Universität Potsdam
Humanwissenschaftliche Fakultät
Grundschulpädagogik Mathematik

Masterarbeit

Zur Erlangung des Grades „Master of Education Lehramt für die Primarstufe“

über das Thema

Professionswissen von Lehramtsstudierenden: Lehren und Lernen zu notwendigen Vorstellungsumbrüchen bei der Multiplikation/Division von Brüchen in der Lehrveranstaltung „Arithmetik und ihre Didaktik II“

Betreuerin: Dr. Karen Reitz-Koncebovski

Verfasser: Simon Fromm

Disputation am: 22.03.2022

Online veröffentlicht auf dem
Publikationsserver der Universität Potsdam:
https://doi.org/10.25932/publishup-55948
https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:kobv:517-opus4-559483

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis:

Tabellenverzeichnis:

1. Einleitung

Die vorliegende Masterarbeit wurde im Rahmen des PSI-Projektes der Universität Potsdam zur Qualitätsoffensive der Lehrerbildung im Teilprojekt ‚Professionswissen' erstellt. Im Rahmen dieses Projektes wurden die Lehrveranstaltungen im Studiengang Lehramt für die Primarstufe im Fach Mathematik neu konzipiert unter dem Schwerpunkt, das zur Ausbildung eines angemessenen Professionswissens notwendige fachbezogene Wissen, also die Verbindung von Fachwissen und fachdidaktischem Wissen, in einer Lehrveranstaltung integrativ und vernetzt zu lehren. Dafür wurden für die neu konzipierten Lehrveranstaltungen fünf zentrale Gestaltungskriterien sowie ein übergeordnetes Querschnittsprinzip zur Explikation von Zusammenhängen auf einer Metaebene herausgearbeitet (Reitz-Koncebovski, Hermanns, Kortenkamp & Kuzle, 2020). Diese Masterarbeit setzt sich nun mit der Frage auseinander, wie ein fachwissenschaftliches Thema der konkreten Lehrveranstaltung zur „Didaktik der Arithmetik II" in Bezug auf die in Abschnitt 2.3.3 formulierten Gestaltungsprinzipien umgesetzt wird, mit dem Ziel, das notwendige Professionswissen der Studierenden zu sichern.

Dafür erfolgt aufgrund des eigenen fachlichen Interesses eine vertiefte Auseinandersetzung mit der Umsetzung der Vorlesung und der Übung zum inhaltlichen Schwerpunkt Multiplikation und Division von positiven rationalen Zahlen. Interessenleitend sind dabei vor allem fachdidaktische Aspekte zu notwendigen Grundvorstellungen von Begriffen (hier den Bruchzahlen) sowie Grundvorstellungen zu Verfahren (hier für die Durchführung der entsprechenden Rechenoperationen) (vom Hofe, 1995) und die aus der Einführung der rationalen Zahlen notwendig werdenden Vorstellungsumbrüche bei Kindern und Studierenden. So zeigte sich bei der Durchführung eines Pretests zu Bruchrechenkompetenzen der Studierenden in mehreren Kohorten, dass gerade bei der Multiplikation und Division von Brüchen viele Studierenden die Aufgaben fehlerhaft bearbeiten haben (siehe hierzu Abschnitt 3). Ursächlich hierfür scheinen für einen Teil der Studierenden Fehlvorstellungen zu Bruchzahlen und/oder fehlende Vorstellungsumbrüche zu den Verfahren der Multiplikation/Division beim Übergang vom Zahlenraum der natürlichen Zahlen in den Raum der rationalen Zahlen zu sein. Wenn das Zähl- und Rechenschema der natürlichen Zahlen bzw. die dabei gemachten Erfahrungen wie ‚Multiplikation vergrößert immer' fälschlicherweise auf Aufgaben mit positiven rationalen Zahlen übertragen werden, wird dieser Fehlertyp in der entsprechenden Fachliteratur (vgl. Van Hoof, Lijnen, Verschaffel & van Dooren, 2013; Christou, 2015; van Hoof, Verschaffel & van Dooren, 2015; Stampfer, Reitz-Koncebovski & Hell, 2020) als Natural Number Bias (NNB) bzw. als Whole Number Bias (vgl. Ni & Zhou, 2005; Braithwaite & Siegler, 2018) bezeichnet. Basierend auf der entsprechenden Erörterung der Ergebnisse des Bruchrechentests zu spezifischen Bruchrechenaufgaben sowie auf Grundlage von Beobachtungen von Vorlesungsabschnitten aus der Vorlesung 7 zu Bruchzahlaspekten und Grundvorstellungen und der Vorlesung 9 zur Multiplikation und Division von Brüchen sowie der beiden zugehörigen Übungen der Lehrveranstaltung verfolgt die vorliegende Untersuchung primär die Frage, welches fachbezogene Wissen zum Aufgreifen von notwendigen Vorstellungsumbrüchen, Aufbau von Grundvorstellungen und zur Behebung von Fehlvorstellungen in den Lehrveranstaltungen wie vermittelt wird.

Zur Beantwortung dieser Forschungsfrage erfolgt eine qualitative Inhaltsanalyse der beobachteten Vorlesungs- und Übungsinhalte mit Blick auf die Behandlung von Grund- und Fehlvorstellungen sowie notwendigen Vorstellungsumbrüchen und deren metakognitive Reflexion. Dabei werden das formulierte Querschnittsprinzip sowie drei der fünf formulierten Gestaltungsprinzipien (Grundprinzipien der Mathematikdidaktik und ihre Realisierung) berücksichtigt. Zu den Gestaltungsprinzipien liegt bereits ein deduktives Kategoriensystem vor (Reitz-Koncebovski, 2019), dass sich aus den zu Beginn in Abschnitt 2 aufbereiteten theoretischen Grundlagen zur Professionsforschung und Grundvorstellungen im Fach Mathematik ableiten lässt bzw. aufgrund dessen ergänzt wird. Dieses Kategoriensystem wird im Zuge einer detaillierten Auswertung in Bezug auf Grundvorstellungen, Fehlvorstellungen sowie notwendige Vorstellungsumbrüche am Material ausgeschärft. Anhand der Ergebnisse dieser induktiven Kategorienbildung wird die Umsetzung der Lehre kritisch beleuchtet.

Weiterhin soll eine vergleichende Analyse der Ergebnisse des Pre- und Posttests zur Bruchrechenkompetenz der Studierenden die Auswirkungen der Lehre zum Thema Multiplikation und Division von Brüchen auf das Lernen der Studierenden erörtern.

Ziel dieser Analysen ist es, im Rahmen des im PSI-Projekt verfolgten Design-Based-Research-Ansatzes (Reinmann, 2005) Hinweise dafür zu erarbeiten, wie die Lehrveranstaltung weiterentwickelt werden kann.

Zur Umsetzung dieses Vorhabens werden zunächst im Abschnitt 2 die theoretischen Grundlagen zu den verwendeten Begrifflichkeiten, Konzepten und Fachinhalten aufbereitet. Dabei soll in Abschnitt 2.1 kurz die für die Untersuchung relevante Idee des Design-Based-Research (DBR) im Rahmen der Mathematikdidaktik erörtert werden, bevor in Abschnitt 2.2 das Konzept des Professionswissens aufbereitet wird. In Abschnitt 2.3 werden die theoretischen Hintergründe für die formulierten Gestaltungskriterien dargelegt, bevor in Abschnitt 2.4 der Begriff und die Behandlung des Natural-Number-Bias an der Universität Potsdam beschrieben wird. Als Kernteil des Theorieabschnitts schließt sich mit Abschnitt 2.5 die theoretische Beleuchtung von Grund- und Fehlvorstellungen und notwendigen Vorstellungsumbrüchen beim Übergang von den Natürlichen zu den positiven Rationalen Zahlen an.

Auf Basis der erfolgten theoretischen Ausführungen soll die Studienausgangslage unter Beleuchtung der Ergebnisse des Pretests zum NNB erörtert werden. Des Weiteren werden in Abschnitt 3 die Forschungsfragen der Studie konkretisiert, bevor im Methodikteil (Abschnitt 4) das Design der Studie und die Art der Auswertung im Rahmen einer qualitativen Inhaltsanalyse dargestellt werden. Darauf aufbauend sollen in Abschnitt 5 die Ergebnisse der Studie wiedergegeben und interpretiert werden, welche in Kapitel 6 zusammenfassend aufbereitet werden. In Abschnitt 7 wird ein finales Fazit gezogen sowie ein Ausblick auf den eigenen Erkenntnisgewinn und mögliche weitere Forschungsfragen gegeben.

2. Theoretische Grundlagen

Im folgenden Abschnitt sollen die notwendigen theoretischen Grundlagen zu der Forschungsarbeit beschrieben werden.

2.1 Design-Based-Research in der Mathematikdidaktik

Im Rahmen empirischer Bildungsforschung im Fach Mathematik wird das Lehren und Lernen unter der spezifischen Perspektive „auf mathematische Inhalte bzw. mathematikspezifische Lernprozesse“ (Vollstedt, Ufer, Heinze & Reiss, 2015, S. 568) in den Blick genommen. Mit dem Ziel qualitativer Forschung induktiv zur Hypothesengenerierung beizutragen, ist dabei aus mathematikdidaktischer Perspektive insbesondere die Deutung bzw. Deutungszuschreibung zu dem behandelten mathematischen Stoff in der Interaktion der am Lehr-Lern-Prozess beteiligten Personen von Interesse (Schreiber, Schütte & Krummheuer, 2015). Im Sinne des konstruktivistischen Ansatzes trägt nicht der mathematische Stoff seine Bedeutungen in sich, „sondern es sind die im Unterricht von den Beteiligten ausgehandelten Bedeutungen, die aus dem Stoff erst einen solchen machen“ (Schreiber et al., 2015, S. 593). Dabei müssen im Unterricht „aus mathematischer Sicht akzeptable Bedeutungszuschreibungen hervorgebracht werden, die keine „Eintagsfliegen“ sind und sich als situationsüberdauernd erweisen“ (ebd.).

In dieser Arbeit sollen Aspekte zur Gestaltung der universitären Lehre durch Dozierende (vgl. Abschnitt 2.3 zu den Gestaltungsprinzipien der Lehrveranstaltung) zur Vermittlung eines vertieften Professionswissens für die Studierenden als zukünftige Lehrende (siehe hierzu Abschnitt 2.2) analysiert werden, mit dem Ziel im Rahmen der Evaluation der Durchführung der Lehrveranstaltung Hinweise zur weiteren Verbesserung der Bildungspraxis geben zu können.

Grundlegend für die empirische Erforschung dieser Vorgänge im Rahmen der Durchführung der Lehrveranstaltung „Arithmetik und ihre Didaktik“ ist *Design-Based Research* als Paradigma der Mathematikdidaktik (Vollstedt et al., 2015). *Design-Based Research (DBR)* ist durch die Zielsetzung nachhaltiger Innovation (im modernen Begriffsverständnis) im Rahmen der Bildungspraxis geprägt (Reinmann, 2005). Lehr-Lern-Settings sollen nach diesem Grundverständnis neben der theoretisch-wissenschaftlichen Begründung durch den „design-mode“ (Reinmann, 2005, S. 58) entwickelt werden, der auf Ideen und Konzeptionen „mit der Suche nach möglichen Anwendungen, nach passenden Kontexten und nach Verbesserungsmöglichkeiten“ (ebd.) reagiert. Mit diesem Ansatz werden holistisch Interventionen im Lehr-Lernbereich entwickelt, die kontextsensitiv aus „Interaktionen zwischen Methoden, Medien, Materialien, Lehrenden und Lernenden“ (Reinmann, 2005, S. 63) bestehen. Die Vorgehensweise ist dabei zyklisch: Auf die Gestaltung und Durchführung der Intervention folgt die evaluative Analyse und das Re-Design (Reinmann, 2005), so dass die Intervention bzw. das Lehr-Lern-Setting beständig weiterentwickelt wird. Grundlegend hierfür ist eine hohe Motivation der Forschenden durch die entwickelten Interventionen die Bildungspraxis zu verbessern. Diese Forschungsarbeit widmet sich dabei dem evaluativen Part, der Optimierungspotentiale der Umsetzung und weiteren Entwicklung der Vorlesungsreihe durch die Beobachtung und qualitative Analyse von Lehr- und Lernsituationen identifizieren soll.

2.2 Professionswissen von Lehrkräften

Seit etwa Mitte der 80-er Jahre ist im Rahmen des Expertenparadigmas der Lehrer*innenbildung, der grundsätzlichen Frage nachgehend, was ‚gute Lehrkräfte‘ ausmacht, die Erforschung der Professionalität von Lehrkräften in den Fokus des Forschungsinteresses gerückt (vgl. Kunter et al., 2011; Vollstedt et al., 2015; Hartinger, 2015; Woehlecke et al., 2017) Während in früheren Studien „nach Effekten der Persönlichkeit, der Expertise oder bestimmter Handlungen von Lehrerinnen und Lehrern gesucht wurde“ (Hartinger, 2015, S. 49), liegt der Forschungsfokus heute oft auf der Frage der Qualifizierung der Lehrkräfte, welche als entscheidender Beitrag zur Optimierung von Bildungsprozessen angesehen wird (Baumert & Kunter, 2011).

Auch an der Universität Potsdam wird im Rahmen der Qualitätsoffensive Lehrerbildung die Professionalisierung von Lehrkräften und der Aufbau von Professionswissen als Teil des Projektes **P**rofessionalisierung – **S**chulpraktische Studien – **I**nklusion (PSI-Potsdam) in einem interdisziplinären Projektteam mit den in der ersten Projektphase vertretenen Fächern Biologie, Geschichte, Mathematik, Physik und Wirtschaft-Arbeit-Technik seit dem Frühjahr 2015 intensiv beforscht. Seit Beginn der 2. Projektphase im Januar 2019 sind die Fächer Geschichte, Mathematik, Englisch, Biologie, Chemie sowie Deutsche Literatur im Schwerpunkt 1: Professionalisierung des Projektes vertreten.

In der ersten Projektphase wurde basierend auf theoretischen Vorarbeiten zum Professionswissen eine „fachübergreifende Konzeptionalisierung und Operationalisierung des berufsspezifischen Fachwissens“ (Woehlecke et al., 2017, S. 413), das sogenannte erweiterte Fachwissen entwickelt, welches in Abschnitt 2.2.1 basierend auf einem dort beschriebenen grundlegenden Modell zur professioneller Kompetenz kurz erläutert werden soll. Im Anschluss wird der weitere Projektverlauf zur fachspezifischen Professionalisierung für die Lehrerbildung Mathematik in Abschnitt 2.2.2 dargestellt, in den auch diese Forschungsarbeit eingebunden ist.

2.2.1 Das Kompetenzmodell COACTIV

Basierend auf grundlegenden Arbeiten von Shulman (1986), welcher folgende drei Arten von Fachwissen „unterscheidet: Fachwissen, fachdidaktisches Wissen und curriculares Wissen“ (Vollstedt et al., 2015, S. 577), und unter Einbettung von Literatur zu professioneller Kompetenz und Kompetenzdiagnostik, wurde von der Forschungsgruppe um Kunter und Baumert das COACTIV-Modell zur professionellen Kompetenz von Lehrkräften entwickelt (Baumert & Kunter, 2011) , welches in Abbildung 1 dargestellt ist.

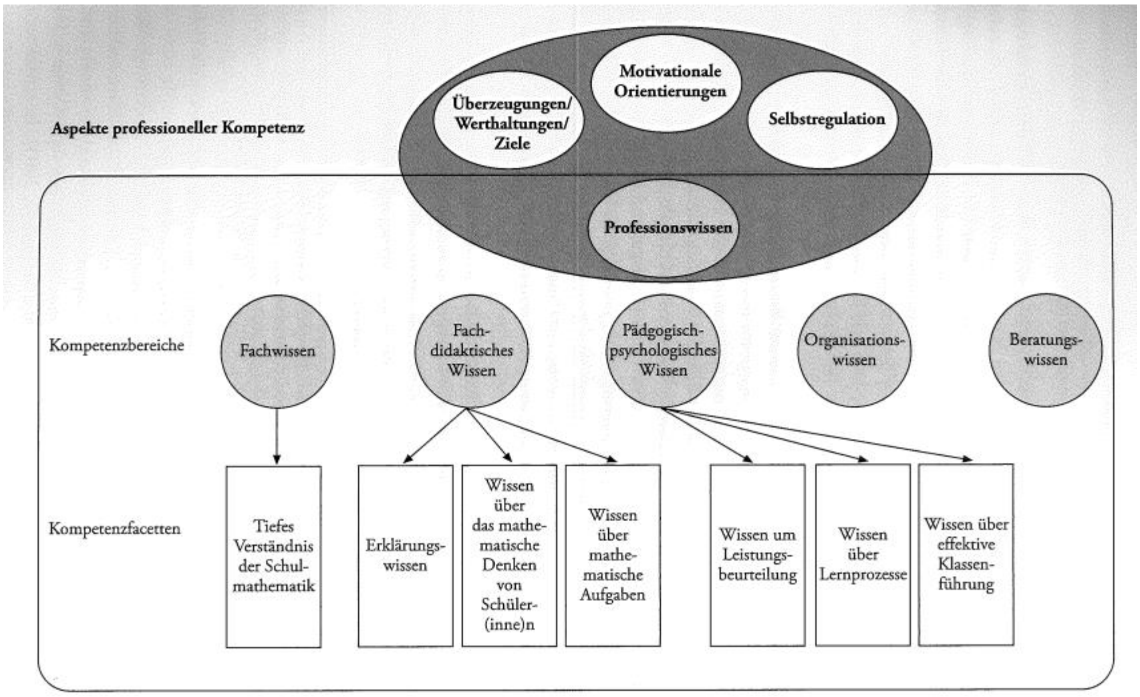


Abbildung 1: Das Kompetenzmodell von COACTIV mit Spezifikationen für das Professionswissen; Quelle: (Baumert & Kunter, 2011, S. 32)

Grundsätzlich gliedert sich die Handlungskompetenz in vier Hauptaspekte professioneller Kompetenz auf. Zunächst umfassen die Aspekte professioneller Kompetenz motivationale, selbstregulative und metakognitive (Überzeugungen, Ziele) Merkmale, „die als entscheidende Voraussetzungen für die Bereitschaft zu handeln gesehen werden“ (Baumert & Kunter, 2011, S. 31).

Daneben steht als kognitiver Aspekt von Kompetenz das Professionswissen, was sich in verschiedene Kompetenzbereiche untergliedern lässt, welche wiederum spezifische Kompetenzfacetten aufweisen. Diese kognitiven Kompetenzen werden als notwendige Bedingung zur Bewältigung von Anforderungen von Klieme und Leutner (2006) in Baumert und Kunter (2011) wie folgt beschrieben:

> „Kompetenzen nach Klieme und Leutner (2006) [sind] kontextabhängige kognitive Leistungsdispositionen, die durch Lernen erworben werden und notwendig sind, um beschreibbare Anforderungen in spezifischen Domänen zu bewältigen“ (Baumert & Kunter, 2011, S. 31)

In dieser Definition zeigt sich der Grund, warum das Kompetenzmodell zusätzlich die motivationalen, metakognitiven und selbstregulativen Merkmale von Kompetenz aufnimmt. Kognitive Kompetenzen sind zwar notwendige, aber nicht hinreichende Bedingungen für die Bewältigung von Anforderungen, da für diese immer auch motivationale und volitionale Aspekte eine Rolle spielen.

Für die mathematikdidaktische Forschung bedeutsam sind aus dem Rahmenmodell die Kompetenzbereiche Fachwissen und fachdidaktisches Wissen, auf die im Weiteren näher eingegangen werden soll. Dabei konnten Kunter et al. (2011) in ihrer Publikation zu den Ergebnissen des Forschungsprogramms COAKTIV zeigen, dass diese theoretische Struktur eines mehrdimensionalen Wissensmodells mit den Kompetenzfacetten tiefes Verständnis der Schulmathematik, einem fundierten Erklärungswissen, dem Wissen über das mathematische Denken von Schülerinnen und Schülern [1] sowie dem Wissen über mathematische Aufgaben empirisch belastbar ist (Baumert & Kunter, 2011).

Das COACTIV-Modell stellt daher eine gute Grundlage für die Konzeptionierung von universitären Lehrveranstaltungen zur Vermittlung von fachbezogenem Wissen im Fach Mathematik dar. Die Begrifflichkeit *fachbezogenes Wissen*, wird in dieser Arbeit im

[1] Im Folgenden wird die Formulierung „Schülerinnen und Schüler“ durch die im schulischen Kontext übliche abkürzende Schreibweise „SuS“ ersetzt

Weiteren, der Kategorisierung von Baumert und Kunter (2011) folgend, als Oberbegriff für die zu beschreibenden Kompetenzbereiche ‚*Fachwissen*' und ‚*Fachdidaktisches Wissen*' verwendet.

Auf welchem Niveau aber soll nun mathematisches Fachwissen im universitären Rahmen vermittelt werden, so dass die Studierenden angemessen für „Verständnis vermittelndes Unterrichten" (Baumert & Kunter, 2011, S. 37) ausgebildet werden?

Die Autoren der COACTIV-Studie ermitteln vier grundsätzlich mögliche Ebenen mathematischen Wissens:

1. Mathematisches Alltagswissen von Erwachsenen.
2. Beherrschung des Schulstoffs auf einem zum Ende der Schulzeit erreichbaren Niveau.
3. Tieferes Verständnis der Schulmathematik und der mathematischen Hintergründe
4. akademisches Forschungswissen (ebd.)

Als Referenz für das COACTIV-Modell wird dabei die Ebene 3 von dem Forschungsteam angesehen, auf der dann auch empirisch das Fachwissen erhoben wurde. Woehlecke et al. (2017) entwickeln in ihrem Forschungsbeitrag für das universitäre Lehramtsstudium als Bindeglied zwischen universitärem Wissen und Schulwissen das Modell des sogenannten ‚erweiterten Fachwissens für den schulischen Kontext', welches sich in folgende Facetten aufgliedert:

1. *Wissen über Konzepte und ihre Anwendung im jeweiligen Fach:* Dient einem systematischen Zugang zum Fach durch Basiskonzepte, die ermöglichen, dass neues Wissen sich strukturiert in das vorhandene Wissensnetz integrieren lässt.
2. *Wissen über Erkenntnisprozesse unter Einbezug von Theorie, Fachsprache, Erkenntnis- und Gültigkeitsprinzipien im Fach:* Dient dazu sinnvolle Arbeitsweisen und Erkenntniswege den SuS verständlich machen zu können. Weiterhin bedingt eine sensible Verwendung von Fachsprache im Unterricht ein tieferes Verständnis von fachlichen Begriffen und Theorien um diese beispielsweise auch gegen eine umgangssprachliche Verwendung von Fachbegriffen geeignet abgrenzen zu können.
3. *Wissen, um sinnvoll und vorausschauend zu reduzieren:* Dient einer sinnvollen und korrekten Reduktion auf Unterrichtsinhalte, so dass die Folgen dieser Reduktion fachwissenschaftlich verantwortbar sind. Diese Facette umfasst noch keine fachdidaktischen Aspekte des notwendigen Reduktionsprozesses, dient aber als Grundlage zur Generierung fachdidaktischen Wissens z. B. zu möglichen (Fehl-) Vorstellungen von SuS. (Woehlecke et al., 2017).

2.2.2 Professionalisierung in der Lehrerbildung Mathematik an der Universität Potsdam

Im Rahmen des Teilprojekts Mathematik zum Schwerpunkt 1 des PSI-Projektes „Professionalisierung“ wurde in zwei Projektphasen die mathematisch-fachwissenschaftliche und fachdidaktische Ausbildung weiterentwickelt, mit dem Fokus zum Einen das berufsspezifische Fachwissen der Studierenden im Rahmen des ‚erweiterten Fachwissens‘ auszubilden und zum Anderen dieses mit der fachdidaktischen Ausbildung zu verzahnen (Reitz-Koncebovski et al., 2020). In Projektphase 1 wurden daher zunächst *Gestaltungsprinzipien* erfolgreicher universitärer Lehre entwickelt, die zunächst auf die Umsetzung des erweiterten Fachwissens abzielten. Dabei wurden für den Bereich Mathematik folgende vier Gestaltungsprinzipien identifiziert:

> „(1) fundamentale Ideen verfolgen, vertikal durch das Curriculum vom Elementarbereich bis zur Hochschule und horizontal durch verschiedene Gebiete der Mathematik, (2) das Wissen über Konzepte und Zusammenhänge explizit machen, (3) Studierende in die Lernsituation von Schüler/-innen bringen und sie anregen, ihre Erfahrungen in Hinblick auf die zukünftige Tätigkeit als Lehrkräfte zu reflektieren, und (4) das Prozesshafte an der Mathematik verdeutlichen“ (Reitz-Koncebovski et al., 2020, S. 26).

In der zweiten Projektphase ab 2019 mit dem „Namen SPIES-M - **Spi**ralcurriculum und **E**rweitertes **S**chulwissen im Fach **M**athematik“ (Reitz-Koncebovski et al., 2020, S. 27) stand neben der Vermittlung des erweiterten Fachwissens im Rahmen des Spiralcurriculums, die Verzahnung von Fachwissenschaft und Fachdidaktik in neu konzipierten Lehrveranstaltungen zum Aufbau eines soliden und praxistauglichen fachbezogenen Wissens der Studierenden im Fokus. Weiterhin wurden Begleitforschungen im Design-Based-Research-Ansatz (siehe hierzu Abschnitt 2.1) zur Evaluation und Verbesserung der neuen Veranstaltungen eingeleitet (ebd.). Im Zuge der Neugestaltung der Lehrveranstaltungen wurden auch die entwickelten und hier zitierten Gestaltungsprinzipien aus Projektphase 1 weiterentwickelt und ausgeschärft, vor allem mit Blick auf die Verknüpfung von Fachwissenschaft und Fachdidaktik (ebd.). Diese ‚neuen‘ Gestaltungskriterien liegen der weiteren Analyse in dieser Arbeit zu Grunde und sollen im folgenden Abschnitt 2.3 näher beschrieben werden.

2.3 Gestaltungsprinzipien von Lehrveranstaltungen im Fach Mathematik zum Aufbau fachbezogenen Wissens

Die neu konzipierten Lehrveranstaltungen im Fach Mathematik haben zum Ziel sowohl in der Fachwissenschaft als auch in der Fachdidaktik auf das Wesentliche zu fokussieren (Reitz-Koncebovski et al., 2020). Grundlegend dafür ist ein Verständnis, was überhaupt ‚das Wesentliche' ausmacht. Im Bereich der Fachwissenschaft werden dafür von den Autoren in inhaltlicher Hinsicht die ‚fundamentalen Ideen der Mathematik' als leitend angesehen sowie in prozessbezogener Hinsicht typische mathematische Arbeitsweisen und Erkenntniswege (ebd.). In fachdidaktischer Hinsicht werden auf inhaltlicher Ebene als wesentlich ‚Grundprinzipien der Mathematikdidaktik' sowie auf Prozessebene deren Realisierung in Auseinandersetzung mit Lernprozessen von SuS in den Lehrveranstaltungen angesehen (ebd.). Während die inhaltlich prozessbezogenen Arbeitsweisen und Erkenntniswege sowie die fundamentalen Ideen der Mathematik nicht im weiteren Fokus der Arbeit stehen, soll in den folgenden zwei Unterabschnitten prägnant dargestellt werden, was unter den Grundprinzipien auf fachdidaktisch inhaltlicher Ebene und der Realisierung der Grundprinzipien auf fachdidaktisch prozessbezogener Ebene zu verstehen ist.

2.3.1 Grundprinzipien der Mathematikdidaktik

Als wichtiges leitendes Element zur Verknüpfung von mathematischen Inhalten und deren didaktischer Vermittlung kann zunächst die *Ausbildung von Grundvorstellungen* mathematischer Inhalte angesehen werden (Reitz-Koncebovski et al., 2020), welche elementar für die erfolgreiche Umsetzung von Modellierungsprozessen im Rahmen von Übersetzungen ist (vgl. Vom Hofe, 1995; Blum, vom Hofe, Jordan & Kleine, 2004). Die Betrachtung zum Umgang mit Grund- und Fehlvorstellungen sowohl von Studierenden als auch von SuS hat dabei für die erfolgte Analyse von Auszügen der Lehrveranstaltung „Arithmetik und ihre Didaktik II" im Rahmen dieser Arbeit besondere Relevanz. Des Weiteren spielt die Behandlung von typischen Fehlern bzw. *Fehlvorstellungen* eine wichtige Rolle als Grundprinzip. Was genauer unter Grund- und Fehlvorstellungen zu verstehen ist, soll daher detaillierter zu Beginn von Abschnitt 2.5 ausgeführt werden.

Weiterhin sind elementare Grundprinzipien der Mathematikdidaktik *Darstellungswechsel* (Kuhnke, 2013) und das damit verbundene *EIS-Prinzip* des vielfältigen Wechsels zwischen **e**naktiven, **i**konischen und **s**ymbolischen Darstellungen von mathematischen Inhalten (Bruner & Harttung, 1974), der zur Sinnstiftung des Mathematiklehrens und der Ermöglichung eines vertieften Verständnisses mathematischer Inhalte herzustellende *Lebensweltbezug* der mathematischen Inhalte (vgl. z. B. Hefendehl-Hebeker, L. & Schwank, 2015; Büchter & Henn, 2015) sowie die Anwendung des sogenannten *operativen Prinzips* (Wittmann, 1985). Das operative Prinzip kommt immer zur Anwendung, wenn Objekte (materieller oder abstrakter Art) durch Operationen (Handlungen, Transformationen) erforscht werden. Ziel ist es zu ermitteln, wie die Objekte konstruiert sind und wie sie sich verhalten (ebd.), bzw. zu „beobachten, welche Wirkungen Operationen auf Eigenschaften und Beziehungen der Objekte haben" (Wittmann, 1985, S. 9).

Wie die weiteren Ausführungen in Abschnitt 2.5.1 zeigen werden, ist die Ausbildung von Grundvorstellungen eng mit den Grundprinzipien des operativen Prinzips, des Darstellungswechsels sowie dem Lebensweltbezug verknüpft.

2.3.2 Realisierung der Grundprinzipien

Zentrale Methoden zur Realisierung dieser grundlegenden didaktischen Prinzipien des Mathematikunterrichts sowie weiterer allgemeindidaktischer pädagogischer und psychologischer Prinzipien von Unterricht sind die „Schaffung geeigneter *Lernumgebungen,* die die Studierenden in die Lernsituation von Schüler/-innen bringen" (Reitz-Koncebovski et al., 2020, S. 28) und dadurch die Studierenden bei der Reflexion von Lehrprozessen unterstützen (ebd.), sowie die Anwendung des sogenannten „„*Pädagogischen Doppeldeckers*" (ebd.). Das methodische Prinzip ‚pädagogischer Doppeldecker' umschreibt dabei den Ansatz, „dass die Lernenden genau mit jenen Methoden unterrichtet werden, die sie später als Lehrende einsetzen sollen" (Wahl, 2002, S. 234). Die Methode hat damit die Funktion die subjektiven (und unter Umständen naiven) Theorien der Studierenden zum didaktisch-methodischen Handeln bewusst zu machen, und birgt so die Chance durch die handelnde Erfahrung mit der Methode diese neu zu bewerten und zu verinnerlichen (ebd.). Durch den ständigen ‚Switch' von der lernenden Rolle des Studierenden bei der Anwendung der Methode und dem gleichzeitigen Erleben der zugehörigen emotionalen Prozesse beim Lernvorgang zu der lehrenden Rolle bei der metakognitiven Auseinandersetzung mit der Methode kann erfahren und reflektiert werden, welche Aspekte des didaktisch-methodischen Arrangements übernommen werden könnten (ebd.). Weiterhin sind Lehrveranstaltungen nach Wahl (2012) dann besonders erfolgreich, wenn die zu vermittelnden Thematiken nicht nur gelehrt, sondern auch vorgelebt werden, bzw. dann besonders wenig erfolgreich, wenn Lehrpersonen sie nicht vorleben oder sogar entgegen ihrer Botschaften handeln (Wahl, 2012). Der konsequente Einsatz dieser Methode hat daher auch eine motivationale Komponente, in dem Werthaltungen und Methoden vorgelebt werden.

Wichtig ist demnach bei der Gestaltung des pädagogischen Doppeldeckers, die durch die Anwendung der Methode bei den Studierenden in Gang geratenen Reflexionsprozesse durch eine metakommunikative Phase zu unterstützen, indem das Erleben während der Übung systematisch thematisiert wird (Wahl, 2002). Weiterhin ist es günstig, wenn von der Lehrperson im Laufe der Lehrveranstaltung metakognitive Zwischenstopps immer dann eingelegt werden, wenn eigene gut gelungene Realisierungen (flugfähiger Doppeldecker) bzw. schlecht gelungene Realisierungen besprochen werden können (Wahl, 2012).

Sowohl die Ausgestaltung der Lernumgebungen als auch die Anwendung des pädagogischen Doppeldeckers im Zusammenhang der hier behandelten Gestaltungskriterien im Fach Mathematik sind dabei jeweils auf das erweiterte Fachwissen bzw. die mathematikspezifischen zu vermittelnden didaktischen Grundprinzipien bezogen (Reitz-Koncebovski, 2019) und in der weiteren Analyse nicht allgemeindidaktisch zu verstehen (auch wenn natürlich die Berücksichtigung dieser methodischen Ansätze auch allgemeindidaktisch wünschenswert ist).

2.3.3 Die konkreten Gestaltungskriterien

Anhand dieser Ziele und Ansprüche an die Lehrveranstaltungen zum Aufbau eines adäquaten mathematisch-fachbezogenen Professionswissens wurden von Reitz-Koncebovski et al. (2020) folgende *fünf Gestaltungskriterien* formuliert:

1. *„fundamentale Ideen der Mathematik verfolgen,* [Inhalte der Fachwissenschaft]
2. *Mathematik als Handlung erfahrbar machen,* [Prozesse der Fachwissenschaft]
3. *Grundprinzipien der Mathematikdidaktik verfolgen,* [Inhalte der Fachdidaktik]
4. *pädagogischer Doppeldecker,* [Prozesse der Fachdidaktik]
5. *Lernprozesse von Schüler/-innen erfahrbar machen“* [Prozesse der Fachdidaktik] (Reitz-Koncebovski et al., 2020, S. 28)

Weiterhin wurde ein zentrales *Querschnittsprinzip* identifiziert, welches sich sowohl allgemein auf eine Verbindung von Fachwissen und Fachdidaktik als auch speziell auf einen Zusammenhang innerhalb eines Prinzips oder zwischen den fünf bereits erwähnten Gestaltungsprinzipien beziehen kann:

Querschnittsprinzip: „auf einer Metaebene Zusammenhänge explizit machen“ (ebd.)

Die Beachtung dieses fundamentalen Querschnittsprinzips hat sich im Rahmen der bisher im SPIES -M-Projekt erfolgten Beobachtungen (ebd.) als sehr bedeutsam erwiesen.

Im Methodikteil dieser Arbeit (siehe Abschnitt 4.4) wird bei der Vorstellung des anhand dieser hier beschriebenen theoretischen Ansätze und Aspekte deduktiv gewonnenen Kategoriensystems zu den Gestaltungskriterien von fachbezogener Lehre im Fachbereich Mathematik an der Universität Potsdam inhaltlich detaillierter auf die verschiedenen Gestaltungskriterien eingegangen. Dabei wird auf die vom Institut erstellte Handreichung zum Aufbau des Kategoriensystems der Gestaltungsprinzipien (Reitz-Koncebovski, 2019) sowie den erstellten Kodierleitfaden (Reitz-Koncebovski, 2021) Bezug genommen. In dem Zusammenhang wird auch an erstellten Unterkategorien aufgezeigt, wie das Querschnittsprinzip ‚auf einer Metaebene Zusammenhänge explizit machen‘ in Bezug auf die jeweiligen Gestaltungsprinzipien konkretisiert wird.

Ein relevanter Teilaspekt des 3. Gestaltungsprinzips „*Grundprinzipien der Mathematikdidaktik verfolgen“* ist die Auseinandersetzung mit dem Verständnis von den Fachinhalten zu Grunde liegenden Grundvorstellungen. Sind gewisse mathematische Grundvorstellungen nicht hinreichend aufgebaut, können relevante mathematisch-kognitive Voreingenommenheiten bzw. Abweichungen von der Norm (sogenannte „cognitive biases“ (Ni & Zhou, 2005, 28)) nicht überwunden werden. Der für den Übergang von dem Rechnen mit natürlichen Zahlen zu den positiven rationalen Zahlen relevante Natural-Number-Bias soll als Ausgangslage für die weitere Untersuchung beschrieben werden, bevor genauer auf das Konzept von Grundvorstellungen eingegangen wird.

2.4 Der Natural-Number-Bias (NNB)

Wie in der Einleitung kurz angesprochen, ist das Auftreten des Natural-Number-Bias bei SuS und Studierenden ein motivationales Element dieser Untersuchung. Die folgenden Abschnitte sollen daher diesen Begriff näher beleuchten.

2.4.1 Zum Begriff

Kurz nach der Jahrtausendwende begannen sich Wissenschaftler*innen zunächst basierend auf lernpsychologischen Forschungen mit dem Phänomen des Whole Number Bias (Ni & Zhou, 2005) bzw. Natural Number Bias (NNB) (van Hoof et al., 2015) zu beschäftigen. Während ein „Bias“ allgemein als eine systematische und häufige Abweichung von einer Norm beschrieben werden kann (Ni & Zhou, 2005), wird mit dem Fachbegriff Natural Number Bias das Phänomen umschrieben, dass Lernende relativ robust dazu tendieren, das diskrete Zählsystem der natürlichen Zahlen und die entsprechenden Vorstellungen zum Umgang mit den natürlichen Zahlen abweichend von der Norm und unflexibel für notwendige Vorstellungsumbrüche auf Aufgabenstellungen der Bruchrechnung zu übertragen bzw. Konzepte aus den Natürlichen Zahlen zu übergeneralisieren (ebd.). Häufig wird dabei von Lernenden auch die grundsätzliche Struktur einer Bruchzahl als Ganzes nicht erkannt, sondern Zähler und Nenner werden als zwei für sich stehende natürliche Zahlen verstanden (van Hoof et al., 2013). Während in Bezug auf die psychologische Komponente die Herkunft des Natural Number Bias („nature of the bias“ (Ni & Zhou, 2005, 27) „innate or learned“ (Ni & Zhou, 2005, 28)) stark umstritten ist, besteht in der Fachliteratur ein klarer Konsens darüber, dass Kinder bereits, bevor Ihnen die rationalen Zahlen beigebracht werden, eine robuste Idee davon ausgeformt haben, was eine Zahl ist, welche auf dem Umgang mit natürlichen Zahlen basiert (van Hoof et al., 2015, S. 40).

2.4.2 Vorliegende Forschungsergebnisse zum NNB

Bei Auftreten des Bias entstehen systematische Fehler bei der Auseinandersetzung mit Bruchzahlen, die sich auf die drei unterscheidbaren Aspekte „density, size, and operations“ (Van Hoof et al., 2015, S. 39), also Dichte von Zahlen, die Größe von Brüchen sowie die Operationen mit Brüchen beziehen können. Für diese drei Aspekte wurde erstmals durch die Forschungsgruppe um Van Hoof ein validiertes Testverfahren (Rational Number Sense Test (RNST)) entwickelt, mit dem anhand einer Längsschnittuntersuchung von SuS von der 4. bis zur 12. Klasse gezeigt werden konnte, dass der NNB häufig lange persistierend ist, so dass in allen untersuchten Schulstufen noch entsprechende Fehler auftraten (Stampfer & Hell, 2018). Die Feststellung des Vorliegens eines NNB erfolgt kontrolliert durch die Gegenüberstellung von Lösungshäufigkeiten zu sogenannten „kongruenten Aufgaben“ und „inkongruenten Aufgaben“ (Stampfer et al., 2020, S. 781) von spezifisch konstruierten Bruchrechentests (ebd.). Dabei bezeichnen kongruente Aufgabentypen Bruchrechenaufgaben, bei denen trotz (postuliertem) Vorliegen des NNB richtige Lösungen produziert werden (können), weil die Aufgabenart entsprechend konzipiert ist (z.B. „Glaubst du, dass $50 \cdot \frac{3}{2}$ größer oder kleiner als 50 ist?“ (Stampfer & Hell, 2018, S. 1728)), während inkongruente Aufgaben (z.B.: ‚Glaubst du, dass $40{:}\frac{1}{2}$. größer oder kleiner als 40 ist‘), Bruchzahlaufgaben darstellen, „bei denen die Übertragung von Eigenschaften natürlicher Zahlen auf rationale Zahlen zu einem Fehler führt“ (Stampfer et al., 2020, S. 781). Folgende Abbildung stellt kongruente und nicht-kongruente Beispielaufgaben zu den drei Aspekten Dichte, Größe und Operationen dar.

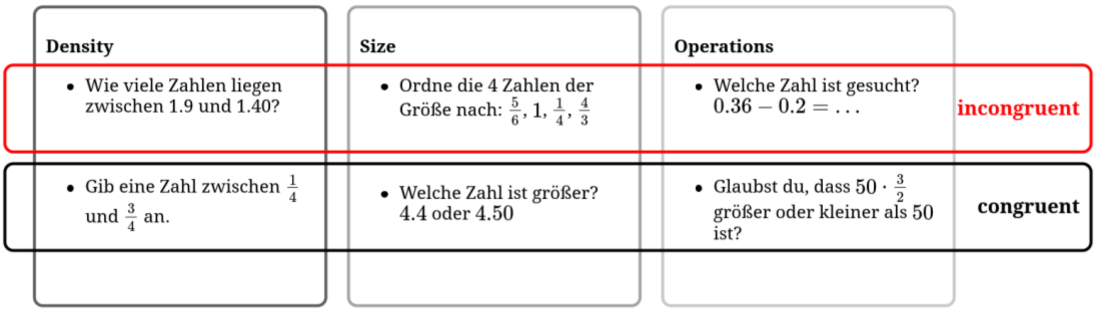


Abbildung 2: Darstellung von inkongruenten und kongruenten Bruchaufgaben zu den drei Aspekten: Dichte, Größe und Operationen; Quelle: (Stampfer, Reitz-Koncebovski & Hell, 2019, S. 6)

Stampfer und Hell (2018) untersuchten in einer adaptierten Version des RNST als Web-App die Bruchrechenfähigkeiten von Primarstufenstudierenden in Westösterreich (Stampfer & Hell, 2018). Auch bei dieser Stichprobe von Lehramtsstudierenden ließen sich durch den gezielten Vergleich der Testergebnisse von der Bearbeitung kongruenter und inkongruenter Aufgabenstellungen Profile von Studierendengruppen identifizieren, bei denen der NNB ausgeprägt vorzuliegen scheint (ebd.).

Grundsätzlich kann das Auftreten des NNB im Teilbereich ‚operations‘ zwei verschiedene Ursachen mit Bezug zur falschen Übertragung von Eigenschaften natürlicher Zahlen auf rationale Zahlen haben. Er kann im Rahmen der Addition und Subtraktion kalkülorientiert sein aufgrund eines Mangels im Bruchzahlverständnis (Zähler und Nenner werden einzeln und unabhängig voneinander betrachtet). So wird beispielsweise bei der Addition von Brüchen aufgrund der gewohnten Rechenregeln in $\mathbb{N}$ die falsche Addition als häufigste Fehlerstrategie wie folgt umgesetzt: $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$ (Padberg & Wartha, 2017).

Weiterhin kann das Auftreten des NNB vorstellungsbasiert sein, indem bei der Multiplikation/Division übergeneralisierte (Fehl-)Vorstellungen wie ‚Multiplikation vergrößert immer' und ‚Division verkleinert immer' aus dem Umgang mit den Operationen im Zahlenraum N unreflektiert auf die Bruchrechnung übertragen werden.

2.4.3 Behandlung an der Universität Potsdam

Dieser als Web-App von Stampfer und Hell entwickelte Bruchrechentest wird seit dem Sommersemester 2020 auch im Rahmen der neu entwickelten Lehrveranstaltung „Arithmetik und ihre Didaktik II" an der Universität Potsdam eingesetzt. Dabei wird die kognitive Kompetenz zum Umgang mit Bruchzahlen (der Test behandelt sowohl gemeine Brüche als auch Dezimalbrüche) in einem Pretest vor den Vorlesungspassagen zur Bruchrechnung und in einem Posttest nach Behandlung der Bruchrechnung abgefragt. Dieses Vorgehen dient zum einen diagnostischen Zwecken und individuellen Rückmeldungen an die Studierenden im Vorfeld der Vorlesungspassagen, als auch im Zusammenspiel mit den Ergebnissen des Post-Tests zur Evaluation des Erfolgs der Lehrveranstaltungen zum Thema.

Das Vorliegen eines Natural Number Bias bei SuS und auch Studierenden kann ein Indikator dafür sein, dass nicht ausreichend Grundvorstellungen zum Bruchzahlbegriff oder den damit verbundenen Operationen ausgebildet wurden, weshalb das Thema Grundvorstellungen im Zahlenraum der natürlichen und rationalen Zahlen im Folgenden näher behandelt werden soll.

2.5 Grundvorstellungen und Fehlvorstellungen zur Multiplikation und Division und notwendige Vorstellungsumbrüche beim Übergang von den natürlichen Zahlen zu den positiven rationalen Zahlen

In diesem Theorieabschnitt sollen zunächst die wesentlichen Begrifflichkeiten Grund- und Fehlvorstellungen näher erläutert werden (Abschnitt 2.5.1), bevor in den folgenden Abschnitten die Grundvorstellungen im Zahlenraum $\mathbb{N}$ und $\mathbb{Q}^+$ sowie die aus der Zahlenraumerweiterung resultierenden Vorstellungsumbrüche als theoretische Grundlagen für die Auswertung der empirischen Studie dargestellt werden. Dabei erörtern die Abschnitte 2.5.2 bis 2.5.5 die Grundvorstellungen im Zahlenraum der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$. Es schließen sich wichtige sachanalytische Aspekte der Zahlenbereichserweiterung zu den positiven rationalen Zahlen $\mathbb{Q}^+$ in Abschnitt 2.5.6 an, die auch zur Beschreibung wichtiger Begriffe der Bruchrechnung dienen. Darauffolgend werden die Grundvorstellungen zum Bruchzahlbegriff sowie notwendige Vorstellungsumbrüche dazu in Abschnitt 2.5.7 und 0 beschrieben, bevor die Grundvorstellungen zu den Rechenverfahren Multiplikation und Division in Abschnitt 2.5.9 - 2.5.10 behandelt werden. Final werden in Abschnitt 2.5.11 die notwendigen Vorstellungsumbrüche der Multiplikation und Division beim Übergang von den natürlichen Zahlen zu den Bruchzahlen behandelt.

2.5.1 Grund- und Fehlvorstellungen und ihre Relevanz

Ein zentrales Anliegen moderner Mathematikdidaktik ist bei den Rezipienten der Lehre ein Verständnis der Inhalte zu gewährleisten und nicht nur eine Beherrschung des Stoffes sicherzustellen (Padberg & Wartha, 2017). Eine wesentliche Frage für das Lehren und Lernen von Mathematik ist daher, was Menschen für eine inhaltliche Bedeutung mit den mathematischen Inhalten verbinden (Blum et al., 2004). Ein in der deutschen Mathematikdidaktik weit verbreitetes Konzept dazu sind die ‚Grundvorstellungen' von mathematischen Inhalten. Vom Hofe hat (1995) in einer umfassenden historisch-genetischen Untersuchung die Ursprünge und das Verständnis von Grundvorstellungen in Psychologie und Fachdidaktik analysiert und beschrieben. Er kommt dabei zu dem Ergebnis, dass alle untersuchten „Vorstellungskonzepte auf didaktischer Ebene eine Klärung und konstruktive Gestaltung der unterrichtlichen Bedingungen für eine erfolgreiche und adäquate Sinnkonstituierung, individuelle Repräsentation und Anwendung mathematischer Inhalte zum Ziel" (Vom Hofe, 1995, S. 95) haben. Diese drei hier benannten Aspekte oder „Wesensmerkmale von Grundvorstellungen" (Blum et al., 2004, S. 146): Sinnkonstituierung, individuelle Repräsentation und Anwendung mathematischer Inhalte beschreibt vom Hofe ausführlicher in seinem finalen Begriffsverständnis von Grundvorstellungen. Aufgrund seiner allgemeinen Relevanz und der vielfältigen Bezugnahme in der Literatur auf das Grundvorstellungskonzept nach vom Hofe soll dieses hier direkt zitiert werden, wobei als besonders relevant empfundene Elemente hervorgehoben werden:

> „Die Grundvorstellung[s]idee beschreibt **Beziehungen zwischen mathematischen Inhalten und dem Phänomen der individuellen Begriffsbildung**. In ihren unterschiedlichen Ausprägungen charakterisiert sie mit jeweils unterschiedlichen Schwerpunkten insbesondere **drei Aspekte dieses Phänomens**:
>
> - **Sinnkonstituierung** eines Begriffs **durch Anknüpfung** an bekannte Sach- oder Handlungszusammenhänge bzw. Handlungsvorstellungen,
> - **Aufbau entsprechender (visueller) Repräsentationen** bzw. ‚Verinnerlichungen', die operatives Handeln auf der Vorstellungsebene ermöglichen,
> - Fähigkeit zur **Anwendung eines Begriffs auf die Wirklichkeit** durch Erkennen der entsprechenden Struktur in Sachzusammenhängen oder durch **Modellieren des Sachproblems** mit Hilfe der mathematischen Struktur." (Vom Hofe, 1995, S. 97-98)

Grundvorstellungen beschreiben demnach Deutungsmöglichkeiten fundamentaler mathematischer Begriffe oder Verfahren in realen Situationen (vom Hofe, 1995) bzw. „Beziehungen zwischen „Mathematik, Realität und individuellen mentalen Strukturen" (Blum et al., 2004, S. 145). Nach Padberg und Wartha (2017) werden Grundvorstellungen als „tragfähige flexible mentale Modelle zu mathematischen Inhalten" (Padberg & Wartha, 2017, S. 3) beschrieben, wobei Padberg unter Berufung auf Johnson-Laird (1983) mentale Modelle als „Repräsentationen im Kopf zu Begriffen oder Sachverhalten und dem Arbeiten damit" (Padberg & Wartha, 2017, S. 3) definiert. Interessant an dieser Definition von Grundvorstellungen ist, dass diese sich nur auf die beiden von vom Hofe erstbenannten Aspekte stützt und eine Anwendung des mathematischen Inhalts auf die Wirklichkeit nicht expliziert. So wird zu Beginn des Werkes von Padberg und Wartha lediglich als Hauptfunktion von Grundvorstellungen die flexible Ermöglichung von Übersetzungen zwischen Darstellungsebenen, also zwischen symbolischer Notation und bildlich gegenständlicher Zahlrepräsentation, aufgeführt (Padberg & Wartha, 2017).

Blum und vom Hofe selbst ist es dagegen wichtig, die Verbindung zwischen Mathematik und Realität durch das dritte Wesensmerkmal von Grundvorstellungen zu akzentuieren, indem sie darauf verweisen, dass „Grundvorstellungen […] unverzichtbar [sind], wenn zwischen Realität und Mathematik übersetzt werden soll, […] kurz: wenn modelliert werden soll“ (Blum et al., 2004, S. 146). Grundvorstellungen sind somit aus ihrer Sicht ein wichtiges Mittel zur erfolgreichen Modellierung/Übersetzung von Sachsituationen in die Welt der Mathematik und zurück. Vom Hofe betont weiterhin, dass Grundvorstellungen nicht statisch sind sondern sich vielmehr entwickeln, wachsen und sich gegenseitig ergänzen und somit einen „dynamischen Charakter“ (Vom Hofe, 1995, S. 98) aufweisen. Dies ist insofern ein wichtiger Hinweis, da es im Laufe des Lernens von Mathematik immer wieder auch zu Vorstellungsumbrüchen kommen muss, z. B. bei der hier behandelten Einführung der rationalen Zahlen.

Vom Hofe (1995) beschreibt außerdem, dass sich Grundvorstellungen auf „fundamentale mathematische Begriffe *oder* Verfahren“ (Vom Hofe, 1995, S. 98) beziehen können. Diese Unterscheidung sollte für ein tieferes Verständnis von Grundvorstellungen gerade in der Primarstufe in geeigneter Weise expliziert werden. Für den Umgang mit natürlichen Zahlen unterscheiden beispielsweise Häsel-Weide & Nührenbörger, 2012 den Aufbau von Zahlvorstellungen und den Aufbau von Operationsvorstellungen. Auch Prediger (2011) sieht die Notwendigkeit in Bezug auf Grundvorstellungen (in dem Artikel als „mental models“ (Prediger, 2011, S. 67) übersetzt), zur Multiplikation mit Brüchen zwischen „[mental] models for operations“ und „models for fractions“ (Prediger, 2011, S. 69) zu differenzieren.

Während im Bereich der Algebra Grundvorstellungen von Variablen deutlich zu Variablenaspekten abgegrenzt werden können – so kann beispielsweise die Grundvorstellung Variable als Unbekannte‘ (man stellt sich den Begriff vor als…), unter verschiedenen Aspekten (man nutzt den Begriff um…) beleuchtet werden wie dem Einsetzungs-aspekt, dem Kalkülaspekt oder dem Gegenstandsaspekt (Barzel, B. & Holzäpfel, 2017) – ist das mit den Zahlvorstellungen zu den natürlichen oder rationalen Zahlen eher weniger der Fall. Die Unterscheidung zwischen der Grundvorstellung der natürlichen Zahl als Kardinalzahl (Vorstellung als Anzahl der Elemente einer Menge) und dem (gegenständlichen) Kardinalzahlaspekt als Frage, wozu man den Begriff nutzt (man kann damit die Anzahl der Elemente einer Menge angeben), ist marginal. Die unterschiedliche Verwendung von Bruchzahlen wird bei Hefendehl-Hebeker (1996) anschaulich gemacht durch verschiedene „Gesichter“ (Hefendehl-Hebeker, L., 1996, 20) von Brüchen. Diese Anschauung von ‚Gesichtern von Brüchen‘ wird in Padberg und Wartha (2017) in Abschnitt 3.9 als synonym für Zahlaspekte von Brüchen verwendet, gleichzeitig wird aber direkt unter der Kapitelüberschrift „3.1 Zentrale Grundvorstellungen“ als erster Satz konstatiert, dass „Brüche […] viele *verschiedene* Gesichter [besitzen]“ (Padberg & Wartha, 2017, S. 17) und diese Gesichter zunächst zu verstehen sind. Im weiteren Verlauf werden daher auch in dieser Arbeit die verschiedenen Grundvorstellungen zu natürlichen und rationalen Zahlen durch ihre Zahlaspekte beschrieben.

Mit ihrem normativen Charakter beschreiben zu vermittelnde Grundvorstellungen, „was sich Menschen unter mathematischen Inhalten vorstellen *sollen“* (Blum et al., 2004, S. 146). Mit ihrem deskriptiven Aspekt dagegen soll erfasst werden, was Lernende sich tatsächlich vorstellen, wie also die individuellen (Schüler-)Vorstellungen ausgeprägt sind (ebd.). Im Vergleich mit der wünschenswerten Ausbildung von Grundvorstellungen werden davon abweichende und fachlich falsche oder übergeneralisierte individuelle Vorstellungen in der Mathematikdidaktik als sogenannte ‚Fehlvorstellungen‘ identifiziert (ebd).

Ein sehr wichtiger Bereich des fachbezogenen Professionswissens stellt daher die flexible Verfügbarkeit von relevantem Wissen zu Grundvorstellungen und typischen individuellen Schülervorstellungen bzw. Fehlvorstellungen sowie dessen Anwendung zum Aufbau von Grundvorstellungen bei Individuen dar.

Eine besondere Herausforderung bei der Diagnose von (Fehl-) Vorstellungen liegt in der Tatsache begründet, dass Vorstellungen und Fähigkeiten nicht isoliert von (fachlichem) Wissen und Fertigkeiten auftreten und somit weder in Reinform messbar noch beobachtbar sind (Blum et al., 2004). Selbst wenn SuS/Studierende in der Lage sind geeignete Grundvorstellungen explizierend zu nennen, ist damit nicht sichergestellt, dass diese auch flexibel im Aufgabenkontext angewendet werden können. Ein wichtiges Element der Analyse von Fehlvorstellungen bei der Anwendung der Bruchrechnung ist auch, zu ermitteln, auf welcher Ebene Fehlvorstellungen bestehen. Ist der Bruchbegriff selber mit der Grundvorstellung als Anteil oder Operator noch nicht ausreichend aufgebaut (vgl. Abschnitt 2.5.7) oder haben sich unzureichend Grundvorstellungen oder Fehlvorstellungen auf Verfahrensebene (z. B. Multiplikation/Division) aufgebaut (vgl. Abschnitte 2.5.9 und 2.5.10)?

Im Rahmen dieser Arbeit sollen notwendige Vorstellungsumbrüche mit Fokus auf die Multiplikation und Division von Brüchen betrachtet werden. Dies begründet sich zum einen damit, dass im Gegensatz zur Addition und Subtraktion nur bei diesen Rechenoperationen Vorstellungsumbrüche in Bezug auf die Grundvorstellungen zu den Rechenverfahren notwendig werden. Weiterhin ist aufgrund dieser zu bewältigenden Änderung der Grundvorstellungen die Modellierung von entsprechenden Multiplikationsaufgaben deutlich komplexer als die Modellierung von additiven Zusammenhängen. Dies zeigt sich beispielsweise bei der Aufforderung an SuS Rechengeschichten zu additiven oder multiplikativen Bruchrechenaufgaben zu finden. Während es in einer Untersuchung von Prediger (2011) 40% der untersuchten SuS aus den Jahrgangsstufen sieben und neun gelang eine sinnvolle Sachaufgabe zur der Additionsaufgabe von zwei Brüchen zu formulieren, gelang dies zu einer Multiplikationsaufgabe von zwei Brüchen nur 4% der Befragten (Prediger, 2011).

Im Folgenden sollen zunächst für den Zahlenraum der natürlichen Zahlen die auszubildenden Grundvorstellungen für den Begriff natürliche Zahl sowie in Folge für die Rechenverfahren der Multiplikation und Division in ℕ expliziert werden, bevor die Behandlung der Grundvorstellungen im Zahlenraum der positiven rationalen Zahlen erfolgt.

2.5.2 Die natürlichen Zahlen und ihre Grundvorstellungen

Natürliche Zahlen können als Kardinalzahlen oder als Ordnungszahlen (Ordinalzahlen) definiert werden. Die Definition als Ordnungszahlen gemäß den Peano-Axiomen wird als bekannt vorausgesetzt (Padberg, Danckwerts & Stein, 1995) und kann hier nicht weiter erörtert werden. Für den weiteren Kontext der Zahlenbereichserweiterung ist eher die Definition von Kardinalzahlen als „Äquivalenzklassen von Mengen mit gleich vielen Elementen“ (Reitz-Koncebovski, 2018b, S. 14) bedeutsam. Jede dieser Äquivalenzklassen stellt eine Kardinalzahl dar, deren Mengen jeweils gleichmächtig sind. Zwei Mengen A und B sind gleichmächtig ($A \equiv B$), „wenn es eine bijektive Abbildung $f: A \rightarrow B$ gibt“ (Padberg et al., 1995, S. 47) . Die bijektive (also injektive und surjektive) Abbildung f wird dann als zugehörige Äquivalenzabbildung bezeichnet (ebd.). Beispielsweise ergeben alle möglichen Mengen mit vier Elementen von vier verschiedenen Objekten die Kardinalzahl 4, da aufgrund der bijektiven Abbildung zwischen allen Mengen der Äquivalenzklasse jedem Element jeder Menge genau ein Element einer anderen Menge der Äquivalenzklasse zugeordnet werden kann (Eins-zu-eins-Zuordnung).

Jedes Element (jede Menge) einer Äquivalenzklasse kann als Repräsentant für die jeweilige Kardinalzahl dienen (z. B. die Menge von 4 Äpfeln als Repräsentant für die Kardinalzahl 4). Formal wird dann die abstrakte Kardinalzahl $|A|$ der Menge von gleichmächtigen Mengen als „Betrag A“ (Padberg et al., 1995, S. 49) $|A| = \{B|B \equiv A\}$ der sie repräsentierenden endlichen Mengen benannt (ebd.).

Die natürlichen Zahlen werden im täglichen Leben neben der Beschreibung von Kardinalität und Ordinalität auch für verschiedene weitere Zwecke eingesetzt, dementsprechend existieren viele verschiedene Grundvorstellungen zu den natürlichen Zahlen. Im Folgenden seien die verschiedenen grundlegenden Funktionen von natürlichen Zahlen nach Padberg und Wartha (2017) im Zusammenhang mit ihren Zahlaspekten wiedergegeben. Natürliche Zahlen

- dienen zur Beschreibung von *Anzahlen* (Kardinalzahlaspekt)
- kennzeichnen eine *Reihenfolge* (Rangplatz) innerhalb einer Reihe (Ordinalzahlaspekt)
- dienen zur Bezeichnung von *Größen* (Maßzahlaspekt)
- beschreiben die *Vielfachheit* einer Handlung, eines Vorganges [oder einer Größe] (Operatoraspekt)
- werden besonders häufig zum *Rechnen* benutzt (Rechenzahlaspekt)
- dienen dazu Dinge zu kennzeichnen und dadurch zu unterscheiden, kurz: zu *codieren* (Codierungsaspekt) (Padberg & Wartha, 2017).

Während dem rein innermathematischen Rechenzahlaspekt keine Grundvorstellung im Sinne von vom Hofe zugeordnet werden kann, sollen zu allen anderen benannten Funktionen des Begriffes ‚natürliche Zahl‘ für ein sinnstiftendes mathematisches Handeln bei den SuS entsprechende vielfältige Grundvorstellungen schon ab dem Anfangsunterricht ausgebildet werden.

Die Grundvorstellung einer natürlichen Zahl als Operator ist nur interpretierbar in Verbindung mit einer zweiten Zahl – dem Operanden, der im multiplikativen Kontext die Menge von Objekten oder eine Größe bezeichnet und auf den der Operator in Form einer multiplikativen Verknüpfung wirkt. Dagegen können alle anderen Vorstellungen zu den Zahlaspekten einzeln für sich stehen.

Bevor im Folgenden auf weitere Grundvorstellungen zu den Rechenverfahren der Multiplikation und Division eingegangen werden soll, ist vorab ein genauerer Blick auf das Wesen des Begriffs Größe notwendig.

2.5.3 Zum Begriff Größe

Prägend für den handelnden Umgang mit Zahlen und für die Modellierung von mathematischen Problemen ist der Umgang mit Größen.

„Größen werden durch Abstraktion von realen Objekten gewonnen“ (Franke, 2003, S. 196) Es werden Eigenschaften von Objekten bzw. Vorgängen direkt verglichen und in Bezug auf die interessierende Eigenschaft (z. B. die Relation „ist genauso lang wie“) werden zunächst maßzahlfreie Äquivalenzklassen von Repräsentanten gebildet.

Definiert wird eine Größe (z. B. die Länge eines Stiftes) somit als objektiv messbare Eigenschaft von Gegenständen oder Vorgängen (ebd.). Die Größenangabe einer Größe setzt sich immer zusammen aus einer Maßzahl und einer Maßeinheit. In Abhängigkeit der Verwendung einer verschiedenen Maßeinheit ändert sich auch die Maßzahl entsprechend, die Eigenschaft (Größe) des Vorgangs bleibt aber unverändert. So entspricht die Größenangabe 1 km genau der Größenangabe 100.000 cm oder 1000 m.

Durch das Adjektiv ‚objektiv‘ in der Definition einer Größe wird ausgeschlossen, dass Messergebnisse einer ungenormten Einheit eine Größe darstellen (ebd.). So kann eine Länge zwar mit einer Elle eines Menschen gemessen werden, aber ohne die Skalierung auf eine normierte Einheit, kann ich nicht sagen, dass eine Stoffbahn 3 Ellen lang ist, da verschiedene Ellen verschiedene Längen aufweisen.

„Größen, denen die gleiche Äquivalenzrelation zugrunde liegt, werden zu einem Größenbereich zusammengefasst“ (Franke, 2003, S. 197). In Bezug auf die Größe Länge gehören somit alle Klassen gleichlanger Gegenstände zum Größenbereich Längen.

Somit ist die Ansammlung von drei verschieden langen Stiften zwar mit der Definition der Kardinalzahl als Äquivalenzklasse von Mengen mit gleich vielen Objekten Repräsentant der Kardinalzahl 3, umfasst aber gleichzeitig drei verschiedene Äquivalenzklassen in Bezug auf die Länge, mit jeweils einem Repräsentanten.

2.5.4 Die Multiplikation im Zahlenraum ℕ und ihre Grundvorstellungen

Formal ist für die natürlichen Zahlen als Kardinalzahlen die Grundrechenart der Multiplikation als der Betrag des Kreuzprodukts von geordneten Paaren der Elemente zweier Mengen definiert. Seien also „α und β Kardinalzahlen mit $\alpha = |K| \; und \; \beta = |M|$. Dann ist $\alpha \cdot \beta := |K \times M|$" (Padberg et al., 1995, S. 53) wobei für das Kreuzprodukt oder kartesisches Produkt gilt: „$K \times M = \{(x, y) | x \in K, y \in M\}$" (ebd.). Während sich für diese mathematisch-kardinale Definition der Multiplikation die Deutung als kombinatorischer Zugang zur Multiplikation anbietet, wird bei der Einführung der Multiplikation in der Schule in der Regel auf das Konzept der fortgesetzten Addition zurückgegriffen, welches sich ebenfalls mit Rückgriff auf das Mengenmodell als Vereinigung gleichmächtiger paarweise disjunkter Mengen beschreiben lässt (Kuhnke, 2013). Auf mathematisch-symbolischer Ebene kann damit die Multiplikation wie folgt dargestellt werden:

$$a \cdot b = \underbrace{b + b + \ldots + b}_{a\text{-mal}}$$

Abbildung 3: symbolische Darstellung der Multiplikation als wiederholte Addition; Quelle: (Kuhnke, 2013, S. 36)

Dabei bezeichnet a die Anzahl der addierten Mengen und b die Mächtigkeit der einzelnen gleichmächtigen Mengen (ebd.). Während bei der Addition die Summanden gleichwertig sind, sind bei der Multiplikation a als Multiplikator und b als Multiplikand zu unterscheiden. „Der Multiplikand [b] stellt eine Eigenschaft einer Menge dar" (Kuhnke, 2013, S. 37), z. B. die zu behandelnde Größe (4 cm) oder die Kardinalzahl des zu behandelnden Objekts (4 Äpfel), während der Multiplikator a in dieser additiven Auffassung der Multiplikation als Operator die Anzahl der Mengen zählt (ebd.). Im deutschen Sprachraum ist dabei die Sprech- und Schreibweise, den zweiten Faktor als Multiplikanden zu betrachten, fest etabliert (im Gegensatz zum englischsprachigen Raum, in dem der zweite Faktor als Multiplikator gilt) (ebd.). So wird üblicherweise $3 \cdot 4$ als „dreimal die vier" oder „das 3-fache von 4" gesprochen bzw. interpretiert.

Für die Multiplikation von natürlichen Zahlen werden von diversen Autoren (vgl. Padberg & Benz, 2011; Prediger, 2011; Kuhnke, 2013) Grundvorstellungen beschrieben, die zum Teil etwas verschieden akzentuiert strukturiert werden. Padberg und Benz (2011) beschreiben zunächst drei verschiedene Grundvorstellungen wie folgt:

Multiplikation als zeitlich-sukzessive Handlung

Durch eine im Zeitablauf mehrmalig wiederholte Handlung (dynamische Komponente der Multiplikation) entsteht die Gesamtmenge der zu bestimmenden Objekte. Als ein Beispiel hierfür kann das dreimalige zeitlich aufeinanderfolgende Holen von jeweils zwei Wasserflachen aus dem Keller angeführt werden. Mathematischer Hintergrund für diese anschauliche Grundvorstellung ist die wiederholte Addition gleicher Summanden (Padberg & Benz, 2011).

Multiplikation als räumlich-simultane Anordnung

Durch eine räumlich-simultane Anordnung (statische Komponente der Multiplikation) von mehreren gleichmächtigen Mengen (z. B. das jeweils gleiche Würfelergebnis von 3 Würfeln, Gruppierung von $x \cdot y$ Elementen zu x gleich großen Teilmengen y – viermal 3 Äpfel) ist die Gesamtmenge der zu bestimmenden Objekte ersichtlich (ebd.). Sehr häufig erfolgt die Darstellung räumlich-simultaner Anordnungen vorstrukturiert in einem Rechteckmodell, was als zentrales Modell für anschauliche Begründungen von Kommutativ- und Assoziativgesetz angesehen werden kann (Reitz-Koncebovski, 2018a). Mathematischer Hintergrund ist hierbei wiederum die Addition gleicher Summanden (Padberg & Benz, 2011).

Multiplikation als Kombination (kombinatorischer Kontext)

Es werden sämtliche mögliche Kombinationen aus den Elementen einer ersten mit den Elementen einer zweiten Menge gebildet (ebd.). Ein klassischer Kontext für diese Idee ist die mögliche Paarbildung verschiedener Mädchen und Jungen oder die Kombination von Outfits von Hosen und T-Shirts. Den mathematischen Hintergrund stellt hier genau das kartesische Produkt von zwei Mengen dar, mit dem die Multiplikation von Kardinalzahlen formallogisch in diesem Abschnitt eingeführt wurde.

Die ersten beiden Grundvorstellungen, die nach Padberg 2011 beide auf der wiederholten Addition von Summanden beruhen, führt Kuhnke 2013 in der Oberkategorie **Multiplikation als „Vervielfachung/Vereinigung**“ (Kuhnke, 2013, S. 39) zusammen. So führt jede zeitlich-sukzessiv durchgeführte Handlung final zu einer räumlich simultan dargestellten Anordnung (Padberg & Benz, 2011).

Padberg und Benz führen aus, dass diese Grundvorstellung besonders geeignet zur Einführung der Multiplikation ist, während der kombinatorische Zugang als Einführung massive Nachteile mit sich bringt (enaktive Nutzung von Arbeitsmitteln nur sehr eingeschränkt möglich, da die Kombinationen nicht gleichzeitig gelegt werden können; Umgangssprache (zweimal, fünfmal) steht nicht als Ausgangspunkt zur Verfügung, geringe Vorerfahrungen) und daher erst für eine anschließende Vermittlung sinnvoll ist (ebd.).

Folgende weiteren multiplikativen Kontexte lassen sich von den bisher benannten Grundvorstellungen noch abgrenzen:

Multiplikation als Skalierung – Ein Objekt wird multiplikativ neu skaliert (im Regelfall in ℕ vergrößert) (vgl. Kuhnke, 2013; Prediger, 2011) beispielsweise durch Wachstum oder Abbildungen (z. B. Betrachtung von Objekten unter einem Mikroskop mit dem Vergrößerungsfaktor x (Operator))

Multiplikativer Vergleich – dreimal so viel (vgl. Prediger, 2011; Padberg & Benz, 2011)

Multiplikation als Verkettung von Vervielfältigungsoperatoren – es wird nur die mehrfache Vervielfachung von Etwas betrachtet durch die entsprechenden Operatoren (Was ist das Zweifache vom Dreifachen?) (Padberg & Benz, 2011)

Verknüpfung von Größen – eine Größe wird mit einer anderen Bezugsgröße multipliziert (z. B. 2 kg Weintrauben werden zu einem Preis von 3€/kg verkauft. Wieviel Geld ist zu zahlen? Eine Person bewegt sich 10 Sekunden lang mit einer Geschwindigkeit von 7 m/s vorwärts. Wie weit ist die Person gelaufen?) (vgl. Prediger, 2011; Reitz-Koncebovski, 2018a)

Fläche eines Rechtecks bzw. formelhafte Multiplikation von Größen – Berechnung einer multiplikativen Größe aus Größen ($6m \cdot 4m = 24\,m^2$) (vgl. Prediger, 2011, Padberg & Benz, 2011)

Alle benannten multiplikativen Grundvorstellungen können dahingehend untersucht werden, in welcher Kombination zwei natürliche Zahlen (als Operator oder als Eigenschaft einer Menge (Anzahl von Objekten oder Größe)) unter welcher Grundvorstellung der Zahl miteinander multipliziert werden, wobei festzustellen ist, dass bestimmte Kombinationen dann spezifisch für hier aufgeführte Grundvorstellungen der Multiplikation sind. Dieser Zusammenhang wird in Tabelle 1 dargestellt.

Tabelle 1: Zuordnung der multiplikativen Grundvorstellungen zur Art der Verknüpfung natürlicher Zahlen

Multiplikative Verwendung der natürlichen Zahlen zur Modellierung von…	**Grundvorstellungen**
Anzahl × Anzahl	Multiplikation als Kombination
Operator × Größe/Anzahl	Multiplikation als Vervielfachung/ Vereinigung
	Multiplikation als Skalierung
	Multiplikativer Vergleich
Operator × Operator	Multiplikation als Verkettung von Vervielfältigungsoperatoren
Größe × Größe	Verknüpfung von Größen
	Fläche eines Rechtecks bzw. formelhafte Multiplikation von Größen

So erfolgt beispielsweise für die Verkettung von Vervielfältigungsoperatoren zwingend eine Multiplikation von zwei Operatoren oder für die Fläche eines Rechtecks die Multiplikation von zwei Größen. So beschreibt auch Prediger (2011) allerdings in Bezug auf Grundvorstellungen der Multiplikation von rationalen Zahlen (siehe hierzu Abschnitt 2.5.7), dass manche Forschenden einzelne Grundvorstellungen zu einem „operator aspect“ (Prediger, 2011, S. 68) subsummieren, bei dem die Grundvorstellungen zusammengefasst werden, bei denen ein Operator mit einer Größe oder Kardinalzahl multipliziert wird. Auch für die sprachliche Ausgestaltung von Multiplikations- bzw. Divisionsprozessen ist zum Teil maßgeblich, ob Operatoren oder Größen betrachtet werden. Hierauf wird im Rahmen der Beschreibung der Grundvorstellungen zur Multiplikation der Bruchzahlen erneut eingegangen.

Eine typische deskriptive Schülervorstellung bzw. „gewohnheitsmäßige Erwartung […] [als] Begleiteffekt“ (Hefendehl-Hebeker, L. & Schwank, 2015, S. 101) des Umgangs mit der Multiplikation ist, dass die „Multiplikation vergrößert“ (ebd.). Wenn diese Vorstellung übergeneralisiert wird zur Vorstellung ‚Multiplikation vergrößert immer‘, liegt eine Fehlvorstellung vor, die aber auch schon im Zahlenraum der natürlichen Zahlen mit der Null durch die explizierende Behandlung der Multiplikation mit 0 und 1 behebbar wäre.

2.5.5 Die Division im Zahlenraum $\mathbb{N}$ und ihre Grundvorstellungen

Im Zahlenraum der natürlichen Zahlen kann die Division formal als Umkehroperation der Multiplikation eingeführt werden. Auf der Suche nach der Frage, welches x die Gleichung $a \cdot x = b$ löst, definieren wir als Lösung $x = b : a$ (Padberg et al., 1995). Die Lösung $b : a$ wird Quotient der Zahlen b (Dividend) und a (Divisor) genannt (ebd.). In Analogie zur wiederholten Addition als Konzept für die Multiplikation, kann die Division als wiederholte Subtraktion verstanden werden. Es stellt sich dann die Frage, wie oft der Divisor vom Dividenden abgezogen werden muss, bis wir Null erhalten (Padberg & Benz, 2011). Damit können als anschauliche Grundvorstellungen der Division die Umkehrungen der Grundvorstellung der Multiplikation als „Vervielfachung/Vereinigung" angesehen werden. Während das Ergebnis der Multiplikation aufgrund der Kommutativität immer das gleiche ist, egal ob ich 6 Bonbons vervierfache (4*6 Bonbons = 24 Bonbons) oder 4 Bonbons sechsmal vereinige (6*4 Bonbons = 24 Bonbons), existieren für die Division zwei klar unterscheidbare Grundvorstellungen, die beide als mathematischen Hintergrund die wiederholte Subtraktion des Divisors vom Dividenden besitzen, aber jeweils zu einem anderen Ergebnis führen, nämlich entweder zu einer Zahl mit Einheit (6 Bonbons) als Multiplikand der Umkehraufgabe, oder zu dem Operator (6) als Multiplikator der Umkehraufgabe. Für die Division sind daher die beiden Grundvorstellungen der **Division als Aufteilen** und der **Division als Verteilen** zu unterscheiden. Beide Grundvorstellungen lassen sich durch ikonische Darstellungen oder Handlungen sehr leicht entwickeln (Padberg & Benz, 2011).

Division als Aufteilen:

Bei der Grundvorstellung Aufteilen werden die gegebenen Elemente einer Menge (z. B. 24 Bonbons) in gleichmächtige Teilmengen (z.B. immer 4 Bonbons) zerlegt. Anschaulich kann dies auch als Bündeln beschrieben werden. Es stellt sich als Ergebnis der Divisionsaufgabe 24:4 = 6 die Frage, wie oft dies geschehen kann. Diesen Vorgang kann man sich wie bei der Multiplikation sowohl als zeitlich sukzessive Handlung als auch als räumlich-simultanes Bild vorstellen (ebd.). Gesucht ist die Anzahl der Teilmengen

(Operator), „während die Elementanzahl der Menge M und die Elementanzahl je Teilmenge bekannt ist“ (Padberg & Benz, 2011, S. 154). Die zu dieser Vorstellung gehörende Multiplikationsaufgabe wäre somit $x \cdot 4\, Bonbons = 24\, Bonbons$, als Ergebnis der Divisionsaufgabe ist also beim Aufteilen der Multiplikator gesucht.

Division als Verteilen:

Diese Grundvorstellung hat als Bild, dass eine Menge von Elementen (z. B. 24 Bonbons) gleichmäßig auf eine vorab festgelegte Zahl von gleichmächtigen Teilmengen (im Beispiel 4) verteilt wird, so dass die Anzahl der Elemente je Teilmenge (6 Bonbons) gesucht wird. Ein anschaulicher Weg hierfür ist es beispielsweise als zeitlich sukzessive Handlung bei einem Kartenspiel jedem mitspielenden Kind (Besitzer der Teilmenge) der Reihe nach jeweils eine Karte (ein Element) zu geben, solange bis alle Elemente (Karten) restlos auf die Mitspieler (die Besitzer der Teilmengen) verteilt sind. Wiederum kann auch das Ergebnis der Verteilung sich als räumlich-simultanes Bild vorgestellt werden, allerdings ist an diesem wie bei der Multiplikation nicht unterscheidbar, ob es durch Aufteilen oder Verteilen entstanden ist. Die zu dieser Vorstellung gehörende Umkehraufgabe wäre somit $4 \cdot x\, Bonbons = 24\, Bonbons$, als Ergebnis der Divisionsaufgabe ist also beim Verteilen der Multiplikand gesucht.

Wie diese Erläuterungen bereits zeigen, ist eine dritte innermathematische Grundvorstellung der Division zu benennen, nämlich die **Division als Umkehroperation der Multiplikation** (Padberg & Benz, 2011). Bei Anwendung dieser Grundvorstellung ist allgemein ohne spezifischen Sachkontext die Zahl gesucht, die die Divisionsaufgabe 24: 4 löst. Damit ist durch Bezug auf die Umkehroperation die Zahl gesucht, die mit 4 multipliziert 24 ergibt.

Grundsätzlich ist die **Grundvorstellung des Aufteilens** strukturgleich zur der **Grundvorstellung des (Aus-)Messens** für einen Aufgabenkontext mit Größen (ebd.). Es stellt sich beim Messen beispielsweise die Frage, wie oft ein 2m Gliedermaßstab in eine zu messende Strecke von 16m passt. Das Ergebnis ist wiederum der Operator (8 mal). Ein Unterschied besteht aus meiner Sicht in der Anschauung: Während beim Messen das gegebene Ganze mit einem externen Maß verglichen wird und dementsprechend vermessen wird, wie oft das Maß in das Ganze passt, erfolgt beim Aufteilen ohne externes Maß eine unter Umständen willkürliche bzw. nicht durch einen externen Maßstab begründete Bündelung der Elemente der Menge. Zum Beispiel kann eine Lehrkraft im

Sinne des Aufteilens entscheiden, dass bei einem Klassenausflug immer nur 3 Kinder in ein Boot dürfen, obwohl eigentlich 5 Personen als externes Maß in ein Boot passen würden. Daher werden in der weiteren Arbeit die Grundvorstellungen Aufteilen und (Aus-)Messen unterschieden.

In der Standardliteratur zum Thema werden keine weiteren Grundvorstellungen der Division aufgeführt, allerdings wäre durchaus aus meiner Sicht als Umkehroperation der Multiplikation analog die Übertragung eines Großteils der weiteren Grundvorstellungen zur Multiplikation auf die Division möglich (Skalierung, Verkettung, Verknüpfung von Größen, formelhafte Division von Größen).

Eine typische deskriptive Schülervorstellung bzw. „gewohnheitsmäßige Erwartung […] [als] Begleiteffekt“ (Hefendehl-Hebeker, L. & Schwank, 2015, S. 101) des Umgangs mit der Division ist, dass die „Division verkleinert“ (ebd.). Wenn diese Vorstellung übergeneralisiert wird zur Vorstellung ‚Division verkleinert immer‘, liegt eine Fehlvorstellung vor, die aber auch schon im Zahlenraum der natürlichen Zahlen durch die explizierende Behandlung der Division durch 1 behebbar wäre. Eine Behandlung der nicht möglichen Division durch 0 könnte außerdem auch schon vor der Einführung der Bruchrechnung die vertiefte Auseinandersetzung mit der innermathematischen Grundvorstellung der Division als Umkehroperation (Fahse, 2014) bewirken.

Weiterhin sind aufgrund der eingeschränkten Durchführbarkeit der Division im Zahlenraum ℕ folgende Eigenschaften der Division in den Köpfen der SuS nach Padberg und Wartha (2017) häufig fest verankert:

- „Die Division ist nur sehr eingeschränkt möglich, oft bleibt ein Rest (Beispiel 5:2),
- Eine kleinere Zahl lässt sich nie durch eine größere Zahl dividieren (Beispiel 2:5)“

(Padberg & Wartha, 2017, S. 144)

2.5.6 Zahlenbereichserweiterung zu den rationalen Zahlen

Brüche lassen sich aus dem Zahlenraum der natürlichen Zahlen entwickeln, indem man sie als Menge der geordneten Paare $(a, b)\ mit\ a, b\ \in \mathbb{N}$ resultierend aus dem kartesischen Produkt $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ versteht (Padberg et al., 1995). Statt der Paardarstellung schreibt man auch $\frac{a}{b}$ und nennt „a den Zähler und b den Nenner des Bruches“ (Padberg et al., 1995, S. 66). Für verschiedene Brüche lässt sich auf Grundlage der uneingeschränkt durchführbaren Multiplikation eine Äquivalenzrelation definieren, die das Verhältnis der natürlichen Zahlen der Paare $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ wie folgt beschreibt: $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ sind äquivalent ($\frac{a}{b} \sim \frac{c}{d}$), wenn gilt $a \cdot d = c \cdot b$ (ebd.). Dass diese Relation eine Äquivalenzrelation darstellt, lässt sich zeigen, indem die Reflexivität, Symmetrie und Transitivität nachgewiesen werden, worauf hier aus Platzgründen verzichtet wird. Die definierte Relation „ist äquivalent zu" zerlegt also die Ausgangsmenge $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, und damit die Menge aller geordneten Paare, in Klassen jeweils zueinander äquivalenter oder gleichwertiger Brüche. „Diese [Äquivalenz-]Klassen nennen wir Bruchzahlen" (Padberg et al., 1995, S. 67). Die Bruchzahl $\left[\frac{a}{b}\right]$ ist somit die Äquivalenzklasse aller zu $\frac{a}{b}$ äquivalenten Brüche $\frac{n}{m} = \frac{ka}{kb}$ $(a, b, n, m, k \ \in \mathbb{N})$. Wir schreiben:

$$\left[\frac{a}{b}\right] = \left\{\frac{n}{m} \mid n, m \ \in \ \mathbb{N} \ und \ a \cdot m = n \cdot b\right\}$$

Der Bruch $\frac{a}{b}$ heißt Repräsentant der Bruchzahl $\left[\frac{a}{b}\right]$, wobei jedes Element der Äquivalenzklasse als Repräsentant dienen kann (Reitz-Koncebovski, 2018b).

Es lassen sich damit die positiven rationalen Zahlen $\mathbb{Q}^+$als die Menge aller Äquivalenzklassen (= Bruchzahlen) $\left[\frac{a}{b}\right] \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ definieren (ebd.). Die natürlichen Zahlen können in diesen neuen Zahlenraum eingebettet werden durch die Abbildung $n \mapsto \left[\frac{n}{1}\right]$ (ebd.), d. h. die Menge der unendlich vielen Brüche einer Bruchzahl (z. B. für die Abbildung der natürlichen Zahl 2: $\left[\frac{2}{1}\right] = \left\{\frac{2}{1}, \frac{4}{2}, \frac{6}{3}, \ldots\right\}$) stellen in diesem neuen Zahlenbereich auf symbolischer Ebene die Repräsentanten für die neuen Bruchzahlen dar und nicht mehr die realen Objekte.

Eine Bruchzahl kann sowohl durch einen gemeinen Bruch in bisher behandelter Schreibweise dargestellt werden als auch durch einen Dezimalbruch im bekannten und bei der Einführung der Dezimalbruchrechnung zu erweiternden Stellenwertsystem. Da in der weiteren Arbeit die Dezimalbruchdarstellung von Brüchen nicht Gegenstand des Interesses ist, wird auf Dezimalbrüche nicht näher eingegangen.

Weiterhin wird in der Bruchrechnung zwischen *echten* und *unechten* Brüchen unterschieden. Während echte Brüche einen Wert zwischen 0 und 1 annehmen, da der Zähler immer kleiner als der Nenner ist, werden Zahlenwerte größer eins durch unechte Brüche (Zähler größer als Nenner) dargestellt (Pilchner, 2010). Als Stammbrüche werden alle Brüche der Form $\frac{1}{n}$ $, n \ \in \mathbb{N}$ bezeichnet (Zähler ist eins) (Padberg & Wartha, 2017). „Mehrere Brüche sind *gleichnamig*, wenn ihr Nenner identisch ist" (Pilchner, 2010, S. 9).

Der Anschauungsumbruch von den natürlichen Zahlen zu den Bruchzahlen ist für viele Kinder schwer zu antizipieren. Eichelmann et al. (2012) beschreiben diesen Umbruch treffend wie folgt:

> „Mit der Einführung der Bruchrechnung beginnt für die Schüler ein neuer Abschnitt der Mathematik, in der kein intuitives Rechnen mit Unterstützung durch Finger mehr möglich ist (Wu 2008) und einige Vorerfahrungen aus dem Bereich der natürlichen Zahlen nicht übertragen werden können" (Eichelmann, Narciss, Schnaubert & Melis, 2012, S. 30).

Häufig führen Schwierigkeiten bei der inhaltlichen Durchdringung der sich durch die Zahlenraumerweiterung ergebenden Vorstellungsumbrüche dazu, dass viele SuS auf ein pures Regellernen ausweichen, womit zwar häufig die abgeforderten Rechenaufgaben im Unterricht bewältigt werden, was aber in Anwendungssituationen für die SuS mit ihrem nur prozeduralen Regelwissen zum Scheitern führt (Eichelmann et al., 2012). Um dies zu verhindern, sind die in den folgenden Abschnitten beschriebenen neuen Grundvorstellungen auszubilden und notwendige Vorstellungsumbrüche aktiv aufzugreifen.

2.5.7 Grundvorstellungen zum Bruchzahlbegriff

Während in der Fachliteratur relativ übereinstimmend für natürliche Zahlen die in Abschnitt 2.5.2 aufgeführten Zahlaspekte benannt werden, werden für den Bruchzahlbegriff in verschiedenen grundlegenden Literaturquellen (vgl. Padberg & Wartha, 2017; Malle, 2004; vom Hofe, 2003; Hefendehl-Hebeker, L., 1996; Wartha, 2009; Schink & Meyer, 2013) verschieden akzentuiert Grundvorstellungen benannt und klassifiziert. Malle (2004) benennt in seinem vielfach zitierten Basisartikel zu „Grundvorstellungen von Bruchzahlen" (Malle, 2004, S. 4) die folgenden acht Grundvorstellungen zu dem Begriff Bruchzahl:

1. **Bruchzahl als Teil (eines Ganzen): $\boldsymbol{\frac{a}{b}}$ (von 1):** Hier wird der Bruch als eigenständiges Objekt, als Teil eines Ganzen (Objekt oder Größe) angesehen. Beispiele sind: Eine Zweidritteltorte, eine Viertelnote

2. **Bruchzahl als relativer Anteil: $\boldsymbol{\frac{a}{b}}$ von c:** Malle gibt die Grundvorstellung 1 als Spezialfall dieser allgemeineren Grundvorstellung eines Bruchs als Anteil an. Hier kann die Menge c auch größer als der Divisor sein. Beispiel: Anna erbt $\frac{2}{5}\ von$ 100.000 €.

3. **Bruchzahl als Vergleichsoperator: $\boldsymbol{\frac{a}{b}}$ mal so viel wie b, $\boldsymbol{\frac{a}{b}}$ mal so groß wie b:** Zwei Mengen oder Größen werden verglichen, die Bruchzahl als ihr Verhältnis ist der

Vergleichsoperator. Beispiel: Die Menge A (3 Kugeln) enthält $\frac{a}{b} = \frac{3}{5}$ mal so viele Kugeln wie die Menge B (5 Kugeln).

4. **Bruchzahl als Resultat einer Division:** $\frac{a}{b} = a : b$**:** Bruchzahl als Resultat eines Verteilprozesses. Beispiel: 3 Pizzen werden auf vier Personen verteilt.

5. **Bruchzahl als Verhältnis:** $\frac{a}{b} = a : b\ [a\ zu\ b]$**:** Hier ist der Doppelpunkt zunächst als Verhältnis aufzufassen. In dieser Grundvorstellung spiegelt sich ein wichtiger kognitiver Objektivierungsschritt wider. Das Verhältnis von zwei Größen wird als eine neue Bruchzahl aufgefasst. So wurde die Proportion a:b = 3:4 historisch lange als die „Beziehung zwischen vier eigenständigen Denkobjekten, nämlich den natürlichen Zahlen a, b, 3, 4“ (Malle, 2004, S. 5) aufgefasst. Beispiel: Die Längen zweier Landebahnen verhalten sich wie 3:4.

6. **Bruchzahl als Quasikardinalzahl:** $\frac{2}{3} = 2\ Drittel$: Hier werden die Stammbrüche als neue Einheiten aufgefasst, mit denen man kardinal rechnen kann.

7. **Bruchzahl als Quasiordinalzahl**: $\frac{1}{4}$ ... **jeder Vierte:** Diese Vorstellung ist nur für Stammbrüche anwendbar. Das Beispiel „Jede vierte Perle ist schwarz“ kann zwei Bedeutungen haben. Im strikten Sinn: auf drei weiße Perlen folgt je eine schwarze Perle. Im statistischen Sinn: ein Viertel aller Perlen ist schwarz.

8. **Bruchzahl als absoluter Anteil**: $\frac{2}{3}$ ... **zwei von drei:** Diese Deutung ist im lebensweltlichen und statistischen Kontext häufig anzutreffen, aber unter Umständen problematisch, sobald mit Brüchen gerechnet wird, da hierüber die „falsche Addition“ ($\frac{3}{4} + \frac{2}{5} = \frac{5}{7}$) rechtfertigbar wäre: drei von vier und zwei von fünf sind fünf von sieben. (Malle, 2004)

Analysiert man diese Grundvorstellungen und ihre Anschauungen genauer, fallen zunächst folgende Dinge auf. Die Grundvorstellungen 1 und 2 sind aus meiner Sicht grundsätzlich zu der Oberkategorie ‚Bruchzahl als Anteil‘ zusammenfassbar. Erstaunlich ist, dass Malle zwar diese Verbindung sieht und die Grundvorstellung 2 als Spezialfall der Grundvorstellung 1 postuliert, gleichzeitig aber in den beiden Fällen inkonsistent die zu unterscheidenden Begrifflichkeiten Teil (Objekt oder Größe) und Anteil (Operator) aufführt. Grundsätzlich besteht

> „ein einzelner Bruch aus der **Trias** von dem **Anteil** (der die Beziehung zwischen dem Teil und dem Ganzen ausdrückt), dem **Ganzen** (auf das sich der Anteil bezieht und von dem der Teil betrachtet wird) und dem **Teil** (der von einem bestimmten Ganzen genommen wird und eine durch den Anteil

> ausgedrückte Beziehung zu ihm unterhält). Beim Umgang mit Brüchen hängen diese drei Komponenten untrennbar miteinander zusammen und lassen sich nur zirkulär (er-)klären“ (Padberg & Wartha, 2017, S. 31).

Während Hefendehl-Hebeker (1996) daher konsistent die beiden Grundvorstellungen oder „Gesichter“ (Hefendehl-Hebeker, L., 1996, 20) „Teil einer ganzen Pizza“ und „Teil mehrerer ganzer Pizzas“(ebd.) ausweist, wird in (Padberg & Wartha, 2017) vom „Bruch als Anteil“ (Padberg & Wartha, 2017, S. 19) als Grundvorstellung gesprochen und in die beiden Teilaspekte „Anteil eines Ganzen“ (ebd, S. 24) und „Anteil mehrerer Ganzer“ (ebd., S. 28) ausdifferenziert. Dass letztgenannte Betonung der Grundvorstellung aus meiner Sicht sinnvoller ist, zeigt sich daran, dass der Anteil immer eine rationale Zahl darstellt, während der Teil auch eine natürliche Zahl sein kann, wenn das Ganze einem Vielfachen des Divisors des Anteils entspricht, z. B. $\frac{2}{3} \cdot 60€ = 40€$ (siehe Grundvorstellung 2 von Malle).

Weiterhin ist es fruchtbar, die Kategorisierung der Grundvorstellung 4 von Malle „Bruchzahl als Resultat einer Division“ genauer zu betrachten. Wenn es allein um die innermathematische Abhandlung des Rechenprozesses (Resultat einer Division) geht, wird diese Vorstellung nicht den Kriterien von Grundvorstellungen nach vom Hofe gerecht, sondern ist eher als „algebraisch-technische Interpretation“ (Wartha, 2009, S. 59) anzusehen. Andererseits ist die Lösbarkeit von allen Divisionsaufgaben ein zentrales Motiv der Einführung der Bruchzahlen und somit die Bruchzahl als Resultat einer Division auch für die Modellierung von Sachsituationen hilfreich. Als Beispiel für diese Grundvorstellung führt Malle daher auch das lebensweltliche Verteilen von Pizza an „Drei Pizzen sollen auf vier Personen aufgeteilt werden. Wie viel erhält jeder?“ (Malle, 2004, S. 5). Dieses Beispiel ist aber aus meiner Sicht in Bezug auf die möglichen Grundvorstellungen zum entstehenden Bruch naheliegender der Grundvorstellung Anteil (mehrerer Ganzer) zuzuordnen, wobei die Lösung der Aufgabe durch eine Division erfolgt.

Padberg und Wartha (2017) ergänzen die möglichen Grundvorstellungen von Bruchzahlen um die Vorstellung „Bruch als Maßzahl“ (Padberg & Wartha, 2017, S. 20), welche grundsätzlich analog bereits aus dem Zahlenraum der natürlichen Zahlen bekannt ist (Maßzahlaspekt vgl. Abschnitt 2.5.2) und weiterhin eng mit dem Einsatz von „Brüche[n] als Skalenwerte“ (ebd., S. 21) (Bruch als Stelle auf einer Skala – z.B. Tankskala) zusammenhängt. Weiterhin betonen sie expliziter bzw. generalisierender als Malle als wesentliche Grundvorstellung den Operatoraspekt von Bruchzahlen.

Sowohl vom Hofe (2003) als auch Wartha (2009) beschreiben übereinstimmend als grundsätzliche Hauptkategorien drei Grundvorstellungen zum Bruchzahlbegriff

- die **Anteils-Vorstellung (Bruch als Anteil)**: Die Bruchzahl beschreibt hier einen Zustand und wird in unterschiedlichen Zahlaspekten interpretiert
- die **Operator-Vorstellung (Bruch als Operator)**: „Die Bruchzahl wird als Funktion verstanden, die auf Größen oder Zahlen wirkt“ (Wartha, 2009, S. 59) bzw. „als multiplikative Rechenanweisung, angewendet auf eine Größe“ (vom Hofe, 2003, S. 6)
- als auch die **Verhältnis-Vorstellung (Bruch als Verhältnis)**. (vgl. Wartha, 2009; vom Hofe, 2003)

Während der Begriff Anteil als Zustand noch den Entstehungskontext mitdenkt, also den Teilungsaspekt bzw. den zu Grunde liegenden Teilungsprozess eines Ganzen betont (basierend auf „der sehr tragfähigen Alltagserfahrung des Teilens“ (Barzel, B. & Kleine, 2013, S. 4)) beschreibt das Verhältnis einen stationären Zustand, bei dem zwei Größen unter der Idee des Vergleichens betrachtet werden (ebd.), völlig unabhängig davon, ob die beiden Größen ursprünglich in einem Kontext auftraten oder nicht.

Ganz konkret interpretiert Wartha unter Bezug auf Kategorisierungen weiterer Autoren auch den Maßzahlaspekt (Padberg), den relativen Anteil (Malle), den quasikardinalen Aspekt (Griesel) sowie den quasiordinalen Aspekt (Hefendehl-Hebeker) als Unterkategorien der Anteilsvorstellung (Bruchzahl als Zustand) (Wartha, 2009). Während für mich die Subsumtion des relativen Anteils sowie des quasiordinalen Aspekts unter der Anteils-Grundvorstellung nachvollziehbar erscheint, sind aus meiner Sicht der **Maßzahlaspekt** sowie der **Quasikardinalaspekt** in einer separaten Kategorie von Grundvorstellungen zu betrachten, da diese im Gegensatz zu Anteilen für sich stehen können und eine Einheit besitzen (3/4 kg; 3 Viertel), während Anteile genau wie Operatoren dimensionslos sind. Die Vorstellungen eines Bruches als Maßzahl bzw. als Quasikardinalzahl überlappen sich insofern deutlich, dass die Stammbrüche (Teilmenge der Bruchzahlen) als ein Größenbereich (siehe hierzu Abschnitt 2.5.3) aufgefasst werden können. So lassen sich alle Brüche $\frac{a}{b}$ als Größen mit der Maßzahl a und der Größeneinheit $\frac{1}{b}$ auffassen (Padberg & Wartha, 2017). Diese Grundvorstellung des Bruchs als Quasikardinalzahl eignet sich aus meiner Sicht besonders gut dafür, die Notwendigkeit des Erweiterns auf einen Hauptnenner zur Addition von Brüchen anschaulich zu machen.

So können zwei Drittel und drei Viertel nicht einfach addiert werden, da sie verschiedene Objekte des Denkens darstellen. Dies steht in Analogie zur Addition von zwei Größen mit unterschiedlichen Maßeinheiten. Auch diese können nicht unmittelbar sinnvoll addiert werden, sondern es müssen zunächst die beiden Maßeinheiten ‚gleichnamig' gemacht werden und die Maßzahlen um den entsprechenden Faktor angepasst werden. (1,5 km +900 m = 1500 m +900 m = 2400 m).

Der **Operatoraspekt** von Bruchzahlen kommt im Rahmen von „multiplikativen Handlungsanweisungen" (Padberg & Wartha, 2017, S. 20) zum Einsatz und wird in der Literatur häufiger als **„Von-Ansatz"** (ebd.) benannt (z. B. wird $\frac{3}{5} \cdot 30\ kg$ als $\frac{3}{5}\ von\ 30\ kg$ gelesen). Hierauf wird im Rahmen der Grundvorstellungen zur Multiplikation nochmal genauer eingegangen. Wie bei den Grundvorstellungen für die natürlichen Zahlen kann auch hier anhand der funktionalen Definition des Operatoraspekts nach Wartha (2009) und vom Hofe (2003) konstatiert werden, dass der Operator nicht für sich stehen kann, sondern immer mit einer Größe oder einer Menge verknüpft ist, mit der operiert wird.

Während viele Didaktiker (vgl. Padberg & Wartha, 2017; Wartha, 2009; Schink & Meyer, 2013) die Einführung der Bruchzahlen über die Teil- bzw. Anteilsvorstellung, aus Gründen der Rückgriffs auf die basale Alltagsvorstellung des Teilens sowie der Möglichkeit aus dem Anteilsaspekt die Addition und Subtraktion von Brüchen zu entwickeln, favorisieren, plädieren Barzel und Kleine (2013) dafür, sowohl den Anteilsaspekt als auch den Verhältnisaspekt parallel für den Einstieg in die Bruchrechnung zu nutzen. Während für die Anteilsvorstellung gilt, dass ein Anteil für sich genommen nicht besonders aussagekräftig ist, da der Anteil „ausgehend von einem Ganzen als Vorgang des (Ver-)Teilens vorgestellt" (Barzel, B. & Kleine, 2013, S. 4) wird und somit der Anteil immer multiplikativ verknüpft mit einem Ganzen ist, kann der Bruch als Verhältnis, welcher die Idee des Vergleichens nutzt (Barzel, B. & Kleine, 2013), dagegen allein für sich stehen. Er kann einzeln eine Beziehung zwischen zwei Größen/Mengen beschreiben, wobei das „entstehende „Maß", das den Zusammenhang zwischen diesen beiden Größen ausdrückt, […] danach allein im Mittelpunkt [steht]" (Barzel, B. & Kleine, 2013, S. 3). Weiterhin ist auch der Verhältnisaspekt gut an Alltagsvorstellungen wie z. B. Mischungsverhältnisse (Saftmischungen – (Streit & Barzel, 2013)) anbindbar.

Analysiert man Malles Grundvorstellungen in Bezug auf den **Verhältnisaspekt** genauer, wird für mich deutlich, dass sich neben der Grundvorstellung 5 ‚Bruchzahl als Verhältnis' auch die Grundvorstellung 3 ‚Bruchzahl als Vergleichsoperator' sowie die Grundvorstellung 8 ‚Bruchzahl als absoluter Anteil (zwei von drei)' unter dieser Grundvorstellung einordnen ließe, da bei allen drei Grundvorstellungen Verhältnisse im Mittelpunkt der Betrachtung stehen. Dazu möchte ich kurz auf den semantischen Gebrauch von Verhältnissen eingehen, weil dieser relevant für die Zuordnung von Rechenaufgaben zu Operationsvorstellungen ist: Während sich sprachlich ein Verhältnis zwischen zwei verschiedenen Mengen, Klassen, Objekten, bzw. Größen durch die Verknüpfung ‚zu' beschreiben lässt (z. B. die Längen der beiden Landebahnen stehen im Verhältnis 3 zu 4, ich habe ein Verhältnis zu jemandem), wird das Verhältnis zwischen einem Teil und dem Ganzen derselben Menge bzw. Größe durch die Verknüpfung ‚von' umschrieben (15 von 25 Kindern einer Klasse bzw. 3 von 5 Kindern haben Kind x zum Klassensprecher gewählt; ein Teil von mir findet das Ergebnis gut). Während die erstgenannte Form von Verhältnis (Grundvorstellung 5 nach Malle) mit der semantischen Verbindung ‚zu' zunächst für sich steht, kann in Form 2 (Grundvorstellung 3 nach Malle) das entstandene Verhältnis zwischen der Anzahl Elementen von zwei zu unterscheidenden Mengen Grundlage für weitere operative Rechnungen sein und somit als (Vergleichs-) Operator dienen. Letztgenannte Konstellation der Verhältnisvorstellung innerhalb einer Grundgesamtheit (Grundvorstellung 8 nach Malle) kann wiederum auch als Anteil in Bezug auf eine Gesamtheit (3 von 5 Kindern, 3/5 von allen Kindern) interpretiert werden.

Als Fazit dieser Ausführungen können folgende vier Kategorien an Grundvorstellungen des Bruchzahlbegriffs als maßgeblich angesehen werden, die alle den SuS vermittelt werden sollten:

- Verhältnisvorstellung
- Anteilsvorstellung (inkl. Quasiordinalaspekt)
- Operatorvorstellung
- Maßzahlvorstellung (inkl. Quasikardinalaspekt)

Diese Einteilung an Grundvorstellungen ist in Bezug auf konkrete Aufgabenstellungen nicht überschneidungsfrei, so kann beispielsweise wie zuvor beschrieben, die Vorstellung Bruch als absoluter Anteil sowohl als Anteil aufgefasst werden, als auch als Verhältnis. Die überschneidungsfreie Klassenbildung ist aber auch gar nicht das Ziel der Vermittlung von Grundvorstellungen, sondern das Ziel ist mithilfe von Grundvorstellungen die Basis dafür zu legen, dass symbolische Aufgaben oder Sachaufgaben mit einem inhaltlichen Verständnis korrekt gelöst werden können.

2.5.8 Notwendige Vorstellungsumbrüche für den neuen Zahlbegriff der Bruchzahlen

Wie passen nun die Grundvorstellungen der positiven rationalen Zahlen mit den bisherigen Grundvorstellungen der natürlichen Zahlen zusammen? Die folgende tabellarische Übersicht (Tabelle 2) zeigt, welche Grundvorstellungen unverändert beibehalten werden können, welche keine Anwendung mehr haben, welche nur noch eingeschränkt gültig sind und welche neu durch die Zahlenraumerweiterung auftreten, und macht dadurch die notwendigen Vorstellungsumbrüche (hier visualisiert als roter Blitz in Anlehnung an die Darstellung in Prediger (2011)) deutlich.

Tabelle 2: Gegenüberstellung der Grundvorstellungen der natürlichen Zahlen zu den Bruchzahlen

Grundvorstellungen: natürliche Zahlen als …		**Grundvorstellungen: Bruchzahlen /Brüche als….**
Kardinalzahl		---
Ordinalzahl		--- Keine diskrete Rangfolge mehr möglich
Maßzahl		Maßzahl
Operator	!	Operator, bleibt erhalten, aber stark modifiziert (‚von-Ansatz‘)
Code		---
		Anteil (Anteil eines Ganzen, Anteil mehrerer Ganzer)
		Verhältnis
		Quasiordinalzahl (jeder Vierte)
		Quasikardinalzahl (Bruch als Größe mit kardinaler Maßzahl und Stammbruch als Maßeinheit)

Daran ist zu erkennen, dass zahlreiche grundlegende Vorstellungsumbrüche nötig werden. So können die beiden im Zahlenraum der natürlichen Zahlen „intuitiv tief verankerten“ (Winter, 1999, S. 18) Grundvorstellungen der Kardinalzahl und der Ordinalzahl in $\mathbb{Q}$ nicht mehr das Verständnis stützen und zwei zentrale aber komplexe neue Grundvorstellungen, die Anteilsvorstellung und die Verhältnisvorstellung, müssen neu aufgebaut werden. In Bezug auf die Größer-Relation ist ein neues verwirrendes Phänomen, dass der Größenvergleich zwischen zwei Brüchen deutlich erschwert ist (Padberg & Wartha, 2017). Nun sind beim Größenvergleich zweier Zahlen immer jeweils zwei Komponenten (der Zähler und der Nenner einer Zahl) zu berücksichtigen und ins Verhältnis zu setzen bei der Entscheidung, welche von zwei Bruchzahlen größer ist. Hierfür ist wiederum ein fundiertes Verständnis vom Wesen eines Bruches und eine innere Repräsentation von Brüchen in mentalen Modellen notwendig, um den vielfältigen Fehlerstrategien beim Größenvergleich (ebd.) zu begegnen. Ein weiterer nötiger Vorstellungsumbruch betrifft die „Eineindeutigkeit von Zahl und Zahlzeichen“ (Winter, 1999, S.18), welche in $\mathbb{N}$ gegeben ist, nun aber beim Rechnen mit Brüchen aufgegeben werden muss. So können unendlich viele gleichwertige Brüche (als Zahlzeichen) die gleiche Bruchzahl repräsentieren. Dieses neue Phänomen muss im Bruchrechenunterricht gründlich entdeckt und durch anschauliche Zugangswege wie dem enaktiven Verfeinern und Vergröbern genauer analysiert werden (Padberg & Wartha, 2017), damit es später nicht zu Schwierigkeiten beim Erweitern und Kürzen von Brüchen kommt.

2.5.9 Die Multiplikation von Brüchen und ihre Grundvorstellungen

Für die Behandlung der Multiplikation von Brüchen und natürlichen Zahlen sind vier kombinatorisch mögliche Fälle zu unterscheiden:

- *Natürliche Zahl mal natürliche Zahl*
- *Natürliche Zahl mal Bruch (Bruch als Multiplikand)*
- *Bruch mal natürliche Zahl (Bruch als Multiplikator)*
- *Bruch mal Bruch*

Je nach Fall können verschiedene Grundvorstellungen zur Aufgabenlösung aktiviert werden. Die Multiplikation von natürlichen Zahlen (Fall 1) wurde bereits in Abschnitt 2.5.4 ausführlich behandelt. Die drei weiteren Fälle sollen im Weiteren analog zur Beschreibung in (Padberg & Wartha, 2017) kurz in Bezug auf die Möglichkeit der Nutzung von Grundvorstellungen bei der jeweiligen Aufgabenlösung behandelt werden.

Padberg und Wartha (2017) weisen zunächst darauf hin, dass diese drei Fälle in der hier aufgeführten Reihenfolge im Unterricht zeitlich nacheinander eingeführt werden sollten, da der Fall *natürliche Zahl mal Bruch* in Analogie zur Multiplikation zwischen natürlichen Zahlen ebenfalls über die wiederholte Addition eingeführt werden kann und somit am leichtesten vermittelbar ist (Padberg & Wartha, 2017). Für diesen Fall des „Vervielfachen[s] von Brüchen" (Padberg & Wartha, 2017, S. 106) ist also noch kein Vorstellungsumbruch zur Ausführung der Operation Multiplikation erforderlich.

Neben der ‚**Vervielfachung/Vereinigung**' als aus N bekannten Grundvorstellung, die auch für den gerade beschriebenen Fall *natürliche Zahl mal Bruchzahl* zur Anwendung kommen kann, werden von Prediger (2011) folgende Grundvorstellungen für die Multiplikation im Zahlenraum der positiven rationalen Zahlen aufgeführt:

Multiplikativer Vergleich – halb so viel, 3/5 mal so viel

Multiplikation als Skalierung – Ein Objekt wird multiplikativ neu skaliert (bei echten Brüchen verkleinert oder bei unechten vergrößert) beispielsweise durch Wachstum/Schrumpfen oder Abbildungen (z. B. maßstabgerechte Darstellung der Realität in (kleineren) Modellen)

Multiplikation als Anteil- bzw. Operator-Interpretation („von-Ansatz") – es wird ein Anteil von einem Ganzen genommen, $\frac{1}{8} \cdot 3$ entspricht $\frac{1}{8}\ von\ 3$ (Operator mal Größe)

Verknüpfung von Größen – eine Größe wird mit einer anderen Bezugsgröße multipliziert (z. B. 2/3 kg Weintrauben werden zu einem Preis von 2,5 €/kg verkauft. Wieviel Geld ist zu zahlen?)

Fläche eines Rechtecks bzw. formelhafte Multiplikation von Größen – Berechnung einer multiplikativen Größe aus Größen ($\frac{2}{3}m \cdot \frac{5}{8}m = \frac{5}{12}\ m^2$) (Prediger, 2011)

Weiterhin ist auch in diesem Zahlenraum die Idee der Verkettung von zwei Operatoren als Grundvorstellung (vgl. für den Raum der natürlichen Zahlen Padberg & Benz, 2011) ausbildbar:

Multiplikation als Verkettung von Anteilen – es wird die mehrfache Anteilbildung betrachtet durch die entsprechenden Operatoren (Was ist der Anteil vom Anteil von einem Ganzen?)

Für den Fall *Bruch mal natürliche Zahl* ist die Grundvorstellung des Vervielfachens nicht mehr tragfähig, wie an einem einfachen Zahlenbeispiel sofort erkennbar ist. Bei der Rechnung $\frac{2}{7} \cdot 3$ kann drei als Denkobjekt schlecht $\frac{2}{7}$- mal addiert werden (Padberg & Wartha, 2017). Für diesen Fall bietet es sich an, die Lösung unter Einsatz der im Rahmen der Bruchrechnung neu auszubildenden Anteil- bzw. Operatorvorstellung durch Anwendung des ‚von-Ansatzes' zu ermitteln. So kann $\frac{2}{7} \cdot 3$ im Sinne der Anteilsvorstellung als $\frac{2}{7}\ von\ 3$ interpretiert werden. Weiterhin könnte dieser Aufgabentyp auch anschaulich mithilfe der Grundvorstellungen Skalierung oder multiplikativer Vergleich gelöst werden, wobei auch diese Grundvorstellungen den SuS häufig noch nicht geläufig sind.

Besonders schwierig gestaltet sich für viele SuS der letzte multiplikative Fall *Bruch mal Bruch*. Dieser Fall ist besonders prädestiniert dafür, entweder als Anteil vom Anteil von einem Ganzen (Verkettung von Anteilen) interpretiert zu werden oder als Fläche eines Rechtecks ($Länge \cdot Breite$), um daraus auf Grundlage einer dieser Anschauungen am Rechteckmodell handelnd (falten in beiden Raumrichtungen) die Multiplikationsregel abzuleiten (Padberg & Wartha, 2017). Soll beispielsweise die Multiplikation von $\frac{2}{3}\ von\ \frac{4}{5}\ (von\ 1)$ anschaulich handelnd auf Basis der Grundvorstellung Verkettung von Anteilen vollzogen werden, so wird von Padberg und Wartha (2017) das Vorgehen wie folgt beschrieben: Das Rechteckpapier (Das Ganze) wird in die beiden Raumrichtungen in jeweils 5 bzw. 3 Teile geteilt, so dass sich insgesamt $3 \cdot 5 = 15$ (Produkt der Nenner) Teile des Papierstückes ergeben. Die Fläche eines Rechteckstückes entspricht somit $\frac{1}{15}$ des Ganzen. Bei der Bildung der 4/5 berücksichtigen wir 4 Teilrechtecke in die eine Richtung und bei der Bildung der 2/3 zwei Teile in die andere Richtung. Insgesamt sind es $2 \cdot 4 = 8$ Rechtecke (Produkt der Zähler). Als doppelt schraffierte Fläche wurden also 8 *von* 15 Rechteckstücken doppelt markiert. Das Ergebnis der Multiplikation ist also $\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot 1 = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{8}{15}$. So kann anschaulich die geltende Multiplikationsregel für Brüche abgeleitet werden (Padberg & Wartha, 2017):

"$Für\ alle\ Brüche\ \frac{m}{n}, \frac{p}{q}\ gilt\ \frac{m}{n} \cdot \frac{p}{q} = \frac{m \cdot p}{n \cdot q}$" (Padberg & Wartha, 2017, S. 109)

An dieser Beschreibung zeigt sich ein sprachliches Dilemma der Bruchrechnung. Die Multiplikation wird mit dem von-Ansatz beschrieben: $\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5}$; $\frac{2}{3}\ von\ \frac{4}{5}$ (Operator $\cdot$

Operator), aber auch die Division als Verhältnis von zwei Größen oder Mengen von Objekten $\frac{8\ Rechteckstücke}{15\ Rechteckstücke}$; $8\ von\ 15\ Rechteckstücken$ wird mit dem Wort „von“ in einigen Aufgabenkontexten beschrieben. Weiterhin findet das Wort ‚von‘ auch in Aufgabenstellungen zur Subtraktion (z. B. „Von 8 kg Obst wurden $\frac{3}{4}$ kg gegessen. Wie viel kg sind noch übrig?“ (Pilchner, 2010, S. 21)) Anwendung. Dies führt dazu, dass viele Schüler Aufgabenstellungen wie $\frac{2}{3}\ von\ \frac{4}{5}$ nicht die richtige Operation zuordnen können, wie Prediger (2011) in einer empirischen Untersuchung nachweisen konnte (Prediger, 2011). Darin wurden 830 SuS von Gymnasien, Real- Haupt- und Gesamtschulen in einem repräsentativen Verhältnis zur Populationsverteilung auf die Schultypen in Jahrgangsstufe 7 oder 9 gebeten die gegebene halboffene Frage „Wie kann man $\frac{2}{3}\ von\ 36$ berechnen?“ (Prediger, 2011, S. 72) zu beantworten mit einer Erklärung, warum die jeweilige Lösung gewählt wurde. Die vorgegebenen Antwortoptionen waren: $36 - \frac{2}{3}; 36 : \frac{2}{3}; \frac{2}{3} \cdot 36$ (ebd.) Von den 762 Lösungen, die eine Begründung für ihre Wahl angaben, gab es nur 114 richtige Lösungen, die die Multiplikation als Operation begründeten. 64 der begründeten richtigen Antworten verwiesen dabei auf die formale Begründung, dass ‚von-Aufgaben‘ Multiplikationsaufgaben seien. Deutlich häufiger wurden ‚von-Aufgaben‘ als Divisionsaufgaben interpretiert, weitere 38 SuS postulierten, dass ‚von-Aufgaben‘ Minusaufgaben seien (ebd.). Diese Ergebnisse machen deutlich, wie wichtig es ist, zusätzlich zur grundsätzlichen Verknüpfung von Rechenoperationen mit geeigneten Grundvorstellungen, auch auf die Verwendung der ‚von-Schreibweise‘ ausführlicher einzugehen und diese anschaulich zu begründen, zumal vielen SuS die Formulierung „von“ aus ihren lebensweltlichen Erfahrungen eher als absoluter Anteil im Zahlenraum der natürlichen Zahlen geläufig ist (2 von 8 Kindern) (Malle, 2004).

So sollte schon im Fall der Multiplikation zweier natürlicher Zahlen neben der Standardsprechweise für die Multiplikationsaufgabe $3 \cdot 5$ ‚drei mal fünf‘, welche auf Basis der Grundvorstellung der ‚Vervielfachung/Vereinigung‘ auf die wiederholte Addition hindeutet, auch folgende Sprechweise nahegelegt werden, die besonders den Operatoraspekt des Multiplikators betont: „das Dreifache von 5“ (Malle, 2004, S. 6).

Die verschiedene sprachliche Verwendung von ‚von‘ kann für einzelne SuS sehr verwirrend sein, weswegen es im Rahmen der Hochschullehre zur Ausbildung des Professionswissens wichtig erscheint, zum Einen zu explizieren, dass mit der

Interpretation des „von“ als Malzeichen nur die abkürzende Schreibweise „das x-fache von“ gemeint ist (Malle, 2004). Zum Anderen sollte aus meiner Sicht im Aufgabenkontext unterschieden werden können, ob es um die mögliche Verknüpfung von zwei Größen durch ein „von“ geht (3/4 g von 100 g Suppe sind Salz, wie hoch ist der Salzanteil in der Suppe?: $\frac{\frac{3}{4}g}{100\,g} = \frac{3}{400}$) oder ob es um die multiplikative Verknüpfung eines Anteils/Operators mit einer Größe geht ((das) ¾(-fache) von 100 g Suppe sind Salz, wie viel Salz (Größe) ist in der Suppe bzw. ist sie noch genießbar?).

Diese Bespiele zeigen, dass die formelle Schreibweise $\frac{3}{4} von\ 100$ ohne Angabe von Einheiten oder der Information, ob es sich bei dem Bruch um einen Operator handelt, mathematisch nicht eindeutig ist, sondern es eine reine Konvention darstellt, solch ein Formulierungsgebilde als multiplikativen Kontext zu sehen.

Für fehlerhafte Ausführungen der Multiplikation im Rahmen der Bruchrechnung wird vielfach die Fehlvorstellung von SuS, dass Multiplikation immer vergrößere, verantwortlich gemacht, welche einen Aspekt des NNB für Operationen ausmacht. Dass diese Fehlvorstellung (mindestens, wenn die Aufgabenstellung in einen sprachlichen Rahmen eingebettet ist) viele falsche Schülerantworten der multiplikativen „von-Aufgaben‘ nicht erklärt, zeigen deutlich die bereits zitierten Untersuchungsergebnisse (Prediger, 2011), denn ein Großteil der Lösungen zur Aufgabe „Wie kann man $\frac{2}{3}\ von\ 36$ berechnen?“ (Prediger, 2011, S. 72) war durch andere Fehlvorstellungen bzw. gar keine Vorstellungen geprägt. Den allergrößten Anteil der richtigen und falschen Begründungen machte die „keyword-strategy“ (Prediger, 2011, S. 82) mit Deutung der ‚von-Aufgabe‘ durch das Schlüsselwort ‚von‘ als Multiplikationsaufgabe (64 richtige Lösungen), als Divisionsaufgabe (285 falsche Lösungen) bzw. als Subtraktionsaufgabe (38 falsche Lösungen) aus, während nur 35 SuS die falsche Einordnung als Divisionsaufgabe (bei Annahme das Ergebnis wird kleiner) mit der Formulierung „multiplication would make bigger“ (ebd.) begründeten (ebd.). Interessant ist auch das Ergebnis, dass immerhin 13 SuS die richtige Antwort gaben (Zuordnung Multiplikation) aufgrund der verwandten Fehlvorstellung, dass beim Rechnen mit Brüchen die Multiplikation das Ergebnis generell kleiner macht (ebd.) (im Sinne der übergeneralisierten Merkregel: Bei der Multiplikation von Brüchen ist es andersherum; hier vergrößert die Multiplikation nicht immer, sondern sie verkleinert immer). Weiterhin erfolgte die Begründung eines großen Anteils falscher Antworten durch verschiedene „Restrukturierungsstrategien“ (ebd.) bei denen durch inhaltliche Grundvorstellungen zwar begründet, aber falsch eine Aufgabe zugewiesen wurde. Beispielsweise wurde häufig gesagt, dass es eine Divisionsaufgabe sein muss, weil man ja „einen Anteil braucht“ (ebd.) oder es wurde falsch die Grundvorstellung des „Ausmessens“ der multiplikativen Aufgabe zugewiesen (wie oft passt die 2/3 in die 36). Auch diese falsch zugeordneten Strategien wurden deutlich häufiger angewendet als die häufig zitierte übergeneralisierte Vorstellung, dass Multiplikation immer verkleinert bzw. Division vergrößert (ebd.).

2.5.10 Die Division von Brüchen und ihre Grundvorstellungen

Auch für die Behandlung der Division von Brüchen und natürlichen Zahlen sind vier kombinatorisch mögliche Fälle zu unterscheiden:

- *Natürliche Zahl durch natürliche Zahl*
- *Natürliche Zahl durch Bruch*
- *Bruch durch natürliche Zahl*
- *Bruch durch Bruch*

Grundsätzlich können für die Division von Brüchen alle bereits im Zahlenraum ℕ erlernten Grundvorstellungen nämlich das **Aufteilen** bzw. **Messen**, das **Verteilen** sowie die **Division als Umkehroperation der Multiplikation** weiterhin zur Anwendung kommen. Allerdings spielt im Regelfall die immer anwendbare Grundvorstellung der Division als Umkehroperation vor Beginn der Bruchrechnung noch eine sehr „untergeordnete, [lediglich] ergänzende Rolle“ (Padberg & Wartha, 2017, S. 143), während die beiden klassischen Grundvorstellungen der Division ‚Aufteilen‘ und ‚Verteilen‘ nicht mehr immer für alle Divisionsaufgaben tragfähig sind. So ist die Grundvorstellung Aufteilen für alle Sachkontexte ungeeignet, in denen der Divisor größer als der Dividend ist. Daraus lässt sich vermutlich auch die Schwierigkeit der SuS bei der Lösung von Divisionsaufgaben vom Typ *natürliche Zahl durch natürliche Zahl* (mit größerem Divisor) erklären, für die in Untersuchungen von Padberg (1986) sich besonders geringe Lösungshäufigkeiten von nur 40% nach (!) Behandlung der systematischen Bruchrechnung zeigten (Padberg & Wartha, 2017). Nicht nur müssen die zwei in Abschnitt 2.5.5 bereits zitierten Eigenschaften der Division von natürlichen Zahlen ‚Dividieren ist nur eingeschränkt möglich‘ sowie ‚eine kleinere Zahl lässt sich nie durch eine größere Zahl dividieren‘ aufgegeben werden, außerdem steht für den letztgenannten Fall auch die Grundvorstellung des Aufteilens für die Lösungsfindung bei diesem Aufgabentyp nicht zur Verfügung, denn die Vorstellung, wie oft passt die größere Zahl in die kleinere, ist nicht anschaulich. Eine Untersuchung von Spiegel & Fromm (1996) legt zudem nahe, dass das Aufteilen bei den untersuchten SuS die deutlich beliebtere und häufiger angewandte Grundvorstellung zu sein scheint (Spiegel & Fromm, 1996).

Für die Lösung der Divisionsaufgabe $a: b = \frac{a}{b}$ mit $b > a$ ist vielmehr die Interpretation des entstehenden Bruchs als Anteil mehrerer Ganzer zielführend (Padberg & Wartha, 2017), entstanden durch den Prozess des Verteilens.

Somit steht auch für den Fall: *(echter) Bruch durch natürliche Zahl* die Grundvorstellung des Aufteilens nicht zur Verfügung, allerdings ist von der Anschauung her dieser Aufgabentyp gut mit der Grundvorstellung Verteilen lösbar. Hier stellt dann eher die Verfeinerung des Bruchs, für die Fälle, dass der Zähler des zu verteilenden Bruches nicht ein ganzzahliges Vielfaches des Divisors ist, die operativ-anschauliche Schwierigkeit dar (Padberg & Wartha, 2017). Das Ergebnis einer Division unter der Verteilvorstellung ist dabei immer wieder genau wie das zu verteilende Ganze eine Größe bzw. Menge von Elementen.

Für die Fälle *Natürliche Zahl durch Bruch* und *Bruch durch Bruch* wiederum ist die Verteilvorstellung in den klassischen Verteilsituationen auf Kinder bzw. andere nicht teilbare Objekte nicht anschaulich. Wie soll ich 3 Pizzen auf 4/5 Kinder verteilen? Für alle Fälle, in denen der Divisor kleiner als der Dividend ist, ist für diese Aufgabenfälle dagegen das Aufteilen bzw. Messen anschaulich. Bei diesen Vorstellungen ist das Ergebnis der Division ein Operator, der angibt, wie oft das Maß/die Bündelung in das zu messende Ganze passt.

Für die verbleibenden Fälle mit einem größeren Divisor als Dividend, ist allerdings die Anschauung des Aufteilens nicht tragfähig. Auch die Grundvorstellung (Aus-)Messen stößt dann für viele Kinder an eine Grenze (wenn es auch prinzipiell möglich ist, dass die auszumessende Strecke kleiner als das extern angelegte Maß ist und demnach eine Bruchzahl die gesuchte Lösung sein muss) (Padberg & Wartha, 2017). Somit verbleibt als immer verfügbare Vorstellung die Grundvorstellung der Division als Umkehroperation zur Multiplikation zur Lösung dieses Aufgabentyps. Anschaulich kann dieser Grundgedanke durch den Einsatz von Operatordiagrammen gemacht werden. Diese Anschauung, bei der die multiplikative Verknüpfung einer Zahl mit einem Bruch als Operator in eine Division und eine Multiplikation aufgespalten wird und dann bei der Umkehroperation durch die umgekehrte Division bzw. Multiplikation wieder die Rechenoperation der Multiplikation rückgängig gemacht werden kann, kann die (final zu vermittelnde) Operationsregel: „Man dividiert durch einen Bruch, indem man mit dem Kehrwert multipliziert“ (Padberg & Wartha, 2017, S. 137) gut begründen.

Eine aktuelle Untersuchung von Coskun (2019) zur adäquaten Formulierung von Problemstellungen als Sachaufgabe zu einer vorgegebenen Divisionsaufgabe vom Typ *Bruch durch Bruch* durch Primarstufenstudierende im Fach Mathematik („pre-service elementary teacher“ (Coskun, 2019, 99)) zeigte allerdings, dass auch dieser Aufgabentyp nicht nur basierend auf den Grundvorstellungen des Aufteilens und Messens sondern prinzipiell auch durch eine Verteilsituation gelöst werden kann. Zu der Aufgabenstellung $\frac{5}{6}:\frac{2}{3}$ war es 51(!) von 83 Teilnehmern der Studie nicht möglich eine passende Problemlöseaufgabe zu finden. Während 30 Lösungen klassischerweise die Verteilung des Messens verwendeten, wurde eine Lösung wie folgt angegeben: „Ali can read 2/3 of the book in 5/6 of an hour. How many hours does it take Ali to read the book“ (Coskun, 2019, 107). Hier wird also eine Größe (5/6 h) im Rahmen einer proportionalen Zuordnung implizit auf eine Eigenschaft des Buches (Seitenzahl – 2/3 [der Seiten] des Buches) bezogen, welche man sich allerdings auch als Verteilprozess (Ergebnis ist wieder eine Größe) vorstellen kann. Die 5 Sechstel der Stunde werden auf zwei Drittel des Buches verteilt. Wie viel Zeit ist dann nötig, um das ganze Buch zu lesen?

In meinem Versuch dieses Beispiel zu generalisieren, fällt auf, dass die Verteilvorstellung in den klassischen Verteilsituationen nur an der Unteilbarkeit des Divisors (Kinder sind nicht teilbar) scheitert. Eine Verteilung (bzw. Zuordnung) einer Größe zu einer anderen Größe mit Bezug auf den Quasikardinalaspekt für den Divisor ist allerdings auch mit Bruchzahlen problemlos möglich. Weiterhin kann jede Größe auf ein absolutes Verhältnis bezogen werden, was als Verteilprozess vorstellbar wird (z. B. Der Ertrag von 2/3 ha Kornfeld kann 20 von 100 Menschen ernähren / bzw. auf diese verteilt werden, wieviel ha Feldfläche werden dann zur Versorgung aller 100 Menschen benötigt?). Letzten Endes können so auch Aufgaben vom Typ Bruch durch Bruch mit der Verteilvorstellung gelöst werden, deren Divisor größer als der Dividend ist.

Mögliche Beispiele:

- Ein Teigklumpen einer Masse von 2/3 kg kann auf 8 von 10 Kindern verteilt werden. Wieviel kg Teig benötigte ich, um alle 10 Kinder mit der gleichen Teigmenge zu versorgen?
- ½ Pizza stillt 4/5 (vier Fünftel) des Hungers eines Kindes. Wie viel Pizza benötige ich, um den Hunger komplett zu stillen?

Damit ist es prinzipiell möglich jede Divisionsaufgabe auch unter der Verteilvorstellung zu modellieren. Genauso wie es prinzipiell möglich ist, auch jede Divisionsaufgabe von Brüchen mit der Vorstellung des Messens zu lösen.

Beide Möglichkeiten (Grundvorstellungen des Verteilens und Messens) sind jedoch in vielen Fällen mit erheblichen Einschränkungen der Anschaulichkeit verbunden. Trotzdem erscheint es aus meiner Sicht zielführend auch diese Fälle im Rahmen der Division bei Bedarf zu vermitteln, da nur so für jede Divisionsaufgabe eine lebensweltliche Grundvorstellung aktivierbar ist und so die Division von Brüchen nicht als rein innermathematisches Kalkül von den SuS mit der Operationsregel: „Man dividiert durch einen Bruch, indem man mit dem Kehrwert multipliziert“ (Padberg & Wartha, 2017, S. 137) angesehen werden kann.

2.5.11 Notwendige Vorstellungsumbrüche zu den Verfahren

In diesem Abschnitt sollen kurz und prägnant die notwendigen Vorstellungsumbrüche der Multiplikation und Division durch die Gegenüberstellung der alten und neuen (Grund-)Vorstellungen in einem Tabellenformat als Weiterentwicklung der Darstellung in Prediger (2011) aufbereitet werden. Können die Vorstellungen prinzipiell bestehen bleiben aber sind zu erweitern oder nur noch eingeschränkt anschaulich, wird eine Änderung bzw. Anpassung der Vorstellung notwendig (dies wird in den folgenden Tabellen durch ein rotes Ausrufezeichen visualisiert). Gibt es in die eine oder andere Richtung für die jeweilige Grundvorstellung keine Entsprechung wird ein Vorstellungsumbruch (hier visualisiert als rotes Blitzsymbol) notwendig. Wie die Inhalte aus Tabelle 3 und Tabelle 4 zeigen, sind zahlreiche grundlegende Vorstellungsumbrüche bzw. -anpassungen in Bezug auf die Berechnungsverfahren notwendig.

So können insbesondere die beiden im Zahlenraum der natürlichen Zahlen wichtigsten und fest verankerten Grundvorstellungen des Vervielfachens (Multiplikation) und des Aufteilens (Division) nur noch sehr beschränkt beim Rechnen mit Bruchzahlen sinnstiftend angewandt werden. Gleichzeitig müssen tragfähige Grundvorstellungen des Bruchzahlbegriffes ausgebildet sein, um sinnstiftend mit den Operationen im neuen Zahlenraum umgehen zu können.

Tabelle 3: Gegenüberstellung der (Grund-)Vorstellungen zur Multiplikation für natürliche Zahlen und Bruchzahlen

Grundvorstellungen bei natürlichen Zahlen: Multiplikation …		**Grundvorstellungen bei Bruchzahlen /Brüchen: Multiplikation ….**
als Vervielfachung/Vereinigung (wiederholte Addition)	!	als Vervielfachung/Vereinigung (wiederholte Addition): Nur eingeschränkt möglich: - für *natürliche Zahl mal Bruch* - nicht für *Bruch mal Bruch* oder *Bruch mal natürliche Zahl*
als Multiplikation als Kombination (kombinatorischer Kontext)		---
als Skalierung: - nur vergrößern	!	als Skalierung - vergrößern und verkleinern
als Multiplikativer Vergleich: - doppelt so viel		als Multiplikativer Vergleich: - halb so viel
als Verkettung von Vervielfältigungsoperatoren:		als Verkettung von Vervielfältigungsoperatoren
als Verknüpfung von Größen		als Verknüpfung von Größen
als Fläche eines Rechtecks bzw. formelhafte Multiplikation von Größen		als Fläche eines Rechtecks bzw. formelhafte Multiplikation von Größen
		als Anteil- bzw. Operatorinterpretation (Anteil von einem Ganzen oder einem Anteil) – „von-Ansatz" ($\frac{1}{8}$ *von* 3 Operator mal Größe)
… vergrößert stets		…vergrößert (Multiplikator > 1) oder verkleinert (Multiplikator < 1)

Tabelle 4: Gegenüberstellung der (Grund-)Vorstellungen zur Division für natürliche Zahlen und Bruchzahlen

Grundvorstellungen bei natürlichen Zahlen: Division …		**Grundvorstellungen bei Bruchzahlen /Brüchen: Division ….**
als Aufteilen:		als Aufteilen: nur eingeschränkt *möglich*, wenn Divisor kleiner als Dividend
als Messen:		als Messen: nur eingeschränkt *anschaulich*, wenn Divisor kleiner als Dividend
als Verteilen:		als Verteilen: nur eingeschränkt *anschaulich*, wenn Divisor natürliche Zahl ist
als Umkehroperation der Multiplikation (*spielt in* ℕ *untergeordnete Rolle*)		als Umkehroperation der Multiplikation
als Verkettung von Teilungsoperatoren:		als Verkettung von Teilungsoperatoren
als Verknüpfung von Größen		als Verknüpfung von Größen
als Fläche eines Rechtecks bzw. formelhafte Division von Größen		als Fläche eines Rechtecks bzw. formelhafte Division von Größen
ist nur eingeschränkt möglich: Der Divisor muss Teiler des Dividenden sein		ist für alle Divisoren möglich
ist nur für kleineren Divisor als Dividenden möglich (man kann eine kleinere Zahl nicht durch eine größere teilen)		ist für alle Divisoren möglich
verkleinert stets		vergrößert (Divisor < 1) oder verkleinert (Divisor > 1)

Anschlussfähig sind dagegen nur Grundvorstellungen wie die Skalierung oder die Division als Umkehrung der Multiplikation, die häufig den SuS zum Zeitpunkt der Einführung der Bruchzahlen noch unbekannt sind, bzw. nicht viel genutzt worden sind.

Dass die Verarbeitung dieser notwendigen Vorstellungsumbrüche bzw. generell die erfolgreiche Ausbildung von sinnstiftenden Grundvorstellungen im Rahmen der Bruchrechnung oft nicht gelingt bzw. nicht zur Modellierung von Sachkontexten genutzt werden können, zeigen die absoluten Lösungszahlen empirischer Untersuchungen zu diesem Thema.

Eine adäquate Formulierung von Problemstellungen als Sachaufgabe zu einer vorgegebenen Multiplikationsaufgabe vom Typ *Bruch mal Bruch* konnten in der bereits zitierten Untersuchung von Prediger (2011) nur 4% der untersuchten SuS (7. bis 9. Klasse) finden (Prediger, 2011, S. 75).

Bei strukturell gleicher Aufgabenstellung zur Multiplikation konnten auch nur 41% von türkischen Lehramtsstudierenden für die Primarstufe nach der systematischen Behandlung der Bruchrechnung in einer Untersuchung von Coskun (2019) korrekt einen Sachkontext formulieren, der ein passendes Problem darstellte (Coskun, 2019, 105).

Für die formatgleiche Formulierung von Problemstellungen als Sachaufgabe zu einer vorgegebenen Divisionsaufgabe vom Typ *Bruch durch Bruch* schafften dies fehlerlos sogar nur 11% der Studierenden (Coskun, 2019, 107).

Eine wichtige Erkenntnis moderner Mathematikdidaktik ist daher die Forderung von Prediger (2004) die notwendigerweise bei den SuS auftretenden Vorstellungsumbrüche bzw. Bruchstellen des Verständnisses im Sinne epistemologischer Denkhürden aufzugreifen und nicht zu umschiffen, damit ein fortschreitendes Verständnis im weiteren Bildungsverlauf gesichert werden kann (Prediger, 2004). Hierfür sind aus Ihrer Sicht der Aufbau von (neuen) Grundvorstellungen, das „sich wundern lassen“ und „Wunder aufklären“, die Explikation von Unterschieden zwischen den Zahlenräumen, die Behandlung und Aufdeckung von Fehlvorstellungen und weit verbreiteten Fehlern sowie das Ansprechen der Sinndimension notwendig (ebd.).

Im folgenden Empirieteil der Arbeit soll daher zunächst aufgezeigt werden, wie die Studienausgangslage an der Universität Potsdam sich in Bezug auf das Professionswissen von Lehramtsstudierenden zur Bruchrechnung darstellt, bevor in den weiteren Abschnitten das Aufgreifen von auftretenden Vorstellungsumbrüchen durch die entsprechenden Passagen der Lehrveranstaltung Arithmetik und ihre Didaktik II im Rahmen der erfolgten Beobachtungen näher analysiert wird.

3. Die Studienausgangslage und Forschungsfragen

In der Lehrveranstaltung Arithmetik und ihre Didaktik I wurden bereits die Zahlaspekte der natürlichen Zahlen sowie die Grundvorstellungen der Grundrechenarten im Zahlenraum $\mathbb{N}$ behandelt. In diesem Zusammenhang wurde auch die Frage erörtert, was Grundvorstellungen überhaupt sein sollen.

Im Rahmen der Folgeveranstaltung „Arithmetik und ihre Didaktik II" sind die Vorlesungswochen 5-11 für die Behandlung der Bruchrechnung vorgesehen. Dabei werden inhaltlich folgende Themengebiete umrissen:

- Zahlenraumerweiterung von $\mathbb{Z}\ nach\ \mathbb{Q}$
- Mächtigkeit und Dichte der rationalen Zahlen
- Zahlaspekte von Brüchen, Herstellung von Brüchen, vergröbern und verfeinern
- Addition und Subtraktion von Brüchen
- Multiplikation und Division von Brüchen
- Systembrüche (speziell Dezimalbrüche)
- Bruchrechnung in Japan
- Arithmetische und geometrische Folgen

Vor Beginn des Veranstaltungsblockes wurde der als Web-App von Stampfer und Hell entwickelte Bruchrechentest (Stampfer, 2021a) als Pretest mit den Studierenden der Lehrveranstaltung durchgeführt. Im folgenden Abschnitt 3.1 sollen die Durchführung des Pretests sowie die Methodik der Datenauswertung knapp erläutert werden.

3.1 Durchführung und Auswertung des Bruchrechen-Pretests

Die Durchführung des Pretests erfolgte vom 03.05-05.05.2021 in den 6 angebotenen Übungsgruppen mit den anwesenden Studierenden der Lehrveranstaltung (n=111).

Der Test besteht aus 58 Fragen zur Bruchrechnung, die durchmischt in Bezug auf die drei Aspekte Dichte (density) von Brüchen, Größe (size) von Brüchen und Operieren (operations) mit Brüchen zu beantworten sind. Im Rahmen der Auswertung werden zum Dichte-Teil zwei kongruente Fragen und sieben inkongruente Fragen ausgewertet. Der Testteil zur Größe von Brüchen enthält 13 kongruente Fragen und 13 inkongruente

Fragen. Der Operations-Teil umfasst 9 kongruente Fragen und 14 inkongruente Fragen (zur Unterscheidung kongruenter und inkongruenter Fragen siehe Abschnitt 2.4.2).

Die Daten wurden im Rahmen einer quantitativen Analyse durch Hrn. Stampfer als Entwickler des Tests statistisch vorausgewertet (Stampfer, 2021a). In diesem Rahmen wurde die Häufigkeitsverteilung der richtigen und falschen Antworten der 111 Studienteilnehmer absolut und relativ für den Gesamttest sowie für die in Bezug auf die Analyse zum NNB relevanten Aspekte density, operations und size untersucht. Für die Häufigkeitsverteilungen wurden Boxplots erstellt und für jede Frage der drei Testteile die absoluten Häufigkeiten richtiger und falscher Antworten angegeben. Diese wurden für jeden Untersuchungsteil systematisch kompartimentiert in das Antwortverhalten für die kongruenten und inkongruenten Aufgabenstellungen (ebd.), so dass die Antworthäufigkeiten der ansonsten strukturgleichen Aufgaben direkt verglichen werden können.

Für die vorliegende Untersuchung habe ich die relevanten Daten aus der Ergebnisdarstellung der Web-App (Stampfer, 2021a) extrahiert und für die spätere Ergebnisanalyse aufbereitet (siehe Abschnitt 5.1).

3.2 Ergebnisübersicht des Bruchrechen-Pretests

Die Auswertung des Pretests ergab die in Abbildung 4 dargestellten Lösungshäufigkeiten des Gesamttests und der Testteile zu density, operations und size, welche jeweils für die kongruenten Fragen und die inkongruenten Fragen in Form der jeweiligen Boxplots ausgewiesen werden.

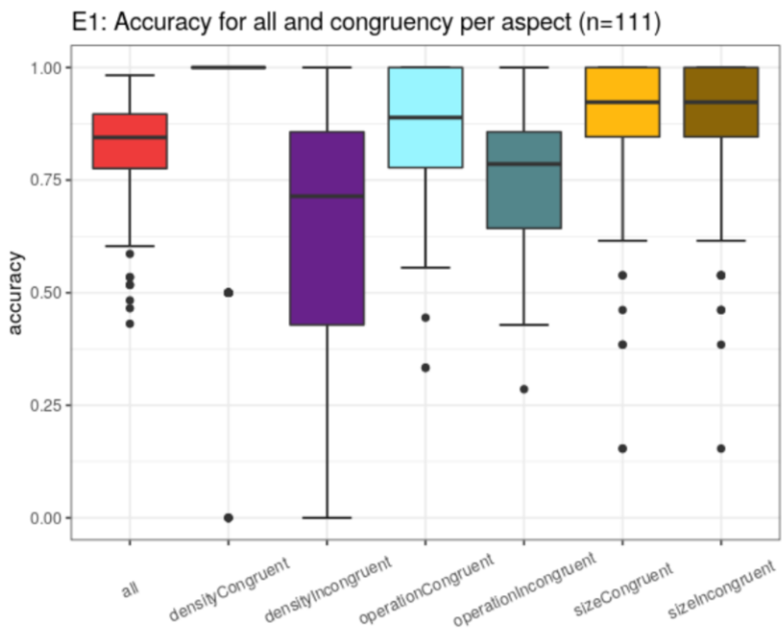


Abbildung 4: Darstellung der Boxplots der Lösungshäufigkeiten zu den Frageblöcken Dichte, Größe und Operationen des NNB-Tests (Pre-Test E1); Quelle: aufbereitete Testergebnisse der Web-App von Stampfer und Hell (Stampfer, 2021a)

3.3 Vorläufige Beurteilung der Ergebnisse des Pretests im Vorfeld der Studie

An der Darstellung der Boxplots der Lösungshäufigkeiten in Abbildung 4 ist summarisch zu erkennen, dass die kongruenten und inkongruenten Aufgaben zum Testteil zur Größe von Brüchen von den Studierenden gleich gut beantwortet wurden. Es scheint daher bei den Studierenden ein solides Grundverständnis für den Bruchzahlbegriff insofern vorzuliegen, dass Zähler und Nenner als eine Einheit der Bruchzahl begriffen werden und nicht Zähler und Nenner separat beim Größenvergleich von zwei Bruchzahlen beurteilt werden. In Bezug auf diesen Betrachtungsaspekt scheint daher bei den Studierenden kein Natural Number Bias (NNB) vorzuliegen. Das ebenfalls in Abbildung 4 dargestellte, deutlich schwächere Abschneiden bei den inkongruenten Aufgaben des Operationsteils im Vergleich zu den kongruenten Aufgaben deutet dagegen darauf hin, dass in diesem

Bereich ein NNB bei einer Teilgruppe von Studierenden vorliegen könnte, was die Behandlung der im Folgenden aufgeführten Forschungsfragen bedeutungsvoll werden lässt.

3.4 Resultierende Forschungsfragen

Auf Grundlage der Ergebnisse zur Multiplikation und Division des Bruchrechentests soll im Weiteren der Frage nachgegangen werden, was in den entsprechenden Vorlesungen und Übungen der Lehrveranstaltung „Arithmetik und ihre Didaktik II“ zum inhaltlichen Fokus Multiplikation/Division von Brüchen getan wird, um Vorstellungsumbrüche aufzugreifen, Grundvorstellungen zu entwickeln und Fehlvorstellungen abzubauen. Dabei soll der Bogen gespannt werden zu den in Abschnitt 2.3.3 erörterten Gestaltungskriterien der fachbezogenen Lehrveranstaltung zum Aufbau des notwendigen Professionswissens. So soll die Lehrveranstaltung in Bezug auf die behandelten didaktischen Grundprinzipien (Gestaltungsprinzip: *Grundprinzipien der Mathematikdidaktik verfolgen,* [Inhalte der Fachdidaktik]) und deren Realisierung (Gestaltungsprinzipien: *pädagogischer Doppeldecker, Lernprozesse von Schüler/-innen erfahrbar machen* [Prozesse der Fachdidaktik]) sowie der Meta-Reflektion zu diesen Gestaltungsprinzipien (*Querschnittsprinzip: „auf einer Metaebene Zusammenhänge explizit machen“)* durch eine qualitative Inhaltsanalyse näher untersucht werden. Dies geschieht im Rahmen folgender Forschungsfrage:

> *1. Welches fachbezogene Wissen zum Aufgreifen von notwendigen Vorstellungsumbrüchen, Aufbau von Grundvorstellungen und zur Behebung von Fehlvorstellungen wurde in den Lehrveranstaltungen wie vermittelt (insbesondere in Bezug zu Vorstellungen zur Multiplikation und Division von Brüchen)?*

Inhaltlich widmet sich die Vorlesung 7 den Grundvorstellungen und Zahlaspekten der positiven rationalen Zahlen und dem didaktischen Umgang damit, während Vorlesung 9 die Multiplikation und Division von Bruchzahlen behandelt, bevor zusammenfassend notwendige Vorstellungsumbrüche expliziert werden. Zur Beantwortung der Fragestellung werden daher im Folgenden die Vorlesung 7, die Vorlesung 9 sowie die zugehörigen Übungen der Lehrveranstaltung auf Ebene des Lehrverhaltens genauer analysiert.

Weiterhin soll eine vergleichende Analyse der Ergebnisse des Pre- und Posttests zur Bruchrechenkompetenz der Studierenden die Auswirkungen der Lehre zum Thema Multiplikation und Division von Brüchen auf das Lernen der Studierenden erörtern. Dabei stellen sich folgende weitere Forschungsfragen:

> *2. Welche Fehlvorstellungen der Studierenden könnten die Ergebnisse des Pretests bedingen?*
>
> *3. Inwiefern schlagen sich die intensiven Lehrtätigkeiten zum Aufbau fachbezogenen Wissens bei den Studierenden in deutlich verbesserten Leistungen im Posttest nieder?*

Im folgenden Abschnitt wird das konkrete Design der Studie beschrieben, deren Durchführung und Auswertung Hinweise zur Beantwortung der soeben vorgestellten Forschungsfragen geben soll.

4. Methodik bzw. Durchführungsbeschreibung

Ausgehend von der allgemeinen theoretischen Einführung und dem konkreten Forschungsinteresse wird im folgenden Abschnitt die Untersuchungsmethodik der Studie zum „Professionswissen von Lehramtsstudierenden: Lehren und Lernen zu notwendigen Vorstellungsumbrüchen bei der Multiplikation/Division von Brüchen“ näher erläutert.

4.1 Untersuchungsdesign der Studie

In Bezug auf die Auswertung des Bruchrechentests erfolgt eine quantitativ-qualitative Analyse der Antwortdaten der Studierenden des Pre- und Posttests, während für die erhobenen Beobachtungsdaten zum Lehreteil eine inhaltlich strukturierende qualitative Inhaltsanalyse durchgeführt wird. Die jeweiligen Studiendesigns sollen daher im Folgenden beschrieben werden.

4.1.1 Quantitativ-qualitative Analyse der Ergebnisse des Bruchrechentests

Die in Tabelle 5 und Tabelle 6 wiedergegebenen Daten zur absoluten Häufigkeit richtiger und falscher Antworten zu den kongruenten und inkongruenten Multiplikations- bzw. Divisionsaufgaben des Pretests werden verglichen in Bezug auf die absolute Anzahl richtiger Lösungen der jeweiligen kongruenten Aufgabe zur inkongruenten Aufgabe.

Die in Abschnitt 3.4 diesbezüglich formulierte Forschungsfrage 2 nach möglichen Fehlvorstellungen, die das Antwortverhalten der Studierenden im Pretest bedingen, leitet sich aus theoretischen Aspekten zum Auftreten des Natural-Number-Bias (NNB) sowie dem aktuellen Forschungsstand zu Grund- und Fehlvorstellungen von SuS und Studierenden im Rahmen der Bruchrechnung ab.

Es werden außerdem die Rohdaten des Tests (Stampfer, 2021b) analysiert, bei denen die Testergebnisse individuell den anonymisierten Testpersonen zugeordnet werden. Im Zuge der Gegenüberstellung von richtigen und falschen Antworten zu den kongruenten und inkongruenten Aufgabenpaaren gleichen Typs wird qualitativ nach auffälligen Mustern von individuellem Antwortverhalten gesucht, welche quantitativ häufiger auftreten und welche auf vorhandene Fehlvorstellungen hindeuten. Auf Basis der erkannten Muster werden Hypothesen zu vorliegenden Fehlvorstellungen in Bezug auf die Auswertung des

Pre-Tests generiert bzw. basierend auf dem Forschungsstand zum Auftreten des NNB benannt.

Die Daten des Post-Tests (vergleiche Tabelle 8 - Tabelle 10) werden allgemein in Bezug auf Forschungsfrage 3 zu den durch die Lehrinhalte verbesserten Leistungen im Vergleich zum Pretest untersucht, indem die absoluten Lösungshäufigkeiten der beiden Testdurchgänge verglichen werden. Weiterhin werden auch die Rohdaten des Posttests (Stampfer, 2021b) speziell in Bezug auf die im Pretest aufgefundenen Fehlermuster analysiert. Zusätzlich werden neu auftretende Auffälligkeiten bzw. Antwortmuster in den Testergebnissen erörtert und dazu mögliche Hypothesen formuliert.

4.1.2 Qualitative Analyse der Beobachtungen zur Lehrveranstaltung

Passend zu der offenen Fragestellung 1 dieser Untersuchung wird ein qualitatives Forschungsdesign gewählt. Die konkrete Fragestellung 1 der Untersuchung (siehe Abschnitt 3.4) ist angebunden an theoretische Aspekte zum Aufbau von Professionswissen von Lehramtsstudierenden sowie den aktuellen Forschungsstand zu Grund- und Fehlvorstellungen sowie notwendigen Vorstellungsumbrüchen von SuS und Studierenden im Rahmen der Zahlenraumerweiterung zu den positiven rationalen Zahlen.

Mit dem Ziel die realen Lehrprozesse durch eine qualitative Inhaltsanalyse zu untersuchen, werden die empirischen Daten dieser qualitativen Forschung durch Beobachtung der entsprechenden Lehrveranstaltungen gewonnen, da eine Befragung von Lehrkräften durch Fragebögen oder durch Leitfadeninterviews keinen objektiven Rückschluss auf das zu analysierende Lehr-Lern-Szenario möglich gemacht hätte. Die Beobachtungen fokussieren dabei auf die fachbezogenen Inhalte des Lehr-Lern-Settings (der Vermittlung des Professionswissens), so dass beispielsweise motivationale Aspekte oder zu beobachtender Einsatz von Gestik und Mimik bei der Dokumentation unberücksichtigt bleiben. Im Rahmen einer „freien Beobachtung“ (Gniewosz, 2015, S. 113) liegt der Fokus der Studie darauf qualitativ analysierbare verbale Kommunikationsdaten möglichst präzise und umfassend festzuhalten (ebd.).

Grundsätzlich sind qualitative Methoden „durch ein hohes Maß an Offenheit gegenüber dem Forschungsgegenstand und den Sichtweisen der befragten/betrachteten Personen gekennzeichnet“ (Reinders & Ditton, 2015, S. 54). Dies ist durch die passive Rolle des Beobachters im Rahmen der „vollständigen“ (Gniewosz, 2015, S. 112) Beobachtung gewährleistet, da durch den Beobachter das Geschehen nicht gelenkt wird und somit nicht durch seine Beteiligung beeinflusst oder verfälscht werden kann (keine Reaktivität zu erwarten) (Gniewosz, 2015). Neben diesem entscheidenden Vorteil von Beobachtungen besteht der Nachteil von Beobachtungen darin, dass es in der Beobachtungssituation nicht möglich ist, Verständnisfragen zu den beobachteten Vorgängen zu stellen, bzw. sich Herangehens- oder Sichtweisen näher erläutern lassen zu können.

Nach einem kurzen Blick auf die Forschungsteilnehmenden in Abschnitt 4.2, soll das konkrete Beobachtungsdesign und der Prozess der Datenerhebung in Abschnitt 4.3 genauer beschrieben werden. Die im Rahmen der Beobachtung erhobenen qualitativen Daten werden im Anschluss inhaltlich strukturierend durch eine qualitative Inhaltsanalyse aufbereitet. Zur genaueren Vorgehensweise bei der Datenanalyse in Bezug auf die Hauptfragestellung wird auf Abschnitt 4.4 verwiesen.

4.2 Charakteristika der Forschungsteilnehmenden

Die beobachteten Untersuchungsteilnehmer sind zum einen Lehrende im Fach Mathematik. Die beobachteten Vorlesungspassagen wurden von Hrn. Prof. Dr. Ulrich Kortenkamp gehalten, die im digitalen Format in Form von Vorlesungsvideos mit eingeblendeter Sprecheransicht vorlagen und analysiert werden konnten. Hr. Prof. Dr. Kortenkamp hat seit dem Wintersemester 2014 die Professur für Didaktik der Mathematik an der Universität Potsdam inne und hat die im Rahmen des PSI-Projektes vorgenommene Lehrveranstaltungskonzeption mitgestaltet. Zusätzlich wurden vier Übungen beobachtet, die von drei verschiedenen wissenschaftlichen Hilfskräften am Institut für Grundschulpädagogik Mathematik geleitet wurden. Die Übungsinhalte wurden vorab jeweils mit der wissenschaftlichen Mitarbeiterin Fr. Dr. Karen Reitz-Koncebovski (ebenfalls in das PSI-Projekt eingebunden) geplant.

Zum anderen wurden Studierende der Universität Potsdam im Studiengang Lehramt für die Primarstufe mit dem Studienfach Mathematik in den Übungen zur Lehrveranstaltung beobachtet. Die Studierenden der Stichprobe befanden sich zum Beobachtungszeitpunkt alle im Bachelorstudium überwiegend im 2. Fachsemester des Studiums. Für diese Studierenden stellt dieser zweite Teil der Lehrveranstaltung „Arithmetik und ihre Didaktik“ im Regelfall (gemäß des exemplarischen Studienverlaufsplans (Universität Potsdam, 2018, S. 520)) nach dem Besuch des ersten Teils der Lehrveranstaltung im ersten Studiensemester die bisher einzige besuchte mathematische

Hochschullehrveranstaltung dar. An den einzelnen Übungen nahmen jeweils zwischen 20-30 Studierende der etwa 120 Studierenden teil, die sich zur Lehrveranstaltung „Arithmetik und ihre Didaktik II“ angemeldet hatten. Der überwiegende Anteil der Studierenden des Seminars war weiblich. Die Übungen fanden im Sommersemester 2021 aufgrund der Coronapandemie ausschließlich digital als Zoom-Meetings statt.

Vor Besuch des Veranstaltungsblockes zur Bruchrechnung hat jeweils ein Großteil der teilnehmenden Studierenden (n=111) den als Web-App von Stampfer und Hell entwickelte Bruchrechentest (Stampfer, 2021a) als Pretest durchgeführt (siehe Abschnitt 3.1).

4.3 Die Datenerhebung via Beobachtung

Während die Gründe für den Einsatz von Beobachtungen im Rahmen des Forschungsvorhabens bereits erörtert wurden, ist im Folgenden genauer zu beschreiben, wie die wissenschaftlichen Beobachtungen zu den Lehrveranstaltungen konzipiert worden sind.

Nach Gniewosz (2015) lassen sich verschiedene Formen von Beobachtungen anhand folgender Dimensionen kategorisieren:

- Rolle des Beobachters
- Grad der Offensichtlichkeit der Beobachtung (offen oder verdeckt)
- Grad der Standardisierung
- Fremd- oder Selbstbeobachtung
- Ort der Beobachtung (Feld oder Labor)
- Technisch vermittelte vs. unvermittelte Beobachtung
- Grad der Reduktion
- Anzahl der Beobachter (Gniewosz, 2015, S. 112-115)

Die erfolgten Beobachtungen lassen sich demnach in Bezug auf diese Beobachtungsformen wie folgt charakterisieren:

Sowohl die technisch vermittelt beobachteten Vorlesungsvideos als auch die unvermittelt beobachteten Übungen wurden ausschließlich durch den Verfasser der Arbeit beobachtet.

In beiden Beobachtungsszenarien erfolgte für den Beobachtungsschwerpunkt Sprache eine möglichst unreduzierte Beobachtung. Bei dieser sogenannten „*isomorphen Beschreibung"* ist es das Ziel, Informationen möglichst vollständig zu erfassen, diese möglichst wenig zu reduzieren und den Beobachtungsgegenstand in seiner ideographischen Qualität zu erhalten" (Gniewosz, 2015, S. 114). Alle Beobachtungen erfolgten im Feld als Fremdbeobachtungen. In Bezug auf eine mögliche Standardisierung der Beobachtungen wurde mit dem Ziel der qualitativen Inhaltsanalyse des gesprochenen Wortes eine freie, unstandardisierte Beobachtung durchgeführt, bei der möglichst umfassend und präzise die Beobachtungen dargestellt und festgehalten werden (Gniewosz, 2015). Aufgrund ethischer Überlegungen erfolgten die Beobachtungen in den Übungen offen und nicht verdeckt, damit wird in Kauf genommen, dass das Verhalten der Beobachteten durch das Wissen der Beobachtung (geringfügig) beeinflusst wird (ebd.). Auch die Beobachtung der videographierten Vorlesungen erfolgte in der Hinsicht offen, dass das Forschungsvorhaben dem Dozierenden bekannt ist. Prinzipiell wurden die Beobachtungen in den Übungen in Bezug auf die Rolle des Beobachters als *vollständige Beobachtung* ausgeführt. Damit ist gemeint, dass der Forscher zwar am Ort der Beobachtung (hier der virtuelle Zoom-Raum) anwesend ist, aber nach der Vorstellung seines Vorhabens passiv bleibt und nicht mit den anwesenden Personen interagiert (Gniewosz, 2015). Für die Beobachtung der Vorlesungsvideos kann weitergehend von einer *Nicht-Teilnahme* gesprochen werden, da der Forscher sich nicht am Ort des Geschehens befindet (ebd.).

Durchführungsbeschreibung:

Zu Beginn des Forschungsvorhabens erfolgten im Mai 2021 explorative Beobachtungen der videographierten Vorlesungsvideos zu den Vorlesungen 05-09 der Lehrveranstaltung „Arithmetik und ihre Didaktik II". Dabei wurde identifiziert, welche Vorlesungsabschnitte eine inhaltliche Relevanz für den Aufbau des Professionswissens zu Grund- und Fehlvorstellungen bzw. notwendigen Vorstellungsumbrüchen bei der Multiplikation und Division von Bruchzahlen besitzen sowie bereits erste interessante Gestaltungselemente der Vorlesungen identifiziert und dokumentiert. Im Anschluss erfolgte die Beobachtung der Übung 07 zweimal am 26.05. 2021 bei den Übungsleiterinnen X und Y sowie die Teilnahme an der Übung 09 am 08. und 09.06.2021 bei den Übungsleiterinnen Y und Z. Nach Abstimmung mit den Kursleiterinnen war eine Videographie der beobachteten Übungen nicht erwünscht. Die Teilnahme an den

Übungen erfolgte als vollständiger Beobachter, nachdem ich meinen Beobachtungswunsch für die Studierenden zu Beginn der Übung persönlich offengelegt habe. Im Rahmen der kurzen Vorstellung meiner Person und meines Anliegens mit Ton und Videobildübertragung wurde den Teilnehmenden der Übungen vollständige Anonymität zugesichert und die Möglichkeit für Fragen/Einwendungen gegeben. Der vorab ausformulierte exakte Vorstellungstext ist in Anhang A wiedergegeben. Im Anschluss schaltete ich die Ton- und Videowiedergabe aus und nahm an der gemeinsamen Videokonferenz sowie an mehreren Break-Out-Sessions in Kleingruppen als vollständiger Beobachter teil. Eine Ausnahme von dieser Regel erfolgte in der Übung vom 09.06. bei der ich aktiv von der Kursleiterin um meine fachliche Einschätzung zu einer diskutierten Fragestellung gebeten wurde. Nach meiner kurzen Stellungnahme zu dem Sachverhalt, nahm ich wieder meine Rolle als vollständiger Beobachter ein. Während der digital abgehaltenen Übungen hatte die Mehrzahl der Teilnehmer*innen ihr Videobild angeschaltet, es gab aber auch Studierende, die ihr Videobild nicht aktiviert hatten. Gleiches galt für die Beobachtung der Break-Out-Sessions. In diesen Kleingruppen á 3-4 Studierenden waren meist die Videokameras der aktiven Gruppenteilnehmer*innen eingeschaltet, in einem Fall wurden aber auch die zwei Break-Out-Sessions der Übung 9 bei abgeschalteter Kamera durchgeführt.

Es erfolgte eine parallele möglichst wortgetreue und in Teilen sinngemäße Protokollierung des Gesprochenen der Übungsteilnehmer*innen in einem Word-Protokoll, dabei wurden inhaltlich nicht relevante Passagen zum Teil ausgelassen. Da gerade in den aktiven Diskussions- und Arbeitsphasen der Studierenden die Wortbeiträge durch längere Pausen unterbrochen waren, war eine detaillierte parallele Transkription meist möglich. Für die Beiträge der Übungsleiterinnen mussten teilweise sinngemäße Verkürzungen des Gesagten dokumentiert werden. Im zweiten Übungsblock wurde die Protokollierung durch die parallele Nutzung der Diktierfunktion von Word unterstützt, so dass hier noch wortgetreuer dokumentiert werden konnte. Alle Beobachtungsprotokolle zu den Übungen wurden direkt im Anschluss um einen Gesamteindruck ergänzt und am gleichen Tage überarbeitet und nach Abgleich mit den Übungsaufgaben und Übungsfolien (besonders in Bezug auf die besprochenen Brüche und Rechenaufgaben) final redigiert. Im Juni- September 2021 erfolgte die Transkription der durch die erste Videographie ausgewählten Vorlesungsvideos S02E07.3, S02E07.4, S02E07.5, S02E07.6 (7. Vorlesung), S02E08.1 (8. Vorlesung) sowie S02E09.1, S02E09.2 und

S02E09.3 in der Analyse-Software MaxQDA. Dabei wurden die von Rädiker und Kuckartz in (Rädiker & Kuckartz, 2019, S. 44-45) aufgeführten Transkriptionsregeln beachtet.

Weiterhin erfolgte in dem Zeitraum die vollständige Anonymisierung der Beobachtungsprotokolle, welche im Anschluss ebenfalls in MaxQDA importiert wurden. Zusätzlich wurden die Vorlesungs- und Übungsfolien zu den Veranstaltungen in MaxQDA importiert, um auch diese inhaltsanalytisch zu bewerten. Eine Einbindung der Hausaufgabenblätter in die Analyse erfolgte nicht, aus dem Grund, dass diese zum Zeitpunkt der Übungen durch die Studierenden noch nicht bearbeitet worden sind und somit keinen Lehrinput vor Beobachtung der Geschehnisse in den Übungen darstellten.

4.4 Methodik der Datenauswertung

Zunächst soll kurz in abstrakter Form beschrieben werden, welche grundsätzlichen „Vorgehensweisen systematischen, d. h. theoriegeleiteten und regelgeleiteten Textverstehens und Textinterpretierens“ (Mayring, 2015, S. 65) bei der Datenauswertung angewandt werden, bevor die Vorgehensweise konkreter auf die Forschungsdaten des Lehrverhaltens bezogen wird.

Allgemein unterscheidet Mayring (2015) als Grundformen des Interpretierens die Zusammenfassung, die Explikation sowie die Strukturierung. Anhand einer grundsätzlichen Unterscheidung in induktive und deduktive Verfahren strukturiert Mayring die beschriebenen drei Grundformen in verschiedene Analyseformen aus. Dabei unterscheidet er für die hier interessierende Grundform „Strukturierung“ (Mayring, 2015, S. 99) folgende Analyseformen: Formale vs. Inhaltliche vs. Typisierende vs. Skalierende Strukturierung (ebd.).

Die Kategorienbildung für die qualitative Inhaltsanalyse kann entweder induktiv auf Grundlage des vorliegenden Materials erfolgen, oder deduktiv anhand eines vor der Datenerhebung festgelegten Kategoriensystems (Mayring, 2015). Während Mayring sehr explizit die deduktive Form der Kategorienbildung als theoriebezogen aufführt (Kategorien sind bestimmt „durch Voruntersuchungen“, „dem bisherigen Forschungsstand“, „neu entwickelten Theorien oder Theoriekonzepten“ (Mayring, 2015, S. 85), ist Kuckartz (2018) hier pragmatischer, indem er deduktive und induktive Kategorienbildung unterscheidet auf Basis der Frage, ob die Kategorien a-priori (deduktiv) anhand einer bereits vorhandenen inhaltlichen Systematisierung gebildet werden oder ausschließlich anhand des vorliegenden Materials (induktiv). Dabei ist für Kuckartz gleichgültig, ob die bereits a-priori vorhandene Systematisierung an einer Theorie orientiert ist oder beispielsweise lediglich an der Struktur des Interviewleitfadens oder der Fragen eines Fragebogens festgemacht wird (Kuckartz, 2018, S. 64). Sehr oft werden in Forschungsprojekten Mischformen der Entwicklung des Kategoriensystems (oft als deduktiv-induktive Kategorienbildung bezeichnet) angewendet (Kuckartz, 2018, S. 95).

Für die im Rahmen dieses Forschungsvorhabens erhobenen Beobachtungsdaten bot sich in erster Linie an eine inhaltlich strukturierende Analyse vorzunehmen, da das Forschungsinteresse weder darin lag verschiedene Typisierungen von Lehrenden, Studierenden oder Aspekten vorzunehmen noch eine skalierende bzw. evaluative Strukturierung des Materials zu erreichen. Das Forschungsinteresse galt den inhaltlichen Aspekten, die von den Lehrenden aufgeführt werden würden, mit dem Ziel diese strukturierend zusammenzufassen für eine gute Übersicht der Ergebnisse. Es erfolgte daher eine inhaltlich-strukturierende qualitative Inhaltsanalyse nach dem Ablaufschema von Kukartz (2018), welches in Abbildung 5 dargestellt ist.

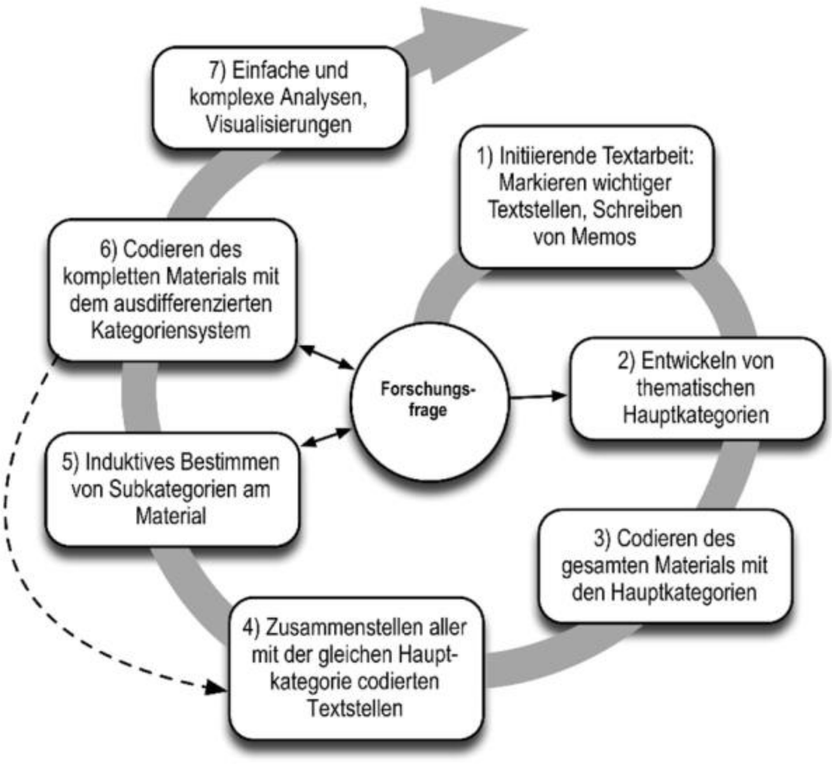


Abbildung 5: Ablaufschema einer inhaltlich strukturierenden Inhaltsanalyse; Quelle: (Kuckartz, 2018, S. 100)

Grundsätzlich kann die Beurteilung der Lehrprozesse in Bezug auf die in Abschnitt 3.4 formulierte Fragestellung 1 als deduktiv-induktive Analyse angesehen werden. Das Hauptaugenmerk liegt bei diesem Auswertungsteil auf der Umsetzung der a-priori (anhand der in Abschnitt 2.3 geschilderten Theoriebezüge) formulierten Gestaltungskriterien von Lehrveranstaltungen zum Aufbau fachbezogenen Wissens im Rahmen des PSI-Projektes (deduktive Kategorienbildung) sowie der induktiven Ausdifferenzierung des Kategoriensystems am Material in Bezug auf die hier ausführlich besprochenen Grund- und Fehlvorstellungen. Im Anschluss an die initiierende Textarbeit an den dokumentierten Lehrveranstaltungspassagen erfolgte daher auf Grundlage des aktuellen Kodierleitfadens (Reitz-Koncebovski, 2021) zum PSI-Projekt (basierend auf der Handreichung zum Projekt (Reitz-Koncebovski, 2019)) für die im Rahmen dieses Forschungsvorhabens interessierenden Gestaltungsprinzipien eine Codierung des gesamten Materials (Lehrpassagen) anhand der in Abbildung 6 dargestellten Hauptkategorien und Subkategorien erster Ebene.

Für diese Kategorien gibt der zitierte Kodierleitfaden (Reitz-Koncebovski, 2021) bereits Kategoriendefinitionen sowie Ankerbeispiele vor. Demnach ist der Bereich Thematisierung von Vorstellungsumbrüchen in der Kategoriedefinition „G: typische Fehler/Fehlvorstellungen“ (Reitz-Koncebovski, 2021, S. 2) bereits enthalten. Bei der Übernahme des Kategoriensystems in Max-QDA wurde das inhaltsbezogene fachdidaktische Gestaltungskriterium „Grundprinzipien der Mathematikdidaktik verfolgen“ sowie die dazugehörige Metaebene in einer Farbe (orange) codiert, während die prozessbezogenen fachdidaktischen Gestaltungskriterien „Pädagogischer Doppeldecker“ und „Lernprozesse von Schüler*innen erfahrbar machen“ sowie deren spezifische Metaebenen in einer anderen Farbe (gelb) codiert wurden.

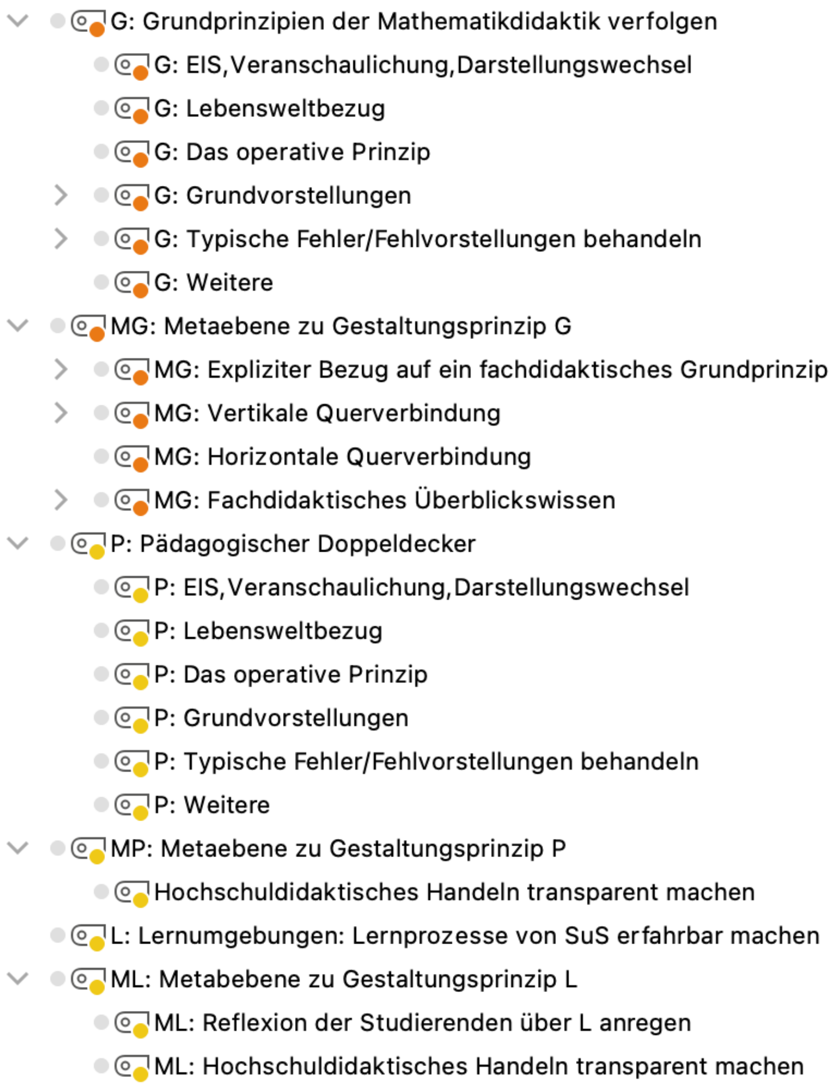


Abbildung 6: in Max-QDA übernommenes A-Priori-Kategoriensystem zur Beurteilung des Lehrverhaltens im Rahmen der Forschungsfrage 1; Quelle: (Reitz-Koncebovski, 2021)

Bevor eine weitere Analyse des Materials erfolgte, war das anvisierte Abstraktionsniveau der Untersuchung zu explizieren. Da im Fokus der Untersuchung Grundvorstellungen, Fehlvorstellungen sowie notwendige Vorstellungsumbrüche liegen, bestimmte sich das Abstraktionsniveau für diese Facetten (Subkategorien) der Grundprinzipien der Mathematikdidaktik auf einem spezifischeren Niveau als für den Rest der behandelten Kategorien. Für diese Untersuchung der Vorstellungen war zu unterscheiden, speziell welche Grundvorstellungen, Fehlvorstellungen und Vorstellungsumbrüche in welcher Art und Weise in den Lehrveranstaltungen behandelt wurden. Für diese Gegenstandsbereiche des Forschungsinteresses schloss sich daher nach der grundsätzlichen ersten Zuordnung des Materials zu diesen Themenbereichen (Schritt 4: Zusammenstellung der codierten Textstellen) eine induktive Subkategorienbildung auf dem soeben geschilderten

Abstraktionsniveau an. Für die übrigen detektierten Codierungen zur Lehre lag das Abstraktionsniveau direkt auf der Ebene der bereits vorliegenden (Sub-) Kategorien. Im Rahmen dieses Analyseteils ist hauptsächlich von Interesse, ob und wie oft die einzelnen definierten Kategorien im Rahmen der Lehrveranstaltungsdurchführung durch die Lehrenden umgesetzt werden, ob also die herauskristallisierten Gestaltungsprinzipien guter fachbezogener Lehre auch umgesetzt werden. Hier war also mit dieser A-priori formulierten Subkategorienebene das gewünschte Abstraktionsniveau bereits erreicht.

Die Ausarbeitung der induktiv ermittelten Subkategorien erfolgte zunächst durch die Codierung folgender Auswahleinheiten:

- Beobachtung aller Vorlesungsvideos (Folien und gesprochenes Wort)
- Beobachtung der Übung 7 und 9 von Übungsleiterin Y in Bezug auf das Lehrverhalten (Folien, schriftliche Aufgabenstellungen und gesprochenes Wort).

In dem Prozess der induktiven Kategorienbildung wurden auch Kategoriendefinitionen vorgenommen, um einzelne Kategorien sicherer voneinander abgrenzen zu können, welchen zum Teil bei Notwendigkeit Ankerbeispiele hinzugefügt wurden. Das für die Analyse des Lehreteils resultierende Codebuch ist in Anhang B vollständig aufgeführt.

Mit dem final ausgebildeten Kategoriensystem wurde dann abschließend das gesamte Material des Lehreteils codiert. Während an die Bildung eines Kategoriensystems, als individueller Akt der Konstruktion, kein Anspruch auf Übereinstimmung zwischen verschiedenen Codierern gestellt werden kann, sollte das ausgearbeitete Kategoriensystem so exakt definiert sein, dass die Codierung von Daten von verschiedenen Codierenden passend zum Kategoriensystem (annähernd) das gleiche Ergebnis liefern würde (Kuckartz, 2018, S. 206).

4.5 Gütekriterien der Untersuchung

Um den Ansprüchen einer qualitativen Forschung im Rahmen dieser Forschungsarbeit gerecht zu werden, werden folgende Gütekriterien, die von Mayring (2010) beschrieben werden, bei der Durchführung sowie der Auswertung des Forschungsprozesses berücksichtigt. Zunächst wird das Kriterium der *Verfahrensdokumentation* (Mayring, 2002, S. 144f.) dahingehend eingehalten, dass der gesamte Forschungsprozess im vorangehenden Abschnitt der Masterarbeit ausführlich und nachvollziehbar beschrieben wird. Es werden alle wichtigen Überlegungen und Vorgehensweisen erörtert, um diese in die folgende Interpretation der Daten mit einfließen zu lassen. Das Gütekriterium der *argumentativen Interpretationsabsicherung* (Mayring, 2002, 145) wird durch die Beachtung der theoretischen Hintergründe (bereits verfügbare Studien) und der Einbringung eigener Erfahrungen gesichert. Durch die genaue Notation der Vorgehensweisen können mögliche Unschlüssigkeiten in der Interpretation geklärt und verbessert werden. Grundsätzlich wird darauf geachtet, dass die Interpretation schlüssig ist und mögliche Alternativdeutungen bedacht und überprüft werden. Die *Regelgeleitetheit* (Mayring, 2002, S. 145-146) ergibt sich automatisch durch die Beschreibung der Vorgehensweisen und dem systematischen schrittweisen Ablauf des Forschungsprozesses. Zur *Nähe zum Gegenstand* (Mayring, 2002, S. 146) lässt sich sagen, dass ich selbst als Lehramtsstudierender sehr nahe am zu untersuchenden Feld bin, so dass in Bezug auf die Studierenden ein offenes, gleichberechtigtes Verhältnis hergestellt werden kann. Das Gütekriterium der *kommunikativen Validierung* (Mayring, 2002, S. 147) wird in diesem Forschungsprojekt vernachlässigt, da es den Rahmen der Forschungsarbeit sprengen würde, den Erforschten nochmals die Ergebnisse und Schlüsse der Arbeit zur Diskussion vorzulegen. Auch die Einhaltung der *Triangulation* (Mayring, 2002, S. 147-148) muss im Rahmen dieser Untersuchung vernachlässigt werden, da der Aufwand einer finalen Codierung von Daten der Untersuchung durch weitere Codierende zur Prüfung der Intercoder-Übereinstimmung (Kuckartz, 2018, S. 210) im Rahmen einer selbständig zu verfassenden Masterarbeit nicht gerechtfertigt ist. .

5. Ergebnisse und Interpretation der Ergebnisse

Die sich hier anschließende Ergebnisdarstellung sowie deren Interpretation umfasst die vier inhaltlich unterscheidbaren Teile der quantitativ-qualitativen Analyse des Bruchrechen-Pretests (Abschnitt 5.1), der qualitativen Inhaltsanalyse zur Vermittlung des fachbezogenen Wissens (Abschnitt 5.2), der anschließenden Analyse diskutierbarer Lehrinhalte (Abschnitt 5.3) sowie der Analyse des Bruchrechen-Posttests (Abschnitt 5.4). Wie im Rahmen der Ergebnisdarstellung von qualitativen Inhaltsanalysen üblich, erfolgt dabei der Übersichtlichkeit halber eine Darstellung der Ergebnisse (qualitativer und quantitativer Art) mit gleichzeitiger qualitativer Bewertung/Interpretation der Ergebnisse (Kuckartz, 2018) für jeden Themenabschnitt. Leitend für die Ergebnisdarstellung und Interpretation der erfolgten qualitativen Inhaltsanalyse, welche im Abschnitt 5.2 dokumentiert wird, ist dabei die Frage, was zu dem Thema Gestaltungsprinzipien und insbesondere zu den Grund- und Fehlvorstellungen im Rahmen der Lehre alles gesagt wird, allerdings soll darüberhinausgehend auch aufgezeigt werden, „was (…) nicht oder nur am Rande zur Sprache [kommt]“ (Kuckartz, 2018, S. 118).

Im Anschluss werden die wichtigsten Untersuchungsergebnisse extrahiert und im Kapitel 6 „Zusammenfassende Diskussion der Ergebnisse“ komprimiert dargestellt.

5.1 Detailanalyse des Bruchrechen-Pretests

Aufgrund des Interesses der Arbeit an den Grundvorstellungen zur Multiplikation und Division, werden die Ergebnisse der dazu passenden Aufgaben aus dem Operations-Teil des Testes im Folgenden wiedergegeben.

Die Tabelle 5, Tabelle 6 und Tabelle 7 stellen die Aufgaben und Lösungshäufigkeiten jeweils für die kongruenten und inkongruenten Aufgaben separat für die Multiplikation, die Division sowie die Modellierung von Sachaufgaben in proportionalen Kontexten dar, welche für diese Untersuchung von Interesse sind.

Für den Bereich der Multiplikation/Division stützen die aufbereiteten Daten aus Tabelle 5 und Tabelle 6 die Annahme des Vorliegens eines NNB zunächst nur zum Teil. Während bei den Multiplikationsaufgaben keine geringere Lösungshäufigkeit in Summe bei den inkongruenten Aufgaben zu erkennen ist (zum Teil wurden sogar mehr inkongruente

Aufgaben richtig gelöst), ist der postulierte Trend bei den Divisionsaufgaben deutlicher. Hier wurden jeweils mehr Aufgaben im inkongruenten Teil des Tests falsch gelöst.

Tabelle 5: Multiplikationsaufgaben und absolute Lösungshäufigkeiten des Pretests

Aufgaben-nummer:	**Aufgabentext:**	**Absolute Anzahl der Studierendenantworten**	
		falsch	**richtig**
kongruente Aufgaben:			
36	Ohne das exakte Ergebnis zu berechnen: Glauben Sie, dass $6{,}7 \cdot 1{,}3$ größer oder kleiner als 6,7 ist?	10	101
37	Ohne das exakte Ergebnis zu berechnen: Glauben Sie, dass $7{,}6 \cdot \frac{30}{24}$ größer oder kleiner als 7,6 ist?	19	92
inkongruente Aufgaben:			
45	Ohne das exakte Ergebnis zu berechnen: Glauben Sie, dass $6{,}8 \cdot 0{,}2$ größer oder kleiner als 6,8 ist?	16	95
46	Ohne das exakte Ergebnis zu berechnen: Glauben Sie, dass $6{,}6 \cdot \frac{3}{6}$ größer oder kleiner als 6,6 ist?	16	95

Tabelle 6: Divisionsaufgaben und absolute Lösungshäufigkeiten des Pretests

Aufgaben-nummer:	**Aufgabentext:**	**Absolute Anzahl der Studierendenantworten**	
		falsch	**richtig**
kongruente Aufgaben:			
38	Ohne das exakte Ergebnis zu berechnen: Glauben Sie, dass $8{,}9 : 1{,}8$ größer oder kleiner als 8,9 ist?	10	101
39	Ohne das exakte Ergebnis zu berechnen: Glauben Sie, dass $2{,}2 : \frac{16}{14}$ größer oder kleiner als 2,2 ist?	40	71
inkongruente Aufgaben:			
47	Ohne das exakte Ergebnis zu berechnen: Glauben Sie, dass $1{,}5 : 0{,}3$ größer oder kleiner als 1,5 ist?	32	79
48	Ohne das exakte Ergebnis zu berechnen: Glauben Sie, dass $2{,}3 : \frac{2}{9}$ größer oder kleiner als 2,3 ist?	43	68

Besonders eklatant ist der Anstieg der falschen Lösungen beim Vergleich der kongruenten und inkongruenten Modellierungsaufgaben, welche in Tabelle 7 abgebildet werden. Die Lösung der inkongruenten Modellierungsaufgaben zu Proportionen war knapp 44% der 111 Studierenden nicht möglich, während bei den beiden kongruenten Aufgaben im Mittel (nur) 12% der Studierenden zum falschen Ergebnis kamen.

Tabelle 7: Sachaufgaben in prop. Kontexten und absolute Lösungshäufigkeiten des Pretests

Aufgaben-nummer:	**Aufgabentext:**	**Absolute Anzahl der Studierendenantworten**	
		falsch	**richtig**
kongruente Aufgaben (multiple-choice):			
43	Um $\frac{84}{8}$ Quadratmeter Land zu bewässern werden 158 Liter Wasser benötigt. Wie viele Liter benötigt man für $\frac{21}{8}$ Quadratmeter? Lösungsmöglichkeiten: $158:4; 158 \cdot 4; 4:158$	9	102
44	Mit $\frac{39}{6}$ Liter Farbe können 32 Quadratmeter bemalt werden. Wie viele Quadratmeter können mit $\frac{13}{6}$ Liter Farbe bemalt werden? Lösungsmöglichkeiten: $3:32; 32:3; 32 \cdot 3$	18	93
inkongruente Aufgaben (multiple-choice):			
57	Mit 1 Teelöffel Salz können $\frac{1}{4}$ Kilogramm Pommes gesalzen werden. Wie viele Teelöffel Salz benötigt man für $\frac{11}{3}$ Kilogramm Pommes? Lösungsmöglichkeiten: $\frac{1}{4}:\frac{11}{3}; \frac{11}{3}:\frac{1}{4}; \frac{11}{3} \cdot \frac{1}{4}$	48	63
58	Aus $\frac{1}{8}$ Liter Sirup können 1 Liter Limonade hergestellt werden. Wie viele Liter Limonade können aus $\frac{14}{5}$ Liter Sirup hergestellt werden? Lösungsmöglichkeiten: $\frac{1}{8}:\frac{14}{5}; \frac{14}{5}:\frac{1}{8}; \frac{14}{5} \cdot \frac{1}{8}$	48	63

Analysiert man die summarischen Ergebnisse zur Multiplikation und Division etwas mehr im Detail, fällt auf, dass beim Teilen durch einen Dezimalbruch ein ganz erheblicher Anteil der Studierenden der Fehlvorstellung ‚Division verkleinert immer' zu erliegen scheint, hier steigt die Anzahl falscher Antworten von 10 auf 32 durch den Wechsel von der kongruenten zur inkongruenten Fragestellung. Weiterhin ist erstaunlich, dass schon bei der eigentlich noch kongruenten Divisionsaufgabe $2{,}2:\frac{16}{14}$ mit einem unechten Bruch als Divisor (hier verkleinert die Division, weil der Divisor größer als 1 ist) 40 von 111

Studierenden die Frage nach der Vergrößerung falsch beantworten, wohingegen dies bei der Dezimalschreibweise nur 10 Studierende tun. Eine Hypothese für dieses Antwortverhalten wäre, dass die Studierenden aufgrund ihrer schulischen Bruchrechenerfahrungen die ebenso übergeneralisierte Vorstellung im Kopf haben, dass die Division zwar im Prinzip verkleinert außer beim Rechnen mit gemeinen Brüchen, dort vergrößere die Division, weil es bei der Bruchrechnung genau andersherum ist (naive Merkregel für das Operieren mit gemeinen Brüchen).

Eine ähnliche Fehlvorstellung wurde für die Multiplikation (dort, dass die Multiplikation bei Brüchen immer verkleinert) in der Analyse der Studie von (Prediger, 2011) postuliert (siehe hierzu auch Abschnitt 2.5.9). Mit dieser analogen Fehlvorstellung für die Multiplikation wäre auch der deutliche Anstieg der falschen Antworten bei der kongruenten Multiplikationsaufgabe mit einem unechten Bruch statt einer Dezimalzahl erklärbar.

Auf Grundlage dieser aufgestellten Hypothese erfolgt eine Detailanalyse der durch Hrn. Stampfer im Excel-Format bereitgestellten Rohdaten (Stampfer, 2021b) in Bezug auf die Zuordnung der richtigen und falschen Antworten zu einzelnen Personen, um dabei wiederkehrende Muster zu identifizieren, die als spezifische Fehlvorstellung gedeutet werden können.

Es zeigt sich dabei durch die Analyse der Multiplikations- und Divisionsaufgaben, dass es eine Gruppe von Studierenden gibt, die übereinstimmend für alle vier Multiplikations- (5 Studierende) und alle vier Divisionsaufgaben (13 Studierende) die kongruenten Aufgaben richtig aber die inkongruenten falsch löst. Hier kann mit hoher Wahrscheinlichkeit davon ausgegangen werden, dass folgende Fehlvorstellungen vorliegen:

- Fehlvorstellung 1: Multiplikation vergrößert immer (klassischer NNB-Fehler)
- Fehlvorstellung 2: Division verkleinert immer (klassischer NNB-Fehler)

Weiterhin lassen sich für die Multiplikationsaufgaben zwei Studierende finden, die die kongruente Dezimalbruchaufgabe richtig lösen und die inkongruente falsch lösen (genau wie beim NNB postuliert, da die Multiplikation generell vergrößert) aber bei den Aufgaben mit einem gemeinen Bruch als Multiplikand statt einem Dezimalbruch genau andersherum zum Ergebnis kommen. Die kongruente Aufgabe wird falsch gelöst, aber die inkongruente richtig. Für die Divisionsaufgaben trat dieser Fall analog auch einmal auf. Hinter diesem Fehlermuster könnten, wie bei Analyse der Gesamtergebnisse angenommen, folgende Fehlvorstellungen stecken:

- Fehlvorstellung 3: Generell vergrößert die Multiplikation außer beim Rechnen mit gemeinen Brüchen, hier ist es andersherum, hier verkleinert die Multiplikation (naive Merkregel aus dem kalkülorientierten Unterricht)
- Fehlvorstellung 4: Generell verkleinert die Division außer beim Rechnen mit gemeinen Brüchen, hier ist es andersherum, hier vergrößert die Division (naive Merkregel aus dem kalkülorientierten Unterricht)

In sechs weiteren Fällen für die Multiplikationsaufgaben und für 13 Fälle bei den Divisionsaufgaben trat folgendes Lösungsverhalten auf: Sowohl die kongruente als auch die inkongruente Dezimalbruchaufgabe wurde richtig gelöst (es wurde also erkannt, dass die Division bei einem Divisor kleiner als 1 vergrößert, bzw. die Multiplikation verkleinert), während die kongruenten Aufgaben mit unechtem gemeinen Bruch (Divisor größer als 1) falsch gelöst aber die inkongruenten Aufgaben mit echtem gemeinen Bruch (Divisor kleiner als 1) richtig gelöst werden. Hier wäre ein plausibler Erklärungsansatz, dass folgende Fehlvorstellung vorliegt:

- Fehlvorstellung 5: Es treten Unsicherheiten bei der Zuordnung von gemeinen Brüchen auf, ob diese größer oder kleiner als 1 sind, bzw. werden unechte Brüche als kleiner 1 interpretiert.

Eine anschauliche Erklärung für diese Fehlvorstellung lieferte mir meine Tochter, die ich am Ende der 5. Klasse (vor Einführung der systematischen Bruchrechnung) durch die Frage, ob 8/9 oder 7/6 größer wären zum Nachdenken über Brüche brachte. Sie antwortete: „Brüche hören sich immer so an, als ob sie kleiner als 1 sind, weil es sind ja Bruchteile. Es sind ja nur Sechstel und keine Ganzen mehr“ (Nachdenken über 7/6 am 25.06.2021).

Mit dieser intuitiven 5. Fehlvorstellung wäre für die Studierendenantworten nachvollziehbar, dass die Division durch den unechten Bruch ebenfalls vergrößern müsste, genau wie die Division durch den echten Bruch. Bei den Dezimalzahlen als Multiplikand/Divisor wird dagegen direkt korrekt erkannt, ob die Zahl größer oder kleiner als 1 ist und dementsprechend die Operation richtig ausgeführt.

An diesen Interpretationen der Studierendenantworten zeigt sich neben dem Auftreten des NNB durch Fehlvorstellung 1 und 2 das Auftreten der ebenfalls im Theorieteil erwähnten Fehlvorstellung 3 des kalkülorientierten Unterrichts (Fehlvorstellung 4 analog dazu) während die Fehlvorstellung 5 bisher im Theorieteil nicht explizit beleuchtet wurde, da diese in der zu Grunde liegenden Literatur nicht betrachtet wurde.

Weiterhin zeugt der hohe prozentuale Anteil falsch gelöster Modellierungsaufgaben davon, dass anscheinend viele Studierende nur kalkültechnisch die Bruchrechnung beherrschen (oder auch nicht), aber vermutlich vor der universitären Behandlung der Bruchrechnung keine verankerten Grundvorstellungen zum Arbeiten in dem neuen Zahlenraum vorlagen.

In Summe bestätigen die Testergebnisse so, dass es zur Ausbildung des notwendigen Professionswissens im Bereich der Bruchrechnung nicht nur nötig ist, Wissen über Grundvorstellungen zu vermitteln (zu lehren), sondern dass durch entsprechend gestützte Lernprozesse bei den Studierenden zum Teil auch noch Grundvorstellungen auf- und Fehlvorstellungen abgebaut werden müssen.

5.2 Die Analyse der Vermittlung fachbezogenen Wissens

In diesem Abschnitt der vorliegenden Arbeit sollen die Ergebnisse der qualitativen Inhaltsanalyse zur Forschungsfrage *Welches fachbezogene Wissen zum Aufgreifen von notwendigen Vorstellungsumbrüchen, Aufbau von Grundvorstellungen und zur Behebung von Fehlvorstellungen wurde in den Lehrveranstaltungen wie vermittelt (insbesondere in Bezug zu Vorstellungen zur Multiplikation und Division von Brüchen)?* vorgestellt, diskutiert und interpretiert werden. Dafür wird zunächst in folgender Abbildung 7 die Codierung der gesamten Daten mit den Codierungshäufigkeiten für die einzelnen Hauptkategorien bzw. die erste Subkategorienebene dargestellt.

Die ersten fünf Hauptkategorien waren durch das bereits erstellte Kategoriensystem (Reitz-Koncebovski, 2021) deduktiv vorgegeben. Im Rahmen der weiteren Analyse der Daten zum Lehreteil wurden drei Hauptkategorien induktiv ergänzt, so dass sich final das in Abbildung 7 dargestellte Kategoriensystem ergab. Anhand dieser rein quantitativen Darstellung der absoluten Häufigkeiten jeder Kategoriencodierung der in Summe n=314 Codierungen wird zunächst deutlich, welche Kategorien im Fokus der Untersuchung standen.

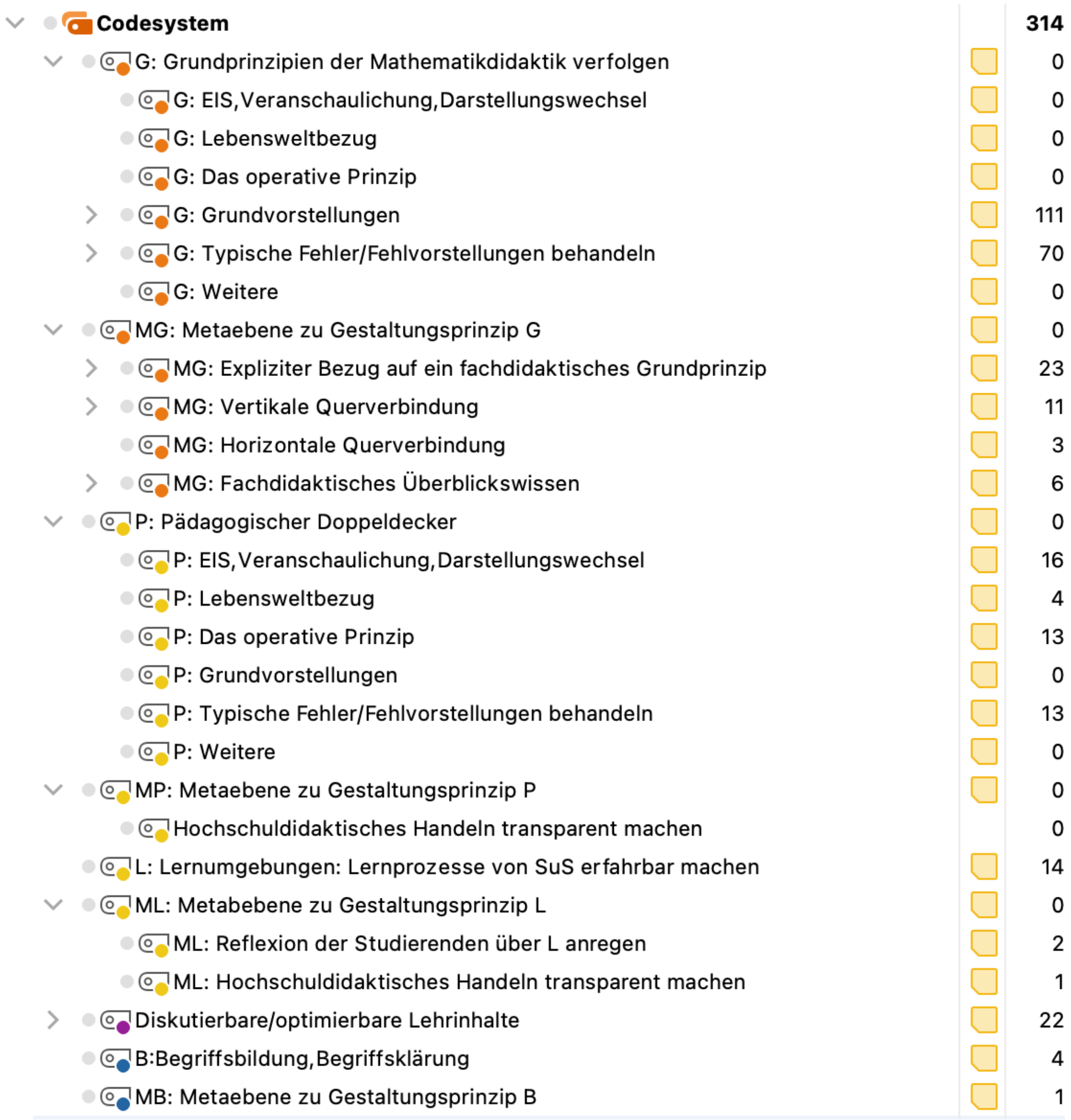


Abbildung 7: Darstellung der 8 Hauptkategorien mit den jeweiligen Codierungshäufigkeiten; Quelle: MaxQDA

So sind mit Abstand am meisten Codierungen zu den Subkategorien *‚G: Grundvorstellungen‘* (n_1=111) und *‚G: Fehlvorstellungen‘* (n_2=70) (welche gemäß der Kategoriendefinition inhaltlich auch die Behandlung von Vorstellungsumbrüchen umfasst) der Hauptkategorie *‚G: Grundprinzipien der Mathematikdidaktik verfolgen‘* vorhanden, was zeigt, dass die zu analysierenden Vorlesungsabschnitte und Übungen passend zur Fragestellung ausgewählt wurden. Grundsätzlich ist anzumerken, dass die Inhaltsanalyse parallel sowohl für die Vorlesungsfolien als auch die Vorlesungsvideos und auf Ebene der Übungen für zwei inhaltlich identische Übungsthemen in verschiedenen Übungen stattgefunden hat. Daher ist für ähnliche Inhalte häufig eine doppelte Codierung berücksichtigt worden.

5.2.1 Auswertung der allgemeinen Gestaltungsprinzipien

Zunächst mag bei Ansicht der Codierhäufigkeiten erstaunen, dass keine Codierungen zu den nicht minder relevanten Grundprinzipien (G) der Mathematikdidaktik: EIS, Darstellungswechsel, Lebensweltbezug und dem operativen Prinzip vorliegen. Hierbei ist zu bedenken, dass diese Grundprinzipien alle elementar für die Ausbildung von Grundvorstellungen sind, und daher im Zuge des Aufbaus von Grundvorstellungen in der dementsprechenden Subkategorienebene codiert wurden (siehe Abschnitt 5.2.2). Vollständig unabhängig wurden diese Grundprinzipien in den hier betrachteten Vorlesungsabschnitten allerdings tatsächlich nicht behandelt, sondern an anderen passenden Stellen der Lehrveranstaltung, die hier nicht analysiert wurden.

Allein auf dieser quantitativen Basis der Auswertung kann festgestellt werden, dass viele metakognitive Bezüge zum Gestaltungsprinzip G hergestellt wurden. Hier sind in Summe n_3= 43 Codierungen zu verzeichnen gewesen. Auch das Auftreten des Pädagogischen Doppeldeckers wurde sehr häufig codiert (n_4 = 46). Der Einsatz des pädagogischen Doppeldeckers ließ sich anhand der gleichlautenden Subkategorien von der Verfolgung der *Grundprinzipien: G* in manchen Fällen nur schwer abgrenzen. Zur Abgrenzung der Kategorie zu den gleichlautenden *Grundprinzipien G* wurde als zentrales Unterscheidungskriterium im Rahmen der Kategoriendefinition (siehe Codebuch im Anhang B) der Sinn der Anwendung der Grundprinzipien ausgeschärft. Während bei der Behandlung der Grundprinzipien in den Vorlesungen diese in Bezug auf die Ebene der lernenden Kinder thematisiert wurden, wurde die Anwendung des pädagogischen Doppeldeckers dann identifiziert, wenn mit den didaktischen Mitteln (Anwendung der Grundprinzipien) das Verständnis der Studierenden gestützt bzw. für diese ein passender Lebensweltbezug hergestellt werden sollte. Z. B. wurden in der Vorlesung bei der Erläuterung der Zahlaspekte folgende Lebensweltbezüge ($n_{4.2}$ = 4) für die Studierenden aufgespannt:

> „Typisch ist auch sowas wie das Verhältnis Brutto zu netto anzugucken. Brutto ist das, wo die Mehrwertsteuer mit dabei ist, 119/100, demnächst dann wieder 116/100, früher auch mal 116/100, irgendwann bestimmt mal wieder 119/100, oder gehen sie nach Österreich, dann sind es 120/100.“ (Vorlesung\Ari_2020_21_ S02E07.3: 7)
> „Wenn ich sage, jeder 5. in der Bevölkerung macht irgendwas Doofes, (überlegt) weiß nicht; jeder 5. glaubt an Verschwörungstheorien“ (Vorlesung\Ari_2020_21_ S02E07.3: 9)

Am häufigsten waren als Subkategorie ikonische Darstellungen bzw. Veranschaulichungen vertreten mit $n_{4.1}$ = 16 Codierungen. Ähnlich oft ($n_{4.3}$ = 13) konnte die Behandlung des operativen Prinzips im Rahmen der Übungen beobachtet werden. Ein

Beispiel hierfür war die Erläuterung einer Permanenzreihe für die Studierenden zur Begründung, dass Dividieren durch ½ vergrößern muss:

> „**Z:** Das dürfte dann irgendwie so ähnlich aussehen: (Permanenzreihe wurde von Z aufgeschrieben und parallel besprochen)…. Sie haben angefangen: 40:4 = 10. Und dann haben Sie beim nächsten Mal statt durch 4 zu teilen nur durch die Hälfte geteilt, also durch 2. Und dadurch wurde das Ergebnis doppelt so groß wie das Ergebnis davor. Das haben Sie dann nochmal gemacht und dann hatten Sie 40 : 1. Und dann hatten sie 40 : ½ das ist quasi der neue wichtige Schritt und dann kommen sie auf die 80. (...)„ (Übungen\2021-06-08_Beobachtungsprotokoll_Z: 222)

Während Grundvorstellungen als Pädagogischer Doppeldecker für die Studierenden in diesem Vorlesungsabschnitt nicht explizit neu aufgebaut wurden, so wurden doch viele Fehler und Fehlvorstellungen der Studierenden ($n_{4.5}$ = 13) in den Übungen aufgegriffen, deren Behandlung für das Thema von Interesse ist. Ein Beispiel hierfür ist das Aufgreifen des NNB-Fehlers mancher Studierender:

> **Z:** Wir wollen uns jetzt nochmal eine Aufgabe anschauen, die wir so oder so ähnlich im NNB-Test gemacht haben. Die Frage ist: Ist 40:1/2 größer oder kleiner als 40? Da haben relativ viele Leute nicht die richtige Lösung gefunden, daher wollen wir nochmal darüber sprechen. (Übungen\2021-06-08_Beobachtungsprotokoll_Z: 152)

Für die metakognitive Begleitung des Einsatzes des pädagogischen Doppeldeckers konnte in den beobachteten Abschnitten kein Beispiel gefunden werden. Auch wenn der gekonnte Einsatz des pädagogischen Doppeldeckers „Für Lehrpersonen […] eine enorme Herausforderung dar[stellt]“ (Wahl, 2012) sollte dieser nicht nur oft eingesetzt sondern als Methode auch verstärkt expliziert werden.

Auch das didaktische Mittel *Lernumgebungen* aufzubauen, die die Lernprozesse der Kinder erfahrbar machen, wurde in mehreren verschiedenen Situationen erfolgreich (Codierungshäufigkeit n_5 = 13) umgesetzt. Exemplarisch hierfür können folgende Aufgabenstellungen aus der Vorlesung/Übung aufgeführt werden:

> „Brüche vergleichen: „zweiter Schritt ist, wir vergleichen Brüche miteinander, Wir haben jetzt gerade mit Zahlen und Stammbrüchen verglichen. Jetzt vergleichen wir zwei Brüche direkt miteinander. Und das wollen wir auch wieder machen, indem wir inhaltlich argumentieren. Also, klar, 3/4 ist mehr als 2/4 und das ist auch mehr als 1/4, das ist quasikardinal und das sollte man auch immer nutzen. Also 27/52 ist mehr als 26/52. Dann, was sollte man noch ausnutzen, na ja man sollte irgendwie bei gleichem Zähler das Operationsverständnis ausnutzen. Wenn ich habe 13/5 und 13/6, welcher Bruch ist wohl größer? Wenn ich durch 6 teile, dann werden die Teile kleiner, als wenn ich durch 5 teile. Also ist wohl 13/5 größer als 13/6. Und was auch immer hilft, ist den Vergleich mit 1/2 nutzen. Und da haben wir jetzt gerade schon ein schönes Beispiel 27/52 und 17/36. Welcher Bruch ist Größer? Ist es der eine 27/52 oder ist es der andere 17/36? Gut, der Trick dabei ist vergleichen Sie es mal mit 1/2. Und wo ist 1/2? Na Ja, 27/52 das ist ja ganz nah dran an 26/52. 26/52 klingt nach 1/2. 17/36 ist ganz nah dran an 18/36. Das ist ganz nah dran an 1/2, das ist 1/2. Welcher von den beiden

Brüchen ist jetzt größer? Ich verrate es mal nicht, damit Sie selber nachdenken müssen. Hier sind noch andere Beispiele 4/7 mit 5/6 verglichen.... (Aufzählung der weiteren drei gezeigten Bruchzahlenvergleiche). Und ich möchte, dass sie sich überlegen, wie können Sie das inhaltlich argumentieren, also nicht durch ausrechnen, dass diese Vergleiche stimmen oder vielleicht ja auch nicht stimmen. (Vorlesung\Ari_2020_21_ S02E07.5 : 5-6)

(Übungen\S02_UE_07_PP: 7: 44|62 - 7: 881|484)

(Übungen\S02_UE_09_PP: 3: 52|130 - 3: 897|461)

„Die Frage ist: Ist 40:1/2 größer oder kleiner als 40? (…) Sie sollen die richtige Lösung finden und eine passende Rechengeschichte ausdenken und versuchen weitere Begründung zu finden. Das kann mit einer Zeichnung sein oder mit einer Permanenzreihe oder mit Material, sie dürfen selber überlegen was für weitere Begründungen Sie finden. Dazu wieder Break-out-Sessions nur 10 min.“ (2021-06-08_Beobachtungsprotokoll_Z, Pos. 152)

Für die *metakognitive Reflexion der Lernumgebungen* konnten nur drei Codierungen gefunden werden: Das einzige Beispiel für die Transparenz hochschulpädagogischen Handelns im Rahmen der im digitalen Format beobachteten Vorlesung war die Aufforderung an die Studierenden zu Übungszwecken Brüche mit natürlichen Zahlen zu vergleichen:

„Ich habe das hier für Sie als eine Aktivität, die Sie selber machen können, auch mit dabei, ähm die eine Sache, die sie üben sollen, ist, sie sollen Brüche mit natürlichen Zahlen vergleichen.“ (Ari_2020_21_ S02E07.5 , Pos. 3).

In den Übungen wurden die Studierenden zur Reflexion über eine Faltübung zur Herstellung von Brüchen (Lernumgebung) durch folgende Aufgabenstellung angeregt:

Wir vergleichen

Zu 1 und 2) Welche Möglichkeiten hast du gefunden?
Welche Schwierigkeiten gab es?

Zu 3) Welchen mathematischen Hintergrund erkennst du?

(Übungen\S02_UE_07_PP: 8: 82|245 - 8: 702|455)

Insgesamt erscheint die Anwendung der metakognitiven Reflexion als wichtig identifiziertes Gestaltungskriterium auch in diesem Bereich noch ausbaufähig zu sein.

Als weitere Kategorie für die Gestaltungskriterien guter Lehre wurde induktiv anhand der Daten die Kategorie *‚B: Begriffsbildung, Begriffsklärung'* identifiziert, die für das Lernen und Lehren auch eine tragende Rolle spielen könnte, hier allerdings nur sehr basal zur Klärung wichtiger Begriffe eingesetzt wurde. Beispielsweise wurde ein echter Bruch definiert:

> „echte Brüche (…) (bei diesen ist der Zähler vom Betrag kleiner oder gleich dem Nenner)" (Vorlesung\Aspekte-zu-Brüchen_S02.E07: 6: 167 - 6: 256)

und auch die Beziehung zwischen Brüchen und Bruchzahlen wurde nochmal anschaulich erläutert:

> „Vielleicht ganz schnell als eine Klärung zwischendurch; ich werde ja von Brüchen und Bruchzahlen reden. Also eine Bruchzahl das ist das, was man durch verschiedene Brüche darstellen kann. Ein Bruch, das ist so zum Beispiel 3/4 oder 6/8 und sowohl 3/4 als auch 6/8, diese beiden Brüche bezeichnen die gleiche Bruchzahl. Die Bruchzahl, das ist halt dieses allgemeinere abstrakte Ding unabhängig von der Darstellung."
> (Vorlesung\Ari_2020_21_ S02E07.3: 2).

Bei der Herstellung von Brüchen mit verschiedenen Papiergeometrien wurde folgendes Beispiel für eine *Metaebene (MB)* zu dieser Kategorie identifiziert:

> „Ja beim Rechteck ist das natürlich genauso, denn dieser Streifen ist auch ein Rechteck (in die Kamera gehalten)" (Übungen\2021-05-26_Beobachtungsprotokoll_X: 37). [2]

Diese angedachte Metaebene ist zu verstehen als Explikation von begriffsbildenden Merkmalen, Begriffshierarchien oder Gemeinsamkeiten von Objekten, die sie zu Repräsentanten eines Begriffes machen. Zur Strukturierung von (mathematischer) Welt

[2] Die Studierenden waren aufgefordert mit einem Kreis aus Papier, einem Rechteck aus Papier und einem schmalen Papierstreifen durch Falten Brüche herzustellen

könnte aus meiner Sicht auch das Thema Begriffsbildung als wesentliches Grundprinzip mathematischer Bildung als Gestaltungskriterium von fachbezogener Lehre taugen und in das Konzept der Gestaltungskriterien integriert werden.

Im Folgenden sollen in Bezug zur Fragestellung die drei Subkategorien *G: Grundvorstellungen*, *G: typische Fehler, Fehlvorstellungen*, sowie die *Metaebene zum Gestaltungsprinzip G* des Handelns der Lehrenden näher analysiert werden, bevor als Abschluss der Behandlung des Lehreteils die gefundenen Codierungen zu optimierbaren bzw. auf Grundlage der erfolgten Literaturrecherche zum Thema diskutierbar erscheinenden Passagen beleuchtet werden sollen.

5.2.2 Auswertung des Lehreteils zu Grundvorstellungen

Für die Kategorie *G: Grundvorstellungen* konnten zunächst anhand des Materials induktiv folgende Subkategorien entwickelt werden, deren Codierungshäufigkeiten zusätzlich in Abbildung 8 dargestellt werden.

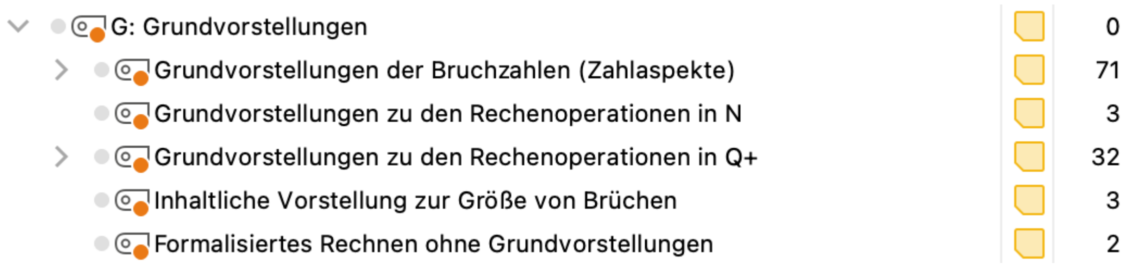


Abbildung 8: Darstellung der 5 induktiv generierten Subkategorien zur Kategorie Grundvorstellungen mit den jeweiligen Codierungshäufigkeiten; Quelle: MaxQDA

Wie aufgrund der Auswahl der Lehrpassagen zu erwarten war, wurden besonders oft Grundvorstellungen zu den Bruchzahlen bzw. deren Zahlaspekte codiert sowie Grundvorstellungen zu den Rechenoperationen in Q+. Für diese beiden Kategorien wurden zur Strukturierung und Aufbereitung der inhaltlichen Schwerpunkte folgende Subkategoriensysteme mit jeweils 3 Subkategorienebenen entwickelt. Abbildung 9 zeigt das Subkategoriensystem für die Grundvorstellungen der Bruchzahlen sowie deren absolute Anzahl an Codierungen, während Abbildung 10 das Subkategoriensystem zur Kategorie *‚Grundvorstellungen zu den Rechenoperationen in Q+‘* mit der absoluten Anzahl der Codierungen darstellt.

Die Analyse der Kategorien und Codierungen zeigt, dass alle im Theorieteil unter Abschnitt 2.5.7 aufgeführten Zahlaspekte für die positiven rationalen Zahlen in den Lehrveranstaltungen behandelt wurden und auch der Zusammenhang bzw. die

Unterschiede zwischen den Grundvorstellungen thematisiert worden sind. Dabei beziehen sich alle Codierungen zu den einzelnen Aspekten auf die Vorlesung, in der jeder Aspekt ausführlich behandelt wurde. In den Übungen wurde als Wiederholung eine Übersicht zu den Aspekten behandelt, in der übereinstimmend zu den Vorlesungsinhalten die Aspekte aufgeführt waren (vgl. Kategorie: *Übersicht über die Zahlaspekte*).

Grundvorstellungen der Bruchzahlen (Zahlaspekte)

Grundvorstellungen der Bruchzahlen (Zahlaspekte)	0
Übersicht über die Zahlaspekte	4
Zuordnung von Zahlaspekten zu Beispielen	4
Bruchzahlen als absoluter Anteil	4
Quasiordinalaspekt	2
Rechenzahlaspekt	2
Verhältnisaspekt	3
Anteilaspekt	2
Quasikardinalaspekt	2
Operatoraspekt	2
Größen-/Maßzahlaspekt	3
Zusammenhänge/Unterschiede zwischen den Grundvorstellungen	3
Aufbau von Grundvorstellungen zu Brüchen...	4
durch Lebensweltbezug beim...	0
suchen in der Umwelt nach Brüchen	2
behandeln der Zahlaspekte	3
Herstellen von Brüchen	7
durch das operative Prinzip beim...	0
Vergröbern und Verfeinern	4
Brüche vergleichen	3
Herstellen von Brüchen	9
durch EIS, Veranschaulichung, Darstellungswechsel beim...	1
Brüche vergleichen	1
Herstellen/Darstellen von Brüchen	6

Abbildung 9: Darstellung der induktiv generierten Subkategorien zur Kategorie Grundvorstellungen der Bruchzahlen (Zahlaspekte) mit den jeweiligen Codierungshäufigkeiten; Quelle: MaxQDA

Im Rahmen der Übung sollten zu jedem der Aspekte Beispiele gefunden werden. Dabei konnten die Studierenden auf anschauliche Art und Weise erfahren, dass eindeutige Zuordnungen zu einzelnen Aspekten nicht immer möglich sind, wie folgender Übungsabschnitt zeigt:

> „**MX:** Ich habe es ein bisschen schon in den Chat geschrieben, Maßzahl- Größenaspekt könnten ja Liter, Maßangaben, g-Angaben oder sowas.
>
> **Y:** Genau, das ist alles der Maßzahlaspekt
> Richtig. Könnt ihr noch was zuordnen? (...)

WX: Kann man die Uhrzeit zu dem Anteilsaspekt zuordnen, da immer ein Viertel, ein Halb, dreiviertel ein Ganzes um ist?

Y: Was sagen die anderen dazu, stimmt ihr WX zu?

WX: Könnte man auch durch die Einheit zum Größenaspekt gehören.

Y: Ok, ich hatte genau die gleiche Überlegung. Ihr merkt schon das ist gar nicht so leicht zu unterscheiden, und dass sie sich auf jeden Fall überschneiden. Genau die gleiche Überlegung hatte ich auch, wie du gesagt hast. Eine 3/4 h kann man ja auf die ganze Stunde beziehen. In der Vorlesung ist es auf jedem Fall dem Maßzahlaspekt zugeordnet, da ich wieder eine Einheit dahinter habe. Ihr merkt schon, das ist gar nicht so eindeutig.“
(Übungen\2021-05_26_Beobachtungsprotokoll_Y: 11-17)

Viermal wurden Textstellen codiert, die inhaltlich der von Malle aufgeführten Kategorie „Bruchzahl als absoluter Anteil“ (Malle, 2004, S. 4) zugeordnet werden konnten, ohne dass diese Zuordnung allerdings als solche im Rahmen des Auftretens so benannt wurde. So ist in den entsprechenden Vorlesungsabschnitten nur die Rede von

„Gerade bei Statistiken spricht man bei Bruchzahlen wie 2/3 auch von „2 von 3“. (Vorlesung\Aspekte-zu-Brüchen_S02.E07: 12: 28 - 12: 107).

Diese Grundvorstellung wird im Rahmen der weiteren Behandlung der falschen Addition als Anteil interpretiert:

„Na ja, was sind 4/7? Das können wir uns vorstellen als 4 von 7 Gummibärchen, die grün sind, hier können wir es nochmal nachzählen: Also 1,2,3,4 von den 1,2,3,4,5,6,7 sind grün. Und das ist Bruch als Anteil, die statistische Sichtweise auch, wenn man möchte.
(Vorlesung\Ari_2020_21_ S02E08.1: 3).

Eine ausführlichere Analyse in Bezug auf die inhaltliche Erläuterung und Zuordnung der Bruchzahlaspekte sowie den Zusammenhang zwischen den einzelnen Zahlaspekten im Vergleich zu den Ausführungen des Theorieteils wird in Abschnitt 5.3 vorgenommen, der die zuvor codierten Textstellen der Kategorie ‚*diskutierbare/optimierbare Lehrinhalte*‘ auswertet.

Einen großen Anteil an Codierungen nimmt die Subkategorie ‚*Aufbau von Grundvorstellungen zu Brüchen*‘ ein. Die ermittelten 40 Codierungen zeigen, dass im Rahmen des Aufbaus von Grundvorstellungen die Grundprinzipien *Lebensweltbezug*, *das operative Prinzip* sowie das *EIS-Prinzip bzw. die Veranschaulichung* eine wichtige Rolle in der Lehrveranstaltung spielen, wenn besprochen wird, wie Brüche eingeführt, hergestellt und verglichen werden sollten. So wird beispielsweise in den beiden folgenden Vorlesungspassagen das operative Prinzip bei dem Vergleich von Brüchen bzw. dem Erweitern von Brüchen angesprochen:

„Schülerinnen und Schüler verfügen meist nicht über Größenvorstellungen zu Bruchzahlen. Dadurch fällt es zum Beispiel schwer, Ergebnisse von Rechnungen durch Überschlagsrechnungen zu überprüfen. Als Grundlage kann dabei dienen, dass als Übung für
‣ unechte Brüche die nächstkleinere und nächstgrößere ganze Zahl angegeben werden und angegeben wird, welche Zahl davon näher an der Bruchzahl liegt
‣ und für echte Brüche der Vergleich mit einem Stammbruch 1/n oder ¾ angegeben wird"
(Vorlesung\Brüche-vergleichen_S02.E07: 3: 31 - 3: 526)

„Das passt zu dem, was da bei der Zahl passiert. Ich nehme das Doppelte vom Zähler, ich nehme das Doppelte vom Nenner. In meiner Notation passiert das genauso und darüber kann ich auch reden, ich nehme halt mehr Teile dafür teile ich auch in mehr Teile und das ändert nichts an dem Anteil oder an der Größe an dem Maß, das ich dort habe."
(Vorlesung\Ari_2020_21_ S02E07.6 : 2)

In den Übungen wurde ebenfalls ausführlich auf den Nutzen der Anwendung des operativen Prinzips eingegangen z. B. in dieser Übungspassage zum Vergleich von Brüchen:

„oder auch nochmal mit dem Falten anfangen. Lass die Kinder 8/9 mal falten, wisst ihr ja, wie das geht, jetzt. Und 7/6 ebenfalls, wird dann schwierig zu falten. Dann brauche ich 2 Papiere. Und eben, dass man auch auf die Inhaltsebene eingeht, was Schüler 2 gemacht hat. 7 sechstel ist grösser als die Eingangsgröße. Also als die 6 Sechstel, was sehr, sehr wertvoll ist. Weil sehr viele von uns, mich eingeschlossen, würden vergleichen und den Nenner gleichnamig machen und gucken, was passiert? Also auch noch mal das hervorheben, was für eine coole Strategie das ist, da spart man sich auf jeden Fall viel Rechenarbeit..."
(Übungen\2021-05-26_Beobachtungsprotokoll_X: 158)

Auch der Lebensweltbezug wird mehrfach in Vorlesung und Übung thematisiert bzw. werden Studierende wie folgt in der Übung dazu angeregt über Bezüge nachzudenken:

„Y: Ok, ganz kurz: Welche Materialien eignen sich noch um Brüche herzustellen? Weg vom Papier, was fällt euch noch ein? (...)"
(Übungen\2021-05_26_Beobachtungsprotokoll_Y: 105)

Grundvorstellungen zu den Rechenoperationen

Die Analyse der Lehrpassagen zu den *Grundvorstellungen zu den Rechenoperationen in Q+* erfolgte strukturell analog zu den Grundvorstellungen der Bruchzahlen. So wurden erneut, untergliedert in die verschiedenen Rechenoperationen, verschiedene Kategorien für die verschiedenen behandelten Grundvorstellungen gebildet sowie eine Kategorie zum *Aufbau der Grundvorstellungen*. Die Kategorienstruktur zeigt Abbildung 10.

Auffällig bei der Analyse der Codierungen war zunächst, dass inhaltlich die Grundvorstellungen der Multiplikation nur in der Vorlesung behandelt wurden, während in der Übung zwar das operative Verfahren der Multiplikation von zwei Brüchen anschaulich erläutert und eingeübt wurde aber im Anschluss direkt Fehlvorstellungen von

SuS thematisiert wurden, ohne nochmal die möglichen Grundvorstellungen der Multiplikation zu behandeln. In den Vorlesungspassagen werden die möglichen multiplikativen Grundvorstellungen zwar, ähnlich wie im Theorieteil dieser Arbeit, auch im Rahmen einer Fallunterscheidung erörtert, allerdings werden nur sehr wenige Vorstellungen und Fälle explizit aufgegriffen.

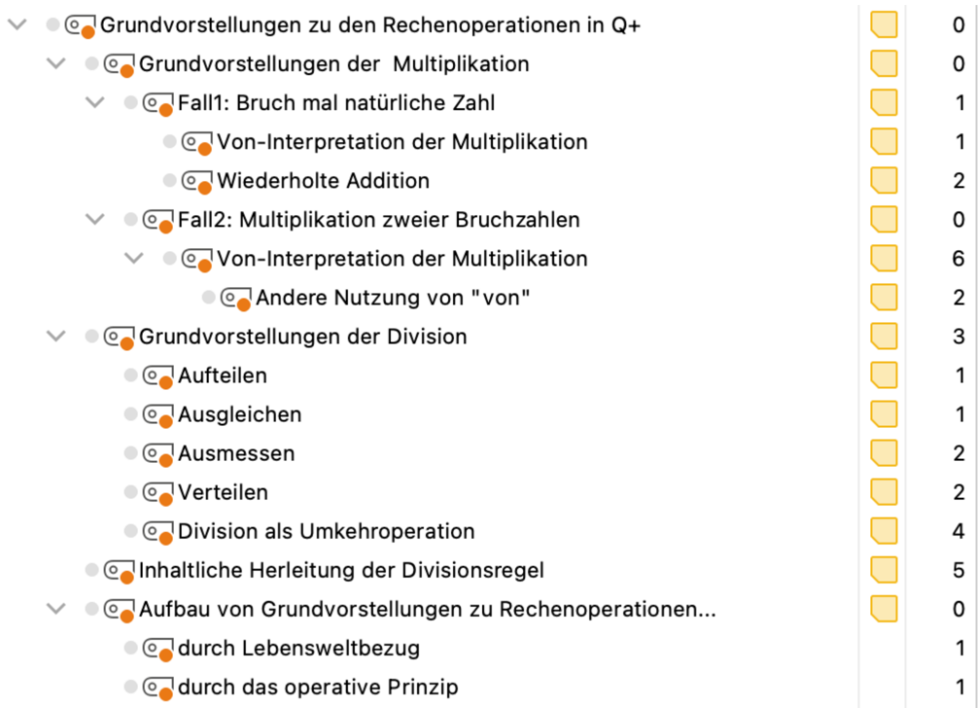


Abbildung 10: Darstellung der induktiv generierten Subkategorien zur Kategorie ‚Grundvorstellungen zu den Rechenoperationen in Q+' mit den jeweiligen Codierungshäufigkeiten; Quelle: MaxQDA

Dabei werden häufig die multiplikativen Grundvorstellungen in direkten Zusammenhang zu den Grundvorstellungen der Bruchzahlen gestellt, ohne dabei die Grundvorstellung der Operation zu der der Zahl deutlich abzugrenzen.

So wurde beispielsweise die folgende Codierung des Falls Multiplikation einer natürlichen Zahl mit einem Bruch in der Vorlesung zwar durch die Beschreibung der Grundvorstellung ‚wiederholte Addition' zugeordnet, aber gleichzeitig als quasikardinal benannt:

> „Relativ einfach ist es Brüche mit natürlichen Zahlen zu multiplieren. Man kann das auf zwei Arten einfach deuten. Das eine wäre quasikardinal. Wir haben n -mal wiederholtes Addieren des Bruches a/b. also a/b+a/b+a/b usw., das ganze n-mal."
> (Vorlesung\Ari_2020_21_ S02E09.1: 2)

Warum das auch inhaltlich unpassend erscheint, wird im Abschnitt 5.3 näher erläutert. Als weitere mögliche Grundvorstellung der Multiplikation wird lediglich die ‚von-

Interpretation‘ für die beiden Fälle Bruch mal natürliche Zahl (eine Codierung) und Bruch mal Bruch (6 Codierungen) beleuchtet. Auch im *Fall 1: Bruch mal natürliche Zahl* wird eher der Bruchzahlaspekt des Anteils fokussiert, statt die von-Interpretation der multiplikativen Verknüpfung, trotzdem erfolgte eine der Grundvorstellung entsprechende Codierung als ‚*von-Interpretation der Multiplikation*‘ für folgende Aussage:

> „Oder wir machen das Ganze als Anteil: wir nehmen den Anteil a/b von n. Damit haben wir eine Interpretation, die uns sagt: Was soll denn das bedeuten? Wir haben n Ganze und davon nehmen wir den Anteil a/b.“
> (Vorlesung\Ari_2020_21_ S02E09.1: 2).

Der Fall Bruch mal Bruch wird etwas ausführlicher in Bezug auf die „von“-Interpretation dargestellt:

> „Die „von“-Interpretation, der Anteil, die lässt sich aber gut aufrecht erhalten, das kann man im Rechteck-Modell machen. Und ich habe hier Bilder von Malle, bzw. von Krauter, bei denen das ganze dargestellt wird. und wir haben das Ganze auch schon in unserem Modell interaktiv gesehen. Das funktioniert auch für nicht-echte Brüche, da muss man halt auf den Verhältnis-Aspekt übergehen, aber das ist kein Problem. Multiplizieren mit dieser von-Interpretation geht gut. Diese Von-Darstellung...das ist eben Operator-Aspekt dann auch, die ist halt super, eigentlich. Da ist so: 3/4 von 100 g sind 3/4 mal 100 g. Wenn man das verstanden hat, dann weiß man, wie man eigentlich mit 3/4 multiplizieren sollte. Das geht dann nicht nur mit 100 g das geht auch mit 2/3 kg. (Vorlesung\Ari_2020_21_ S02E09.1: 3-4)

An dieser Stelle der Vorlesung wird direkt im Anschluss ein wichtiger Aspekt der „von“-Interpretation aufgegriffen, welcher oft zu Fehlvorstellungen bei SuS führen kann. Es wird die sprachliche Verwendung des Wortes ‚von‘ analysiert, welches beispielsweise auch im Kontext der Subtraktion (Pilchner, 2010) benutzt wird. Diese Vorlesungspassagen wurden als *‚andere Nutzung von „von“‘* codiert. Gleichzeitig wird in dem Zusammenhang auch auf die anschlussfähige Formulierung „das x-fache von“ eingegangen:

> Dabei muss man aber beachten, dass das „von“ auch als absolut-Formulierung in Kardinalaspekt für natürliche Zahlen verwendet wird:
>
> *„ich nehme 4 von den Äpfeln“*
>
> Doch auch für den multiplikativen Operatoraspekt gibt es „von“-Formulierungen:
>
> *„ich nehme das vierfache davon“*
>
> Bekannt – und eindeutig multiplikativ und damit relativ statt absolut – ist das schon von „doppelt“ und „halb“, die als Wörter für die multiplikativen Operatoren $2\times$ und $\frac{1}{2}\times$ zur Verfügung stehen.
>
> (Vorlesung\Die-von-Sprechweise_S02.E09: 4: 23|186 - 4: 537|362)

Worauf im Rahmen dieser Erläuterungen allerdings nicht eingegangen wird, ist, dass das Wort ‚von' auch im Rahmen absoluter Anteile verwendet wird. Dabei kann diese Nutzung von ‚von' eine Erklärung dafür sein, dass so viele Kinder sich unsicher sind, ob bei einer gegebenen Verknüpfung von zwei Zahlen durch ein ‚von' eine Multiplikation oder Division gemeint ist (Prediger, 2011). Wie in Abschnitt 2.5.9 hergeleitet und an zwei Beispielen expliziert, sollte aber aus meiner Sicht auch diese Verwendung des ‚von' besprochen werden und dabei darauf eingegangen werden, dass die abkürzende Schreibweise $\frac{2}{3} von\ 4$ eine eindeutige Beschreibung eines Sachkontextes nicht gewährleistet, sondern es nur Konvention ist, dies als multiplikative Verknüpfung anzusehen, da hier beispielsweise auch das Verhältnis innerhalb einer Grundgesamtheit (absoluter Anteil) von zwei Größen $\frac{2}{3} g\ von\ 4\ g$ gemeint sein könnte.

Auffällig ist weiterhin, dass die drei im Theorieteil besprochenen kontinuierlichen Grundvorstellungen der Multiplikation: als Skalierung, als Verknüpfung von Größen und als Fläche eines Rechtecks, die ohne Vorstellungsumbruch weiter Verwendung finden könnten (Prediger, 2011), in den beobachteten Lehrpassagen nicht benannt bzw. aufgegriffen werden. Dies ist insofern bemerkenswert, da gerade die Vorstellung der Skalierung einsichtig machen kann, warum die Multiplikation mit einem Operator kleiner 1 als „a process of scaling down" (Prediger, 2011, S. 68) nicht vergrößert sondern verkleinert.

Für die Grundvorstellungen der Division hat sich gezeigt, dass zwar alle klassischen Vorstellungen: Verteilen, Aufteilen, (Aus-)Messen und Division als Umkehroperation grundsätzlich behandelt wurden, die jeweils 1-4 mal codiert wurden, allerdings wurden in der Vorlesung die Grundvorstellungen und Fälle, in denen sie anwendbar sind, nur gestreift. Für den ausführlich behandelten Fall Stammbruch durch ganze Zahl wurde nicht erwähnt, dass es sich hierbei um die Grundvorstellung des Verteilens handelt, bzw. nur diese anschaulich ist. Dafür wurde in der gesamten Vorlesungspassage sukzessive sehr ausführlich und sinnstiftend die Divisionsregel inhaltlich hergeleitet:

> „Die Division von Brüchen ist etwas, was man auch gut vorbereiten sollte. Dazu gehört zum Beispiel dieser Grundinhalt Stammbruch durch ganze Zahl. Also was wollen wir machen? Wir haben einen Stammbruch, Stammbruch das ist sowas 1 durch irgendeine Zahl, nehmen wir hier mal 1/4 und wir möchten das dann durch z. B. 3 teilen. Und da ist es ganz gut eine Anschauung aufzubauen. Das können wir hier in dem Beispiel super machen. Wir haben 1/4 das kann ich mir vorstellen als Vierteltorte oder -pizza und dieses Viertel teile ich nochmal durch 3 und dann nehme ich dieses Stückchen (auf Folie visualisiert). Also die Grundidee ist von den Vierteln benötige ich 4 Teile um den ganzen Kreis zu füllen, wenn ich jetzt durch 3 teile, dann habe ich ein kleineres Teil, also brauche ich mehr Teile um den gesamten Kreis zu füllen, insgesamt halt 3 mal so viele. Also

brauche ich insgesamt 4*3 Teile, Drittel; oder ein Viertel geteilt durch 3 ist das gleiche wie 1 durch 4*3, also ein Zwölftel. Das kann ich mir aufbauen mit einfach vorstellbaren und einfach darstellbaren Brüchen, man kann das dann übertragen eben auch gedanklich auf schwierigere Beispiele, wie z. B. sowas wie 1/13 : 7. 1/13:7 zu zeichnen oder sich so vorzustellen, exakt vorzustellen ist schwierig, aber ich weiß immer noch, wenn ich 1/13 habe und das noch durch 7 teile, dann habe ich weniger also habe ich insgesamt noch mehr Teile, die ich brauche um den gesamten Kreis auszufüllen. Man braucht dann 13*7 Bruchteile, um den Kreis zu füllen.“
(Vorlesung\Ari_2020_21_ S02E09.2: 2-3)

Auf die Grundvorstellung des Ausmessens wird eingegangen, indem für den Fall Bruch durch Bruch ein Beispiel erläutert wird:

„Also hier ist ein Beispiel: 13/2 durch 4/7. Was soll das sein? Inhaltlich kann ich das durch die Vorstellung des Ausmessens beschreiben. Also ich habe 13/2 und ich möchte wissen, wie oft passt 4/7 da rein, wenn ich da immer so 4/7-Stücke reinlege in 13/2. Wie viele sind das?“
(Vorlesung\Ari_2020_21_ S02E09.2: 5)

Allerdings wird nicht näher besprochen, in welchen Fällen diese Vorstellung anschaulich bleibt. Ausführlicher wird die Vorstellung ‚*Division als Umkehroperation*‘ dargelegt. Dass die Vorstellung ‚*Verteilen*‘ für den Fall eines Bruchs als Divisor nicht tragfähig ist, ist nur auf der letzten Folie der Vorlesungspassage notiert, aber wird nicht mündlich erörtert. Dafür werden in den Übungen die Anwendbarkeit der Grundvorstellungen Aufteilen und Verteilen besprochen im Kontext einer praktischen Aufgabenstellung zum Erfinden einer passenden Rechengeschichte.

„**Y:** Jetzt nochmal die Frage, wann passt die Grundvorstellung verteilen? Hier nicht, bei welcher Aufgabe. […] Ich mach es kurz, weil wir schon wieder am Ende der Zeit sind, wenn ich einen Bruch durch eine natürliche Zahl teile, dann passt Grundvorstellung verteilen. Dann muss ich eben dieses Viertel nochmal auf drei Stücke (drei Personen) aufteilen. Dann muss ich das Viertel nochmal in 3 Stücke aufteilen, dann habe ich 1/12. Also Bruch geteilt durch natürliche Zahl, dann passt Verteilen“.
(Übungen\2021-06-09_Beobachtungsprotokoll_Y: 251-256)

Auch zum Aufbau von Grundvorstellungen zu den Rechenoperationen ließen sich vereinzelt Belege für einen erfolgten Lebensweltbezug bzw. die Behandlung des operativen Prinzips finden. Zum Beispiel wurde in einer Übungsgruppe folgender Lebensweltbezug dargestellt, der sehr schön anschaulich macht, warum $10 \cdot \frac{2}{5}$ nicht größer als 10 sein kann:

„**Z:** In der Übungsgruppe vorher gab es eine weitere schöne Idee für Darstellung mit Material. Es gibt Kaugummipackungen, wo genau 5 Kaugummis drin sind, man könnte z. B. 10 Päckchen ganze Kaugummipackungen nehmen, wo jeweils nur 2 drin sind. Dann muss man sagen ist das nun mehr oder weniger als die 10 ganzen Kaugummipackungen.“
(Übungen\2021-06-08_Beobachtungsprotokoll_Z: 137)

5.2.3 Auswertung des Lehreteils zu Fehlvorstellungen und notwendigen Vorstellungsumbrüchen

In Bezug auf Fehlvorstellungen bzw. Schülervorstellungen und notwendige Vorstellungsumbrüche wurde induktiv ein Subkategoriensystem erstellt, welches in Abbildung 11 mit Angabe der absoluten Anzahl der Codierungen ausgewiesen ist.

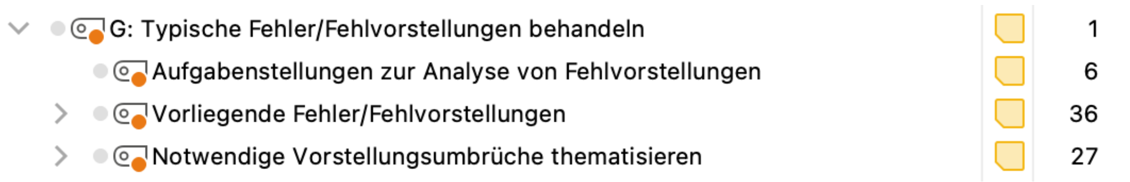


Abbildung 11: Darstellung der induktiv generierten Subkategorien zur Kategorie ‚typische Fehler/Fehlvorstellungen behandeln‘ mit den jeweiligen Codierungshäufigkeiten; Quelle: MaxQDA

Zunächst wurden zwei verschiedene Aufgabenstellungen der Übungen zur Behandlung von Fehlvorstellungen zur Größe von Brüchen und zur Multiplikation und Division von Brüchen identifiziert und mit sechs Codierungen versehen, welche in den Übungen einen breiten Raum einnahmen. Hieran wird deutlich, dass das Thema einen großen Stellenwert in dem Lehrszenario besitzt. Zu den konkret behandelten Fehlern/Fehlvor-stellungen und notwendigen Vorstellungsumbrüchen wurden die zahlreich gefundenen Codierungen wieder feiner ausdifferenziert in die zwei im folgenden behandelten Subkategoriensysteme. Zunächst sollen Ergebnisse zu den vorliegenden Fehlern/Fehlvorstellungen dargestellt werden. Abbildung 12 zeigt hierzu das entwickelte Subkategoriensystem.

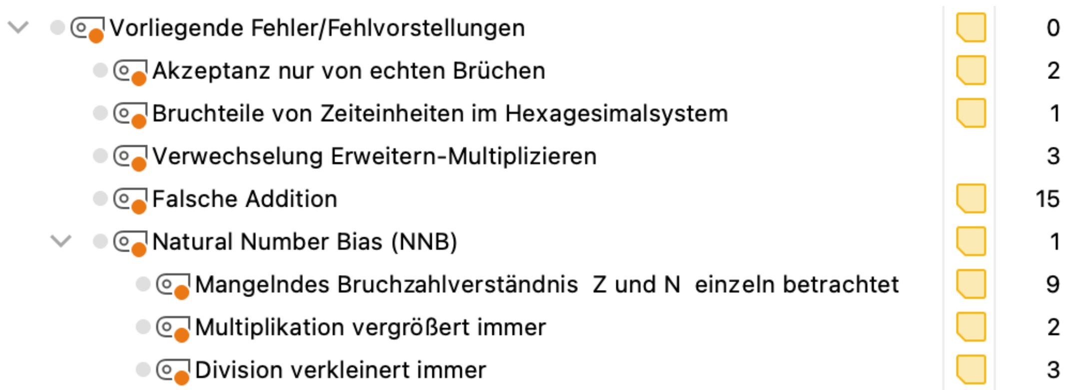


Abbildung 12: Darstellung der induktiv generierten Subkategorien zu ‚vorliegenden Fehlern/Fehlvorstellungen‘ mit den jeweiligen Codierungshäufigkeiten; Quelle: MaxQDA

Hieran wird zunächst deutlich, welche Fehlvorstellungen überhaupt behandelt wurden und welche zumindest quantitativ viel Raum einnahmen. So stand besonders im Fokus der Vorlesung im Übergang von den Zahlaspekten zu den Grundvorstellungen der Rechenoperationen der Prozess der ‚*falschen Addition*', (15 Codierungen). Dieser ist im Rahmen dieser Arbeit nur insofern interessant, da dieser Fehler auf der Grundvorstellung von Brüchen als absoluter Anteil (Malle, 2004) basiert, welche auch das Thema der ‚von-Thematik' (1 von 3 Gummibärchen) tangiert. Weiterhin wurden häufig Fehlvorstellungen (14 Codierungen) behandelt, die sich auf den *Natural Number Bias (NNB)* rückführen lassen. Diese Codierungen erfolgten alle im Rahmen der Übungen, vermittelt durch die Analyse von Fehlvorstellungen bei SuS, die im Rahmen der Lösung spezifischer Bruchrechenaufgaben auftraten. So wurde beispielsweise die Aufgabe C aus Übung 7 in Bezug auf das mangelnde Bruchzahlverständnis codiert:

C **Aufgabe 17** Tom möchte wissen, welcher der beiden Brüche $\frac{8}{9}$ und $\frac{7}{6}$ größer ist.

a) Welcher Bruch ist größer? Kreuze an.

☒ $\frac{8}{9}$ ist größer. ☐ $\frac{7}{6}$ ist größer. ☐ Beide Brüche sind gleich groß.

b) Schreibe eine Erklärung auf.

Weil 8 und 9 größer sind als 7 und 6.

(Übungen\Schülerlösungen Vergleich von Brüchen: 2: 9|513 - 2: 544|779)

Zu der Fehlvorstellung ‚Division verkleinert immer' wurde folgende Aufgabenstellung der Übung 9 codiert:

Aufgabe 3: Division

Katharina hat bei ihrer Hausaufgabe die Zahl 2 durch 1/4 dividiert.

Sie hat die Bruchrechenregeln richtig angewendet und das Ergebnis 8 erhalten.

Anschließend kam sie zu mir, weil sie sich über das Ergebnis wunderte. Wieso konnte das Ergebnis größer sein als der Dividend? Sie hatte doch ‚geteilt'!

(Übungen\Schülerlösungen Multiplikation_Division: 4: 50|124 - 4: 863|479)

Und zu der Fehlvorstellung ‚Multiplikation vergrößert immer':

Aufgabe 2: Multiplikation

Die Lehrerin fragt Lena:

“Ist $10 \cdot \frac{2}{5}$ größer oder kleiner als 10?”

Lena:

“$10 \cdot \frac{2}{5}$ ist größer als 10. Ich muss da 10 mal 2 rechnen und das ist ja dann größer als Zehn. Ich habe ja multipliziert!”

(Übungen\Schülerlösungen Multiplikation_Division: 3: 32|66 - 3: 914|492)

Diese Aufgabenstellungen wurden in den Übungen ausführlich analysiert. Dabei wurden die Lösungen der Studierenden vorgestellt. Häufig waren dann keine Ergänzungen mehr durch die Lehrenden nötig, so dass eine geringe Anzahl an Codierungen im Lehreteil zu diesen Aufgabenstellungen eher ein Qualitätsmerkmal für die Rückmeldungen der Studierenden darstellt. Während bei den Aufgaben zum Größenvergleich von Brüchen und den Fehlvorstellungen von SuS häufiger und direkt bei der Besprechung der Aufgabenlösungen durch die Lehrenden expliziert wurde, dass hier das Wissen aus dem Raum der natürlichen Zahlen falsch übertragen wurde (NNB)

> „**X:** Genau, also der Nenner und der Zähler werden einzeln betrachtet und wie gesagt von F25 , dass diese Strategie aus den natürlichen Zahlen einfach hier übertragen wird. Ja vielen Dank.“ (Übungen\2021-05-26_Beobachtungsprotokoll_X: 146)

wird dies bei den Aufgabenstellungen zur Multiplikation und Division und zugehörigen Fehlervorstellungen nicht mehr getan. Hier wird nur jeweils einmal eher indirekt der Umgang mit den Fehlvorstellungen ‚Multiplikation vergrößert immer‘…

> „**Y:** mag noch jemand was ergänzen? Okay, also hast du alles richtig gesagt, gefällt mir gut, ja, scheinbar ist da doch die Bruchvorstellung noch nicht ausgereift, vielleicht denkt sie doch einfach an die natürlichen Zahlen, oder sie hat einfach die Hälfte vergessen. Auf jeden Fall hat sie ja nur einen Schritt ausgerechnet. Aber auch auf die Nachfrage; also scheinbar fehlt es noch an der Vorstellung, was eine Bruchzahl überhaupt heißt beziehungsweise was ein Bruch bedeutet. Ich könnte an dieser Stelle auch einfach mal eine Beispielaufgabe bringen, zum Beispiel was ist denn 10 mal eins? Das wird sie ja sicher wissen. und wenn ich dann aber sage: der Bruch 2 Fünftel ist ja weniger als 1. Und wenn 10 * 1=10 ist und ich nehme jetzt aber weniger. Ich könnte auch sagen 10 * 2 ist 20 da wird es mehr, aber ich nehme einen kleineren Teil und das ist ja noch nicht mal 1 also kann ich auch nicht über 10 Ganze kommen, aber vielleicht auch mal über so ein Vergleich aber ansonsten greifen natürlich auch die Möglichkeiten, die wir vorher genannt hatten. Okay, danke wir gehen weiter Gruppe 3.“
> (Übungen\2021-06-09_Beobachtungsprotokoll_Y: 136)

…bzw. ‚Division verkleinert immer‘ behandelt:

„Z: Was ihr jetzt nicht gesagt hattet, ist, dass die eigentliche Rechnung, die das Kind hätte ausführen müssen, 3/4 *1,5 ist und nicht 1,5: ¾. Das kann man ähnlich, wie wir das beim Falten vorhin auch gemacht haben darstellen; ok ich habe mein ganzes Kilo das kostet 1,5 € oder 1 € 50 Cent und ich möchte jetzt aber nur ¾ von 1,5 wissen möchte, daher multipliziere ich. Das könnte man versuchen auch mit Geld zu machen mit Spielgeld oder erstmal wieder mit Blätter falten. Dann haben wir noch Gruppe 5:“
(Übungen\2021-06-08_Beobachtungsprotokoll_Z: 148)

Beide Fehlvorstellungen begegnen uns nochmal in den Daten im Zuge der Behandlung notwendiger Vorstellungsumbrüche. Die im Rahmen des Pretests im Vorfeld der Untersuchung zusätzlich identifizierten Fehlvorstellungen 3-5, dass unechte Brüche auch als kleiner 1 interpretiert werden (FV 5) und dass auf Basis des kalkülorientierten Unterrichts verinnerlicht wurde, dass beim Rechnen mit gemeinen Brüchen (also echten und unechten Brüchen) es immer ‚umgekehrt sei‘, die Multiplikation verkleinere dann (FV 3) und die Division vergrößere (FV 4), wurden im Rahmen der Lehrveranstaltung bisher nicht behandelt.

Mögliche und notwendige Vorstellungsumbrüche wurden in der Lehrveranstaltung in Bezug auf verschiedenste Arten von Umbrüchen thematisiert. Abbildung 13 zeigt einen Überblick über das ausdifferenzierte Kategoriensystem zu diesem Aspekt. Dies zeigt, dass das Thema in der notwendigen Breite und Variantenreichtum behandelt wurde.

Gleichzeitig zeigen die geringen Anzahlen von absoluten Codierungen zu jeder Kategorie aber, dass viele der notwendigen Umbrüche nur einmalig (im Rahmen der Vorlesung) erwähnt wurden. Ein Teil der Codierungen behandelt Vorstellungsumbrüche, die nur den Übergang von den natürlichen Zahlen zu dem Zahlenraum der ganzen Zahlen Z betreffen. Diese können hier vollständig thematisch ausgeklammert werden, ebenso wie die Codierungen zu Zahldarstellungen und der Ordnung bzw. Dichte von Zahlen, da diese nicht die hier behandelten Forschungsfragen tangieren. Etwas genauer soll das Auftreten von Codierungen zu notwendigen Vorstellungsumbrüchen bezüglich der Bruchzahlaspekte und der Rechenoperationen untersucht werden (siehe rote Markierung in Abbildung 13).

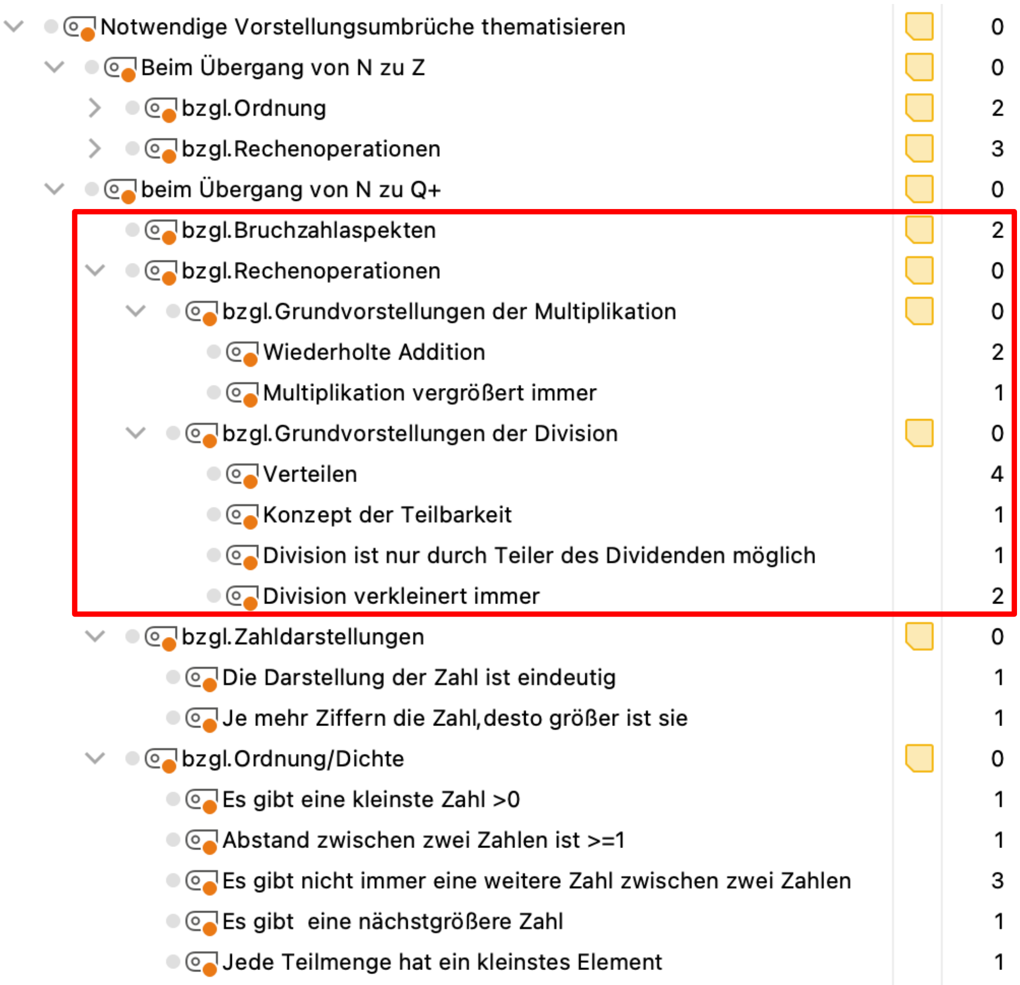


Abbildung 13: Darstellung der induktiv generierten Subkategorien zur Thematisierung notwendiger Vorstellungsumbrüche mit den jeweiligen Codierungshäufigkeiten – interessierende Subkategorien rot umrandet; Quelle: MaxQDA

Von diesen 13 Codierungen wurden auch vier in den Übungen identifiziert, so dass belegbar ist, dass auch in den Übungen notwendige Vorstellungsumbrüche aufgegriffen wurden. Bei der Interpretation des Kategoriensystems ist zu beachten, dass die notwendigen Vorstellungsumbrüche nach der ‚umzubrechenden' gewohnten Vorstellung klassifiziert wurden.

Die notwendigen Vorstellungsumbrüche bezüglich der Bruchzahlaspekte werden in den Lehrpassagen kaum behandelt. Eher beiläufig wird bei der Behandlung der Bruchzahlaspekte erwähnt, dass Bruchzahlen nicht mehr als Kardinalzahlen interpretiert werden können:

> „Können wir Bruchzahlen als Kardinalzahlen auffassen? Kardinalzahlen, Mächtigkeit einer Menge... und da ist die Antwort: Nee, das geht nicht. Es gibt keine Menge mit 3/8 Elementen (Vorlesung\Ari_2020_21_ S02E07.3: 2)".

Ähnlich verhält es sich bei der Frage nach den Ordinalzahlen:

> „Oder können wir sie vielleicht als Ordinalzahlen auffassen? Na ja, nee, auch nicht, was ist der nächste Bruch nach 2/3? 3/3 oder, nee das kann ja nicht sein. Da ist ja irgendwie noch.... 3/4 gibt es ja auch noch und ist das nicht dann eher der nächste; nee das geht so nicht. Also wir sollten uns darüber im Klaren werden, was geeignete Zahlaspekte für Bruchzahlen sind, damit wir klären können, wie man diese Vorstellungen zu Brüchen aufbauen kann.“
> (Vorlesung\Ari_2020_21_ S02E07.3: 2)

Dass die beiden im Zahlenraum der natürlichen Zahlen „intuitiv tief verankerten“ (Winter, 1999, S. 18) Grundvorstellungen der Kardinalzahl und der Ordinalzahl nun nicht mehr das (Bruchzahl-)Verständnis stützen können, wird auch in den Übung nicht aufgegriffen, obwohl dieser Vorstellungsumbruch, was das Wesen einer Zahl ausmacht, für SuS sehr einschneidend sein kann.

Bezüglich der Vorstellungsumbrüche bei der Multiplikation wird für die Multiplikation von zwei Bruchzahlen der notwendige Vorstellungsumbruch zur wiederholten Addition in der Vorlesung wie folgt erläutert:

„Schwieriger ist das bei der Multiplikation zweier Bruchzahlen, das kann man nicht mehr quasikardinal erklären, man kann nicht sagen: Ich nehme 2/3 mal die Addition von 4/5. Das funktioniert nicht.“ (Vorlesung\Ari_2020_21_ S02E09.1: 3).

Weiterhin wird der Umbruch der Vorstellung ‚Multiplikation vergrößert immer‘ anschaulich wie folgt thematisiert:

> „Die Multiplikation vergrößert, das ist doch was, das ist ne Vorstellung, die haben wir. Ich nehme das Vielfache von irgendwas. Aber genau dieses Vervielfachen stimmt nicht mehr. Erstens: ich kann mit -1 oder -5 multiplizieren in den ganzen Zahlen, dann wird das Ergebnis kleiner werden, wenn das Ergebnis vorher positiv war bei den Z. oder ich kann mit 1/2 multiplizieren, dann wird das Ergebnis halb so groß sein wie der Ursprungswert, dass kann dann entweder größer oder kleiner sein, je nachdem ob wir mit einer positiven oder negativen Zahl angefangen haben. Also, die Vorstellung die klappt irgendwie nicht mehr“
> (Vorlesung\Ari_2020_21_ S02E09.3: 7)

Unerwähnt bleibt der Vorstellungsumbruch, dass die Multiplikation nicht mehr kombinatorisch gedeutet werden kann.

In Bezug auf die Division werden alle theoretisch (vgl. Abschnitt 2.5.11) benannten notwendigen Vorstellungsumbrüche behandelt, allerdings im Rahmen der Vorlesung teils eher knapp z. B. für die Vorstellung des Verteilens: „Das Verteilen scheitert hingegen!“ (Vorlesung\Division-von-Brüchen_S02.E09: 5: 434 - 5: 466) oder auch für die Vorstellung Division verkleinert immer:

> „Die Division verkleinert. Das ist auch normal gewesen, Division heißt ich teile durch irgendwas, das muss ja weniger werden.... Stimmt nicht mehr, wenn ich durch 1/2 teile, dann wird es verdoppelt. Okay“.
> (Vorlesung\Ari_2020_21_ S02E09.3: 8).

Dieser wichtige Vorstellungsumbruch wird vermutlich auch aufgrund des Auftretens des NNB im Pre-Test bei Studierenden in den Übungen nochmal deutlich expliziert:

> **„Y:** auch hier wieder: Sie hat sicherlich die Vorstellung aus den natürlichen Zahlen. Ihr erinnert euch an diese große Tabelle aus der Vorlesung von Herrn Kortenkamp? Als er aufgeführt hat, welche Vorstellungen beziehungsweise welche Eigenschaften sich ändern? Ja, dass da so ein Vorstellungsumbruch stattfinden muss. Und einige Vorstellungen, die ich aus den natürlichen Zahlen kenne, aus dem Zahlenbereich zum Beispiel, die ist natürlich, dass das Ergebnis einer Geteiltaufgabe nie größer sein kann als der Dividend, ne. also 20 / 5 ist 4, 16 / 8 ist 2 und so da kommt ja am Ende immer was Kleineres raus als diese erste Zahl, die ich hab und wenn sie das im Kopf hat na ja, wahrscheinlich von den natürlichen Zahlen. Aber das lässt sich nicht so einfach auf die Bruchzahlen oder Brüche übertragen. Da muss also ein Vorstellungsumbruch stattfinden und der hat dir sicherlich noch nicht stattgefunden.
> (Übungen\2021-06-09_Beobachtungsprotokoll_Y: 139)

Lediglich auf die Anpassung der Grundvorstellung des Aufteilens/Ausmessens für Aufgaben mit größeren Divisoren als Dividenden „für die [] keine sinnvollen anschaulichen Vorstellungen existieren“ (Padberg & Wartha, 2017, S. 147) wird in dem Lehreteil nicht eingegangen.

5.2.4 Auswertung des Lehreteils zur Metaebene der Grundprinzipien

Für die Behandlung der Metaebene zu den Grundprinzipien wurden nur die beiden hier interessierenden Prinzipien Grund- und Fehlvorstellungen genauer analysiert. Für diese beiden Bereiche wurde zusätzlich zu dem bestehenden Kategoriensystem ein Subkategoriensystem anhand einer induktiven Kategorienbildung erstellt. Das finale Kategoriensystem zur Metaebene der Grundprinzipien ist in Abbildung 14 mit Angabe der absoluten Anzahl der Codierungen ausgewiesen.

Diese Darstellung der quantitativen Häufigkeiten des Auftretens von Codierungen zeigt zunächst, dass die Bezüge breit gestreut sind und somit trotz des Beobachtungsschwerpunkts ‚Grund-/Fehlvorstellungen‘ zu allen fachdidaktischen Grundprinzipien Bezüge identifizierbar waren. Auch wurden in den beobachteten Lehrveranstaltungen zahlreiche (n = 11) vertikale Querverbindungen gezogen, die sich meist auf die bereits behandelten Grundvorstellungen im Zahlenraum N bezogen.

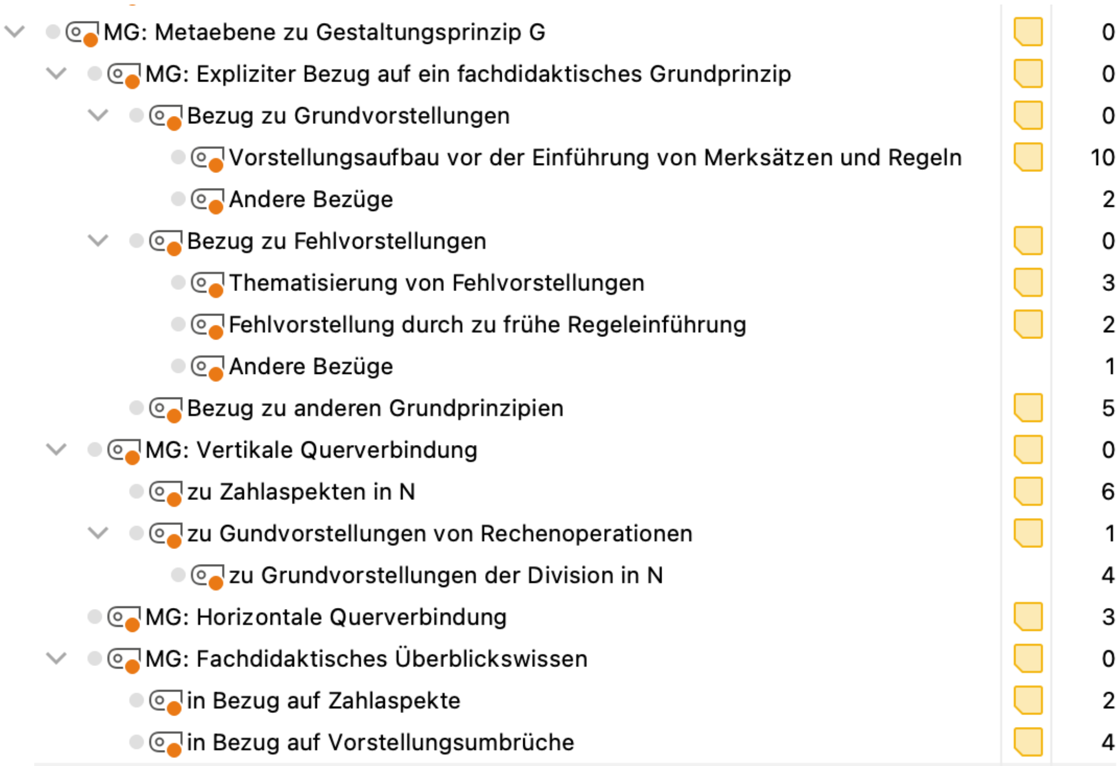


Abbildung 14: Darstellung des Subkategoriensystems zur Kategorie ‚MG: Metaebene zu Gestaltungsprinzip G' mit den jeweiligen Codierungshäufigkeiten; Quelle: MaxQDA

Neben der Betonung der Querverbindung zwischen Zahlaspekten und Grundvorstellungen der Addition in der Vorlesung im Rahmen der Behandlung der falschen Addition

> „Wir haben hier eine Grundvorstellung der Addition für natürliche Zahlen gemischt mit einer Grundvorstellung für die Darstellung von Bruchzahlen. Und das geht schief."
> (Vorlesung\Ari_2020_21_ S02E08.1: 6)

ließ sich auch eine horizontale Querverbindung zur Geometrie im Rahmen der Übungen bei der Behandlung der Herstellung von Brüchen identifizieren.

> „Und da sind wir bei dem Thema vorhin, das hat FY schon gesagt, das Rechteck hat ja andere Symmetrieachsen als das Quadrat. Und da sind wir ganz groß im Thema der Geometrie. Wie kann ich falten, dass ich gleich große Teile erhalte? Deckungsgleich? Das ist großes Thema der Geometrie, da gibt es auf jeden Fall Überschneidungen. Dazu muss ich die Symmetrieachsen erkennen und die sind definitiv anders als beim Rechteck."
> (Übungen\2021-05_26_Beobachtungsprotokoll_Y: 102-103)

Der metakognitive Bezug zu Grundvorstellungen erfolgte in den meisten Fällen mit Bezug zu dem vorrangigen Vorstellungsaufbau vor der Einführung von Regeln und Merksätzen sowie in der Übung auch in Bezug auf die Verknüpfung der Herstellung von Brüchen zu der Grundvorstellung des Anteils. In folgendem Übungszitat von Y werden beide Bezüge deutlich:

„**Y:** Bevor ich anfange zu rechnen und Regeln einzuführen ist es definitiv wichtig Verständnis aufzubauen und eine Möglichkeit wie man das machen kann, nämlich Brüche herzustellen, haben wir uns heute angeguckt. Wenn ich Brüche herstelle, kann ich sie auch vergleichen, und dann kann ich auch weiter darauf aufbauen und daran arbeiten. Das ist die Grundlage für den Anfang, zu den Grundvorstellungen kommen wir noch. Also heute war Schwerpunkt Anteil eines Ganzen, das was wir uns angeguckt haben und was wir gemacht haben, indem wir Brüche hergestellt haben. Das ist die Grundvorstellung, die am naheliegendsten ist, mit der ich anfange, um das Verständnis aufzubauen.“
(Übungen\2021-05_26_Beobachtungsprotokoll_Y, Pos. 221)

Auch bei dem Vorkommen von Bezügen zu Fehlvorstellungen steht in der Vorlesung mit einem humoristischen Einschlag das Thema zu frühe Merksatz- und Regeleinführung im Vordergrund:

„Und dass Sie es bitte abschreiben und in ihr Heft nehmen und am besten am Ende einen roten Kasten drum machen: Merksätze sind böse! (...)
Anstatt darauf weiter rumzureiten, denn das werde ich später sowieso noch machen, zeige ich Ihnen einfach zwei Beispiele, die im regelgeleiteten Unterricht auftreten und die eben zeigen, warum man nicht so schnell auf Regeln gehen sollte, nicht so schnell auf Algorithmen gehen sollte, selbst wenn das guten Schülern vielleicht sogar helfen kann.“
(Ari_2020_21_ S02E07.6 , Pos. 3-4)

Sehr deutlich wird auch metakognitiv das Aufgreifen von Fehlvorstellungen im Unterricht beworben:

Und solche Fehlvorstellungen, wie man sie haben kann, die ich Ihnen hier jetzt gerade demonstriert habe und die gar nicht so einfach zu analysieren sind, warum das jetzt eigentlich falsch ist. Die muss man aufgreifen und mit den SuS auch diskutieren. Das werden wir jetzt im Weiteren auch gucken, wie man dafür Gelegenheiten schafft und was man dort noch tun muss.
(Vorlesung\Ari_2020_21_ S02E08.1: 6)

Fachdidaktisches Überblickswissen wird für den Zusammenhang der Zahlaspekte aufbereitet sowie in Bezug auf notwendige Vorstellungsumbrüche, die in dem Vorlesungsvideo S02E09.3 zentral gebündelt wiedergegeben werden. Dass die Aufbereitung des fachdidaktischen Überblickwissens bezüglich der Zahlaspekte aus meiner Sicht noch optimierbar ist, soll im folgenden Analyseabschnitt zu diskutierbaren Lehrinhalten dargestellt werden.

5.3 Die Analyse diskutierbarer Lehrinhalte

Im Sinne des Design-Based-Research Ansatzes ist es ein Anliegen dieser Arbeit Verbesserungspotenzial für die Lehrveranstaltung zu identifizieren. Mit dieser Zielsetzung wurden die Lehrpassagen dahingehend analysiert, ob sich auf Basis der im Theorieteil erörterten fachbezogenen Grundlagen zu Grund- und Fehlvorstellungen diskutier- bzw. optimierbare Lehrinhalte finden lassen. Die identifizierten Passagen wurden mit der Kategorie „diskutierbare/optimierbare Lehrinhalte" codiert und strukturierend in verschiedene Inhaltsbereiche gegliedert. Daraus entstand das in Abbildung 15 dargestellte Subkategoriensystem mit Angabe der absoluten Codierungshäufigkeiten. Die dazugehörigen Codierungen zu dieser Analyse sind in Anhang C wiedergegeben.

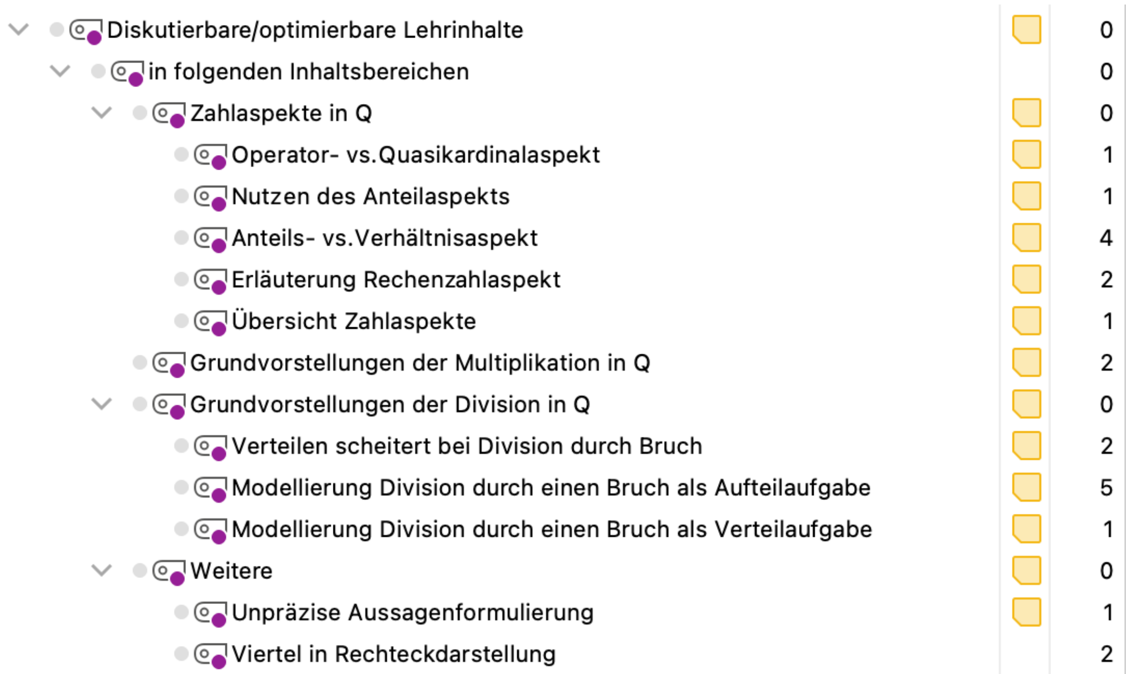


Abbildung 15: Darstellung des Subkategoriensystems zur Kategorie ‚diskutierbare/optimierbare Lehrinhalte' mit den jeweiligen Codierungshäufigkeiten; Quelle: MaxQDA

Zunächst möchte ich näher auf die identifizierten Passagen zu den *‚Zahlaspekten in Q'* eingehen, welche im Vorlesungsvideo S02.E07_Aspekte-zu-Brüchen behandelt werden. Hierin wird nach Besprechung des Operatoraspekts auf das Wesen des Quasikardinalapekts mit folgenden Worten eingegangen:

> „Daraus ergibt sich der Operatoraspekt. [Folienumbruch] Sehr ähnlich ist die Interpretation eines Bruches als eine bestimmte Anzahl z von Teilen, wobei jedes dieser Teile ein n-tel eines Ganzen ist. Da es sich hier um eine Anzahl handelt, arbeiten wir doch fast kardinal und man bezeichnet dies als Quasikardinalaspekt (Vorlesung\Aspekte-zu-Brüchen_S02.E07: 5: 28 - 5: 301).

Kritisch an dieser Anbindung ist aus meiner Sicht zu sehen, dass, wie in Abschnitt 2.5.7 ausgeführt, der Operatoraspekt eine dimensionslose Bruchzahl (den Operator) charakterisiert, welche betrachtet „als multiplikative Rechenanweisung, angewendet auf eine Größe“ (Vom Hofe, 2003, S. 6)) nicht für sich alleine stehen kann, während ein Bruch unter Betrachtung der quasikardinalen Grundvorstellung durchaus für sich stehen kann (z. B. 3 Viertel), da hier die Bruchzahl sich aus einer Maßzahl (im Beispiel 3) und einer Einheit (im Beispiel Viertel) zusammensetzt und somit sich als Größe darstellt (Padberg & Wartha, 2017). Demensprechend erschiene es mir sinnvoller, den Quasikardinalzahlaspekt im engen Zusammenhang zum Größenaspekt auszuweisen. Zwar ließe sich die Maßzahl des Bruches (Anzahl der n-tel) als Operator interpretieren, allerdings geht es ja bei den Grundvorstellungen von Brüchen darum, den gesamten Bruch als Einheit zu sehen und diesem einen Aspekt zuzuweisen.

Aufgefallen ist mir auch die Darstellung des Anteilaspekts als „begrenzt hilfreich“: „Zunächst begrenzt hilfreich ist der Anteilaspekt“ (Vorlesung\Aspekte-zu-Brüchen_ S02.E07: 6: 23 - 6: 72). Im Kontext der weiteren Argumentation wird deutlich, dass sich diese Einschätzung hauptsächlich auf den Umstand bezieht, dass durch den Anteilaspekt nur echte Brüche beschrieben werden können. Allerdings verkennt diese Formulierung den hohen didaktischen Nutzen des Anteilaspektes. Durch die sehr gute Anbindung an Alltagsvorstellungen und der Möglichkeit aus dem Anteilsaspekt die Addition und Subtraktion von Brüchen zu entwickeln, ist er prädestiniert dafür bei der Einführung der Bruchzahlen eine zentrale Rolle zu spielen (vgl. Padberg & Wartha, 2017; Wartha, 2009; Schink & Meyer, 2013). Die wichtige Rolle des Anteilaspektes bei der Einführung der rationalen Zahlen sollte daher angemessene Beachtung finden, bevor eine einseitige Fokussierung auf diesen Ansatz kritisiert wird.

In diesem Zusammenhang ungleich relevanter erscheint mir die gemachte und als *‚Anteils- vs. Verhältnisaspekt‘* codierte Beobachtung, dass in der Vorlesung der Verhältnisaspekt als Oberbegriff des Anteilbegriffes schriftlich eingeführt wird:

> „Besser geeignet und den Anteilaspekt umfassend ist der Verhältnisaspekt“ (Vorlesung\Aspekte-zu-Brüchen_S02.E07: 7: 28 - 7: 100).

Mündlich erfolgt in Bezug auf diese Folie folgende Erläuterung:

> „Der nächste Aspekt, den ich mir angucken möchte, ist das Verhältnis zu einem Ganzen. Das ist das, was allgemeiner ist als der Anteilsaspekt, ich beschreibe damit, wie sich eine Größe zu einer anderen *gleichartigen* Größe verhält. Also beispielsweise, wenn ich als Größe nehme Meter und ich sage, dass hier ist 87 m lang und davon bin ich schon 5 m gekrabbelt, dann kann ich sagen, ich bin 5/87 dieser Strecke gekrabbelt. Und das ist das Verhältnis, diese 5 m verhalten sich zu den 87 m auf eine bestimmte Art und Weise.
> (Vorlesung\Ari_2020_21_ S02E07.3: 7)

Formal ist diese Umschreibung zwar insofern korrekt, dass tatsächlich der Anteil ein spezielles Verhältnis ist, nämlich das Verhältnis von einem *Teil* zu einem *Ganzem* der gleichen Art. Allerdings ist die Entstehungsperspektive von Anteil und Verhältnis eine völlig andere. Während der Begriff Anteil als Zustand noch den Entstehungskontext mitdenkt, also den Teilungsaspekt bzw. den zu Grunde liegenden Teilungsprozess eines Ganzen betont (basierend auf „der sehr tragfähigen Alltagserfahrung des Teilens" (Barzel, B. & Kleine, 2013, S. 4)) beschreibt das Verhältnis einen stationären Zustand, bei dem zwei unabhängige Größen unter der Idee des Vergleichens betrachtet werden (ebd.). Diese Größen müssen eben nicht generell „*gleichartig*" sein, wie in der Erläuterung des Dozierenden suggeriert, sondern sind dies nur im Spezialfall der Anteilsvorstellung.

„Ein Verhältnis wird in der Mathematik durch einen Quotienten zwischen zwei Werten beschrieben, also dem Ergebnis einer Division" (Barzel, B. & Kleine, 2013, S. 2). Demnach stellt jeder betrachtbare Bruch ein Verhältnis dar. Wenn nun aber Brüche unter verschiedenen Aspekten betrachtet werden sollen, scheint mir eine Vereinnahmung des Anteilaspektes unter dem Verhältnisaspekt nicht sinnvoll. Vielmehr kennzeichnet der Anteil immer die Entstehungsperspektive des Bruchs und ist nur sinnvoll interpretierbar gemeinsam mit dem Ganzen, aus dem er hervorgegangen ist, während ein Bruch unter Betrachtung des Verhältnisaspekts allein für sich stehen kann (Zwei Größen stehen in einem Verhältnis). Daher halte ich auch das Beispiel in dem zuletzt besprochenen Zitat aus der Vorlesung, die geschaffte Wegstrecke als Anteil eines ganzen Weges „ich bin 5/87 dieser Strecke gekrabbelt" unter dem Verhältnisaspekt zu interpretieren, für fragwürdig. In diesem sprachlichen Kontext „5/87 der Strecke" erscheint mir die Interpretation des Bruchs als Anteil naheliegender. Auch die im Kontext der Grundvorstellung der Multiplikation von zwei Brüchen auftretende Formulierung:

> „Auch für nicht-echte Brüche funktioniert das [die „von"-Interpretation] – dafür muss man allerdings auf den Verhältnisaspekt übergehen" (Vorlesung\Die-von-Sprechweise_S02.E09: 3: 268 - 3: 380)

suggeriert, dass es bei der Unterscheidung von Anteil- und Verhältnisaspekt nur darum geht, ob echte oder unechte Brüche betrachtet werden, was aber nicht das originäre Unterscheidungskriterium darstellt. Dieses Vorgehen in der Vorlesung hat auch Auswirkungen auf die Übungsgestaltung. Dies wird an folgender, ebenfalls in der besprochenen Kategorie codierten, Passage deutlich:

> **„Y:** Was ist der Unterschied zwischen Anteilaspekt und Verhältnisaspekt, oder wann finde ich was? Könnt ihr mir das nochmal sagen? (...)
>
> **WX:** Der Anteil ist das von etwas Ganzem, so dass man was von einem Ganzen nimmt. Und das Verhältnis ist quasi das was wenn man zwei Brüche vergleicht. Also....
>
> **WY:** ich wollte noch was ergänzen, ich wollte nur sagen, dass der Anteilsaspekt, dass das echte Brüche sind. Der Zähler ist immer kleiner als der Nenner, weil es ja immer vom Ganzen ausgehend ist, also 3/4 oder so und bei dem Verhältnisaspekt kann es auch sein, dass man 119/100 hat. Was ja dann eher unechte Brüche sind.
>
> **Y:** ganz genau, dass ist auf jeden Fall der Unterschied beim Anteilsaspekt habe ich ein Ganzes höchstens, bzw. einen geringeren Anteil und beim Verhältnisaspekt kann ich auch mehr als ein ganzes haben, mehrere Ganze. Und ja ich drücke das Verhältnis aus, aber nicht zwischen zwei Brüchen sondern zwischen zwei Zahlen. Das Verhältnis von einer Zahl zu der anderen Zahl. (...)“ (Übungen\2021-05_26_Beobachtungsprotokoll_Y: 29-32)

Während durch den Beitrag der ersten Seminarteilnehmerin vom Prinzip her der unterschiedliche Vorstellungsansatz richtig beschrieben wird und nur das Verhältnis als hier nicht interessierender Spezialfall des Vergleichs von zwei Bruchzahlen definiert wird, wird dieser vermeintliche „Fehler“ zwar von der Übungsleiterin Y korrigiert, aber gleichzeitig die in die falsche Richtung zielende Vorstellung der zweiten Seminarteilnehmerin bestätigt, dass es bei dem Unterschied zwischen Anteil- und Verhältnisaspekt hauptsächlich um die Unterscheidung echter und unechter Brüche geht.

Insgesamt wäre aus meiner Sicht zukünftig eine deutlichere Abgrenzung der beiden Aspekte im Rahmen der Vorlesung sinnvoll und notwendig.

Zwei weitere Codierungen optimierbarer Lehrinhalte betreffen die Subkategorie *‚Erläuterung Rechenzahlaspekt‘*. In einer der Folien wird schriftlich vermutlich das Beispiel für den Rechenzahlaspekt aus der Publikation von Malle (2004) aufgegriffen, wozu ich im Theorieteil erläutert habe, dass das Beispiel eigentlich nicht mit dem Rechenzahlaspekt verknüpft ist, sondern mit der Vorstellung des Anteils mehrerer Ganzer:

Bruchzahlen als Resultate von Divisionen

Ein Bruch kann als das Resultat einer Division aufgefasst werden.

$$3 : 4 = \frac{3}{4}$$

Dies passt zu den Grundvorstellungen zur Division natürlicher Zahlen – „drei Pizzen sollen auf 4 Leute aufgeteilt werden“.

Dieser **Rechenzahlaspekt** hilft aber nicht sonderlich beim Aufbau von Grundvorstellungen.

(Vorlesung\Aspekte-zu-Brüchen_S02.E07: 8: 6|86 - 8: 635|512)

Dieses Beispiel könnte in den Vorlesungsfolien entfallen, denn mündlich (als Kategorie *Grundvorstellungen: Rechenzahlaspekt* codiert) wird in der Vorlesung bei der Präsentation der Folie das Wesentliche fokussiert, nämlich dass dieser Rechenzahlaspekt eigentlich gar keine Grundvorstellung repräsentiert:

> „Dann gucken wir uns an Bruchzahlen einfach als Resultate von Divisionen. 3:4 kann ich sagen, das ist einfach nur 3/4. Das passt super zur Division natürlicher Zahlen, wobei man eben sowas wie 3 durch 4 in den natürlichen Zahln nicht rechnen kann, aber ich habe 9 durch 3 dann kann ich das rechnen, dann kommt da raus 3. Das ist eben ein schöner, eine schöne Überlegung, wenn man halt damit rechnen möchte. Aber, hilft halt nicht beim Aufbau von Grundvorstellungen zu Brüchen. Wenn ich jemandem sage, stelle dir doch einfach vor, 7/5 ist das was du kriegst, wenn du 7 durch 5 rechnest und jemand kann halt noch nicht 7 durch 5 rechnen, sondern sagt, das ist dann 5 und da bleiben zwei übrig, also 1 und dann bleiben 2 übrig, dann ist das nicht tragfähig für eine Grundvorstellung.“ (Vorlesung\Ari_2020_21_ S02E07.3: 7-8)

Von dem an dieser Stelle unpassenden Beispiel des Pizza-Verteilens ist daher in der Vorlesung auch gar keine Rede, allerdings schafft das Beispiel durch die Zitation in den Vorlesungsfolien es in die Übungsfolien als repräsentatives Beispiel für den Rechenzahlaspekt:

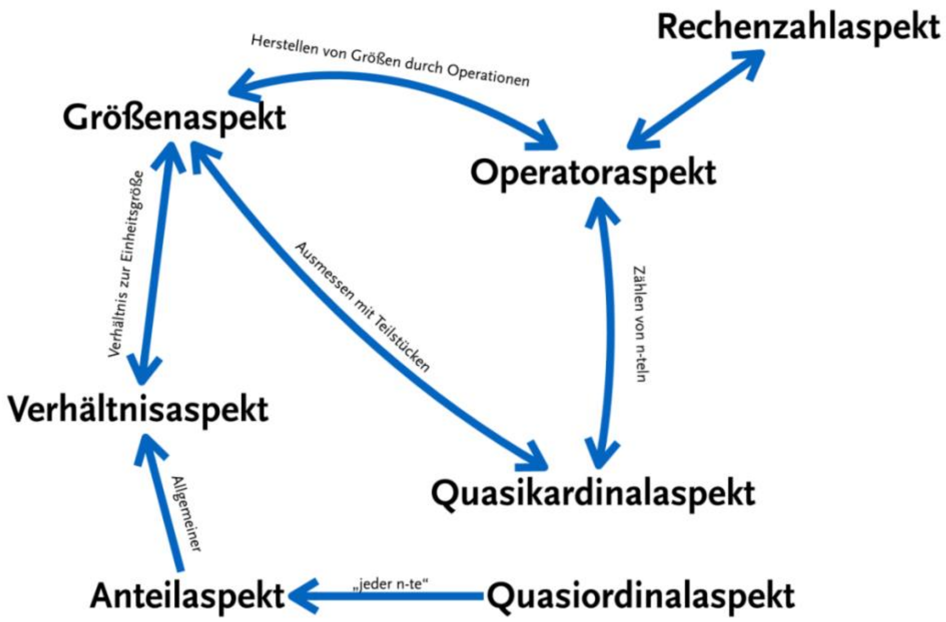
Geeignete Zahlaspekte für Bruchzahlen

Zahlaspekte	Beispiele
Größenaspekt/Maßzahlaspekt (Einheit)	½ m, ¾ kg, ¼ l, eine halbe Stunde, ½ m²
Operatoraspekt (…von…)	½ von ¼ l Sahne (Backrezept)
Quasikardinalaspekt (Zählen von n-teln)	3 Stück der Pizza (Bei Vierteln o.a.)
Anteilaspekt (Anteil eines Ganzen)	die Hälfte des Grundstücks
Verhältnisaspekt (Verh. einer Zahl zu einer anderen)	Maßstab; Brutto zu Netto 119/100
Rechenzahlaspekt (Resultat der Division)	3 Pizzen auf 4 Leute aufteilen
Quasiordinalaspekt (jeder n-te)	jeder 2. Stuhl bleibt frei

(Übungen\S02_UE_07_PP: 6: 52|55 - 6: 894|473)

In beiden Fällen wäre daher die inhaltliche Gestaltung der Folien zu überdenken.

Die letzte Subkategorie zu den Zahlaspekten betrifft die in der Vorlesung präsentierte *‚Übersicht Zahlaspekte‘:* Für das fachdidaktische Überblickswissen und die kognitive Aktivierung ist diese Art der Darstellung sehr sinnvoll (und wurde daher unter diesem metakognitiven Bezug bereits einmal codiert), allerdings wäre die Darstellung aufgrund der zuvor aufgeführten Erläuterungen aus meiner Sicht optimierbar.



(Vorlesung\Aspekte-zu-Brüchen_S02.E07: 11: 41|56 - 11: 826|570)

Sinnvoll erschiene mir eine zentrale Positionierung der vier auch so am Ende des Theorieteils 2.5.7 ausgewiesenen Zahlaspekte: Verhältnisaspekt – Anteilaspekt – Größenaspekt – Operatoraspekt mit jeweiliger Angliederung der damit zusammenhängenden Subaspekte: Anteilaspekt: Quasiordinalaspekt; Größenaspekt: Quasikardinalaspekt; Operatoraspekt: Rechenzahlaspekt; wobei der Rechenzahlaspekt als nicht geeignet zur Grundvorstellungsausbildung gekennzeichnet werden sollte. Ein Versuch der alternativen Visualisierung mit einordnenden Bezügen ist im Anhang D (S. 153) dargestellt.

In Bezug auf die *‚Grundvorstellungen der Multiplikation in Q‘* sind zwei verschiedene Lehrpassagen als diskutierbar aufgefallen. Zum einen wurde im Kontext der Multiplikation einer natürlichen Zahl mit einem Bruch die dazugehörige

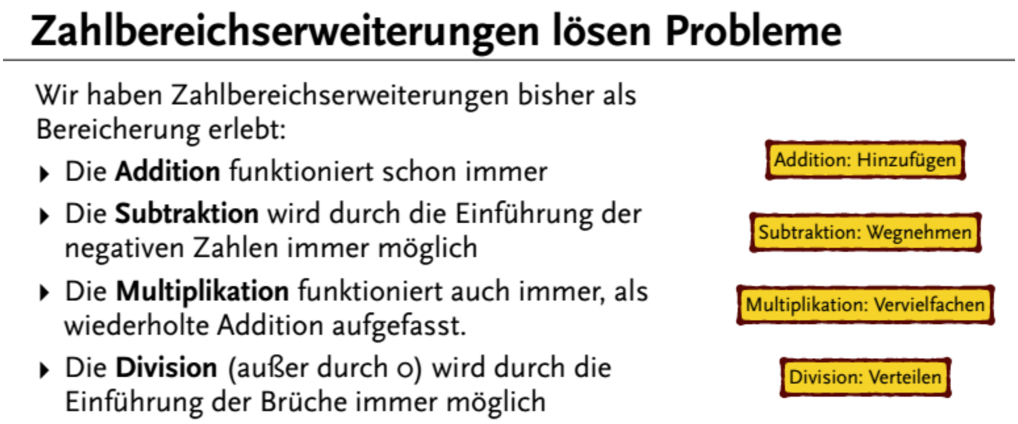
Grundvorstellung als quasikardinal beschrieben, wie folgender Ausschnitt der Vorlesungsfolie zeigt:

(Vorlesung\Die-von-Sprechweise_S02.E09: 2: 16|309 - 2: 823|400)

Aufbauend auf die theoretischen Ausführungen zu den Grundvorstellungen der Multiplikation ist für mich der Bezug zu dem Bruchzahlaspekt der Quasikardinalität aus zwei Gründen nicht nachvollziehbar:

1. Der Multiplikator ist im beschriebenen Fall die natürliche Zahl n. Der Bruch a/b selbst wird ja gar nicht gedanklich in eine kardinale Zahl a und b-tel (1/b) zerlegt, so dass besser von einer kardinalen Interpretation gesprochen werden könnte.
2. Die Überschrift betont den Bruchzahlaspekt, obwohl hier korrekt die Beschreibung der Grundvorstellung des Verfahrens wiedergegeben wird und dies das Thema der Folie ist (Multiplikation mit natürlichen Zahlen). Die aus meiner Sicht passende Überschrift wäre daher für diesen Fall die bereits bekannte Grundvorstellung des Vervielfachens/Vereinigens (wiederholte Addition).

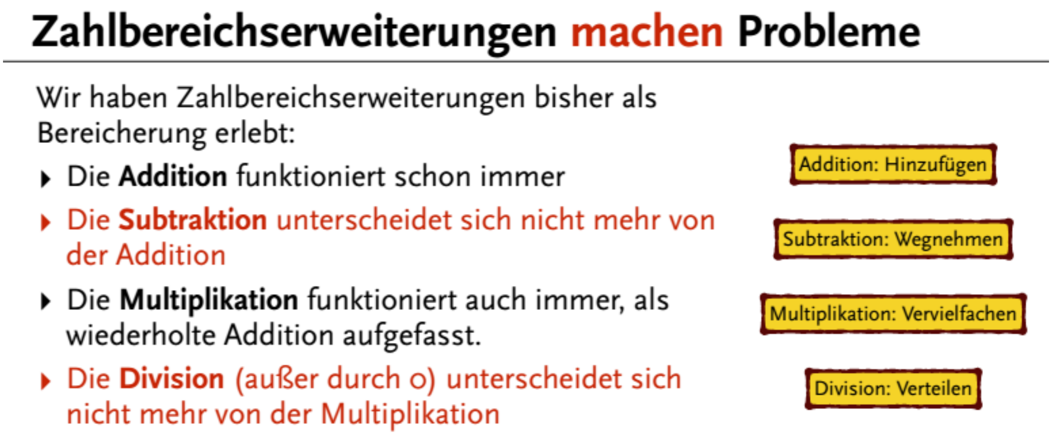
Weiterhin kommt in dem Vorlesungsvideo zur Erörterung der notwendigen Vorstellungsumbrüche bei der Einführung der ganzen und rationalen Zahlen eine Folie vor, in der zunächst vorgestellt wird, welche Probleme Zahlbereichserweiterungen lösen. Unter Bezug auf die Grundrechenarten wird das wie folgt formuliert:



(Vorlesung\ZBE-machen-etwas-kaputt_S02.E09, S. 2)

Hier scheint der Nachsatz bei der Multiplikation „als wiederholte Addition aufgefasst" im falschen Kontext zu stehen, denn gerade das ist ein neues Problem der

Zahlenbereichserweiterung, dass die Multiplikation nicht mehr immer als wiederholte Addition aufgefasst werden kann. Der Nebensatz sollte hier also gelöscht werden. Auf der Folgefolie dagegen



(Vorlesung\ZBE-machen-etwas-kaputt_S02.E09, S. 3)

könnte der Punkt zur Multiplikation auch rot unterlegt und wie folgt umformuliert werden: ‚Die Multiplikation lässt sich nur noch in wenigen Fällen als wiederholte Addition auffassen‘.

In Bezug auf die *‚Grundvorstellungen der Division in Q‘* möchte ich folgende Punkte erörtern: Zunächst wurde schon im Teil der Analyse der behandelten Grundvorstellungen festgestellt, dass in den Vorlesungsfolien zur Division zwar sehr ausführlich und anschaulich die Herleitung der Divisionsregel für Brüche abgeleitet wird, allerdings wird in den Vorlesungsfolien selbst nur sehr spärlich auf die grundsätzlichen Grundvorstellungen der Division und die Vorstellungsumbrüche eingegangen. Lediglich auf der letzten Folie zu diesem Thema wird folgende Zusammenfassung gegeben, bei der die Grundvorstellung ‚Verteilen‘ das einzige Mal in dem Vorlesungsabschnitt benannt wird.

> „Für die Division von Brüchen sind das Ausmessen und die Operator-Interpretation tragfähige Grundvorstellungen, die aus den natürlichen Zahlen übertragen werden können. Das Verteilen scheitert hingegen!“
> (Vorlesung\Division-von-Brüchen_S02.E09: S. 5: 260 - 5: 466)

Vermutlich ist dieser allgemein formulierte finale Satz zu diesem Vorlesungsabschnitt lediglich auf den am Ende betrachteten Fall ‚Division durch Bruch‘ zu beziehen, zumindest ist dies im Gesamtkontext zu vermuten. In Relation zu den im Theorieteil dieser Arbeit ausführlich behandelten Grundvorstellungen und Vorstellungsumbrüchen zur Division sind an diesen finalen Sätzen mehrere Dinge kritisch zu sehen. Zunächst werden hier wieder die Zahlaspekte der Bruchzahlen mit den Grundvorstellungen der Division vermischt, aus meiner Sicht sollte hier statt „die Operator-Interpretation“ „die Grundvorstellung der Division als Umkehroperation“ formuliert werden. Wichtiger sind mir allerdings die zu verfolgenden Gedanken, dass auch das Ausmessen für größere Divisoren als Dividenden wenig anschaulich ist bzw. ein Aufteilen in diesem Fall gar nicht möglich ist. Das Verteilen dagegen ist für natürliche Zahlen als Divisoren die passendste Vorstellung (was in der Übung auch so thematisiert wird und dieser Fall hier im Kontext vielleicht auch gar nicht gemeint ist). Aber auch bei der Division durch einen Bruch muss die Grundvorstellung des Verteilens nicht zwangsläufig scheitern, sondern nur bei Kontexten, in denen der Divisor unteilbar ist. Werden andere lebensweltliche Kontexte gefunden, die eher dem Zusammenhang proportionale Zusammenhänge entlehnt sind, wie das im Theorieteil erörterte Beispiel aus (Coskun, 2019) zeigt, ist die Verteilinterpretation auch mit Brüchen als Divisoren grundsätzlich vorstellbar, wenn dabei Größen als Bruchzahlen oder absolute Anteile betrachtet werden (siehe hierzu Beispiele am Ende von Abschnitt 2.5.10).

In der Übung 9 wurde den Studierenden die Aufgabe gestellt, zu der Divisionsaufgabe $40 : \frac{1}{2}$ eine geeignete Rechengeschichte zu finden und zu entscheiden, welche Grundvorstellung der Division zu der Aufgabe passt. Bei der Besprechung der Ergebnisse zeigte sich, dass in vielen Fällen Lösungen durch die Studierenden vorgestellt wurden, die nicht vollumfänglich der Grundvorstellung Aufteilen bzw. Ausmessen entsprachen, was in fünf Fällen unbeachtet durch die Dozierenden blieb. Diese Fälle wurden aufgrund der Zustimmung der Dozierenden ohne weiteres Aufgreifen der geschilderten Aufgabenformate unter der Kategorie *‚Modellierung Division durch einen Bruch als Aufteilaufgabe‘* als diskutierbare Lehrinhalte codiert. Zwei typische Beispiele für diesen Fall sind die Folgenden:

> **„F1:** Wir haben uns an Strohhalmen orientiert. Die Strohhalme sind zu lang sie werden halbiert, wie viele Halme hat man nach dem Halbieren.
>
> **Y:** auch sehr schön, M2.“
> (Übungen\2021-06-09_Beobachtungsprotokoll_Y: 206-207)
>
> **„F34:** Wir sind von einem sehr, sehr großen Blech ausgegangen, wir haben zum Geburtstag einen Kuchen gebacken und haben den in 40 Stücke aufgeteilt, jetzt ist es uns aber nicht genug, deswegen wollen wir die 40 Stücke alle nochmal halbieren. Jetzt überlegen wir, wieviel Stücke haben wir dann. Das könnte man eigentlich auch sehr gut zeichnen, es muss halt nur ein sehr großes Blech sein.
>
> **Z:** Ok, super, M5, was haben Sie geschrieben.“
> (Übungen\2021-06-08_Beobachtungsprotokoll_Z: 198-199)

Die vorgestellten Aufgaben entsprechen beide trotz der Nutzung des Begriffs Halbieren strukturell einer Rechengeschichte zur Multiplikationsaufgabe $2 \cdot 40\, Teile$, da am Ende wieder Stücke oder Teile das Ergebnis darstellen. Eine klassische Aufteilaufgabe dagegen, gibt als Divisor die Elemente je Menge an und fragt nach der Anzahl der entstehenden Mengen, wie es beispielsweise bei dieser Antwort umgesetzt wurde:

> **M5:** Wir haben auch mit Schokoladentafeln überlegt, aber fanden die Zahl zu groß, um das gut darzustellen. Haben dann überlegt, was in einer Packung ist mit 2 Teilen. Und sind dann auf Twix gekommen, man hat 40 Twix-Packungen, man soll die alle auspacken und gucken für wieviel Kinder die einzelnen Riegel reichen. Fanden das dann aber zu ungesund und sind dann auf Kiwis bekommen, die wir beim Sportfest verteilen wollen. Wir haben vom Obsthändler 40 Kiwis bekommen und sollten die halbieren, wie vielen Kindern kann man eine halbe Kiwi geben?
>
> **Z:** was noch? M6.
> (Übungen\2021-06-08_Beobachtungsprotokoll_Z, Pos. 200-201)

Bei dieser Antwort ist interessant, dass zwar eine richtige Rechengeschichte ersonnen wurde, aber offensichtlich deutlich mehr Energie auf den politisch korrekten Inhalt der Geschichte als auf die mathematische Struktur der Geschichte aufgewandt wurde.

Zwei weitere Beispiele, die von der Lehrenden nicht hinterfragt wurden und daher ebenfalls als diskutierbarer Lehrinhalt in der Subkategorie ‚*Modellierung*' codiert wurden, seien noch als Beispiel dafür vorgestellt, dass der mathematisch korrekte Transfer der Rechenaufgabe $40 : \frac{1}{2}$ in einen lebensweltlichen Kontext und die Zuweisung der korrekten Grundvorstellung vielen Studierenden schwerfiel:

> **M2:** wir haben uns in der Gruppe überlegt, der Schüler (man selber) du und dein Kumpel, du hast 40 Kekse, und du möchtest selber diese Kekse mit dem Kumpel teilen, wie viele Keksstücke habt ihr dann beide zusammen?
>
> **Y:** prima, danke, F5:
> (Übungen\2021-06-09_Beobachtungsprotokoll_Y: 208-209)
>
> **M2:** Ich glaube es ist aufteilen? Wir hatten zum Beispiel die Keksgeschichte, weil ich teile die auf 2 Mengen auf.
>
> **Y:** Ok gehe ich auf jeden Fall mit.
> (Übungen\2021-06-09_Beobachtungsprotokoll_Y: 243-244)

Hier wurde als klassische Ausgangsbasis eine typische Verteilsituation angedacht (2 Kumpel teilen sich 40 Kekse), dann wurden aber anscheinend die Kekse in zwei Hälften geteilt und die Kekshälften zusammensummiert. Auf die Frage um welche Grundvorstellung es sich handelt, wird zwar aufteilen geantwortet aber mit einer typischen Verteilvorstellung begründet (ich teile auf zwei Mengen auf…. Wie viele Elemente je Menge). Auf die abschließende Frage, ob man die Situation

(Rechengeschichten zu 40:1/2) auch als Verteilen interpretieren kann, entspann sich folgender Dialog:

> „**Y:** Ok gehe ich auf jeden Fall mit. Wir schließen gleich mal die 2. Frage an. Könnte ich es auch als verteilen interpretieren? Ist das auch denkbar? Oder besser andersherum: wann könnte ich es als verteilen interpretieren, kam auch in der Vorlesung dran.
>
> **M1:** man könnte sagen ich habe 80 Kekshälften, wie kann ich die verteilen, dass 2 jeweils 40 Kekshälften haben? Irgendwie so rum?
>
> **Y:** ja hört sich schon gut an.
>
> **F2:** Beim Verteilen braucht man ja die Lösung zum Erklären. Also wenn da wirklich nur 40 /1/2 steht.
>
> **Y:** Es ist total schwer und es ist in dem Fall auch nicht möglich: Klassisches Beispiel: Karten verteilen: 40 Karten an die Mitspieler, jeder erstmal eine usw. bis ich keine Karten mehr habe. Ich kann aber nicht 40 Karten auf halbe Personen verteilen. 40 Karten auf 5 Mitspieler, ja funktioniert. 40 Karten auf halbe Mitspieler? Funktioniert nicht mehr. Ich habe nicht mehr die Wahl“ (Übungen\2021-06-09_Beobachtungsprotokoll_Y: 244-249)

Hier wird zwar von M1 eine Verteilaufgabe genannt, allerdings die Aufgabe 80:2 =40, was nicht in den Kontext eingeordnet wird. Im Anschluss wird dann auch in der Übung an die Studierenden an dem Beispiel unteilbarer Divisoren weitergetragen, dass Divisionsaufgaben mit einem Bruch als Divisor sich generell nicht mit der Grundvorstellung Verteilen lösen lassen.

Final zeigen diese Beispiele, dass auch nach der Lehrveranstaltung es einigen Studierenden nicht möglich war, die Grundvorstellungen der Division in Q flexibel anzuwenden.

5.4 Die Analyse des Post-Tests zur Bruchrechenkompetenz der Studierenden

Nach Durchlaufen des Veranstaltungsblockes zur Bruchrechnung wurde der als Web-App von Stampfer und Hell entwickelte Bruchrechentest (Stampfer, 2021a) als Posttest vom 28.06-30.06.2021 in den 6 angebotenen Übungsgruppen mit den Studierenden der Lehrveranstaltung (n=111) durchgeführt.

Die Fragen des Post-Tests waren strukturgleich zu den Fragen des Pretests, lediglich wurden andere Zahlen für die Aufgabenstellung automatisch generiert. Die Auswertung des Posttests in Bezug auf die Aufgabenlösungen zur Multiplikation sowie Division von Brüchen ergab folgende Ergebnisse.

5.4.1 Ergebnisse des Posttests

Zunächst werden in Abbildung 16 die Lösungshäufigkeiten des Gesamttests und der Testteile zu density, operations und size jeweils für die kongruenten Fragen und die inkongruenten Fragen in Form der jeweiligen Boxplots analog zu Abbildung 4 jetzt für den Posttest dargestellt. In darauffolgender Abbildung 17 ist, um die Entwicklung der Bruchrechenkompetenzen nachvollziehen zu können, die Differenz der Resultate aus dem Pretest (E1) und dem Posttest (E2) in Form von Boxplots dargestellt.

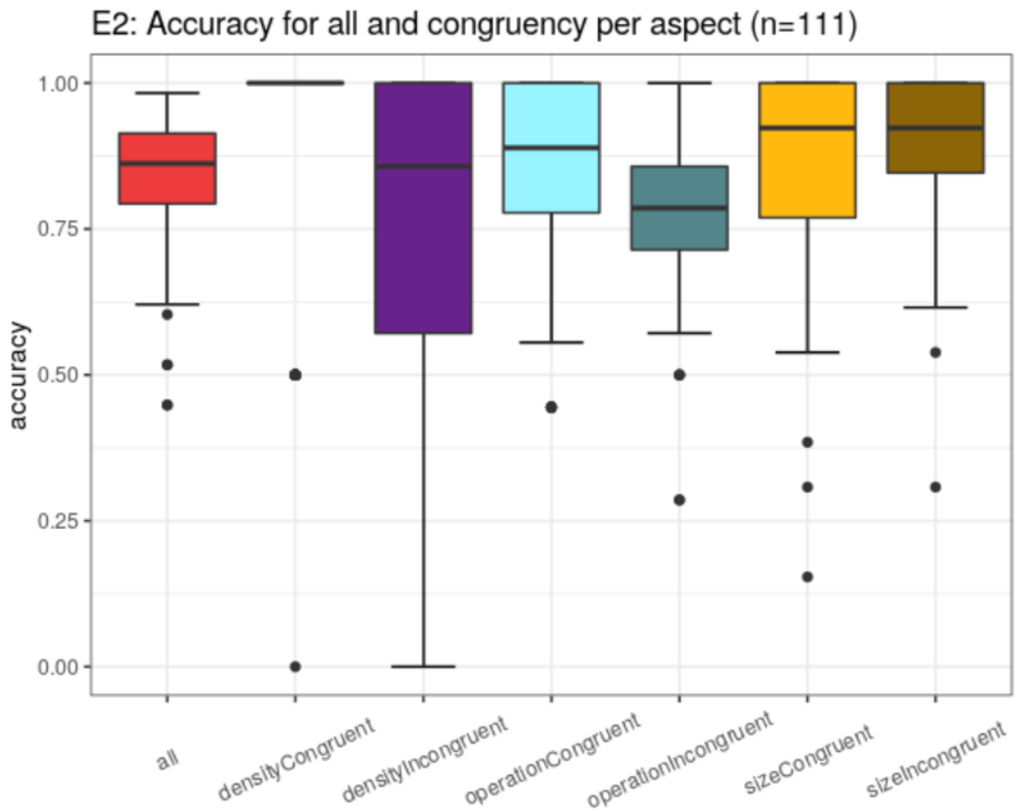


Abbildung 16: Darstellung der Boxplots der Lösungshäufigkeiten zu den Frageblöcken Dichte, Größe und Operationen des NNB-Tests (Posttest E2); Quelle: aufbereitete Testergebnisse der Web-App von Stampfer und Hell (Stampfer, 2021a)

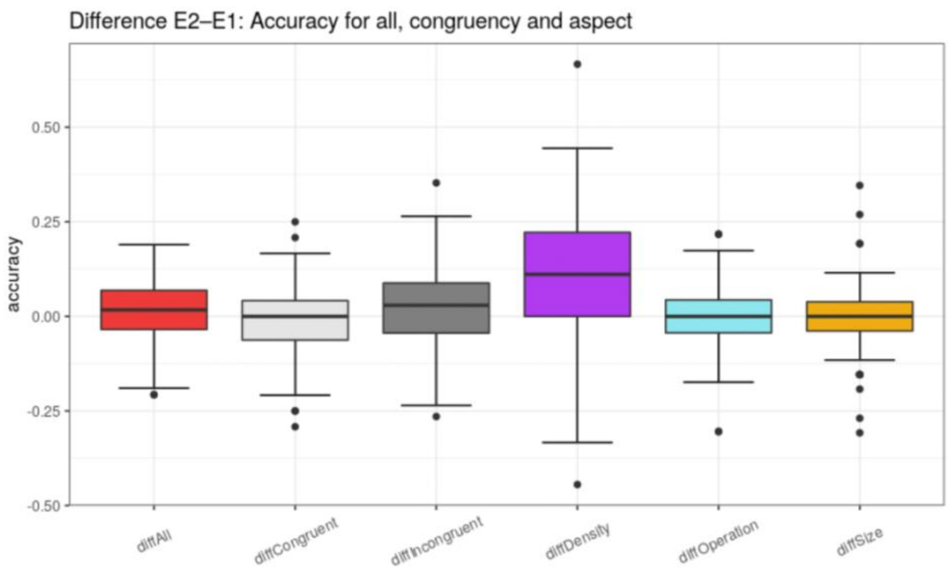


Abbildung 17: Darstellung der Boxplots der Differenz der Lösungshäufigkeiten zu den Frageblöcken Dichte, Größe und Operationen des NNB-Pre- (E1) und Post-Tests (E2); Quelle: aufbereitete Testergebnisse der Web-App von Stampfer und Hell (Stampfer, 2021a)

In Tabelle 8 - Tabelle 10 werden die Aufgaben und Lösungshäufigkeiten des Post-Tests jeweils für die kongruenten und inkongruenten Aufgaben separat für die Multiplikation, die Division sowie die Modellierung von Sachaufgaben in proportionalen Kontexten ausgewiesen. Darin werden positive Veränderungen der Lösungshäufigkeiten im Vergleich zum Pretest grün unterlegt und negative Veränderungen rot.

Tabelle 8: Multiplikationsaufgaben und absolute Lösungshäufigkeiten des Posttests

Aufgaben-nummer:	**Aufgabentext:**	**Absolute Anzahl der Studierendenantworten**	
		falsch	**richtig**
kongruente Aufgaben:			
36	Ohne das exakte Ergebnis zu berechnen: Glauben Sie, dass $3{,}1 \cdot 1{,}8$ größer oder kleiner als 3,1 ist?	8	103
37	Ohne das exakte Ergebnis zu berechnen: Glauben Sie, dass $1{,}1 \cdot \frac{24}{9}$ größer oder kleiner als 7,6 ist?	9	102
inkongruente Aufgaben:			
45	Ohne das exakte Ergebnis zu berechnen: Glauben Sie, dass $5{,}3 \cdot 0{,}7$ größer oder kleiner als 5,3 ist?	5	106
46	Ohne das exakte Ergebnis zu berechnen: Glauben Sie, dass $4{,}3 \cdot \frac{5}{7}$ größer oder kleiner als 4,3 ist?	14	97

Tabelle 9: Divisionsaufgaben und absolute Lösungshäufigkeiten des Posttests

Aufgaben-nummer:	**Aufgabentext:**	**Absolute Anzahl der Studierendenantworten**	
		falsch	**richtig**
kongruente Aufgaben:			
38	Ohne das exakte Ergebnis zu berechnen: Glauben Sie, dass 1,2 : 1,2 größer oder kleiner als 1,2 ist?	15	96
39	Ohne das exakte Ergebnis zu berechnen: Glauben Sie, dass $5{,}2 : \frac{18}{12}$ größer oder kleiner als 5,2 ist?	29	82
inkongruente Aufgaben:			
47	Ohne das exakte Ergebnis zu berechnen: Glauben Sie, dass 7,5 : 0,4 größer oder kleiner als 7,5 ist?	29	82
48	Ohne das exakte Ergebnis zu berechnen: Glauben Sie, dass $9{,}4 : \frac{16}{19}$ größer oder kleiner als 9,4 ist?	24	87

5.4.2 Interpretation der Ergebnisse

Die Box-Plots in Abbildung 17 zeigen deutlich, dass zwar die Aufgaben zur Dichte von Brüchen beim Posttest im Mittel besser beantwortet wurden, für die Aspekte Operationen und Größe von Brüchen zeigt sich allerdings im Mittel kein besseres Lösungsverhalten. Daher soll im Folgenden das Antwortverhalten für die hier interessierenden einzelnen Testkomponenten genauer diskutiert werden.

Die Ergebnisse aus Tabelle 8 und Tabelle 9 weisen insofern ein positives Bild auf, dass zum Großteil deutlich mehr inkongruente und kongruente Aufgaben richtig gelöst wurden. Vergleicht man im Detail den Term 1,2 : 1,2 der einzigen kongruenten Aufgabe 38, bei der im Posttest mehr Studierende die falsche Antwort gaben, mit dem Term der Frage vom Pretest (8,9:1,8), wird deutlich, dass zwar das Aufgabenformat von der Idee her gleich geblieben ist, insofern, dass der Divisor mit 1,2 wieder größer als 1 ist, und somit die Division verkleinert. Strukturell hat aber die zufällig generierte Aufgabe im Posttest die Besonderheit, dass Dividend und Divisor genau gleich groß sind und daher der Quotient genau 1 ist, was vielleicht manche Testteilnehmer zusätzlich verwirrt hat.

Tabelle 10: Sachaufgaben in prop. Kontexten und absolute Lösungshäufigkeiten des Posttests

Aufgaben-nummer:	**Aufgabentext:**	**Absolute Anzahl der Studierendenantworten**	
		falsch	**richtig**
kongruente Aufgaben (multiple-choice):			
43	Um $\frac{19}{6}$ Quadratmeter Land zu bewässern werden 48 Liter Wasser benötigt. Wie viele Liter benötigt man für $\frac{95}{6}$ Quadratmeter? Lösungsmöglichkeiten: $48:5; 5:48; 5 \cdot 48$	36	75
44	Mit $\frac{15}{2}$ Liter Farbe können 38 Quadratmeter bemalt werden. Wie viele Quadratmeter können mit $\frac{3}{2}$ Liter Farbe bemalt werden? Lösungsmöglichkeiten: $38:5; 38 \cdot 5; 5:38$	27	84
inkongruente Aufgaben (multiple-choice):			
57	Mit $\frac{1}{9}$ l Benzin fährt ein Fahrzeug 1 km weit. Wie weit fährt es mit $\frac{21}{5}$ l Benzin? Lösungsmöglichkeiten: $\frac{1}{9}:\frac{21}{5}; \frac{21}{5}:\frac{1}{9}; \frac{21}{5} \cdot \frac{1}{9}$	56	55
58	Aus 1 Liter Sirup können $\frac{9}{2}$ Liter Limonade hergestellt werden. Wie viele Liter Limonade können aus $\frac{7}{6}$ Liter Sirup hergestellt werden? Lösungsmöglichkeiten: $\frac{7}{6}:\frac{9}{2}; \frac{9}{2}:\frac{7}{6}; \frac{7}{6} \cdot \frac{9}{2}$	52	59

Negativ ist am Testergebnis zu beurteilen, dass die schon beim Pretest geringe Lösungshäufigkeit der Sachaufgaben in proportionalen Kontexten beim Posttest für alle Aufgabenformate noch geringer geworden ist. So wurde nun Frage 57 in der Hälfte der Fälle falsch beantwortet, während beim Pretest die Lösung der strukturell ähnlichen Sachaufgabe immerhin noch 57% der Studierenden gelang.

Um die Frage danach beantworten zu können, ob und in welchem Verhältnis zum Pretest bei den Studierenden immer noch die in Abschnitt 5.1 identifizierten Fehlvorstellungen vorliegen, werden wieder die Rohdaten der einzelnen Teilnehmer nach den bereits definierten Fehlermustern untersucht. Dabei zeigt sich durch die Analyse der Fehlermuster der Multiplikations- und Divisionsaufgaben in den Rohdaten, dass sich die

Häufigkeit des Auftretens der identifizierten Fehlvorstellungen (FV) deutlich reduziert hat. Tabelle 11 gibt einen vergleichenden Überblick über die absoluten Häufigkeiten n der identifizierten Fehlermuster im Pre- (n_{pre}) und Posttest (n_{post}).

Tabelle 11: Darstellung der abs. Häufigkeiten des Auftretens der Fehlvorstellungsmuster 1-5 in den Daten des Pre- und Posttests

FV	**Fehlerart**	**Auftreten der FV**	
		Pretest: n_{pre}	**Posttest n_{post}**
1	Multiplikation vergrößert immer (klassischer NNB-Fehler)	5	1
2	Division verkleinert immer (klassischer NNB-Fehler)	13	6
3	Generell vergrößert die Multiplikation außer beim Rechnen mit gemeinen Brüchen, hier verkleinert die Multiplikation	2	0
4	Generell verkleinert die Division außer beim Rechnen mit gemeinen Brüchen, hier vergrößert die Division	1	3
5	Unechte Brüche werden als kleiner 1 interpretiert.	19	1

Damit zeigt sich, dass die Auseinandersetzung mit den Inhalten der Lehrveranstaltung zur Bruchrechnung einen positiven Effekt auf das Auftreten von Fehlvorstellungen bezüglich des Natural-Number-Biases sowie kalkülorientierter Fehlvorstellungen bei den Studierenden hatte. Erkennbar ist weiterhin, sowohl an dem Vergleich der absoluten Fehlerzahlen in Tabelle 8 und Tabelle 9 als auch im Vergleich der absoluten Anzahlen der Fehlermuster in Tabelle 11, dass das korrekte Operieren mit Divisionsaufgaben den Studierenden deutlich schwerer fällt als mit den Multiplikationsaufgaben, was sich mit Ergebnissen ähnlicher Studien deckt (vgl. Prediger, 2011, Coskun, 2019). Allerdings ist das schlechte Abschneiden der Studierenden bei den Modellierungsaufgaben zu proportionalen Kontexten sowohl im Pretest (vgl. Tabelle 7) als auch im Posttest (vgl. Tabelle 10) bemerkenswert. Hier scheint Fakt zu sein, dass die Modellierungskompetenz der Studierenden in Bezug auf proportionale Kontexte im Rahmen der Bruchrechnung gering ausgeprägt ist und sich diese auch durch die Behandlung der Bruchrechnung mit Fokus auf die Ausbildung von Grundvorstellungen nicht verbessert hat.

Für den Umgang mit proportionalen Kontexten ist eine ausgeprägte Grundvorstellung für Verhältnisse unabdingbar. Während sich die kongruenten Aufgaben 43 und 44 bei gleichem Nenner relativ leicht quasikardinal zusammen mit der Verhältnisvorstellung oder rein intuitiv lösen lassen, müssen bei den inkongruenten Aufgaben Verhältnisse von Brüchen (als Verhältnissen) gebildet werden, um die Aufgabe zu lösen.

Diese gerade benannten Grundvorstellungen (Verhältnisse und Bruch als Quasikardinalzahl) scheinen für viele der Studierenden weder vor noch nach Behandlung der Lehrpassagen zur Bruchrechnung in ausreichendem Maße verfügbar zu sein, um mithilfe dieser sinnstiftenden Grundvorstellungen die lebensweltlichen Problemstellungen in ein mathematisches Modell zu übertragen.

Im Gegenteil schneiden die Studierenden im Posttest in diesem Aufgabenbereich sogar noch schlechter ab als im Pretest. Während für die Aufgaben 44, 57 und 58 die Verhältnisse der falschen Lösungen des Posttests zum Pretest zwischen 1,08-1,5 liegen und damit vielleicht wohlwollend über statistische Schwankungen erklärbar sind, liegt das Verhältnis falscher Lösungen für Aufgabe 43 bei $\frac{n_{f,post}}{n_{f,pre}} = \frac{36}{9} = 4$. Hier sollte also noch ein weiterer Faktor identifizierbar sein, warum die Studierenden sich an der Posttestaufgabe im statistischen Mittel deutlich schwerer tun als an der Pretestaufgabe. Entscheidend scheint an dieser Stelle für die fast strukturgleichen Aufgaben (sogar das lebensweltliche Thema Bewässerung ist das gleiche!) auch wieder die Beherrschung arithmetischer Basiskompetenzen zu sein. Eine mir plausibel erscheinende Erklärung für die sehr verschiedene Lösungsquote wäre die Betrachtung der multiplikativen Zusammenhänge der Zähler der Quadratmeterangaben. Während relativ leicht ohne weitere Rechenstrategien und 10er-Übergang erkannt werden kann, dass $84: 21 = 4$ ist, und somit die gesuchte Lösung $158: 4$ sein muss, muss im Posttest das Produkt $5 \cdot 19 = 95$ gebildet werden, um die Lösung $5 \cdot 48$ nachvollziehen zu können, was aufgrund des notwendigen Übertrags rechentechnisch etwas anspruchsvoller ist und dazu führen könnte, dass deutlich mehr (geratene) falsche Antworten auftreten.

6. Zusammenfassende Diskussion der Ergebnisse

Interesseleitend für die Erstellung dieser Masterarbeit war die Frage, wie das Thema Grundvorstellungen und Vorstellungsumbrüche zur Multiplikation und Division von Brüchen im Rahmen der Lehrveranstaltung „Didaktik der Arithmetik II“ in Bezug auf die in Abschnitt 2.3.3 formulierten Gestaltungsprinzipien umgesetzt wird, mit dem Ziel, das notwendige Professionswissen der Studierenden zu sichern.

Auf Grundlage der Ergebnisse eines Pretests der Studierenden zur deren Bruchrechenkompetenzen wurde folgender konkreten Forschungsfrage nachgegangen:

Welches fachbezogene Wissen zum Aufgreifen von notwendigen Vorstellungsumbrüchen, Aufbau von Grundvorstellungen und zur Behebung von Fehlvorstellungen wurde in den Lehrveranstaltungen wie vermittelt (insbesondere in Bezug zu Vorstellungen zur Multiplikation und Division von Brüchen)?

Zur Beantwortung dieser Fragestellung wurden die entsprechenden Lehrpassagen im Rahmen einer inhaltlich-strukturierenden qualitativen Inhaltsanalyse genauer untersucht. Weiterhin erfolgte eine vergleichende Analyse der Ergebnisse des Pre- und Posttests zur Bruchrechenkompetenz der Studierenden auf Grundlage folgender weiterer Forschungsfragen:

Welche Fehlvorstellungen der Studierenden könnten die Ergebnisse des Pretests bedingen?
Inwiefern schlagen sich die intensiven Lehrtätigkeiten zum Aufbau fachbezogenen Wissens bei den Studierenden in deutlich verbesserten Leistungen im Posttest nieder?

Die Untersuchung kommt zu den im Folgenden zusammengefassten Ergebnissen:
Zunächst kann die qualitative Inhaltsanalyse der Lehrinhalte der Vorlesungen und Übungen anhand der Codierungen zum bestehenden deduktiven Kategoriensystem (Reitz-Koncebovski, 2021) zeigen, dass die Anwendung der der hier untersuchten Gestaltungskriterien den Lehrenden insgesamt auf breiter Basis sehr gut gelungen ist. Davon zeugen die zahlreichen in Abschnitt 5.2 diskutierten Codierungen zu den Gestaltungskriterien. Ausbaufähig ist auf Grundlage der Erkenntnisse der Inhaltsanalyse aus meiner Sicht noch die metakognitive Komponente in Bezug auf den ‚pädagogischen Doppeldecker‘ sowie die ‚Lernumgebungen‘.
Die präzisere Analyse anhand des induktiv erstellten Subkategoriensystems zu Grundvorstellungen, Fehlvorstellungen und Vorstellungsumbrüchen sowie der

metakognitiven Reflexion dieser inhaltlichen Lehrkomponenten ergibt zunächst, dass die Lehrinhalte zum Aufbau von Grundvorstellungen sehr ausdifferenziert unter Einbindung des operativen Prinzips, eines Lebensweltbezugs sowie des Einsatzes von Veranschaulichungen und des EIS-Prinzips dargelegt wurden und anhand zahlreicher Übungen, bzw. etablierter Lernumgebungen die Wichtigkeit dieses Themas vermittelt wurde. Auch kann anhand der gefundenen Codierungen aufgezeigt werden, dass klassische Fehlvorstellungen von SuS sehr ausführlich und sinnstiftend in den Vorlesungs- und Übungspassagen behandelt wurden.

Selbstkritisch in Bezug auf die Untersuchungsmethodik kann konstatiert werden, dass sich die Codierung der Beobachtungspassagen insofern mühsam gestaltete, dass die Zuordnung der gefundenen Codierungen zu dem deduktiv-induktiv entwickelten Kategoriensystem streckenweise schwerfiel bzw. mehrdeutig lösbar blieb. Interessant wäre daher, ob das entwickelte Kategoriensystem einer Prüfung der Intercoder-Übereinstimmung in dem Sinne standhalten würde, dass die Analyse der gleichen Beobachtungsdaten eine überwiegend übereinstimmende Codierung hervorbringen würde, oder ob eine solche Prüfung die Erkenntnis hervorbringen würde, dass die Kategoriendefinitionen und das gesamte Kategoriensystem noch ausgeschärft werden müssten.

Die Auswertung des Pre- und Posttests zu den Bruchrechenkompetenzen und dem Auftreten eines Natural-Number-Biases (NNB) zeigt, dass bei einem Teil der Studierenden vor Beginn des Lehreblocks zur Bruchrechnung Fehlvorstellungen vorlagen, die durch den NNB bzw. falsch generalisierte Merkregeln des kalkülorientierten Unterrichts erklärt werden können. Diese Fehlvorstellungen konnten durch die intensiven Lehrtätigkeiten in Bezug auf diese Aspekte zum Großteil abgebaut werden, wie die Ergebnisse des Post-Tests belegen. Allerdings zeigen die Ergebnisse zu den Modellierungsaufgaben des NNB-Tests sowie die Präsentation der von den Studierenden erstellten Rechengeschichten in den Übungen auch, dass viele Studierende weiterhin Schwierigkeiten mit der Anwendung von relevanten Grundvorstellungen der Multiplikation und Division im Sachkontext besitzen. Insbesondere erscheinen die Verhältnisvorstellung und die Vorstellung des Aufteilens/Ausmessens im Umgang mit entsprechenden Aufgabenstellungen bei einem Teil der Studierenden nicht flexibel anwendbar zu sein.

Im Sinne des Design-Based-Research Ansatzes konnte im Rahmen dieser Arbeit in Bezug auf einige Punkte durch die erfolgte Inhaltsanalyse auch ein Verbesserungspotenzial für die Lehrveranstaltung identifiziert werden. Inhaltlich anknüpfend an die identifizierten Schwierigkeiten der Studierenden konnte ich feststellen, dass die Grundvorstellungen des Bruchzahlbegriffs zwar ausführlich unter Rückgriff auf die klassischen Zahlaspekte behandelt wurden, allerdings erscheint mir die Darstellung des Verhältnisaspektes optimierbar zu sein. Dieser wurde in der Lehrveranstaltung dahingehend akzentuiert, dass er breiter als der Anteilsbegriff, nämlich auch für unechte Brüche anwendbar sei. Dadurch allein wird die inhaltliche Abgrenzung zwischen Anteil- und Verhältnisaspekt für die Studierenden nicht greifbar. Während der Anteil nur das Verhältnis zwischen Teil und Ganzem beschreibt und aus der sinnstiftenden Perspektive des Teilungsprozesses (Barzel, B. & Kleine, 2013) anschaulich wird, besteht das Wesen des Verhältnisaspekts darin, dass zwei völlig beliebige Größen zueinander in Bezug gesetzt werden können und dieses Verhältnis dann im Mittelpunkt der Betrachtung steht (ebd.). Diese inhaltliche Deutung sollte aus meiner Sicht stärker expliziert und auch die historische Errungenschaft ein Verhältnis als Bruchzahl zu beschreiben ausführlicher in den Blick genommen werden, um eine flexible Anwendung des Verhältnisaspekts zu ermöglichen.

In Bezug auf die Rechenverfahren Multiplikation und Division halte ich folgende Analyseergebnisse zur Optimierung der Lehre in Bezug auf notwendige Grundvorstellungen für relevant: Sowohl in der Vorlesung als auch in der Übung könnten die Grundvorstellungen und Vorstellungsumbrüche zur Multiplikation breiter erörtert werden. So sollte aus meiner Sicht unbedingt die Grundvorstellung der Skalierung behandelt werden, was bisher nicht geschehen ist, da diese ohne notwendigen Vorstellungsumbruch erweiterbar auf rationale Zahlen als Multiplikator ist und daher sinnstiftend dazu beitragen könnte die Fehlvorstellung ‚Multiplikation vergrößert immer' auf Basis einer konkreten Vorstellung zu überdenken. Auch bei der Behandlung der Grundvorstellungen und Vorstellungsumbrüche der Division sollte aus meiner Sicht breiter und präziser erarbeitet werden, welche der bereits bekannten Grundvorstellungen des Verteilens, Aufteilens und Ausmessens mit welchen anschaulichen Einschränkungen in welchen Fällen noch zum Tragen kommen können. Insbesondere sollte die im Rahmen der analysierten Lehrpassagen vertretene Behauptung, dass das ‚Verteilen bei einem Bruch als Divisor scheitert' auf Grundlage der in dieser Arbeit theoretisch hergeleiteten Ausführungen differenzierter betrachtet werden. So muss zwar für klassische

Verteilsituationen auf Kinder oder andere unteilbare Objekte/Subjekte die Grundvorstellung des Verteilens scheitern, allerdings kann zusammen mit einer quasikardinalen Betrachtung des Divisors das Verteilen für absolute Anteile oder gebrochen rationale Maßzahlen durchaus anwendbar bleiben und auch für größere Divisoren als Dividenden anschaulich sein.

Weiterhin zeigen die Untersuchungsergebnisse, dass selbst wenn SuS/Studierende in der Lage sind geeignete Grundvorstellungen explizierend zu nennen, damit nicht sichergestellt ist, dass diese auch flexibel im Aufgabenkontext angewendet werden können.

7. Fazit und Ausblick

Die Lehrpassagen der Vorlesung „Arithmetik und ihre Didaktik“ zur Bruchrechnung leisten einen entscheidenden Beitrag dazu, fachbezogenes Wissen zu diesem Inhaltsbereich bei den Studierenden erfolgreich aufzubauen. Insbesondere zeigen die Vorlesungen und Übungen ausführlich Inhalte und gangbare Wege operativen Handelns zum Aufbau von Grundvorstellungen von SuS zu den neuen Zahlen auf. Auch wenn der Aufbau und die Anwendung von Grundvorstellungen im Rahmen der Zahlenbereichserweiterung zu den positiven rationalen Zahlen unabdingbar ist zur Beherrschung und erfolgreichen Modellierung der Bruchrechnung, zeigen die zusammenfassenden Ausführungen aber auch, dass der Aufbau von sinnstiftenden Grundvorstellungen nicht leicht gelingt. Auf dem Weg dorthin könnte es aus meiner Sicht produktiv sein, im Rahmen der Bruchrechnung die Behandlung der Grundvorstellungen zu den Rechenverfahren der Multiplikation und Division noch zu ergänzen und auszuschärfen, sowie einen erfolgreichen Lernprozess in Vorlesung und Übung in Bezug auf deren Anwendung weiter zu stützen. Hierzu hielte ich es zur Anwendung von Grundvorstellungen und Aufbau einer Modellierungskompetenz für hilfreich, den Studierenden verstärkt verschiedene Sachkontexte der Bruchrechnung in Hinblick auf anwendbare Grundvorstellungen zu präsentieren und sie selbst analysieren zu lassen, sowie die bereits vorhandenen Übungen zur Erfindung von passenden Rechengeschichten auch für komplexe Aufgabenstellungen weiter auszubauen.

Auch für meine eigene spätere Lehrtätigkeit an einer Schule nehme ich für mich mit, wie wichtig die Behandlung von geeigneten Sachkontexten ist, um Grundvorstellungen aufzubauen und sinnvoll anwenden zu können und es entscheidend ist nach Einführung der Bruchrechnung und den daraus resultierenden Vorstellungsumbrüchen erneut intensiv Kontexte und Rechengeschichten im Zahlenraum $\mathbb{Q}^+$ mit den Kindern zu diskutieren und zu bearbeiten. Weiterhin ist für mich ein wichtiger Erkenntnisgewinn aus dieser Arbeit, dass sprachliche ‚von-Formulierungen‘ sowohl im Subtraktions-, als auch im Multiplikations- als auch im Verhältniskontext (absoluter Anteil) gedeutet werden können und es daher vielen Schülerinnen und Schülern schwer fällt entsprechende Aufgabenstellungen korrekt zu modellieren. So möchte ich final mit den Worten von Susanne Prediger (2004) meine Erkenntnis teilen, dass sowohl in der schulischen als auch der universitären Lehre bei der Behandlung des ‚von-Ansatzes‘ als multiplikative Grundvorstellung außerdem die sprachliche Anwendung der operativen Verknüpfung

‚von‘ in verschiedensten Fällen ausführlich thematisiert und eingeübt werden sollte, um notwendige Vorstellungsumbrüche und Schülerfehler „aufzugreifen“ und nicht zu „umschiffen“ (Prediger, 2004).

Da eine Analyse der Lehrprozesse allein nur sehr begrenzt Aussagen zum Lernen der Studierenden in den Lehrveranstaltungen hervorbringen kann, möchte ich folgenden Ausblick zu der erfolgten Untersuchung geben. Anhand der vorliegenden Beobachtungsdaten aus den Übungen scheint es lohnend, genauer zu analysieren, wie die Studierenden mit dem Wissen aus den Lehrveranstaltungen umgehen, und welche Verständnisschwierigkeiten bei der Bearbeitung der Aufgabenstellungen in den Übungen eventuell weiter bei den Studierenden zu identifizieren sind. Ein systematischer Überblick darüber, was die Studierenden im Rahmen der Bearbeitung der Aufgabenstellungen in den Gruppenarbeitsphasen der Übungen in den Mittelpunkt ihrer Überlegungen stellen, inwieweit sie sich bei der Analyse der Aufgaben auf die vermittelten Inhalte der Lehrveranstaltungen beziehen und wie sie das gelehrte Wissen im Aufgabenkontext anwenden, könnte Rückschlüsse auf weiteres Verbesserungspotenzial der Lehrveranstaltung geben. Ein besonderer Fokus dieser vertieften Untersuchung könnte darauf liegen durch eine qualitative Inhaltsanalyse zu identifizieren, welche Schwierigkeiten, Unklarheiten oder Fehlvorstellungen eventuell weiterhin bei den Studierenden vorliegen.

Literaturverzeichnis

Barzel, B. & Holzäpfel, L. (2017). Strukturen als Basis der Algebra. *Mathematik lehren, 202*, 2-8.

Barzel, B. & Kleine, M. (2013). Verhältnisse. Ein Thema quer durch die Schulmathematik. *Mathematik lehren, 30* (179), 2-8.

Baumert, J. & Kunter, M. (2011). Das Kompetenzmodell von COACTIV. In M. Kunter, J. Baumert, W. Blum, U. Klusmann, S. Krauss & M. Neubrand (Hrsg.), *Professionelle Kompetenz von Lehrkräften. Ergebnisse des Forschungsprogramms COACTIV* (S. 29-53). Münster u.a.: Waxmann.

Blum, W., vom Hofe, R., Jordan, A. & Kleine, M. (2004). Grundvorstellungen als aufgabenanalytisches und diagnostisches Instrument bei PISA. In M. Neubrand (Hrsg.), *Mathematische Kompetenzen von Schülerinnen und Schülern in Deutschland. Vertiefende Analysen im Rahmen von PISA 2000* (1. Aufl., S. 145-158). Wiesbaden: VS, Verl. für Sozialwiss.

Braithwaite, D. W. & Siegler, R. S. (2018). Developmental Changes in the Whole Number Bias. *Developmental Science, 21* (2), (13 Seiten).

Bruner, J. S. & Harttung, A. (1974). *Entwurf einer Unterrichtstheorie* (Sprache und Lernen, Bd. 5). Berlin: Berlin-Verl.; Schwann.

Büchter, A. & Henn, H.-W. (2015). Schulmathematik und Realität - Verstehen durch Anwenden. In R. Bruder, L. Hefendehl-Hebeker, B. Schmidt-Thieme & H.-G. Weigand (Hrsg.), *Handbuch der Mathematikdidaktik* (S. 19-50). Berlin: Springer Spektrum.

Christou, K. P. (2015). Natural Number Bias in Operations with Missing Numbers. *ZDM: The International Journal on Mathematics Education, 47* (5), 747-758 (12 Seiten).

Coskun, S. D. (2019). An Examination of Meanings and Error Types Associated with Pre-Service Elementary Teachers' Posed Problems for the Multiplication and Division of Fractions. *European Journal of Education Studies, 6* (4), 99-113 (15 Seiten).

Eichelmann, A., Narciss, S., Schnaubert, L. & Melis, E. (2012). Typische Fehler bei der Addition und Subtraktion von Brüchen - ein Review zu empirischen Fehleranalysen. *Journal für Mathematik-Didaktik, 33* (1), 29-57.

Fahse, C. (2014). Vorstellungen zur Null im Kontext der Division durch Null. *Mathematica didactica, 37,* 5-29.

Franke, M. (2003). *Didaktik des Sachrechnens in der Grundschule* (Mathematik Primar- und Sekundarstufe) [s.l.]: Springer Spektrum.

Gniewosz, B. (2015). Bebobachtung. In H. Reinders, H. Ditton, C. Gräsel & B. Gniewosz (Hrsg.), *Empirische Bildungsforschung. Strukturen und Methoden* (2., überarb. Aufl., S. 110-117). Wiesbaden: Springer Fachmedien Wiesbaden.

Hartinger, A. (2015). Empirische Zugänge. In J. Kahlert, M. Fölling-Albers, M. Götz, A. Hartinger, S. Miller & S. Wittkowske (Hrsg.), *Handbuch Didaktik des Sachunterrichts* (UTB Schulpädagogik, Bd. 8621, 2., aktualisierte und erweiterte Auflage, S. 47-51). Bad Heilbrunn: Verlag Julius Klinkhardt.

Häsel-Weide & Nührenbörger, M. (2012). *Fördern im Mathematikunterricht*. Frankfurt am Main: Grundschulverband.

Hefendehl-Hebeker, L. (1996). Brueche haben viele Gesichter. *Mathematik lehren* (78), 20-22,47-48.

Hefendehl-Hebeker, L. & Schwank, I. (2015). Arithmetik: Leitidee Zahl. In R. Bruder, L. Hefendehl-Hebeker, B. Schmidt-Thieme & H.-G. Weigand (Hrsg.), *Handbuch der Mathematikdidaktik* (S. 77-116). Berlin: Springer Spektrum.

Kuckartz, U. (2018). *Qualitative Inhaltsanalyse. Methoden, Praxis, Computerunterstützung* (Grundlagentexte Methoden, 4. Auflage). Weinheim: Beltz Juventa.

Kuhnke, K. (2013). *Vorgehensweisen von Grundschulkindern beim Darstellungswechsel*. Wiesbaden: Springer Fachmedien Wiesbaden.

Kunter, M., Baumert, J., Blum, W., Klusmann, U., Krauss, S. & Neubrand, M. (Hrsg.). (2011). *Professionelle Kompetenz von Lehrkräften. Ergebnisse des Forschungsprogramms COACTIV*. Münster u.a.: Waxmann.

Malle, G. (2004). Grundvorstellungen zu Bruchzahlen. *Mathematik lehren* (123), 4-8.

Mayring, P. (2002). *Einführung in die qualitative Sozialforschung. Eine Anleitung zu qualitativem Denken* (Studium Paedagogik, 5., überarbeitete und neu ausgestattete Auflage). Weinheim: Beltz Verlag.

Mayring, P. (2015). *Qualitative Inhaltsanalyse. Grundlagen und Techniken* (Beltz Pädagogik, 12., überarb. Aufl.). Weinheim: Beltz.

Ni, Y. & Zhou, Y.-D. (2005). Teaching and Learning Fraction and Rational Numbers: The Origins and Implications of Whole Number Bias. *Educational Psychologist, 40* (1), 27-52 (26 Seiten).

Padberg, F. & Benz, C. (2011). *Didaktik der Arithmetik. Für Lehrerausbildung und Lehrerfortbildung* (Mathematik Primarstufe und Sekundarstufe I + II, 4. erweiterte, stark überarbeitete Auflage). Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag.

Padberg, F., Danckwerts, R. & Stein, M. (1995). *Zahlbereiche. Eine elementare Einführung* (Mathematik Primarstufe und Sekundarstufe I + II). Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag.

Padberg, F. & Wartha, S. (2017). *Didaktik der Bruchrechnung* (Mathematik Primarstufe und Sekundarstufe I + II, 5. Auflage). Berlin: Springer Spektrum.

Pilchner, J. (2010). *Schülervorstellungen zu Bruchzahlen und deren Multiplikation. Eine empirische Studie mit Siebtklässlern* (1. Aufl.). Hamburg: Diplomica Verlag.

Prediger, S. (2004). Brüche bei den Brüchen - aufgreifen oder umschiffen? *Mathematik lehren* (123), 10-13.

Prediger, S. (2011). Why Johnny Can't Apply Multiplication? Revisiting the Choice of Operations with Fractions. *International Electronic Journal of Mathematics Education, 6* (2), 65-88.

Rädiker, S. & Kuckartz, U. (2019). *Analyse qualitativer Daten mit MAXQDA. Text, Audio und Video*. Wiesbaden: Springer Fachmedien Wiesbaden.

Reinders, H. & Ditton, H. (2015). Überblick Forschungsmethoden. In H. Reinders, H. Ditton, C. Gräsel & B. Gniewosz (Hrsg.), *Empirische Bildungsforschung. Strukturen und Methoden* (2., überarb. Aufl., S. 49-56). Wiesbaden: Springer Fachmedien Wiesbaden.

Reinmann, G. (2005). Innovation ohne Forschung? Ein Plädoyer für den Design-Based Research-Ansatz in der Lehr-Lernforschung. *Unterrichtswissenschaft, 33* (1), 52-69.

Reitz-Koncebovski, K. (2018a). *Didaktik der Bruchrechnung. 8. Vorlesung: Division von Brüchen/ Brüche bei den Brüchen*. Potsdam: Universität Potsdam.

Reitz-Koncebovski, K. (2018b, 31. Oktober). *Didaktik der Bruchrechnung. 2.Vorlesung: Was sind Brüche/Bruchzahlen überhaupt?* Potsdam: Universität Potsdam.

Reitz-Koncebovski, K. (August 2019). *Gestaltungsprinzipien für neue Lehrveranstaltungen, die Fachwissenschaft und Fachdidaktik Mathematik verknüpfen. Handreichung für die Konzeption und Beobachtungsinstrument*. Potsdam: Universität Potsdam.

Reitz-Koncebovski, K. (Mai 2021). *Gestaltungsprinzipien Kodierleitfaden*. Potsdam: Universität Potsdam.

Reitz-Koncebovski, K., Hermanns, J., Kortenkamp, U. & Kuzle, A. (2020). Projekt SPIES zur Professionalisierung der Lehrerbildung Mathematik. Qualitätsoffensive Lehrerbildung an der Universität Potsdam. *Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik* (109), 25-30.

Schink, A. & Meyer, M. (2013). Teile vom Ganzen - Brüche beziehungsreich verstehen. *PM: Praxis der Mathematik in der Schule, 55* (52), 2-8.

Schreiber, C., Schütte, M. & Krummheuer, G. (2015). Qualitative mathematikdidaktische Forschung: Das Wechselspiel zwischen Theorieentwicklung und Adaption von Untersuchungsmethoden. In R. Bruder, L. Hefendehl-Hebeker, B. Schmidt-Thieme & H.-G. Weigand (Hrsg.), *Handbuch der Mathematikdidaktik* (S. 591-612). Berlin: Springer Spektrum.

Spiegel, H. & Fromm, A. (1996). Eigene Wege beim Dividieren - Bericht über eine Untersuchung zu Beginn des 3. Schuljahres. In G. Kadunz (Hrsg.), *Trends und Perspektiven. Beiträge zum 7. Internationalen Symposium zur "Didaktik der Mathematik" in Klagenfurt vom 26. - 30.9.1994* (Schriftenreihe Didaktik der Mathematik, Bd. 23, S. 353-360). Wien: Hölder-Pichler-Tempsky.

Stampfer, F. (Universität Innsbruck, Hrsg.). (2021a). *echo-App. Bruchrechentest zum Natural Number Bias*. Verfügbar unter http://fachdidaktik-mathematik.uibk.ac.at:8080/#!/welcome

Stampfer, F. (2021b). *Rohdaten der Pre- und Posttestergebnisse des Operation-Teils des Bruchrechentests echo-App* (Weitergabe der Testergebnisse als E-mail vom 20.09.2021).

Stampfer, F. & Hell, T. (2018). Teufelskreis Natural Number Bias - Primarstufenstudierende im Fokus. In P. Bender & T. Wassong (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2018. Vorträge zur Mathematikdidaktik und zur Schnittstelle Mathematik/Mathematikdidaktik auf der gemeinsamen Jahrestagung GDM und DMV 2018 (52. Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik)* (S. 1727-1730). Münster: WTM Verlag für wissenschaftliche Texte und Medien.

Stampfer, F., Reitz-Koncebovski, K. & Hell, T. (2019, März). *Feststellung und Entwicklung des Natural Number Bias bei Lehramtsstudierenden in der fachdidaktischen Ausbildung*. GDM in Regensburg, Regensburg.

Stampfer, F., Reitz-Koncebovski, K. & Hell, T. (2020). Feststellung und Entwicklung des Natural Number Bias bei Lehramtsstudierenden in der fachdidaktischen Ausbildung. In A. Frank, S. Krauss & K. Binder (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2019. 53. Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik* (S. 781-784). Münster: WTM - Verlag für wissenschaftliche Texte und Medien.

Streit, C. & Barzel, B. (2013). Die Mischung macht's. Verhältnisse und Brüche - ein ambivalentes Verhältnis? *Mathematik lehren, 30* (179), 9-11.

Universität Potsdam. (2018). Fachspezifische Studien- und Prüfungsordnung für das Bachelorstudium im Fach Mathematik für das Lehramt für die Primarstufe an der Universität Potsdam. Vom 2. März 2018, 518-520. Zugriff am 12.10.2021.

Van Hoof, J., Lijnen, T., Verschaffel, L. & van Dooren, W. (2013). Are Secondary School Students Still Hampered by the Natural Number Bias? A Reaction Time Study on Fraction Comparison Tasks. *Research in Mathematics Education, 15* (2), 154-164 (11 Seiten).

Van Hoof, J., Verschaffel, L. & van Dooren, W. (2015). Inappropriately applying natural number properties in rational number tasks: characterizing the development of the natural number bias through primary and secondary education. *Educational Studies in Mathematics, 90* (1), 39-56.

Vollstedt, M., Ufer, S., Heinze, A. & Reiss, K. (2015). Forschungsgegenstände und Forschungsziele. In R. Bruder, L. Hefendehl-Hebeker, B. Schmidt-Thieme & H.-G. Weigand (Hrsg.), *Handbuch der Mathematikdidaktik* (S. 567-589). Berlin: Springer Spektrum.

Vom Hofe, R. (1995). *Grundvorstellungen mathematischer Inhalte* (Texte zur Didaktik der Mathematik). Zugl.: Kassel, Univ. Gesamthochsch., Diss., 1994. Heidelberg: Spektrum Akad. Verl.

Vom Hofe, R. (2003). Grundbildung durch Grundvorstellungen. *Mathematik lehren* (118), 4-8.

Wahl, D. (2002). Mit Training vom trägen Wissen zum kompetenten Handeln? Paralleltitel: With training from inert knowledge to competent acting? *Zeitschrift für Pädagogik, 48* (2), 227-241.

Wahl, D. (2012, 05. September). *2. PäB-Tagung: Gute Beratung nachhaltig gestalten*, Speyer. Zugriff am 25.08.2021. Verfügbar unter https://vdocuments.net/2-paeb-tagung-gute-beratung-nachhaltig-gestaltenbildung-rpdefileadminuseruploadbildung-rpdeberatungdownload.html

Wartha, S. (2009). Zur Entwicklung des Bruchzahlbegriffs - didaktische Analysen und empirische Befunde. *Journal für Mathematik-Didaktik, 30* (1), 55-79.

Winter, H. (1999). *Mehr Sinnstiftung, mehr Einsicht, mehr Leistungsfähigkeit im Mathematikunterricht, dargestellt am Beispiel der Bruchrechnung,* RWTH Aachen. Zugriff am 12.09.2021. Verfügbar unter http://www.matha.rwth-aachen.de/de/lehre/ss09/sfd/Bruchrechnen.pdf

Wittmann, E. C. (1985). Objekte-Operationen-Wirkungen: Das operative Prinzip in der Mathematikdidaktik. *Mathematik lehren* (11), 7-11.

Woehlecke, S., Massolt, J., Goral, J., Hassan-Yavu, S., Seider, J., Borowski, A. et al. (2017). Das erweiterte Fachwissen für den schulischen Kontext als fachübergreifendes Konstrukt und die Anwendung im universitären Lehramtsstudium. *Beiträge zur Lehrerinnen- und Lehrerbildung, 35 (3), 413-426.*

Anhang A: Vorstellung des Beobachtungsvorhabens in den Übungsgruppen

Vorstellungstext:

Hallo liebe Studierende,

mein Name ist Simon Fromm, ich studiere auch Lehramt für die Primarstufe mit dem Fach Mathematik und führe zur Zeit Beobachtungen für meine Masterarbeit durch. Inhaltlich soll es dabei um die Analyse von Lehrveranstaltungen im Fach Mathematik gehen und darum diese weiterzuentwickeln.

Der inhaltliche Fokus liegt auf der Bruchrechnung und speziell bei den Rechenoperationen mit Brüchen. Dabei habe ich vor allem die Vorlesungsvideos von Hrn. Kortenkamp im Blick, aber auch die Analyse der Übungen ist für mich von Interesse. Daher werde ich diese und voraussichtlich übernächste Sitzung als stiller Beobachter mit in den Übungsräumen sein. Für eine eventuell anstehende Arbeit in Break-Out-Sessions würde ich mich heute von X/Y/Z der Gruppe x zuordnen lassen. Selbstverständlich werde ich meine erstellten Beobachtungsnotizen vollständig anonymisieren und ausschließlich für meine Masterarbeit verwenden.

Ich wünsche euch viel Freude an der Mathedidaktik bei der Lehrveranstaltung und würde jetzt, wenn es keine Rückfrage gibt, meine Kamera und meinen Ton ausschalten für die weitere Übung.

Anhang B: Analysierte Dokumente und Codebuch der qualitativen Inhaltsanalyse

Quelle:	Datei: *Masterarbeit_Kategoriensystem.mx20*
Programm:	MAXQDA Analytics Pro 2020 (Release 20.4.1)
Ausdruck erstellt am:	03.01.2022

Liste der Dokumente	Art der Quelle:	Häufigkeit *n* der Codierung
Dokumente gesamt		314
Vorlesung		190
Ari_2020_21_ S02E07.3	Transkription	27
Aspekte-zu-Brüchen_S02.E07	Vorlesungsfolien	31
Ari_2020_21_ S02E07.4	Transkription	10
Aufbau-von-Grundvorstellungen_S02.E07	Vorlesungsfolien	9
Ari_2020_21_ S02E07.5	Transkription	6
Brüche-vergleichen_S02.E07	Vorlesungsfolien	4
Ari_2020_21_ S02E07.6	Transkription	11
Verfeinern-und-vergröbern_S02.E07	Vorlesungsfolien	6
Ari_2020_21_ S02E08.1	Transkription	10
Aufgepasst-bei-den-Grundvorstellungen_S02.E08-1	Vorlesungsfolien	13
Ari_2020_21_ S02E09.1	Transkription	10
Die-von-Sprechweise_S02.E09	Vorlesungsfolien	9
Ari_2020_21_ S02E09.2	Transkription	8
Division-von-Brüchen_S02.E09	Vorlesungsfolien	10
Ari_2020_21_ S02E09.3	Transkription	18
ZBE-machen-etwas-kaputt_S02.E09	Vorlesungsfolien	8
Übungen		123
S02_UE_07_PP	Übungsfolien	10
Schülerlösungen Vergleich von Brüchen	Arbeitsauftrag	5
S02_UE_09_PP	Übungsfolien	7
Schülerlösungen Multiplikation_Division	Arbeitsauftrag	5
2021-05-26_Beobachtungsprotokoll_X	Transkription	23
2021-05_26_Beobachtungsprotokoll_Y	Transkription	33
2021-06-08_Beobachtungsprotokoll_Z	Transkription	19
2021-06-09_Beobachtungsprotokoll_Y	Transkription	22

Dokumentgruppen: 2

Dokumentsets: 0

Text-Dokumente: 12

PDF-Dokumente: 12

Anhang B

Codes: 140

Codierte Segmente: 314

Memos: 112

Dokument-Memos: 0

Memos in Dokumenten: 8

Code-Memos: 104

Anhang B

Codebuch

Codesystem

1 G: Grundprinzipien der Mathematikdidaktik verfolgen	0
1.1 G: EIS, Veranschaulichung, Darstellungswechsel	0
1.2 G: Lebensweltbezug	0
1.3 G: Das operative Prinzip	0
1.4 G: Grundvorstellungen	0
1.4.1 Grundvorstellungen der Bruchzahlen (Zahlaspekte)	0
1.4.1.1 Übersicht über die Zahlaspekte	4
1.4.1.1.1 Zuordnung von Zahlaspekten zu Beispielen	4
1.4.1.2 Bruchzahlen als absoluter Anteil	4
1.4.1.3 Quasiordinalaspekt	2
1.4.1.4 Rechenzahlaspekt	2
1.4.1.5 Verhältnisaspekt	3
1.4.1.6 Anteilaspekt	2
1.4.1.7 Quasikardinalaspekt	2
1.4.1.8 Operatoraspekt	2
1.4.1.9 Größen-/Maßzahlaspekt	3
1.4.1.10 Zusammenhänge/Unterschiede zwischen den Grundvorstellungen	3
1.4.1.11 Aufbau von Grundvorstellungen zu Brüchen...	4
1.4.1.11.1 durch Lebensweltbezug beim...	0
1.4.1.11.1.1 suchen in der Umwelt nach Brüchen	2
1.4.1.11.1.2 behandeln der Zahlaspekte	3
1.4.1.11.1.3 Herstellen von Brüchen	7
1.4.1.11.2 durch das operative Prinzip beim...	0
1.4.1.11.2.1 Vergröbern und Verfeinern	4
1.4.1.11.2.2 Brüche vergleichen	3
1.4.1.11.2.3 Herstellen von Brüchen	9
1.4.1.11.3 durch EIS, Veranschaulichung, Darstellungswechsel beim...	1
1.4.1.11.3.1 Brüche vergleichen	1
1.4.1.11.3.2 Herstellen/Darstellen von Brüchen	6
1.4.2 Grundvorstellungen zu den Rechenoperationen in N	3
1.4.3 Grundvorstellungen zu den Rechenoperationen in Q+	0
1.4.3.1 Grundvorstellungen der Multiplikation	0
1.4.3.1.1 Fall1: Bruch mal natürliche Zahl	1
1.4.3.1.1.1 von-Interpretation der Multiplikation	1

1.4.3.1.1.2 wiederholte Addition	2
1.4.3.1.2 Fall2: Multiplikation zweier Bruchzahlen	0
1.4.3.1.2.1 von-Interpretation der Multiplikation	6
1.4.3.1.2.1.1 andere Nutzung von "von"	2
1.4.3.2 Grundvorstellungen der Division	3
1.4.3.2.1 Aufteilen	1
1.4.3.2.2 Ausgleichen	1
1.4.3.2.3 Ausmessen	2
1.4.3.2.4 Verteilen	2
1.4.3.2.5 Division als Umkehroperation	4
1.4.3.3 inhaltliche Herleitung der Divisionsregel	5
1.4.3.4 Aufbau von Grundvorstellungen zu Rechenoperationen...	0
1.4.3.4.1 durch Lebensweltbezug	1
1.4.3.4.2 durch das operative Prinzip	1
1.4.4 inhaltliche Vorstellung zur Größe von Brüchen	3
1.4.5 formalisiertes Rechnen ohne Grundvorstellungen	2
1.5 G: typische Fehler/Fehlvorstellungen behandeln	1
1.5.1 Aufgabenstellungen zur Analyse von Fehlvorstellungen	6
1.5.2 vorliegende Fehler/Fehlvorstellungen	0
1.5.2.1 Akzeptanz nur von echten Brüchen	2
1.5.2.2 Bruchteile von Zeiteinheiten im Hexagesimalsystem	1
1.5.2.3 Verwechselung Erweitern-Multiplizieren	3
1.5.2.4 falsche Addition	15
1.5.2.5 Natural Number Bias (NNB)	1
1.5.2.5.1 Mangelndes Bruchzahlverständnis Z und N einzeln betrachtet	9
1.5.2.5.2 Multiplikation vergrößert immer	2
1.5.2.5.3 Division verkleinert immer	3
1.5.3 Notwendige Vorstellungsumbrüche thematisieren	0
1.5.3.1 beim Übergang von N zu Z	0
1.5.3.1.1 bzgl. Ordnung	0
1.5.3.1.1.1 Es gibt nicht immer eine kleinere Zahl	1
1.5.3.1.1.2 Es gibt eine kleinste Zahl	1
1.5.3.1.2 bzgl. Rechenoperationen	0
1.5.3.1.2.1 Subtraktion verkleinert immer	1
1.5.3.1.2.2 Addition vergrößert immer	1
1.5.3.1.2.3 Subtraktion ist nicht immer möglich	1
1.5.3.2 beim Übergang von N zu Q+	0

1.5.3.2.1 bzgl. Bruchzahlaspekten	2
1.5.3.2.2 bzgl. Rechenoperationen	0
1.5.3.2.2.1 bzgl. Grundvorstellungen der Multiplikation	0
1.5.3.2.2.1.1 wiederholte Addition	2
1.5.3.2.2.1.2 Multiplikation vergrößert immer	1
1.5.3.2.2.2 bzgl. Grundvorstellungen der Division	0
1.5.3.2.2.2.1 Verteilen	4
1.5.3.2.2.2.2 Konzept der Teilbarkeit	1
1.5.3.2.2.2.3 Division ist nur durch Teiler des Dividenden möglich	1
1.5.3.2.2.2.4 Division verkleinert immer	2
1.5.3.2.3 bzgl. Zahldarstellungen	0
1.5.3.2.3.1 die Darstellung der Zahl ist eindeutig	1
1.5.3.2.3.2 je mehr Ziffern die Zahl, desto größer ist sie	1
1.5.3.2.4 bzgl. Ordnung/Dichte	0
1.5.3.2.4.1 Es gibt eine kleinste Zahl >0	1
1.5.3.2.4.2 Abstand zwischen zwei Zahlen ist >=1	1
1.5.3.2.4.3 Es gibt nicht immer eine weitere Zahl zwischen zwei Zahlen	3
1.5.3.2.4.4 Es gibt eine nächstgrößere Zahl	1
1.5.3.2.4.5 jede Teilmenge hat ein kleinstes Element	1
1.6 G: weitere	0
2 MG: Metaebene zu Gestaltungsprinzip G	0
2.1 MG: Expliziter Bezug auf ein fachdidaktisches Grundprinzip	0
2.1.1 Bezug zu Grundvorstellungen	0
2.1.1.1 Vorstellungsaufbau vor der Einführung von Merksätzen und Regeln	10
2.1.1.2 andere Bezüge	2
2.1.2 Bezug zu Fehlvorstellungen	0
2.1.2.1 Thematisierung von Fehlvorstellungen	3
2.1.2.2 Fehlvorstellung durch zu frühe Regeleinführung	2
2.1.2.3 andere Bezüge	1
2.1.3 Bezug zu anderen Grundprinzipien	5
2.2 MG: Vertikale Querverbindung	0
2.2.1 zu Zahlaspekten in N	6
2.2.2 zu Gundvorstellungen von Rechenoperationen	1
2.2.2.1 zu Grundvorstellungen der Division in N	4
2.3 MG: Horizontale Querverbindung	3

2.4 MG: Fachdidaktisches Überblickswissen	0
2.4.1 in Bezug auf Zahlaspekte	2
2.4.2 in Bezug auf Vorstellungsumbrüche	4
3 P: Pädagogischer Doppeldecker	0
3.1 P: EIS, Veranschaulichung, Darstellungswechsel	16
3.2 P: Lebensweltbezug	4
3.3 P: das operative Prinzip	13
3.4 P: Grundvorstellungen	0
3.5 P: typische Fehler/Fehlvorstellungen behandeln	13
3.6 P: weitere	0
4 MP: Metaebene zu Gestaltungsprinzip P	0
4.1 Hochschuldidaktisches Handeln transparent machen	0
5 L: Lernumgebungen: Lernprozesse von SuS erfahrbar machen	14
6 ML: Metabebene zu Gestaltungsprinzip L	0
6.1 ML: Reflexion der Studierenden über L anregen	2
6.2 ML: Hochschuldidaktisches Handeln transparent machen	1
7 diskutierbare/optimierbare Lehrinhalte	0
7.1 in folgenden Inhaltsbereichen	0
7.1.1 Zahlaspekte in Q	0
7.1.1.1 Operator- vs. Quasikardinalaspekt	1
7.1.1.2 Nutzen des Anteilaspekts	1
7.1.1.3 Anteils- vs. Verhältnisaspekt	4
7.1.1.4 Erläuterung Rechenzahlaspekt	2
7.1.1.5 Übersicht Zahlaspekte	1
7.1.2 Grundvorstellungen der Multiplikation in Q	2
7.1.3 Grundvorstellungen der Division in Q	0
7.1.3.1 Verteilen scheitert bei Division durch Bruch	2
7.1.3.2 Modellierung Division durch einen Bruch als Aufteilaufgabe	5
7.1.3.3 Modellierung Division durch einen Bruch als Verteilaufgabe	1
7.1.4 weitere	0
7.1.4.1 unpräzise Aussagenformulierung	1
7.1.4.2 Viertel in Rechteckdarstellung	2
8 B:Begriffsbildung, Begriffsklärung	4
9 MB: Metaebene zu Gestaltungsprinzip B	1

Anhang B

1 G: Grundprinzipien der Mathematikdidaktik verfolgen

Kategoriendefinition: Didaktische Inhalte auf grundlegende didaktische Prinzipien beziehen, didaktische Grundprinzipien durch unterschiedliche Themengebiete hindurch verfolgen; Insbesondere: Grundvorstellungen, EIS & Darstellungswechsel, Lebensweltbezug, das operative Prinzip, typische Fehler thematisieren, ...

1.1 G: EIS, Veranschaulichung, Darstellungswechsel

Kategoriendefinition: EIS; zwischen Darstellungsebenen wechseln/übersetzen; Veranschaulichung durch analoge und digitale Medien auf Ebene der lernenden Kinder

1.2 G: Lebensweltbezug

Kategoriendefinition: Die fachlichen Inhalte auf die Lebenswelt (auf Ebene der lernenden Kinder) beziehen

1.3 G: Das operative Prinzip

Kategoriendefinition:
Anwendung des operativen Prinzips nach Wittmann (1985) auf Ebene der lernenden Kinder

1.4 G: Grundvorstellungen

Kategoriendefinition: Umfasst alle Kodierungen zum Aufbau von Grundvorstellungen (wie mache ich das? - prozedural) und Beschreibung von Grundvorstellungen (Welche gibt es - inhaltlich) zu Brüchen und Operationen auf Ebene der lernenden Kinder

1.4.1 Grundvorstellungen der Bruchzahlen (Zahlaspekte)

Kategoriendefinition: Umfasst alle Kodierungen, in denen die Grundvorstellungen/Zahlaspekte für Bruchzahlen wiedergegeben, erläutert, behandelt werden

1.4.1.1 Übersicht über die Zahlaspekte

Kategoriendefinition: Umfasst alle Kodierungen, in denen eine Übersicht über die verschiedenen Zahldarstellungen aufgegriffen wird und diese lebensweltlichen Beispielen zugeordnet werden

1.4.1.1.1 Zuordnung von Zahlaspekten zu Beispielen

1.4.1.2 Bruchzahlen als absoluter Anteil

Kategoriendefinition: Umfasst alle Kodierungen, die die Beschreibung von Bruchzahlen als Einheiten einer Gesamtmenge von Objekten/Subjekten (im Sinne einer statistischen Anwendung) durch die Verbalisierung "x von y" erläutern, behandeln, aufgreifen, welche von Malle (2004) als "Bruchzahlen als absoluter Anteil" kategorisiert werden.

Ankerbeispiele: 3 von 6 Personen, 2 von 100 Glühbirnen

1.4.1.3 Quasiordinalaspekt

Kategoriendefinition: Umfasst alle Kodierungen, die den Quasiordinalaspekt erläutern, behandeln, aufgreifen

1.4.1.4 Rechenzahlaspekt

Kategoriendefinition: Umfasst alle Kodierungen, die den Rechenzahlaspekt erläutern, behandeln, aufgreifen

1.4.1.5 Verhältnisaspekt

Kategoriendefinition: Umfasst alle Kodierungen, die den Verhältnisaspekt erläutern, behandeln, aufgreifen

1.4.1.6 Anteilaspekt

Kategoriendefinition: Umfasst alle Kodierungen, die den Anteilaspekt erläutern, behandeln, aufgreifen

1.4.1.7 Quasikardinalaspekt

Kategoriendefinition: Umfasst alle Kodierungen, die den Quasikardinalaspekt erläutern, behandeln, aufgreifen

1.4.1.8 Operatoraspekt

Kategoriendefinition: Umfasst alle Kodierungen, die den Operatoraspekt erläutern, behandeln, aufgreifen

1.4.1.9 Größen-/Maßzahlaspekt

Kategoriendefinition: Umfasst alle Kodierungen, die den Größen-/Maßzahlaspekt erläutern, behandeln, aufgreifen

1.4.1.10 Zusammenhänge/Unterschiede zwischen den Grundvorstellungen

Kategoriendefinition: Umfasst alle Kodierungen, die Zusammenhänge oder Unterschiede zwischen Grundvorstellungen zu Bruchzahlen, also deren Vergleich, thematisieren

1.4.1.11 Aufbau von Grundvorstellungen zu Brüchen...

Kategoriendefinition: Umfasst alle Kodierungen, die den Aufbau von Grundvorstellungen durch verschiedene didaktische Prinzipien beim Umgang mit Brüchen behandeln

1.4.1.11.1 durch Lebensweltbezug beim...

Kategoriendefinition: Umfasst alle Kodierungen, die den Aufbau von Grundvorstellungen durch das Prinzip Lebensweltbezug beim Umgang mit Brüchen behandeln

1.4.1.11.1.1 suchen in der Umwelt nach Brüchen

1.4.1.11.1.2 behandeln der Zahlaspekte

1.4.1.11.1.3 Herstellen von Brüchen

1.4.1.11.2 durch das operative Prinzip beim...

Kategoriendefinition: Umfasst alle Kodierungen, die den Aufbau von Grundvorstellungen durch das operative Prinzip beim Umgang mit Brüchen behandeln

1.4.1.11.2.1 Vergröbern und Verfeinern

1.4.1.11.2.2 Brüche vergleichen

1.4.1.11.2.3 Herstellen von Brüchen

1.4.1.11.3 durch EIS, Veranschaulichung, Darstellungswechsel beim...

Kategoriendefinition: Umfasst alle Kodierungen, die den Aufbau von Grundvorstellungen durch das Prnzip: EIS, Veranschaulichung, Darstellungswechsel behandeln, z. B. auch durch die Nutzung von Modellen (Veranschaulichung)

1.4.1.11.3.1 Brüche vergleichen

1.4.1.11.3.2 Herstellen/Darstellen von Brüchen

1.4.2 Grundvorstellungen zu den Rechenoperationen in N

Kategoriendefinition: Umfasst alle Kodierungen, in denen die Grundvorstellungen zu den Rechenoperationen für natürliche Zahlen wiedergegeben, aufgegriffen werden

1.4.3 Grundvorstellungen zu den Rechenoperationen in Q+

Kategoriendefinition: Umfasst alle Kodierungen, in denen die Grundvorstellungen zu den Rechenoperationen Multiplikation und Division für eine Operation mit mindestens einer Bruchzahl wiedergegeben, aufgegriffen werden

1.4.3.1 Grundvorstellungen der Multiplikation

Kategoriendefinition: Umfasst alle Kodierungen, in denen die Grundvorstellungen zur Multiplikation, bei der mindestens ein Faktor eine Bruchzahl darstellt, wiedergegeben bzw. aufgegriffen werden

1.4.3.1.1 Fall1: Bruch mal natürliche Zahl

Kategoriendefinition: Umfasst alle Kodierungen, die Grundvorstellungen zum Spezialfall 1 der Multiplikation einer Bruchzahl mit einer natürlichen Zahl behandelt

1.4.3.1.1.1 von-Interpretation der Multiplikation

Kategoriendefinition: Umfasst alle Kodierungen, die die von-Interpretation der multiplikativen Verknüpfung einer Bruchzahl in Gestalt eines Anteils oder Operators mit einer natürlichen Zahl behandelt

1.4.3.1.1.2 wiederholte Addition

Kategoriendefinition: Umfasst alle Kodierungen, die die Grundvorstellung der wiederholten Addition einer Bruchzahl durch eine natürliche Zahl behandeln; bzw. die Grundvorstellung des "Vervielfachens/Vereinigens" behandeln

1.4.3.1.2 Fall2: Multiplikation zweier Bruchzahlen

Kategoriendefinition: Umfasst alle Kodierungen, die Grundvorstellungen zum Spezialfall 2 der Multiplikation von zwei Bruchzahlen behandelt

1.4.3.1.2.1 von-Interpretation der Multiplikation

Kategoriendefinition: Umfasst alle Kodierungen, die die von-Interpretation der multiplikativen Verknüpfung einer Bruchzahl in Gestalt eines Anteils oder Operators mit einer weiteren Bruchzahl behandelt.

1.4.3.1.2.1.1 andere Nutzung von "von"

Kategoriendefinition: Umfasst alle Kodierungen, die den weiteren semantischen bzw. mathematischen Gebrauch des 'von' behandelt, der nicht im multiplikativen Kontext steht, bzw. eine verständnisförderliche Sprechweise der multiplikativen Verknüpfung mit Hilfe des von schon im Raum der natürlichen Zahle anbahnt (das 4-fache von 6 Äpfeln, das Doppelte von, das Halbe von)
von-Interpretation der multiplikativen Verknüpfung einer Bruchzahl in Gestalt eines Anteils oder Operators mit einer natürlichen Zahl behandelt

1.4.3.2 Grundvorstellungen der Division

Kategoriendefinition: Umfasst alle Kodierungen, in denen die Grundvorstellungen zur Division, bei der mindestens der Dividend oder der Divisor eine Bruchzahl darstellt, wiedergegeben bzw. aufgegriffen, behandelt werden; Diese Kategorie wird nur für die Fälle codiert, bei denen allein die Grundvorstellung behandelt wird ohne auf einen notwendigen Vorstellungsumbruch einzugehen (dann erfolgte Codierung in der Kategorie "Notwendige Vorstellungsumbrüche thematisieren")

1.4.3.2.1 Aufteilen

Kategoriendefinition: Umfasst alle Kodierungen, in denen die Grundvorstellung des Aufteilens, bei der mindestens der Dividend, der Divisor oder der Quotient eine Bruchzahl darstellt, wiedergegeben bzw. aufgegriffen, behandelt werden; oder dazu von den Lehrenden Aufgabenbeispiele vorgestellt werden

1.4.3.2.2 Ausgleichen

Kategoriendefinition: Umfasst alle Kodierungen, in denen die Grundvorstellung des Ausgleichens, bei der mindestens der Dividend oder der Divisor oder der Quotiont eine Bruchzahl darstellt, wiedergegeben bzw. aufgegriffen, behandelt werden; oder dazu von den Lehrenden Aufgabenbeispiele vorgestellt werden

1.4.3.2.3 Ausmessen

Kategoriendefinition: Umfasst alle Kodierungen, in denen die Grundvorstellung des Ausmessens, bei der mindestens der Dividend, der Divisor oder der Quotient eine Bruchzahl darstellt, wiedergegeben bzw. aufgegriffen, behandelt werden; oder dazu von den Lehrenden Aufgabenbeispiele vorgestellt werden

1.4.3.2.4 Verteilen

Kategoriendefinition: Umfasst alle Kodierungen, in denen die Grundvorstellung des Verteilens, bei der mindestens der Dividend, der Divisor oder der Quotient eine Bruchzahl darstellt, wiedergegeben bzw. aufgegriffen, behandelt werden; oder dazu von den Lehrenden Aufgabenbeispiele vorgestellt werden

1.4.3.2.5 Division als Umkehroperation

Kategoriendefinition: Umfasst alle Kodierungen, in denen die Grundvorstellung Division als Umkehroperation, bei der mindestens der Dividend, der Divisor oder der Quotient eine Bruchzahl darstellt, wiedergegeben bzw. aufgegriffen, behandelt werden; oder dazu von den Lehrenden Aufgabenbeispiele vorgestellt werden

1.4.3.3 inhaltliche Herleitung der Divisionsregel

Kategoriendefinition: Umfasst alle Kodierungen, die die inhaltliche Herleitung der Divisionsregel behandeln

1.4.3.4 Aufbau von Grundvorstellungen zu Rechenoperationen...

Kategoriendefinition: Umfasst alle Kodierungen, die den Aufbau von Grundvorstellungen zu Rechenoperationen durch verschiedene didaktische Prinzipien behandeln

1.4.3.4.1 durch Lebensweltbezug

1.4.3.4.2 durch das operative Prinzip

1.4.4 inhaltliche Vorstellung zur Größe von Brüchen

Kategoriendefinition: Umfasst alle Kodierungen, die das Vorhandensein einer inhaltlichen Vorstellung zur Größe von Brüchen, im Rahmen des Vergleichs von Brüchen, behandeln

1.4.5 formalisiertes Rechnen ohne Grundvorstellungen

Kategoriendefinition: Umfasst alle Kodierungen, die behandeln/zeigen, dass auch bei formal richtigem Rechnen Grundvorstellungen fehlen können

1.5 G: typische Fehler/Fehlvorstellungen behandeln

Kategoriendefinition: Grundprinzipien der Mathematikdidaktik verfolgen: typische Fehler/Fehlvorstellungen sowie notwendige Vorstellungsumbrüche thematisieren auf Ebene der lernenden Kinder

1.5.1 Aufgabenstellungen zur Analyse von Fehlvorstellungen

Kategoriendefinition: Umfasst alle Kodierungen, die die Aufgabenstellungen zur Analyse von Schülervorstellungen/Fehlvorstellungen beschreiben.

1.5.2 vorliegende Fehler/Fehlvorstellungen

Kategoriendefinition: Umfasst alle Kodierungen, die vorliegende Fehler bzw. Fehlvorstellungen von SuS beschreiben, erläutern, einordnen, diese werden in Subkategorien nach Art des Fehlers geordnet

1.5.2.1 Akzeptanz nur von echten Brüchen

Kategoriendefinition: Umfasst alle Kodierungen, welche die Fehlvorstellung von SuS beschreiben, dass Bruchzahlen nur als echte Brüche (<1) auftreten können

1.5.2.2 Bruchteile von Zeiteinheiten im Hexagesimalsystem

Kategoriendefinition: Umfasst alle Kodierungen, die die falsche Umrechnung von Bruchteilen von Zeiteinheiten behandeln aufgrund des ungewohnten Hexagesimalsystems.

1.5.2.3 Verwechselung Erweitern-Multiplizieren

1.5.2.4 falsche Addition

Kategoriendefinition: Umfasst alle Kodierungen, die die falsche Addition behandeln, bei der Zähler + Zähler/Nenner +Nenner gerechnet wird.

1.5.2.5 Natural Number Bias (NNB)

Kategoriendefinition: Umfasst alle Kodierungen, die auf den Natural Number Bias als auftretendes Fehlermuster hinweisen/bzw. diesen thematisieren (falsche Übertragung von Rechenregeln und Grundvorstellungen aus den natürlichen Zahlen)

1.5.2.5.1 Mangelndes Bruchzahlverständnis Z und N einzeln betrachtet

Kategoriendefinition: Umfasst alle Kodierungen, bei denen thematisiert wird, dass Zähler und Nenner eines Bruches als einzelne Zahlen interpretiert wurden und nicht als eine Bruchzahl (mangelndes Bruchzahlverständnis)

1.5.2.5.2 Multiplikation vergrößert immer

Kategoriendefinition: Umfasst alle Kodierungen, die auf den NNB-Fehler "Multiplikation vergrößert immer" hinweisen/bzw. diesen thematisieren

1.5.2.5.3 Division verkleinert immer

Kategoriendefinition: Umfasst alle Kodierungen, die auf den NNB-Fehler "Division verkleinert immer" hinweisen/bzw. diesen thematisieren

1.5.3 Notwendige Vorstellungsumbrüche thematisieren

Kategoriendefinition: Umfasst alle Kodierungen, die notwendige Vorstellungsumbrüche bei einer Zahlenraumerweiterung thematisieren. Dabei werden bei der Thematisierung verschiedener notwendiger Umbrüche entsprechende Subkategorien so definiert, dass sie bezeichnen, welche Grundvorstellung durch die Zahlenraumerweiterung aus dem Raum der natürlichen Zahlen N erschüttert wird.

1.5.3.1 beim Übergang von N zu Z

Kategoriendefinition: Umfasst alle Kodierungen, die notwendige Vorstellungsumbrüche thematisieren,die **nur** bei der Zahlenraumerweiterung von N nach Z (und nicht auch bei der Zahlenraumerweiterung von N zu Q+) auftreten.

1.5.3.1.1 bzgl. Ordnung

Kategoriendefinition: Umfasst alle Kodierungen, die notwendige Vorstellungsumbrüche thematisieren,die bezüglich der Ordnung der Zahlen nur bei der Zahlenraumerweiterung von N nach Z auftreten.

1.5.3.1.1.1 Es gibt nicht immer eine kleinere Zahl

1.5.3.1.1.2 Es gibt eine kleinste Zahl

1.5.3.1.2 bzgl. Rechenoperationen

Kategoriendefinition: Umfasst alle Kodierungen, die notwendige Vorstellungsumbrüche thematisieren,die bezüglich der Durchführung der Rechenoperationen nur bei der Zahlenraumerweiterung von N nach Z auftreten.

1.5.3.1.2.1 Subtraktion verkleinert immer

1.5.3.1.2.2 Addition vergrößert immer

1.5.3.1.2.3 Subtraktion ist nicht immer möglich

1.5.3.2 beim Übergang von N zu Q+

Kategoriendefinition: Umfasst alle Kodierungen, die notwendige Vorstellungsumbrüche thematisieren,die bei der Zahlenraumerweiterung von N nach Q+ (positive rationale Zahlen) auftreten

1.5.3.2.1 bzgl. Bruchzahlaspekten

Kategoriendefinition: Umfasst alle Kodierungen, die notwendige Vorstellungsumbrüche thematisieren,die bezüglich der veränderten Grundvorstellungen zu Bruchzahlen (Zahlaspekte) bei der Zahlenraumerweiterung von N nach Q+ auftreten.

1.5.3.2.2 bzgl. Rechenoperationen

Kategoriendefinition: Umfasst alle Kodierungen, die notwendige Vorstellungsumbrüche thematisieren,die bezüglich der Durchführung der Rechenoperationen bei der Zahlenraumerweiterung von N nach Q+ auftreten.

1.5.3.2.2.1 bzgl. Grundvorstellungen der Multiplikation

Kategoriendefinition: Umfasst alle Kodierungen, die notwendige Vorstellungsumbrüche zu den Grundvorstellungen der Multiplikation thematisieren,welche bei der Zahlenraumerweiterung von N nach Q+ auftreten.

1.5.3.2.2.1.1 wiederholte Addition

1.5.3.2.2.1.2 Multiplikation vergrößert immer

1.5.3.2.2.2 bzgl. Grundvorstellungen der Division

Kategoriendefinition: Umfasst alle Kodierungen, die notwendige Vorstellungsumbrüche zu den Grundvorstellungen der Division thematisieren,welche bei der Zahlenraumerweiterung von N nach Q+ auftreten.

1.5.3.2.2.2.1 Verteilen

1.5.3.2.2.2.2 Konzept der Teilbarkeit

1.5.3.2.2.2.3 Division ist nur durch Teiler des Dividenden möglich

1.5.3.2.2.2.4 Division verkleinert immer

1.5.3.2.3 bzgl. Zahldarstellungen

Kategoriendefinition: Umfasst alle Kodierungen, die notwendige Vorstellungsumbrüche thematisieren,die bezüglich der Zahldarstellungen bei der Zahlenraumerweiterung von N nach Q+ auftreten.

1.5.3.2.3.1 die Darstellung der Zahl ist eindeutig

1.5.3.2.3.2 je mehr Ziffern die Zahl, desto größer ist sie

1.5.3.2.4 bzgl. Ordnung/Dichte

Kategoriendefinition: Umfasst alle Kodierungen, die notwendige Vorstellungsumbrüche thematisieren,die bezüglich der Ordnung/Dichte der Zahlen bei der Zahlenraumerweiterung von N nach Q+ auftreten.

1.5.3.2.4.1 Es gibt eine kleinste Zahl >0

1.5.3.2.4.2 Abstand zwischen zwei Zahlen ist >=1

1.5.3.2.4.3 Es gibt nicht immer eine weitere Zahl zwischen zwei Zahlen

1.5.3.2.4.4 Es gibt eine nächstgrößere Zahl

1.5.3.2.4.5 jede Teilmenge hat ein kleinstes Element

1.6 G: weitere

Kategoriendefinition:
Residualkategorie für weitere auffällige behandelte Grundprinzipien

2 MG: Metaebene zu Gestaltungsprinzip G

Kategoriedefinition:
Verbindungen zwischen fachdidaktischen Inhalten explizit machen und Querverbindungen explizieren (Zusammenhänge klar machen). Explizites Aufgreifen durch gemeinsames Gespräch, warum und wie die fachdidaktischen Inhalte behandelt wurden.

2.1 MG: Expliziter Bezug auf ein fachdidaktisches Grundprinzip

Kategoriendefinition:

Fachdidaktische Inhalte explizit auf Grundprinzipien der Mathematikdidaktik beziehen.
Hier nur detailliert ausgewertet für Bezug auf Grundvorstellungen und Fehlvorstellungen.

2.1.1 Bezug zu Grundvorstellungen

Kategoriendefinition: Expliziter Bezug auf das Grundprinzip Grundvorstellungen

2.1.1.1 Vorstellungsaufbau vor der Einführung von Merksätzen und Regeln

Kategoriendefinition: Expliziter Bezug auf das Grundprinzip Grundvorstellungen im Zusammenhang des notwendigen Vorstellungsaufbaus von Grundvorstellungen bevor Merksätze oder Regeln eingeführt werden

2.1.1.2 andere Bezüge

2.1.2 Bezug zu Fehlvorstellungen

Kategoriendefinition: Expliziter Bezug auf das Grundprinzip Fehlvorstellungen (inkl. Vorstellungsumbrüche)

2.1.2.1 Thematisierung von Fehlvorstellungen

Kategoriendefinition: Expliziter Bezug auf das Grundprinzip Fehlvorstellungen indem expliziert wird, dass Fehlvorstellungen im Unterricht zu thematisieren sind

2.1.2.2 Fehlvorstellung durch zu frühe Regeleinführung

Kategoriendefinition: Expliziter Bezug auf das Grundprinzip Fehlvorstellungen im Zusammenhang der Entstehung von Fehlvorstellungen durch zu frühe bzw. unreflektierte Regeleinführung

2.1.2.3 andere Bezüge

2.1.3 Bezug zu anderen Grundprinzipien

Kategoriendefinition: Expliziter Bezug auf eines der Grundprinzipien: EIS, Lebensweltbezug, operatives Prinzip

2.2 MG: Vertikale Querverbindung

Kategoriendefinition: Vertikale Querverbindung zwischen fachdidaktischen Inhalten explizit machen;
„Explizit machen" kann durch verschiedene Mittel geschehen: verbal, durch Tabelle, Schaubild, Organizer, Map o.ä.

2.2.1 zu Zahlaspekten in N

Kategoriendefinition: Umfasst Codierungen, die eine Vertikale Querverbindung zu Zahlaspekten in N explizit machen;
„Explizit machen" kann durch verschiedene Mittel geschehen: verbal, durch Tabelle, Schaubild, Organizer, Map o.ä.

2.2.2 zu Gundvorstellungen von Rechenoperationen

Kategoriendefinition: Umfasst Codierungen, die eine Vertikale Querverbindung zwischen Grundvorstellungen von Rechenoperationen aus N und Q explizit machen;
„Explizit machen" kann durch verschiedene Mittel geschehen: verbal, durch Tabelle, Schaubild, Organizer, Map o.ä.

2.2.2.1 zu Grundvorstellungen der Division in N

2.3 MG: Horizontale Querverbindung

Kategoriendefinition: Horizontale Querverbindung zwischen fachdidaktischen Inhalten explizit machen;
„Explizit machen" kann durch verschiedene Mittel geschehen: verbal, durch Tabelle, Schaubild, Organizer, Map o.ä.

2.4 MG: Fachdidaktisches Überblickswissen

Kategoriendefinition: Fachdidaktisches Überblickswissen explizit machen;
„Explizit machen" kann durch verschiedene Mittel geschehen: verbal, durch Tabelle, Schaubild, Organizer, Map o.ä.

2.4.1 in Bezug auf Zahlaspekte

Kategoriendefinition: Fachdidaktisches Überblickswissen zu Zusammenhängen zwischen Zahlaspekten explizit machen;
„Explizit machen" kann durch verschiedene Mittel geschehen: verbal, durch Tabelle, Schaubild, Organizer, Map o.ä.

2.4.2 in Bezug auf Vorstellungsumbrüche

Kategoriendefinition: Fachdidaktisches Überblickswissen zu notwendigen Vorstellungsumbrüchen beim Übergang von N nach Q explizit machen;
„Explizit machen" kann durch verschiedene Mittel geschehen: verbal, durch Tabelle, Schaubild, Organizer, Map o.ä.

3 P: Pädagogischer Doppeldecker

Kategoriedefinition: Eines der didaktischen Grundprinzipien (Gestaltungsprinzip G) im Sinne des „Pädagogischen Doppeldeckers" (Wahl, 2002) in der Lehrveranstaltung anwenden bzw. realisieren um das Verständnis der Studierenden zu stützen

3.1 P: EIS, Veranschaulichung, Darstellungswechsel

Kategoriendefinition: Ein didaktisches Grundprinzip (Gestaltungsprinzip G) im Sinne des „Pädagogischen Doppeldeckers" (Wahl, 2002) in der Lehrveranstaltung anwenden bzw. realisieren: EIS, Veranschaulichung durch analoge und digitale Medien, zwischen Darstellungsebenen wechseln/ übersetzen um das Verständnis der Studierenden zu stützen

3.2 P: Lebensweltbezug

Kategoriendefinition: Es werden Probleme vorgestellt mit Lebensweltbezug zu der Welt der Studierenden um das Verständnis der Studierenden zu stützen
Ankerbeispiel: Verhältnis Brutto zu Netto

3.3 P: das operative Prinzip

Kategoriendefinition: Das operative Prinzip nach Wittmann wird angewandt um das Verständnis der Studierenden zu stützen

3.4 P: Grundvorstellungen

Kategoriendefinition: Aufbau von neuen Grundvorstellungen bei den Studierenden durch Beschreibung und Erörterung der neuen Vorstellung um das Verständnis der Studierenden zu stützen (kommt im Rahmen des Themas nicht vor)

3.5 P: typische Fehler/Fehlvorstellungen behandeln

Kategoriendefinition:
Thematisierung typischer Fehler/Fehlvorstellungen und notwendiger Vorstellungsumbrüche der Studierenden zum besseren Verständnis der Studierenden.

3.6 P: weitere

Residualkategorie für weitere beobachtete Anwendungen des Pädagogischen Doppeldeckers

4 MP: Metaebene zu Gestaltungsprinzip P

Kategoriendefinition:
Hochschuldidaktisches Handeln hinsichtlich der Anwendung des Pädagogischen Doppeldeckers explizit/transparent machen

4.1 Hochschuldidaktisches Handeln transparent machen

5 L: Lernumgebungen: Lernprozesse von SuS erfahrbar machen

Kategoriendefinition:

Lernprozesse von SchülerInnen erfahrbar machen,
indem Studierende durch geeignete Lernumgebungen in die Lernsituation von Schülerinnen und Schülern versetzt werden;
dadurch Lernhürden erkennen, fachliche Inhalte auf höherer Ebene verstehen, Lernprozesse reflektieren;

Typischerweise sind diese Lernumgebungen fachlich nicht in der Schulmathematik angesiedelt.
Das ist jedoch kein Ausschlusskriterium, denn es gibt Inhalte der Schulmathematik, die auch für Studierende herausfordernd sind.
Entscheidendes Kriterium ist der Fokus auf die Lernprozesse und -hürden von Schülerinnen und Schülern.

6 ML: Metabebene zu Gestaltungsprinzip L

Kategoriedefinition:
Hochschuldidaktisches Handeln - hier konkret die Idee, Studierende in die Lernsituation von SuS zu bringen - explizit machen

6.1 ML: Reflexion der Studierenden über L anregen

Kategoriendefinition:

Reflexion der Studierenden über Lernprozesse aus Schüler*innensicht anregen

6.2 ML: Hochschuldidaktisches Handeln transparent machen

Kategoriendefinition: Hochschuldidaktisches Handeln - hier konkret die Idee, Studierende in die Lernsituation von SuS zu bringen - explizit machen

Anhang B

7 diskutierbare/optimierbare Lehrinhalte

Kategoriendefinition:
alle Passagen aus den Lehrveranstaltungen die auf Grundlage des Theorieteils optimierbar bzw. diskutierbar erscheinen bzw. fachlich falsche Aussagen wiedergeben

7.1 in folgenden Inhaltsbereichen

7.1.1 Zahlaspekte in Q

Kategoriendefinition: Alle Codierungen, die unklare Lehrinhalte in Bezug auf die Zahlaspekte der rationalen Zahlen ausweisen.

7.1.1.1 Operator- vs. Quasikardinalaspekt

Kategoriendefinition: Umfasst alle Codierungen diskutierbarer Lehrinhalte, die die Abgrenzung vom Operator- zum Quasikaridinalaspekt beschreiben, bzw. deren Verhältnis erläutern

7.1.1.2 Nutzen des Anteilaspekts

Kategoriendefinition: Umfasst alle Codierungen diskutierbarer Lehrinhalte, die auf den Nutzen des Anteilaspekts eingehen

7.1.1.3 Anteils- vs. Verhältnisaspekt

Kategoriendefinition: Umfasst alle Codierungen diskutierbarer Lehrinhalte, die die Abgrenzung vom Anteils- zum Verhältnisaspekt beschreiben, bzw. deren Verhältnis erläutern

7.1.1.4 Erläuterung Rechenzahlaspekt

Kategoriendefinition: Umfasst alle Codierungen diskutierbarer Lehrinhalte, die auf die Erläuterung des Rechenzahlaspekts eingehen

7.1.1.5 Übersicht Zahlaspekte

Kategoriendefinition: Umfasst alle Codierungen diskutierbarer Lehrinhalte, die sich auf die Darstellung der Übersicht zu den Zahlaspekten beziehen

7.1.2 Grundvorstellungen der Multiplikation in Q

Kategoriendefinition: Alle Codierungen, die diskutierbare Lehrinhalte in Bezug auf die Grundvorstellungen der Multiplikation im Raum der rationalen Zahlen ausweisen.

7.1.3 Grundvorstellungen der Division in Q

Kategoriendefinition: Alle Codierungen, die diskutierbare Lehrinhalte in Bezug auf die Grundvorstellungen der Division im Raum der rationalen Zahlen ausweisen.

7.1.3.1 Verteilen scheitert bei Division durch Bruch

Kategoriendefinition: Alle Codierungen, die diskutierbare Lehrinhalte in Bezug auf die Anwendbarkeit der Grundvorstellung des Verteilens im Raum der rationalen Zahlen ausweisen.

7.1.3.2 Modellierung Division durch einen Bruch als Aufteilaufgabe

Kategoriendefinition: Alle Codierungen, die fragwürdige Modellierungen von Studierenden zur Division eines Bruches als Aufteilaufgabe unhinterfragt bestätigen.

7.1.3.3 Modellierung Division durch einen Bruch als Verteilaufgabe

Kategoriendefinition: Alle Codierungen, die fragwürdige Modellierungen von Studierenden zur Division eines Bruches als Verteilaufgabe unhinterfragt bestätigen.

7.1.4 weitere

Kategoriendefinition: Residualkategorie für weitere diskutierbare Lehrpassagen, die nicht im Zusammenhang zu Grundvorstellungen stehen

7.1.4.1 unpräzise Aussagenformulierung

Kategoriendefinition: Die Aussage "Multiplikation vergrößert" für den Zahlenraum Z und Q als falsche Aussage zu kennzeichnen ist unpräzise. Die Aussage müsste heißen: Multiplikation vergrößert immer"

7.1.4.2 Viertel in Rechteckdarstellung

8 B: Begriffsbildung, Begriffsklärung

Kategoriedefinition:
alle Inhalte, die die Begriffsbildung und Erläuterung von Fachbegriffen thematisieren (z. B. durch Behandlung von begriffsbildenden Merkmalen)

9 MB: Metaebene zu Gestaltungsprinzip B

Kategoriendefinition:
Den Prozess der Begriffsbildung - hier konkret die Idee, darüber zu sprechen, was begriffsbildende Merkmale sind und was nicht, bzw. eine Begriffshierarchie zu erarbeiten - explizit machen

Anhang C: Codierungen zur Kategorie ‚diskutierbare/optimierbare Lehrinhalte'

Quelle: Datei: *Masterarbeit_Kategoriensystem.mx20*
Programm: MAXQDA Analytics Pro 2020 (Release 20.4.1)
Ausdruck erstellt am: 03.01.2022

Die hier dokumentierten Codierungen sind der Reihenfolge des Auftretens nach gemäß der in Anhang B, Seite 1 aufgeführten Dateireihenfolge aufgeführt:

Der nächste Aspekt, den ich mir angucken möchte, ist das Verhältnis zu einem Ganzen. Das ist das, was allgemeiner ist als der Anteilsaspekt, ich beschreibe damit, wie sich eine Größe zu einer anderen gleichartigen Größe verhält. Also beispielsweise, wenn ich als Größe nehme Meter und ich sage, dass hier ist 87 m lang und davon bin ich schon 5 m gekrabbelt, dann kann ich sagen, ich bin 5/87 dieser Strecke gekrabbelt. Und das ist das Verhältnis, diese 5 m verhalten sich zu den 87 m auf eine bestimmte Art und Weise.

Code: ● Zahlaspekte in Q > Anteils- vs. Verhältnisaspekt

Vorlesung > Ari_2020_21_ S02E07.3, Pos. 7

Daraus ergibt sich der **Operatoraspekt**.

Zählen. Quasi eine Anzahl.

Sehr ähnlich ist die Interpretation eines Bruches als eine bestimmte Anzahl *z* von Teilen, wobei jedes dieser Teile ein *n*-tel eines Ganzen ist.

Da es sich hier um eine Anzahl handelt, arbeiten wir doch fast kardinal und man bezeichnet dies als **Quasikardinalaspekt.**

Code: ● Zahlaspekte in Q > Operator- vs. Quasikardinalaspekt

Vorlesung > Aspekte-zu-Brüchen_S02.E07, S. 4

Zunächst begrenzt hilfreich ist der Anteilaspekt

Code: ● Zahlaspekte in Q > Nutzen des Anteilaspekts

Vorlesung > Aspekte-zu-Brüchen_S02.E07, S. 6: 23

Besser geeignet und den Anteilaspekt umfassend ist der Verhältnisaspekt

Code: ● Zahlaspekte in Q > Anteils- vs. Verhältnisaspekt

Vorlesung > Aspekte-zu-Brüchen_S02.E07, S. 7: 28

Bruchzahlen als Resultate von Divisionen

Ein Bruch kann als das Resultat einer Division aufgefasst werden.

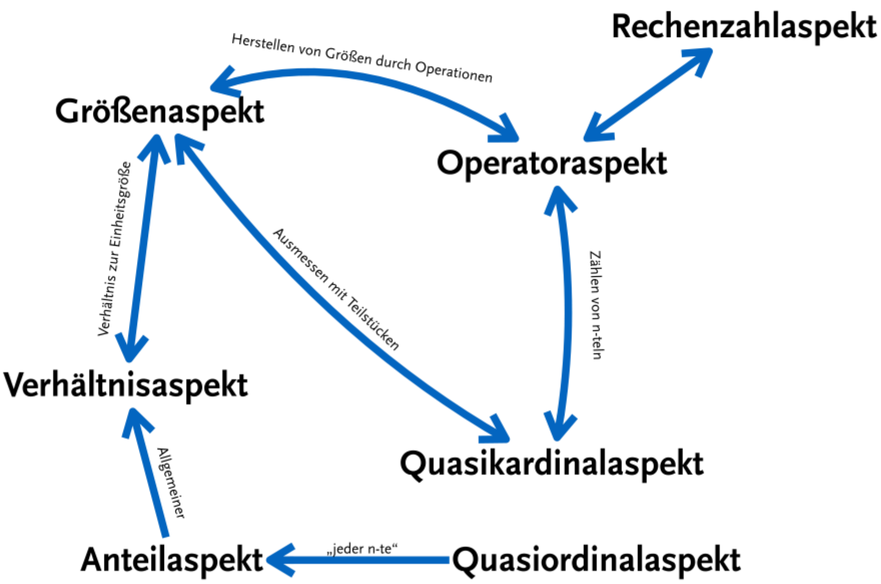
$$3 : 4 = \frac{3}{4}$$

Dies passt zu den Grundvorstellungen zur Division natürlicher Zahlen – „drei Pizzen sollen auf 4 Leute aufgeteilt werden".

Dieser **Rechenzahlaspekt** hilft aber nicht sonderlich beim Aufbau von Grundvorstellungen.

Code: ● Zahlaspekte in Q > Erläuterung Rechenzahlaspekt

Vorlesung > Aspekte-zu-Brüchen_S02.E07, S. 8



Code: ● Zahlaspekte in Q > Übersicht Zahlaspekte

Vorlesung > Aspekte-zu-Brüchen_S02.E07, S. 11

- **Quasikardinal**:

  Durch n mal wiederholtes Addieren des Bruchs $\frac{a}{b}$

$$n\frac{a}{b} = \underbrace{\frac{a}{b} + \frac{a}{b} + \frac{a}{b} + \ldots + \frac{a}{b}}_{n \text{ mal}}$$

Code: ● in folgenden Inhaltsbereichen > Grundvorstellungen der Multiplikation in Q

Vorlesung > Die-von-Sprechweise_S02.E09, S. 2

Auch für nicht-echte Brüche funktioniert das – dafür muss man allerdings auf den Verhältnisaspekt übergehen

Code: ● Zahlaspekte in Q > Anteils- vs. Verhältnisaspekt
Vorlesung > Die-von-Sprechweise_S02.E09, S. 3: 268

Für die Division von Brüchen sind das Ausmessen und die Operator-Interpretation tragfähige Grundvorstellungen, die aus den natürlichen Zahlen übertragen werden können. Das Verteilen scheitert hingegen!

Code: ● Grundvorstellungen der Division in Q > Verteilen scheitert bei Division durch Bruch
Vorlesung > Division-von-Brüchen_S02.E09, S. 5: 260

Die Multiplikation funktioniert auch immer, als wiederholte Addition aufgefasst

Code: ● in folgenden Inhaltsbereichen > Grundvorstellungen der Multiplikation in Q
Vorlesung > ZBE-machen-etwas-kaputt_S02.E09, S. 2: 241

Addition vergrößert	✅	❌	✅	❌
Subtraktion verkleinert	✅	❌	✅	❌
Multiplikation vergrößert	✅	❌	❌	❌
Division verkleinert	✅	❌	❌	❌

Code: ● weitere > unpräzise Aussagenformulierung
Vorlesung > ZBE-machen-etwas-kaputt_S02.E09, S. 4

Geeignete Zahlaspekte für Bruchzahlen

Zahlaspekte	Beispiele
Größenaspekt/Maßzahlaspekt (Einheit)	½ m, ¾ kg, ¼ l, eine halbe Stunde, ½ m^2
Operatoraspekt (…von…)	½ von ¼ l Sahne (Backrezept)
Quasikardinalaspekt (Zählen von n-teln)	3 Stück der Pizza (Bei Vierteln o.a.)
Anteilaspekt (Anteil eines Ganzen)	die Hälfte des Grundstücks
Verhältnisaspekt (Verh. einer Zahl zu einer anderen)	Maßstab; Brutto zu Netto 119/100
Rechenzahlaspekt (Resultat der Division)	3 Pizzen auf 4 Leute aufteilen
Quasiordinalaspekt (jeder n-te)	jeder 2. Stuhl bleibt frei

Code: ● Zahlaspekte in Q > Erläuterung Rechenzahlaspekt
Übungen > S02_UE_07_PP, S. 6

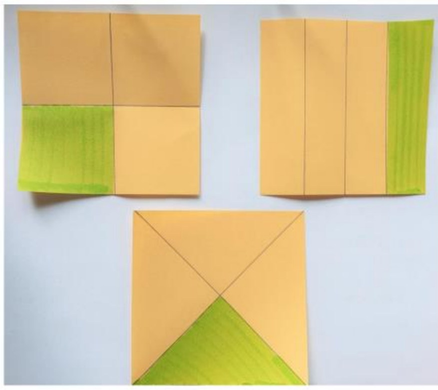
Anhang C

Wir vergleichen

Beispiel: Darstellung von 1/4 auf verschiedene Weise

(Achtung: hier am Quadrat!

vgl. Quadrat vs. Rechteckmodell)



Code: ● weitere > Viertel in Rechteckdarstellung

Übungen > S02_UE_07_PP, S. 9

Y: Genau, ich weiß nicht, ob es allen klar ist. Also von daher, das ist mir erst vor kurzem aufgefallen, dass dieses Bild an dieser Stelle gar nicht so sehr passend ist. Das ist nicht das Rechteckmodell. Ich habe halt ein Quadrat genommen. Ich dachte ich mache es mir einfach und nehme diese kleinen Zettel. Aber es ist nicht das Rechteckmodell, das ist nicht das gleiche. Weil das untere Bild mit den Dreiecken, das könnt ihr so mit dem Rechteck gar nicht herstellen. Und da sind wir bei dem Thema vorhin, dass hat FY schon gesagt, das Rechteck hat ja andere Symmetrieachsen als das Quadrat. Und da sind wir ganz groß im Thema der Geometrie.

Wie kann ich falten, dass ich gleich große Teile erhalte? Deckungsgleich? Das ist großes Thema der Geometrie, da gibt es auf jeden Fall Überschneidungen. Dazu muss ich die Symmetrieachsen erkennen und die sind definitiv anders als beim Rechteck. Und damit haben wir auch die Frage von vorhin beantwortet, oder? Als wir das vorhin am Rechteckmodell angeguckt haben. Ok, können wir das so stehenlassen, oder gibt es da noch was zu klären? (...)

Code: ● weitere > Viertel in Rechteckdarstellung

Übungen > 2021-05_26_Beobachtungsprotokoll_Y, Pos. 102-103

Y: Was ist der Unterschied zwischen Anteilaspekt und Verhältnisaspekt, oder wann finde ich was? Könnt ihr mir das nochmal sagen? (...)

WX: Der Anteil ist das von etwas Ganzem, so dass man was von einem Ganzen nimmt. Und das Verhältnis ist quasi das was wenn man zwei Brüche vergleicht. Also....

WY: ich wollte noch was ergänzen, ich wollte nur sagen, dass der Anteilsaspekt, dass das echte Brüche sind. Der Zähler ist immer kleiner als der Nenner, weil es ja immer vom Ganzen ausgehend ist, also 3/4 oder so und bei dem Verhältnisaspekt kann es auch sein, dass man 119/100 hat. Was ja dann eher unechte Brüche sind.

Y: ganz genau, dass ist auf jeden Fall der Unterschied beim Anteilsaspekt habe ich ein Ganzes höchstens, bzw. einen geringeren Anteil und beim Verhältnisaspekt kann ich auch mehr als ein ganzes haben, mehrere Ganze. Und ja ich drücke das Verhältnis aus, aber nicht zwischen zwei Brüchen sondern zwischen zwei Zahlen. Das Verhältnis von einer Zahl zu der anderen Zahl. (...)

Code: ● Zahlaspekte in Q > Anteils- vs. Verhältnisaspekt
Übungen > 2021-05_26_Beobachtungsprotokoll_Y, Pos. 29-32

F34: Wir sind von einem sehr, sehr großen Blech ausgegangen, wir haben zum Geburtstag einen Kuchen gebacken und haben den in 40 Stücke aufgeteilt, jetzt ist es uns aber nicht genug, deswegen wollen wir die 40 Stücke alle nochmal halbieren. Jetzt überlegen wir, wieviel Stücke haben wir dann. Das könnte man eigentlich auch sehr gut zeichnen, es muss halt nur ein sehr großes Blech sein.

Z: Ok, super, M5, was haben Sie geschrieben.

Code: ● Grundvorstellungen der Division in Q > Modellierung Division durch einen Bruch als Aufteilaufgabe
Übungen > 2021-06-08_Beobachtungsprotokoll_Z, Pos. 198-199

Wenn sie sich an die Vorlesung erinnern, dann wissen sie auch, ja wenn wir durch Brüche dividieren, dann können wir das nur mit Aufteilaufgaben veranschaulichen. Denn sonst wird es ganz schön bunt, wenn ich da halbe Personen berücksichtige.

Code: ● Grundvorstellungen der Division in Q > Verteilen scheitert bei Division durch Bruch
Übungen > 2021-06-08_Beobachtungsprotokoll_Z, Pos. 211

F1: Wir haben uns an Strohhalmen orientiert. Die Strohhalme sind zu lang sie werden halbiert, wie viele Halme hat man nach dem Halbieren.

Y: auch sehr schön, M2.

Code: ● Grundvorstellungen der Division in Q > Modellierung Division durch einen Bruch als Aufteilaufgabe
Übungen > 2021-06-09_Beobachtungsprotokoll_Y, Pos. 206-207

M2: wir haben uns in der Gruppe überlegt, der Schüler (man selber) du und dein Kumpel, du hast 40 Kekse, und du möchtest selber diese Kekse mit dem Kumpel teilen, wie viele Keksstücke habt ihr dann beide zusammen?

Y: prima, danke, F5:

Code: ● Grundvorstellungen der Division in Q > Modellierung Division durch einen Bruch als Aufteilaufgabe
Übungen > 2021-06-09_Beobachtungsprotokoll_Y, Pos. 208-209

F2: Paul läuft 40 Schritte zur Schule, die Schrittlänge der kleinen Schwester ist nur halb so groß, wie viele Schritte braucht sie dann.

Y: sehr schön, es muss also nicht immer der Kuchen sein.

Code: ● Grundvorstellungen der Division in Q > Modellierung Division durch einen Bruch als Aufteilaufgabe
Übungen > 2021-06-09_Beobachtungsprotokoll_Y, Pos. 213-214

M2: Ich glaube es ist aufteilen? Wir hatten zum Beispiel die Keksgeschichte, weil ich teile die auf 2 Mengen auf.

Y: Ok gehe ich auf jeden Fall mit.

> Code: ● Grundvorstellungen der Division in Q > Modellierung Division durch einen Bruch als Aufteilaufgabe
> Übungen > 2021-06-09_Beobachtungsprotokoll_Y, Pos. 243-244

Y: Ok gehe ich auf jeden Fall mit. Wir schließen gleich mal die 2. Frage an. Könnte ich es auch als verteilen interpretieren? Ist das auch denkbar? Oder besser andersherum: wann könnte ich es als verteilen interpretieren, kam auch in der Vorlesung dran.

M1: man könnte sagen ich habe 80 Kekshälften, wie kann ich die verteilen, dass 2 jeweils 40 Kekshälften haben? Irgendwie so rum?

Y: ja hört sich schon gut an.

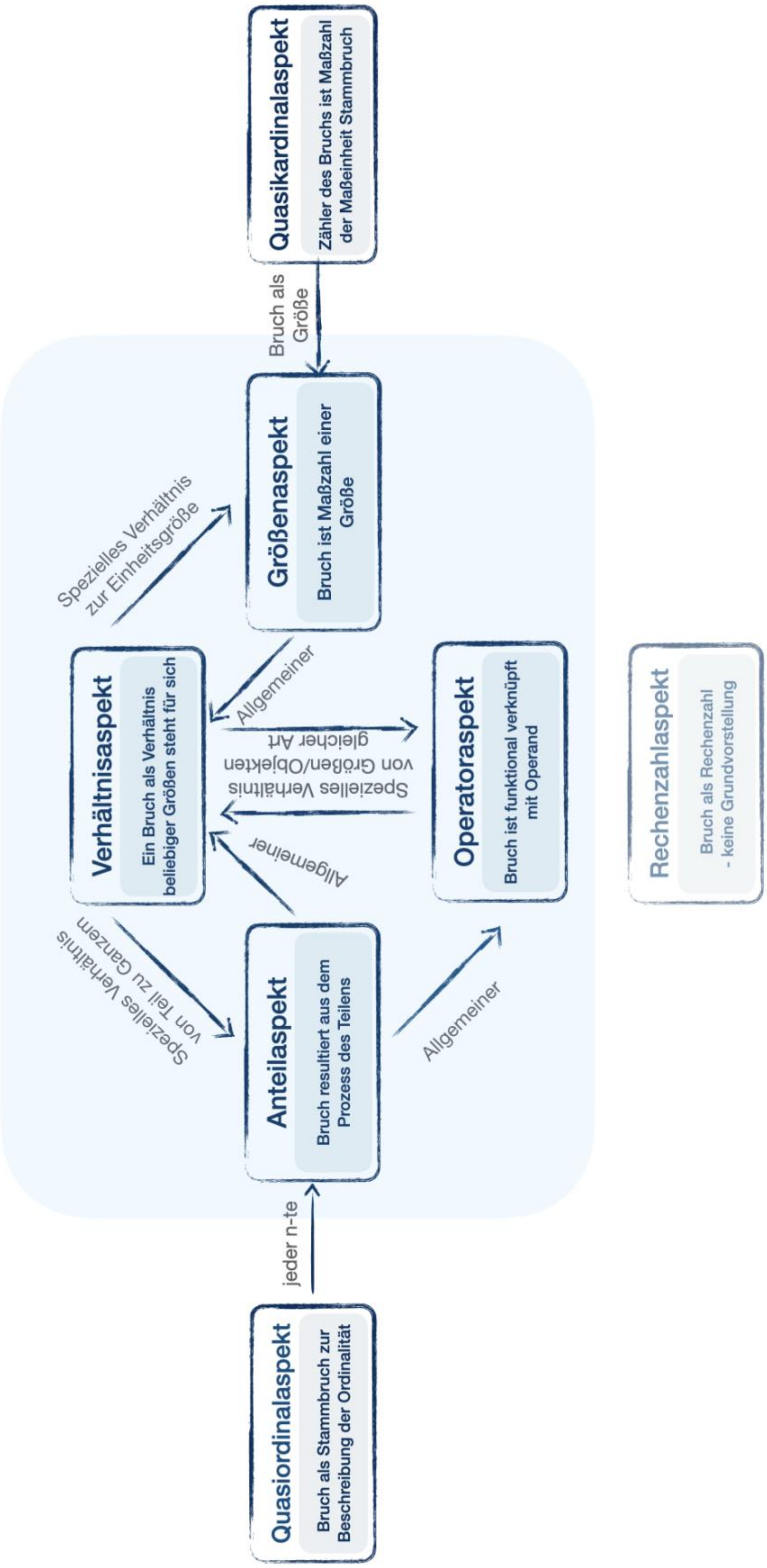
F2: Beim Verteilen braucht man ja die Lösung zum Erklären. Also wenn da wirklich nur 40 /1/2 steht.

Y: Es ist total schwer und es ist in dem Fall auch nicht möglich: Klassisches Beispiel: Karten verteilen

40 Karten an die Mitspieler, jeder erstmal eine usw. bis ich keine Karten mehr habe. Ich kann aber nicht 40 Karten auf halbe Personen verteilen. 40 Karten auf 5 Mitspieler, ja funktioniert. 40 Karten auf halbe Mitspieler? Funktioniert nicht mehr. Ich habe nicht mehr die Wahl

> Code: ● Grundvorstellungen der Division in Q > Modellierung Division durch einen Bruch als Verteilaufgabe
> Übungen > 2021-06-09_Beobachtungsprotokoll_Y, Pos. 244-249

Anhang D: Visualisierungsvorschlag für die Übersicht: Aspekte von Brüchen



Auflistung elektronischer Anhänge

Die im Folgenden aufgelisteten Dateianhänge liegen der Masterarbeit in digitaler Form als separate Dateien bei.

Anhang E: Ausgewertete Excel-Daten des Pre- und Posttests

Enthält folgende Dateien:

AnhangE_Pretest-Fromm-nur-operations_Auswertung.exe

AnhangE_Posttest-Fromm-nur-operations_Auswertung.exe

Anhang F: analysierte Rohdaten der Vorlesung (Transkripte der VL-Videos und Präsentationsfolien der Vorlesung) sowie der Übungen (anonymisierte Transkripte der Übungen und Präsentationsfolien der Übungen)

Ordner ‚**Vorlesung‘** enthält folgende Dateien:

Ari_2020_21_S02E07.3-E9.3_Transkripte.pdf

S02E07.3-E0.3_Analysierte-VL-Folien.pdf

Ordner **‚Übungen‘** enthält folgende Dateien:

2021-05-26_Beobachtungsprotokoll_X.pdf

2021-05_26_Beobachtungsprotokoll_Y.pdf

2021-06-08_Beobachtungsprotokoll_Z.pdf

2021-06-09_Beobachtungsprotokoll_Y.pdf

S02_UE_07_PP.pdf

Schülerlösungen Vergleich von Brüchen.pdf

S02_UE_09_PP.pdf

Schülerlösungen Multiplikation_Division.pdf

Anhang G: Analysedatei der erfolgten qualitativen Inhaltsanalyse

Verwendetes Programm: MAXQDA Analytics Pro 2020 (Release 20.4.1)

Datei:

Masterarbeit_Kategoriensystem.mx20

Selbständigkeitserklärung

Selbstständigkeitserklärung:

Hiermit versichere ich, Simon Fromm, dass ich die vorliegende Masterarbeit: „Professionswissen von Lehramtsstudierenden: Lehren und Lernen zu notwendigen Vorstellungsumbrüchen bei der Multiplikation/Division von Brüchen in der Lehrveranstaltung „Arithmetik und ihre Didaktik II“ selbständig ohne Hilfe Dritter und ohne Zuhilfenahme anderer als der angegebenen Quellen und Hilfsmittel angefertigt habe. Die den benutzten Quellen wörtlich oder inhaltlich entnommenen Stellen sind als solche kenntlich gemacht.

Die „Richtlinie zur Sicherung guter wissenschaftlicher Praxis für Studierende an der Universität Potsdam (Plagiatsrichtlinie) - Vom 20. Oktober 2010“, im Internet unter https://www.uni-potsdam.de/fileadmin/projects/ambek/Amtliche_Bekanntmachungen /2011/ambek-2011-01-037-039.pdf
einsehbar, ist mir bekannt.

Es handelt sich bei dieser Masterarbeit um meinen ersten Versuch.

Berlin, den 08.01.2022

Ort, Datum

Unterschrift