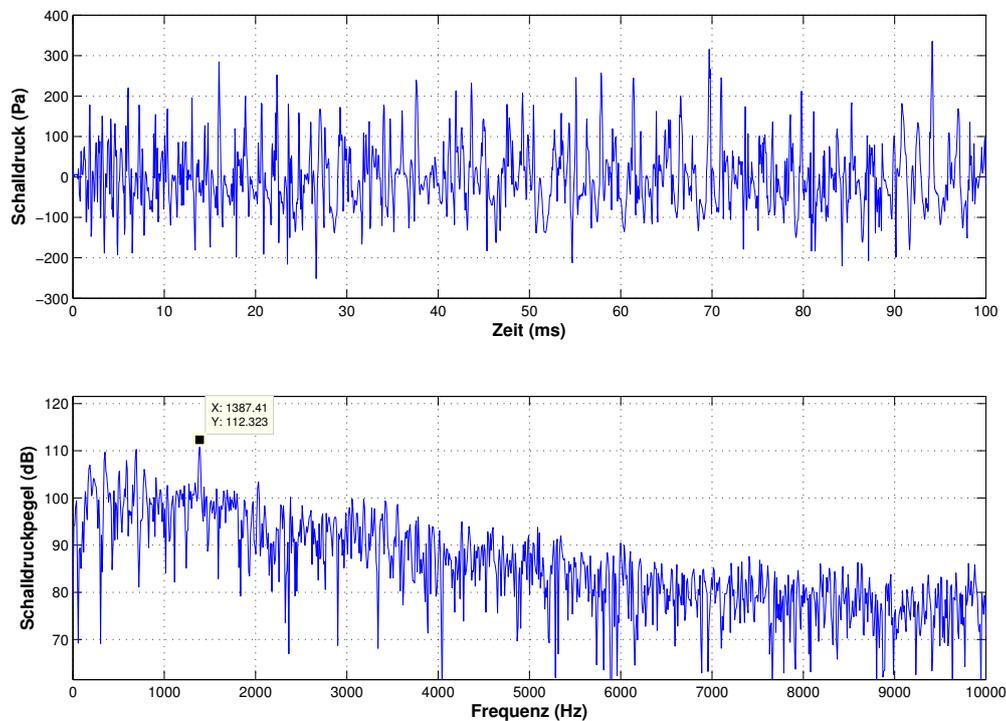
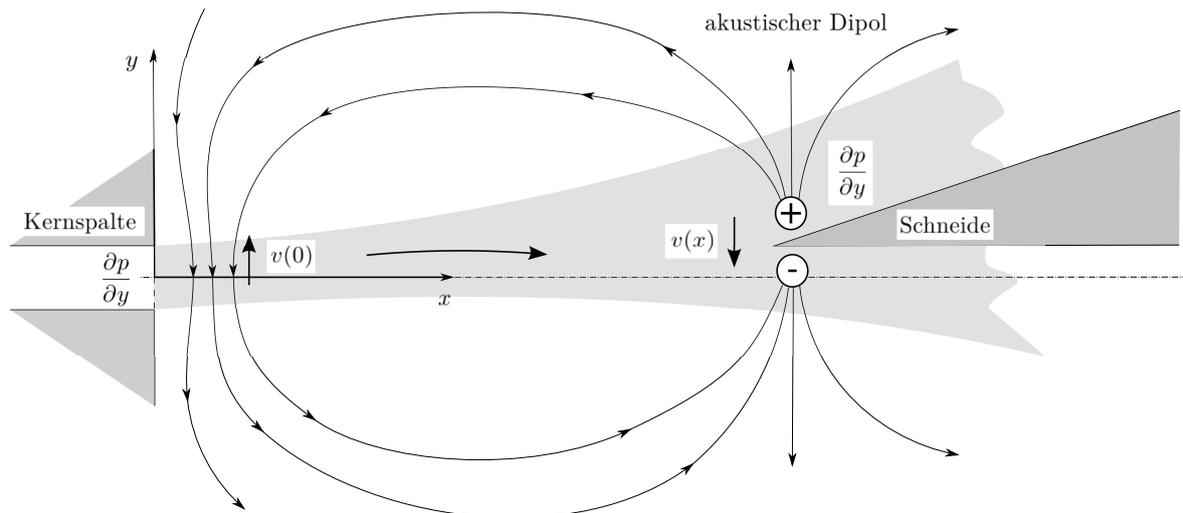


Abbildung 5.9.: (a) Das Drucksignal des Dipols an der Schneide des Oberlabiums. (b) Das Druckpegelspektrum des Dipols. Der Dipol schwingt mit der Frequenz von  $f_{Dipol} = 1387$  Hz und kann somit als Ursache der 2. Harmonischen in den Probenpunkten im Außenraum identifiziert werden.

- Störung durch den schwingenden Dipol an der Schneide des Oberlabiums

Dabei wird für die Entwicklung aller Störungen der Wachstumsparameter  $\pm\mu$  angenommen. Er bestimmt die Stärke der Auslenkung des Jets in Abhängigkeit von seiner Propagationslänge  $x$  in den Aufschnitt. Die Tatsache, dass die Auslenkungen des Jets endlich bleiben und nach einer gewissen Einschwingzeit periodisch mit der 1. Harmonischen des Resonators verlaufen (abgesehen vom Rauschspektrum des Jets), deutet darauf hin, dass es auch Mechanismen geben muss, die zur Sättigung der Auslenkungen führt. In der Simulation wurde ein sehr regelmäßiges Schwingen des Jets nach der Ein-



**Abbildung 5.10.:** Skizze des sich ausbildenden akustischen Dipols an der Schneide, an deren Außenseite gerade ein Überdruck herrscht. Der Vergleich mit der Simulation zur Zeit  $t = 0.75 \text{ ms}$  in Abb. 5.8 zeigt weitgehende Übereinstimmung mit dem Dipol-Modell.

schwingphase beobachtet und auch bei einer realen Orgelpfeife hören wir einen mehr oder weniger sauberen Ton gleichbleibender Frequenz, wird die Pfeife entsprechend angeblasen (vom Rauschen der Pfeife einmal abgesehen). Welche Mechanismen in der Orgelpfeife dazu führen, dass es zu einem dynamischen Gleichgewicht zwischen Anfachung und Dämpfung der Auslenkungen des Jets kommt, wird im folgenden Abschnitt untersucht.

## 5.2. Identifizierung der Kopplungsregion

Bei der Kopplungsregion handelt es sich um die vordere Teilregion des Resonatorinnenraumes, also einem Teilgebiet des Resonators im herkömmlichen akustischen Sinne. Mehrere Querschnitte,  $cs_0$  -  $cs_5$  sowie  $cs_{resonator}$ , wurden hier definiert und analysiert. Näheres zur Lage und den Positionen dieser Samples findet man im Anhang A.4, A.5 sowie C.17. Es werden nur die Auswertungen der turbulenten kinetischen Energie, des Druckes und der Geschwindigkeitskomponenten in der Kopplungsregion betrachtet, die wichtigsten Ergebnisse zusammengetragen und besprochen. Ziel ist es, die Mechanismen der Kopplung des Windfeldes an das akustische Feld und dessen Rückkopplung auf den Jet darzustellen. Durch zeitliche Mittelung und Integration der physikalischen Größen über die jeweiligen Querschnitte gelingt es, die Dynamiken durch die Querschnitte auf Punkte abzubilden. Die Komplexität der Sachverhalte wird dabei reduziert, ohne dass dabei Informationen über die Prinzipien der Wechselwirkung zwischen Windfeld und akustischem Feld verloren gehen, ganz im Sinne der Methodik des Coarse Graining. Eine detailliertere Auswertung der Kopplungsregion, insbesondere die Darstellung der zeitlichen Entwicklung der verschiedenen physikalischen Größen durch die Querschnitte als farbcodierte Grafiken finden sich im Anhang A.6 - A.12. An dieser Stelle sei auch auf die Filme  $cs_{resonator}_*.avi$  auf dem beigelegten Datenträger verwiesen, die die Dynamik in der Kopplungsregion und im Resonatorinnenraum veranschaulichen.

### 5.2.1. Der Aufschnitt - Sample $cs_0$

Die Abbildungen 5.11a - 5.11h zeigen die Ergebnisse der Analysen des Samples  $cs_0$ . Die Grafik 5.11a zeigt den zeitlichen Verlauf der Entwicklung der turbulenten kinetischen Energie durch das Sample  $cs_0$ . Auf der Ordinate ist die Position angegeben. Das Sample beginnt am unteren Rand des Aufschnittes, direkt am Vorschlag (vgl. Abb. 2.1) der Orgelpfeife und endet am oberen Ende des Oberlabiums.

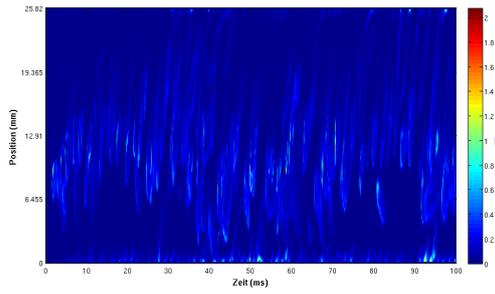
Schlierenartig sind helle Strukturen zu erkennen. Das sind die Wirbel, die sich vom Jet ablösen und entlang des Oberlabiums in den Außenraum abwandern. Am unteren Rand des Aufschnittes sind ebenfalls helle Schlieren zu sehen. Das sind kleine Wirbel, die von der Kante des Vorschlags herrühren. Der Durchmesser der Wirbel ist Anfangs noch recht klein. Während des weiteren Verlaufs werden die abgehenden Wirbel aber größer. Man erkennt, dass der Durchgang der Wirbel eine gewisse Periodizität aufweist. Interessant ist, dass die Durchgänge im Ort variieren. Das deutet auf Störungen der Wirbelstraße hin. Im Film *k\_log\_jet.avi* sind diese Störungen als zurückströmende Wirbel zu erkennen. Offenbar werden einige Wirbel durch die Druckverteilung wieder zurück in Richtung Jet bewegt. Das gelingt genau dann, wenn in der vorderen Resonatorregion gerade Unterdruck herrscht. Daraus erklärt sich auch das erneute Ansetzen der Wirbeldurchgänge zu den Zeiten 40 ms und 90 ms. Im Mittel gehen die Wirbel mit den größten kinetischen Energien (= den schnellsten Rotationen) etwa auf der Höhe von 13 mm und damit in der Mitte des Querschnittes ab.

In Abbildung 5.11b ist die integrierte Geschwindigkeitskomponente in x-Richtung  $v_x$  als farbcodierte Grafik dargestellt. Man erkennt hier, in Analogie zum vorher besprochenen Bild, dass es Wirbel gibt, die zurück in Richtung Jet wandern. Das sind die kurzen, blauen Schlieren. Sie sind fast ausschließlich im unteren Teil zu finden. Das Bild weist auch eine gewisse Periodizität auf. Interessant sind die periodischen Muster schwacher Amplitude am unteren Rand des Aufschnittes. Die Schwan- kungen besitzen die Frequenz der 1. Harmonischen. Man sieht in diesem Bild, dass der turbulenten Strömung eine akustische Schwingung aufgeprägt ist. Gut lassen sich die Zeiten der Wirbelabgänge der akustischen Schwingung zuordnen. Die Schlieren verlaufen relativ steil auch wenn sie, aufgrund der recht hohen mittleren Grundgeschwindigkeit (grünelber Hintergrund), etwas diffus erscheinen. Das heißt aber auch, die Wirbel in x-Richtung bewegen sich relativ schnell. Das ist auch klar, denn die Hauptströmungsrichtung des Jets verläuft ebenfalls in x-Richtung.

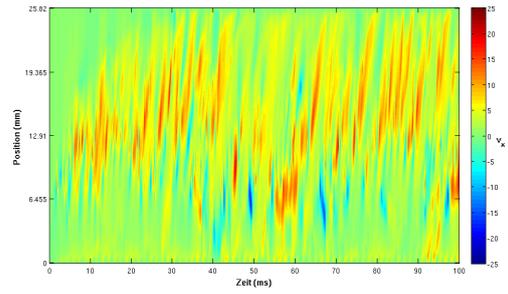
Ein deutlich anderes Bild zeigt die  $y$ -Richtung der integrierten Geschwindigkeitskomponente  $v_y$ , dargestellt in Abb. 5.11d. Hier sind die Schlieren breiter, nicht so steil, dafür aber viel schärfer ausgeprägt. Deutlich ist die Schallschnelle zu erkennen, die der Wirbelstraße ihre strenge Periodizität aufprägt. Die 70 Maxima der Schallschnelle entsprechen den Schwingungen des Systems mit der 1. Harmonischen. Der zeitliche Verlauf der Wirbelabgänge in  $y$ -Richtung wird demnach stark durch das akustische Feld im Resonator bestimmt.

In Abbildung 5.11c ist das zeitliche Profil des Druckes durch den Querschnitt  $cs0$  zu sehen. Hier sind die abgestrahlten Schallwellen gut als senkrechte Linien zu erkennen. Senkrecht deshalb, weil sie sich mit Schallgeschwindigkeit durch den Querschnitt bewegen, also ca. 20-mal schneller, als die Strömungsgeschwindigkeit. Die Schallwellen werden nur wenig durch die Wirbel gestört. Lediglich die zurückströmenden Wirbel beeinflussen die Schallausbreitung lokal. Das macht sich in den etwas schwächeren Amplituden der zeitlich direkt hinter den Wirbeln auftretenden Schallwellen bemerkbar. Wenn es keine solcher rückwärtigen Wirbel gibt, werden die Schallwellen ungehindert in den Außenraum abgestrahlt.

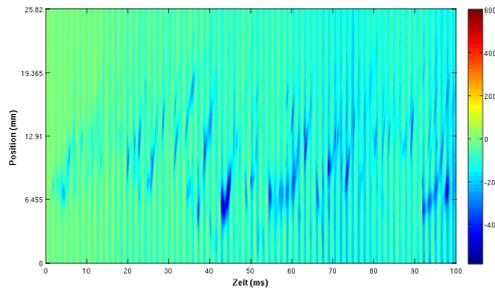
Jetzt werden die Ergebnisse der Integration über den Querschnitt  $cs0$  besprochen. Die Integration entspricht einer räumlichen Mittelung. In Abbildung 5.11e ist das integrierte Signal des Druckes zu sehen. Die mittlere Amplitude beträgt etwa 150 Pa. Das Signal sinkt dabei im Mittel um 100 Pa ab. Das ist darauf zurückzuführen, dass die Anfangsbedingungen für den Druck des Jets an der Kernspalte noch nicht optimal gewählt sind. Zu Beginn erkennt man eine Einschwingphase, in der das Signal noch stark verrauscht ist. Aber schon nach 5 ms bilden sich gleichmäßige Schwingungen heraus. Das Schalldruck- pegelspektrum in Abb. 5.11g zeigt die ungeradzahigen Harmonischen bis zur 11. Harmonischen sehr deutlich. Die 2. Harmonische ist ebenfalls zu erkennen. Sehr interessant sind die Signale der beiden Geschwindigkeitskomponenten  $v_x$  und  $v_y$  durch den Querschnitt  $cs0$  in Abb. 5.11f. In  $x$ -Richtung sind sehr starke Ausschläge zu sehen. Bis auf die anfängliche Einschwingphase und eine größere Störung bei 49 ms sind die Amplituden durchweg positiv. Das kennzeichnet die Vorzugsrichtung der Strömung in diesem Bereich. Die  $y$ -Komponente verhält sich ganz anders. Hier findet man ein sehr gleichmä- ßiges Signal geringerer Amplitude, mit einem Offset von 0.3 m/s. Das ist die Schallschnelle, die in den Außenraum gerichtet ist. Man bemerkt, dass die Schallschnelle die  $x$ -Komponente moduliert. Die Abb. 5.11h zeigt den Schallschnellepegel der  $y$ -Komponente der Geschwindigkeit. Die Frequenzen des



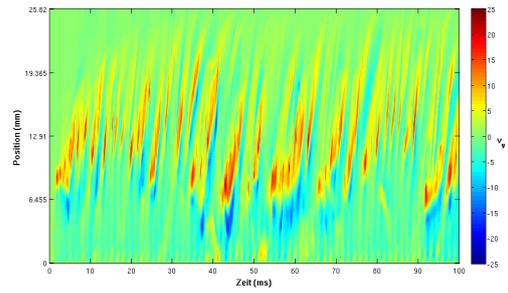
(a) Kinetogramm,  $k$



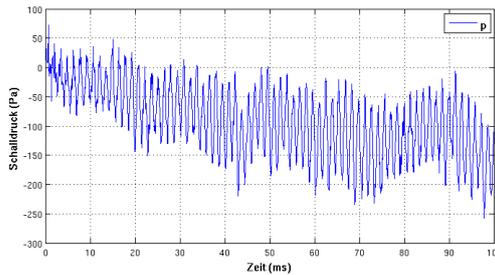
(b) Velocigramm,  $v_x$



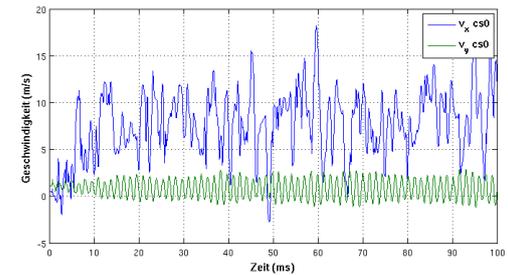
(c) Sonogramm,  $p$



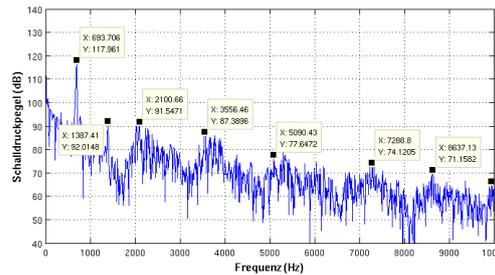
(d) Velocigramm,  $v_y$



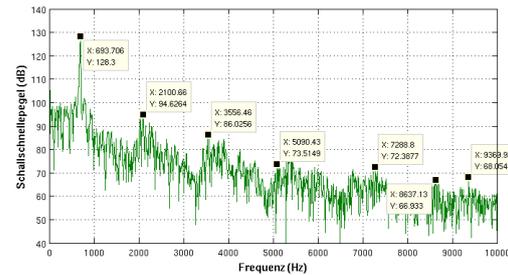
(e) Signal,  $p$



(f) Signale,  $v_x, v_y$



(g) Schalldruckpegelspektrum,  $p$



(h) Schallschnellespektrum,  $v_y$

Abbildung 5.11.: (a)-(d) Farbcodierte zeitliche Entwicklung der turbulenten kinetischen Energie  $k$ , des Druckes  $p$  und der horizontalen und vertikalen Geschwindigkeitskomponenten  $v_x$  und  $v_y$  durch den Querschnitt  $cs0$ . (e)-(h) Die über den Querschnitt  $cs0$  integrierte Druckschwankung und die Signale Geschwindigkeitskomponenten  $v_x, v_y$ , sowie das Schalldruckpegelspektrum und das Schallschnellespektrum von  $v_y$ .

Spektrums sind, bis auf die nicht vorhandene 2. Harmonische, nahezu identisch zum Schalldruckpegelspektrum. Die Tabellen 5.1 und 5.2 fassen die Werte der ungeradzahigen Harmonischen der beiden

Signale zusammen. Die 2. Harmonische im Schalldruckpegelspektrum liegt bei 1387 Hz mit einem Pegel von 92 dB.

Sample $cs_0, p$	1.H.	3.H.	5.H.	7.H.	9.H.	11.H.	13.H.
Frequenz $f$	693 Hz	2101 Hz	3557 Hz	5090 Hz	7289 Hz	8637 Hz	9946 Hz
Abweichung	-4%	-3%	-1%	+1%	+12%	+9%	+6%
Schalldruckpegel	117 dB	91 dB	87 dB	81 dB	74 dB	71 dB	66 dB

**Tabelle 5.1.:** Frequenzen und Schalldruckpegel der ungeradzahligen Harmonischen des integrierten Drucksignals durch den Querschnitt  $cs_0$ .

Sample $cs_0, v_y$	1.H.	3.H.	5.H.	7.H.	9.H.	11.H.	13.H.
Frequenz $f$	693 Hz	2101 Hz	3557 Hz	5090 Hz	7289 Hz	8637 Hz	9369 Hz
Abweichung	-4%	-3%	-1%	+1%	+12%	+9%	0%
Schallschnellepegel	128 dB	95 dB	86 dB	74 dB	72 dB	70 dB	68 dB

**Tabelle 5.2.:** Frequenzen und Schalldruckpegel der ungeradzahligen Harmonischen des integrierten Geschwindigkeitssignals in  $y$ -Richtung durch den Querschnitt  $cs_0$ .

## Diskussion

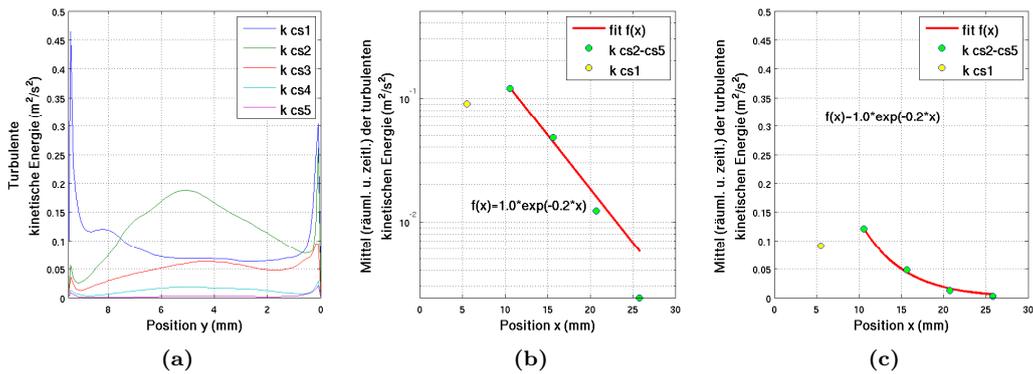
Aus der Analyse des Aufschnittes lassen sich folgende Schlüsse ziehen. Es ist die  $y$ -Komponente der Geschwindigkeit  $v_y$  durch den Querschnitt  $cs_0$ , welche die Schallschnelle und somit das Schallsignal trägt. Die Abstrahlung von Schall in den Außenraum erfolgt im Wesentlichen senkrecht zum Aufschnitt. Die Strömung des Jets in  $x$ -Richtung mit seinen Wirbelabrissen entlang des Oberlabiums, beeinflusst das Schallabstrahlverhalten nur marginal. In  $x$ -Richtung sind jene Anteile der Schallschnelle, die man akustisch als Windrauschen wahrnimmt, dominant. Das Schalldruckpegelspektrum und das Schallschnellepegelspektrum, *engl.:* **particle velocity level**, (PVL) unterscheiden sich lediglich im Auftreten der 2. Harmonischen beim Schalldruck. Die Schallschnelle besitzt ein sauberes, ungeradzahliges Pegelspektrum bis zur 13. Harmonischen.

### 5.2.2. Kopplung des Windfeldes an das akustische Feld - Samples $cs_1$ - $cs_5$

#### Turbulente kinetische Energie

In den Abbildung 5.12a sind die Profile der zeitlich gemittelten turbulenten kinetischen Energie über die Querschnitte  $cs_1$ - $cs_5$  dargestellt. Gut sind die Randspitzen des Profils durch  $cs_1$  zu erkennen. Sie entstehen aufgrund der Reibung in den Scherschichten an den jeweiligen Wandungen des Resonators. Beginnend von  $cs_2$  klingen die Profile bis zum Querschnitt  $cs_5$  deutlich ab,  $k \rightarrow 0$ . Das Profil durch  $cs_1$  unterscheidet sich stark von den anderen Profilen. Der fehlende Bauch im mittleren Teil, die Randspitzen, als auch die stark ausgebildete Asymmetrie zeigen, dass hier der Jet agiert und den Primärwirbel erzeugt und treibt. Diese Region nennen wir **anfachend** und sie lässt sich eindeutig dem Generator zuordnen.

Die zeitlich gemittelten Werte der Profile von  $k$  können über die jeweiligen Querschnitte integriert werden. Man erhält so das zeitlich und räumlich gemittelte Signal von  $k$  durch die Querschnitte, zusammengezogen auf Punkte. Abbildung 5.12b zeigt die semi-logarithmische Darstellung der resultierenden Punkte in Abhängigkeit von der Position der Querschnitte. Bei der Interpolation wird der Punkt des Querschnitts  $cs_1$  nicht berücksichtigt, da es hier erst zur Konstitution des Primärwirbel und zur Anfachung kommt. Hier ist jedoch die Umwandlung von kinetischer Energie der Strömung in turbulente kinetische Energie, der damit verbundene Zerfall der Wirbelstrukturen und die damit der verbundene Dämpfung des Windfeldes von Interesse. Dieser Prozess muss die Kopplung des Strömungsfeldes an das akustische Feld beinhalten. Die Interpolation über die Punkte der Querschnitte



**Abbildung 5.12.:** (a) Profile der turbulenten kinetischen Energie  $k$  durch die Querschnitte cs1-cs5. (b) Zeitlich gemittelte und über die jeweiligen Querschnitte integrierten Werte von  $k$  durch cs1-cs5 und die Interpolation (rot) in semi-logarithmischer Darstellung. Der Punkt des Querschnitts cs1 (gelb) ist nicht Teil des Fits, da in diesem Bereich der Jet agiert, also Anfachung stattfindet. (c) Die Interpolation ergibt in linearer Darstellung ein exponentielles Abklingverhalten.

cs2-cs5 ergibt eine Gerade mit negativem Anstieg, also ein exponentiell abklingender Zusammenhang zwischen der zeitlich und räumlich gemittelten turbulenten kinetischen Energie durch die Querschnitte in Abhängigkeit zur  $x$ -Position (Ort) der Querschnitte im Resonator (Gl. 5.17).

$$fit\ k : \quad f_k(x) = 1.0 \cdot e^{-0.2 \cdot x} \quad (5.17)$$

In linearen Koordinaten ist das Verhalten in Abb. 5.12c dargestellt.

### Geschwindigkeit in $x$ -Richtung

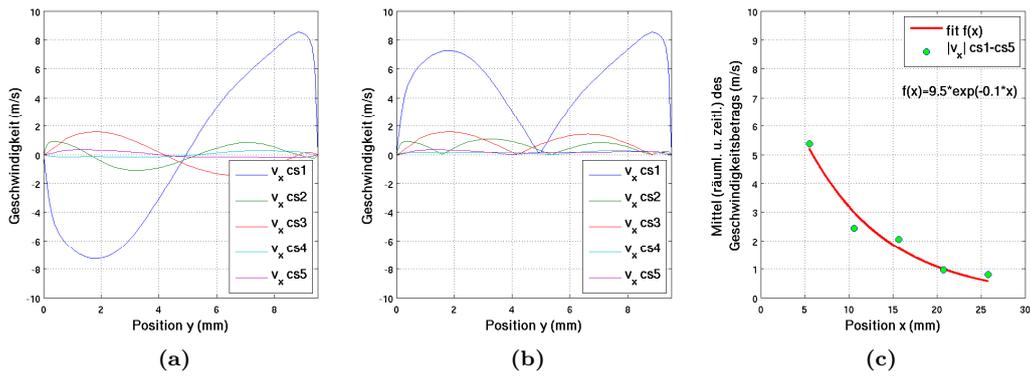
Abbildung 5.13a zeigt die zeitgemittelten Geschwindigkeitsprofile von  $v_x$  durch die Querschnitte. Die Beträge von  $v_x$  sind in Abbildung 5.13b dargestellt. Die räumliche Integration der zeitlich gemittelten  $x$ -Komponente der Geschwindigkeit über die jeweiligen Querschnitte ergeben die Punkte in Abb. 5.13c. Dabei geht auch der Punkt von cs1 mit in die Interpolation ein, denn das Abklingverhalten von  $v_x$  ist am Querschnitt cs1 (im Gegensatz zu  $k$ ) schon in vollem Gange. Aus Abschnitt 5.1.1 wissen wir, dass der Jet schon unmittelbar nach Verlassen der Kernspalte auch einer varikösen Störung ausgesetzt ist, die zur Dämpfung der  $v_x$ -Komponente des Jets führt. Die Interpolation Gl. 5.18 zeigt das exponentielle Abklingverhalten von  $v_x$  durch die Querschnitte cs1 - cs5.

$$fit\ |v_x| : \quad f_{|v_x|}(x) = 9.5 \cdot e^{-0.1 \cdot x} \quad (5.18)$$

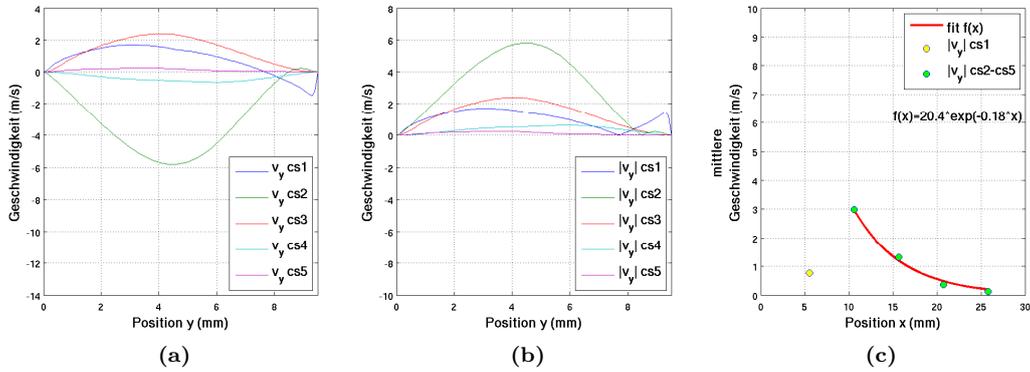
### Geschwindigkeit in $y$ -Richtung

In Abbildung 5.14a sind die Profile von  $v_y$  für die jeweiligen Querschnitte gezeigt. Abb. 5.14b zeigt die Beträge. Interessant ist, wie sich das Profil durch den Querschnitt cs1 von den anderen Profilen unterscheidet. Zum einen erkennt man die geringe, mittlere Amplitude des Profils (es dominiert ja hier die Hauptströmungsrichtung des Jets in  $x$ -Richtung).

Zweitens bemerkt man die Asymmetrie im oberen Randbereich ( $y > 8$  mm). Das zeitgemittelte Profil in diesem Bereich ist negativ. Das heißt, im zeitlichen Mittel findet hier ein Einströmen in  $y$ -Richtung statt. Das geschieht durch den Jet, der mit der Pendelmode ein periodisch einströmenden Volumenstrom in den Resonator bewirkt. Das Abklingverhalten von  $v_y$  durch die Querschnitte zeigt Abb. 5.14c.



**Abbildung 5.13.:** (a) Zeitlich gemittelte Profile von  $v_x$  durch die Querschnitte cs1-cs5. (b) Die Absolutbeträge der zeitlich gemittelten Profile von  $v_x$ . (c) Die Punkte sind die zeitlich gemittelten und über den jeweiligen Querschnitt integrierten Geschwindigkeitssignale von  $v_x$  durch die Querschnitte. Die rote Kurve interpoliert die Punkte und zeigt ein exponentielles Abklingen der Absolutbeträge der mittleren Geschwindigkeitskomponente  $|v_x|$ . Interpoliert wird hier über alle Querschnitte cs1-cs5.



**Abbildung 5.14.:** (a) Zeitlich gemittelte Profile von  $v_y$  durch die Querschnitte cs1-cs5. (b) Die Absolutbeträge der zeitlich gemittelten Profile von  $v_y$ . (c) Die Punkte sind die zeitlich gemittelten und über den jeweiligen Querschnitt integrierten Geschwindigkeitssignale von  $v_y$ . Die rote Kurve interpoliert die Punkte und zeigt ein exponentielles Abklingen der Absolutbeträge der mittleren Geschwindigkeit  $|v_y|$  an den jeweiligen Querschnitten. Bei der Interpolation geht der Querschnitt cs1 nicht mit ein, weil  $v_y$  hier noch eine Anfänger erfährt.

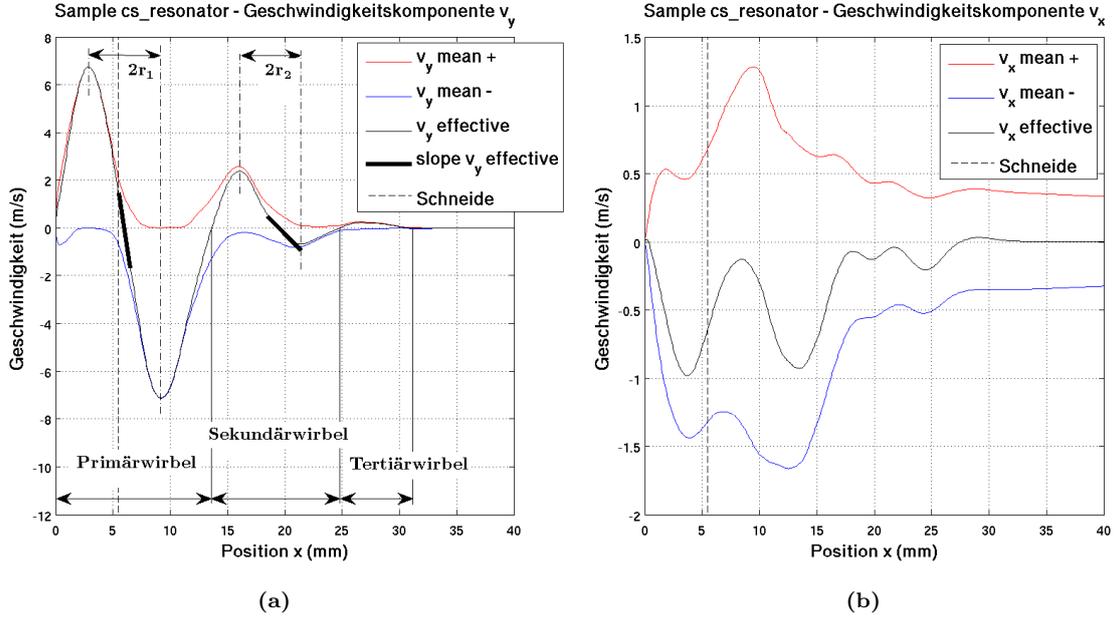
Dabei wird der Querschnitt cs1 bei der Interpolation nicht berücksichtigt, da  $v_y$ , hervorgerufen durch die Auslenkung des Jets, hier eine Anfänger erfährt. Erst hinter dem Querschnitt cs1 kann man von einer echten Dämpfung der  $v_y$ -Komponente sprechen.

Die Interpolation ergibt

$$fit |v_y| : f_{|v_y|}(x) = 20.3 \cdot e^{-0.18 \cdot x} \quad (5.19)$$

Die Analyse von  $v_y$  durch die Querschnitte cs1 - cs5 gibt zwar Auskunft über das Abklingverhalten von  $v_y$ , die wirkenden Mechanismen in der Kopplungsregion können so jedoch nur unzureichend verifiziert werden. Um diese Lücke zu schließen, wird etwas vorgegriffen. Wir untersuchen jetzt den vorderen Teilbereich eines weiteren Querschnittes, dem Sample *cs resonator*, der, wie der Name verrät, für die Analyse des Resonatorinnenraumes definiert wurde. Bei der Analyse des Resonatorverhaltens im Abschnitt 5.3 wird der Querschnitt *cs resonator* als Ganzes betrachtet. Um die Kopplungsmechanismen zwischen Windfeld und akustischem Feld in der Kopplungsregion zu identifizieren, wird aber hier schon die Entwicklung der  $v_y$ -Komponente und der  $v_x$ -Komponente durch den vorderen Teilab-

schnitt des Querschnittes *cs resonator* behandelt. Nähere Informationen zur Position des Querschnittes *cs resonator* geht finden sich im Anhang A.5. Jetzt liegt der Fokus vorerst auf dem Teilbereich  $0 \text{ mm} \leq x \leq 40 \text{ mm}$  des Querschnittes *cs resonator*. Dieser Bereich beinhaltet die Region, die wir als Kopplungsregion eingeführt haben.



**Abbildung 5.15.:** (a) Verhalten des zeitlich gemittelten Signals der Geschwindigkeitskomponente  $v_y$  in der Kopplungsregion. Mit rot sind die positiven (in Richtung Pfeifenfront), mit blau die negativen (in Richtung Pfeifenrückwand) zeitgemittelten Anteile von  $v_y$  dargestellt. Die schwarze Kurve markiert die Differenz beider Anteile, also den Effektivwert der zeitgemittelten nichtlinearen Anteile von  $v_y$ . Die Anstiege von  $v_y$  in den Wirbelzentren sind linear. Daraus folgen konstante zeitgemittelte Winkelgeschwindigkeiten  $\Omega$  der Wirbelzentren. Die Zentren verhalten sich demnach im Mittel wie Starrkörperwirbel. (b) Zeigt das Verhalten der zeitgemittelten Komponente von  $v_x$  in der Kopplungsregion. Der Effektivwert von  $v_x$  ist negativ, also aus dem Resonatorraum heraus, in Richtung Pfeifenboden gerichtet. Man erkennt, dass die Nichtlinearitäten für Positionen  $x > 30$  mm verschwinden. Übrig bleiben gleich große mittlere positive und negative Anteile von  $v_x$ , die als Schallschnelle identifiziert wird.

In Abb. 5.15a ist die zeitlich gemittelte Entwicklung der  $v_y$ -Komponente der Geschwindigkeit durch den Querschnitt *cs resonator* im vorderen Teilgebiet dargestellt. Die rote Kurve stellt die **zeitlich gemittelten** positiven Anteile von  $v_y$  dar, also jene Anteile, die in Richtung Aufschnitt, respektive in Richtung Außenraum, gerichtet sind. Die blaue Kurve zeigt die zeitlich gemittelten negativen Anteile von  $v_y$ . Die schwarze Kurve zeigt die Differenz aus positiven und negativen Anteilen von  $v_y$  und somit den zeitgemittelten **Effektivwert der nichtlinearen Anteile** der vertikalen Geschwindigkeitskomponente im vorderen Teil des Resonators, unserer Kopplungsregion. Dies erlaubt nicht nur die Lokalisierung der zeitlich gemittelten Wirbelstrukturen, sondern gibt auch Auskunft über deren Eigenschaften. Die zeitlich gemittelten Komponenten  $v_y$  durch den betrachteten Teilbereich des Querschnittes *cs resonator* stellen auch die tangentialen Geschwindigkeitskomponenten der Wirbel dar. Aus der schwarzen Kurve lassen sich daher Rückschlüsse auf die mittlere Winkelgeschwindigkeit  $\bar{\omega}$  der Wirbel ziehen. Im Bereich der Wirbelzentren von Primär- und Sekundärwirbel ist  $v_y(x)$  linear (fette, schwarze Linien). Das impliziert eine, im zeitlichen Mittel, konstante Winkelgeschwindigkeit  $\bar{\omega}$ . Das heißt, die Wirbelzentren verhalten sich im zeitlichen Mittel wie Starrkörperwirbel. Die Wirbelzentren haben die Radien  $\bar{r}_1$  und  $\bar{r}_2$  (vgl. Abb. 5.15a). Für Starrkörperwirbel gilt die Beziehung

$$v = \omega \cdot r \quad (5.20)$$

wobei  $r$  der Radius vom jeweiligen Ursprung des Wirbelzentrums ist. Aus der Kräftebilanz von Druckkraft und Zentrifugalkraft

$$dp dA = -\rho dA dr \cdot \frac{v^2}{r} \quad (5.21)$$

ergibt sich die Beziehung

$$dp = -\rho \frac{v^2}{r} dr \quad (5.22)$$

aus der sich durch Integration die resultierende Druckdifferenz zwischen Wirbelzentrum und Umgebung berechnen lässt.

$$\Delta p = -\rho \int_0^r \frac{\omega^2 r^2}{r} dr = -\frac{\rho}{2} \omega^2 \int_0^r r dr$$

Für das Zentrum des Primärwirbels ergibt die Interpolation des Anstiegs die mittlere Winkelgeschwindigkeit  $\bar{\omega}_1 = 3156 \text{ s}^{-1}$ . Als mittleren Radius des Primärwirbelzentrums findet man  $\bar{r}_1 = 3.16 \text{ mm}$ . Daraus ergibt sich ein Unterdruck im Primärwirbelzentrum von  $\Delta p = -58 \text{ Pa}$  relativ zur seiner Umgebung. Im Sekundärwirbelzentrum findet man mit  $\bar{\omega}_2 = \bar{\omega}_1/6 = 526 \text{ s}^{-1}$  und einem Radius  $\bar{r}_2 = 2 \text{ mm}$  nur noch den marginalen zeitgemittelten Unterdruck von  $\Delta p = -0.6 \text{ Pa}$ . Die Wirbelstärke, für starre Körper gegeben durch  $\vec{\xi} = 2\vec{\omega}$ , beträgt im Sekundärwirbel also nur noch 1/6 der des Primärwirbels.

Aus Abb. 5.15b erkennt man, dass die zeitgemittelten horizontalen Geschwindigkeitskomponenten in der Kopplungsregion viel kleiner sind, als die von  $v_y$ . Außerdem ist der Effektivwert der zeitgemittelten nichtlinearen Anteile von  $v_x$  (schwarze Kurve) durchweg negativ, also aus dem Resonatorinnenraum heraus gerichtet. Klar ist, dass der Effektivwert von  $v_x$  in etwa dort seine Maxima besitzt, wo  $v_y$  Minima annimmt. Es handelt sich ja um Wirbelstrukturen. Aus den Abb. 5.15a und 5.15b erkennt man, dass die Nichtlinearitäten beider Geschwindigkeitskomponenten bis zu  $x = 30 \text{ mm}$  fast vollständig abklingen. Hier endet die Kopplungsregion von Strömungsfeld und akustischem Feld im Resonator. Der Querschnitt *cs5* stellt somit das Ende der Kopplungsregion dar. Die verbleibenden gleich großen mittleren Anteile positiver und negativer Komponenten von  $v_x$  ab  $x = 30 \text{ mm}$  identifizieren wir als die Schallschnelle im Resonator. Das heißt, ab hier muss sich das Verhalten des Resonators mit Mitteln der linearen Wellentheorie beschreiben lassen. Dies wird im Abschnitt 5.3 analysiert.

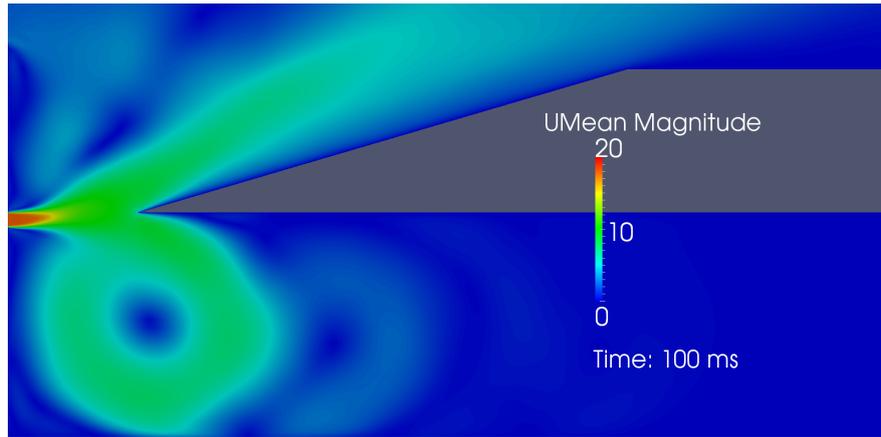
Betrachtet man den Betrag beider Effektivwerte der Geschwindigkeitskomponenten,

$$|v| = (v_{x,effective}^2 + v_{y,effective}^2)^{1/2}$$

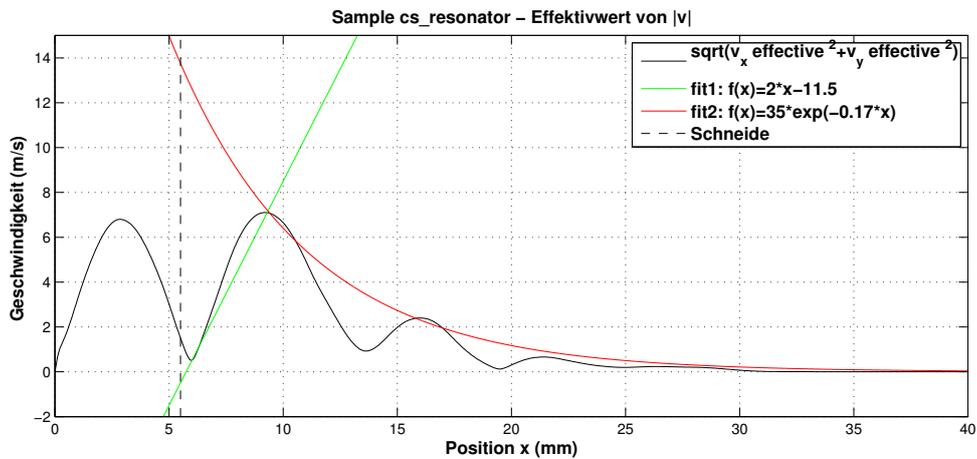
so ergibt sich der Effektivwert der nichtlinearen Anteile des Geschwindigkeitsbetrages  $|v|$ , dargestellt in Abb. 5.16a und 5.16b. Die Interpolationen *fit1* und *fit2* ergeben funktionale Zusammenhänge für die mittlere Anfachung und für das Abklingen der Nichtlinearität von  $|v|$  in der Kopplungsregion.

$$fit1(x) = 2 \cdot x - 11.5 \quad fit2(x) = 35 \cdot e^{-0.17x} \quad (5.23)$$

Bevor die Entwicklung des Druckes in der Kopplungsregion analysiert wird, soll noch kurz der Effektivwert der turbulenten kinetischen Energie in der Kopplungsregion besprochen werden. Er ist in Abb. 5.17a dargestellt. Die scharfe Randspitze kennzeichnet die Reibung in der Randschicht zum Resonatorboden. Das ausgeprägte Maximum bei  $x = 10 \text{ mm}$  befindet sich zwischen dem mittleren Primär- und dem mittleren Sekundärwirbelzentrum. Die größten Reibungsverluste treten also in der Region zwischen in den beiden Wirbeln auf, genauer, in den dortigen Rand- und Scherschichten.



(a)



(b)

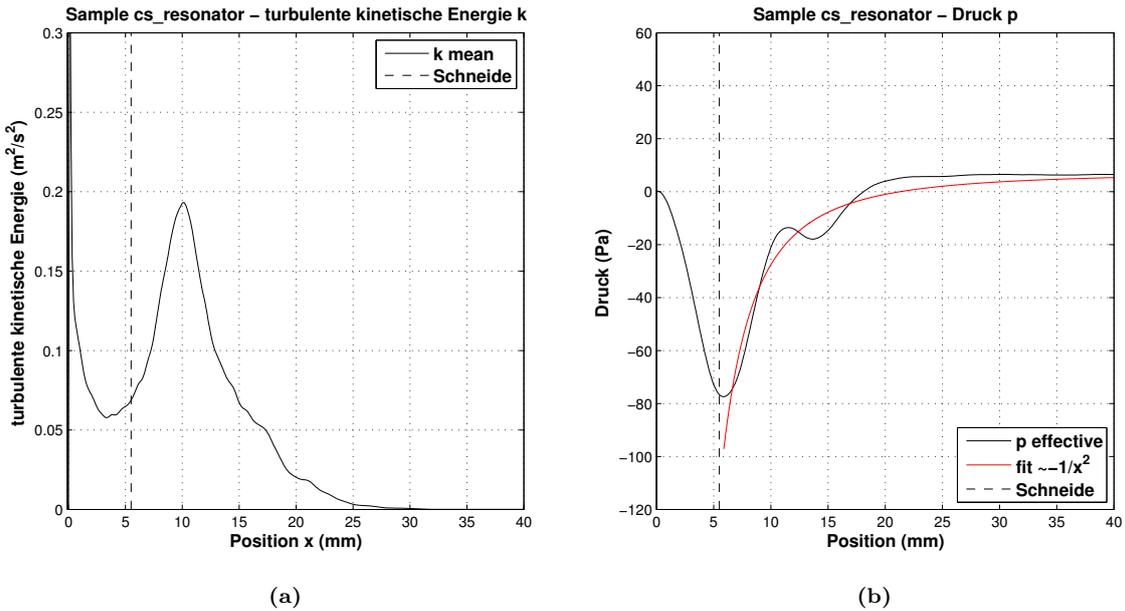
**Abbildung 5.16.:** (a) Effektivwert des Betrags der Geschwindigkeit  $|v|$  im Bereich der Kopplungsregion. Die zeitliche Mittelung erstreckt sich über die gesamte Simulationszeit  $t = 100$  ms. (b) Effektivwert des Geschwindigkeitsbetrags  $|v|$  in der Kopplungsregion (Querschnitt  $cs\_resonator$ ). Mit den Interpolationen lassen sich die Nichtlinearitäten der Geschwindigkeit in der Kopplungsregion klassifizieren. Man erkennt die Anfachung (grün) und die Dämpfung (rot). Im vorderen Teil ( $0 < x < 5.5$  mm) erkennt man jene nichtlinearen Geschwindigkeitskomponenten, die in Richtung Aufschnitt wandern. In diesem Anteil ist auch die Schallschnelle und somit das Schallsignal enthalten.

## Druck

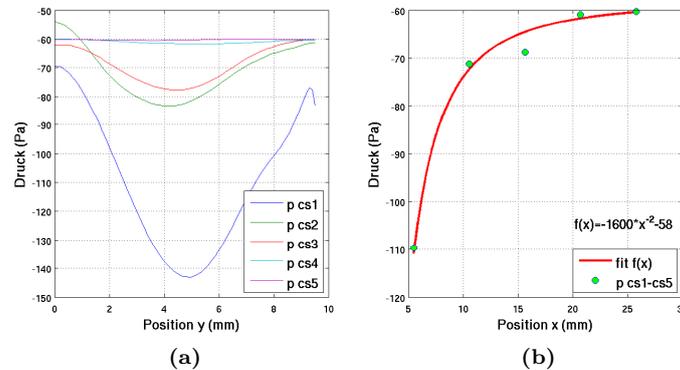
Im Gegensatz zu den bislang besprochenen physikalischen Größen, wächst der Druck von Querschnitt  $cs1$  zu Querschnitt  $cs5$  an. Die Profile des zeitlich gemittelten Drucksignals in Abb. 5.18a verdeutlichen dies. Während bei  $cs1$  noch ein mittlerer Unterdruck  $-110$  Pa relativ zu  $p_0$  vorherrscht, wächst der mittlere Druck auf ca.  $-58$  Pa relativ zu  $p_0$  bei  $cs5$  an. Dies entspricht einem Schalldruckpegel von ca. 130 dB. Die Interpolation der zeitlich und räumlich gemittelten Signale zeigt Abb. 5.18b. Man erhält

$$fit\ p: \quad f_p(x) = -1600 \cdot \frac{1}{x^2} - 58 \quad (5.24)$$

In Abb. 5.17b ist der Effektivwert der zeitgemittelten nichtlinearen Anteile des Druckes in der Kopplungsregion gezeigt. Gut sind die mittleren lokalen Unterdrücke des Primär- und des Sekundärwirbels zu erkennen. Die Interpolation ergibt ein Verhalten  $\sim -1/x^2$ .



**Abbildung 5.17.:** (a) Gezeigt ist der Effektivwert der zeitgemittelten turbulenten kinetischen Energie  $k$ . Die hohe Randspitze entsteht durch Reibung in der Randschicht am Pfeifenboden. Das ausgeprägte Maximum bei  $x = 10$  mm kennzeichnet die Region, in der es zu den größten Reibungseffekten kommt. Diese entstehen in der Scherschicht zwischen Primär- und Sekundärwirbel und in den Randschichten zur Resonatorwand. (b) Dargestellt ist der Effektivwert des Druckes  $p$  in der Kopplungsregion. Das zeitgemittelte lokale Druckminimum auf Höhe der Schneide entsteht durch die Rotation des Zentrums des Primärwirbels. Das kleine lokale Minimum gehört zur Rotation des Sekundärwirbelzentrums. Die Interpolation der Entwicklung des Effektivwertes des Druckes in der Kopplungsregion ergibt ein Verhalten  $\sim -1/x^2$ . Für  $x > 30$  mm sind die Nichtlinearitäten abgeklungen.



**Abbildung 5.18.:** (a) Zeitlich gemittelte Profile des Druckes durch die Querschnitte cs1-cs5. (b) Die Punkte sind die zeitlich gemittelten und über den jeweiligen Querschnitt integrierten Drucksignale. Die rote Kurve interpoliert die Punkte und zeigt das Abklingen des durch die Strömung bedingten dynamischen Druckes von  $-110$  Pa auf den mittleren Schalldruck im Resonator von ca.  $-60$  Pa, was einem Schalldruckpegel von ca.  $130$  dB entspricht. Der Prozess verhält sich  $\sim -1/x^2$ .

Ursache für die Druckentwicklung innerhalb der Kopplungsregion cs1 - cs5 ist das Wechselspiel zwischen Jet, rotierenden Primär- und Sekundärwirbeln und dem Resonator. Dabei spielt der Primärwirbel die zentrale Rolle. Seine Rotationsstabilität und die Tatsache, dass sein Wirbelzentrum den Charakter eines Starrkörperwirbel hat, sorgt für einen permanenten Unterdruck im vorderen Teil des

Resonatorinnenraumes. Dieser wird nur kurzzeitig durch die auslaufenden Schallwellen überlagert. Aufgrund der Trägheit wird die Rotation des Wirbels jedoch nicht vom Schalldruck beeinflusst. Der Unterdruck des Primärwirbelzentrums bildet relativ zum Außendruck einen Druckgradienten der dafür sorgt, dass der durch den Schall ausgelenkte Jet wieder zurück in die Kopplungsregion schwingt. Durch das Abbremsen des Jets in der Kopplungsregion wird des Jet an der Luftsäule im Resonatorinnenraum gestaucht. Für den Massenstrom bedeutet dies eine Kompression. Daraus resultiert die akustische Druckschwankung, die an die Luftsäule weitergegeben wird. Der zurückströmende Massenstrom konstituiert den Primärwirbel. Reibung in den Scherschichten zwischen den Wirbeln und Reibung der Wirbel an den Randschichten zur Resonatorwand führen dazu, dass die Einströmgeschwindigkeit des Jets zusätzlich gebremst wird. In den Scherschichten wird turbulente kinetische Energie frei, welche dissipiert. Auf den großen Längenskalen verliert der Sekundärwirbel gegenüber dem Primärwirbel ca.  $1/6$  an Wirbelstärke. Im Film *vorticity\_mag.avi* erkennt man auch noch weitere, kleinere Wirbelstrukturen, auf die im Rahmen dieser Arbeit aber nicht näher eingegangen werden kann. Interessant wäre es, alle beobachteten Wirbelstrukturen zu vermessen daraus die Energiedissipation über die Wirbelkaskade nachzuzeichnen.

Der Druck am Querschnitt *cs1* setzt sich aus zwei Komponenten zusammen, dem dynamischen Druck, der durch die Strömung, insbesondere durch den Jet und den Primärwirbel, hervorgerufen wird und dem akustischen Anteil, also dem Schalldruck, der durch den Resonator bedingt ist. Wie erwähnt, wird in der Kopplungsregion *cs1 - cs5* ein Teil des dynamischen Druckes über die wechselwirkenden Wirbelstrukturen in Schalldruck überführt, wobei sich dieser Prozess offenbar  $\sim -1/x^2$  verhält.

Das Drucksignal durch den Querschnitt *cs5* besteht nur noch Schalldruck. Bei dem Schalldruck dominiert die Frequenz der 1. Harmonischen des Resonators, gerade jene Mode, die der Geometrie des Resonators entspricht. Aus dem Schalldruckpegelspektrum des Probenpunktes C im Resonatorinnenraum (vgl. Abschnitt 5.4.2) wissen wir, dass es natürlich auch die ungeradzahlig höheren Harmonischen gibt. Der Einfachheit halber betrachten wir aber hier nur die 1. Harmonische, auch wegen ihrer Dominanz.

## Diskussion

Man kann die Wechselwirkung in der Kopplungsregion als eine Art akustischen Stoßdämpfer verstehen. Durch die periodischen Auslenkungen des Jets gelangt ein periodischer Massenstrom in die Kopplungsregion (vgl. Filme *k\_log\_jet.avi*, *v\_mag.avi*). Dieser trifft auf die vergleichsweise als ruhend anzusehende Luftsäule im Resonator. Dabei wird der Massenstrom abgebremst und gestaucht, wobei er eine Richtungsänderung erfährt. Die Stauchung, aufgrund der Kompressibilität des Mediums, initiiert eine akustische Druckschwankung in der Luftsäule, welche sich mit Schallgeschwindigkeit zum oberen Ende des Resonators fortpflanzt, dort reflektiert wird und sich wieder zurück in Richtung Jet bewegt. Das Abbremsen des Massenstroms geschieht durch Reibung an den Rand- und Scherschichten in der Kopplungsregion. Die Richtungsänderung mündet in der Ausbildung des Primärwirbels. Die genannten Mechanismen stellen einen Impulsübertrag an die Luftsäule im Resonator dar. Der Impuls des einströmenden Jets wird dabei aufgespalten, in einen fluiddynamischen Anteil und in einen neuen, vergleichsweise kleinen, akustischen Anteil.

Aufgrund der Massenerhaltung im Resonator muss der einströmende Massenstrom auch wieder entweichen können. Dies geschieht dadurch, dass der Jet nach außen gedrückt wird und der Massenstrom in den Aufschnitt entweichen kann. Dies geschieht durch kleine, periodische Translationsbewegungen des Primärwirbels in  $\pm x$ -Richtung. Verursacht werden diese Translationen durch die Schallwellen, die am oberen Ende des Resonators reflektieren und zurück wandern. Dabei werden die Laufzeiten der Druckschwankungen und damit die Frequenz der Schallwellen durch die Länge des Resonators bestimmt. Die Translationsbewegung ist die Schallschnelle des Schallsignals des Resonators. Die Frequenz des Schallsignals bestimmt die Frequenz der Translationsbewegung. Die Amplitude der Schallschnelle bestimmt die Stärke der Translation des Primärwirbels. Frequenz und Amplitude der Schallschnelle bestimmen somit die Auslenkung des Jets in den Außenraum. Bei der Auslenkung des Jets nach außen, entweicht das komprimierte Medium aus dem Resonator. Dabei werden beide Anteile des Massenstroms emit-

tiert, der akustische Anteil in Form von Schallschnelle und der fluiddynamische Anteil in Form von Wirbeln.

Die Wirbel bilden eine Wirbelstraße entlang des Oberlabiums (vgl. Filme *p.avi*, *p\_contour\_jet.avi*, *k\_log\_jet.avi*). Bei realen Orgelpfeifen ist die Wirbelstraße deutlich als Wind wahrnehmbar. Der Unterdruck des rotierenden Primärwirbels lässt den Jet wieder zurückschwingen, bis er die Schneide quert und der Einströmvorgang aufs Neue beginnt. Die Auslenkbewegungen des Jets werden zusätzlich durch den schwingenden akustischen Dipol an der Schneide beeinflusst. Aufgrund der Freistrahls-Charakteristik des Jets unterliegen alle zur Auslenkung des Jets führenden Störgrößen gewissen Wachstumsraten, die hier zu einem einzigen Wachstumsparameter  $\mu$  zusammengefasst werden.

Dies stellt sicherlich eine starke Vereinfachung der wirklichen Situation dar. In realen Orgelpfeifen ist  $\mu$  eine Funktion, die sich aus den Wachstumsraten der besprochenen Einzelprozesse zusammensetzt und von der Propagationslänge und der Anfangsgeschwindigkeit des Jets anhängt. Der Wachstumsparameter  $\mu$  kann positiv oder negativ sein. Entsprechend können die Störungen des Jets anfachend bzw. dämpfend wirken. Wir rechtfertigen die Näherung von  $\mu$  mit den beobachteten periodischen Auslenkungen des Jets nach seiner Einschwingphase. Offenbar findet in der Einschwingphase eine Abstimmung der Phasenbeziehungen der Einzelprozesse in der Orgelpfeife statt, die zu einer Balance zwischen Anfachung und Dämpfung der Auslenkbewegungen des Jets und somit zu einer Sättigung der Auslenkbewegungen führt. Im zeitlichen Mittel stellt sich so ein Wachstumsparameter ein, der nur noch unwesentlich schwankt. Im Abschnitt 5.6 werden die Phasenbeziehungen des Druckes und der Geschwindigkeitskomponenten durch die Querschnitte  $cs_0$  und  $cs_1$  besprochen. Die genaue Untersuchung dieses Abstimmungsprozesses würde jedoch weit über den Rahmen dieser Arbeit hinausgehen.

Wir fassen die gewonnenen Mechanismen in der Kopplungsregion und die mit Ihnen verknüpften Einzelprozesse noch einmal zusammen:

- Einströmen des Jets in die Kopplungsregion; Initiierung, Anfachung
- Stauchung, Abbremsung des Massenstroms; Aufspaltung des Impulses in akustischen und fluiddynamischen Anteil
- Umlenkung des Massenstroms; Ausbildung des Primärwirbels
- Propagation der akustischen Druckschwankung (Schallwelle) durch den Resonator; Auswahl bestimmter akustischen Moden aus dem Rauschspektrum des Jets
- Translationsbewegung des Primärwirbels durch die Schallwelle;
- Herausdrücken des komprimierten Massenstroms aus dem Resonator; Auslenkung des Jets in den Außenraum
- Entweichen beider Anteile (akust.+fluiddyn.) des Massenstroms; Wirbelstraße entlang des Oberlabiums und Abstrahlung von Schall in den Außenraum
- Unterdruck des rotierenden Primärwirbels (und Außendruck); Auslenkung des Jets zurück in die Kopplungsregion.
- Dipol + Freistrahls-Charakteristik des Jets; Anfachung bzw. Dämpfung der Auslenkungen mit Wachstumsparameter

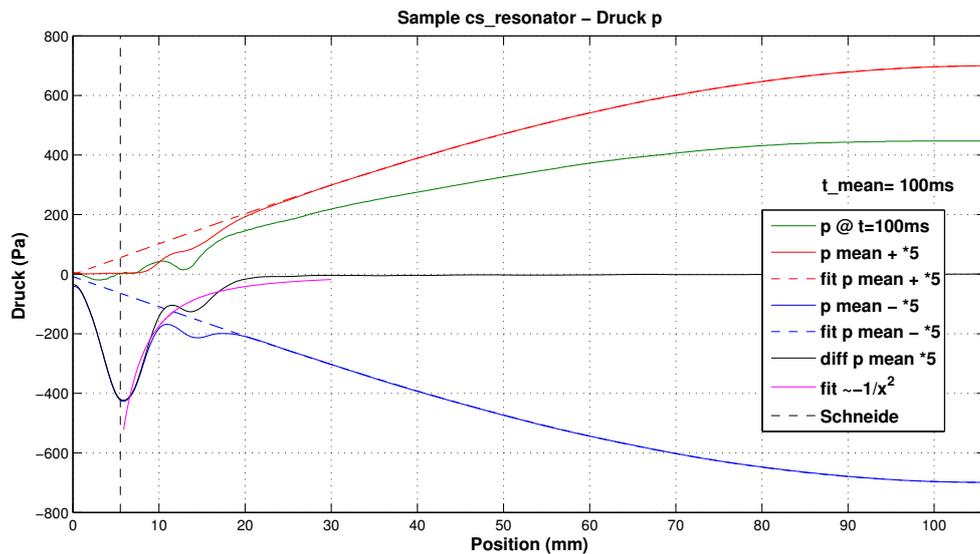
### 5.3. Der Resonator - Sample $cs$ resonator

Der Resonator ist ein passives akustisches Element. Der Resonator wählt aus dem einströmenden Rauschspektrum des Jets diejenigen akustischen Moden aus, die der Geometrie des Resonators entsprechen. Dies geschieht über die Laufzeit der Druckschwankung im Resonator. Die wiederum ist durch die Schallgeschwindigkeit des Mediums und die Länge des Resonators festgelegt. Die Ausbreitung der Schallwellen im Resonator unterliegt gewissen Verlusten, wie Reibungseffekte an den Randschichten, thermische Verluste u.a.. Diese Verluste fasst man unter den Begriff akustische Flussimpedanz, oder

einfach nur Impedanz  $Z$  zusammen (siehe Gl. 2.132). Qualitativ kann man die Verluste schon in den Abb. 5.6a und 5.6b erkennen, wo die initiale Druckschwankung während ihrer Propagation in den Resonator dispergiert. Um das Verhalten des Resonators zu analysieren wurde der Querschnitt  $cs_{resonator}$  definiert, der den Resonatorinnenraum in seiner ganzen Länge ( $x = 106\text{ mm}$ ) und auf halber Resonatorbreite ( $y = 4.5\text{ mm}$ ) schneidet. Nähere Informationen zur Lage des Querschnittes finden sich im Anhang A.5 und C.17. Die Filme  $cs_{resonator}_*.avi$  auf dem der Arbeit beigelegten Datenträger veranschaulichen in die Dynamik im Resonator.

## Druck

In Abb. 5.19 ist das Verhalten des Druckes durch den Querschnitt  $cs_{resonator}$  gezeigt. Die grüne Kurve stellt das Drucksignal im Resonator relativ zum abgestrahlten Schalldrucksignal dar. Diese Darstellung ermöglicht den direkten Vergleich des Schalldrucksignals im simulierten Resonator mit dem Verhalten in einem idealen Helmholtz-Resonator. Die rote und die blaue Kurve zeigen die zeitlich gemittelten Über- und Unterdrücke im Resonator, relativ zum abgestrahlten Schalldruck. Sie bilden die Einhüllende des Drucksignals im Resonator. Man erkennt die sich im Resonator ausbildende, stehende Welle des Druckes mit der für gedackte Pfeifen typischen  $1/4$  Wellenlänge der 1. Harmonischen und dem Wellenbauch am geschlossenen Ende des Resonators. Die zeitliche Mittelung erfolgt über die gesamte Simulationszeit  $t = 100\text{ ms}$ .



**Abbildung 5.19.:** Druckverteilung im Resonator. Die grüne Kurve zeigt das, relativ zum abgestrahlten Schalldrucksignal, im Resonator schwingende Drucksignal zum Zeitpunkt  $t = 100\text{ ms}$ . Die rote Kurve stellt die räumliche Verteilung des über die Simulationszeit  $t_s = 100\text{ ms}$  gemittelten Überdruckes im Resonator relativ zum Abstrahlsignal aus dem Aufschnitt ( $cs_0$ ) dar, 5-fach überhöht. Die blaue Kurve zeigt die räumliche Verteilung des entsprechenden zeitlich gemittelten Unterdruckes im Resonator relativ zum Abstrahlsignal aus dem Aufschnitt, ebenfalls 5-fach überhöht. Jeweils gestrichelt sind die idealen Einhüllenden eines halboffenen Helmholtz-Resonators derselben Geometrie dargestellt. Die schwarze Kurve ist die Differenz aus roter und blauer Kurve, also der zeitlich gemittelte Effektivwert der nichtlinearen Anteile des Druckes im Resonator. Nur im vorderen Teil des Resonators, dort wo sich Primär- und Sekundärwirbel herausbilden, weicht das Verhalten des Resonators der linearen Theorie ab. Der Effektivwert im Bereich des Primär- und Sekundärwirbels verhält sich  $\sim -1/x^2$ .

Lediglich im Bereich des Aufschnittes und in der Kopplungsregion, also dort, wo Primär- und Sekundärwirbel agieren, treten Abweichungen zur linearen Wellentheorie (gestrichelte Kurven) auf. Die Wirbel erzeugen im zeitlichen Mittel stationäre Unterdruckregionen. In dieser Region findet die Kopplung

des Strömungsfeldes an das akustische Feld im Resonatorinnenraum statt. Die Kopplung ist bidirektional, weil das Schallfeld im Resonator auch auf das Strömungsfeld des Jets zurückwirkt, und zwar mit Zeitverzögerung, der Laufzeit des Schallsignals im Resonator (vgl. 5.2).

Die schwarze Kurve zeigt die Differenz der zeitlich gemittelten Über- und Unterdrücke im Resonator, relativ zum abgestrahlten Schalldruck. Dies ist der zeitlich gemittelte Effektivwert von  $p$ . er beschreibt die nichtlinearen Anteile des Drucksignals im Resonator. Man erkennt, dass die Nichtlinearitäten des Druckes im Wesentlichen durch den Primär- und Sekundärwirbel bedingt sind. Außerdem ist zu sehen, dass bei der Kopplung an das akustische Feld der Effektivwert des Druckes in Gestalt des Unterdruckes des Primärwirbels  $\sim -1/x^2$  auf den Wert  $p = 0$  Pa im Resonator ansteigt (vgl. 5.2). Der Betrag des Effektivwertes  $|p|$  klingt  $\sim 1/x^2$ . Bis auf den vorderen Teil des Resonators  $0 \text{ mm} < x < 20 \text{ mm}$ , der Kopplungsregion, verhält sich der Druck im Resonator also wie in einem Helmholtz-Resonator und kann mit Mitteln der linearen Wellentheorie beschrieben werden. Auf dem der Arbeit beiliegenden elektronischen Datenträger ist das Verhalten des Druckes im Resonator als Film zu sehen.

### Geschwindigkeitskomponenten in x- und y-Richtung

Die Abb. 5.20 zeigt die Ergebnisse der Analyse für die Geschwindigkeitskomponente  $v_x$  im Resonator. Mit grün ist exemplarisch das Signal zur Zeit  $t = 50 \text{ ms}$  dargestellt. Die rote Kurve zeigt die positiven, d.h. die in den Resonator hineinlaufenden zeitgemittelten Anteile, die blaue Kurve, die negativen, also die in Richtung Aufschnitt laufenden zeitgemittelten Anteile von  $v_x$ . Die Anteile von  $v_x$  ab der Resonatorlänge  $x > 30 \text{ mm}$  identifizieren wir als die Schallschnelle im Resonator. In den Filmen von  $v_x$  durch den Querschnitt  $cs\_resonator$  ist die Entwicklung von  $v_x$  im Resonator während der Simulation gezeigt. Man erkennt hier deutlich das Schwingen mit der Frequenz der 1. Harmonischen. Im Bereich der Wirbel im vorderen Teil des Resonators gibt es Abweichungen von der linearen Wellentheorie. Hier findet gleichzeitig Strömungsdynamik und Akustik statt (vgl. 5.2). Am geschlossenen Resonatorende befindet sich der Knoten der Schallschnelle.

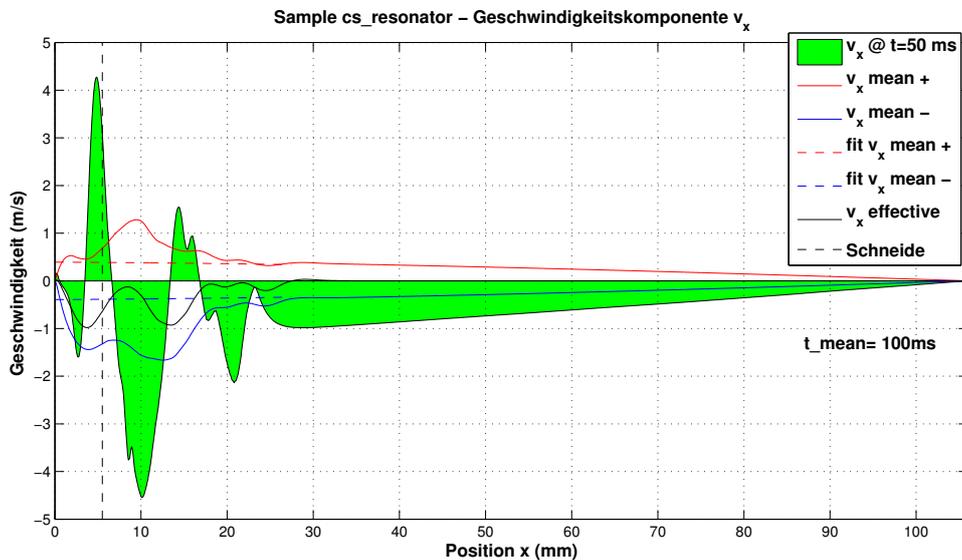


Abbildung 5.20.: Verhalten des Signals der Geschwindigkeitskomponente  $v_x$  im Resonator.

In Abb. 5.21 ist die Analyse für die  $y$ -Komponente der Geschwindigkeit im Resonator gezeigt. Exemplarisch ist das Signal von  $v_y$  zur Zeit  $t = 100 \text{ ms}$  mit gelb dargestellt. Die rote bzw. die blaue Kurve zeigt wieder die positiven resp. negativen Anteile der zeitlich gemittelten Werte von  $v_y$ . Die schwarze Kurve kennzeichnet die Differenz der roten und der blauen Kurve, also den Effektivwert von  $v_y$ , die nichtlinearen Anteile von  $v_y$ . Die Kopplungsregion  $0 \text{ mm} < x < 30 \text{ mm}$  wurde bereits in Abschnitt 5.2

analysiert. Im übrigen Teil des Resonators verschwinden sowohl die zeitgemittelten Anteile als auch der Effektivwert von  $v_y$ . Das heißt es gibt keine erkennbaren Quermoden im Resonator. Das Verhalten von  $v_y$  im Resonator ist in den Filmen von  $v_x$  durch den Querschnitt *cs resonator* veranschaulicht.

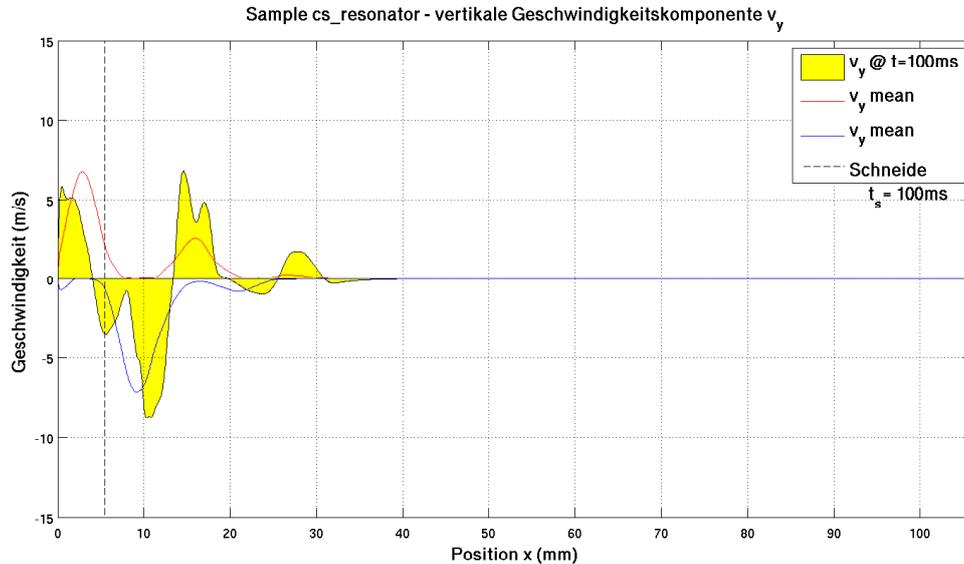


Abbildung 5.21.: Verhalten des Signals der Geschwindigkeitskomponente  $v_y$  im Resonator.

## Diskussion

Der Resonator ist ein Gebiet, welches die Kopplungsregion mit einschließt. Der Resonatorinnenraum (ohne die Kopplungsregion) zeigt das Verhalten eines Helmholtz-Resonators. Die Schallschnelle wird mit den, nach der Kopplung übrig bleibenden, positiven und negativen Anteilen von  $v_x$  identifiziert. Es gibt keine erkennbaren Quermoden im Resonatorinnenraum. Schalldruck und Schallschnelle verhalten sich im Resonatorinnenraum im Wesentlichen wie durch die lineare Wellentheorie beschrieben. Die Nichtlinearitäten des Resonators beschränken sich auf den vorderen Teil, nämlich auf die Kopplungsregion und die Region des Generators, welche im akustischen Wortgebrauch ebenfalls zum Resonator hinzu zuzählen sind. Es sei daran erinnert, dass unsere, abweichende Unterteilung durch die Identifikation der wirkenden Mechanismen motiviert ist. Natürlich hat auch die Kopplungsregion Resonatoreigenschaften, ebenso wie die Region des Generators.

Aufgrund seiner Abmessungen wählt der Resonator aus dem einströmenden Rauschspektrum des Jets nur bestimmte akustische Moden aus. Bei der gedachten Orgelpfeife sind dies im Wesentlichen die ungeradzahigen Harmonischen.

## 5.4. Der Außenraum - Abstrahlung

Der Außenraum ist die letzte Teilregion, die wir betrachten. Hier liegt der Fokus auf dem Abstrahlverhalten der Orgelpfeife. Dafür werden die während der Simulation erzeugten Daten der Probenpunkte analysiert. Dabei werden die Druck-Signale und die korrespondierenden Pegelspektren näher betrachtet. Nähere Informationen zur Lage der Probenpunkte im Rechengitter sind im Anhang A.1 zu finden. Die Koordinaten sind in Tabelle A.1 zusammengetragen.

Für die Analyse des Außenraumes werden nur die Probenpunkte A, B und D-G, benötigt. Der Probenpunkt C liegt im Resonatorinnenraum und geht daher nicht mit in die Analyse ein, wird aber hier, der Vollständigkeit halber, mit besprochen.

Probenpunkt	A	B	C	D	E	F	G
x (mm)	2.75	4.75	96.00	2.75	2.75	2.75	96.00
y (mm)	9.20	9.20	4.50	16.50	45.00	90.00	90.00

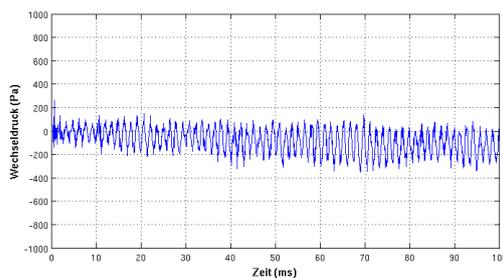
**Tabelle 5.3.:** Positionen der Probenpunkte A bis G relativ zum Koordinatenursprung.

### 5.4.1. Probenpunkte A, B

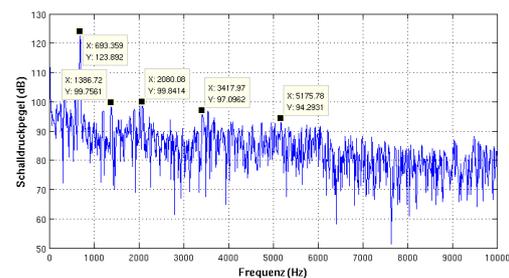
Der Probenpunkt A befindet sich in der Symmetrieachse des Jets auf der halben Länge zum Oberlabium. In Abb. 5.22a ist der Wechseldruck im Probenpunkt A dargestellt. Man erkennt deutlich ein periodisches Signal, welches mit einem gewissen Rauschen überlagert ist. Für das Rauschen ist der Jet verantwortlich. Die mittlere Amplitude beträgt ca.  $|\bar{p}| = 145$  Pa. Im Schalldruckpegelspektrum in Abb. 5.22b ist die Fundamentalschwingung (1.Harmonische) bei  $f = 693$  Hz mit einem Pegel von 124 dB gut zu erkennen. Weitere, schwächere Peaks befinden sich bei 1381 Hz, 2080 Hz, 3418 Hz und bei 5176 Hz, welche als 2., 3., 5. und 7.Harmonische identifiziert werden. Ab etwa 4000 Hz dominiert das Rauschen des Jets. Das Auftreten der 2. Harmonischen ist insofern interessant, weil bei einem oben geschlossenen Resonator theoretisch nur ungeradzahlige Harmonische auftreten sollten. Orgelbauer kennen aber das Phänomen, dass auch die geradzahligen Harmonischen vorhanden sind, allerdings in schwacher Ausprägung. Das erkennt man auch hier. Bei 1381 Hz und bei 2705 Hz befinden sich die 2. und die 4. Harmonische in schwacher Ausprägung. Die Ursache für das Auftreten der 2. Harmonischen ist der schwingende Dipol an der Schneide des Oberlabiums, vgl. Abschnitt 5.1.3. Die Abweichungen der Werte der Harmonischen in der betrachteten Simulation zu den theoretischen Werten liegen meist unter 5%. Das ist ein erfreuliches Ergebnis. Es zeigt, dass es möglich ist, trotz der Beschränkung auf eine 2D-Simulation, das Verhalten einer Orgelpfeife gut bis sehr gut abzubilden. In der Tabelle 5.4 sind die Werte der gefundenen Harmonischen im Probenpunkt A zusammengestellt.

Probenpunkt A	1.H.	3.H.	5.H.	7.H.
Frequenz $f$	693 Hz	2080 Hz	3418 Hz	5176
Abweichung	-4%	-4%	-5%	+3%
Schalldruckpegel	124 dB	100 dB	97 dB	94 dB

**Tabelle 5.4.:** Der Wechseldruck am Probenpunkt A. Frequenzen und Schalldruckpegel der Harmonischen. In der zweiten Zeile sind die Abweichungen Frequenzwerte der Harmonischen aus der Simulation bezüglich der theoretischen Werte der Harmonischen angegeben.



(a) Signal, Probe A



(b) Schalldruckpegel (SPL), Probe A

**Abbildung 5.22.:** Der Wechseldruck am Probenpunkt A. (a) Das Signal ist periodisch mit überlagertem Rauschen des Jets. (b) Das Schalldruckpegelspektrum lässt deutlich den Peak der Fundamentalschwingung (1.Harmonische) bei 693 Hz erkennen. Die 3., 5. und 7. Harmonische sind schwach ausgeprägt. Weitere Harmonische gehen im Rauschen des Jets unter. Interessanterweise ist eine 2. Harmonische bei etwa 1381 Hz mit 100 dB sichtbar.

Der Probenpunkt B befindet sich, wie der Probenpunkt A, in der Symmetrieachse des Jets, jedoch unmittelbar vor dem Oberlabium. Das Schalldruckpegelspektrum unterscheidet sich nur wenig von

dem des Probenpunktes A. Lediglich die 2. Harmonische bei 1387 Hz ist mit 104 dB stärker ausgeprägt. Die Abweichungen zu den theoretischen Werten der Harmonischen liegen im Mittel unter 5%. Die Werte der ungeradzahigen Harmonischen im Probenpunkt B sind in Tabelle 5.5 zusammenfassend dargestellt.

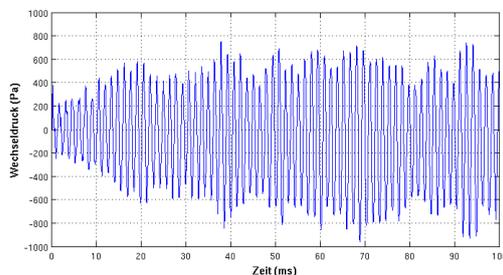
Probenpunkt B	1.H.	3.H.	5.H.	7.H.
Frequenz $f$	693 Hz	2031 Hz	3428 Hz	4912 Hz
Abweichung	-4%	-6%	-5%	+3%
Schalldruckpegel	124 dB	103 dB	97 dB	90 dB

**Tabelle 5.5.:** Der Wechseldruck am Probenpunkt B. Frequenzen und Schalldruckpegel der Harmonischen. In der zweiten Zeile sind wieder die Abweichungen Frequenzwerte der Harmonischen aus der Simulation bezüglich der theoretischen Werte der Harmonischen angegeben.

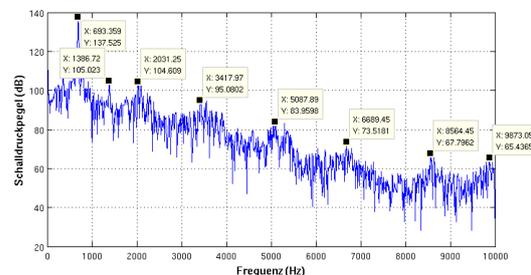
### 5.4.2. Probenpunkt C

Der Probenpunkt C befindet sich im Inneren des Resonators der Orgelpfeife, etwa 10 mm vor dem geschlossenen Ende der Pfeife. Deshalb geht er in die Analyse des Abstrahlverhaltens der Orgelpfeife nicht mit ein. Der Vollständigkeit halber sei er dennoch hier genannt und dessen Analyse vorgestellt. Die Abbildungen 5.23a und 5.23b zeigen das Signal und den Schalldruckpegel. Der Schalldruckpegel ist mit 138 dB wesentlich höher als im Bereich des Jets. Die Amplituden des Wechseldruckes liegen im Mittel bei 563 Pa und sind damit etwa 4-mal höher als innerhalb des Jets. Außerdem sind hier die höheren Harmonischen bis zur 13. deutlich sichtbar. Das heißt, es gibt hier kein Rauschen des Jets mehr, das die Harmonischen maskiert.

In Tabelle 5.6 sind die Werte der ungeradzahigen Harmonischen zusammengefasst. Auch hier ist die Genauigkeit zur Theorie bemerkenswert. Trotz unseres 2D-Modells liegen die Abweichungen im Mittel unter 5%.



(a) Signal, Probe C



(b) Schalldruckpegel (SPL), Probe C

**Abbildung 5.23.:** Der Wechseldruck am Probenpunkt C. (a) Die Amplituden des Wechseldruckes sind etwa 4-mal höher als in den Probenpunkten A und B. Im Resonator kommt es also zu einer Verstärkung des Signals. Außerdem erkennt man, dass das Signal sehr viel glatter ist. Das Rauschen des Jets ist hier nicht mehr zu sehen. (b) Der Schalldruckpegel der 1. Harmonischen ist mit 138 dB wesentlich höher als in den Probenpunkten A und B. Deutlich sind die Peaks bis hin zur 13. Harmonischen zu erkennen. Auch die 2. Harmonische ist sichtbar.

### 5.4.3. Probenpunkte D-G

Die Probenpunkte D - G liegen im Außenraum. Die Analyse der Schalldruckpegelspektren erfolgte in Analogie zu den bisher besprochenen Probenpunkten. Die Werte der jeweiligen Harmonischen sind in den Tabellen 5.7 - 5.10 zusammengetragen.

Probenpunkt C	1.H.	3.H.	5.H.	7.H.	9.H.	11.H.	13.H.
Frequenz $f$	693 Hz	2031 Hz	3418 Hz	5088 Hz	6689 Hz	8564 Hz	9873 Hz
Abweichung	-4%	-6%	-5%	+1%	+3%	+8%	+5%
Schalldruckpegel	138 dB	105 dB	95 dB	84 dB	74 dB	68 dB	65 dB

**Tabelle 5.6.:** Der Wechseldruck am Probenpunkt C. Frequenzen und Schalldruckpegel der Harmonischen. In der zweiten Zeile stehen die Abweichungen der Frequenzwerte der Harmonischen aus der Simulation bezüglich der theoretischen Werte der Harmonischen angegeben.

Probenpunkt D	1.H.	3.H.	5.H.	7.H.	9.H.	11.H.	13.H.
Frequenz $f$	693 Hz	2090 Hz	3555 Hz	5088 Hz	6123 Hz	7588 Hz	9062 Hz
Abweichung	-4%	-3%	-1%	+1%	+4%	-4%	-3%
Schalldruckpegel	119 dB	94 dB	86 dB	80 dB	77 dB	76 dB	76 dB

**Tabelle 5.7.:** Der Wechseldruck am Probenpunkt D. Frequenzen und Schalldruckpegel der Harmonischen. In der zweiten Zeile stehen die Abweichungen der Frequenzwerte der Harmonischen aus der Simulation bezüglich der theoretischen Werte der Harmonischen angegeben.

Probenpunkt E	1.H.	3.H.	5.H.	7.H.	9.H.	11.H.	13.H.
Frequenz $f$	693 Hz	2031 Hz	3555 Hz	5088 Hz	6455 Hz	8008 Hz	–
Abweichung	-4%	-6%	-1%	+1%	0%	+1%	–
Schalldruckpegel	111 dB	87 dB	82 dB	73 dB	73 dB	70 dB	–

**Tabelle 5.8.:** Der Wechseldruck am Probenpunkt E. Frequenzen und Schalldruckpegel der Harmonischen. In der zweiten Zeile stehen die Abweichungen der Frequenzwerte der Harmonischen aus der Simulation bezüglich der theoretischen Werte der Harmonischen angegeben.

Probenpunkt F	1.H.	3.H.	5.H.	7.H.	9.H.	11.H.	13.H.
Frequenz $f$	693 Hz	2080 Hz	3555 Hz	5303 Hz	6035 Hz	8593 Hz	9424 Hz
Abweichung	-4%	-4%	-1%	+5%	-7%	+8%	+1%
Schalldruckpegel	108 dB	85 dB	76 dB	76 dB	69 dB	64 dB	63 dB

**Tabelle 5.9.:** Der Wechseldruck am Probenpunkt F. Frequenzen und Schalldruckpegel der Harmonischen. In der zweiten Zeile stehen die Abweichungen der Frequenzwerte der Harmonischen aus der Simulation bezüglich der theoretischen Werte der Harmonischen angegeben.

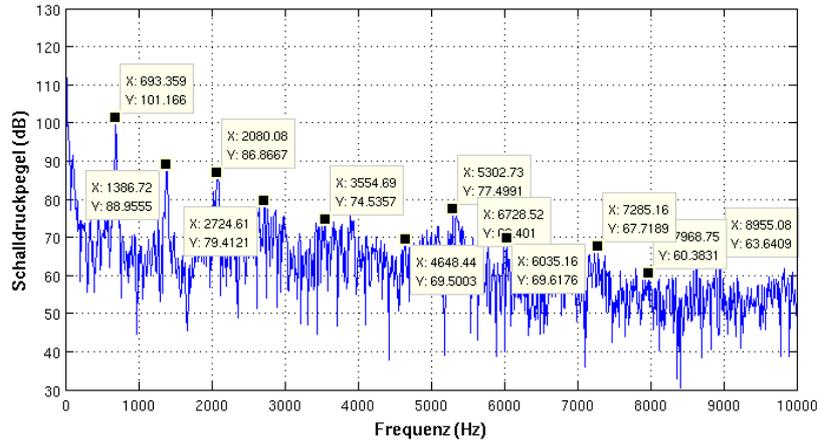
Probenpunkt G	1.H.	3.H.	5.H.	7.H.	9.H.	11.H.	13.H.
Frequenz $f$	693 Hz	2080 Hz	3555 Hz	5303 Hz	6729 Hz	7968 Hz	8955 Hz
Abweichung	-4%	-4%	-1%	+5%	+4%	0%	-4%
Schalldruckpegel	101 dB	87 dB	75 dB	77 dB	66 dB	60 dB	64 dB

**Tabelle 5.10.:** Der Wechseldruck am Probenpunkt G. Frequenzen und Schalldruckpegel der ungeradzahli- gen Harmonischen.

Probenpunkt G	2.H.	4.H.	6.H.	8.H.	10.H.
Frequenz $f$	1387 Hz	2725 Hz	4648 Hz	6035 Hz	7285 Hz
Abweichung	-4%	-5%	+8%	+5%	+1%
Schalldruckpegel	89 dB	79 dB	69 dB	70 dB	68 dB

**Tabelle 5.11.:** Wechseldruck am Probenpunkt G. Die Tabelle fasst alle erkennbaren geradzahli- gen Harmonischen noch einmal zusammen.

Abbildung 5.24a zeigt das Schalldruckpegelspektrum des Probenpunktes G.



(a) Schalldruckpegel (SPL), Probe G

Abbildung 5.24.: Der Wechseldruck am Probenpunkt G. Im Schalldruckpegelspektrum sind Eigenmoden bis zur 13. Harmonischen gut zu identifizieren. Die geradzahigen Harmonischen sind ebenfalls zu erkennen.

## Diskussion

Aus den Druck-Signalen an den Probenpunkten können folgende Ergebnisse abgelesen werden. Zum einen findet man im Bereich des Jets (Probenpunkte A und B) eine ausgeprägte 1. Harmonische. Die 3. und 5. Harmonischen sind deutlich schwächer ausgebildet. Weitere Harmonische gehen im Rauschen des Jets unter. Es ist eine 2. Harmonische sichtbar. Im Resonator ist der Schalldruckpegel der 1. Harmonischen mit 138 dB wesentlich höher als innerhalb des Jets. Im Resonator wird das Schallsignal um den Faktor 4 verstärkt. Außerdem wählt der Resonator aus dem Rausch-Spektrum des Jets, genau diejenigen Frequenzen aus, die die Eigenmoden seiner Geometrie darstellen. Außerhalb der Orgelpfeife klingen die Amplituden des Signals mit wachsendem Abstand ab. Wie das Abklingverhalten ist, wird im folgenden Abschnitt untersucht.

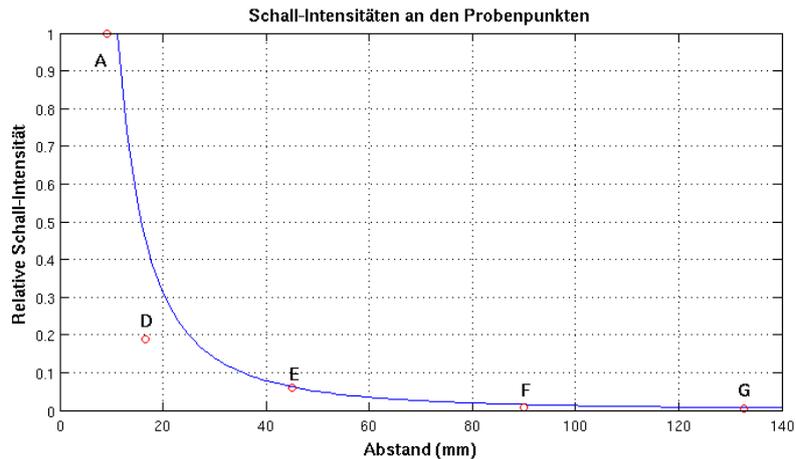
### 5.4.4. Schall-Intensitäten an den Probenpunkten

Um das Abklingverhalten zu untersuchen, bildet man aus den Schalldrücken und der Schallschnelle die Schall-Intensitäten  $I(r)$  für die jeweiligen Probenpunkte (vgl. 2.3). Für einen akustischen Punktstrahler gilt

$$I(r) \propto \frac{1}{r^2} \quad (5.25)$$

Die Abbildung 5.25 zeigt die relativen Schall-Intensitäten an den Probenpunkten A, D, E, F und G. Als blaue Kurve ist im Vergleich das Abstrahlverhalten eines akustischen Punktstrahlers dargestellt, welches sich  $\sim 1/x^2$ , also umgekehrt proportional zum Quadrat des Abstandes verhält.

Für die Probenpunkte E, F und G ist das Gesetz sehr gut erfüllt. Im Bereich des Jets (A) und des Aufschnittes (D) liegen die Intensitäten unter den theoretischen Werten. Die Vorstellung einer akustischen Punktquelle kann hier nicht mehr aufrecht erhalten werden. Wie wir bereits wissen, ist die eigentliche Schallquelle ein ausgedehntes Gebiet, in dem der Jet agiert und die wir als Generator beschrieben haben.

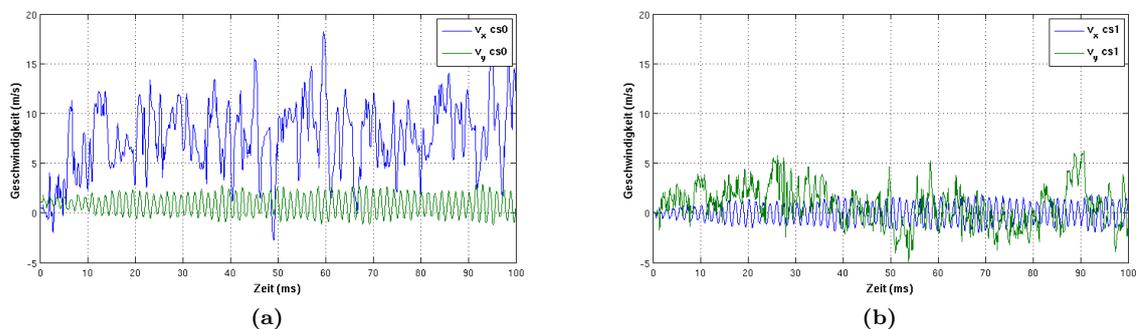


**Abbildung 5.25.:** Die relativen Schall-Intensitäten  $I$  an den Probenpunkten A, D, E, F und G. Als blaue Kurve ist das Abstrahlverhalten einer akustischen Punktquelle  $I(r) \sim 1/r^2$  dargestellt. Die Punkte E, F und G zeigen eine gute Übereinstimmung mit dem Abstrahlverhalten. Die Punkte A und D zeigen Abweichungen von der Theorie.

## 5.5. Einfluss der geometrischen Randbedingungen auf die Tonentstehung in der Orgelpfeife

Es wurde gezeigt, dass die Schallschnelle im Resonator die  $v_x$ -Komponente der Geschwindigkeit darstellt. Bei der Analyse des Aufschnittes  $cs0$  hatten wir gesehen, dass der Träger der Schallschnelle die  $v_y$ -Komponente ist. Das bedeutet, dass das Schallsignal auf dem Weg in den Außenraum eine Richtungsänderung um  $90^\circ$  erfahren muss. Die Richtungsänderung des Schallsignals ist der Geometrie der Orgelpfeife in der Region des Generators geschuldet. Der Aufschnitt der Orgelpfeife steht orthogonal zum Pfeifenquerschnitt (vgl. 2.1). Daher wird alles, was in den Pfeifenkorpus gelangt, beim Wiederaustritt aus der Pfeife am Pfeifenboden in Richtung Aufschnitt umgelenkt. Dabei kommt es bei zu einer Art Rollentausch der vektoriiellen physikalischen Größen.

Um das zu zeigen, vergleicht man die Komponenten der Geschwindigkeit  $v_x$  und  $v_y$  durch die Querschnitte  $cs1$  der Kopplungsregion und durch  $cs0$ , den Aufschnitt. In den Abbildungen 5.26a und 5.26b sind mit blau die jeweiligen  $x$ -Komponenten, mit grün die  $y$ -Komponenten dargestellt. Deutlich ist zu erkennen, dass die Komponenten der beiden Querschnitte ihre Rollen tauschen. Die Amplitude der Schallschnelle bleibt dabei in der gleichen Größenordnung.



**Abbildung 5.26.:** (a) Geschwindigkeitssignale  $v_x$  und  $v_y$  durch den Querschnitt  $cs0$ . Im direkten Vergleich mit den Signalen  $v_x$  und  $v_y$  durch den Querschnitt  $cs1$  (b) erkennt man, dass die Komponenten der Geschwindigkeit die Rollen tauschen.

Die zur Schallschnelle orthogonalen Geschwindigkeitsanteile bleiben einander auch ähnlich, nach dem Rollentausch. Nur die Absolutwerte ihrer Amplituden sind deutlich verschieden. Das heißt, während die Schallschnelle eine Drehung um  $90^\circ$  erfährt, wird der fluiddynamische Anteil des Massenstroms im Primärwirbel fast um  $180^\circ$  in die Hauptströmungsrichtung des Jets gedreht. Die vertikalen Auslenkungen des Jets beruhen demnach fast ausschließlich auf der Wirkung der Schallschnelle, während der Massenstrom im Primärwirbel passiv folgt und in Hauptströmungsrichtung des Jets entweicht.

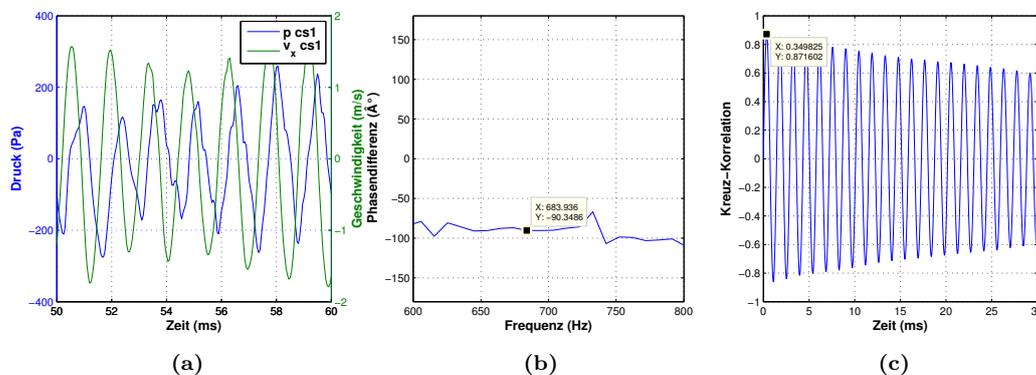
Die geometrischen Randbedingungen des Generators haben noch weitere Einflüsse auf die Schallabstrahlung. Der Pfeifenboden und die hintere Resonatorwand stellen eine natürliche schallharte Begrenzung dar. Erst durch diese Begrenzung kommt es überhaupt zur Rotation des Massenstroms und zur Ausbildung des Primärwirbels. Das Entweichen des Massenstroms in nahezu  $x$ -Richtung ist die Ursache für die Ausbildung der Wirbelstraße entlang des Oberlabiums.

Man kann den Jet als eine weitere, temporäre Begrenzung für den Primärwirbel ansehen, als eine Art Klappe, die durch die Schallschnelle geöffnet und durch den Unterdruck des rotierenden Primärwirbelzentrums wieder geschlossen wird.

Die Einflüsse der Abmessungen des Aufschnittes können im Rahmen dieser Arbeit nicht diskutiert werden, stellen aber schon allein wegen der sich ändernden Propagationslänge des Jets einen weiteren wesentlichen Einflussfaktor auf die Tonentstehung und die Schallabstrahlung der Orgelpfeife dar.

## 5.6. Phasenbeziehungen in der Orgelpfeife

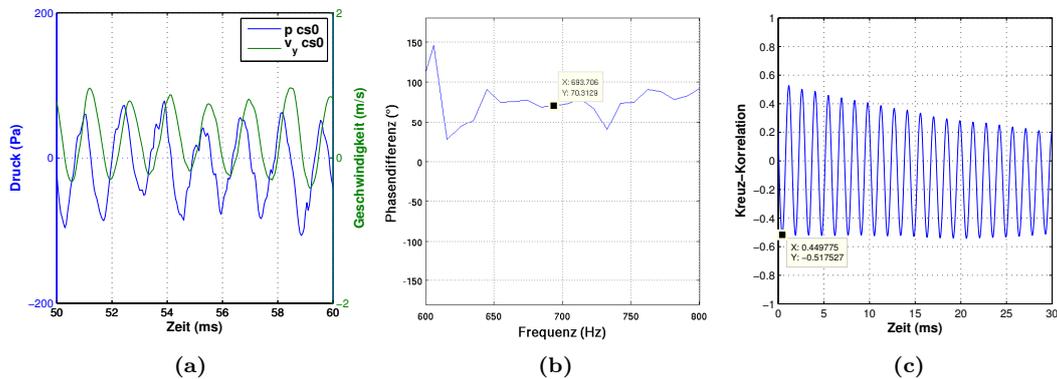
Um Aussagen über die Phasen der für den Schall relevanten physikalischen Größen zu machen, werden die Phasenspektren der jeweiligen Signale betrachtet. Mit Hilfe der Kreuz-Korrelation lässt sich die Zeitverzögerung der Signale zueinander ermitteln. In diesem Abschnitt werden die Phasenbeziehungen des Druckes und der Geschwindigkeitssignale durch die Querschnitt des Aufschnittes  $cs0$  und dem Beginn der Kopplungsregion  $cs1$  zwischen Generator und Resonator betrachtet.



**Abbildung 5.27.:** (a) Detailsansicht der über den Querschnitt  $cs1$  integrierten Größen Schalldruck und Schallschnelle. (b) Das Phasenspektrum von Schalldruck und Schallschnelle durch  $cs1$ . Der Schalldruck eilt der Geschwindigkeitskomponente  $v_x$  um ca.  $\Delta\phi \approx 90^\circ$  voraus. (c) Die Kreuz-Korrelation von Schalldruck und Schallschnelle durch den Querschnitt  $cs1$  ergibt eine Zeitverzögerung von ca. 0.35 ms.

Zuerst wird der Querschnitt  $cs1$  betrachtet. In Abbildung 5.27 sind die Signale  $p$  und  $v_x$  zwischen  $50 \text{ ms} < t < 60 \text{ ms}$  gezeigt. Man sieht eine gewisse Phasenverschiebung beider Signale. Das Phasenspektrum lässt erkennen, dass hier der Druck und die Geschwindigkeitskomponente  $v_x$  um  $\Delta\phi = 90^\circ$  phasenverschoben sind. Dabei eilt der Druck der Geschwindigkeitskomponente  $v_x$  voraus. Man beachte, dass die Signale durch den Querschnitt  $cs1$  auch die nichtlinearen Anteile der jeweiligen physikalischen Größen enthält. Der Druck setzt sich also aus dem dynamischen Druck und dem Schalldruck

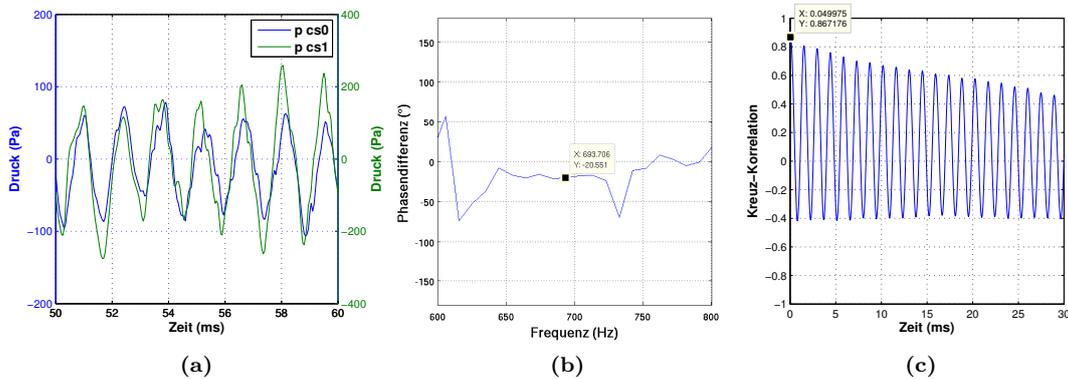
zusammen. Die Geschwindigkeitskomponente  $v_x$  beinhaltet die Strömungsgeschwindigkeit und die Schallschnelle.



**Abbildung 5.28.:** (a) Detailsicht der über den Querschnitt  $cs0$  integrierten Größen Schalldruck und Schallschnelle. (b) Das Phasenspektrum von Schalldruck und Schallschnelle durch  $cs0$ . Der Schalldruck eilt der Schallschnelle um ca.  $\Delta\phi = 70^\circ$  voraus. (c) Kreuz-Korrelation von Schalldruck und Schallschnelle durch den Querschnitt  $cs0$ . Die Signale haben eine Zeitverzögerung von ca. 0.5 ms.

Im Querschnitt  $cs0$  in Abb. 5.28 ist die Situation eine andere. Der Querschnitt stellt den Aufschnitt dar, aus dem das Schallsignal in den Außenraum entweicht. Der Druck ist hier im Wesentlichen Schalldruck und die Komponente  $v_y$  ist der Träger der Schallschnelle. Der Vergleich beider Signale ergibt eine Phasendifferenz von ca.  $\Delta\phi = 70^\circ$ , wobei der Schalldruck der Schallschnelle voraus eilt. Dies ist konform mit der linearen Wellentheorie, die ein maximales Vorausschlagen des Schalldruckes im Nahfeld um  $\Delta\phi = \pi/2$  voraussagt.

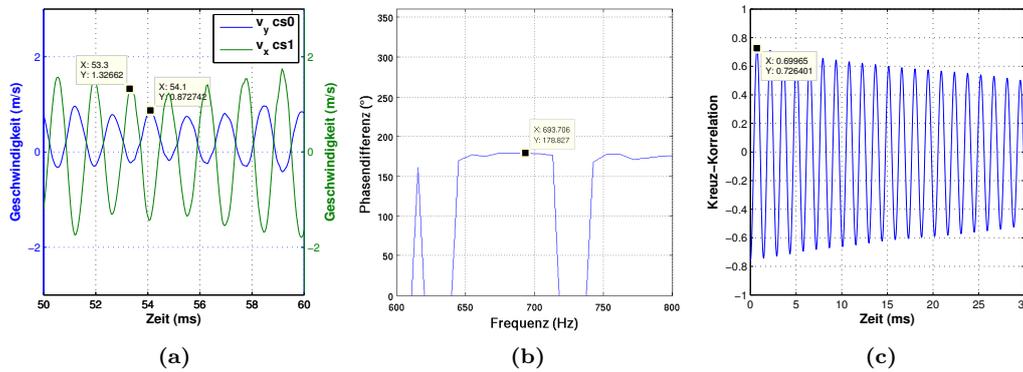
Jetzt werden die Phasenunterschiede zwischen den Querschnitten  $cs1$  und  $cs0$  betrachtet. Die Analyse für den Druck ist in Abb. 5.29 gezeigt. Die Drücke laufen fast phasengleich. Der kleine Phasenunterschied entsteht durch die Laufzeit, die der Druck benötigt, um von  $cs1$  nach  $cs0$  zu propagieren.



**Abbildung 5.29.:** (a) Die Drucksignale durch die Querschnitte  $cs0$  und  $cs1$  im Vergleich. (b) Phasenspektrum im Bereich der 1. Harmonischen. Die Phasendifferenz beträgt  $\Delta\phi = -20.55^\circ$ . (c) Die Kreuz-Korrelation ergibt die zeitliche Verzögerung  $\tau = 0.05$  ms beider Signale.

In Abbildung 5.30 werden die Geschwindigkeitskomponenten  $v_y$  durch  $cs0$  und  $v_x$  durch  $cs1$  im Zeitintervall  $50 \text{ ms} < t < 60 \text{ ms}$  gezeigt. Man erkennt, dass die Signale um ca.  $\pi$  gegeneinander verschoben sind. Sie laufen also gegenphasig, wobei die Komponente  $v_x$  durch  $cs1$  der Komponente  $v_y$  durch  $cs0$  voraus eilt. Aus dem Phasenspektrum im Bereich der 1. Harmonischen liest man die Phasendifferenz  $\Delta\phi \approx 180^\circ = \pi$  ab. Die Kreuz-Korrelation zeigt die Verzögerungszeit von  $\tau \approx 0.75$  ms

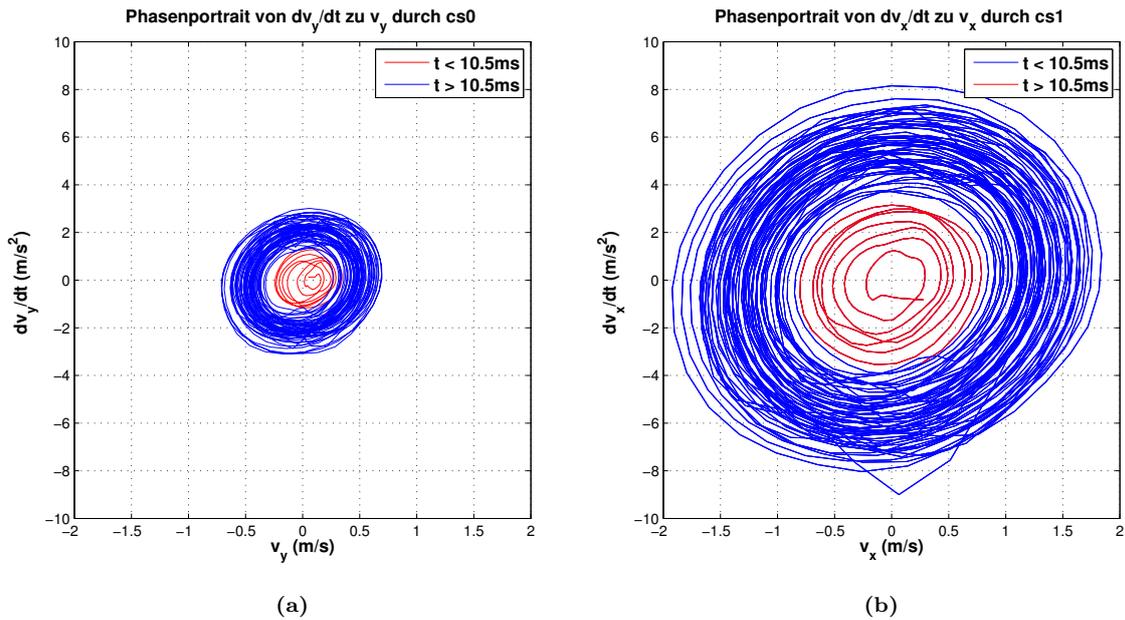
der Signale, welche ca. der Hälfte der Periodendauer der 1. Harmonischen entspricht. Für die gilt  $T = 2\pi/\omega = 1/f \Rightarrow T_{1H} = 1.44 \text{ ms}$ .



**Abbildung 5.30.:** (a) Die Geschwindigkeitssignale  $v_y$  durch  $cs0$  und  $v_x$  durch  $cs1$  im Vergleich. (b) Phasenspektrum im Bereich der 1. Harmonischen. Die Phasendifferenz beträgt  $\Delta\phi \approx 180^\circ = \pi$ . Die Signale laufen fast exakt gegenphasig, wobei die Komponente  $v_x$  durch  $cs1$  durch  $cs0$  voraus eilt. (c) Aus der Kreuz-Korrelation beider Signale liest man die zeitliche Verzögerung  $\tau = 0.75 \text{ ms}$  ab.

## Phasenportraits

Aus den, die Schallschnelle tragenden, Geschwindigkeitssignalen  $v_x$  durch  $cs1$  bzw.  $v_y$  durch den Aufschnitt  $cs0$  lassen sich die 1. Ableitungen  $\dot{v}_x$  bzw.  $\dot{v}_y$  bilden. Damit kann die Dynamik durch die besprochenen Querschnitte als Phasenportrait dargestellt werden. Die Abbildungen 5.31a und 5.31b zeigen die Phasenportraits  $\dot{v}_y$  über  $v_y$  durch  $cs0$  und  $\dot{v}_x$  über  $v_x$  durch  $cs1$ . Der Einschwingvorgang (das Anblasen der Orgelpfeife) im Bereich von  $0 \text{ ms} < t < 10 \text{ ms}$  ist mit Rot gekennzeichnet. Deutlich erkennt man die Periodizität des Schwingungsvorgangs. Da das Signal neben der Schallschnelle auch noch Anteile des Strömungsfeldes besitzt, ist die Trajektorie durch das Rauschen des Jets beeinflusst. Dennoch kann man die Ausbildung eines Grenzzyklus erkennen. Die nur leichte Abweichung von der Kreisform zeigt, dass die Nichtlinearitäten im System klein sind. Die Form der Abweichungen erinnert an die eines van der Pol Oszillators mit kleiner Nichtlinearität und Rauschen.



**Abbildung 5.31.:** (a) Phasenportrait durch den Aufschnitt cs0. Aufgetragen ist  $\dot{v}_y$  über  $v_y$ . (b) Phasenportrait durch den Querschnitt cs1. Aufgetragen ist  $\dot{v}_x$  über  $v_x$ . Die Einschwingvorgänge sind rot gekennzeichnet. Das Signal enthält neben der Schallschnelle auch noch Anteile des Strömungsfeldes. Daher ist die Trajektorie durch das Rauschen des Jets beeinflusst. Dennoch ist die Ausbildung eines Grenzzyklus zu erkennen. Die leichte Abweichung von der Kreisform zeigt, dass die Nichtlinearitäten im System klein sind. Die Form der Abweichungen erinnert an die eines von der Pol Oszillators mit kleiner Nichtlinearität und Rauschen.

## 5.7. Zusammenfassung

Die Auswertung der Simulationsergebnisse geben Aufschluss über die komplexen Wechselwirkungen in der Orgelpfeife, die zur Tonentstehung führen. Es können Regionen nach den wirkenden Mechanismen klassifiziert werden. Die Regionen sind:

- Generator (Jet + Aufschnitt)
- Kopplungsregion
- Resonator
- Außenraum

Dabei muss berücksichtigt werden, dass der Begriff Resonator im akustischen Sprachgebrauch die hier separierten Regionen Generator, Kopplungsregion und Resonator beinhaltet. Die Mechanismen der Tonentstehung in der Orgelpfeife sind ein komplexes Zusammenspiel mehrerer Einzelprozesse. Die Prozesse lassen sich wie folgt den klassifizierten Regionen zuordnen:

- Generator (Jet + Aufschnitt) - Auslenkung durch:
  - Freistrah-Charakteristik des Jets
  - schwingender akustischer Dipol an der Schneide
  - Auslenkung durch das Schallfeld des Resonators
- Kopplungsregion
  - periodisches Einströmen des Massenstroms des Jets

Stauchung, Abbremsen und Richtungsänderung des Massenstroms  
Impulsübertrag - Aufspaltung in akustischen und fluiddynamischen Anteil  
Ausbildung des Primärwirbels (und weiterer, Sekundär-, Tertiär- etc.)  
Translation des Primärwirbels durch rücklaufende Schallwelle

- Resonator

Dämpfung/Reflexion durch akustische Impedanz  
Auswahl akustischer Moden aus dem Rauschspektrum des Jets

- Außenraum

Abstrahlung des akustischen Anteils des Massenstroms (Schallwelle)  
Abfluss des fluiddynamischen Anteils des Massenstroms als Wirbelstraße (Wind).

Die bei der Tonentstehung in der Orgelpfeife wirkenden Mechanismen, deren Einzelprozesse und ihre Wechselwirkungen lassen sich in dem Flussdiagramm in Abb. 3.11 zusammenfassen. Man erkennt darin den besprochenen Regelkreislauf. Die zentrale Komponente ist der Generator, mit der Injektionsregion (der Kernspalte), dem Jet, dem Dipol an der Schneide und dem Aufschnitt. Durch Auslenkungen des Jets gelangt ein periodischer Massenstrom in die Kopplungsregion. Dieser wird dort aufgespalten in einen akustischen und einen fluiddynamischen Anteil. Der akustische Anteil gelangt in den Resonator, wo es zur Auswahl bestimmter akustischer Moden kommt, die als Schall zurück in die Kopplungsregion wandern. Der fluiddynamische Anteil bildet den Primärwirbel in der Kopplungsregion aus. Der Schall führt zu kleinen Translationsbewegungen des rotierenden Primärwirbels in  $\pm x$ -Richtung. Diese Translation ist die Schallschnelle des Schallsignals. Der Jet erfährt durch die Schallschnelle eine Störung und wird in Richtung Außenraum ausgelenkt. Die Auslenkung des Jets wird von weiteren Störgrößen, wie dem schwingenden Dipol an der Schneide und der Freistrahls-Charakteristik beeinflusst. Der Unterdruck des rotierenden Primärwirbels bewirkt das Zurückschwingen des Jets in die Kopplungsregion.

Entscheidend für das komplexe Zusammenspiel ist, neben den Randbedingungen, die die Geometrie der Orgelpfeife vorgibt (Mensur), dass die periodischen Einzelprozesse untereinander gewisse Phasenbeziehungen einnehmen und aufrecht erhalten. Nur so kann es zur beobachteten Schallabstrahlung kommen. Die Phasenbeziehungen müssen sich während des Einschwingvorgangs so einstellen, dass Prozesse der Anfachung und Prozesse der Dämpfung gerade ein dynamisches Gleichgewicht ausbilden. Dies ist das entscheidende Kriterium dafür, dass sich die Mechanismen auf das Modell eines selbst-erregten, akustischen Oszillators abbilden lassen. Das Phasenportrait der das Schallsignal tragenden Geschwindigkeitskomponente durch die Kopplungsregion und durch den Aufschnitt hat Ähnlichkeit mit dem eines selbsterregten Oszillators mit kleiner Nichtlinearität.

## 6. Zusammenfassung und Ausblick

*Forschen heißt, sich jeden Tag aufs Neue zum Unbekannten aufzumachen.*

EIGENES CREDO

In dieser Arbeit wurden Synchronisationsphänomene bei Orgelpfeifen untersucht. Dazu ist ein Experiment ausgewertet worden, bei dem das wechselseitige Kopplungsverhalten zweier gedackter, labialer Orgelpfeifen aus Holz in Abhängigkeit von ihrem Abstand vermessen wurde. Dabei konnte ein komplexes Synchronisationsverhalten der Orgelpfeifen nachgewiesen werden. Aus der Synchronisation der beiden Orgelpfeifen lässt sich schließen, dass es sich bei den Orgelpfeifen um selbsterregte akustische Oszillatoren handelt. Es wurden Synchronisationsregionen gefunden, deren Breite mit wachsendem Abstand der Pfeifen zueinander nichtlinear abnehmen. Aus den Synchronisationsregionen wurde die Arnoldzunge konstruiert und analysiert. Dabei wurde eine atypische Kopplungsfunktion identifiziert. Aus der gefundenen Kopplungsfunktion resultiert ein Abstrahlverhalten im Fernfeld, welches sich stark von dem unterscheidet, was man für einen akustischen Punktstrahler erwartet. Wie ist die atypische Kopplungsfunktion physikalisch zu deuten?

Der Weg zur Klärung der offenen Frage der Kopplungsfunktion führte zu zwei weiteren Fragestellungen, nämlich zu den fluiddynamischen und aero-akustischen Ursachen der Tonentstehung in der Orgelpfeife und zu der Frage, inwiefern sich die wirkenden Mechanismen auf das Modell eines selbsterregten akustischen Oszillators bilden lassen.

Die fluiddynamischen und aero-akustischen Ursachen der Tonentstehung wurden mit Hilfe von numerischen 2D-Simulationen untersucht. Dazu wurden die kompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen auf einem entsprechenden Rechengitter gelöst. Es konnten die Mechanismen der Tonentstehung in der Orgelpfeife identifiziert und lokalisiert werden. Der Generator, die Kopplungsregion, der Resonator und der Außenraum bilden dabei charakteristische Regionen, die sich nach Mechanismen abgrenzen lassen und so als Elemente für das Modell des selbsterregten akustischen Oszillators prinzipiell in Frage kommen. Mit der Methode des Coarse Graining wurden die Ergebnisse der Simulation schrittweise zu einem reduzierten Modellansatz reformuliert, der den komplexen Rückkopplungsmechanismus in der Orgelpfeife als selbsterregten akustischen Oszillator hinreichend gut beschreibt. Auch wenn sowohl die Befunde des Experiments als auch die Analysen der Simulation für die Abbildbarkeit sprechen, ist dieser Prozess ist noch nicht endgültig abgeschlossen.

Die zentrale Problemstellung dabei ist die Quantifizierung der Charakteristik der Nichtlinearitäten in der Orgelpfeife. Vieles spricht dafür, dass die Orgelpfeife durch das Modell eines Rayleigh-Oszillators resp. eines akustischen van der Pol Oszillators modelliert werden kann, die Fluss-Druck-Kennlinie  $q(p)$  also eine kubische Funktion ist. Um endgültige Gewissheit darüber zu erlangen, müssen weitere Simulationen mit höheren Anfangsgeschwindigkeiten des Jets ausgewertet werden. Die hier vorgestellten 2D-Simulationen geben, im direkten Vergleich zu experimentellen Untersuchungen an echten Orgelpfeifen, die Mechanismen der Tonentstehung sehr realistisch wieder, vgl. dazu [24]. Dennoch ist in naher Zukunft eine vollständige 2D-DNS-Simulation anzustreben, um den Einfluss des verwendeten LES-Turbulenzmodells auf die Lösungen noch besser abschätzen zu können.

Um die Frage der atypischen Kopplungsfunktion zu klären, müssen zwei Wege gleichzeitig beschritten werden. Mit Hilfe des Coarse Graining kann eine Modellierung der Kopplung über das äußere Schallfeld entworfen werden. Parallel dazu werden Simulationen zweier gekoppelter Orgelpfeifen durchgeführt. Die Simulationen führen zur Identifikation der fluiddynamischen und aero-akustischen Ursachen für die komplexen Wechselwirkungen zwischen den Orgelpfeifen über das Schallfeld. Die Wechselwirkungen,

die zur Synchronisation führen implizieren, dass beide Jets nun nicht nur von ihren eigenen, inneren Schallfeldern getrieben werden, sondern zusätzlich durch den abgestrahlten Schall der jeweils anderen Pfeife.

Ähnlich wie in dieser Arbeit, kann aus den Ergebnissen der Simulationen dann schrittweise die Konstruktion eines Kopplungsmodells erfolgen, das mit dem Experiment verglichen wird.

Die Klärung der physikalischen Ursachen der atypischen Kopplungsfunktion ist für Orgelbauer von essentieller Bedeutung. Deshalb werden derzeit an der Universität Potsdam, in enger Kooperation mit der Firma Alexander Schuke Potsdam Orgelbau GmbH, weiterführende Forschungen des Synchronisierungsverhalten von Orgelpfeifen in der Ebene durchgeführt. Der Autor dieser Arbeit ist integraler Bestandteil dieser Kooperation.

# Literaturverzeichnis

- [1] ABEL, M. ; AHNERT, K. ; BERGWELER, S.: Synchronization of Sound Sources. In: *Physical review letters* 103 (2009), Nr. 11, S. 114301
- [2] ADELUNG, Wolfgang: *Einführung in den Orgelbau*. Breitkopf & Härtel, Wiesbaden, 2003
- [3] ADLER, R.: A study of locking phenomena in oscillators. In: *Proceedings of the IRE* 34 (1946), Nr. 6, S. 351–357
- [4] ANDRONOV, A.A. ; WITT, A.A. ; CHAIKIN, S.E.: *Theorie der Schwingungen*. Bd. I, II. Akademie Verlag Berlin, 1968
- [5] ARONSON, DG ; ERMENTROUT, GB ; KOPELL, N.: Amplitude response of coupled oscillators. In: *Physica D: Nonlinear Phenomena* 41 (1990), Nr. 3, S. 403–449
- [6] BALANOV, A. ; JANSON, N. ; POSTNOV, D. ; SOSNOVTSEVA, O.: *Synchronization: from simple to complex*. Springer Verlag, 2009
- [7] BERGWELER, S.: *Körperoszillation und Schallabstrahlung akustischer Wellenleiter unter Berücksichtigung von Wandungseinflüssen und Kopplungseffekten: Verändern Metalllegierung und Wandungsprofil des Rohrresonators den Klang der labialen Orgelpfeife?*, Universitätsbibliothek Potsdam, Diss., 2006
- [8] BICKLEY, WG: The plane jet. In: *Phil. Mag* 23 (1937), Nr. 7, S. 727–731
- [9] BLASIUS, B. ; HUPPERT, A. ; STONE, L.: Complex dynamics and phase synchronization in spatially extended ecological systems. In: *Nature* 399 (1999), Nr. 6734, S. 354–359
- [10] DRAZIN, PG ; HOWARD, LN: *Hydrodynamic stability of parallel flow of inviscid fluid*. Academic Press New York, 1966
- [11] DRAZIN, P.G. ; REID, W.H.: *Hydrodynamic Stability*. Cambridge Univ Pr, 2004
- [12] FLANNERY, B.P. ; PRESS, W.H. ; TEUKOLSKY, S.A. ; VETTERLING, W.: Numerical Recipes in C. In: *Press Syndicate of the University of Cambridge, New York* (1992)
- [13] FLETCHER, NH ; THWAITES, S.: Wave propagation on an acoustically perturbed jet. In: *Acustica* 42 (1979), Nr. 5, S. 323–34
- [14] GREINER, W.: *Klassische Mechanik I*. Bd. 1. Harri Deutsch Verlag, 2007
- [15] HEUSER, H.: *Gewöhnliche Differentialgleichungen*. Bd. 4. Teubner, 1991
- [16] HOFFMAN, M.D. ; GARFIELD, N. ; BLAND, R.W.: Frequency synchronization of blue whale calls near Pioneer Seamount. In: *The Journal of the Acoustical Society of America* 128 (2010), S. 490
- [17] HOWE, M.S.: *Theory of vortex sound*. Bd. 33. Cambridge Univ Pr, 2003
- [18] HUYGENS, C.: *Œuvres complètes de Christiaan Huygens publiées par la Société hollandaise des sciences....* Bd. 1. M. Nijhoff, 1888
- [19] KOLMOGOROV, A.: The local structure of turbulence in incompressible viscous fluid for very large

- Reynolds' numbers. In: *Akademiia Nauk SSSR Doklady* Bd. 30, 1941, S. 301–305
- [20] Lighthill, M.J.: On sound generated aerodynamically. I. General theory. In: *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences* 211 (1952), Nr. 1107, S. 564–587
- [21] Lighthill, M.J.: On sound generated aerodynamically. II. Turbulence as a source of sound. In: *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences* 222 (1954), Nr. 1148, S. 1–32
- [22] Mirollo, R.E. ; Strogatz, S.H.: Synchronization of pulse-coupled biological oscillators. In: *SIAM Journal on Applied Mathematics* 50 (1990), 12, Nr. 6, S. 1645–1662
- [23] OPENFOAM: *OpenFOAM Webpage*: <http://www.openfoam.com>. <http://www.openfoam.com>. Version: Juni 2012
- [24] Paál, G. ; Angster, J. ; Garen, W. ; Miklós, A.: A combined LDA and flow-visualization study on flue organ pipes. In: *Experiments in fluids* 40 (2006), Nr. 6, S. 825–835
- [25] Paluš, M. ; Kurths, J. ; Schwarz, U. ; Seehafer, N. ; Novotná, D. ; Charvátová, I.: The solar activity cycle is weakly synchronized with the solar inertial motion. In: *Physics Letters A* 365 (2007), Nr. 5, S. 421–428
- [26] Parlitz, U. ; Pikovsky, A. ; Rosenblum, M. ; Kurths, J.: Schwingungen im Gleichtakt. In: *Physik Journal* 5 (2006), Nr. 10, S. 33
- [27] Pikovsky, Arkady ; Rosenblum, Michael ; Kurths, Jürgen: *Synchronisation - A universal concept in nonlinear sciences*. Cambridge University Press, 2001
- [28] Rayleigh, John William S.: *The Theory of Sound*. Bd. 1,2. Macmillan, New York. Reprinted by Dover, New York, 1945, 1896
- [29] Reynolds, O.: On the Dynamical Theory of Incompressible Viscous Fluids and the Determination of the Criterion. In: *Proceedings of the Royal Society of London* 56 (1894), Nr. 336-339, S. 40–45
- [30] Rienstra, S.W. ; Hirschberg, A.: An introduction to acoustics. In: *Eindhoven University of Technology* (2003)
- [31] Savic, P.: On acoustically effective vortex motion in gaseous jets. In: *Phil. Mag* 32 (1941), S. 245–252
- [32] Schlichting, Herrmann ; Gersten, Klaus: *Grenzschicht-Theorie*. 10. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2006
- [33] Smagorinsky, J.: General circulation experiments with the primitive equations. In: *Monthly weather review* 91 (1963), Nr. 3, S. 99–164
- [34] Tollmien, W.: *Ein allgemeines Kriterium der Instabilität laminarer Geschwindigkeitsverteilungen*. Vandenhoeck & Ruprecht, 1935

# Danksagung

Ich danke allen Freunden, Kollegen, Verwandten und Bekannten, die mich auf meinem Weg zum Diplom begleitet, inspiriert, und unterstützt haben. Ganz besonderen Dank möchte ich richten an:

Jörg Schlinke,  
Claus u. Ursula Detjen,  
Stefan u. Marion Detjen,  
Oliver Klostermann,

Prof. Markus Abel,  
Prof. Arkardi Pikovski,  
Prof. Michael Rosenblum,

Dr. Wolfgang Fischer,  
Hildeburg Fischer †,  
Beate Fischer,  
Thilo Fischer,  
Helena Grabert,  
Marika Grabert,  
Kurt † u. Waltraut Henschel,

Prof. Hans-Joachim Schellnhuber,  
Petra Schellnhuber †,  
Prof. Stefan Rahmstorf,  
Prof. Fritz Reuswig,  
Dr. Wiebke Lass.

Allen Widersachern, Stasi-Knechten und jenen, die mir im Laufe der Zeit ihre Steine in den Weg warfen, sage ich:

Eure Mühen waren vergeblich!



# A. Visualisierungen

In diesem Anhang werden wichtige Visualisierungen aus den Simulationsläufen zusammengefasst. Aus den Daten der Simulation wurden verschiedene Visualisierungen gewonnen, die hier vorgestellt und kurz erläutert werden werden.

## A.1. Film-Sequenzen der Simulation

Auf dem Datenträger der Arbeit sind Film-Sequenzen der Entwicklung der betrachteten physikalischen Größen während der Simulation hinterlegt. Weitere Filme von der Entwicklung der physikalischen Größen durch den Querschnitt *cs resonator* sind ebenfalls hier zu finden. Darüber hinaus ist die gesamte Arbeit und der Anhang auf dem Datenträger hinterlegt. Das Inhaltsverzeichnis des Datenträgers lautet

- Diplomarbeit
  - [●] Diplomarbeit+Anhang
- Filme
  - [●] Sequenzen der Simulation
    - rho.avi* (Dichte  $\rho$ )
    - k.avi* (turbulente kinetische Energie  $k$ )
    - k\_log\_jet.avi* (turbulente kinetische Energie  $k$  in der Region des Generators)
    - p.avi* (Druck  $p$ )
    - p\_contour\_jet.avi* (Druck  $p$  Isobaren in der Region des Generators)
    - temperature.avi* (Temperatur  $T$ )
    - v\_mag.avi* (Geschwindigkeitsbetrag  $v$ )
    - vorticity\_mag.avi* (vorticity  $\omega$ )
  - [●] Filme des Querschnittes *cs\_resonator*
    - cs\_resonator\_k\_plus\_effective.avi*
    - cs\_resonator\_vx\_effective.avi*
    - cs\_resonator\_vx\_plus\_minus.avi*
    - cs\_resonator\_vy\_plus\_minus\_effective.avi*
    - cs\_resonator\_p\_plus\_minus.avi*
    - cs\_resonator\_p\_plus\_minus\_effective.avi*

## A.2. Probenpunkte und Querschnitte

Dieser Abschnitt trägt die die Positionen der verwendeten Probenpunkte und der im Rechengitter definierten Querschnitte (Samples) zusammen.

### A.2.1. Probenpunkte A - G

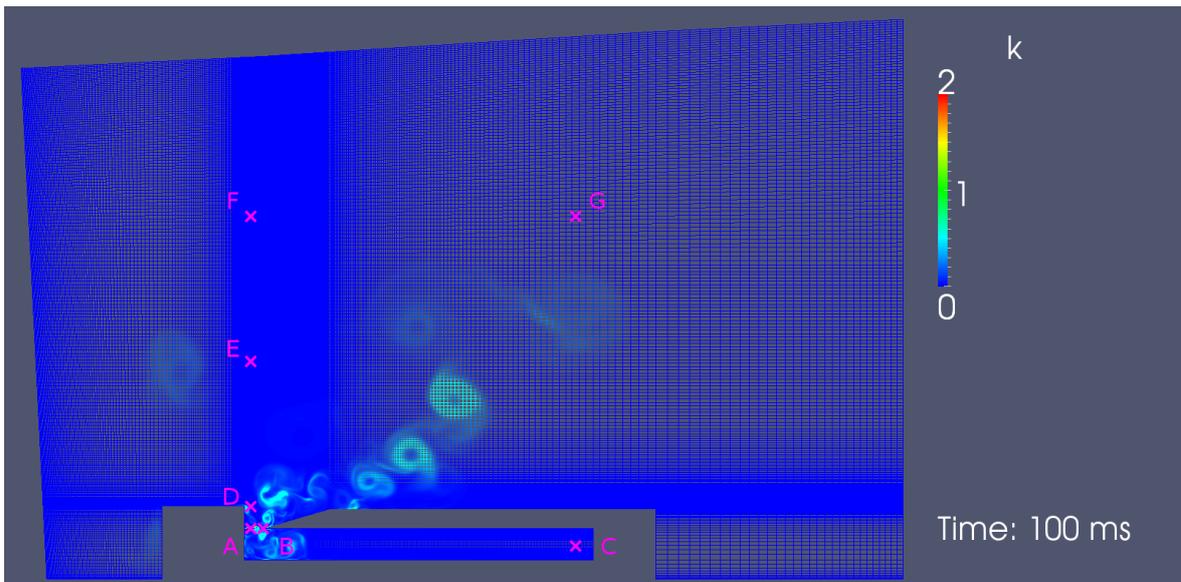


Abbildung A.1.: Die Positionen der Probenpunkte A - G in der Orgelpfeife und im Außenraum.

Probenpunkt	A	B	C	D	E	F	G
x (mm)	2.75	4.75	96.00	2.75	2.75	2.75	96.00
y (mm)	9.20	9.20	4.50	16.50	45.00	90.00	90.00

Tabelle A.1.: Positionen der Probenpunkte A bis G relativ zum Koordinatenursprung.

### A.2.2. Samples cs jet 00 - cs jet 09

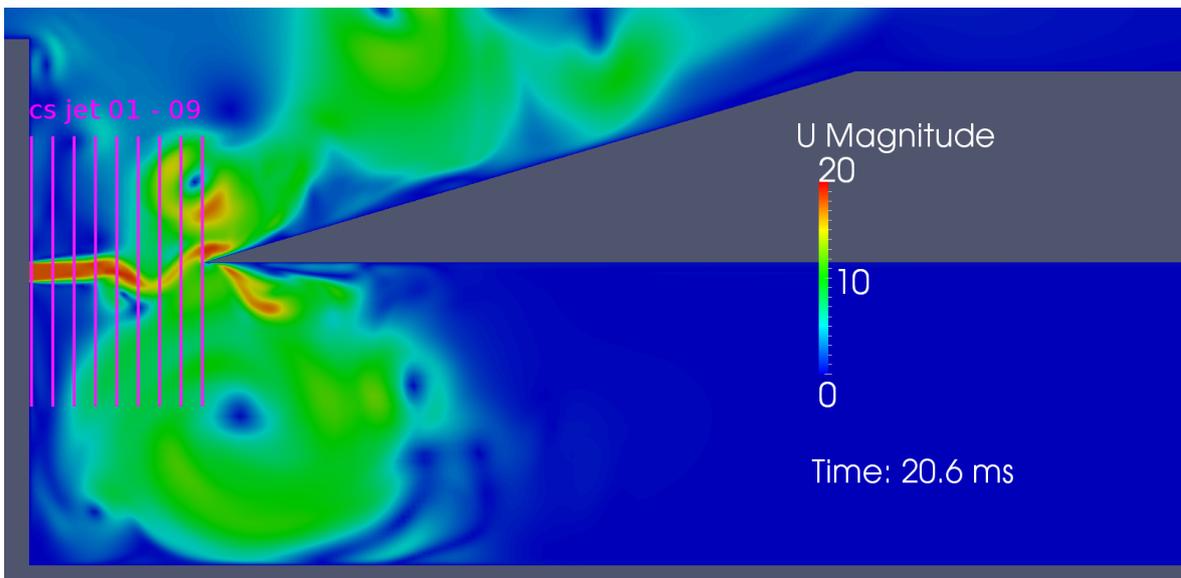


Abbildung A.2.: Die Positionen der Querschnitte cs jet 01 - 09 im Aufschnitt. Jedes Sample besteht aus 200 Datenpunkten und ist 8.6 mm lang.

### A.2.3. Sample cs dipol

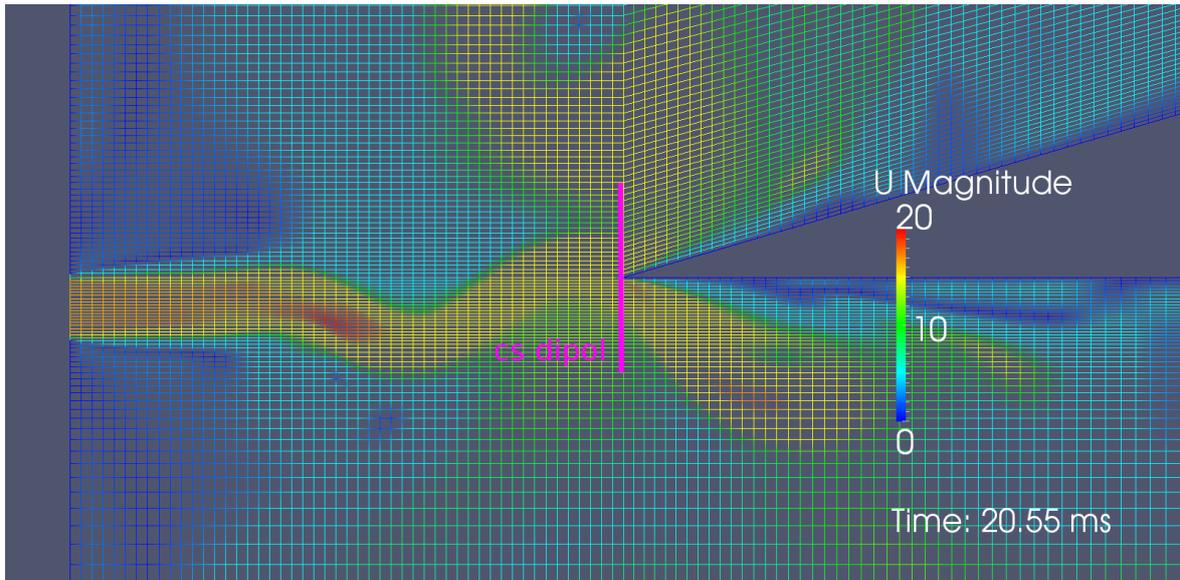


Abbildung A.3.: Position des Querschnittes cs dipol. Das Sample beinhaltet 400 Messpunkte und ist 1.9 mm lang.

### A.2.4. Samples cs0 -cs5

Bei den Samples *cs1-cs5* wurden jeweils 100 Messpunkte auf die Querschnittlänge von 9.5 mm verteilt, um eine möglichst feine Querschnittauflösung zu erhalten. Das Sample *cs0* quer über dem Aufschnitt ist 25.8 mm lang und besteht aus 272 Messpunkten. Alle Samples haben somit dieselbe Gitterweite von 0.095 mm.

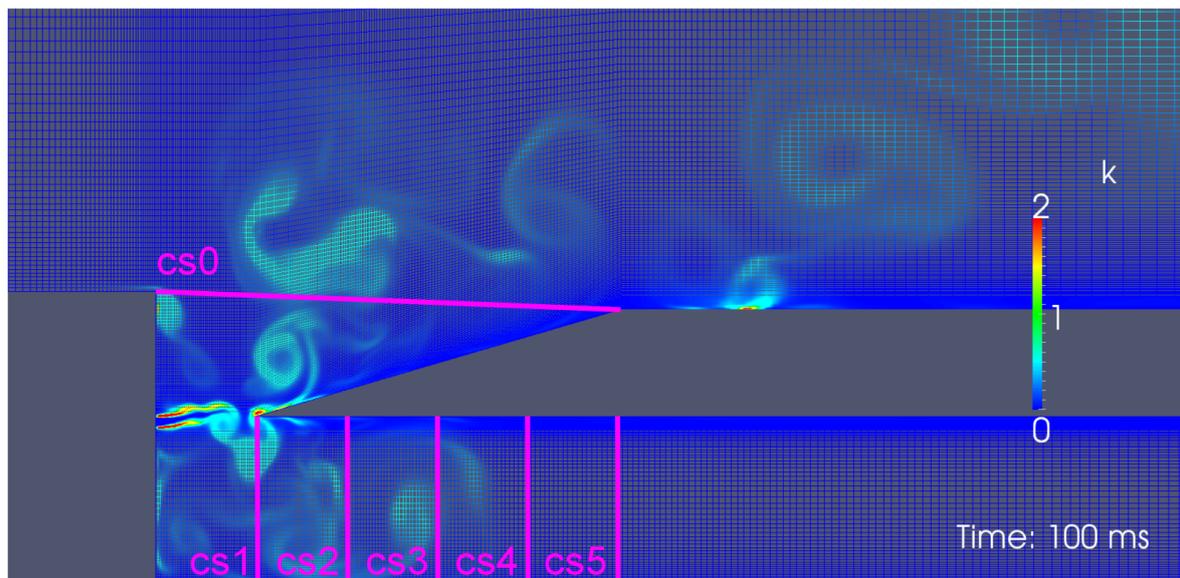


Abbildung A.4.: Lage der definierten Samples *cs0 - cs5* im Rechengitter. Das Sample des Aufschnittes *cs0* hat 272 Datenpunkte. Jedes vertikale Sample (*cs1 - cs5*) beinhaltet 100 Datenpunkte.

### A.2.5. Sample cs resonator

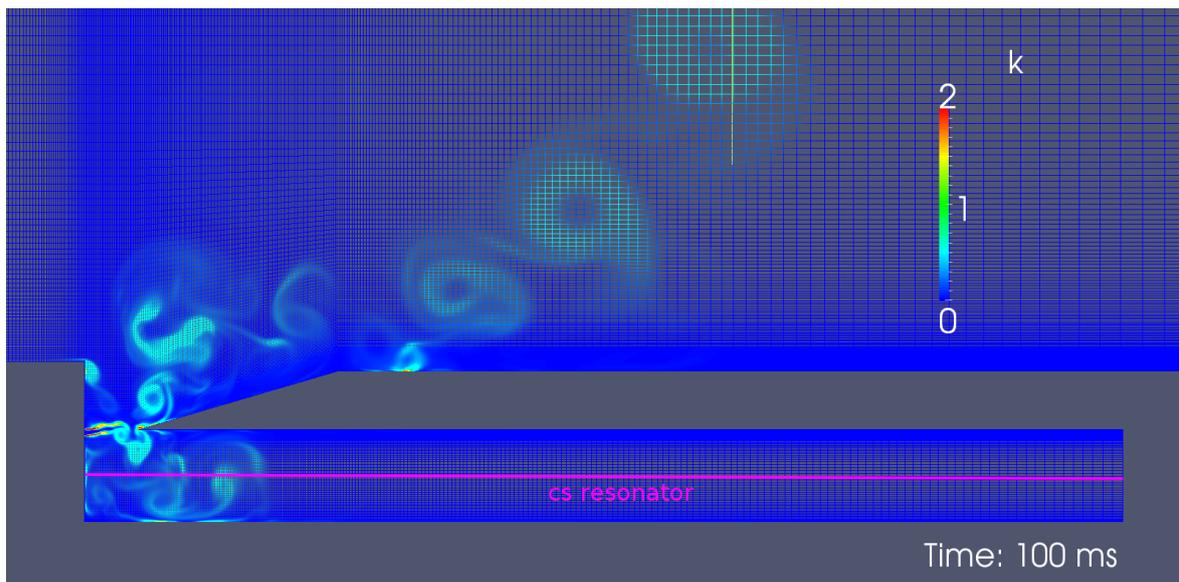


Abbildung A.5.: Lage des Samples cs resonator im Rechengitter. Das Sample hat 1927 Datenpunkte und ist 106 mm lang.

## A.3. Darstellungen der Samples cs0 -cs5

### A.3.1. turbulente kinetische Energie

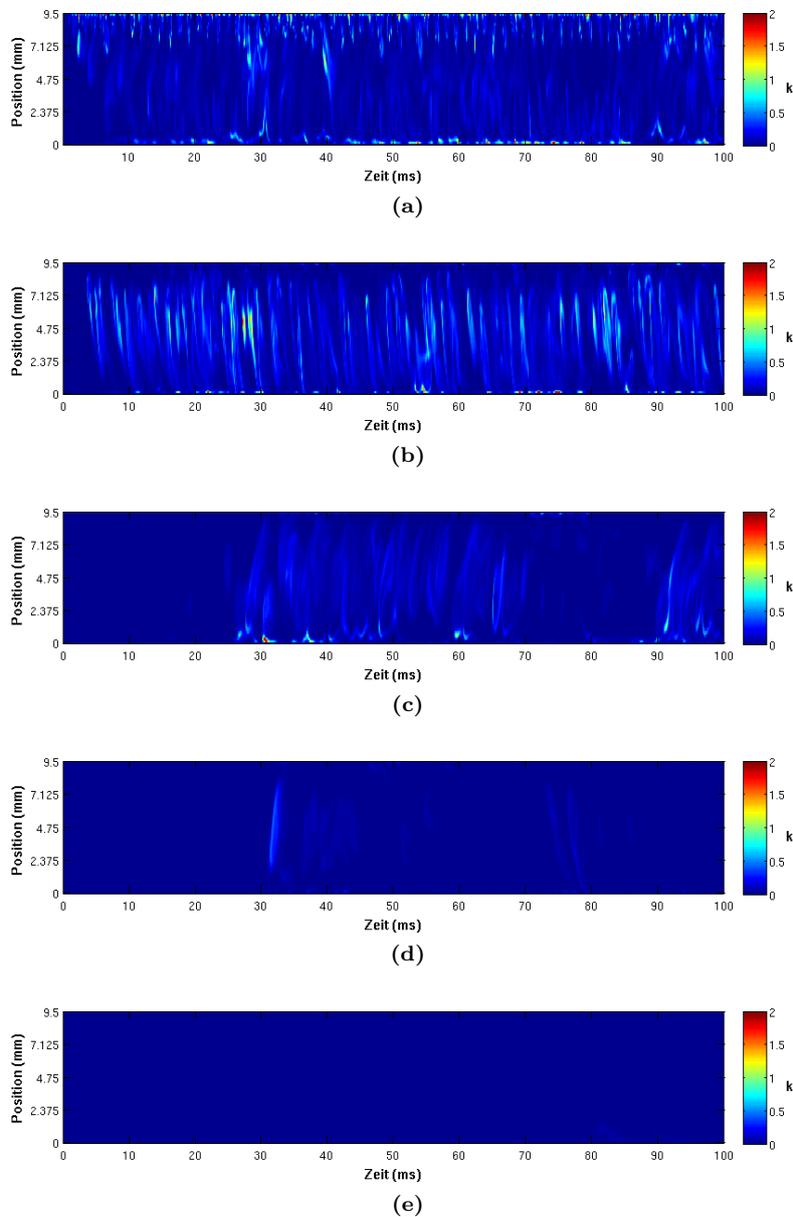


Abbildung A.6.: Zeitlicher Verlauf der turbulenten kinetischen Energie durch die Querschnitte cs1-cs5 (a)-(e).

In den Abbildungen A.6a - A.6e ist der zeitliche Verlauf der turbulenten kinetischen Energie  $k$  durch die Querschnitte cs1 - cs5 farbcodiert dargestellt. Die Farbcodierung stellt die Amplitude von  $k$  dar. Die Einheit der turbulenten kinetischen Energie ist  $[k] = 1 \text{ m}^2/\text{s}^2$ .

In Abb. A.6a ist zeitliche Verlauf von  $k$  durch den Querschnitt  $cs1$  dargestellt. Man erkennt gewisse Maxima von  $k$  an den oberen und unteren Rändern, welche auf Reibung an den Grenzschichten hinweisen. Wie in den Filmen  $k\_log\_jet.avi$ ,  $vorticity\_mag.avi$  und  $U\_mag.avi$  zu sehen, ist das Sample  $cs1$  auch ein Schnitt durch eine zeitlich und räumlich stabile Wirbelstruktur im vorderen Resonatorraum, die wir **Primärwirbel** nennen. Die Region in der Mitte des Querschnittes  $cs0$  stellt das **das Zentrum des Primärwirbels** dar. Daher ist die turbulente kinetische Energie hier sehr gering. Die Rückströmung bewirkt entsprechende Reibungseffekte im unteren Randbereich. Unmittelbar an den Rändern ist  $k = 0$ , da für die Wände die **Haftbedingung**, *engl.: no slip*, d.h.  $v = 0$  am Rand, erfüllt ist. Die erkennbaren Schlieren verlaufen steil, was auf die hohen Strömungsgeschwindigkeiten durch den Querschnitt hindeutet. Gut ist die Periodizität mit der 1. Harmonischen zu erkennen. Der in den oberen Teil des Querschnitts einströmende Jet, wird durch den oberen Rand einseitig gebremst. Dabei kommt es zu Scherkräften, die zur Umwandlung von kinetischer Energie der Strömung in turbulente kinetische Energie führt. Die hin- und herschwingende Luftsäule im Resonatorraum verstärkt diesen Prozess noch, weil es dadurch zu zusätzlichen Scherkräften und damit zu lokalen Mischungsprozessen kommt. Auch hierzu sei auf die Filme auf dem beigefügten Datenträger verwiesen.

Der Querschnitt  $cs2$  schneidet den Primärwirbel gleich einer Sekante bzw. einer Tangente, je nach dem, wie die schwingende Luftsäule den Primärwirbel gerade in x-Richtung bewegt. Die langen Schlieren und deren schräger Verlauf kennzeichnen die Rotationsgeschwindigkeit ( $k \sim v^2$ ) und die Rotationsrichtung des Primärwirbels. Er dreht sich im Uhrzeigersinn. Die Umwandlung von kinetischer Energie der Strömung in turbulente kinetische Energie ist hier im mittleren Bereich des Querschnittes am größten. Der rotierende Primärwirbel reibt an der Luftsäule im Resonator. Das führt zu weiteren Wirbeln, wie in Abb. A.6c und A.6d zu erkennen. Wir nennen sie **Sekundär-** und **Tertiärwirbel**. Während der Primärwirbel seine Rotationsrichtung nicht ändert (die Schlieren in Abb. A.6b haben alle dieselbe Schrägrichtung), erkennt man in den Abb. A.6c und A.6d, dass Sekundär- und Tertiärwirbel nicht rotationsstabil sind. Sie ändern im Laufe der Simulation ihren Rotationssinn mehrfach. Interessant ist die starke Abnahme der mittleren turbulenten kinetischen Energie durch die Querschnitte  $cs3$ ,  $cs4$  und  $cs5$ . Das deutet auf eine Energiekaskade nach Kolmogorov ( $K41$ -Theorie) hin, die hier aber, aufgrund des LES-Modells nur unzureichend sichtbar wird. In unserem LES-Modell (vgl. B.4) werden ja nur großskalige Wirbel aufgelöst. Hier könnte eine direkte numerische Behandlung (DNS) noch mehr Informationen liefern. Das wäre aber mit erheblich mehr Rechenaufwand verbunden und würde weit über den Rahmen dieser Arbeit hinaus gehen. Wir beschränken uns auf die Analyse der Profile der turbulenten kinetischen Energie durch die Querschnitte und einer Abschätzung des räumlichen Abklingverhaltens.

### A.3.2. Geschwindigkeit in x-Richtung

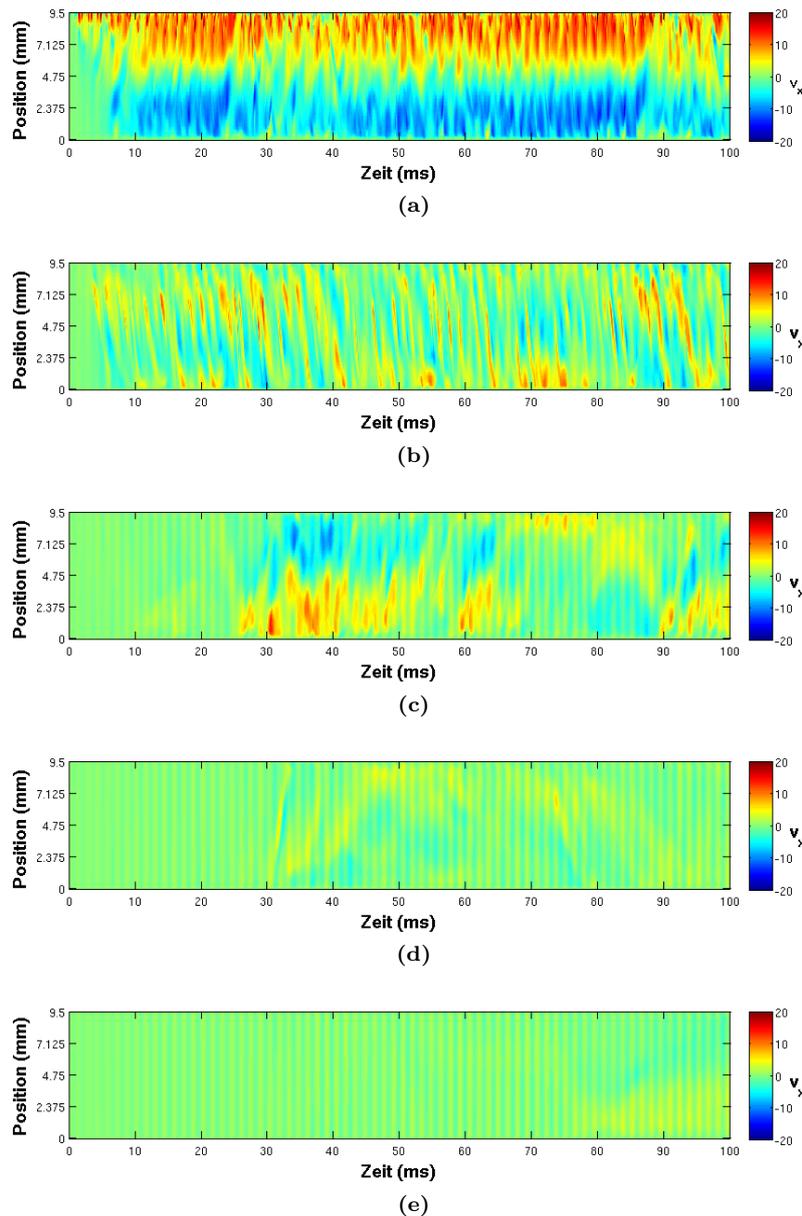


Abbildung A.7.: Zeitlicher Verlauf der Geschwindigkeitskomponente  $v_x$  durch die Querschnitte cs1-cs5 (a)-(e).

Die Hauptströmungsrichtung des Jets ist die  $x$ -Richtung. Deshalb ist die Analyse der zeitlichen Entwicklung dieser Geschwindigkeitskomponente im Resonator besonders interessant. Betrachtet man die farbcodierten Geschwindigkeitskomponenten durch die jeweiligen Querschnitte in den Grafiken A.7a - A.7e, erkennt man, dass auch hier ein Abklingverhalten stattfindet. Anders jedoch als bei der turbulenten kinetischen Energie, bleibt ein streng periodisches Geschwindigkeitssignal am Querschnitt cs5 bestehen. In Abb. A.6a ist deutlich das Einströmen des Jets in den oberen Teil des Querschnittes als roter Farbcode zu erkennen. Mit blau ist der ausströmende Teil des Primärwirbels zu erkennen. Beide Teilströmungen sind ähnlich stark. Sehr gut ist die Periodizität zu erkennen, die den Strömungen überlagert ist. In der Einschwingphase 0 – 5 ms sieht man, wie das periodische Einströmen des

Jets den Primärwirbel ausbildet. Erst danach wird das Ausströmen erkennbar. Dies ist insofern interessant, da während dieser Zeit schon Schallschnelle sichtbar ist. Das bedeutet, dass das Schallfeld des Resonators schon in der Einschwingphase auf die Bewegung des Jets einwirkt. Der Jet wiederum wirkt auf das Schallfeld im Resonator. Es gibt also eine rückkoppelnde Wechselwirkung von Windfeld und Schallfeld im Resonator. Die Abbildungen A.7b und A.7e zeigen, wie sich die Strömungsverhältnisse durch die Querschnitte umordnen und zur Ausbildung des Schallfeldes im Resonator führen. In Abb. A.6c erkennt man die Ausbildung eines Sekundärwirbels bei etwa 26 ms. Er wechselt, anders als der Primärwirbel, immer wieder seine Rotationsrichtung. Bei etwa 75 ms kommt es zu einer solchen Rotationsumkehr. Bei etwa 90 ms kehrt sich sein Rotationssinn abermals um. Ein Vergleich der Abbildungen A.7c und 5.12c zeigt, dass gerade dann sehr große Werte turbulenter kinetischer Energie erreicht werden, wenn der Rotationsinn der beiden Wirbel entgegen gerichtet ist. Besonders in den Randschichten kommt es dann zu starken reibungsbedingten Geschwindigkeitsgradienten. Auch zwischen den Wirbeln kommt es aufgrund unterschiedlicher Winkelgeschwindigkeiten der Wirbelzentren zu starken Reibungseffekten. Die Reibungseffekte führen letztlich dazu, dass der Sekundärwirbel an Stabilität verliert. Die temporäre Richtungsumkehr des Sekundärwirbels benötigt ebenfalls Energie, sodass auch hier die Umwandlung in Form einer Kaskade nach Kolmogorov erwartet werden kann. Die Geschwindigkeit in  $x$ -Richtung durch den Querschnitt  $cs4$  lässt noch einige Schlieren erkennen, welche dem Tertiärwirbel zugeordnet werden können. Der Querschnitt  $cs5$  besitzt nur noch die Komponente der Schallschnelle. Die Strömungsgeschwindigkeit des Jets ist nicht mehr beobachtbar. Das heißt, der Mechanismus der Kopplung des Strömungsfeldes an das akustische Feld im Resonator lässt sich eindeutig der Region  $cs2 - cs5$  zuordnen.

### A.3.3. Geschwindigkeit in y-Richtung

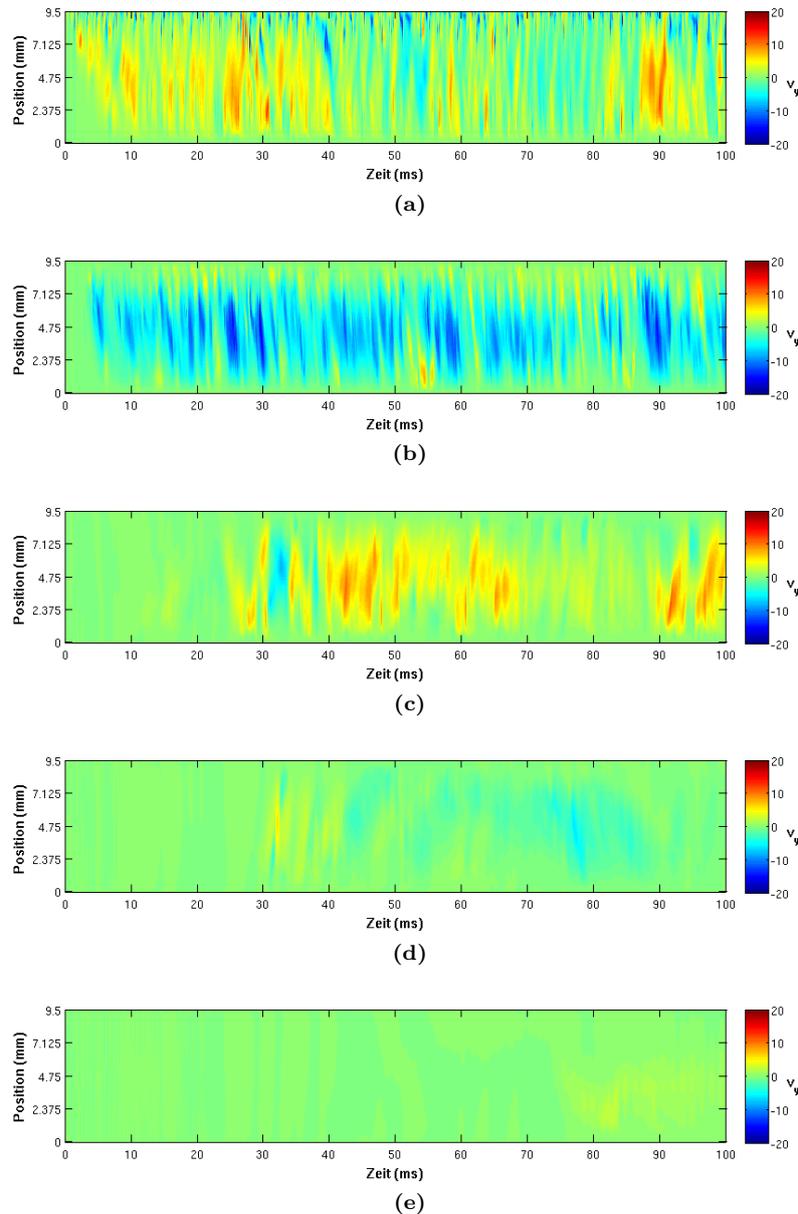


Abbildung A.8.: Zeitlicher Verlauf der Geschwindigkeitskomponente  $v_y$  durch die Querschnitte  $cs1$ - $cs5$  (a)-(e).

Die zeitliche Entwicklung der y-Komponente der Geschwindigkeit durch die Querschnitte  $cs1$  -  $cs5$  ist in den Abbildungen A.8a- A.8e farbcodiert dargestellt. Die y-Komponente des Geschwindigkeitsfeldes wechselt mit jedem Querschnitt die Hauptströmungsrichtung, wobei es, wie das Geschwindigkeitsfeld in x-Richtung, abklingt. Erwartungsgemäß und im Gegensatz zu  $v_x$  gibt es kein Schallschnellefeld mit der Periodizität der 1. Harmonischen in y-Richtung. Die 1. Harmonische ist eben keine Quermode des Resonators, sondern eine Längsmode. Dennoch sieht man an den Schlieren der Querschnitte  $cs1$  und  $cs2$ , dass die Amplitude der Strömung in y-Richtung durch die Längsmode beeinflusst wird. An der oberen Grenzschicht des Querschnittes  $cs1$  besitzen die Schlieren offenbar eine andere Periode, nämlich die der 2. Harmonischen. Dies ist der schwingende Druck-Dipol an der Schneide des Oberlabiums. Bei

den Querschnitten  $cs2$ - $cs5$  sind die Schlieren mit der Periode der 2. Harmonischen nicht vorhanden. Dort klingt  $v_y$  erwartungsgemäß ab. Die Schlieren außerhalb der Randbereiche verlieren mit jedem folgenden Querschnitt immer mehr an Schärfe, bis sie schließlich durch  $cs5$  fast gänzlich verschwunden sind.

### A.3.4. Druck $p$

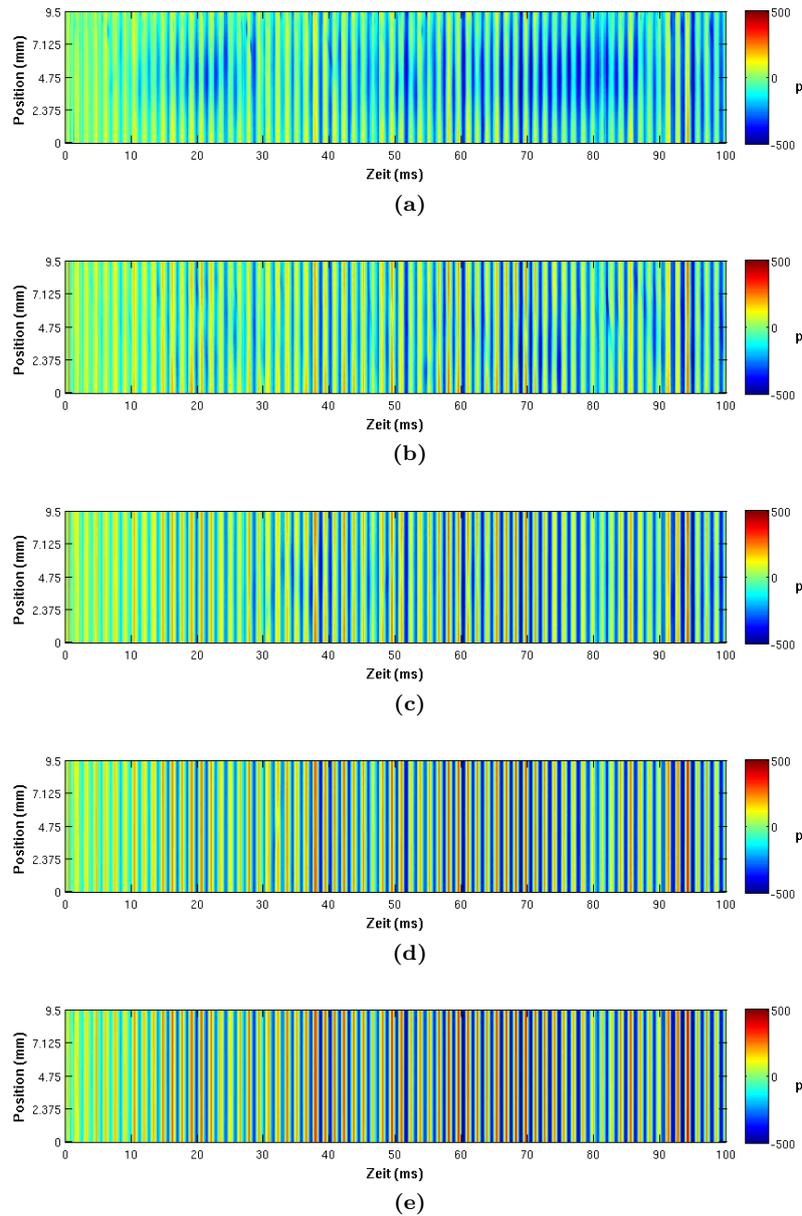


Abbildung A.9.: Zeitlicher Verlauf des Drucksignals durch die Querschnitte  $cs1$ - $cs5$  (a)-(e).

Die Analyse der Druckprofile durch die Querschnitte  $cs1$  -  $cs5$  zeigt aber noch mehr. Die Abbildungen A.9a - A.9e stellen die zeitliche Entwicklung des Druckes durch die Querschnitte  $cs1$  -  $cs5$  farbcodiert dar. Hier ist die relative Druckschwankung bezüglich des Druckes im Außenraum  $p_0 = 101325$  Pa gezeigt. Man erkennt in allen Querschnitten das streng periodische Drucksignal mit der Frequenz der 1. Harmonischen. Außerdem ist ein Anwachsen des Druckes während der Einschwingphase zwischen  $t = 0$  ms und  $t = 10$  ms zu beobachten.

## A.4. Sequenzen des Druckes, der Geschwindigkeit und der turbulenten kinetischen Energie

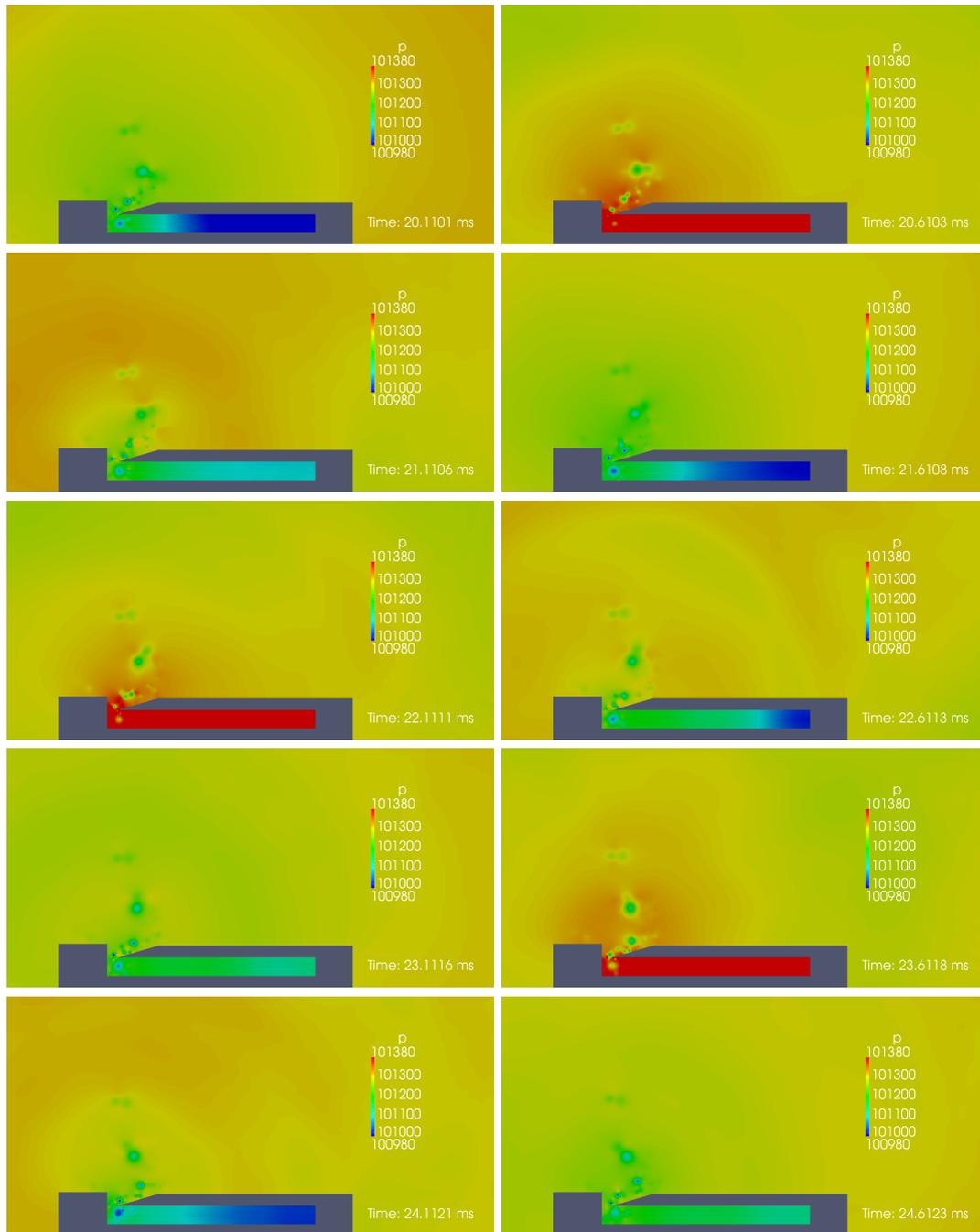
In den Bildfolgen A.10 - A.12 erkennt man, dass sich eine Region um den Jet herum ausmachen lässt, in der offenbar mehrere, miteinander wechselwirkende Mechanismen zur Tonentstehung führen. Diese Region nennen wir die **Kopplungsregion**, um sie, bezüglich der wirkenden Mechanismen, vom Resonator und vom Generator abzugrenzen. Es wurden 5 äquidistante Querschnitte definiert, die den vorderen Teil des Resonatorraumes, ausgehend von der Spitze des Oberlabiums, bis zu einer gedachten Linie auf Höhe des Endes des Oberlabiums, aufteilen (vgl. Abb. A.4). Die Region der Kopplung zwischen dem Windfeld des Jets und dem akustischem Feld des Resonators lässt sich durch die Analyse dieser Samples lokalisieren und die wirkenden Mechanismen identifizieren.

Die Bildfolge A.10 zeigt eine Sequenz des Druckes im Zeitfenster zwischen 20.11 ms und 24.61 ms. Man erkennt, wie in diesem Zeitfenster insgesamt drei Schallwellen in den Außenraum abgestrahlt werden. Die Schallabstrahlung korreliert mit den wechselnden, starken Druckschwankungen im Resonator. Die Skalen der Druckschwankung innerhalb und außerhalb der Pfeife können nicht gleichzeitig aufgelöst werden, da sie im Resonator etwa 4-mal stärker sind. Dennoch erkennt man, dass immer dann ein Maximum der Schallwelle abgestrahlt wird, wenn der Druck innerhalb der Pfeife genauer, im vorderen Teil des vorderen Resonatorinnenraumes maximal ist. Man sieht auch, dass sich die Druckschwankung im Resonator hin und her bewegt. In den Filmen, die aus den Daten generiert wurden, ist dies noch deutlicher zu erkennen. Die Filme aller physikalischen Größen sind der Arbeit als Video-Dateien auf einem entsprechenden Datenträger beigelegt. Interessant ist die räumlich sehr stabile Wirbelstruktur, die sich im Bereich direkt unterhalb des Jets im vorderen Bereich des Resonatorinnenraums ausgebildet hat, der Primärwirbel. Desweiteren erkennt man eine Wirbelstraße, die sich entlang des Oberlabiums bis in den Außenraum erstreckt. An der Spitze des Oberlabiums kommt es zu wechselnden Druckunterschieden zwischen Innen- und Außenraum. Dieser Bereich kann als schwingender Druck-Dipol interpretiert werden.

Die Bildfolge A.11 zeigt dieselbe zeitliche Sequenz für den Betrag der Geschwindigkeit im Bereich des Jets. Hier erkennt man sehr schön, wie der Jet aus der Kernspalte und in den Aufschnitt einströmt. Das Oberlabium stört diese Strömung. Der Jet strömt entweder in den Resonatorinnenraum oder in den Außenraum. Dabei kommt es zu Wirbelablösungen. Dieser Vorgang ist offenbar periodisch. Der Jet wird vertikal ausgelenkt und schwingt hin und her. Er stellt ein schwingendes Luftblatt dar. Während der Anteil der Strömung, der in den Außenraum abwandert, sich als Wirbelstraße entlang des Oberlabiums fortbewegt, wird der Anteil, der in den Resonatorraum gelangt, im vorderen Teil in einen den Primärwirbel geleitet. Dieser rotiert im Uhrzeigersinn und ist räumlich sehr stabil. Die sich anschließende Luftsäule des Resonators wird als Ganzes in schwache Hin- und Herbewegung versetzt. Diese Bewegung wird als Schallschnelle im Resonator interpretiert. Im Film ist dies gut durch die periodisch schwankende Helligkeit der Blautöne zu erkennen.

In der Bildfolge A.12 ist die turbulente kinetische Energie dargestellt. Die Skala ist logarithmisch. Man erkennt gut die zwei Randzonen des Jets, die **Scherschichten**. Hier treten durch Reibung hohe turbulente kinetische Energien auf. Dies führt dazu, dass der Jet an Stabilität verliert. Dies allein kann das Schwingen des Jets aber noch nicht erklären. Es müssen noch weitere Mechanismen existieren, die den Jet zu seinen periodischen Auslenkbewegungen treibt. An der Spitze des Oberlabiums kommt es ebenfalls zu sehr hohen turbulenten kinetischen Energien.

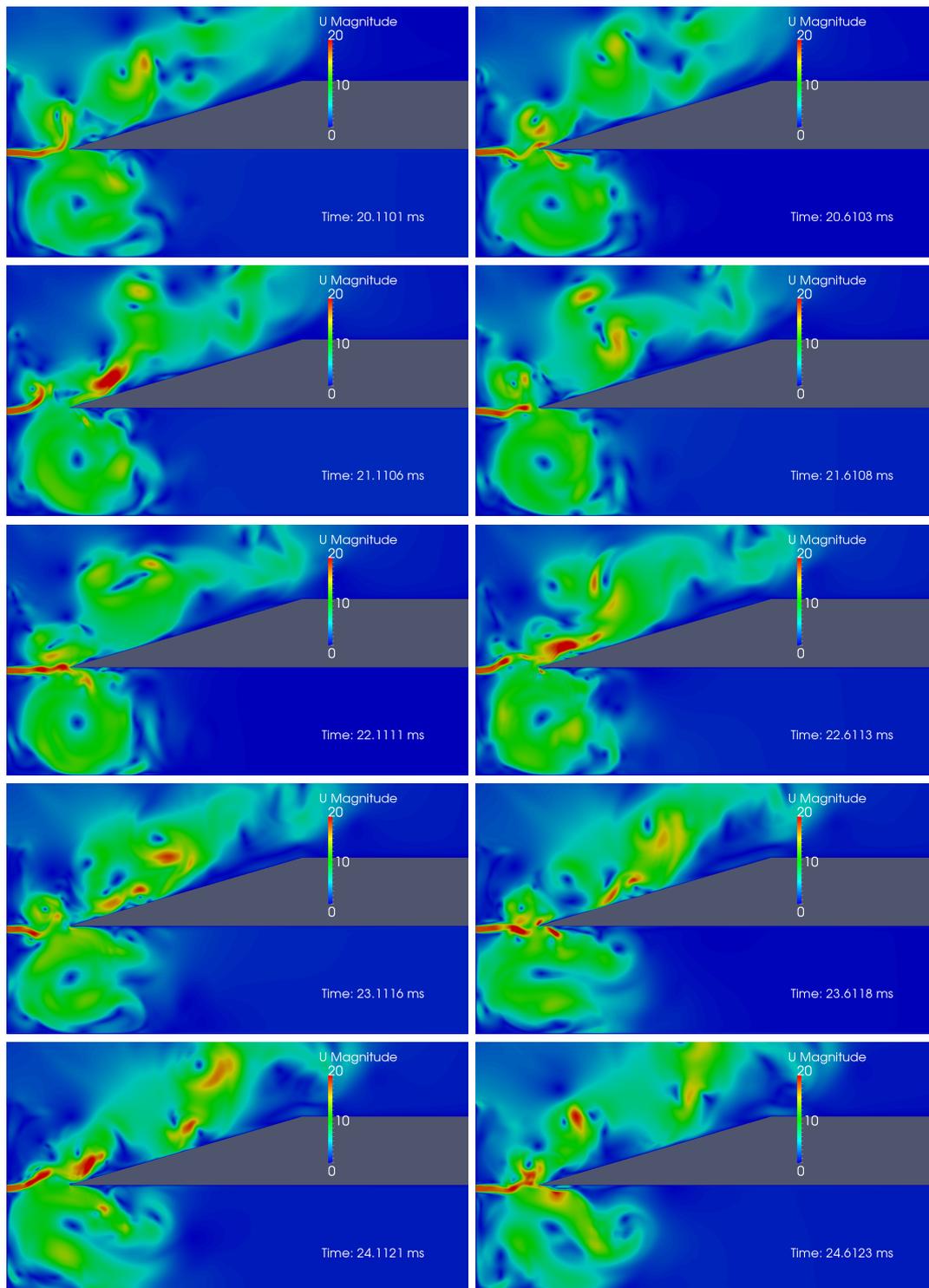
Hinter dem Primärwirbel ist ein zweiter Wirbel, der Sekundärwirbel ausgebildet, der jedoch im Laufe der Simulation immer wieder seine Rotationsrichtung ändert. Sogar ein dritter Wirbel, der Tertiärwirbel ist zu erkennen, mit ähnlichen Eigenschaften. Alle drei Wirbel bilden die Kopplungsregion, die den Bereich des Jets von dem des Resonators trennt. Hier wird der einströmende Jet abgebremst, gestaucht und in den Primärwirbel umgeleitet. Dabei kommt es zu einem Impulsübertrag an die Luftsäule im Resonator. Die daraus resultierende akustische Druckschwankung, die Schallwelle, propagiert zum Pfeifenkopf, wird dort reflektiert und wandert zurück in Richtung Jet. Dieser Prozess benötigt eine gewisse Zeit. Das ist die Laufzeit des Signals im Resonator. Die zurücklaufende Schallwelle trifft



**Abbildung A.10.:** *v.l.o.n.r.u. Simulation der Anströmung des Labiums einer Orgelpfeife durch einen Jet. Die Sequenz zeigt die Abstrahlung von Schallwellen in den Außenraum. Gezeigt ist der Druck  $p$ .*

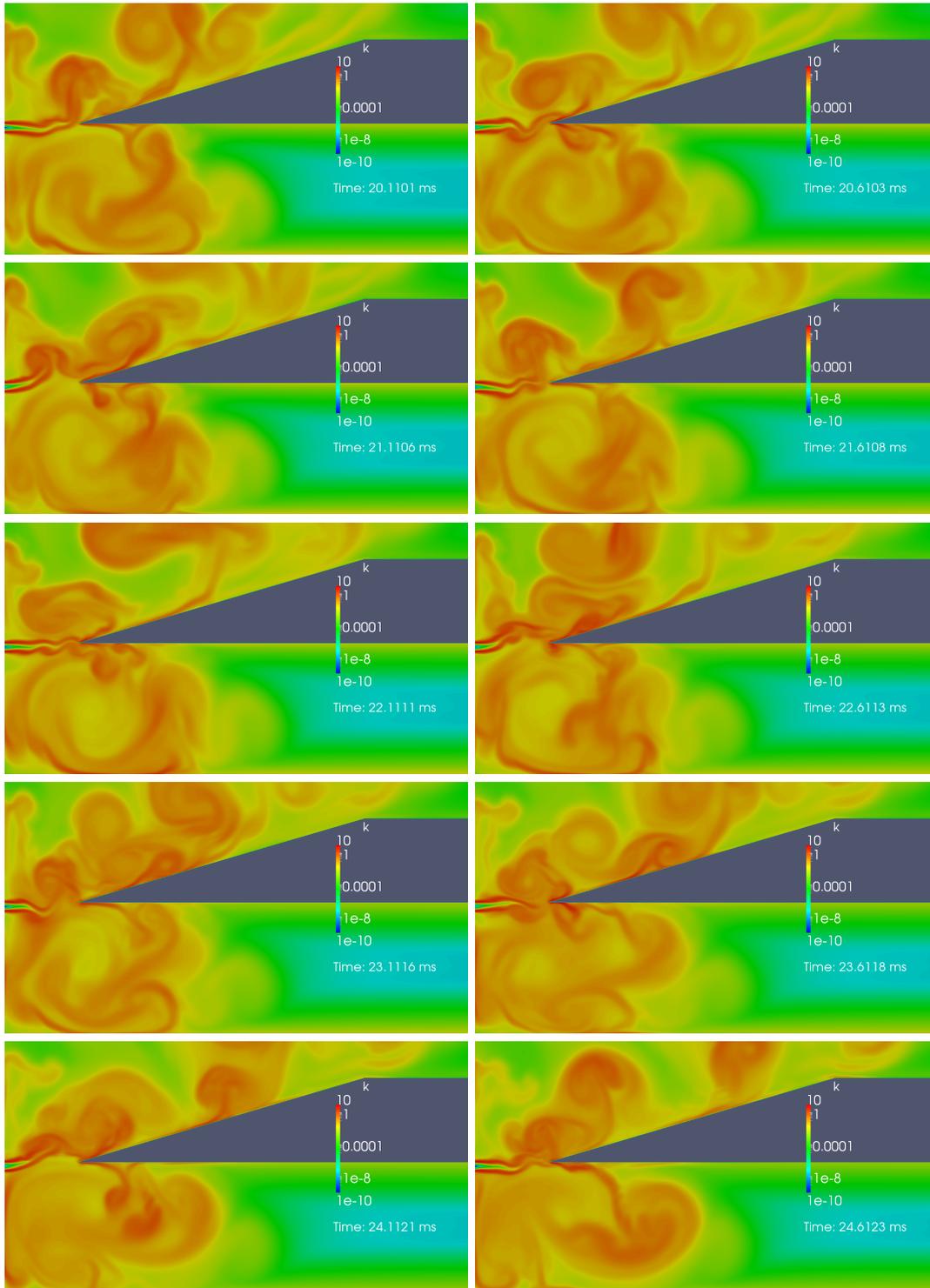
auf den Jet und drückt diesen nach außen. Das ist, nach den Grenzschichtinstabilitäten und der Störung durch das Oberlabium, die dritte Störung, die die Auslenkung des Jets beeinflusst. Die Störung des Jets durch die zurücklaufenden Schallwellen des Resonators setzt auf der ganzen Breite des Aufschnittes an, insbesondere schon unmittelbar an der Kernspalte. Die Störung wächst dann entlang der Hauptströmungsrichtung des Jets an und bildet seine **Pendelmoden** aus.

Zusammenfassend findet man drei Mechanismen, die die periodischen Auslenkungen des Jets bewirken.



**Abbildung A.11.:** *v.l.o.n.r.u.* Simulation der Anströmung des Labiums einer Orgelpfeife durch einen Jet. Ausbildung eines hin und her schwingenden Luftblattes und Abriss von Wirbeln. Gezeigt ist der Betrag der Geschwindigkeit  $|v|$  (in der dargestellten Filmsequenz mit U Magnitude bezeichnet).

Das sind erstens die Grenzschichtinstabilitäten des Freistrahls, zweitens das Oberlabium, um dessen



**Abbildung A.12.:** *v.l.o.n.r.u.* Simulation der Anströmung des Labiums einer Orgelpfeife durch den Jet. Ausbildung eines hin und her schwingenden Luftblattes und Abriß von Wirbeln. Gezeigt ist die turbulente kinetische Energie  $k$ , die logarithmisch skaliert ist.

Spitze sich ein schwingender Druck-Dipol ausbildet und drittens die zurücklaufenden Schallwellen des

Resonators. Der Unterdruck im Zentrum des rotierenden Primärwirbels bewirkt, dass der durch die Schallwelle in den Außenraum ausgelenkte Jet wieder zurück in die Kopplungsregion gelenkt wird.

## B. Mathematik

### B.1. Vom van der Pol Oszillator zur Adler-Gleichung

Es sollen zwei Gleichungen für die Dynamik der Phasendifferenz und der Amplitude am Beispiel des getriebenen van der Pol Oszillators geschrieben werden. Der autonome van der Pol Oszillator als Beispiel für einen selbsterregten Oszillator lautet

$$\ddot{x} - \mu(1 - x^2)\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad (\text{B.1})$$

Man kann nun eine treibende, externe, periodische Kraft  $f(t)$  einführen, die unidirektional auf den van der Pol Oszillator wirkt. Die einfachste Möglichkeit dafür lautet

$$f(t) = \varepsilon \cos(\omega t) \quad (\text{B.2})$$

mit der Amplitude der erregenden, externen Kraft  $\varepsilon$  und der treibenden, externen Frequenz  $\omega$ . Die Gleichung für den so getriebenen van der Pol Oszillator lautet dann

$$\ddot{x} - \mu(1 - x^2)\dot{x} + \omega_0^2 x = \varepsilon \cos(\omega t) \quad (\text{B.3})$$

Es gibt bislang keine exakte, analytische Lösung der Gleichung B.3 für beliebige Parameter  $\mu$ ,  $\varepsilon$  und  $\omega$ . Unter bestimmten Annahmen lassen sich jedoch Näherungslösungen analytisch finden. Das soll jetzt kurz gezeigt werden. Das Verfahren orientiert sich an den Ausführungen von Andronov, Witt und Chaikin, *Theory of Oscillations* von 1937, bzw. der deutschen Übersetzung [4] und an den Ausführungen von [6]. Dazu werden folgende Umformungen gemacht. Zunächst substituiert man

$$y = \sqrt{\mu}x$$

Daraus folgt

$$x = \frac{1}{\sqrt{\mu}}y, \quad \dot{x} = \frac{1}{\sqrt{\mu}}\dot{y}, \quad \ddot{x} = \frac{1}{\sqrt{\mu}}\ddot{y} \quad \text{sowie} \quad x^2 = \frac{1}{\mu}y^2$$

Einsetzen in Gleichung B.3 ergibt

$$\frac{1}{\sqrt{\mu}}\ddot{y} - \mu \left(1 - \frac{1}{\mu}y^2\right) \frac{1}{\sqrt{\mu}}\dot{y} + \frac{\omega_0^2}{\sqrt{\mu}}y = \varepsilon \cos(\omega t) \quad (\text{B.4})$$

Multiplizieren mit dem Term  $\sqrt{\mu}$  führt zu

$$\ddot{y} - (\mu - y^2)\dot{y} + \omega_0^2 y = \varepsilon \sqrt{\mu} \cos(\omega t) \quad (\text{B.5})$$

und mit  $B = \varepsilon \sqrt{\mu}$  zu

$$\ddot{y} - (\mu - y^2)\dot{y} + \omega_0^2 y = B \cos(\omega t) \quad (\text{B.6})$$

Nimmt man den Parameter  $\mu$  als klein an, so wird das System näherungsweise ein harmonisches System sein. Man nennt diese Näherung auch ein **quasi-harmonisches System**. Die Lösung des quasi-harmonischen Systems wird, als Antwort auf die treibende Kraft, Frequenzanteile jener Kraft besitzen, etwa

$$y(t) = A(t) \cos(\omega t + \varphi(t)) \quad (\text{B.7})$$

Dabei bezeichnet  $A(t)$  die Einhüllende der Oszillationen  $y(t)$ . Seien nun  $A(t)$  und  $\varphi(t)$  sich nur langsam ändernde Funktionen der Zeit, langsam in Bezug auf die Periode des ungestörten Systems, das heißt

$$\dot{A}(t) \ll \omega A(t) \quad \text{und} \quad |\dot{\varphi}(t)| \ll \omega \quad (\text{B.8})$$

Die Phase der getriebenen Oszillationen ist dann

$$\Psi(t) = \omega t + \varphi(t) \quad (\text{B.9})$$

während die Phase des treibenden Systems

$$\Psi_f(t) = \omega t \quad (\text{B.10})$$

ist. Somit ist die Phasendifferenz zwischen dem treibenden und dem getriebenen System  $\varphi(t)$ . Ist die Phasendifferenz konstant, so sind die Oszillationen  $y(t)$  des Systems durch das externe Treiben 1 : 1 synchronisiert und harmonisch mit der Frequenz  $\omega$ . Ändert sich  $\varphi(t)$  mit der Zeit, gibt es keine 1 : 1 Synchronisation. Synchronisation meint also, dass es stabile Fixpunkte in den Gleichungen für  $A$  und  $\varphi$  gibt.

Um die verkürzten Gleichungen für  $A$  und  $\varphi$  zu schreiben, kann man die Methode der zeitlichen Mittelung von Krylow und Bogoliubov anwenden. Formal ergibt sich für die Ableitung von  $y(t)$  zunächst

$$\dot{y}(t) = \dot{A} \cos(\omega t + \varphi) - A\omega \sin(\omega t + \varphi) - A\dot{\varphi} \sin(\omega t + \varphi) \quad (\text{B.11})$$

Die Ableitung sollte die Form der Ableitung der quasi-harmonischen Lösung B.7 haben, also

$$\dot{y}(t) = -A\omega \sin(\omega t + \varphi(t)) \quad (\text{B.12})$$

Der Vergleich beider Lösungen ergibt folgende Bedingung

$$\dot{A} \cos(\omega t + \varphi) - A\dot{\varphi} \sin(\omega t + \varphi) = 0 \quad (\text{B.13})$$

Als nächstes muss  $\dot{y}$  gefunden werden. Man schreibt zunächst

$$y = A \cos(\omega t + \varphi) = \frac{A}{2} \left( e^{i(\omega t + \varphi)} + e^{-i(\omega t + \varphi)} \right) \quad (\text{B.14})$$

$$= \frac{1}{2} \left( e^{i\omega t} A e^{i\varphi} + e^{-i\omega t} A e^{-i\varphi} \right) \quad (\text{B.15})$$

Man führt die zueinander konjugiert komplexen Funktionen der Zeit  $a$  und  $a^*$  ein

$$a = A e^{i\varphi} \quad \text{und} \quad a^* = A e^{-i\varphi} \quad (\text{B.16})$$

so dass  $y$  geschrieben werden kann als

$$y = \frac{1}{2} (a e^{i\omega t} + a^* e^{-i\omega t}) \quad (\text{B.17})$$

Man bezeichnet  $a$  als die komplexe Amplitude der Oszillationen. Die Bedingung B.13 schreibt sich damit als

$$\frac{\dot{A}}{2} \left( e^{i(\omega t + \varphi)} + e^{-i(\omega t + \varphi)} \right) - \frac{A\dot{\varphi}}{2i} \left( e^{i(\omega t + \varphi)} - e^{-i(\omega t + \varphi)} \right) \quad (\text{B.18})$$

$$= \frac{1}{2} \left( e^{i\omega t} \dot{A} e^{i\varphi} + e^{-i\omega t} \dot{A} e^{-i\varphi} \right) - \frac{1}{2i} \left( e^{i\omega t} A \dot{\varphi} e^{i\varphi} - e^{-i\omega t} A \dot{\varphi} e^{-i\varphi} \right) \quad (\text{B.19})$$

$$= \frac{1}{2} e^{i\omega t} \left( \dot{A} e^{i\varphi} + i A \dot{\varphi} e^{i\varphi} \right) + \frac{1}{2} e^{-i\omega t} \left( \dot{A} e^{-i\varphi} - i A \dot{\varphi} e^{-i\varphi} \right) = 0 \quad (\text{B.20})$$

Mit

$$\dot{a} = \dot{A} e^{i\varphi} + i A \dot{\varphi} e^{i\varphi} \quad \text{und} \quad \dot{a}^* = \dot{A} e^{-i\varphi} - i A \dot{\varphi} e^{-i\varphi} \quad (\text{B.21})$$

schreibt sich die Bedingung B.13 zu

$$\dot{a} e^{i\omega t} + \dot{a}^* e^{-i\omega t} = 0 \quad (\text{B.22})$$

Mit diesen Umformungen schreibt sich  $\dot{y}$  als

$$\dot{y} = -\frac{A\omega}{2i} \left( e^{i(\omega t + \varphi)} - e^{-i(\omega t + \varphi)} \right) \quad (\text{B.23})$$

$$= \frac{i\omega}{2} \left( a e^{i\omega t} - a^* e^{-i\omega t} \right) \quad (\text{B.24})$$

Jetzt lässt sich  $\ddot{y}$  als Ableitung von B.24 schreiben

$$\ddot{y} = \frac{i\omega}{2} \left( \dot{a} e^{i\omega t} + i a \omega e^{i\omega t} - \dot{a}^* e^{-i\omega t} + i a^* \omega e^{-i\omega t} \right) \quad (\text{B.25})$$

$$= \frac{i\omega}{2} \dot{a} e^{i\omega t} - \frac{\omega^2}{2} a e^{i\omega t} - \frac{i\omega}{2} \dot{a}^* e^{-i\omega t} - \frac{\omega^2}{2} a^* e^{-i\omega t} \quad (\text{B.26})$$

Addition und Subtraktion des Terms  $\frac{i\omega}{2} (\dot{a} e^{i\omega t})$  und anschließende Umsortierung führt auf

$$\ddot{y} = \left( i\omega \dot{a} e^{i\omega t} - \frac{i\omega}{2} \dot{a} e^{i\omega t} \right) - \frac{\omega^2}{2} a e^{i\omega t} - \frac{i\omega}{2} \dot{a}^* e^{-i\omega t} - \frac{\omega^2}{2} a^* e^{-i\omega t} \quad (\text{B.27})$$

Die Summe des zweiten und vierten Terms erfüllt die Bedingung B.22 und ist Null. Es bleibt

$$\ddot{y} = i\omega \dot{a} e^{i\omega t} - \frac{\omega^2}{2} \left( a e^{i\omega t} + a^* e^{-i\omega t} \right) \quad (\text{B.28})$$

Setzt man nun  $y$ ,  $\dot{y}$ ,  $\ddot{y}$  in die ursprüngliche Gleichung des getriebenen van der Pol Oszillators B.6 ein, so ergibt sich

$$\begin{aligned}
& i\omega\dot{a}e^{i\omega t} - \frac{\omega^2}{2}(ae^{i\omega t} + a^*e^{-i\omega t}) \\
& - \left( \mu - \frac{1}{4}(ae^{i\omega t} + a^*e^{-i\omega t})^2 \right) \frac{i\omega}{2}(ae^{i\omega t} - a^*e^{-i\omega t}) \\
& + \frac{\omega_0^2}{2}(ae^{i\omega t} + a^*e^{-i\omega t}) \\
& = \frac{B}{2}(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t})
\end{aligned} \tag{B.29}$$

Umgruppierung ergibt

$$\begin{aligned}
& i\omega\dot{a}e^{i\omega t} + \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{2}(ae^{i\omega t} + a^*e^{-i\omega t}) - \mu\frac{i\omega}{2}ae^{i\omega t} + \mu\frac{i\omega}{2}a^*e^{-i\omega t} \\
& + \frac{1}{4}(a^2e^{i2\omega t} + a^{*2}e^{-i2\omega t} + 2aa^*)\frac{i\omega}{2}(ae^{i\omega t} - a^*e^{-i\omega t}) \\
& = \frac{B}{2}(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t})
\end{aligned} \tag{B.30}$$

Ausklammern führt zu

$$\begin{aligned}
& i\omega\dot{a}e^{i\omega t} + \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{2}(ae^{i\omega t} + a^*e^{-i\omega t}) - \mu\frac{i\omega}{2}ae^{i\omega t} + \mu\frac{i\omega}{2}a^*e^{-i\omega t} \\
& + \frac{i\omega}{8}a^3e^{i3\omega t} - \frac{i\omega}{8}a^2a^*e^{i\omega t} + \frac{i\omega}{8}aa^{*2}e^{-i\omega t} - \frac{i\omega}{8}a^{*3}e^{-i3\omega t} \\
& + \frac{i\omega}{4}a^2a^*e^{i\omega t} - \frac{i\omega}{4}aa^{*2}e^{-i\omega t} \\
& = \frac{B}{2}(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t})
\end{aligned} \tag{B.31}$$

Zusammenfassen ähnlicher Terme und Multiplikation der gesamten Gleichung mit  $e^{-i\omega t}/(i\omega)$  ergibt

$$\begin{aligned}
& \dot{a} + \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{2i\omega}(a + a^*e^{-i2\omega t}) - \frac{\mu}{2}a + \frac{\mu}{2}a^*e^{-i2\omega t} \\
& + \frac{1}{8}a^3e^{i2\omega t} + \frac{1}{8}a^2a^* - \frac{1}{8}aa^{*2}e^{-i2\omega t} - \frac{1}{8}a^{*3}e^{-i4\omega t} \\
& = \frac{B}{2i\omega}(1 - e^{-i2\omega t})
\end{aligned} \tag{B.32}$$

In dieser Gleichung sind  $a$ ,  $\dot{a}$  und  $a^*$  sich relativ zu  $e^{\pm n\omega t}$  zeitlich langsam verändernde Funktionen. Das heißt, sie ändern sich beim Durchlauf einer Periode der schnellen Oszillationen  $\omega$  kaum. Man mittelt nun die ganze Gleichung über eine Periode von  $T = 2\pi/\omega$  der schnellen Oszillationen. Dabei verschwinden die schnellen Terme und nur die langsamen Terme bleiben übrig. Das zeitliche Mittel einer glatten Funktion  $g$  über ein bestimmtes Zeitintervall schreibt sich als

$$\langle g \rangle = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} g(t) dt \tag{B.33}$$

Mit dieser Mittelung werden die Terme mit  $e^{-i2\omega t}$  der Gleichung B.32 allesamt Null. Exemplarisch wird hier der zweite dieser Terme berechnet

$$\begin{aligned}
\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \frac{\mu}{2} a^* e^{-i2\omega t} dt & \quad (B.34) \\
& \approx \frac{\mu}{2} a^* \frac{\omega}{2\pi} \int_{t_0}^{t_0+\frac{2\pi}{\omega}} e^{-i2\omega t} dt \\
& = \frac{\mu}{2} a^* \frac{\omega}{2\pi} \left( \frac{1}{-2i\omega} \right) e^{-i2\omega t} \Big|_{t_0}^{t_0+\frac{2\pi}{\omega}} \\
& = \frac{\mu}{2} a^* \frac{\omega}{2\pi} \left( \frac{1}{-2i\omega} \right) \left( \underbrace{\cos(2\omega t) \Big|_{t_0}^{t_0+\frac{2\pi}{\omega}}}_{=0} - i \underbrace{\sin(2\omega t) \Big|_{t_0}^{t_0+\frac{2\pi}{\omega}}}_{=0} \right) = 0
\end{aligned}$$

Die trigonometrischen Terme werden Null, weil die Funktionen  $2\pi$ -periodisch sind. Genauso zeigt man, dass Terme mit  $e^{i2\omega}$  und mit  $e^{-i4\omega}$  in Gleichung B.32 auch Null werden. Berücksichtigt man, dass

$$a^2 a^* = a(aa^*) = a|a|^2$$

gilt, so erhält man die zeitgemittelten Gleichungen zu

$$\dot{a} + \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{2i\omega} a - \frac{\mu}{2} a + \frac{1}{8} a|a|^2 = -i \frac{B}{2\omega} \quad (B.35)$$

Erinnert man, dass die komplexe Amplitude definiert war als  $a = Ae^{i\varphi}$ , dann ergibt sich aus Gl. B.35

$$\dot{A}e^{i\varphi} + Ai\dot{\varphi}e^{i\varphi} - i\frac{\omega_0^2 - \omega^2}{2\omega} Ae^{i\varphi} - \frac{\mu}{2} Ae^{i\varphi} + \frac{1}{8} A^3 e^{i\varphi} = -i \frac{B}{2\omega}$$

Alles mit  $e^{-i\varphi}$  multipliziert, ergibt

$$\dot{A} + Ai\dot{\varphi} - i\frac{\omega_0^2 - \omega^2}{2\omega} A - \frac{\mu}{2} A + \frac{1}{8} A^3 = -i \frac{B}{2\omega} e^{-i\varphi}$$

Man führt nun die **Frequenzverstimmung**  $\Delta$  zwischen dem ungestörten und dem getriebenen System ein

$$\Delta = \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{2\omega} \approx \omega_0 - \omega \quad (B.36)$$

wobei die Näherung dann möglich ist, wenn die treibende Frequenz  $\omega$  nahe bei der Frequenz des ungestörten Systems  $\omega_0$  liegt, also  $\omega_0 \approx \omega$  gilt. Ersetzt man noch  $e^{-i\varphi}$  durch  $\cos \varphi$  und  $\sin \varphi$ , so ergibt sich

$$\dot{A} + iA\dot{\varphi} - iA\Delta - \frac{\mu}{2} A + \frac{1}{8} A^3 = -i \frac{B}{2\omega} (\cos \varphi - i \sin \varphi)$$

Separiert man jetzt noch Real- und Imaginärteile der Gleichung so erhält man

$$\dot{A} - \frac{\mu}{2} A + \frac{1}{8} A^3 = -\frac{B}{2\omega} \sin \varphi \quad (B.37)$$

$$A\dot{\varphi} - A\Delta = -\frac{B}{2\omega} \cos \varphi \quad (B.38)$$

und schließlich

$$\dot{A} = \frac{\mu}{2}A - \frac{1}{8}A^3 - \frac{B}{2\omega} \sin \varphi \quad (\text{B.39})$$

$$\dot{\varphi} = \Delta - \frac{B}{2\omega A} \cos \varphi \quad (\text{B.40})$$

Dies sind die verkürzten Gleichungen für die Amplitude  $A$  der getriebenen Oszillationen und für die Phasendifferenz  $\varphi$  zwischen dem getriebenen und dem treibenden, externen System. Die Gleichung B.40 der Phasendifferenz ist auch bekannt unter dem Namen **Adler-Gleichung** [3]. Beides sind nichtlineare Differentialgleichungen erster Ordnung. Die Gleichungen sind gekoppelt, das heißt, Amplitude und Phase beeinflussen sich gegenseitig. Es sind die Fundamentalgleichungen für die Beschreibung von Synchronisation. Sehr interessant dabei ist, dass die Analyse des **nicht-autonomen** Systems des getriebenen van der Pol Oszillators reduziert wird auf die Analyse eines **autonomen**, also nicht explizit zeitabhängigen Systems B.39, B.40. Statt der perioden Orbits werden jetzt also Fixpunkte analysiert, was erheblich leichter ist. Fixpunkte der Gleichungen B.39, B.40 bedeuten, dass die Phasendifferenz  $\varphi$  zwischen dem Oszillator und der treibenden, externen Kraft sich zeitlich nicht verändert ( $\varphi = \text{const.}$ ), wenn zum Beispiel die externe Kraft das System synchronisiert hat und die Oszillationen periodisch mit konstanter Amplitude und Frequenz  $\omega$  der treibenden, externen Kraft schwingen (vgl. Abschnitt 2.1.2). Das heißt, das Auffinden der Bedingungen, wann die Fixpunkte stabil sind, ist gleichbedeutend mit dem Auffinden der Bedingungen für welche eine 1 : 1 Synchronisation entsteht.

## B.2. Vom Rayleigh-Oszillator zum van der Pol-Oszillator

Die originale Formulierung des Rayleigh-Oszillators lautet (vgl. [28])

$$\ddot{u} + \kappa \dot{u} + \kappa' \dot{u}^3 + n^2 u = 0 \quad (\text{B.41})$$

wobei  $u$  die Auslenkung der Luftteilchen durch den Schall ist,  $\kappa$  und  $\kappa'$  als klein Konstanten angenommen werden und  $\omega_0$  die Kreisfrequenz ist, mit der das System schwingt. Mit den Umbenennungen  $\kappa = -\mu$ ,  $\kappa' = \frac{\mu}{3}$  und  $n^2 = \omega_0^2$  schreibt sich der Rayleigh-Oszillator etwas moderner als

$$\ddot{u} - \mu \left(1 - \frac{1}{3}\dot{u}^2\right) \dot{u} + \omega_0^2 u = 0 \quad (\text{B.42})$$

Differentiation nach der Zeit

$$\ddot{u} - \frac{d}{dt} \left( \mu \dot{u} + \frac{\mu}{3} \dot{u}^3 \right) + \omega_0^2 \dot{u} = 0 \quad (\text{B.43})$$

führt auf

$$\ddot{u} - \mu \ddot{u} + \mu \dot{u}^2 \ddot{u} + \omega_0^2 \dot{u} = 0 \quad (\text{B.44})$$

bzw. auf

$$\ddot{u} - \mu (1 - \dot{u}^2) \ddot{u} + \omega_0^2 \dot{u} = 0 \quad (\text{B.45})$$

Die Umbenennung  $\dot{u} \rightarrow x$  ergibt schließlich den van der Pol-Oszillator

$$\ddot{x} - \mu(1 - x^2)\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad (\text{B.46})$$

### B.3. Die freie Green's Funktion - Retardiertes Potential

Green's Funktionen sind ein fundamentales Werkzeug zur Beschreibung der Propagation von Schallwellen in der linearen Akustik. Die kausale Lösung der inhomogenen Wellengleichung, die durch die stoßartige punktförmige Schallquelle  $\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y})\delta(t - \tau)$  am Punkt  $\mathbf{x} = \mathbf{y}$  zur Zeit  $t = \tau$  generiert wird, ist die Green's Funktion für den freien Raum  $G(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t - \tau)$ . Die Gleichung für die Green's Funktion  $G$  erhält man aus der Lösung 2.102 in dem man  $\mathbf{x}$  durch  $\mathbf{x} - \mathbf{y}$  und  $t$  durch  $t - \tau$  ersetzt, d.h., wenn

$$\left(\frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2\right) G = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y})\delta(t - \tau), \quad \text{wobei } G = 0 \quad \text{für } t < \tau \quad (\text{B.47})$$

dann ist

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t - \tau) = \frac{1}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \delta\left(t - \tau - \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|}{c_0}\right) \quad (\text{B.48})$$

Dies repräsentiert eine stoßartige, sphärisch symmetrische Wellenausbreitung ausgehend von der punktförmigen Schallquelle bei  $\mathbf{y}$  mit der Schallgeschwindigkeit  $c_0$ . Die Amplitude der sich ausbreitenden Welle nimmt umgekehrt proportional zum Abstand  $|\mathbf{x} - \mathbf{y}|$  ab. Man kann dies verallgemeinern. Dazu führt man eine generalisierte Schallquelle  $\mathcal{F}(\mathbf{x}, t)$  ein

$$\left(\frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2\right) p = \mathcal{F}(\mathbf{x}, t) \quad (\text{B.49})$$

Der Quellterm  $\mathcal{F}(\mathbf{x}, t)$  lässt sich durch eine Verteilung von punktförmigen, stoßartig pulsierenden Schallquellen darstellen

$$\mathcal{F}(\mathbf{x}, t) = \iint_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}(\mathbf{y}, \tau) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \delta(t - \tau) d^3\mathbf{y} d\tau$$

Die Lösung für die ausgehende Welle jedes der konstituierenden Quellterme

$$\mathcal{F}(\mathbf{y}, \tau) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \delta(t - \tau) d^3\mathbf{y} \quad \text{ist} \quad \mathcal{F}(\mathbf{y}, \tau) G(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t - \tau) d^3\mathbf{y} d\tau$$

Damit erhält man schließlich

$$p(\mathbf{x}, t) = \iint_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}(\mathbf{y}, \tau) G(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t - \tau) d^3\mathbf{y} d\tau \quad (\text{B.50})$$

$$= \frac{1}{4\pi} \iint_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathcal{F}(\mathbf{y}, \tau)}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \delta\left(t - \tau - \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|}{c_0}\right) d^3\mathbf{y} d\tau \quad (\text{B.51})$$

$$\text{zum Beispiel } p(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi} \iint_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathcal{F}(\mathbf{y}, t - \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|}{c_0})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} d^3\mathbf{y} \quad (\text{B.52})$$

Diese Integralformel nennt man **retardiertes Potential**. Sie stellt den Druck  $p$  an der Stelle  $\mathbf{x}$  zur Zeit  $t$  als Superposition von Beiträgen punktförmiger Schallquellen an den Positionen  $\mathbf{y}$  dar, welcher zur früheren Zeit  $t - |\mathbf{x} - \mathbf{y}|/c_0$  generiert wurde. Die Größe  $|\mathbf{x} - \mathbf{y}|/c_0$  stellt die Zeitspanne dar, die der Schall benötigt, um von  $\mathbf{y}$  nach  $\mathbf{x}$  zu propagieren.

## B.4. LES - Large Eddy Simulation

Die Large Eddy Simulation (LES) ist ein mathematisches Modell zur Beschreibung von Turbulenz in numerischen Simulation strömungsmechanischer Probleme. Das Modell wurde 1963 von dem amerikanischen Meteorologen Joseph Smagorinsky ([33]) vorgeschlagen, um großskalige Strömungen in der Atmosphäre zu simulieren. Die Hauptidee ist die örtliche und zeitliche Tiefpass-Filterung des entsprechenden Feldes wie in Gleichung B.53 dargestellt. Dabei ist  $G$  der Faltungskern des Filters.

$$\overline{\phi(\vec{x}, t)} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(\vec{r}, t') G(\vec{x} - \vec{r}, t - t') dt' dr. \quad (\text{B.53})$$

Man schreibt auch kürzer

$$\bar{\phi} = G * \phi. \quad (\text{B.54})$$

Der Filterkern  $G$  hat eine Cutoff-Längenskala von  $\Delta$  und eine Cutoff-Zeitskala von  $\tau_C$ , die, numerisch betrachtet, die jeweiligen Skalen des Rechengitters (Mesh) darstellen. Skalen, die kleiner als diese Cutoffs sind, werden nicht mehr aufgelöst und müssen geeignet modelliert werden. Das Feld wird also zerlegt in einen durch den Filter auflösbaren Anteil  $\bar{\phi}$  und einen zweiten Anteil  $\phi'$ , der unterhalb der Auflösungsgrenze liegt

$$\phi = \bar{\phi} + \phi'. \quad (\text{B.55})$$

Für kompressible Flüsse wird die Dichte-gewichtete Fabré-Filterung verwendet

$$\bar{\phi} = \frac{\overline{\rho\phi}}{\bar{\rho}}. \quad (\text{B.56})$$

Mit der Fabré-Filterung schreiben sich die kompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen als

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} = - \frac{\partial(\bar{\rho} \tilde{u}_j)}{\partial x_j}, \quad (\text{B.57})$$

$$\frac{\partial(\bar{\rho} \tilde{u}_i)}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{\rho} \tilde{u}_i \tilde{u}_j - \bar{p} \delta_{ij} - \tilde{\sigma}_{ij} + \tau_{ij}), \quad (\text{B.58})$$

$$\frac{\partial(\bar{\rho} \tilde{E})}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{\rho} \tilde{E} \tilde{u}_j + \bar{p} \tilde{u}_j - \tilde{\sigma}_{ij} \tilde{u}_i - \tilde{Q}_j + q_j) + H, \quad (\text{B.59})$$

$$\bar{p} = \bar{\rho} R \tilde{T}, \quad (\text{B.60})$$

mit  $\rho$ ,  $u_i$ ,  $p$ ,  $E$ , Dichte,  $i$ -ter Geschwindigkeitskomponente, Druck und totaler spezifischer Energie. Die Gleichungen für den mittleren, viskosen Spannungstensor  $\tilde{\sigma}_{ij}$  und den mittleren Wärmefluss  $\tilde{Q}_j$  lauten

$$\widetilde{\sigma}_{ij} = \mu \left( \frac{\partial \widetilde{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \widetilde{u}_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial \widetilde{u}_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right) \quad (\text{B.61})$$

$$\widetilde{Q}_j = \kappa \frac{\partial \widetilde{T}}{\partial x_j}, \quad (\text{B.62})$$

mit der dynamischen Viskosität  $\mu$  und der thermischen Leitfähigkeit  $\kappa$ . Die Terme  $\tau_{ij}$  und  $q_j$  sind der Spannungstensor und der Wärmefluss der Skalen unterhalb der Cutoff-Skalen, den sogenannten **subgrid scales**, oder einfach **SGS**. Im Folgenden werden diese Größen  $\tau_{ij}$  **SGS-Spannungstensor** und  $q_j$  **SGS-Wärmefluss** genannt.

$$\tau_{ij} = \bar{\rho} (\widetilde{u_i u_j} - \widetilde{u_i} \widetilde{u_j}), \quad (\text{B.63})$$

$$q_j = C_p \left( \bar{\rho} \widetilde{T u_j} - \bar{\rho} \widetilde{T} \widetilde{u_j} \right). \quad (\text{B.64})$$

Der Term  $H$  in Gleichung (B.59) lautet

$$\begin{aligned} H = & \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \frac{1}{2} (\bar{\rho} \widetilde{u_i u_i u_j} - \bar{\rho} \widetilde{u_i u_i} \widetilde{u_j}) \right] + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \widetilde{\mu} \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] + \left[ \mu \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \widetilde{\mu} \frac{\partial \widetilde{u}_i}{\partial x_j} \frac{\partial \widetilde{u}_j}{\partial x_i} \right] \\ & + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \frac{1}{3} \left( \overline{\mu u_j \frac{\partial u_k}{\partial x_k}} - \widetilde{\mu} \widetilde{u_j} \frac{\partial \widetilde{u}_k}{\partial x_k} \right) \right] - \left[ \mu \left( \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right)^2 - \widetilde{\mu} \left( \frac{\partial \widetilde{u}_k}{\partial x_k} \right)^2 \right]. \end{aligned} \quad (\text{B.65})$$

Die Größe  $k$  bezeichnet hierin die kinetische Energie der Subgrid-Skalen, im Folgenden **SGS-kinetische Energie** genannt. Die kinetische Energie  $k$  konstituiert sich über die Gleichung

$$\bar{\rho} k = \frac{1}{2} \tau_{kk} = \frac{1}{2} \bar{\rho} (\widetilde{u_k u_k} - \widetilde{u_k} \widetilde{u_k}) \quad (\text{B.66})$$

Dabei werden folgende Annahmen gemacht. Zum Einen geht man davon aus, dass die Filterung und die Ableitungen kommutieren. Zum Zweiten seien die Viskosität  $\mu$  und die thermische Leitfähigkeit  $\kappa$  als intensive Größen angenommen, so dass sie aus der Filterung herausgezogen werden können. Wie schon angedeutet, lassen sich die SGS Größen und die meisten Terme von  $H$  nicht direkt numerisch lösen. Sie müssen durch ein geeignetes Modell behandelt werden.

In unserer Simulation wurde das dynamische **SGS-k-Gleichungsmodell oneEqEddy** verwendet, ein Modell, das eine Transportgleichung für  $k$  beinhaltet. Sie kann hergeleitet werden indem man das Produkt der gefilterten Geschwindigkeit und der gefilterten Impulsgleichung von dem gefilterten Produkt der selben abzieht. Gemeint ist

$$[u_i \times \widetilde{Impulsgl.}] - \widetilde{u_i} \times \widetilde{Impulsgl.} \quad (\text{B.67})$$

Man erhält

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \bar{\rho} k}{\partial t} = & -\frac{\partial \bar{\rho} k \tilde{u}_j}{\partial x_j} - R \frac{\partial q_j}{\partial x_j} + \frac{\partial \tau_{ij} \tilde{u}_i}{\partial x_j} - \tau_{ij} \tilde{S}_{ij} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \tilde{\mu} \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] \\
& + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \frac{1}{2} \tilde{\rho} (\overline{u_i \tilde{u}_i u_j} - \overline{\tilde{u}_i u_i u_j}) + \frac{1}{3} \left( \overline{\mu u_j \frac{\partial u_k}{\partial x_k}} - \tilde{\mu} \tilde{u}_j \frac{\partial \tilde{u}_k}{\partial x_k} \right) \right] \\
& - \left( \overline{\mu \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}} - \tilde{\mu} \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} \right) - \frac{1}{3} \left[ \overline{\mu \left( \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right)^2} - \tilde{\mu} \left( \frac{\partial \tilde{u}_k}{\partial x_k} \right)^2 \right] \\
& + \left( \overline{p \frac{\partial u_k}{\partial x_k}} - \tilde{p} \frac{\partial \tilde{u}_k}{\partial x_k} \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \overline{\mu \frac{\partial (\frac{1}{2} u_i u_i)}{\partial x_j}} - \tilde{\mu} \frac{\partial (\frac{1}{2} \tilde{u}_i \tilde{u}_i)}{\partial x_j} \right] \\
& + \left[ \left( \overline{u_i \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - u_j \frac{\partial u_k}{\partial x_k}} \right) \frac{\partial \mu}{\partial x_j} - \left( \overline{\tilde{u}_i \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_i} - \tilde{u}_j \frac{\partial \tilde{u}_k}{\partial x_k}} \right) \frac{\partial \tilde{\mu}}{\partial x_j} \right],
\end{aligned} \tag{B.68}$$

mit  $k$ ,  $\tau_{ij}$ ,  $q_j$  der SGS-kinetischen Energie, dem SGS-Spannungstensor und dem SGS-Wärmefluss. Die Größe  $S_{ij}$  ist der Dehnungstensor. Die Gleichung (B.68) ist exakt. Die Gleichung lässt sich vereinfachen, indem man die zwei letzten Terme vernachlässigt und schreibt

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \bar{\rho} k}{\partial t} = & -\frac{\partial \bar{\rho} k \tilde{u}_j}{\partial x_j} - R \frac{\partial q_j}{\partial x_j} + \frac{\partial \tau_{ij} \tilde{u}_i}{\partial x_j} - \tau_{ij} \tilde{S}_{ij} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \tilde{\mu} \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] \\
& + \frac{\partial f_j}{\partial x_j} - \epsilon_s - \epsilon_c + \Pi,
\end{aligned} \tag{B.69}$$

wobei

$$f_j = \frac{1}{2} \tilde{\rho} (\overline{u_i \tilde{u}_i u_j} - \overline{\tilde{u}_i u_i u_j}) + \frac{1}{3} \left( \overline{\mu u_j \frac{\partial u_k}{\partial x_k}} - \tilde{\mu} \tilde{u}_j \frac{\partial \tilde{u}_k}{\partial x_k} \right), \tag{B.70}$$

$$\epsilon_s = \overline{\mu \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}} - \tilde{\mu} \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j}, \tag{B.71}$$

$$\epsilon_c = \frac{1}{3} \left[ \overline{\mu \left( \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right)^2} - \tilde{\mu} \left( \frac{\partial \tilde{u}_k}{\partial x_k} \right)^2 \right], \tag{B.72}$$

$$\Pi = \overline{p \frac{\partial u_k}{\partial x_k}} - \tilde{p} \frac{\partial \tilde{u}_k}{\partial x_k} \tag{B.73}$$

die Terme für den Transport (Dichtediffusion + 1/3 Korrelation), SGS-Dissipation, SGS-Dichtediffusion sowie die SGS-Druckschwankung darstellen. Diese Terme müssen modelliert werden. Man wendet dazu die Wirbel-Viskosität und die Wirbel-Diffusivität auf den SGS-Spannungstensor  $\tau_{ij}$  und den SGS-Wärmefluss  $q_i$  an. Statt der Skala für die Geschwindigkeit  $\Delta |\tilde{S}|$  nach Smagorinsky verwendet man  $\sqrt{k}$

$$\tau_{ij} - \frac{2}{3} \bar{\rho} k \delta_{ij} = -2 C_s \Delta \bar{\rho} \sqrt{k} \left( \tilde{S}_{ij} - \frac{1}{3} \tilde{S}_{kk} \delta_{ij} \right), \tag{B.74}$$

$$q_j = -\frac{\mu_t}{Pr_T} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x_j} = -\frac{C_s \Delta \tilde{\rho} \sqrt{k}}{Pr_t} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x_j}. \tag{B.75}$$

Die Smagorinsky-Konstante  $C_s$  und die Prandtl-Zahl  $Pr_T$  sind Modellparameter, die festgelegt werden müssen. Für die Schließung der Energiegleichungen werden die Größen  $f_j$ ,  $\epsilon_s$ ,  $\epsilon_c$  und  $\Pi$  modelliert. Es werden dazu folgende Ausdrücke verwendet

$$f_j = C_f \bar{\rho} \Delta \sqrt{k} \frac{\partial k}{\partial x_j}, \quad (\text{B.76})$$

$$\epsilon_s = C_{\epsilon_s} \bar{\rho} k^{3/2} \Delta^{-1}, \quad (\text{B.77})$$

$$\epsilon_c = C_{\epsilon_c} \bar{\rho} k^{3/2} \Delta^{-1} M_T^2, \quad (\text{B.78})$$

$$\Pi = C_\Pi \Delta^2 \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_j} \frac{\partial^2 \tilde{u}_k}{\partial x_j \partial x_k} \quad (\text{B.79})$$

Dabei ist der Term  $M_T^2 = \frac{\sqrt{2k}}{\bar{c}_0}$  die turbulente SGS-Machzahl mit der mittleren Schallgeschwindigkeit  $\bar{c}_0$ . In den Anhängen C.6 bis C.11 sind die Implementierungen des Modells in den OpenFOAM-Quellcode einzusehen.

## B.5. Fourier Analyse

### Fourier Transformation

Es war Joan Baptist Fourier (1768-1830), der als erster erkannte, dass jede periodische Funktion mit der Periodendauer  $T$  darstellbar ist als eine im allgemeinen unendliche Summe harmonischer Schwingungen deren spezifische Frequenzen jeweils ganzzahlige Vielfache der Grundfrequenz  $f_0$  sind. Ist die Funktion ein diskretes Signal, dann schreibt man die Zerlegung nach Fourier mit  $\omega_0 = 2\pi/T = 2\pi f_0$  wie folgt.

$$f(t) = c_0 + \left[ \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \cos(n\omega_0 t) + b_n \cdot \sin(n\omega_0 t) \right] \quad (\text{B.80})$$

Die Koeffizienten  $a_n(n\omega_0)$  und  $b_n(n\omega_0)$  nennt man die Fourier-Koeffizienten. Sie zu bestimmen ist Inhalt der Fourier-Analyse. Man findet

$$c_0 = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) dt \quad (\text{B.81})$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cdot \cos(n\omega_0 t) dt \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (\text{B.82})$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cdot \sin(n\omega_0 t) dt \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (\text{B.83})$$

Die Fourierkonstante  $c_0$  ist der zeitliche Mittelwert des Signals  $f(t)$ . Man spricht auch von Gleichanteil (in der Elektrotechnik von DC-Anteil) oder von Offset des Signals.

Mit den Beziehungen

$$a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t) = c_n \sin(n\omega_0 t + \phi_n) \quad (\text{B.84})$$

und

$$c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \quad (\text{B.85})$$

$$\phi_n = \arctan\left(\frac{a_n}{b_n}\right) \quad (\text{B.86})$$

$$(\text{B.87})$$

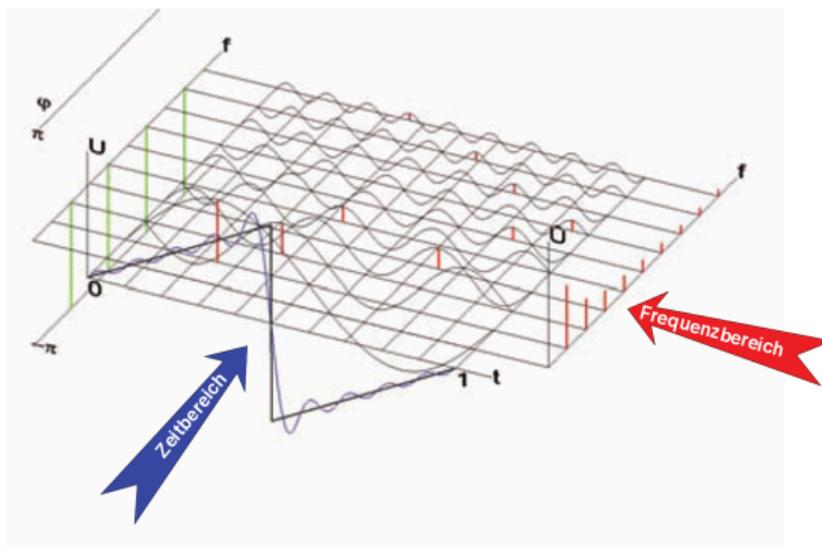
erhält man schließlich die **spektrale Darstellung** der Fourier-Reihe

$$f(\omega) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin(n\omega_0 t + \phi_n) \quad (\text{B.88})$$

Ein periodisches Signal wird also durch die Größen

$c_0$	<b>Mittelwert der Signals <math>f(t)</math>,</b>
$c_n = c_n(n\omega_0)$	<b>Amplitudenspektrum,</b>
$\phi_n = \phi_n(n\omega_0)$	<b>Phasenspektrum</b>

vollständig charakterisiert. Abbildung B.1 veranschaulicht die Sachverhalte.



**Abbildung B.1.:** Weg eines Signals (Sägezahn) vom Ortsraum in den Frequenzraum durch die Fourier-Transformation. (vgl. Karrenberg, Signale, Prozesse, Systeme, 2005)

Allgemein schreibt man die Fourier-Transformation (**FT**) als

$$f(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \quad (\text{B.89})$$

und die inverse Fourier-Transformation

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (\text{B.90})$$

mit welcher man vom Frequenzraum zurück in den Ortsraum wechseln kann. Die vormals diskreten Frequenzen  $n\omega_0$  gehen über in kontinuierliche Frequenzen  $\omega$ . Mathematisch betrachtet, muss  $f(t)$  absolut integrierbar sein. Mehr dazu, siehe z.B. [15].

### Verschiebungssatz

Sollen die Fourier-Koeffizienten  $c'_n$  für ein um  $\tau$  zeitlich verschobenes Signal  $f'(t) = f(t - \tau)$  bestimmt werden, so gilt

$$c'_n = c_n e^{in\omega_0\tau} \quad (\text{B.91})$$

Man sieht, dass die Zeitverschiebung nur das Phasenspektrum beeinflusst. Die jeweiligen Nullphasen werden dabei proportional zur Frequenz ihrer Oberwellen verschoben.

### Shannon-Theorem (Abtasttheorem)

Angenommen, das Signal  $f(t)$  ist diskret und besteht aus  $2m$  zeitlich äquidistanten Messpunkten  $y_k$  mit  $(k = 0, 1, 2, \dots, 2m - 1)$ . Dann gilt für die Fourier-Koeffizienten

$$c_0 = \frac{1}{2m} \sum_{k=0}^{2m-1} y_k \quad (\text{B.92})$$

$$a_n = \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{2m-1} y_k \sin\left(\frac{2\pi n k}{2m}\right) \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (\text{B.93})$$

$$b_n = \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{2m-1} y_k \cos\left(\frac{2\pi n k}{2m}\right) \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (\text{B.94})$$

Man kann fragen, wieviele Messwerte mindestens benötigt werden, um eine bestimmte, im Signal enthaltene Frequenz  $\omega$  harmonischer Schwingungen sicher auflösen zu können. Dies wird durch das **Shannon-Theorem** oder auch **Abtasttheorem** beantwortet. Es sagt aus, dass eine bestimmte Frequenz  $\omega_s$  genau dann noch sicher aufgelöst werden kann, wenn die Abtastfrequenz  $\omega_a$ , also jene Frequenz, mit der das Signal vermessen wird, mindestens doppelt so groß ist wie die Frequenz, die abgetastet werden soll, also

$$\omega_a > 2\omega_s \quad \text{Shannon-Theorem} \quad (\text{B.95})$$

Anders ausgedrückt, die Frequenz  $\omega_s$  eines harmonischen Signals wird erst dann sicher bestimmt, wenn mehr als zwei Abtastwerte pro Periode vorhanden sind. Verletzungen dieses Theorems führen zu falschen Ergebnissen. Beispielsweise liefert ein unter-abgetastetes Signal die falsche Signalfrequenz

$$\omega_f = |\omega_a - \omega_s| \quad (\text{B.96})$$

Das Signal mit der Kreisfrequenz  $\omega_s$  wird demnach im Amplitudenspektrum als  $\omega_f$  auftauchen, unter falschem Namen sozusagen. Man nennt dies deshalb auch **Alias-Effekt**. Für  $\omega_s \leq \omega_a \leq 2\omega_s$  erscheint das Signal im Spektrum an der Achse  $\omega = \omega_a/2$  gespiegelt.

Gibt man die Abtastfrequenz  $\omega_a$  vor, so wird ein harmonisches Signal genau dann richtig abgetastet, wenn die Signalfrequenz halb so groß ist wie die Abtastfrequenz, also

$$\omega_s > \frac{\omega_s}{2} \quad (\text{B.97})$$

Die Frequenz  $\omega_s/2$  heißt **Nyquist-Frequenz**. Möchte man ein Signal korrekt abtasten, so führt das Abtasttheorem zur Länge des Zeitintervalls über das die Messung abgetastet wird. Die Länge ist  $2m \cdot \Delta t$ . Daraus lässt sich die Frequenzauflösung ermitteln

$$\Delta f = \frac{1}{2m\Delta t} \quad (\text{B.98})$$

# C. Quelltextauszüge

## C.1. Verzeichnisstruktur OpenFoam 2.0

<case>	•
0	•
alphaSgs	— SGS-thermische Diffusivität
B	— Subskalen-Spannungstensor
k	— SGS-turbulente, kinetische Energie
magVorticity	— Betrag der Wirbelstärke
muSgs	— SGS-Viskosität
muTilda	— Dynamische Viskosität
p	— Druck
T	— Temperatur
v	— Geschwindigkeit
vorticity	— Wirbelstärke
constant	•
polyMesh	•
sets	— Definition nichtorthogonaler Teile des Rechengitters
blockMeshDict	— Definition der Geometrie des Rechengitters
boundary	— Definition der Randbedingungen der Gitterelemente
faces	— Definition der Flächen des Rechengitters
neighbour	— Definition welcher Punkt ist Nachbar von wem
owner	— Definition der IDs jedes Punktes
points	— Position jedes Punktes
LESProperties	— Parameter des Turbulenzmodells
thermophysicalProperties	— Thermophysikalische Eigenschaften
turbulenceProperties	— Typ des verwendeten Turbulenzmodells
system	•
controlDict	— Kontrollparameter des I/O , Simulationszeit, Probenpunkte
decomposeParDict	— Parameter für die Parallelisierung der Rechnung
fvSchemes	— Setzt die numerischen Schemata für die einzelnen Terme
fvSolution	— Kontrollparameter des Löser, Toleranzen und Algorithmen
sampleDict	— Samples

Abbildung C.1.: Beispiel der Verzeichnisstruktur einer OpenFOAM Simulation

## C.2. Quellcodes

### Quellcode C.1: Löser rhoPimpleFoam

```

1  -----\
2  \      /  F i e l d      |  O p e n F O A M :  T h e  O p e n  S o u r c e  C F D  T o o l b o x
3  \    /  O p e r a t i o n  |  |
4  \  /  A n d                |  C o p y r i g h t  ( C )  2 0 0 4 - 2 0 1 1  O p e n C F D  L t d .
5  \ /  M a n i p u l a t i o n |  |
6  -----/
7
8  License
9  This file is part of OpenFOAM.
10

```

```

11 OpenFOAM is free software: you can redistribute it and/or modify it
12 under the terms of the GNU General Public License as published by
13 the Free Software Foundation, either version 3 of the License, or
14 (at your option) any later version.
15
16 OpenFOAM is distributed in the hope that it will be useful, but WITHOUT
17 ANY WARRANTY; without even the implied warranty of MERCHANTABILITY or
18 FITNESS FOR A PARTICULAR PURPOSE. See the GNU General Public License
19 for more details.
20
21 You should have received a copy of the GNU General Public License
22 along with OpenFOAM. If not, see <http://www.gnu.org/licenses/>.
23
24 Application
25 rhoPimpleFoam
26
27 Description
28 Transient solver for laminar or turbulent flow of compressible fluids
29 for HVAC and similar applications.
30
31 Uses the flexible PIMPLE (PISO-SIMPLE) solution for time-resolved and
32 pseudo-transient simulations.
33
34 /*-----*/
35
36 #include "fvCFD.H"
37 #include "basicPsiThermo.H"
38 #include "turbulenceModel.H"
39 #include "bound.H"
40 #include "pimpleControl.H"
41
42 // ***** //
43
44 int main(int argc, char *argv[])
45 {
46     #include "setRootCase.H"
47     #include "createTime.H"
48     #include "createMesh.H"
49     #include "createFields.H"
50     #include "initContinuityErrs.H"
51
52     pimpleControl pimple(mesh);
53
54     Info<< "\nStarting time loop\n" << endl;
55
56     while (runTime.run())
57     {
58         #include "readTimeControls.H"
59         #include "compressibleCourantNo.H"
60         #include "setDeltaT.H"
61
62         runTime++;
63
64         Info<< "Time=" << runTime.timeName() << nl << endl;
65
66         #include "rhoEqn.H"
67
68         // --- Pressure-velocity PIMPLE corrector loop
69         for (pimple.start(); pimple.loop(); pimple++)
70         {
71             if (pimple.nOuterCorr() != 1)
72             {
73                 p.storePrevIter();
74                 rho.storePrevIter();
75             }
76
77             #include "UEqn.H"
78             #include "hEqn.H"
79
80             // --- PISO loop
81             for (int corr=0; corr<pimple.nCorr(); corr++)
82             {
83                 #include "pEqn.H"
84             }
85
86             if (pimple.turbCorr())
87             {
88                 turbulence->correct();
89             }
90         }
91
92         runTime.write();
93
94         Info<< "ExecutionTime=" << runTime.elapsedCpuTime() << "s"
95             << "ClockTime=" << runTime.elapsedClockTime() << "s"
96             << nl << endl;
97     }
98
99     Info<< "End\n" << endl;
100
101     return 0;
102 }
103
104 // ***** //

```

## Quellcode C.2: createFields.H

```

1 Info<< "Reading thermophysical properties\n" << endl;
2
3 autoPtr<basicPsiThermo> pThermo
4 (
5     basicPsiThermo::New(mesh)
6 );
7 basicPsiThermo& thermo = pThermo();
8

```

```

9   volScalarField& p = thermo.p();
10  volScalarField& h = thermo.h();
11  const volScalarField& psi = thermo.psi();
12
13  volScalarField rho
14  (
15      IObject
16      (
17          "rho",
18          runTime.timeName(),
19          mesh,
20          IObject::READ_IF_PRESENT,
21          IObject::AUTO_WRITE
22      ),
23      thermo.rho()
24  );
25
26  Info<< "Reading field U\n" << endl;
27  volVectorField U
28  (
29      IObject
30      (
31          "U",
32          runTime.timeName(),
33          mesh,
34          IObject::MUST_READ,
35          IObject::AUTO_WRITE
36      ),
37      mesh
38  );
39
40  #include "compressibleCreatePhi.H"
41
42  dimensionedScalar rhoMax
43  (
44      mesh.solutionDict().subDict("PIMPLE").lookup("rhoMax")
45  );
46
47  dimensionedScalar rhoMin
48  (
49      mesh.solutionDict().subDict("PIMPLE").lookup("rhoMin")
50  );
51
52  Info<< "Creating turbulence model\n" << endl;
53  autoPtr<compressible::turbulenceModel> turbulence
54  (
55      compressible::turbulenceModel::New
56      (
57          rho,
58          U,
59          phi,
60          thermo
61      )
62  );
63
64  Info<< "Creating field DpDt\n" << endl;
65  volScalarField DpDt
66  (
67      fvc::DDt(surfaceScalarField("phiU", phi/fvc::interpolate(rho))), p
68  );

```

### Quellcode C.3: hEqn.H

```

1  {
2      fvScalarMatrix hEqn
3      (
4          fvm::ddt(rho, h)
5          + fvm::div(phi, h)
6          - fvm::laplacian(turbulence->alphaEff(), h)
7          ==
8          DpDt
9      );
10
11  hEqn.relax();
12  hEqn.solve();
13
14  thermo.correct();
15  }

```

### Quellcode C.4: pEqn.H

```

1  rho = thermo.rho();
2  rho = max(rho, rhoMin);
3  rho = min(rho, rhoMax);
4  rho.relax();
5
6  U = rAU*UEqn().H();
7
8  if (pimple.nCorr() <= 1)
9  {
10     UEqn.clear();
11 }
12
13 if (pimple.transonic())
14 {
15     surfaceScalarField phid
16     (
17         "phid",
18         fvc::interpolate(psi)
19         *(
20             (fvc::interpolate(U) & mesh.Sf())
21             + fvc::ddtPhiCorr(rAU, rho, U, phi)
22         )
23     );

```

```

24
25
26     for (int nonOrth=0; nonOrth<=pimple.nNonOrthCorr(); nonOrth++)
27     {
28         fvScalarMatrix pEqn
29         (
30             fvm::ddt(psi, p)
31             + fvm::div(phiid, p)
32             - fvm::laplacian(rho*rAU, p)
33         );
34         pEqn.solve
35         (
36             mesh.solver(p.select(pimple.finalInnerIter(corr, nonOrth)))
37         );
38         if (nonOrth == pimple.nNonOrthCorr())
39         {
40             phi == pEqn.flux();
41         }
42     }
43 }
44 }
45 else
46 {
47     phi =
48     fvc::interpolate(rho)*
49     (
50         (fvc::interpolate(U) & mesh.Sf())
51         + fvc::ddtPhiCorr(rAU, rho, U, phi)
52     );
53
54     for (int nonOrth=0; nonOrth<=pimple.nNonOrthCorr(); nonOrth++)
55     {
56         // Pressure corrector
57         fvScalarMatrix pEqn
58         (
59             fvm::ddt(psi, p)
60             + fvc::div(phi)
61             - fvm::laplacian(rho*rAU, p)
62         );
63         pEqn.solve
64         (
65             mesh.solver(p.select(pimple.finalInnerIter(corr, nonOrth)))
66         );
67         if (nonOrth == pimple.nNonOrthCorr())
68         {
69             phi += pEqn.flux();
70         }
71     }
72 }
73 }
74 }
75
76 #include "rhoEqn.H"
77 #include "compressibleContinuityErrs.H"
78
79 // Explicitly relax pressure for momentum corrector
80 p.relax();
81
82 // Recalculate density from the relaxed pressure
83 rho = thermo.rho();
84 rho = max(rho, rhoMin);
85 rho = min(rho, rhoMax);
86 rho.relax();
87 Info<< "rho_max/min: " << max(rho).value()
88 << " " << min(rho).value() << endl;
89
90 U -= rAU*fvc::grad(p);
91 U.correctBoundaryConditions();
92
93 DpDt = fvc::DDt(surfaceScalarField("phiU", phi/fvc::interpolate(rho)), p);

```

### Quellcode C.5: UEqn.H

```

1 // Solve the Momentum equation
2
3 tmp<fvVectorMatrix> UEqn
4 (
5     fvm::ddt(rho, U)
6     + fvm::div(phi, U)
7     + turbulence->divDevRhoReff(U)
8 );
9
10 UEqn().relax();
11
12 volScalarField rAU(1.0/UEqn().A());
13
14 if (pimple.momentumPredictor())
15 {
16     solve(UEqn() == -fvc::grad(p));
17 }
18 else
19 {
20     U = rAU*(UEqn().H() - fvc::grad(p));
21     U.correctBoundaryConditions();
22 }

```

### Quellcode C.6: oneEqEddy.H

```

1 /*-----*\
2
3 \ \      / F i e l d           | OpenFOAM: The Open Source CFD Toolbox
4  \  \     / O p e r a t i o n  |
5   \   \  / A n d               | Copyright (C) 2004-2011 OpenCFD Ltd.
6    \___\ / M a n i p u l a t i o n |

```

```

7
8 License
9 This file is part of OpenFOAM.
10
11 OpenFOAM is free software: you can redistribute it and/or modify it
12 under the terms of the GNU General Public License as published by
13 the Free Software Foundation, either version 3 of the License, or
14 (at your option) any later version.
15
16 OpenFOAM is distributed in the hope that it will be useful, but WITHOUT
17 ANY WARRANTY; without even the implied warranty of MERCHANTABILITY or
18 FITNESS FOR A PARTICULAR PURPOSE. See the GNU General Public License
19 for more details.
20
21 You should have received a copy of the GNU General Public License
22 along with OpenFOAM. If not, see <http://www.gnu.org/licenses/>.
23
24 Class
25 Foam::compressible::LESModels::oneEqEddy
26
27 Description
28 One Equation Eddy Viscosity Model for incompressible flows
29
30 Eddy viscosity SGS model using a modeled balance equation to simulate the
31 behaviour of k, hence,
32 \verbatim
33 d/dt(rho*k) + div(rho*U*k) - div(muEff*grad(k))
34 =
35 -rho*D:B - ce*rho*k^3/2/delta
36
37 and
38
39 B = 2/3*k*I - 2*nuSgs*dev(D)
40
41 where
42
43 D = symm(grad(U));
44 nuSgs = ck*rho*sqrt(k)*delta
45 \endverbatim
46
47 SourceFiles
48 oneEqEddy.C
49
50
51 /*-----*/
52
53 #ifndef compressibleOneEqEddy_H
54 #define compressibleOneEqEddy_H
55
56 #include "GenEddyVisc.H"
57
58 // ***** //
59
60 namespace Foam
61 {
62 namespace compressible
63 {
64 namespace LESModels
65 {
66
67 /*-----*\
68 Class oneEqEddy Declaration
69 \*-----*/
70
71 class oneEqEddy
72 :
73 public GenEddyVisc
74 {
75 // Private data
76
77 volScalarField k_;
78
79 dimensionedScalar ck_;
80
81
82 // Private Member Functions
83
84 //- Update sub-grid scale fields
85 void updateSubGridScaleFields();
86
87 // Disallow default bitwise copy construct and assignment
88 oneEqEddy(const oneEqEddy&);
89 oneEqEddy& operator=(const oneEqEddy&);
90
91 public:
92
93 //- Runtime type information
94 TypeName("oneEqEddy");
95
96 // Constructors
97
98 //- Constructor from components
99 oneEqEddy
100 (
101 const volScalarField& rho,
102 const volVectorField& U,
103 const surfaceScalarField& phi,
104 const basicThermo& thermoPhysicalModel,
105 const word& turbulenceModelName = turbulenceModel::typeName,
106 const word& modelName = typeName
107 );
108
109
110
111 //- Destructor
112 virtual ~oneEqEddy()
113 {}
114

```

```

115
116
117 // Member Functions
118
119 // Return SGS kinetic energy
120 virtual tmp<volScalarField> k() const
121 {
122     return k_;
123 }
124
125 // Return the effective diffusivity for k
126 tmp<volScalarField> DkEff() const
127 {
128     return tmp<volScalarField>
129     (
130         new volScalarField("DkEff", muSgs_ + mu())
131     );
132 }
133
134 // Correct Eddy-Viscosity and related properties
135 virtual void correct(const tmp<volTensorField>& gradU);
136
137 // Read LESProperties dictionary
138 virtual bool read();
139 };
140
141
142 // ***** //
143
144 } // End namespace LESModels
145 } // End namespace compressible
146 } // End namespace Foam
147
148 // ***** //
149
150 #endif
151
152 // ***** //

```

### Quellcode C.7: oneEqEddy.C

```

1  /*-----*/
2  |
3  | \ \ / / F i e l d       | OpenFOAM: The Open Source CFD Toolbox
4  | \ \ / / O p e r a t i o n |
5  | \ \ / / A n d           | Copyright (C) 2004-2011 OpenCFD Ltd.
6  | \ \ / / M a n i p u l a t i o n |
7  |-----*/
8  License
9  This file is part of OpenFOAM.
10
11  OpenFOAM is free software: you can redistribute it and/or modify it
12  under the terms of the GNU General Public License as published by
13  the Free Software Foundation, either version 3 of the License, or
14  (at your option) any later version.
15
16  OpenFOAM is distributed in the hope that it will be useful, but WITHOUT
17  ANY WARRANTY; without even the implied warranty of MERCHANTABILITY or
18  FITNESS FOR A PARTICULAR PURPOSE. See the GNU General Public License
19  for more details.
20
21  You should have received a copy of the GNU General Public License
22  along with OpenFOAM. If not, see <http://www.gnu.org/licenses/>.
23
24  /*-----*/
25
26 #include "oneEqEddy.H"
27 #include "addToRunTimeSelectionTable.H"
28
29 // ***** //
30
31 namespace Foam
32 {
33     namespace compressible
34     {
35         namespace LESModels
36         {
37
38             // ***** Static Data Members ***** //
39
40             defineTypeNameAndDebug(oneEqEddy, 0);
41             addToRunTimeSelectionTable(LESModel, oneEqEddy, dictionary);
42
43             // ***** Private Member Functions ***** //
44
45             void oneEqEddy::updateSubGridScaleFields()
46             {
47                 muSgs_ = ck_*rho()*sqrt(k_)*delta();
48                 muSgs_.correctBoundaryConditions();
49
50                 alphaSgs_ = muSgs_/Prt_;
51                 alphaSgs_.correctBoundaryConditions();
52             }
53
54
55             // ***** Constructors ***** //
56
57             oneEqEddy::oneEqEddy
58             (
59                 const volScalarField& rho,
60                 const volVectorField& U,
61                 const surfaceScalarField& phi,
62                 const basicThermo& thermoPhysicalModel,
63                 const word& turbulenceModelName,
64                 const word& modelName
65             )

```



```

18     FITNESS FOR A PARTICULAR PURPOSE. See the GNU General Public License
19     for more details.
20
21     You should have received a copy of the GNU General Public License
22     along with OpenFOAM. If not, see <http://www.gnu.org/licenses/>.
23
24 Class
25     Foam::compressible::LESModels::GenEddyVisc
26
27 Description
28     General base class for all compressible models that can be implemented as
29     an eddy viscosity, i.e. algebraic and one-equation models.
30
31     Contains fields for k (SGS turbulent kinetic energy), gamma
32     (modelled viscosity) and epsilon (SGS dissipation).
33
34 SourceFiles
35     GenEddyVisc.C
36
37     /*-----*/
38
39 #ifndef compressibleGenEddyVisc_H
40 #define compressibleGenEddyVisc_H
41
42 #include "LESModel.H"
43
44 // ***** //
45
46 namespace Foam
47 {
48     namespace compressible
49     {
50         namespace LESModels
51         {
52
53             /*-----*/
54             Class GenEddyVisc Declaration
55             /*-----*/
56
57         class GenEddyVisc
58         :
59         virtual public LESModel
60         {
61             // Private Member Functions
62
63             // Disallow default bitwise copy construct and assignment
64             GenEddyVisc(const GenEddyVisc&);
65             GenEddyVisc& operator=(const GenEddyVisc&);
66
67         protected:
68
69             // Model coefficients
70
71             dimensionedScalar ce_;
72             dimensionedScalar Prt_;
73
74
75             // Fields
76
77             volScalarField muSgs_;
78             volScalarField alphaSgs_;
79
80         public:
81
82             //- Partial Runtime type information
83             static const word typeName;
84
85             // Constructors
86
87             //- Construct from components
88             GenEddyVisc
89             (
90                 const volScalarField& rho,
91                 const volVectorField& U,
92                 const surfaceScalarField& phi,
93                 const basicThermo& thermoPhysicalModel,
94                 const word& turbulenceModelName = turbulenceModel::typeName,
95                 const word& modelName = typeName
96             );
97
98             //- Destructor
99             virtual ~GenEddyVisc()
100             {}
101
102             // Member Functions
103
104             //- Return sub-grid dissipation rate
105             virtual tmp<volScalarField> epsilon() const
106             {
107                 return ce_*k()*sqrt(k())/delta();
108             }
109
110             //- Return viscosity
111             virtual tmp<volScalarField> muSgs() const
112             {
113                 return muSgs_;
114             }
115
116             //- Return thermal diffusivity
117             virtual tmp<volScalarField> alphaSgs() const
118             {
119                 return alphaSgs_;
120             }
121
122
123
124
125

```

```

126     //- Return the sub-grid stress tensor.
127     virtual tmp<volSymmTensorField> B() const;
128
129     //- Return the deviatoric part of the effective sub-grid
130     // turbulence stress tensor including the laminar stress
131     virtual tmp<volSymmTensorField> devRhoBeff() const;
132
133     //- Returns div(rho*dev(B)).
134     // This is the additional term due to the filtering of the NSE.
135     virtual tmp<fvVectorMatrix> divDevRhoBeff(volVectorField& U) const;
136
137     //- Correct Eddy-Viscosity and related properties
138     virtual void correct(const tmp<volTensorField>& gradU);
139
140     //- Read LESProperties dictionary
141     virtual bool read();
142 };
143
144
145 // ***** //
146 } // End namespace LESModels
147 } // End namespace compressible
148 } // End namespace Foam
149
150 // ***** //
151 #endif
152
153 // ***** //

```

### Quellcode C.9: GenEddyVisc.C

```

1  /*-----*\
2  |
3  | \ \ / / F i e l d      | OpenFOAM: The Open Source CFD Toolbox
4  |  \ \ / / O p e r a t i o n |
5  |   \ \ / / A n d          | Copyright (C) 2011 OpenFOAM Foundation
6  |    \ \ / / M a n i p u l a t i o n |
7  |-----*/
8  License
9  This file is part of OpenFOAM.
10
11  OpenFOAM is free software: you can redistribute it and/or modify it
12  under the terms of the GNU General Public License as published by
13  the Free Software Foundation, either version 3 of the License, or
14  (at your option) any later version.
15
16  OpenFOAM is distributed in the hope that it will be useful, but WITHOUT
17  ANY WARRANTY; without even the implied warranty of MERCHANTABILITY or
18  FITNESS FOR A PARTICULAR PURPOSE. See the GNU General Public License
19  for more details.
20
21  You should have received a copy of the GNU General Public License
22  along with OpenFOAM. If not, see <http://www.gnu.org/licenses/>.
23
24  /*-----*/
25
26  #include "GenEddyVisc.H"
27
28  // ***** //
29
30  namespace Foam
31  {
32  namespace compressible
33  {
34  namespace LESModels
35  {
36
37  // ***** Static Data Members ***** //
38
39  defineTypeNameWithName(GenEddyVisc, "GenEddyVisc");
40
41  // ***** Constructors ***** //
42
43  GenEddyVisc::GenEddyVisc
44  (
45  const volScalarField& rho,
46  const volVectorField& U,
47  const surfaceScalarField& phi,
48  const basicThermo& thermoPhysicalModel,
49  const word& turbulenceModelName,
50  const word& modelName
51  )
52  :
53  LESModel(modelName, rho, U, phi, thermoPhysicalModel, turbulenceModelName),
54
55  ce_
56  (
57  dimensioned<scalar>::lookupOrAddToDict
58  (
59  "ce",
60  coeffDict_,
61  1.048
62  )
63  ),
64
65  Prt_
66  (
67  dimensioned<scalar>::lookupOrAddToDict
68  (
69  "Prt",
70  coeffDict_,
71  0.7
72  )
73  )

```



```

20
21     You should have received a copy of the GNU General Public License
22     along with OpenFOAM.  If not, see <http://www.gnu.org/licenses/>.
23
24 Class
25     Foam::compressible::LESModels::GenSGSStress
26
27 Description
28     General base class for all compressible models that directly
29     solve for the SGS stress tensor E.
30
31     Contains tensor fields B (the SGS stress tensor) as well as scalar
32     fields for k (SGS turbulent energy) gamma (SGS viscosity) and epsilon
33     (SGS dissipation).
34
35 SourceFiles
36     GenSGSStress.C
37
38 /*-----*/
39
40 #ifndef compressibleGenSGSStress_H
41 #define compressibleGenSGSStress_H
42
43 #include "LESModel.H"
44
45 // ***** //
46
47 namespace Foam
48 {
49     namespace compressible
50     {
51         namespace LESModels
52         {
53
54             /*-----*/
55             Class GenSGSStress Declaration
56             /*-----*/
57
58         class GenSGSStress
59         :
60             virtual public LESModel
61         {
62             // Private Member Functions
63
64             // Disallow default bitwise copy construct and assignment
65             GenSGSStress(const GenSGSStress&);
66             GenSGSStress& operator=(const GenSGSStress&);
67
68         protected:
69
70             // Model coefficients
71
72             dimensionedScalar ce_;
73             dimensionedScalar Prt_;
74
75             // Fields
76
77             volSymmTensorField B_;
78             volScalarField muSgs_;
79             volScalarField alphaSgs_;
80
81         public:
82
83             //- Partial Runtime type information
84             static const word typeName;
85
86             // Constructors
87
88             //- Constructor from components
89             GenSGSStress
90             (
91                 const volScalarField& rho,
92                 const volVectorField& U,
93                 const surfaceScalarField& phi,
94                 const basicThermo& thermoPhysicalModel,
95                 const word& turbulenceModelName = turbulenceModel::typeName,
96                 const word& modelName = typeName
97             );
98
99             //- Destructor
100             virtual ~GenSGSStress()
101             {}
102
103             // Member Functions
104
105             //- Return the SGS turbulent kinetic energy
106             virtual tmp<volScalarField> k() const
107             {
108                 return 0.5*tr(B_);
109             }
110
111             //- Return the SGS turbulent dissipation
112             virtual tmp<volScalarField> epsilon() const
113             {
114                 const volScalarField K(k());
115                 return ce_*K*sqrt(K)/delta();
116             }
117
118             //- Return the SGS viscosity
119             virtual tmp<volScalarField> muSgs() const
120             {
121                 return muSgs_;
122             }
123
124
125
126
127

```

```

128     //- Return the SGS thermal diffusivity
129     virtual tmp<volScalarField> alphaSgs() const
130     {
131         return alphaSgs_;
132     }
133
134     //- Return the sub-grid stress tensor
135     virtual tmp<volSymmTensorField> B() const
136     {
137         return B_;
138     }
139
140     //- Return the deviatoric part of the effective sub-grid
141     // turbulence stress tensor including the laminar stress
142     virtual tmp<volSymmTensorField> devRhoBeff() const;
143
144     //- Returns divergence of B : i.e. the additional term in the
145     // filtered NSE
146     virtual tmp<fvVectorMatrix> divDevRhoBeff(volVectorField& U) const;
147
148     //- Correct Eddy-Viscosity and related properties
149     virtual void correct(const tmp<volTensorField>& gradU);
150
151     //- Read LESProperties dictionary
152     virtual bool read();
153 };
154
155 // ***** //
156 } // End namespace LESModels
157 } // End namespace compressible
158 } // End namespace Foam
159 // ***** //
160 #endif
161 // ***** //

```

### Quellcode C.11: GenSGSStress.C

```

1  /*-----*\
2  |
3  | \ \ / \ / F i e l d           | OpenFOAM: The Open Source CFD Toolbox
4  | \ \ / \ / O p e r a t i o n   |
5  |  \ \ / \ / A n d              | Copyright (C) 2011 OpenFOAM Foundation
6  |   \ \ / \ / M a n i p u l a t i o n |
7  |-----*/
8  License
9  This file is part of OpenFOAM.
10
11  OpenFOAM is free software: you can redistribute it and/or modify it
12  under the terms of the GNU General Public License as published by
13  the Free Software Foundation, either version 3 of the License, or
14  (at your option) any later version.
15
16  OpenFOAM is distributed in the hope that it will be useful, but WITHOUT
17  ANY WARRANTY; without even the implied warranty of MERCHANTABILITY or
18  FITNESS FOR A PARTICULAR PURPOSE. See the GNU General Public License
19  for more details.
20
21  You should have received a copy of the GNU General Public License
22  along with OpenFOAM. If not, see <http://www.gnu.org/licenses/>.
23
24  \*-----*/
25
26  #include "GenSGSStress.H"
27
28  // ***** //
29
30  namespace Foam
31  {
32      namespace compressible
33      {
34          namespace LESModels
35          {
36
37              // ***** Static Data Members ***** //
38
39              defineTypeNameWithName(GenSGSStress, "GenSGSStress");
40
41
42              // ***** Constructors ***** //
43
44              GenSGSStress::GenSGSStress
45              (
46                  const volScalarField& rho,
47                  const volVectorField& U,
48                  const surfaceScalarField& phi,
49                  const basicThermo& thermoPhysicalModel,
50                  const word& turbulenceModelName,
51                  const word& modelName
52              )
53              :
54              LESModel(modelName, rho, U, phi, thermoPhysicalModel, turbulenceModelName),
55              ce_
56              (
57                  dimensioned<scalar>::lookupOrAddToDict
58                  (
59                      (
60                          "ce",
61                          coeffDict_,
62                          1.048
63                      )
64                  ),

```

```

65
66
67     Prt_
68     (
69         dimensioned<scalar>::lookupOrAddToDict
70         (
71             "Prt",
72             coeffDict_,
73             1.0
74         ),
75     ),
76     B_
77     (
78         IObject
79         (
80             "B",
81             runTime_.timeName(),
82             mesh_,
83             IObject::MUST_READ,
84             IObject::AUTO_WRITE
85         ),
86         mesh_
87     ),
88     muSgs_
89     (
90         IObject
91         (
92             "muSgs",
93             runTime_.timeName(),
94             mesh_,
95             IObject::MUST_READ,
96             IObject::AUTO_WRITE
97         ),
98         mesh_
99     ),
100     alphaSgs_
101     (
102         IObject
103         (
104             "alphaSgs",
105             runTime_.timeName(),
106             mesh_,
107             IObject::MUST_READ,
108             IObject::AUTO_WRITE
109         ),
110         mesh_
111     )
112 }
113 {}
114
115
116 // ***** Member Functions ***** //
117
118 tmp<volSymmTensorField> GenSGSStress::devRhoBeff() const
119 {
120     return tmp<volSymmTensorField>
121     (
122         new volSymmTensorField
123         (
124             IObject
125             (
126                 "devRhoReff",
127                 runTime_.timeName(),
128                 mesh_,
129                 IObject::NO_READ,
130                 IObject::NO_WRITE
131             ),
132             rho()*B_ - mu()*dev(twoSymm(fvc::grad(U)))
133         );
134     );
135 }
136
137
138 tmp<fvVectorMatrix> GenSGSStress::divDevRhoBeff(volVectorField& U) const
139 {
140     return
141     (
142         fvc::div(rho()*B_ + 0.05*muSgs_*fvc::grad(U))
143         + fvc::laplacian(0.95*muSgs_, U, "laplacian(muEff,U)")
144         - fvm::laplacian(muEff(), U)
145         - fvc::div(mu()*dev2(T(fvc::grad(U))))
146     );
147 }
148
149
150 void GenSGSStress::correct(const tmp<volTensorField>& gradU)
151 {
152     LESModel::correct(gradU);
153 }
154
155
156 bool GenSGSStress::read()
157 {
158     if (LESModel::read())
159     {
160         ce_.readIfPresent(coeffDict());
161         return true;
162     }
163     else
164     {
165         return false;
166     }
167 }
168
169
170 // *****
171
172

```

```

173 } // End namespace LESModels
174 } // End namespace compressible
175 } // End namespace Foam
176 } // End namespace Foam
177 // *****
178 // *****

```

### Quellcode C.12: blockMeshDict

```

1  /*----- C++ -----*/
2  |=====|
3  | \ \ / / | F i e l d | OpenFOAM: The Open Source CFD Toolbox
4  | \ \ / / | O p e r a t i o n | Version: 1.7.x
5  | \ \ / / | A n d | Web: www.OpenFOAM.com
6  | \ \ / / | M a n i p u l a t i o n | Author: Jost Fischer, 12/2011 ,University of Potsdam
7  /*-----*/
8  FoamFile
9  {
10     version      2.0;
11     format       ascii;
12     class        dictionary;
13     object       blockMeshDict;
14 }
15 // ***** //
16
17 convertToMeters 0.001;
18
19 vertices
20 (
21     //00 lower inlet 0-7
22     (-2 8.9 0)
23     (0 8.9 0)
24     (0 9.2 0)
25     (-2 9.2 0)
26     (-2 8.9 10)
27     (0 8.9 10)
28     (0 9.2 10)
29     (-2 9.2 10)
30
31     //01 upper inlet 8-11
32     (-2 9.5 10)
33     (0 9.5 10)
34     (0 9.5 0)
35     (-2 9.5 0)
36
37     //02 03 mouths 12-17
38     (5.5 8.9 0)
39     (5.5 9.5 0)
40     (5.5 9.5 10)
41     (5.5 8.9 10)
42     (5.5 9.2 10)
43     (5.5 9.2 0)
44
45     //04 outer mouth left 18-21
46     (0 16.5 10)
47     (5.5 16.5 10)
48     (5.5 16.5 0)
49     (0 16.5 0)
50
51     //05 inner pipe left 22-25
52     (0 5 10)
53     (5.5 5 10)
54     (5.5 5 0)
55     (0 5 0)
56
57     //06 inner pipe middle, top 26-29
58     (106 9.5 10)
59     (106 9.5 0)
60     (106 9.2 10)
61     (106 9.2 0)
62
63     //07 inner pipe middle, middle 30-31
64     (106 8.9 10)
65     (106 8.9 0)
66
67     //08 inner pipe middle, bottom 32-33
68     (106 5 10)
69     (106 5 0)
70
71     //09 wedge 34-37
72     (25.8 15.5 0)
73     (25.8 20.5 0)
74     (25.8 20.5 10)
75     (25.8 15.5 10)
76
77     //10 space left 38-43
78     (-25 16.5 0)
79     (0 40 0)
80     (-25 40 0)
81     (-25 16.5 10)
82     (0 40 10)
83     (-25 40 10)
84
85
86     //11 space middle 44-45
87     (5.5 40 10)
88     (5.5 40 0)
89
90     //12 space right 46-47
91     (25.8 40 0)
92     (25.8 40 10)
93
94     //13 outer pipe bottom right 48-51
95     (125 15.5 0)
96     (125 20.5 0)
97     (125 20.5 10)

```

```

98 (125 15.5 10)
99
100 //14 space right right 52-53
101 (125 40 0)
102 (125 40 10)
103
104 //15 outer space left 54-57
105 (-25 90 10)
106 (0 90 10)
107 (0 90 0)
108 (-25 90 0)
109
110 //16 outer space middle 58-59
111 (5.5 90 10)
112 (5.5 90 0)
113
114 //17outer space right 60-61
115 (25.8 90 10)
116 (25.8 90 0)
117
118 //18outer space right right 62-63
119 (125 90 10)
120 (125 90 0)
121
122 //19 edge outer space left 64-67
123 (-25 152.14 10)
124 (0 153.39 10)
125 (0 153.39 0)
126 (-25 152.14 0)
127
128 //20 edge outer space middle 68-69
129 (5.5 153.665 10)
130 (5.5 153.665 0)
131
132 //21 edge outer space right 70-71
133 (25.8 154.995 10)
134 (25.8 154.995 0)
135
136 //22 edge outer space right right 72-73
137 (125 161.205 10)
138 (125 161.205 0)
139
140 //23 edge outer space 3r 74-77
141 (200 164.955 10)
142 (200 164.955 0)
143 (200 90 10)
144 (200 90 0)
145
146 //24 edge space 3r 78-79
147 (200 40 10)
148 (200 40 0)
149
150 //25 edge space at pipe 3r 80-81
151 (200 20.5 10) //16.6
152 (200 20.5 0) //16.5
153
154 //26 edge space2 at pipe 3r 82-83
155 (200 15.5 10)
156 (200 15.5 0)
157
158 //27 edge space behind pipe 3r 84-87
159 (200 0 10)
160 (200 0 0)
161 (125 0 10)
162 (125 0 0)
163
164 //28 edge space behind pipe bottom 3r 88-91
165 (200 -6 10)
166 (200 -6 0)
167 (125 -6 10)
168 (125 -6 0)
169
170 // 29 edge outer space top left 92-95
171 (-67.8 150 10)
172 (-67.8 150 0)
173 (-64.8 90 10)
174 (-64.8 90 0)
175
176 //30 edge outer space left 96-97
177 (-62.3 40 10)
178 (-62.3 40 0)
179
180 //31 edge outer space 2l 98-99
181 (-61.125 16.5 10)
182 (-61.125 16.5 0)
183
184 //32 edge space left under pipe 100-103
185 (-60.3 0 10)
186 (-60.3 0 0)
187 (-25 0 10)
188 (-25 0 0)
189
190 //33 edge space under pipe bottom 104-107
191 (-60 -6 10)
192 (-60 -6 0)
193 (-25 -6 10)
194 (-25 -6 0)
195
196 //34 inner pipe left bottom 108-111
197 (0 0 10)
198 (0 0 0)
199 (5.5 0 10)
200 (5.5 0 0)
201
202 //35 inner pipe right bottom
203 (106 0 10)
204 (106 0 0)
205

```

```

206 );
207
208 blocks
209 (
210
211     hex (1 12 17 2 5 15 16 6) (50 10 1) egdeGrading (1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1) //02 lower mouth
212     hex (2 17 13 10 6 16 14 9) (50 10 1) egdeGrading (1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1) //03 upper mouth
213
214     hex (10 13 20 21 9 14 19 18) (50 70 1) egdeGrading (1 1 1 1 5 5 5 5 1 1 1 1) //04 outer mouth left
215     hex (25 24 12 1 22 23 15 5) (50 30 1) egdeGrading (1 1 1 1 0.1 0.1 0.1 0.1 1 1 1 1) //05 inner pipe left
216
217     hex (17 29 27 13 16 28 26 14) (250 10 1) egdeGrading (10 10 10 10 1 1 1 1 1 1 1 1) //06 inner pipe middle, top
218     hex (12 31 29 17 15 30 28 16) (250 10 1) egdeGrading (10 10 10 10 1 1 1 1 1 1 1 1) //07 inner pipe middle, middle
219     hex (24 33 31 12 23 32 30 15) (250 30 1) egdeGrading (10 10 10 10 0.1 0.1 0.1 0.1 1 1 1 1) //08 inner pipe middle, bottom
220
221     hex (13 34 35 20 14 37 36 19) (130 70 1) egdeGrading (2 2 2 2 5 5 5 5 1 1 1 1) //09 wedge
222
223     hex (38 21 39 40 41 18 42 43) (60 50 1) egdeGrading (0.1 0.1 0.1 0.1 5 5 5 5 1 1 1 1) //10 space left
224     hex (21 20 45 39 18 19 44 42) (50 50 1) egdeGrading (1 1 1 1 5 5 5 5 1 1 1 1) //11 space middle
225     hex (20 35 46 45 19 36 47 44) (130 50 1) egdeGrading (2 2 2 2 5 5 5 5 1 1 1 1) //12 space right
226
227     hex (34 48 49 35 37 51 50 36) (100 70 1) egdeGrading (11 11 11 11 5 5 5 5 1 1 1 1) //13 outer pipe bottom right
228     hex (35 49 52 46 36 50 53 47) (100 50 1) egdeGrading (11 11 11 11 5 5 5 5 1 1 1 1) //14 space right right
229
230     hex (40 39 56 57 43 42 55 54) (60 50 1) egdeGrading (0.1 0.1 0.1 0.1 1 1 1 1 1 1 1 1) //15 outer space left
231     hex (39 45 59 56 42 44 58 55) (50 50 1) egdeGrading (1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1) //16 outer space middle
232     hex (45 46 61 59 44 47 60 58) (130 50 1) egdeGrading (2 2 2 2 1 1 1 1 1 1 1 1) //17 outer space right
233     hex (46 52 63 61 47 53 62 60) (100 50 1) egdeGrading (11 11 11 11 1 1 1 1 1 1 1 1) //18 outer space right right
234
235     hex (57 56 66 67 54 55 65 64) (60 75 1) egdeGrading (0.1 0.1 0.1 0.1 0.5 0.5 0.5 0.5 1 1 1 1) //19 edge outer space left
236     hex (56 59 69 66 55 58 68 65) (50 75 1) egdeGrading (1 1 1 1 0.5 0.5 0.5 0.5 1 1 1 1) //20 edge outer space middle
237     hex (59 61 71 69 58 60 70 68) (130 75 1) egdeGrading (2 2 2 2 0.5 0.5 0.5 0.5 1 1 1 1) //21 edge outer space right
238     hex (61 63 73 71 60 62 72 70) (100 75 1) egdeGrading (11 11 11 11 0.5 0.5 0.5 0.5 1 1 1 1) //22 edge outer space right right
239
240     hex (63 77 75 73 62 76 74 72) (30 75 1) egdeGrading (0.5 0.5 0.5 0.5 0.5 0.5 0.5 0.5 1 1 1 1) //23 edge outer space 3r
241     hex (52 79 77 63 53 78 76 62) (30 50 1) egdeGrading (0.5 0.5 0.5 0.5 1 1 1 1 1 1 1 1) //24 edge space 3r
242     hex (49 81 79 52 50 80 78 53) (30 50 1) egdeGrading (0.5 0.5 0.5 0.5 5 5 5 5 1 1 1 1) //25 edge space at pipe 3r
243     hex (48 83 81 49 51 82 80 50) (30 70 1) egdeGrading (0.5 0.5 0.5 0.5 5 5 5 5 1 1 1 1) //26 edge space2 at pipe 3r
244
245     hex (87 85 83 48 86 84 82 51) (30 30 1) egdeGrading (0.5 0.5 0.5 0.5 0.05 0.05 0.05 0.05 1 1 1 1) //27 edge space behind pipe 3r
246     hex (91 89 85 87 90 88 84 86) (30 10 1) egdeGrading (0.5 0.5 0.5 0.5 10 10 10 10 1 1 1 1) //28 edge space behind pipe bottom 3r
247
248     hex (95 57 67 93 94 54 64 92) (60 75 1) egdeGrading (5 5 5 5 0.5 0.5 0.5 0.5 1 1 1 1) //29 edge outer space left top
249     hex (97 40 57 95 96 43 54 94) (60 50 1) egdeGrading (5 5 5 5 1 1 1 1 1 1 1 1) //30 edge outer space left
250     hex (99 38 40 97 98 41 43 96) (60 50 1) egdeGrading (5 5 5 5 5 5 5 5 1 1 1 1) //31 edge outer space 2l
251     hex (101 103 38 99 100 102 41 98) (60 30 1) egdeGrading (5 5 5 5 0.2 0.2 0.2 0.2 1 1 1 1) //32 edge space left under pipe
252     hex (105 107 103 101 104 106 102 100) (60 10 1) egdeGrading (5 5 5 5 5 5 5 5 1 1 1 1) //33 edge space under pipe bottom
253
254     hex (109 111 24 25 108 110 23 22) (50 30 1) egdeGrading (1 1 1 1 5 5 5 5 1 1 1 1) //34 inner pipe left bottom
255     hex (111 113 33 24 110 112 32 23) (250 30 1) egdeGrading (10 10 10 10 5 5 5 5 1 1 1 1) //35 inner pipe right bottom
256
257 );
258
259 edges
260 (
261 );
262
263 patches
264 (
265     patch inlet
266     (
267         //02
268         (5 6 2 1) // left
269         //03
270         (6 9 10 2) // left
271     )
272 )
273
274     patch outlet
275     (
276         // 19 edge outer space left
277         (64 65 66 67) //top
278         //(54 64 67 57) //left
279         //(55 56 66 65 ) //right
280
281         // 20 edge outer space middle
282         (65 68 69 66) //top
283         //(58 59 69 68) //right
284
285         // 21 edge outer space right
286         (68 70 71 69) //top
287         //(60 61 71 70) //right
288
289         // 22 edge outer space right right
290         (70 72 73 71) //top
291         //(62 63 73 72) //right
292
293         // 23 edge outer space 3r
294         (72 74 75 73) //top
295         (76 77 75 74) //right
296         //(62 63 77 76) //bottom
297
298         // 24 edge space 3r
299         (78 79 77 76) //right
300         //(53 52 79 78) //bottom
301
302         // 25 edge space at pipe 3r
303         (80 81 79 78) //right
304         //(50 49 81 80) //bottom
305
306         // 26 edge space2 at pipe 3r
307         (82 83 81 80) //right
308         //(51 48 83 82) //bottom
309
310         // 27 edge space behind pipe 3r
311         (84 85 83 82) //right
312         //(86 87 85 84) //bottom
313

```

```

314 // 28 edge space behind pipe bottom 3r
315 (88 89 85 84) //right
316 (90 91 89 88) //bottom
317
318 // 29 edge outer space left top
319 (92 64 67 93) //top
320 (94 92 93 95) //left
321 //(94 95 57 54) //bottom
322
323 // 30 edge outer space left
324 (96 94 95 97) //left
325 //(96 97 40 43) //bottom
326
327 // 31 edge outer space 2l
328 (98 96 97 99) //left
329 //(98 99 38 41) //bottom
330
331 // 32 edge space left under pipe
332 (100 98 99 101) //left
333 //(100 101 103 102) //bottom
334
335 // 33 edge space left under pipe bottom
336 (104 100 101 105) //left
337 (104 105 107 106) //bottom
338 )
339
340 wall walls
341 (
342 // outer mouth left wall
343 (10 9 18 21)
344
345 // inner pipe left
346 (1 25 22 5) //left
347
348 // inner pipe middle, bottom
349 (33 31 30 32) // right wall
350 //(23 24 33 32) // bottom wall
351
352 // inner pipe middle, middle
353 (31 29 28 30) //right
354
355 // inner pipe middle, top
356 (14 26 27 13) //top
357 (29 27 26 28) //right
358
359 //wedge
360 (14 13 34 37)
361
362 // space left
363 (41 38 21 18) //bottom
364
365 //outer pipe bottom right
366 (37 34 48 51)
367
368 // 27 edge space behind pipe 3r
369 (86 51 48 87) //left
370
371 // 28 edge space behind pipe bottom 3r
372 (90 86 87 91) //left
373
374 // 32 edge space left under pipe
375 (102 103 38 41) //right
376
377 // 33 edge space left under pipe bottom
378 (106 107 103 102) //right
379
380 // 34 inner pipe left bottom
381 (108 22 25 109) //left
382 (108 109 111 110) //bottom
383 //(110 111 24 23) //right
384
385 // inner pipe right bottom
386 (110 111 113 112) //bottom
387 (112 113 33 32) //right
388 )
389 empty frontAndBack
390 (
391 //front //lower mouth tmp
392 (5 6 16 15)
393 //back // lower mouth tmp
394 (1 12 17 2)
395 //front //upper mouth tmp
396 (6 9 14 16)
397 //back //upper mouth tmp
398 (2 17 13 10)
399
400 //front //outer mouth left
401 (9 18 19 14)
402 //back //outer mouth left
403 (10 13 20 21)
404
405 //front //inner pipe left
406 (22 5 15 23)
407 // back //inner pipe left
408 (25 24 12 1)
409
410 //front //wedge
411 (14 19 36 37)
412 //back //wedge
413 (13 34 35 20)
414
415 //front //inner pipe middle, bottom
416 (23 15 30 32)
417 //back //inner pipe middle, bottom
418 (24 33 31 12)
419
420 //front //inner pipe middle, middle
421 (15 16 28 30)

```

```

422 //back //inner pipe middle, middle
423 (12 31 29 17)
424
425 //front //inner pipe middle, top
426 (16 14 26 28)
427 //back //inner pipe middle, top
428 (17 29 27 13)
429
430 //font //space middle
431 (18 42 44 19)
432 //back //space middle
433 (21 20 45 39)
434
435 //front //space left
436 (41 43 42 18)
437 //back //space left
438 (38 40 39 21)
439
440 //front //space right
441 (19 44 47 36)
442 //back //space right
443 (20 35 46 45)
444
445 //front //outer pipe bottom right
446 (37 36 50 51)
447 //back //outer pipe bottom right
448 (34 48 49 35)
449
450 //front //space right right
451 (36 47 53 50)
452 //back //space right right
453 (35 49 52 46)
454
455 //front // outer space left
456 (43 54 55 42)
457 //back //outer space left
458 (40 39 56 57)
459
460 //front // outer space middle
461 (42 55 58 44)
462 //back //outer space middle
463 (39 45 59 56)
464
465 //front // outer space right
466 (44 58 60 47)
467 //back //outer space right
468 (45 46 61 59)
469
470 //front // outer space right right
471 (47 60 62 53)
472 //back //outer space right right
473 (46 52 63 61)
474
475 // front // 19 edge outer space left
476 (54 64 65 55)
477 // back // 19 edge outer space left
478 (57 56 66 67)
479
480 // front // 20 edge outer space middle
481 (55 65 68 58)
482 // back // 20 edge outer space middle
483 (56 59 69 66)
484
485 // front // 21 edge outer space right
486 (58 68 70 60)
487 // back // 21 edge outer space right
488 (59 61 71 69)
489
490 // front // 22 edge outer space right right
491 (60 70 72 62)
492 // back // 22 edge outer space right right
493 (61 63 73 71)
494
495 // front // 23 edge outer space 3r
496 (62 72 74 76)
497 // back // 23 edge outer space 3r
498 (63 77 75 73)
499
500 // front // 24 edge space 3r
501 (53 62 76 78)
502 // back // 24 edge space 3r
503 (52 79 77 63)
504
505 // front // 25 edge space at pipe 3r
506 (50 53 78 80)
507 // back // 25 edge space at pipe 3r
508 (49 81 79 52)
509
510 // front // 26 edge space2 at pipe 3r
511 (51 50 80 82)
512 // back // 26 edge space2 at pipe 3r
513 (48 83 81 49)
514
515 // front // 27 edge space behind pipe 3r
516 (86 51 82 84)
517 // back // 27 edge space behind pipe 3r
518 (87 85 83 48)
519
520 // front // 28 edge space behind bottom pipe 3r
521 (90 86 84 88)
522 // back // 28 edge space behind bottom pipe 3r
523 (91 89 85 87)
524
525 // front // 29 edge outer space left top
526 (94 92 64 54)
527 // back // 29 edge outer space left top
528 (95 57 67 93)
529

```



```

25
26 endTime      0.1;
27
28 deltaT        0.0000001;
29
30 writeControl  timeStep;
31
32 writeInterval 500;
33
34 purgeWrite    0;
35
36 writeFormat   ascii;
37
38 writePrecision 6;
39
40 writeCompression off;
41
42 timeFormat    general;
43
44 timePrecision 6;
45
46 runTimeModifiable true;
47
48 adjustTimeStep no;
49
50 maxCo         0.5;
51
52 maxDeltaT     1;
53
54 functions
55 {
56
57     fieldAverage1
58     {
59         type          fieldAverage;
60         functionObjectLibs ( "libfieldFunctionObjects.so" );
61         enabled       true;
62         outputControl outputTime;
63
64         fields
65         (
66             U
67             {
68                 mean      on;
69                 prime2Mean on;
70                 base      time;
71             }
72
73             p
74             {
75                 mean      on;
76                 prime2Mean on;
77                 base      time;
78             }
79
80             rho
81             {
82                 mean      on;
83                 prime2Mean on;
84                 base      time;
85             }
86         );
87     }
88     probes
89     {
90         // Where to load it from
91         functionObjectLibs ( "libsampling.so" );
92         enabled true;
93
94         type          probes;
95
96         // Name of the directory for probe data
97         name          probes;
98
99         // Write at same frequency as fields
100        outputControl outputTime;
101        //outputInterval 1;
102
103        // Fields to be probed
104        fields
105        (
106            p
107            rho
108            U
109            k
110            T
111            vorticity
112        );
113
114        probeLocations
115        (
116            // jet inside the inlet
117            //(-0.002 0.0092 0 )
118            // line jet at mouth near edge      A
119            (0.00475 0.0092 0)
120
121            // line jet at mouth      B
122            (0.00275 0.0092 0)
123
124            // inside the pipes end      C
125            (0.096 0.0045 0 )
126
127            // far away      D
128            (0.096 0.09 0)
129
130            // line vertical near mouth E
131            (0.00275 0.0165 0)
132

```

```

133 // line vertical mouth middle far away F
134 (0.00275 0.045 0)
135
136 // line vertical mouth far away G
137 (0.00275 0.09 0)
138
139
140
141
142
143
144 );
145 }
146 }
147 // ***** //

```

### Quellcode C.15: fvSchemes

```

1  /*----- C++ -----*/
2  |=====|
3  | \ \ / / | F i e l d | OpenFOAM: The Open Source CFD Toolbox
4  | \ \ / / | O p e r a t i o n | Version: 2.0.0
5  | \ \ / / | A n d | Web: www.OpenFOAM.org
6  | \ \ / / | M a n i p u l a t i o n | Author: Jost Fischer, 11/2011, University of Potsdam
7  |=====|
8  FoamFile
9  {
10     version      2.0;
11     format       ascii;
12     class        dictionary;
13     location     "system";
14     object       fvSchemes;
15 }
16 // ***** //
17
18 ddtSchemes
19 {
20     default      backward;
21 }
22
23 gradSchemes
24 {
25     default      Gauss linear;
26 }
27
28 divSchemes
29 {
30     default      none;
31     div(phi,U)   Gauss filteredLinear2V 0.2 0;
32     div(phi,h)   Gauss filteredLinear2 0.2 0;
33     div(phiU,p)   Gauss linear;
34     div(phi,k)    Gauss limitedLinear 1;
35     div(phi,B)    Gauss limitedLinear 1;
36     div(phi,muTilda) Gauss limitedLinear 1;
37     div(B)        Gauss linear;
38     div((muEff*dev2(T(grad(U)))) Gauss linear;
39 }
40
41 laplacianSchemes
42 {
43     default      none;
44     laplacian(muEff,U) Gauss linear corrected;
45     laplacian((rho*(1|A(U))),p) Gauss linear corrected;
46     laplacian(alphaEff,h) Gauss linear corrected;
47     laplacian(DkEff,k) Gauss linear corrected;
48     laplacian(DBEff,B) Gauss linear corrected;
49     laplacian(DmuTildaEff,muTilda) Gauss linear corrected;
50 }
51
52 interpolationSchemes
53 {
54     default      linear;
55 }
56
57 snGradSchemes
58 {
59     default      corrected;
60 }
61
62 fluxRequired
63 {
64     default      no;
65     p            ;
66 }
67
68
69 // ***** //

```

### Quellcode C.16: fvSolution

```

1  /*----- C++ -----*/
2  |=====|
3  | \ \ / / | F i e l d | OpenFOAM: The Open Source CFD Toolbox
4  | \ \ / / | O p e r a t i o n | Version: 2.0.0
5  | \ \ / / | A n d | Web: www.OpenFOAM.org
6  | \ \ / / | M a n i p u l a t i o n | Author: Jost Fischer, 11/2011, University of Potsdam
7  |=====|
8  FoamFile
9  {
10     version      2.0;
11     format       ascii;
12     class        dictionary;
13     location     "system";
14     object       fvSolution;

```

```

15 }
16 // ***** //
17
18 solvers
19 {
20     "(p|rho)"
21     {
22         solver          PCG;
23         preconditioner  DIC;
24         tolerance       1e-6;
25         relTol          0;
26     }
27
28     "(p|rho)Final"
29     {
30         $p;
31         relTol          0;
32     }
33
34     "(U|h|k|nuTilda)"
35     {
36         solver          PBiCG;
37         preconditioner  DILU;
38         tolerance       1e-6;
39         relTol          0;
40     }
41
42     "(U|h|k|nuTilda)Final"
43     {
44         $U;
45         relTol          0;
46     }
47 }
48
49 PIMPLE
50 {
51     momentumPredictor yes;
52     nOuterCorrectors 2;
53     nCorrectors       1;
54     nNonOrthogonalCorrectors 0;
55     rhoMin            rhoMin [ 1 -3 0 0 0 ] 0.5;
56     rhoMax            rhoMax [ 1 -3 0 0 0 ] 2.0;
57 }
58
59 relaxationFactors
60 {
61     "(U|h|k|epsilon|omega).*" 1;
62 }
63
64 // ***** //

```

#### Quellcode C.17: sampleDict

```

1  /*-----* C++ *-----*/
2  |=====|
3  | \\ / F i e l d | OpenFOAM: The Open Source CFD Toolbox
4  | \\ / O p e r a t i o n | Version: 2.0.0
5  | \\ / A n d | Web: www.OpenFOAM.org
6  | \\ / M a n i p u l a t i o n | Author: Jost Fischer, 11/2011, University of Potsdam
7  /*-----*/
8  FoamFile
9  {
10     version      2.0;
11     format       ascii;
12     class        dictionary;
13     location     "system";
14     object       sampleDict;
15 }
16 // ***** //
17
18 interpolationScheme cellPoint;
19
20 setFormat      raw;
21
22 sets_mouth_and_coupling_region
23 {
24     vline_pipe_cross_section1
25     {
26         type      uniform;
27         axis      distance;
28         start     (0.0055 0 0);
29         end       (0.0055 0.0095 0);
30         nPoints   100;
31     }
32     vline_pipe_cross_section2
33     {
34         type      uniform;
35         axis      distance;
36         start     (0.0065 0 0);
37         end       (0.0065 0.0095 0);
38         nPoints   100;
39     }
40     vline_pipe_cross_section3
41     {
42         type      uniform;
43         axis      distance;
44         start     (0.007 0 0);
45         end       (0.007 0.0095 0);
46         nPoints   100;
47     }
48     hline_pipe_mouth_cross_section1
49     {
50         type      uniform;
51         axis      distance;
52         start     (0 0.0165 0);
53         end       (0.0258 0.0155 0);

```

```

54     nPoints 272;
55     }
56 );
57
58 fields (mag(U) p rho k U.component(0) U.component(1) U.component(2) );
59
60 // ***** //
61
62 sets_jet
63 (
64     vline_jet00
65     {
66         type    uniform;
67         axis    distance;
68         start   (0 0.0049 0);
69         end     (0 0.0135 0);
70         nPoints 200;
71     }
72     vline_jet01
73     {
74         type    uniform;
75         axis    distance;
76         start   (0.00055 0.0049 0);
77         end     (0.00055 0.0135 0);
78         nPoints 200;
79     }
80
81     vline_jet02
82     {
83         type    uniform;
84         axis    distance;
85         start   (0.0011 0.0049 0);
86         end     (0.0011 0.0135 0);
87         nPoints 200;
88     }
89     vline_jet03
90     {
91         type    uniform;
92         axis    distance;
93         start   (0.00165 0.0049 0);
94         end     (0.00165 0.0135 0);
95         nPoints 200;
96     }
97     vline_jet04
98     {
99         type    uniform;
100        axis    distance;
101        start   (0.0022 0.0049 0);
102        end     (0.0022 0.0135 0);
103        nPoints 200;
104    }
105    vline_jet05
106    {
107        type    uniform;
108        axis    distance;
109        start   (0.00275 0.0049 0);
110        end     (0.00275 0.0135 0);
111        nPoints 200;
112    }
113    vline_jet06
114    {
115        type    uniform;
116        axis    distance;
117        start   (0.0033 0.0049 0);
118        end     (0.0033 0.0135 0);
119        nPoints 200;
120    }
121    vline_jet07
122    {
123        type    uniform;
124        axis    distance;
125        start   (0.00385 0.0049 0);
126        end     (0.00385 0.0135 0);
127        nPoints 200;
128    }
129    vline_jet08
130    {
131        type    uniform;
132        axis    distance;
133        start   (0.0044 0.0049 0);
134        end     (0.0044 0.0135 0);
135        nPoints 200;
136    }
137    vline_jet09
138    {
139        type    uniform;
140        axis    distance;
141        start   (0.00495 0.0049 0);
142        end     (0.00495 0.0135 0);
143        nPoints 200;
144    }
145    vline_jet10
146    {
147        type    uniform;
148        axis    distance;
149        start   (0.0055 0.0049 0);
150        end     (0.0055 0.0135 0);
151        nPoints 200;
152    }
153 );
154
155 fields (p k U );
156
157 // ***** //
158
159 sets_dipol
160 (
161     dipol

```

```

162     {
163         type    uniform;
164         axis    distance;
165         start   ( 0.00549 0.0 0 );
166         end     ( 0.00549 0.019 0 );
167         nPoints 400;
168     }
169
170 );
171
172 fields      ( p );
173
174 // ***** //
175
176 sets_resonator
177 (
178     hline_resonator
179     {
180         type    uniform;
181         axis    distance;
182         start   ( 0 0.00475 0 );
183         end     ( 0.106 0.00475 0 );
184         nPoints 1927;
185     }
186
187 );
188
189 fields ( p k U);

```