Universität Potsdam

Klaus Schöler

Grundlagen der Mikroökonomik

Eine Einführung in die Theorie der Haushalte, der Firmen und des Marktes

3., unveränderte Auflage

Universitätsverlag Potsdam

Grundlagen der Mikroökonomik
Prof. Dr. Klaus Schöler

Klaus Schöler

Grundlagen der Mikroökonomik

Eine Einführung in die Theorie der Haushalte,
der Firmen und des Marktes

3., unveränderte Auflage

Universitätsverlag Potsdam

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek
Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.de/ abrufbar.

Universitätsverlag Potsdam 2011
http://info.ub.uni-potsdam.de/verlag.htm

Am Neuen Palais 10, 14469 Potsdam
Tel.: +49 (0)331 977 2533 / Fax: 2292
E-Mail: verlag@uni-potsdam.de

3., unveränderte Auflage, Neuausgabe der 2., überarbeiteten und erweiterten Auflage, München, Vahlen, 2004

Online veröffentlicht auf dem Publikationsserver der Universität Potsdam:
URL http://pub.ub.uni-potsdam.de/volltexte/2011/5569/
URN urn:nbn:de:kobv:517-opus-55690
http://nbn-resolving.de/urn:nbn:de:kobv:517-opus-55690

Zugleich gedruckt erschienen im Universitätsverlag Potsdam:
ISBN 978-3-86956-162-2

Vorwort zur zweiten Auflage

Die erste Auflage des Buches war schnell vergriffen, ein Umstand, der dem Autor aus zwei naheliegenden Gründen nicht unwillkommen ist. Zum einen zeigte sich, daß das Konzept des Lehrbuches, das nicht nur, aber doch als ein wichtiges Anliegen, eine Brücke zwischen mikroökonomischer Theorie und formalen Methoden schlagen will, auf eine Lücke im Markt gestoßen ist. Zum anderen gibt die zweite Auflage dem Autor die Möglichkeit, Korrekturen, Änderungen, Ergänzungen und Erweiterungen vorzunehmen. Zunächst wurden zwei neue Abschnitte eingefügt, wobei der eine Konsumentenrente und Produzentenrente zusammenhängend darstellt und der andere sich mit der Preisführerschaft im Dyopol befaßt. Ferner wurden bestehende Abschnitte erweitert: Der Abschnitt über externe Effekte wurde um die Diskussion der Wohlfahrtswirkungen negativer externer Effekte der Produktion ergänzt. Der Abschnitt über das totale mikroökonomische Gleichgewicht im Ein-Haushalt-Fall wurde durch die analytische Darstellung des Sachverhalts vervollständigt. Der Behandlung der monopolistischen Preisdiskriminierung wurde die Diskussion der totalen Preisdiskriminierung erweitert. An vier Stellen wurden zur Unterstützung der Argumentation Abbildungen hinzugefügt. Alle Ergänzungen und Erweiterungen wurden von dem Grundgedanken des Lehrbuches bestimmt, eine konzise Darstellung der traditionellen, neoklassischen mikroökonomischen Theorie zu vermitteln. Auf weiterführende oder spezielle Ansätze wurde auch in der zweiten Auflage verzichtet. Schließlich wurde die Gelegenheit genutzt, Denkfehler, Rechenfehler und Druckfehler zu beseitigen.

Es ist mir eine angenehme Pflicht, meinen Dank allen jenen auszusprechen, die an der zweiten Auflage des Buches mitgewirkt haben. Herr Kollege Gert Kneis hat dankenswerterweise Änderungen in den M-Abschnitten angeregt. Den Herren Dipl.-Volkswirt Dr. Markus Ksoll, Dipl.-Volkswirt Dr. Helge Sanner und Dipl.-Volkswirt Wolfgang Wagner bin ich für zahlreiche Anregungen dankbar, die ich, wenn auch nicht in allen Fällen, aufgegriffen habe. Ferner hat Herr Dr. Sanner den Satz des Buches in sehr schöner Weise neu gestaltet und meine Frau, Sigrid Wagener-Schöler, hat den neuen Text kritisch gelesen.

Potsdam, im Dezember 2002 **Klaus Schöler**

Vorwort zur ersten Auflage

Dieses Buch verfolgt zwei Ziele. Zum einen soll der Leser Informationen über die ökonomische Funktionsweise von Haushalten, Unternehmen und Märkten erhalten. Als unmittelbar teilnehmende Subjekte am Marktgeschehen haben wir ein gewisses Maß an wirtschaftlichem Alltagswissen, das es zu vervollständigen – vielleicht auch zu korrigieren – und vor allem zu systematisieren und im Sinne einer allgemeinen Theorie zu generalisieren gilt. Diesem Zweck dient die konzise Darstellung der – nach weitgehendem Konsens im Fach – als Grundlagen angesehenen Elemente der mikroökonomischen Theorie. Auf weiterführende oder spezielle Ansätze wurde bewußt verzichtet, ebenso wie auf die Diskussion konkurrierender Erklärungsansätze; es geht in diesem Buch um die Vermittlung der traditionellen, neoklassischen mikroökonomischen Theorie. Zum anderen sollen ökonomisches Denken und analytische Techniken zur Lösung wirtschaftlicher Probleme – auch über die eigentliche Mikroökonomik hinaus – eingeübt werden. Zum Verstehen anderer und spezieller Fragestellungen der Ökonomie – sei es in der Raumwirtschaftstheorie, der Außenhandelstheorie, der Gesundheitsökonomik, der Bildungsökonomik, der Wachstumstheorie oder der Verteilungstheorie, um nur einige Bereiche zu nennen – ist es unverzichtbar, in (mikro-)ökonomischen Kategorien zu denken. Viele Erkenntnisse erschließen sich aber erst durch die Anwendung bestimmter Methoden, wie etwa durch die Optimierung einer Zielgröße bei gegebenen Beschränkungen oder durch das Lösen von Gleichungen oder Gleichungssystemen – um wiederum nur einige Beispiele zu nennen. Beiden Intentionen ist das Buch verpflichtet.

Der Anstoß zu einer neuartigen Konzeption des Stoffes ergab sich aus Erfahrungen, die ich mit Lehrveranstaltungen zur mikroökonomischen Theorie gemacht habe. Die teilnehmenden Studenten waren zwar formal gut ausgebildet, trotzdem ergaben sich aber immer wieder Schwierigkeiten bei der Übertragung der in den Mathematikvorlesungen gelernten Techniken auf ökonomische Fragestellungen. Aus diesem Problem entstand der Gedanke, mathematische Methoden und ökonomische Theorie enger miteinander zu verzahnen, ohne eine mathematische Mikroökonomik oder gar ein Mathematikbuch für Ökonomen zu schreiben. Das vorliegende Buch ist vielmehr so angelegt, daß in kurzen Abschnitten immer dann mathematische Verfahren dargestellt werden, wenn sie im darauffolgenden Abschnitt erstmals benötigt werden. Es versteht sich von selbst, daß bei einer derartigen Konzeption des Buches einige Beschränkungen geboten sind. Die mathematischen Methoden werden ohne Beweise oder Herleitungen dargestellt und im Sinne eines Kochrezeptes präsentiert: Wenn ein ökonomisches Problem eine bestimmte Struktur aufweist, dann ist der Lösungsweg nach den angegebenen Regeln zu beschreiten.

Dieses Buch ist gedacht für Studenten des ersten bis vierten Semesters der Wirtschaftswissenschaften und kann in dreifacher Hinsicht Verwendung finden: Es kann parallel zur Grundstudiumsveranstaltung Mikroökonomik gelesen und genutzt werden. Ferner kann es – wenn sich der Leser an die Reihenfolge der Kapitel und Abschnitte hält – auch zum Selbststudium durchgearbeitet werden. Schließlich ist es unter Verwendung des Stichwortverzeichnisses auch als Nachschlagewerk nützlich. Jeder mit einer arabischen Ziffer versehene Abschnitt behandelt einen neuartigen ökonomischen Sachverhalt, dessen Diskussion in der Regel auf den Ergebnissen der vorangegangenen Abschnitte beruht. Trägt der Abschnitt vor der arabischen Ziffer ein „M“, so handelt es sich um einen mathematischen Abschnitt, dessen Inhalt in dem folgenden ökonomischen Abschnitt erstmals verwendet wird. Daraus folgt, daß mathematisch geschulte Leser die M-Abschnitte ohne Informationsverluste überschlagen können. Mathematisch weniger versierte Leser sollten sich hingegen zunächst mit dem Inhalt des M-Abschnitts vertraut machen und auf die Anwendung der mathematischen Technik im nachfolgenden ökonomischen Abschnitt achten. Wird das gleiche mathematische Verfahren in einem nachfolgenden Abschnitt erneut benötigt, so kann auf den entsprechenden M-Abschnitt verwiesen werden.

Es ist mir eine angenehme Pflicht, meinen Dank allen jenen auszusprechen, die an dem Buch mitgewirkt haben. Herr Kollege Gert Kneis hat freundlicherweise die endgültige Formulierung der M-Abschnitte übernommen. Für die mathematisch präzise und didaktisch gelungene Darstellung der oft nicht einfachen Sachverhalte möchte ich ihm sehr herzlich danken. Herr Dipl.-Volkswirt Helge Sanner und Herr Dipl.-Volkswirt Markus Ksoll haben die Abbildungen in eine vortreffliche reproduktionsfähige Form überführt und zusammen mit Herrn Dipl.-Volkswirt Wolfgang Wagner den gesamten Text kritisch gelesen. Ferner hat Herr Sanner den Satz des Buches mit großem Engagement gestaltet. Frau Sigrid Wagener-Schöler hat ebenfalls den Text kritisch gelesen und als meine Ehefrau den größten Teil der sozialen Kosten des Buchprojektes getragen. Ihnen allen gilt mein herzlichster Dank. Alle verbleibenden Fehler gehen – wie in solchen Fällen leider üblich – zu Lasten des Autors.

Potsdam, im Dezember 1998 **Klaus Schöler**

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung 1

2 Theorie des Haushaltes 5

1. Definition

2.1 Präferenzen des Haushaltes 5

2. Güterarten 3. Präferenzen und Präferenzordnung 4. Abstimmungsparadoxon *M1. Funktionen M2. Differentiationsregeln* 5. Nutzenfunktion 6. Indifferenzkurven 7. Eigenschaften bestimmter Nutzenfunktionen 8. Einkommensrestriktion 9. Haushaltsoptimum *M3. Optimierung ohne Nebenbedingungen M4. Optimierung unter Nebenbedingungen* 10. Analytische Ableitung des Haushaltsoptimums

2.2 Güternachfrage des Haushaltes 37

11. Nachfragefunktionen 12. Analytische Ableitung der Nachfragefunktion 13. Elastizitäten 14. Substitutions- und Einkommenseffekt 15. Kompensierte Nachfragefunktion *M5. Das Dualproblem* 16. Analytische Ableitung der kompensierten Nachfragefunktion 17. Slutzky-Gleichung 18. Marktnachfrage

2.3 Faktorangebot des Haushaltes 59

19. Zeitallokation des Haushaltes 20. Arbeitsangebot des Haushaltes 21. Analytische Ableitung des Arbeitsangebotes 22. Einkommens- und Substitutionseffekt bei Lohnsatzänderungen 23. Intertemporaler Konsum 24. Kapitalangebot des Haushaltes

3 Theorie der Firma 75

25. Definition

3.1 Produktion der Firma 75

26. Allgemeine Produktionsfunktion 27. Isoquanten 28. Kurzfristige Produktionsvariation 29. Langfristige Produktionsvariation 30. Cobb-Douglas-Funktion 31. CES-Funktion 32. Leontief-Funktion 33. Ertragsfunktion

3.2 Kosten der Firma 93

34. Produktionsoptimum *M6. Kuhn-Tucker-Bedingungen* 35. Langfristige Kostenfunktion 36. Kurzfristige Kostenfunktion 37. Kurzfristige S-förmige Kostenfunktion

3.3 Güterangebot und Faktornachfrage der Firma 110

38. Gewinn der Firma 39. Outputregel 40. Outputregel bei unterschiedlichen Marktformen 41. Inputregel 42. Inputregel bei unterschiedlichen Marktformen

4 Theorie der Märkte: Vollkommene Konkurrenz 123

43. Definition

4.1 Markteigenschaften 124

44. Klassifikationen 45. Marktformenschema 46. Marktform und Verhaltensweise 47. Marktabgrenzung

4.2 Partielles Gleichgewicht bei vollkommener Konkurrenz 131

48. Annahmen 49. Grundmodell 50. Kurzfristiges Gleichgewicht 51. Langfristiges Gleichgewicht 52. Stabilität des Gleichgewichtes 53. Konsumenten- und Produzentenrente *M7. Inhomogene Differenzengleichungen ersten Grades* 54. Cobweb-Theorem 55. Externe Effekte

4.3 Totales Gleichgewicht bei vollkommener Konkurrenz 156

56. Einführung und Annahmen 57. Reiner Tausch 58. Pareto-Optimum 59. Produktionsgleichgewicht 60. Analytische Ableitung des Produktionsgleichgewichts 61. Transformationskurve 62. Analytische Ableitung der Transformationskurve 63. Totales Gleichgewicht (ein Haushalt) 64. Zahlenbeispiel für das totale Gleichgewicht 65. Zwei-Haushalte-Fall 66. Totales Gleichgewicht (zwei Haushalte) 67. Verallgemeinerung des totalen Gleichgewichts 68. Wohlfahrtsfunktion 69. Wohlfahrts-Kriterien 70. Wohlfahrtsmaximum 71. Zusammenfassung

5 Theorie der Märkte: Imperfekte Märkte **199**

72. Definition

5.1 Das Monopol 199

73. Grundmodell 74. Beispiel mit linearen Funktionen 75. Preisdiskriminierung 76. Peak-Load-Pricing 77. Vergleich Monopol/Polypol 78. Regulierung des Monopols

5.2 Das Oligopol 213

79. Definitionen 80. Cournot-Dyopol *M8. Lineare Gleichungssysteme* 81. Cournot-Oligopol 82. Allgemeines Mengendyopol 83. Allgemeines Mengenoligopol 84. Stackelberg-Dyopol 85. Konsistente konjekturale Reaktionen 86. Kartell 87. Graphische Darstellung und Zusammenfassung 88. Allgemeines Preisdyopol 89. Allgemeines Preisoligopol 90. Preisführerschaft

5.3 Das heterogene Polypol 240

91. Definition und Abgrenzung 92. Annahmen 93. Grundmodell 94. Kurzfristiges und langfristiges Gleichgewicht

6 Ausblick **249**

Literaturhinweise **253**

Index **261**

1 Einleitung

Die Wirtschaftswissenschaften lassen sich nach unterschiedlichen Gesichtspunkten einteilen. Im deutschsprachigen Raum ist die Unterteilung in Volkswirtschaftslehre und Betriebswirtschaftslehre gebräuchlich und im Hochschulsystem institutionell verankert. Die Volkswirtschaftslehre kann wiederum nach verschiedenen Kriterien aufgespalten werden; mögliche Teildisziplinen sind Theorie und Politik, reine oder angewandte Theorie der Volkswirtschaftslehre. Betrachtet man die Theorie (oder reine Theorie) genauer, so fällt die Klassifikation *Mikroökonomik* und *Makroökonomik* auf, die Eingang in die akademische Ausbildung der ersten drei oder vier Semester gefunden hat und sich in den Lehrplänen widerspiegelt.

Häufig wird gesagt, daß die Mikroökonomik sich mit einzelnen Wirtschaftssubjekten (Haushalten, Unternehmen) und Institutionen (Märkten), die Makroökonomik sich mit der gesamten Volkswirtschaft als Erkenntnisobjekt befaßt. Diese Unterscheidung ist unzweckmäßig, wenn nicht gar falsch. Es ist zwar unbestritten, daß die Mikroökonomik sich mit einzelnen Wirtschaftssubjekten und Märkten beschäftigt, sie wendet sich aber auch mit dem Ansatz des *mikroökonomischen totalen Gleichgewichts* der Volkswirtschaft in ihrer Gesamtheit zu. Zweckmäßiger ist es, die Unterscheidung wie folgt zu treffen: Die Makroökonomik bildet volkswirtschaftliche Aggregate, wie gesamtwirtschaftliches Sparen, gesamtwirtschaftlicher Konsum, gesamtwirtschaftliches Einkommen, und stellt funktionale Zusammenhänge zwischen diesen und anderen Aggregaten her. Eine typische Fragestellung der Makroökonomik ist die nach der Veränderung des gesamtwirtschaftlichen Konsums in Abhängigkeit von der Veränderung des gesamtwirtschaftlichen Einkommens. Die Mikroökonomik rekurriert immer – auch in ihrer totalanalytischen Ausprägung – auf die funktionalen Zusammenhänge auf der Ebene des einzelnen Wirtschaftssubjektes. Sie diskutiert beispielsweise die Frage, welche Konsumgüter in welchen Mengen ein einzelner Haushalt bei gegebenen Preisen und einem gegebenen Einkommen nachfragt, wenn man annimmt, daß der Haushalt eine höchstmögliche Befriedigung seiner Bedürfnisse anstrebt. Die Antwort kann unter bestimmten Voraussetzungen und bei einigen Modifikationen der Annahmen - Einkommen und Preise sind nicht mehr gegeben - auf alle Haushalte einer Volkswirtschaft übertragen werden. Zusammengefaßt kann gesagt werden, daß die Makroökonomik von volkswirtschaftlichen Aggregaten ausgeht und die Mikroökonomik von disaggregierten Größen.

Die mikroökonomische Theorie versucht – wie jede Theorie in jedem Wissensgebiet – *allgemeine* Antworten zu geben. Nicht die Erklärung des Konsumverhaltens eines bestimmten Haushaltes, auch nicht die Erklärung der Absatzstrategie eines einzelnen Unternehmens, ist die wissenschaftliche Absicht, sondern generelle Aussagen über das ökonomische Verhalten von Haushalten und Unternehmen zu formulieren. Befaßt man sich mit den *Grundlagen der Mikroökonomik*, so stehen allgemeine Aussagen zweifellos im Zentrum der Diskussion; es bleibt ihren Anwendungen und Adaptationen überlassen, eingeschränkte Aussagen über spezielle Erkenntnisobjekte zu formulieren. So kann man zu einer mikroökonomischen Theorie der Bank, zu einer Theorie des Einzelhandelsmarktes oder zu einer räumlichen Markttheorie gelangen. Die Behandlung der *Grundlagen* der mikroökonomischen Theorie bedeutet insbesondere die deduktive Entfaltung des wichtigsten Axioms des neoklassischen Paradigmas, des Nutzen- und Gewinnstrebens der Menschen. Die Darstellung der *Grundlagen* impliziert aber auch den Verzicht auf die Suche nach konkurrierenden Ansätzen und Alternativen sowie die Vermeidung der Probleme, die sich aus der Operationalisierung und empirischen Überprüfung mikroökonomischer Theorien ergeben.

Die mikroökonomische Theorie setzt – in Übereinstimmung mit der gesellschaftlichen Realität – eine liberale Rechtsordnung voraus. Nur durch diese Rechtsordnung – üblicherweise durch den Staat verfügte – können individuelle Entscheidungen der Wirstchaftssubjekte verwirklicht und die Privatautonomie der Wirtschaftssubjekte gewährleistet werden. Es kann also kein Wirtschaftssubjekt zu einer Entscheidung gezwungen werden sondern hat jederzeit die Freiheit, sich an die gegebene Situation anzupassen. Zwar kann der Staat regulierend in das Marktgeschehen mittels Preis- oder Mengenregulierung intervenieren, doch die jeweils andere Größe verbleibt als Anpassungsparameter des Wirtschaftssubjektes. Damit ist die Freiheit des Marktzutritts und des Marktabtritts verbunden, die lediglich die Extremform der privatautonomen Mengenanpassung darstellt. Außerdem wird durch die Rechtsordnung die vollständige Zuteilung der Eigentumsrechte, also des Rechtes der Nutzung und des Ausschlusses anderer von der Nutzung von Gütern, an die Wirtschaftssubjekte verfügt. Zur Durchsetzung der Eigentumsrechte ist das uneingeschränkte Gewaltmonopol des Staates notwendig. Die Existenz der Eigentumsrechte und die Rechtssicherheit der Individuen, begründete Eigentumsrechte jederzeit durch den Staat mittels dessen Gewaltmonopols durchzusetzen, wird sichergestellt, daß Eigentumsübergang nur durch Einigung von Kontraktpartnern über Leistung und Gegenleistung also durch marktliche Koordination erfolgt.

Als Wirtschaftssubjekte, die wirtschaftliche Entscheidungen treffen und ökonomische Wahlhandlungen vornehmen, treten in der Mikroökonomik – wie schon deutlich geworden ist – Haushalte und Unternehmen auf. Die genaue Definition dieser Wirtschaftssubjekte ist den Abschnitten 1 und 25 zu entnehmen. Haushalte konsumieren Güter, die sie auf den Gütermärkten erwerben und bieten Ressourcen (Arbeit, Kapital, Boden) auf den Faktormärkten an. Auf diesen Märkten fragen Unternehmen, deren Aufgabe die Produktion von Gütern ist, Ressourcen als Produktionsmittel nach; sie bieten ihrerseits die hergestellten Güter auf den Gütermärkten an. Aus diesem einfachen Kreislauf der realen Größen (Güter und Ressourcen), dem ein gegenläufiger monetärer Strom (Konsumausgaben und Faktoreinkommen der Haushalte, Umsatzerlöse und Faktorausgaben der Unternehmen) entspricht, ergeben sich die Hauptuntersuchungsgebiete der Mikroökonomik: Die Theorie des Haushaltes, die Theorie der Firma und die Theorie der Märkte.

Der inhaltliche Aufbau dieses Buches folgt diesem einfachen Grundgedanken. Wie man aus dem Inhaltsverzeichnis ersehen kann, haben die Kapitel 2 und 3 einen spiegelbildlichen Aufbau. Nachdem die außerökonomischen Grundlagen des wirtschaftlichen Handelns der Institutionen Haushalte und Unternehmen (Nutzenfunktion und Produktionsfunktion) dargestellt sind, werden ihre Aktivitäten auf Güter- und Faktormärkten getrennt diskutiert. Die Kapitel 4 und 5 wenden sich den Märkten zu, wobei Kapitel 4 ausschließlich der vollständigen Konkurrenz bei partialanalytischer und totalanalytischer Betrachtung gewidmet ist. Diese ideale Welt wird in dem nachfolgenden Kapitel 5 an die Realität angepaßt, indem Monopol und monopolistische Konkurrenz diskutiert werden und dem Oligopol als empirisch häufigster Erscheinungsform von Marktbeziehungen eine ausführliche Darstellung zuteil wird.

2 Theorie des Haushaltes

1. Definition. Unter einem Haushalt verstehen wir den ökonomischen Ort des Konsums. Aus institutioneller Sicht kann es sich dabei um einen Haushalt mit einer Person oder mit mehreren Personen handeln, es kann aber auch ein Privathaushalt mit einer sehr großen Anzahl von Personen (Klöster, Kasernen etc.) gemeint sein. Die in einem Haushalt lebenden Personen haben *Bedürfnisse*, die als subjektiv empfundener Mangel verstanden werden können. Dieser wahrgenommene Mangel, der Ausdruck einer bestimmten aktuellen psychischen oder physischen Situation und/oder einer personalen Disposition ist, kann durch den Konsum von Gütern (oder durch andere Aktivitäten) beseitigt werden. Die Bedürfnisbefriedigung entsteht durch den *Nutzen*, den die Güter (oder andere Aktivitäten) stiften. Sind die Wirtschaftssubjekte mit ihren Bedürfnissen hinreichend mit Geld (Kaufkraft) ausgestattet, so entsteht individueller *Bedarf*, der, wenn er sich auf Märkten niederschlägt, zur *Nachfrage* wird. Als Entgelt bzw. Tauschgegenstand für die über Märkte erworbenen Güter dienen Geldbeträge, die durch den Verkauf von Leistungen auf den Faktormärkten an Unternehmen erzielt werden. Jeder Haushalt ist folglich auf zwei Märkten tätig, auf einem Beschaffungsmarkt (Gütermarkt) und einem Absatzmarkt (Faktormarkt). Daher muß jeder Haushalt Entscheidungen darüber fällen, welche Güter zur Bedürfnisbefriedigung nachgefragt und welche Faktorleistungen zur Einkommenserzielung angeboten werden.

2.1 Präferenzen des Haushaltes

2. Güterarten. Es gibt auch Güter, die nicht über Märkte gehandelt werden, die sich aber gleichwohl zur Bedürfnisbefriedigung eignen, wie etwa Atemluft und Regenwasser. Zweckmäßig ist folglich eine Unterscheidung in *freie* Güter und *knappe* Güter. Freie Güter sind im Vergleich mit den Bedürfnissen der Menschen in so ausreichenden Mengen vorhanden, daß jedes Individuum die Güter bis zur Sättigung verbrauchen kann. Da Über-fluß an diesen Gütern besteht (Atemluft, Regenwasser, Meerwasser), gibt es für sie weder einen Markt noch einen Preis. Knappe Güter (auch Wirtschaftsgüter) sind im Vergleich mit den Bedürfnissen der Menschen in nicht ausreichendem Maße vorhanden. Sie sind daher Gegenstand *wirtschaftlicher* Überlegungen und Handlungen; sie werden über Institutionen, wie Märkte oder den Staat, verteilt und haben einen Marktpreis oder ein indirektes Entgelt. Die Existenz knapper Güter begründet die Notwendigkeit des Wirtschaftens und veranlaßt die Individuen zur rationalen Lösung der Verteilungsfrage und der vorgelagerten Allokationsfrage. Der Begriff des knappen Gutes darf nicht mit dem Begriff des seltenen Gutes verwechselt werden. Diamanten sind knapp und selten, Trinkwasser ist knapp, aber nicht selten; Fliegenpilze sind selten, aber nicht knapp, und das schon genannte Meerwasser ist weder knapp noch selten.

Die knappen Güter können entweder *private* oder *öffentliche* Güter sein. Private Güter werden von privaten Wirtschaftseinheiten produziert und angeboten oder erfüllen zumindest die Voraussetzungen und Eigenschaften dazu. Öffentliche Güter sind beispielsweise die Leistungen von Leuchttürmen, von Erholungsgebieten, von Stadtparks, von Rechtssystemen, von Währungsordnungen usw. Diese sehr unterschiedlichen Güter haben jedoch ein gemeinsames Merkmal: Zur Produktion dieser und anderer öffentlicher Güter wird kein privater Akteur bereit sein, da sie durch zwei Eigenschaften marktunfähig sind: (1) Der Konsum dieser Güter durch eine Person schließt nicht – innerhalb der durch Überfüllung gezogenen Grenzen – den gleichzeitigen Konsum durch andere Personen aus. Da keine Rivalität im Konsum besteht, wird keine Person bereit sein, den Konsum individuell zu bezahlen. Ein Marktpreis kommt nicht zustande. (2) Die Konsumenten können – unterstellt man ökonomisch vertretbare Vorkehrungen – nicht vom Konsum ausgeschlossen werden. Das Nichtausschließbarkeitsprinzip verhindert das Zustandekommen von Märkten, und damit die Möglichkeit der privatwirtschaftlichen Produktion. Güter, für die die Nichtrivalität im Konsum und/oder die Nichtausschließbarkeit gelten, werden vom Staat oder anderen kollektiven Einrichtungen produziert und über Steuern, Gebühren oder Beiträge finanziert. In den nachfolgenden Abschnitten soll immer von privaten Gütern ausgegangen werden. Weitere Unterscheidungen, in Verbrauchs- und Gebrauchsgüter, Zwischenprodukte und marktreife Güter, landwirtschaftliche und industrielle Güter sowie Dienstleistungen können vorgenommen werden, sind aber für die folgenden Überlegungen ohne Bedeutung.

3. Präferenzen und Präferenzordnung. Die Entscheidungen über die wirtschaftlichen Aktivitäten des Haushaltes fällen seine Mitglieder auf der Grundlage ihrer individuellen Präferenzen. Damit ergibt sich das Problem der Zusammenführung – mit Ausnahme des Einpersonenhaushaltes – individueller Präferenzen zu einer Präferenzordnung des gesamten Haushaltes. Um zunächst das Aggregationsproblem zu vermeiden, können wir uns vereinfachend einen Einpersonenhaushalt vorstellen. Der Nutzen des Haushaltes resultiert aus dem Konsum der Güter, aber genaugenommen stiftet nicht das einzelne Gut den Nutzen, sondern jeweils Güterbündel in ihrer spezifischen Zusammensetzung von Einzelgütern. Beispiel: Der Nutzen eines Briefschreibers ergibt sich aus der sinnvollen (technisch bedingten) Kombination von Füllfederhalter, Tinte und Papier. Für den gleichen Briefschreiber kann das Güterbündel PC, Bildschirmgerät und Drucker einen größeren, gleichartigen oder geringeren Nutzen abgeben. Gleiches gilt für die Aktivitäten des Haushaltes auf dem Faktormarkt. Der aus einem Arbeitsangebot erzielte Nutzen setzt sich zusammen aus dem Nutzen des Einkommens, der Veränderung des Nutzens der Freizeit und dem negativen Nutzen, den wir als Arbeitsleid bezeichnen können.

Da der Nutzen von Personen nicht direkt beobachtet werden kann, erweist es sich als sinnvoll, bestimmte Annahmen (Axiome) hinsichtlich der Präferenzstruktur der Haushalte einzuführen. Aus Gründen der Vereinfachung wollen wir uns auf die Güterbündel x,y,z aus der Menge aller möglichen Güterkombinationen G beschränken. Ferner soll zwischen schwachen und starken Präferenzen unterschieden werden: Schwache Präferenzen liegen vor, wenn ein Güterbündel x zumindest genauso beliebt ist wie ein Güterbündel y (kurz: $x \succeq y$); von starken Präferenzen sprechen wir, wenn Güterbündel x dem Güterbündel y echt vorgezogen wird (kurz: $x \succ y$). Gilt nun ferner $x \succeq y$ und $y \succeq x$, so folgt daraus, daß der Haushalt sich beiden Güterbündeln gegenüber indifferent verhält (kurz: $x \sim y$). Die Annahmen für die Präferenzordnung des Haushaltes lauten:

A1 Vollständigkeit: Für alle x, y, in G gilt: Entweder $x \succeq y$ oder $x \preceq y$ oder $x \sim y$. Jedes Güterbündel ist auf mindestens eine der drei Arten mit einem anderen vergleichbar.

A2 Reflexivität: Für alle x in G gilt: $x \succeq x$. Zwei unterschiedslose Güterbündel sind für einen Haushalt mindestens gleichwertig.

A3 Transitivität: Für alle x, y, z in G gilt: Wenn $x \succeq y$ und $y \succeq z$, dann $x \succeq z$. Diese Annahme stellt sicher, daß die Präferenzordnung widerspruchsfrei ist.

A4 Stetigkeit: Wenn eine Folge von Güterbündeln $z_1, z_2, z_3, \ldots$, zumindest gleichwertig zu y ist und gegen z^* konvergiert, so ist $z^* \succeq y$. Daraus folgt, wenn $y \succ x$, dann gilt für ein x in der Umgebung von y: $z \succ x$. Die Bedeutung dieser Annahme wird bei der Behandlung der Nutzentheorie verdeutlicht.

A5 Strenge Monotonie: Wenn $x \geq y$ und $x \neq y$, dann gilt $x \succ y$. Diese Annahme bedeutet zum einen, daß eine größere Menge desselben Güterbündels einer kleineren Menge vorgezogen wird, und zum anderen, daß eine Sättigungsmenge ausgeschlossen wird. Alternativ dazu kann in einer schwächeren Version angenommen werden, daß eine Sättigungsmenge und eine lokale Nichtsättigung unterhalb der Sättigungsmenge existieren. Diese Annahme ist mit der traditionellen Haushaltstheorie vereinbar.

A6 Strenge Konvexität: Für zwei Güterbündel $x \neq y$ und $x \sim y$ mit den Gütern x_1, x_2 in x und y_1, y_2 in y gilt: $(ax_1 + (1-a)y_1, ax_2 + (1-a)y_2) \succ (x_1, x_2)$ mit $a \in (0,1)$. Diese Annahme besagt, daß der Haushalt ein „ausgewogen" zusammengestelltes Güterbündel einem alternativen Güterbündel vorzieht, das sehr ungleiche Einzelmengen enthält.

Diese Axiome bilden die Grundlage rational handelnder Wirtschaftssubjekte und beschreiben einen Idealtyp, der bei allen Marktentscheidungen unterstellt wird.

4. Abstimmungsparadoxon. Die angeführten Annahmen A1 bis A6 sollen sowohl für den Einpersonenhaushalt – also für die Präferenzordnung einer Person – als auch für Mehrpersonenhaushalte gelten. Nehmen wir an, ein Haushalt wird durch drei Personen (P_1, P_2, P_3) gebildet, wobei jede Person in der Lage sein soll, die Güterbündel x, y, z gemäß A3 transitiv zu ordnen. Ferner soll angenommen werden, daß der Haushalt diese drei Güterbündel in eine gemeinsame Rangordnung bringen will, die ebenfalls der Anforderung der Transitivität genügt. Auf welchem Weg dies geschieht, ob durch demokratische Abstimmung oder durch die diktatorische Entscheidung eines Haushaltsmitgliedes, ist für unser Problem ohne Bedeutung. Geht man im Abstimmungsfall von folgenden individuellen Präferenzordnungen aus:

$$P_1 : x \succ y \succ z,$$

$$P_2 : z \succ x \succ y,$$

$$P_3 : y \succ z \succ x,$$

so hat jede Person die Güterbündel transitiv geordnet. Dennoch wird durch paarweisen Vergleich der Güterbündel deutlich, daß *keine* transitive Rangordnung für die Gesamtheit des Haushaltes aufgestellt werden kann:

$$x \succ y \text{ gilt für } P_1 \text{ und } P_2 \text{, nicht aber für } P_3,$$

$$y \succ z \text{ gilt für } P_1 \text{ und } P_3 \text{, nicht aber für } P_2,$$

$$x \succ z \text{ gilt für } P_1 \text{, nicht aber für } P_2 \text{ und } P_3.$$

Wie man sich leicht vorstellen kann, trifft dieses Problem nicht nur für haushaltsinterne Entscheidungen zu, sondern tritt immer dann auf, wenn individuelle Präferenzen in eine Präferenzordnung (Zielsetzung) einer Organisation übertragen werden sollen. Dabei kann es sich um Haushalte, Firmen, Vereine und Verbände oder um staatliche Institutionen (z.B. Gebietskörperschaften) handeln. Aus diesen Gründen wird das Abstimmungsparadoxon in der Finanzwissenschaft und der theoretischen Wirtschaftspolitik ausführlich diskutiert.

M1. Funktionen. *Mit dem Begriff der Funktion wird der Zusammenhang zwischen einer Größe x (der unabhängigen bzw. exogenen Variablen) und einer Größe y (der abhängigen bzw. endogenen Variablen) beschrieben.*

• Funktion: *Eine (eindeutige)* Funktion *(einer Variablen) ist eine Vorschrift f, die jedem Wert x einer gewissen Menge D_f von reellen Zahlen in eindeutiger Weise einen Zahlenwert $y = f(x)$ zuordnet, den Wert der Funktion f an der Stelle x. Die Menge D_f heißt* Definitionsbereich *von f. Die Zuordnung kann gleichwertig auch mit $x \mapsto f(x)$ oder (bei Weglassen des Funktionssymbols f) mit $y = y(x)$ bezeichnet werden; hierbei steht die Variable x für einen beliebigen Wert des Definitionsbereichs. Der Umfang des Definitionsbereichs geht im allgemeinen aus der konkreten Zuordnungsvorschrift* *hervor. Die Menge aller auftretenden Funktionswerte* $f(x)$ *für* x *aus* D_f *bildet den* Wertebereich W_f *der Funktion.*

• Umkehrfunktion: *Aus einem Funktionswert* y *kann im allgemeinen nicht eindeutig auf den Wert der unabhängigen Variablen* x *geschlossen werden, – es kann mehrere Werte* x *mit* $y = f(x)$ *geben. Gibt es aber zu jedem Wert* y *aus* W_f *ein und nur ein* x *aus* D_f *mit* $y = f(x)$*, so ist hierdurch eine eindeutige Funktion* f^{-1} *erklärt, die Umkehrfunktion von f, die jedem* y *diese eindeutig bestimmte Zahl* x *zuordnet. Die Umkehrfunktion* f^{-1} *ist also durch die zusammengesetzte Funktionsbeziehung* $f^{-1}(f(x)) = x$ *(*x *aus dem Definitionsbereich von f) oder auch durch die Beziehung* $f(f^{-1}(y)) = y$ *(*y *aus dem Wertebereich von f) erklärt. Beispiele:*

$$y = f(x) = 2 - 4x, \qquad x = f^{-1}(y) = \frac{1}{2} - \frac{y}{4},$$

$$y = f(x) = a^x, \qquad x = f^{-1}(y) = \log_a y = \frac{\ln y}{\ln a} = \frac{\lg y}{\lg a} \quad (a > 0).$$

Die für alle Werte von x *erklärte Funktion* $y = f(x) = 1 - (1 - x)^2$ *besitzt hingegen keine Umkehrfunktion, da die Gleichung* $y = 1 - (1 - x)^2$ *zu gegebenem* y *nicht eindeutig nach* x *aufgelöst werden kann: Zu jedem Wert* $y < 1$ *besitzt diese Gleichung die beiden voneinander verschiedenen Lösungen* $x_1 = 1 + \sqrt{1-y}$ *und* $x_2 = 1 - \sqrt{1-y}$*.*

• Einige elementare Funktionen: *Zu den häufig verwendeten Funktionen gehören u.a. die linearen Funktionen, die Potenz- und Exponentialfunktionen sowie alle weiteren Funktionen, die sich hieraus durch Addition und Multiplikation von Funktionen, die Bildung der Umkehrfunktion, durch Zusammensetzen von Funktionen sowie durch beliebige Wiederholung dieser Prozeduren bilden lassen.*

Lineare Funktionen *sind durch eine lineare Gleichung* $y = f(x) = ax + b$ *zwischen den Variablen* x *und* y *mit gegebenen Konstanten* a *und* b *erklärt. Hierbei ist* $b = f(0)$*, und die Konstante* a *ist der Zuwachs der Funktion, wenn die Variable* x *um* 1 *erhöht wird:* $f(x+1) - f(x) = a$ *für alle Werte von* x*.* Potenzfunktionen *sind von der Form* $f(x) = ax^b$ *mit Konstanten* a *und* b*, wobei für nicht ganzzahliges* b *der Definitionsbereich durch* $x \geq 0$ *einzuschränken ist.* Exponentialfunktionen *sind von der Form* $f(x) = ab^x$ *mit Konstanten* a *und* $b > 0$*, und die* Logarithmusfunktionen *ergeben sich wie oben aus der Umkehrung der Exponentialfunktionen.*

• Funktionen von mehreren Variablen: *Ganz entsprechend können auch Funktionen mit zwei oder mehr unabhängigen Variablen erklärt werden. So* *ist eine (eindeutige) Funktion f der zwei unabhängigen Variablen x und y eine Vorschrift, die jedem Paar (x, y) von reellen Zahlen aus einer gewissen Menge D_f von Zahlenpaaren, dem Definitionsbereich, eindeutig einen Zahlenwert $z = f(x, y)$ zuordnet.*

Beispiel: Der maximal mögliche Definitionsbereich der Funktion $z = f(x, y) = \sqrt{x - y}$ ist die Menge aller Zahlenpaare (x, y) mit $y \leq x$.

Wird bei einer Funktion von mehreren Variablen für eine der Variablen ein konkreter Zahlenwert eingesetzt, so verringert sich die Anzahl der Variablen um 1. So wird aus einer Funktion $f(x, y)$ durch Einsetzen eines konkreten Zahlenwertes y_0 für die Variable y die Funktion $x \mapsto f(x, y_0)$ der einen Variablen x.

Lineare Funktionen von n Variablen $x_1, \ldots, x_n$ entstehen durch Summenbildung aus linearen Funktionen der einzelnen Variablen bzw. durch eine Funktionsgleichung $z = f(x_1, \ldots, x_n) = c_0 + c_1 x_1 + \ldots + c_n x_n$ mit Konstanten $c_0, \ldots, c_n$.

Die Klasse der oben eingeführten elementaren Funktionen einer Variablen kann unmittelbar auf Funktionen mit mehreren Variablen ausgedehnt werden: Für jede der einzelnen Variablen muß dann die Funktion – bei festgehaltenen übrigen Variablen – eine elementare Funktion dieser einen Variablen sein.

M2. Differentiationsregeln. *In der Differentialrechnung wird die Änderung des Funktionswertes bei kleinen Änderungen der unabhängigen Variablen untersucht. Dazu ist es zweckmäßig, den Definitionsbereich als ein Zahlenintervall anzunehmen, denn dann können die Punkte innerhalb dieses Intervalls ein gewisses Stück nach links oder rechts oder auch in beide Richtungen verschoben werden.*

- Ableitung: *Erhält bei einer Funktion $y = f(x)$ ein konkreter Wert x_0 der unabhängigen Variablen einen gewissen Zuwachs Δx, so ändert sich der Wert der abhängigen Variablen y um die Größe $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$. Für $\Delta x \neq 0$ kann die relative Änderung von y, der sogenannte* Differenzenquotient *$\Delta y / \Delta x$, als durchschnittliche Änderungsgeschwindigkeit von y (zwischen den Stellen x_0 und $x_0 + \Delta x$) aufgefaßt werden. Wenn der Grenzwert*

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

des Differenzenquotienten für $\Delta x \to 0$ *existiert, so heißt die Funktion* f *(an der Stelle* x_0*)* differenzierbar. *Das bedeutet, daß der Abstand zwischen dem Differenzenquotienten und dem Wert* $f'(x_0)$ *beliebig klein wird, wenn nur der absolute Betrag* $|\Delta x|$ *des Zuwachses hinreichend klein ist. Der Grenzwert heißt (erste)* Ableitung *oder* Differentialquotient *von* f *(an der Stelle* x_0*); er kann als momentane Änderungsgeschwindigkeit von* y (marginale Änderung, Steigung) *an der Stelle* x_0 *aufgefaßt werden. Existiert die Ableitung für alle Werte der Variablen* x *(in einem gewissen Definitionsbereich), so ist sie selbst wieder eine von* x *abhängende Funktion* f'. *Für den Differentialquotienten – als Funktion von* x *– sind mehrere Bezeichnungen üblich, wie etwa* $f'(x)$, $\frac{d}{dx}f(x)$, $\frac{df(x)}{dx}$, $\frac{d}{dx}y$, $\frac{dy}{dx}$, f_x *oder* y_x. *Für die Ableitung an einer konkreten Stelle* x_0 *kann neben* $f'(x_0)$ *auch* $f_x(x_0)$ *oder* $\frac{df}{dx|x = x_0}$ *geschrieben werden.*

• Ableitung einiger elementarer Funktionen:

Konstante Funktion: $y = C$, $\frac{dy}{dx} = 0$ (C *eine beliebige Konstante*),

Potenzfunktion: $y = x^a$, $\frac{dy}{dx} = ax^{a-1}$ (a *eine beliebige Konstante*),

Beispiel : $\frac{d}{dx}\sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ (*für* $x > 0$),

Exponentialfunktion: $y = a^x$, $\frac{dy}{dx} = a^x \ln a$ (a *eine positive Konstante*),

Beispiele : $\frac{d}{dx}\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x$, $\frac{d}{dx}2^x = 2^x \ln 2$

Logarithmusfunktion: $y = \ln x$, $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$ (*für* $x > 0$).

Mit Hilfe einfacher Regeln kann die Ableitung von Funktionen berechnet werden, die sich nach dem in M1 *angegebenen Verfahren durch die genannten elementaren Funktionen formelmäßig darstellen lassen.*

• Ableitung von Summen, Produkten und Quotienten von Funktionen: *Sind die Funktionen* u *und* v *(an der Stelle* x*) differenzierbar, so sind es auch die daraus gebildeten Summen, Produkte und Quotienten, und deren Ableitungen berechnen sich wie folgt:*

Summenregel :
$$y = u(x) + v(x), \quad \frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}, \quad (y' = u' + v'),$$

Konst. Faktor :
$$y = C \cdot u(x), \quad \frac{dy}{dx} = C\frac{du}{dx}, \quad (y' = Cu'),$$

Produktregel :
$$y = u(x) \cdot v(x), \quad \frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx}v(x) + u(x)\frac{dv}{dx}, \quad (y' = u'v + uv'),$$

Quotientenregel :
$$y = \frac{u(x)}{v(x)}, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{du}{dx}v(x) - u(x)\frac{dv}{dx}}{(v(x))^2}, \quad \left(y' = \frac{u'v - uv'}{v^2}\right).$$

Beispiel: $y = ax + b$ *(lineare Funktion),* $\frac{dy}{dx} = a$ *(a, b beliebige Konstanten).*

• Kettenregel: *Ist der Wertebereich einer „inneren“ Funktion $u = g(x)$ im Definitionsbereich einer „äußeren“ Funktion $y = f(u)$ enthalten, so können beide Funktionen zu einer „mittelbaren“ Funktion $F(x) = f(g(x))$ der Variablen x zusammengesetzt werden. Ist dann die innere Funktion an der Stelle x und die äußere an der Stelle $g(x)$ differenzierbar, so ist die mittelbare Funktion an der Stelle x differenzierbar, und ihre Ableitung berechnet sich nach der folgenden Kettenregel:*

$$y = F(x) = f(g(x)),\ u = g(x),\ y = f(u),\ \frac{dy}{dx} = f'(g(x)) \cdot g'(x),$$

$$\textit{bzw.} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}_{|u = g(x)} \cdot \frac{du}{dx}, \quad \textit{symbolisch:} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}.$$

Für $f'(g(x))$ ist dabei zuerst die Ableitung der Funktion $f(u)$ nach u zu berechnen und anschließend $g(x)$ für u einzusetzen.

Beispiel:

$$\begin{aligned} y &= F(x) = \sqrt{e^x(2 + x^2)},\ u = g(x) = e^x(2 + x^2),\ y = f(u) = \sqrt{u}, \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{2\sqrt{u}}_{|u = e^x(2 + x^2)} \cdot \left(e^x(2 + x^2) + e^x 2x\right) = \frac{e^x(2 + 2x + x^2)}{2\sqrt{e^x(2 + x^2)}}. \end{aligned}$$

• Höhere Ableitungen: *Falls die (erste) Ableitung einer Funktion $y = f(x)$ ebenfalls differenzierbar ist, entsteht durch erneutes Differenzieren die* zweite Ableitung *(Ableitung zweiter Ordnung); diese gibt die momentane Änderungsgeschwindigkeit oder marginale Änderung der Größe $y = f'(x)$ bzw. die Beschleunigung der ursprünglichen Größe $y = f(x)$ an. Als Bezeichnungen für die zweite Ableitung werden etwa $f''(x)$, $\frac{d^2}{dx^2}f(x)$, $\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)$, y'', D^2y oder auch f_{xx} verwendet. Analog werden dritte Ableitungen als (erste) Ableitungen von zweiten Ableitungen (mit entsprechenden Schreibweisen wie etwa $f'''(x)$) eingeführt, usw.*

Beispiel: $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, $y' = 3ax^2 + 2bx + c$, $y'' = 6ax + 2b$, $y''' = 6a$, $y'''' = 0$. Durch den Differentiationsprozeß erniedrigt sich also der Grad der gegebenen Funktion dritten Grades schrittweise um 1.

• Differential: *Aus $f'(x) = \frac{dy}{dx}$ folgt durch formale Multiplikation mit dx die symbolische Beziehung $dy = f'(x)dx$. Letztere hat aber auch eine inhaltliche und praktische Bedeutung: Bezeichnet jetzt dx einen konkreten Zuwachs der unabhängigen Variablen x, so erhält der Wert der Funktion f den Zuwachs $f(x+dx) - f(x) \approx f'(x)dx$, wobei die Näherung (im Sinne des Grenzwertes für $dx \to 0$) um so besser ist, je kleiner $|dx|$ ausfällt. Die (von der Variablen dx abhängende) Größe $f'(x)dx$ heißt das (zum Zuwachs dx gehörende)* Differential *der Funktion an der Stelle x. Die Interpretation des Differentials $dy = f'(x)dx$ als Funktionswertzuwachs, also*

$$dy = f'(x)dx = f(x + dx) - f(x),$$

ist grundsätzlich im Sinne einer Näherung für hinreichend kleine Werte von $|dx|$ zu verstehen.

Das Differential zweiter Ordnung *$d^2y = f''(x)dx^2$ beschreibt dann (näherungsweise für kleine Werte von $|dx|$) den Zuwachs des Differentials (erster Ordnung), wenn die unabhängige Variable den Zuwachs dx erfährt; hierbei ist das Symbol dx^2 als $(dx)^2$ zu verstehen.*

Beispiel: Für die kubische Funktion $y = f(x) = x^3$ ist $dy = f'(x)dx = 3x^2dx$ und $d^2y = 6xdx^2$. Die Änderung des Funktionswertes für den Zuwachs dx hat den Wert $(x+dx)^3-x^3 = 3x^2dx+3x(dx)^2+(dx)^3 = dy+3x(dx)^2+(dx)^3$. Werden hierin – was für kleine Werte von $|dx|$ berechtigt ist – die höheren Potenzen von dx vernachlässigt, so verbleibt $dy = f(x + dx) - f(x)$. Der Zuwachs des Differentials zwischen den Stellen $x + dx$ und x hat den Wert $dy(x+dx)-dy(x) = 3(x+dx)^2dx-3x^2dx = 6x(dx)^2+3(dx)^3 = d^2y+3(dx)^3$. Wird hierbei die dritte Potenz von dx vernachlässigt, so verbleibt $d^2y = dy(x + dx) - dy(x)$.

• Partielle Ableitungen: *Werden bei einer Funktion $z = f(x, y, \ldots)$ von mehreren Variablen alle Variablen mit einer Ausnahme, etwa von x, festgehalten, also als Parameter betrachtet, so heißt die Ableitung der jetzt nur noch von x abhängenden Funktion $x \mapsto f(x, y, \ldots)$ die* partielle Ableitung *von f nach x (bei festen übrigen Variablen). Als Bezeichnungen hierfür sind üblich:* $\frac{\partial}{\partial x} f(x, y, \ldots)$, $\frac{\partial f(x, y, \ldots)}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial x} z$, $\frac{\partial z}{\partial x}$, $f_x(x, y, \ldots)$.

Entsprechend werden partielle Ableitungen zweiter Ordnung – *mit den zugehörigen Bezeichnungen – eingeführt, wobei jetzt nach jeweils unterschiedlichen Variablen differenziert werden kann:*

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)}{\partial x} = f_{xx}, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)}{\partial y} = f_{yy},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)}{\partial y} = f_{xy}, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)}{\partial x} = f_{yx}.$$

Bei einer großen Klasse von Funktionen, etwa bei den in der Praxis zumeist auftretenden elementaren Funktionen, stimmen die sogenannten gemischten Ableitungen f_{xy} und f_{yx} überein, – die Reihenfolge, in der die Ableitungen $\frac{\partial}{\partial x}$ und $\frac{\partial}{\partial y}$ gebildet werden, spielt also keine Rolle (Satz von H. A. Schwarz). Von dieser Eigenschaft wird im folgenden generell Gebrauch gemacht.

Beispiel:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= x\mathrm{e}^{xy^2}, \ f_x = \mathrm{e}^{xy^2} + x\mathrm{e}^{xy^2} y^2 = \mathrm{e}^{xy^2}(1 + xy^2), \ f_y = 2x^2 y \mathrm{e}^{xy^2}, \\ f_{xy} &= \mathrm{e}^{xy^2} 2xy(1 + xy^2) + \mathrm{e}^{xy^2} 2xy = 2xy(2 + xy^2)\mathrm{e}^{xy^2}, \\ f_{yx} &= 4xy\mathrm{e}^{xy^2} + 2x^2 y^3 \mathrm{e}^{xy^2} = 2xy(2 + xy^2)\mathrm{e}^{xy^2}. \end{aligned}$$

• Kettenregel bei mehreren Variablen: *Hängen die Variablen der Funktion $z = f(x, y, \ldots)$ selbst wieder differenzierbar von* ein und derselben *Variablen t ab, etwa der Zeit, so ist durch $t \mapsto z = f(x(t), y(t), \ldots)$ eine differenzierbare Abhängigkeit des Funktionswertes z von t gegeben. Die* totale Ableitung *von z nach t berechnet sich dann nach der Kettenregel (für mehrere Variable) wie folgt:*

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \ldots = f_x(x(t), y(t), \ldots)\frac{dx}{dt} + f_y(x(t), y(t), \ldots)\frac{dy}{dt} + \ldots$$

Insbesondere können die einzelnen Variablen von f differenzierbar voneinander abhängen. Ist etwa bei zwei Variablen x und y die Variable y eine *differenzierbare Funktion $y = y(x)$, so vereinfacht sich die Kettenregel:*

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dx} = f_x(x, y(x)) + f_y(x, y(x))\frac{dy}{dx}.$$

Hieraus ergibt sich als zweite Ableitung:

$$\begin{aligned}\frac{d^2z}{dx^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\Big(f_x + f_y\frac{dy}{dx}\Big) + \frac{\partial}{\partial y}\Big(f_x + f_y\frac{dy}{dx}\Big)\frac{dy}{dx}\\ &= f_{xx} + 2f_{xy}\frac{dy}{dx} + f_{yy}\Big(\frac{dy}{dx}\Big)^2 + f_y\frac{d^2y}{dx^2}.\end{aligned}$$

Beispiel: Für die Funktion $z = f(x, y) = x\mathrm{e}^y$ mit $y(x) = \ln x$ ist $z = f(x, y(x)) = x\mathrm{e}^{\ln x} = x^2$; die Ableitungen $z' = 2x$ und $z'' = 2$ werden jetzt noch einmal mit Hilfe der Kettenregel berechnet:

$$\begin{aligned}z' &= f_x + f_y y' = \mathrm{e}^y + x\mathrm{e}^y \cdot \frac{1}{x} = 2\mathrm{e}^y = 2x,\\ z'' &= f_{xx} + 2f_{xy}y' + f_{yy}y'^2 + f_y y'' = 0 + 2\mathrm{e}^y\frac{1}{x} + x\mathrm{e}^y\frac{1}{x^2} + x\mathrm{e}^y\frac{(-1)}{x^2} = 2.\end{aligned}$$

• Differential bei mehreren Variablen: *Für eine Funktion $z = f(x, y, \ldots)$ geben die sog.* partiellen Differentiale $\frac{\partial z}{\partial x}dx, \frac{\partial z}{\partial y}dy, \ldots$ *die jeweilige Änderung des Funktionswertes für den Fall an, daß nur die betreffende Variable den entsprechenden Zuwachs $dx, dy, \ldots$ erfährt und die übrigen Variablen ungeändert bleiben, – dies gilt näherungsweise für hinreichend kleine Werte von $|dx|, |dy|, \ldots$ Bei einer Änderung aller Variablen sind die einzelnen partiellen Differentiale aufzusummieren: Das* totale Differential

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy + \ldots$$

gibt dann – näherungsweise für hinreichend kleine Änderungen der einzelnen Variablen – die Änderung des Funktionswertes an, wenn sich alle exogenen Größen unabhängig voneinander ändern.

Beispiele: Für die Funktion $z = f(x, y) = x^{0,2}y^{0,3}$ steige die Variable x von $x = 4$ auf $4,1$ und die Variable y falle von $y = 5$ um $0,1$. Der Funktionswert erfährt hierbei den Zuwachs $4,1^{0,2} \cdot 4,9^{0,3} - 4^{0,2}5^{0,3} = -0,0024$, bei Rechnung auf vier Stellen nach dem Komma. Zum Vergleich: Das totale Differential hat den Wert
$dz = f_x(4, 5)dx + f_y(4, 5)dy = 0,1069 \cdot 0,1 + 0,1283(-0,1) = -0,0021.$

Für eine lineare Funktion $z = f(x_1, \ldots, x_n) = a_0 + a_1x_1 + \ldots + a_nx_n$ von n Variablen stimmen totales Differential und Zuwachs des Funktionswertes genau *überein:*

$$dz = a_1dx_1 + \ldots + a_ndx_n = f(x_1 + dx_1, \ldots, x_n + dx_n) - f(x_1, \ldots, x_n).$$

Das totale Differential zweiter Ordnung d^2z *beschreibt – näherungsweise für hinreichend kleine Änderungen der einzelnen Variablen – den Zuwachs des totalen Differentials (erster Ordnung). Für zwei Variable x und y mit den Änderungen dx bzw. dy hat dieses Differential – bei übereinstimmenden gemischten Ableitungen – die Darstellung*

$$d^2z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2.$$

5. Nutzenfunktion. In der traditionellen mikroökonomischen Theorie ist es üblich, die Präferenzen des Haushaltes – von denen wir annehmen wollen, daß das Aggregationsproblem gelöst ist – in einer Nutzenfunktion zu verdeutlichen:

$$U = U(a_1, a_2, ..., a_n), \;\; \partial U/\partial a_j > 0, \;\; j = 1, \ldots, n, \tag{1}$$

wobei a_1 bis a_n die Aktivitäten des Haushaltes darstellen, die zur Bedürfnisbefriedigung geeignet sind. Unter diesen Aktivitäten kann der Verbrauch bestimmter Mengen q_1 und q_2 der Konsumgüter 1 und 2 verstanden werden, man kann aber auch an die Aktivitäten Sport und Erholung denken. Im ersten Fall sind für die Güter die Marktpreise p_1 und p_2 zu entrichten, im zweiten Fall „kosten“ die Aktivitäten bestimmte Zeiteinheiten. Diese zweite Gruppe von Aktivitäten behandeln wir in Abschnitt 19, so daß wir – aus Gründen der Vereinfachung und der leichteren graphischen Verdeutlichung der Probleme – zunächst nur die beiden Gütermengen q_1 und q_2 in die Nutzenfunktion einbeziehen wollen, die nun lautet:

$$U = U(q_1, q_2). \tag{2}$$

Für den Zusammenhang zwischen konsumierten Gütermengen und Nutzenniveau wird unterstellt, daß der Nutzen mit zunehmenden Gütermengen steigt, gleichzeitig aber die Nutzenzuwächse mit zunehmenden Gütermengen sinken. Diese Eigenschaften werden in der deutschsprachigen Literatur nach dem deutschen Ökonomen Hermann Heinrich Gossen unter dem 1. Gossenschen Gesetz zusammengefaßt:

$$\partial U/\partial q_1 > 0, \ \ \partial U/\partial q_2 > 0, \tag{3}$$

$$\partial^2 U/\partial q_1^2 < 0, \ \ \partial^2 U/\partial q_2^2 < 0, \tag{4}$$

wobei die Bezeichnungen $\partial U/\partial q_1$ und $\partial U/\partial q_2$ die Grenznutzen der Güter 1 und 2 angeben, die als die Veränderung des Gesamtnutzens bei einer marginalen Mengenvariation eines Gutes q_j und Konstanz aller anderen Gütermengen definiert sind. Die zweiten Ableitungen, $\partial^2 U/\partial q_1^2$ und $\partial^2 U/\partial q_2^2$, geben die Veränderungen der Nutzenzuwächse an. Es läßt sich zeigen, daß das 1. Gossensche Gesetz eine hinreichende – jedoch nicht notwendige – Bedingung zur Geltung der strengen Konvexität A6 darstellt. Eine weitere sinnvolle Annahme soll an dieser Stelle eingeführt werden:

A7 Nicht vollständige Substitution: Die in der Nutzenfunktion enthaltenen Güter sind nicht geeignet, sich gegenseitig vollständig zu ersetzen.

Diese Annahme besagt, daß der Austausch des Gutes 1 durch das Gut 2 in geeigneten Mengeneinheiten in der Lage ist, das Nutzenniveau des Haushaltes zu erhalten, ohne daß jedoch das eine Gut das andere Gut vollständig ersetzen kann. Die Austauschrate oder Substitutionsrate des Haushaltes ist immer negativ, da ein Gut eine Verringerung und notwendigerweise ein anderes Gut eine Ausweitung erfährt.

Die Annahmen A1 bis A7 begrenzen die Vielfalt der möglichen spezifischen Nutzenfunktionen. Zwei zulässige Funktionen könnten beispielsweise lauten:

$$U = q_1^{\alpha} q_2^{\beta}, \qquad \alpha, \beta > 0, \qquad q_1, q_2 > 0, \tag{5}$$

$$U = q_1 + 2q_1^{0,5} q_2^{0,5} + q_2, \qquad q_1, q_2 \geq 0. \tag{6}$$

Es wird noch zu prüfen sein, ob die Annahmen A1 bis A7 auf die beiden Nutzenfunktionen (5) und (6) zutreffen.

6. Indifferenzkurven. Die in Abschnitt 5 eingeführte Substitutionsfähigkeit der Güter soll etwas genauer betrachtet werden. Nimmt man an, daß die Güter 1 und 2 in beliebig kleine Einheiten teilbar sind (wie z.B. Wasser oder Mehl), so kann die Indifferenzkurvenanalyse zur Anwendung gelangen. Eine Indifferenzkurve ist der Ort aller Mengenkombinationen von q_1 und

q_2, graphisch dargestellt in einem q_1/q_2-Diagramm, für den der Nutzen des Haushaltes aus dem Konsum beider Güter konstant ist. Mithin ist der Haushalt hinsichtlich aller Punkte, d.h. Güterkombinationen, auf dieser Kurve indifferent. Für eine Indifferenzkurve gilt:

$$\bar{U} = U(q_1, q_2) = const. \tag{7}$$

Die Steigung dieser Kurve dq_1/dq_2 in einem Punkt wird als „Grenzrate der Substitution“ (kurz: GRS) bezeichnet (vgl. dazu Abbildung 1).

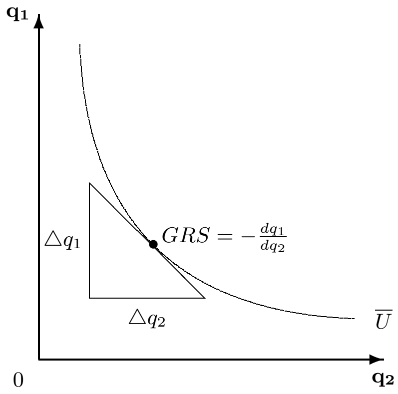


Abb. 1: Grenzrate der Substitution

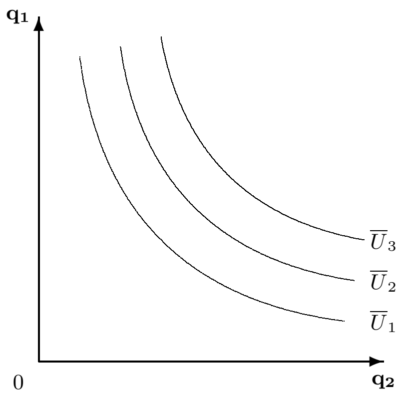


Abb. 2: Indifferenzkurven

Natürlich gibt es neben der in Abbildung 1 eingezeichneten Indifferenzkurve eine Vielzahl dicht gepackter weiterer Indifferenzkurven, die sich hinsichtlich des Nutzenniveaus unterscheiden ($\bar{U}_1 \prec \bar{U}_2 \prec \bar{U}_3$ in Abbildung 2). Indifferenzkurven weisen im allgemeinen folgende Eigenschaften auf:

— Indifferenzkurven mit unterschiedlichem Nutzenniveau dürfen sich nicht schneiden (Transitivitätsannahme A3).

— Je weiter eine Indifferenzkurve vom Nullpunkt des q_1/q_2–Diagramms entfernt ist, umso höher ist ihr Nutzenniveau (Annahme der lokalen Nichtsättigung A5).

— Indifferenzkurven dürfen die q_1– bzw. q_2–Achse nicht schneiden oder tangieren (Annahme der nicht vollständigen Substitution A7).

— Indifferenzkurven weisen einen zum Ursprung hin streng konvexen Verlauf auf (Annahme der strengen Konvexität A6).

Die Steigung der Indifferenzkurve (Grenzrate der Substitution) erhält man aus der Gleichung

$$q_1 = g(q_2, \bar{U}), \quad \bar{U} = const., \tag{8}$$

die nach q_2 abgeleitet $dq_1/dq_2|_{dU=0}$ ergibt. Da die Steigung der Indifferenzkurve negativ ist, geht dieser Sachverhalt in die Definition der GRS ein: $GRS_{1,2} \equiv -dq_1/dq_2|_{dU=0} > 0$. Indifferenzkurven weisen nach Annahme 6 auch die Eigenschaft der Konvexität

$$\frac{dGRS}{dq_2} = \frac{d(-dq_1/dq_2)}{dq_2} = -\frac{d^2q_1}{dq_2^2}|_{dU=0} < 0$$

auf, die für die Diskussion des Haushaltsgleichgewichts bedeutsam ist und auf die wir später zurückkommen werden. (Da wir die Grenzrate der Substitution positiv definiert haben, bedeutet $-d^2q_1/dq_2^2 < 0$ Konvexität der Indifferenzkurve.) Wir können nun einen ersten wichtigen Zusammenhang zwischen der Grenzrate der Substitution und den Grenznutzen $\partial U/\partial q_1$ bzw. $\partial U/\partial q_2$ herstellen. Die Grenznutzen geben an, wie sich der Nutzen des Haushaltes bei einer Änderung der konsumierten Menge von Gut 1 oder Gut 2 ändert. Bildet man das totale Differential der Nutzenfunktion $U = U(q_1, q_2)$ unter Berücksichtigung der Tatsache, daß entlang einer Indifferenzkurve definitionsgemäß eine Veränderung des Nutzenniveaus unterbleibt ($dU = 0$), so erhält man

$$dU = \frac{\partial U}{\partial q_1}dq_1 + \frac{\partial U}{\partial q_2}dq_2 = 0 \tag{9}$$

oder

$$\frac{\partial U/\partial q_2}{\partial U/\partial q_1} = -\frac{dq_1}{dq_2}|_{dU=0} \quad = GRS_{1,2}. \tag{9'}$$

Satz: *Die Grenzrate der Substitution zwischen zwei Gütern ist gleich dem umgekehrten Verhältnis der Grenznutzen dieser Güter.*

7. Eigenschaften bestimmter Nutzenfunktionen. Es soll geprüft werden, ob die Behauptung zutrifft, daß die Nutzenfunktionen (5) und (6) den Annahmen A4 bis A7 entsprechen. Die Annahmen A1 bis A3 werden als erfüllt angenommen (die Werte für q_1 und q_2 sind reelle Zahlen und können in eindeutige Rangfolgen gebracht werden). Beide Nutzenfunktionen sind stetig (Annahme A4), da die erste Ableitung von (5) oder (6) weder eine Sprungstelle aufweist, noch zwischen zwei benachbarten Indifferenzkurven eine Sprungstelle existiert. Beide Funktionen sind ferner streng monoton steigend, wenn die Grenznutzen positiv sind, d.h.

$$\frac{\partial U}{\partial q_1} = \frac{\alpha U}{q_1} > 0, \quad \frac{\partial U}{\partial q_2} = \frac{\beta U}{q_2} > 0 \tag{10}$$

für die erste Nutzenfunktion (5) und

$$\frac{\partial U}{\partial q_1} = 1 + \left(\frac{q_2}{q_1}\right)^{\frac{1}{2}} > 0, \quad \frac{\partial U}{\partial q_2} = 1 + \left(\frac{q_1}{q_2}\right)^{\frac{1}{2}} > 0 \tag{11}$$

für die zweite Nutzenfunktion (6). Die Annahme strenger Konvexität der Nutzenfunktion $U = f(q_1, q_2)$ ist erfüllt, wenn das totale Differential der Grenzrate der Substitution positiv ist:

$$\frac{d^2 q_1}{dq_2^2} = -\frac{1}{f_1^3}(f_{22}f_1^2 - 2f_{21}f_2f_1 + f_{11}f_2^2) > 0, \tag{12}$$

wobei die folgenden Kurzbezeichnungen verwendet werden: $f_1 = \partial U/\partial q_1$, $f_{11} = \partial^2 U/\partial q_1^2$, $f_2 = \partial U/\partial q_2$, $f_{22} = \partial^2 U/\partial q_2^2$ und $f_{21} = \partial^2 U/(\partial q_2 \partial q_1)$. Da $f_1 > 0$ ist, muß der Inhalt der Klammer $(f_{22}f_1^2 - 2f_{21}f_2f_1 + f_{11}f_2^2)$ negativ sein, um die Konvexitätsbedingung zu erfüllen. Dieser Klammerausdruck ist für f_1, $f_2 > 0$, f_{11}, $f_{22} < 0$ und $f_{21} > 0$ negativ. Er ist ebenfalls für die Nutzenfunktion (5)

$$-\alpha\beta q_1^{3\alpha-2} q_2^{3\beta-2}(\alpha+\beta) < 0$$

und für die Nutzenfunktion (6)

$$-\frac{q_2^{1/2}}{2q_1^{3/2}} - \frac{1}{q_1^{1/2} q_2^{1/2}} - \frac{1}{q_1} + \frac{3q_1^{1/2}}{2q_2^{2/3}} + \frac{q_1}{q_2} < 0$$

negativ. Die Indifferenzkurven beider Nutzenfunktionen sind somit streng konvex. Es kann leicht gezeigt werden, daß die Nutzenfunktion

$$U = aq_1 + bq_2, \; a, b > 0 \tag{13}$$

die Annahme der strengen Konvexität verletzt, da $d(b/a)/dq_2 = 0$ ist.

In der älteren Nutzentheorie (z.B. Gossen) wird angenommen, daß Nutzen kardinal meßbar sei. Für den Vergleich zweier Situationen (q_1^o, q_2^o) und (q_1^1, q_2^1) gilt danach $U(q_1^o, q_2^o) - U(q_1^1, q_2^1) = \Delta U$, wobei der Nutzenabstand ΔU, ebenso wie die Nutzenwerte selbst, Werte auf einem Zahlenstrahl mit Nullpunkt darstellen. Die neuere Nutzentheorie (z.B. Pareto) fordert lediglich, daß Nutzenunterschiede angegeben werden können. Es wird untersucht, ob der Nutzen aus einer Situation kleiner, gleich oder größer ist als der aus einer anderen Situation. Als Beispiel sei genannt $U(q_1^o, q_2^o) < U(q_1^1, q_2^1)$, wobei die Kombination (q_1^1, q_2^1) der Kombination (q_1^o, q_2^o) vorgezogen wird. Dieser Ansatz stellt auf die Ordnung der Alternativen hinsichtlich des Nutzens ab und wird als ordinale Nutzentheorie bezeichnet. Während die kardinale Nutzentheorie von der Annahme abnehmender Grenznutzen ausgeht (vgl. Abschnitt 5, Gleichung 4), postuliert die ordinale Nutzentheorie abnehmende Grenzraten der Substitution. Einige Aussagen der Haushaltstheorie (z.B. 1. Gossensches Gesetz, wie die Darstellung des Grenznutzens überhaupt) sind nur mit der kardinalen Nutzentheorie vereinbar, andere auch mit der schwächere Anforderungen stellenden ordinalen Nutzentheorie. Die entscheidende Frage zur Beurteilung der unterschiedlichen Nutzentheorien lautet: Sind Wirtschaftssubjekte in der Lage, dem empfundenen Nutzen einen kardinal meßbaren Wert, etwa in Geldeinheiten, zuzuweisen oder nicht? Diese Frage ist aber keine ökonomische Fragestellung, wie man leicht erkennt, sondern eine Frage an die Psychologie. Darum soll sie auch hier nicht entschieden werden.

8. Einkommensrestriktion. Die Nutzenfunktion selbst beschreibt ein psychologisches Phänomen und hat keinerlei ökonomischen Gehalt. Ökonomische Probleme entstehen erst dann, wenn mit grundsätzlich begrenzten Ressourcen die prinzipiell unbeschränkten Bedürfnisse der Individuen befriedigt werden sollen. Wir sprechen in diesen Fällen von knappen Gütern. Auf der Beschaffungsseite besteht das Problem des Haushaltes darin, begrenzte Geldmittel in einer Weise auf den Kauf und Konsum von Gütern zu verwenden, daß der Nutzen des Haushaltes ein Maximum erreicht. Dabei wird angenommen, daß die Nachfrage eines einzelnen Haushaltes die

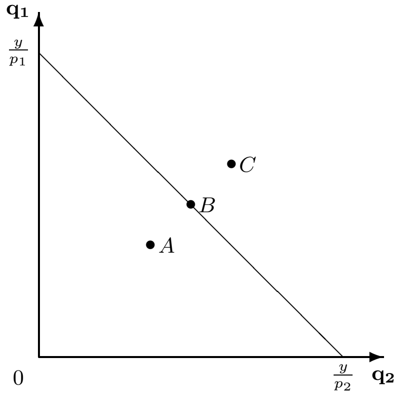


Abb. 3: Die Einkommensrestriktion

Marktpreise der Güter nicht beeinflußt, und somit die Güterpreise vom einzelnen Haushalt als gegeben hingenommen werden müssen. Sieht man von intertemporalen Verschiebungen des Konsums ab (durch Sparen kann der Konsum in die Zukunft, durch Kreditnahme in die Gegenwart verlagert werden), so entspricht das in einer Periode verfügbare Einkommen y genau den Ausgaben für die Gütermengen q_1, q_2 zu den gegebenen Preisen p_1, p_2.

$$y = q_1 p_1 + q_2 p_2. \tag{14}$$

Löst man diese Gleichung, die auch als Budgetgleichung bezeichnet wird, nach q_1 auf

$$q_1 = \left(\frac{y}{p_1}\right) - \left(\frac{p_2}{p_1}\right) q_2, \tag{15}$$

so kann diese ökonomische Restriktion des individuellen Konsums in einem q_1/q_2–Diagramm als Gerade mit der negativen Steigung $dq_1/dq_2 = -p_2/p_1$ dargestellt werden. Die Steigung entspricht dem relativen Preis, die Schnittpunkte mit der Ordinate lauten $y/p_1(q_2 = 0)$ und mit der Abszisse $y/p_2(q_1 = 0)$. Alle Güterkombinationen q_1, q_2 innerhalb des Dreiecks $y/p_1, 0, y/p_2$ und alle auf dem Rand liegenden Kombinationen (z.B.: $q_1 = 0, q_2 = q_2^*$ mit $q_2^* \leq y/p_2$) können mit einem Einkommen in Höhe von y erworben werden (vgl. Abb. 3). Bei Kombination A verbleibt ein Restbetrag, Kombination B ergibt genau y und Kombination C ist nicht realisierbar, da die Ausgaben für q_1 und q_2 größer als y sind. Veränderungen von y, p_1 und p_2 auf die Lage der Budgetgleichung können unmittelbar abgelesen werden. Eine Erhöhung von y läßt eine neue Budgetgerade entstehen, die parallel zur ursprünglichen Budgetgeraden verläuft und weiter vom Ursprung 0 entfernt ist. Eine Senkung des Einkommens bewirkt das Gegenteil. Vermindert sich der Preis p_1, so steigt y/p_1, y/p_2 bleibt unverändert und die Steigung der Geraden p_2/p_1 nimmt zu. Bei einem Anstieg des Preises p_2 sinkt y/p_2, y/p_1 bleibt unverändert und die Steigung der Geraden p_2/p_1 nimmt ab.

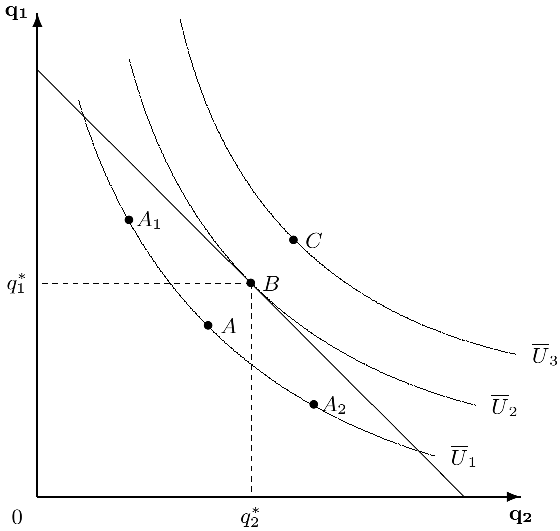


Abb. 4: Haushaltsoptimum auf der Beschaffungsseite

9. Haushaltsoptimum. Die graphische Lösung der Nutzenmaximierung unter einer Nebenbedingung (Einkommen) ist sehr einfach herbeizuführen, wenn wir die Abbildungen 2 und 3 übereinander projizieren (vgl. Abb. 4). Da für das Nutzenniveau der Indifferenzkurven $\bar{U}_3 > \bar{U}_2 > \bar{U}_1$ gilt und der Nutzen maximiert werden soll, werden wir die Indifferenzkurven in dieser Reihenfolge überprüfen. $\bar{U}_3$ durchläuft die Güterkombination C, die nicht zum Lösungsraum gehört, mit anderen Worten, der Haushalt verfügt über ein Einkommen, das nicht ausreicht, um diese Güterkombination zu erwerben. Die Indifferenzkurve $\bar{U}_2$ stellt jene Indifferenzkurve dar, die gleichzeitig den höchsten Wert aufweist und einen gemeinsamen Punkt mit dem Lösungsraum hat. Schließlich können wir feststellen, daß Indifferenzkurve $\bar{U}_1$ eine Vielzahl von Güterkombinationspunkten im Lösungsraum erreicht hat (etwa A, A_1, A_2), ungeachtet dessen aber einen geringeren Nutzen als $\bar{U}_2$ aufweist. Daraus folgt, daß der Tangentialpunkt B auf der Indifferenzkurve $\bar{U}_2$ den unter der Einkommensrestriktion y maximal zu erzielenden Nutzen repräsentiert, der durch den Konsum der Gütermengen q_1^*, q_2^* erreicht wird. Der Optimalpunkt B gilt nur bei unveränderten Preisen und Einkommen. Für jede Einkommenshöhe (z.B. y', y'', y''') existiert ein anderes partielles Haushaltsgleichgewicht (vgl. Abb. 5); die Menge aller Tangentialpunkte der parallel verschobenen Budgetrestriktion mit den unveränderten Indifferenzkurven wird als Einkommenskonsumlinie (EKL) bezeichnet. Ändert sich der relative Preis der Güter, so dreht sich die Budgetrestriktion in den Schnittpunkten mit Ordinate oder Abszisse (Änderungen von p_1, Drehung um Punkt y/p_2; Änderung von p_2, Drehung um Punkt y/p_1). Wiederum entsteht eine Menge von Tangentialpunkten ($B^{'}, B^{''}, B^{'''}$), die alternative Haushaltsgleichgewichte bei verschiedenen Preisen verdeutlichen, und die als Preiskonsumlinie (PKL) bezeichnet wird. Diese drei Expansionspfade — für variierende Einkommen y und Preise p_1 p_2 — sind in den Abbildungen 5 sowie 6a und 6b dargestellt. Aus Gründen der Übersichtlichkeit ist die graphische Lösung des Nutzenmaximierungsproblems auf zwei Güter begrenzt.

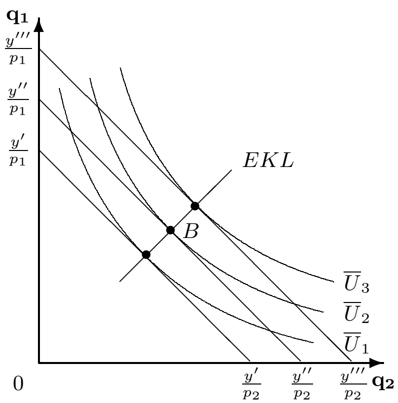


Abb. 5: Änderung des Einkommens

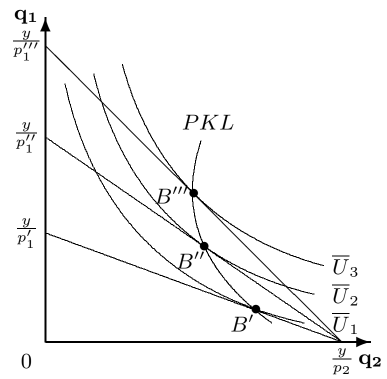


Abb. 6a: Änderung des Preises p_1

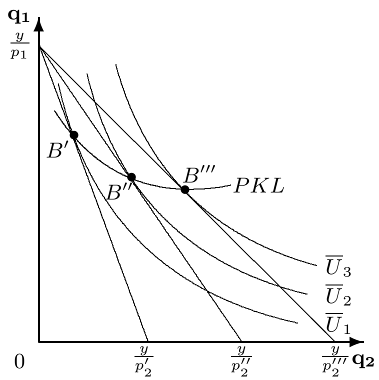


Abb. 6b: Änderung des Preises p_2

M3. Optimierung ohne Nebenbedingungen. *Unter der Optimierung einer Funktion $z = f(x, y, \ldots)$, der sog.* Zielfunktion, *soll die Bestimmung von* Extremwerten *(Extrema, Optima), also der größten Funktionswerte (Maxima) oder der kleinsten Funktionswerte (Minima), verstanden werden. Dabei sind zunächst die sogenannten inneren Punkte des Definitionsbereichs von den übrigen zu unterscheiden:*

Ein innerer Punkt $(x, y, \ldots)$ *gehört mit einer ganzen* Umgebung *dem Definitionsbereich an, d.h. er verbleibt bei allen hinreichend kleinen Verschiebungen $x \to x + \Delta x,\ y \to y + \Delta y, \ldots$ nach links und nach rechts innerhalb des Definitionsbereichs.*

Beispiel: Die inneren Punkte des Quadrats $a \le x \le b,\ c \le y \le d$ sind diejenigen Punkte (x, y), für die sowohl $a < x < b$ als auch $c < y < d$ gilt.

• Lokale und globale Optima: *Die Funktion f hat in einem inneren Punkt $(x^*, y^*, \ldots)$ ein lokales Optimum, wenn der Funktionswert $f(x^*, y^*, \ldots)$, verglichen mit den Werten $f(x, y, \ldots)$ in einer gewissen Umgebung, maximal bzw. minimal ist. Das globale Optimum hingegen ist der größte bzw. kleinste Funktionswert im gesamten Definitionsbereich.*

Für differenzierbare Funktionen lassen sich einfache Bedingungen für lokale Optima mit Hilfe der Ableitungen erster und zweiter Ordnung formulieren. Zunächst werden diese Bedingungen für Funktionen einer Variablen angegeben; hier beruhen sie auf der Bedeutung des Vorzeichens der ersten Ableitung für das Wachstum einer Funktion: Ist die erste Ableitung in einem inneren Punkt ungleich Null, so steigt die Funktion in einer Umgebung *dieses Punktes bei einer positiven Ableitung und fällt bei einer negativen Ableitung, – ein lokales Optimum ist folglich dort ausgeschlossen.*

• Notwendige Bedingung (Bedingung erster Ordnung) für ein lokales Optimum bei einer Variablen: *Hat die Funktion $y = f(x)$ in einem (inneren) Punkt x^* ein lokales Optimum, so hat dort die Steigung (bzw. das Differential für jeden Zuwachs dx) den Wert Null:*

$$f'(x^*) = \frac{dy}{dx}_{|x=x^*} = 0 \quad bzw. \quad dy = f'(x^*)dx = 0.$$

• Hinreichende Bedingung (Bedingung zweiter Ordnung) für ein lokales Optimum bei einer Variablen: *In einer inneren Nullstelle x^* der ersten Ableitung hat die Funktion $y = f(x)$ sicher immer dann ein lokales Optimum, wenn dort die zweite Ableitung von Null verschieden ist. Dabei liegt im Punkt x^* im Fall $f''(x^*) < 0$ ein lokales Maximum und im Fall $f''(x^*) > 0$ ein lokales Minimum vor. Denn $f'(x^*) = 0$ bedeutet zusammen mit $f''(x^*) > 0$ ein Steigen und damit einen Vorzeichenwechsel der ersten Ableitung f' in einer Umgebung von x^*, damit ein Fallen der Funktion f links von x^* und ein Steigen rechts von x^*, also ein lokales Minimum im Punkt x^*, und entsprechend wird bei $f''(x^*) < 0$ geschlossen.*

• *Falls in einer Nullstelle der ersten Ableitung auch die zweite Ableitung den Wert Null hat, entscheidet das Verhalten der Ableitungen von höherer als zweiter Ordnung über das Vorliegen eines Optimums. So verschwinden für die Funktionen $f(x) = x^3$ und $f(x) = x^4$ die Ableitungen $f'(0)$ und $f''(0)$. Während die dritte Potenz überall steigt und daher überhaupt keine lokalen Optima besitzt, hat die vierte Potenz an der Stelle $x = 0$ ein Minimum.*

Beispiel 1 *(globales Optimum):*

$$y = f(x) = 100x - 20x^2 : \qquad \frac{dy}{dx} = 100 - 40x, \; \frac{d^2y}{dx^2} = -40.$$

Die einzige Nullstelle der ersten Ableitung ist die Lösung von $100-40x = 0$, also $x^* = 5/2$. Da die zweite Ableitung generell negativ ist, hat die Funktion im Punkt x^* ein lokales Maximum. Wegen $f''(x) < 0$ ist zudem die erste Ableitung überall fallend und damit links von x^* positiv und rechts von x^* negativ, also ist die Funktion links von x^* steigend und rechts von x^* fallend. Folglich hat die Funktion im Punkt x^* sogar ihr globales Maximum, und der optimale Funktionswert ist $f(5/2) = 125$. Dies kann auch direkt aus der Darstellung $f(x) = 100x-20x^2 = -20(x^2-5x) = -20(x-5/2)^2+125 \leq 125$ abgelesen werden.

Die Funktion $y = -f(x) = -100x + 20x^2$ *mit* $dy/dx = -100 + 40x$ *und* $d^2y/dx^2 = 40$ *nimmt im Punkt* x^* *das globale Minimum mit dem optimalen Funktionswert* -125 *an.*

Beispiel 2 *(lokale Optima, Einbeziehung der Randpunkte):*

$$y = f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x - 12: \qquad \frac{dy}{dx} = 3x^2 - 18x + 24,\ \frac{d^2y}{dx^2} = 6x - 18.$$

Die erste Ableitung besitzt die beiden Nullstellen $x_1^* = 2$ *und* $x_2^* = 4$*. Wegen* $f''(x_1^*) = -6 < 0$ *und* $f''(x_2^*) = 6 > 0$ *hat die Funktion im Punkt* x_1^* *ein lokales Maximum und im Punkt* x_2^* *ein lokales Minimum.*

Wird diese Funktion auf der Menge aller reellen Zahlen betrachtet, so gibt es keine globalen Optima. Bei praktischen Fragen tritt aber in der Regel ein beschränkter Definitionsbereich auf, etwa ein abgeschlossenes Intervall $a \leq x \leq b$*. Dann sind in die Bestimmung globaler Optima die Randpunkte zusätzlich einzubeziehen, und dazu sind die Funktionswerte in den Randpunkten mit den lokalen Maxima bzw. Minima zu vergleichen. Beispielsweise enthält das abgeschlossene Intervall mit* $a = 1$ *und* $b = 3$ *nicht die lokale Minimalstelle* x_2^**. Daher sind für das absolute Minimum die Funktionswerte* $f(1) = 4$ *und* $f(3) = 6$ *und für das absolute Maximum die Funktionswerte* $f(1) = 4$, $f(x_1^*) = 8$ *und* $f(3) = 6$ *miteinander zu vergleichen. Das globale Minimum* 4 *wird im Randpunkt* $x = 1$ *angenommen (hier ist die Steigung von Null verschieden!), und das globale Maximum* 8 *stimmt mit dem lokalen Maximum an der Stelle* $x_1^* = 2$ *überein.*

Für eine Funktion $z = f(x, y, \ldots)$ *mit mehreren Variablen läßt sich die notwendige Bedingung für ein inneres lokales Optimum unmittelbar übertragen: die bei einer Variablen geltende Bedingung muß jetzt für jede der Variablen einzeln erfüllt sein. Mit Hilfe des Differentials zweiter Ordnung läßt sich auch eine hinreichende Bedingung formulieren; diese wird hier für zwei Variable angegeben.*

• Notwendige Bedingung (Bedingung erster Ordnung) für ein lokales Optimum bei mehreren Variablen: *Hat die Funktion* $z = f(x, y, \ldots)$ *in einem (inneren) Punkt* $(x^*, y^*, \ldots)$ *ein lokales Optimum, so haben dort die partiellen Steigungen (bzw. das totale Differential für alle* dx, $dy, \ldots$*) den Wert Null:*

$$f_x(x^*, y^*, \ldots) = \frac{\partial z(\ldots)}{\partial x} = 0,\ f_y(x^*, y^*, \ldots) = \frac{\partial z(\ldots)}{\partial y} = 0,\ \textit{usw., bzw.}$$

$$dz = \frac{\partial z(x^*, y^*, \ldots)}{\partial x}dx + \frac{\partial z(x^*, y^*, \ldots)}{\partial y}dy + \ldots = 0.$$

• Hinreichende Bedingung (Bedingung zweiter Ordnung) für ein lokales Optimum bei zwei Variablen: *Ist in einem inneren Punkt* (x^*, y^*) *die notwendige Bedingung erfüllt, so hat die Funktion* $z = f(x, y)$ *dort ein lokales Optimum, wenn das (in diesem Punkt berechnete) Differential zweiter Ordnung*

$$dz^2(x^*, y^*) = \frac{\partial^2 z(x^*, y^*)}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 z(x^*, y^*)}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 z(x^*, y^*)}{\partial y^2}dy^2$$

für alle dx, dy *generell negativ oder generell positiv ist, außer natürlich für* $dx = dy = 0$. *Dabei liegt für* $dz^2 < 0$ *ein Maximum und für* $dz^2 > 0$ *ein Minimum vor. Wechselt jedoch das Differential das Vorzeichen, so liegt kein lokales Optimum vor.*

• *Für die hinreichende Bedingung gibt es eine praktische gleichwertige Formulierung unter Verwendung der sogenannten* Diskriminante

$$D(x^*, y^*) = \frac{\partial^2 z(x^*, y^*)}{\partial x^2}\frac{\partial^2 z(x^*, y^*)}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z(x^*, y^*)}{\partial x \partial y}\right)^2.$$

— *Ist* $D(x^*, y^*) > 0$ *(das ist gleichwertig damit, daß* dz^2 *entweder positiv oder negativ ist), so liegt im Punkt* (x^*, y^*) *ein lokales Optimum vor, und zwar für* $\partial^2 z/\partial x^2 < 0$ *ein Maximum und für* $\partial^2 z/\partial x^2 > 0$ *ein Minimum. (In diesem Fall haben die zweite Ableitung nach* x *und die zweite Ableitung nach* y *das gleiche Vorzeichen.)*

— *Ist* $D(x^*, y^*) < 0$ *(das ist gleichwertig damit, daß* dz^2 *das Vorzeichen wechselt), so liegt im Punkt* (x^*, y^*) *kein lokales Optimum vor.*

— *Ist* $D(x^*, y^*) = 0$, *so ist eine generelle Aussage über ein Optimum – nur unter Verwendung der Ableitungen zweiter Ordnung – nicht möglich.*

Beispiel 3 *(lokales Maximum):*

$$\begin{aligned} z = f(x,y) &= 30x - x^2 + 60y - y^2 : \quad \frac{\partial z}{\partial x} = 30 - 2x, \ \frac{\partial z}{\partial y} = 60 - 2y, \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -2, \ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0, \ D = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)^2 = 4. \end{aligned}$$

Die notwendige Bedingung für ein Maximum $z_x(x^*, y^*) = 30 - 2x^* = 0$, $z_y(x^*, y^*) = 60 - 2y^* = 0$ *wird von dem einzigen Paar* $(x^* = 15, y^* = 30)$ *erfüllt. Die hinreichende Bedingung ist wegen* $D > 0$ *generell erfüllt, und wegen* $z_{xx}(x^*, y^*) < 0$ *liegt ein lokales Maximum vor. Aus*

$$\begin{aligned} z &= 30x - x^2 + 60y - y^2 \\ &= -(x^2 - 30x + 15^2) - (y^2 - 60y + 30^2) + 15^2 + 30^2 \\ &= -(x-15)^2 - (y-30)^2 + 1125 \end{aligned}$$

folgt unmittelbar $z \leq 1125$, *so daß* $f(15, 30) = 1125$ *sogar das globale Maximum der Funktion ist.*

Beispiele 4 *(verschwindende Diskriminante):*

$$z = f(x,y) = x^2y^2 : \qquad \begin{aligned} & z_x = 2xy^2,\ z_y = 2x^2y,\ z_{xx} = 2y^2,\ z_{yy} = 2x^2, \\ & z_{xy} = 4xy, \\ & D = z_{xx}z_{yy} - z_{xy}^2 = -12x^2y^2, \end{aligned}$$

$$z = g(x,y) = x^3y^3 : \qquad \begin{aligned} & z_x = 3x^2y^3,\ z_y = 3x^3y^2,\ z_{xx} = 6xy^3,\ z_{yy} = 6x^3y, \\ & z_{xy} = 9x^2y^2, \\ & D = z_{xx}z_{yy} - z_{xy}^2 = -45x^4y^4. \end{aligned}$$

Das System $z_x = 0, z_y = 0$ *wird bei beiden Funktionen von allen Punkten* (x, y) *mit* $x = 0$ *oder* $y = 0$ *(also auf den Achsen des Koordinatensystems) erfüllt, und hier ist überall* $D = 0$. *Die Funktion* f *nimmt dort ihr globales Minimum 0 an, während die Funktion* g *bei den Achsen ihr Vorzeichen wechselt und daher dort Extrema ausgeschlossen sind!*

M4. Optimierung unter Nebenbedingungen. *Viele ökonomische Probleme sind dadurch gekennzeichnet, daß die Suche nach dem Optimum einer Funktion* f *durch zusätzliche Nebenbedingungen (Restriktionen) eingeschränkt wird. So können für jede der Variablen untere oder obere Schranken vorgegeben sein (siehe das Beispiel* 2 *in* M3*); die einfachsten derartigen Restriktionen entstehen durch die Forderung, daß die Variablen, z.B. Produktionsmengen oder Marktpreise, nicht negativ sein dürfen (Nichtnegativitätsbedingungen). Bei mehreren Variablen können die Restriktionen aus Funktionsbeziehungen zwischen den Variablen in Form von Gleichungen oder Ungleichungen bestehen.*

Bei zwei Variablen x und y tritt häufig eine Restriktion $g(x,y) = 0$ auf. Diese stellt (z.B. dann, wenn die partiellen Ableitungen erster Ordnung von g nicht beide zusammen verschwinden können) eine Kurve in der (x,y)-Ebene dar, die Isoquante *(Indifferenzkurve) $g = 0$. Für die Optimierung einer Zielfunktion $f(x,y)$ unter einer solchen Restriktion werden zwei verschiedene Methoden vorgestellt, und diese werden auf ein Beispiel mit der wichtigen linearen Restriktion $g(x,y) = k - x - y$ angewandt.*

• Substitutionsmethode: *Kann die Gleichung $g(x,y) = 0$ nach einer der Variablen, etwa nach y,* aufgelöst *werden, also die Variable y explizit als Funktion von x geschrieben werden, so verbleibt nach Einsetzen von $y(x)$ in die Funktion $f(x,y)$ die Funktion $z = F(x) = f(x, y(x))$ der einen Veränderlichen x, – für deren Optimierung ist das in* M3 *beschriebene Verfahren anwendbar. Nachteilig ist, daß eine solche Auflösung, selbst wenn sie theoretisch möglich ist, nur in den einfachsten Fällen formelmäßig angegeben werden kann.*

Beispiel: Zu bestimmen ist das Maximum der Funktion $z = f(x,y) = x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}} = \sqrt{xy}$ für $x \geq 0$ und $y \geq 0$ unter der Nebenbedingung $g(x,y) = k - x - y = 0$ mit einem positiven Parameter k. Kurzschreibweise:

$$\max_{x,y}\ x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}, \qquad g(x,y) = k - x - y = 0.$$

Die Auflösung $y = k - x$ der Nebenbedingung $g(x,y) = 0$ ergibt

$$z = F(x) = f(x, k-x) = x^{\frac{1}{2}}(k-x)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x(k-x)}.$$

Der Definitionsbereich der Funktion F ist das abgeschlossene Intervall zwischen $x = 0$ und $x = k$. Die Randpunkte 0 und k, in denen die Funktion nicht differenzierbar ist, werden zunächst ausgenommen. Die Ableitungen von F lauten für $0 < x < k$:

$$\begin{aligned}
\frac{dz}{dx} &= \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}(k-x)^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{2}}\frac{1}{2}(k-x)^{-\frac{1}{2}}(-1) = \frac{k-2x}{2}x^{-\frac{1}{2}}(k-x)^{-\frac{1}{2}}, \\
\frac{d^2z}{dx^2} &= (-1)x^{-\frac{1}{2}}(k-x)^{-\frac{1}{2}} \\
&\quad + \frac{k-2x}{2}\left(-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}(k-x)^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}(k-x)^{-\frac{3}{2}}(-1)\right) \\
&= -x^{-\frac{3}{2}}(k-x)^{-\frac{3}{2}}\left(x(k-x) + \frac{k-2x}{4}\left[(k-x) - x\right]\right) \\
&= -x^{-\frac{3}{2}}(k-x)^{-\frac{3}{2}}\left(x(k-x) + \frac{(k-2x)^2}{4}\right) = -\frac{k^2}{4}x^{-\frac{3}{2}}(k-x)^{-\frac{3}{2}}.
\end{aligned}$$

Die notwendige Bedingung $dz/dx = 0$ *ist allein für* $x^* = k/2$ *erfüllt, und da* $d^2z/dx^2 < 0$ *generell gilt, ist die hinreichende Bedingung für ein lokales Maximum an der Stelle* $x^* = k/2$ *erfüllt. Der Funktionswert* $F(x^*) = k/2$ *stellt zugleich das globale Maximum dar, da die Funktion in den Randpunkten* $x = 0$ *und* $x = k$ *den Wert Null hat.*

Ein weiteres in der Ökonomie häufig benutztes Verfahren ist die

• Methode der Lagrange-Multiplikatoren: *Die Grundlage dieses Verfahrens ist ein einfacher geometrischer Sachverhalt. Nimmt nämlich die Funktion* $f(x,y)$ *in einem Punkt* (x^*, y^*) *ein lokales Optimum* f_{opt} *unter der Nebenbedingung* $g(x,y) = 0$ *an, so dürfen sich in diesem Punkt die beiden Kurven* $g(x,y) = 0$ *und* $f(x,y) = f(x^*, y^*) = f_{opt}$ *lediglich berühren, d.h. die Tangenten an diese Kurven im Punkt* (x^*, y^*) *müssen übereinstimmen. Dies bedeutet, daß die partiellen Ableitungen der Funktionen* f *und* g *nach den Variablen* x *und* y *sich lediglich um ein und denselben Faktor unterscheiden.*
(Hierbei wird der bereits behandelte Fall eines lokalen Optimums – ohne Berücksichtigung der Nebenbedingung – ausgenommen, und damit können nicht beide partiellen Ableitungen von f *in der optimalen Stelle gemeinsam verschwinden.)*

Es gibt also einen sog. Lagrange-Multiplikator λ^*, *so daß, zusammen mit der Nebenbedingung, die folgenden Gleichungen gelten:*

• Notwendige Bedingung mit Lagrange-Multiplikator (Bedingung erster Ordnung):

$$f_x(x^*, y^*) + \lambda^* g_x(x^*, y^*) = 0,\ f_y(x^*, y^*) + \lambda^* g_y(x^*, y^*) = 0,\ g(x^*, y^*) = 0.$$

Dieses System von drei Gleichungen für die drei gesuchten Größen x^*, y^* *und* λ^* *kann einheitlich mit Hilfe der sogenannten* Lagrangefunktion *der drei Variablen* x, y *und* λ

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda) = f(x,y) + \lambda g(x,y)$$

dargestellt werden:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}(x^*, y^*, \lambda^*) &= f_x(x^*, y^*) + \lambda^* g_x(x^*, y^*) = 0, \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y}(x^*, y^*, \lambda^*) &= f_y(x^*, y^*) + \lambda^* g_y(x^*, y^*) = 0, \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda}(x^*, y^*, \lambda^*) &= g(x^*, y^*) = 0. \end{aligned}$$

Bemerkung: Sollte der Multiplikator λ^* *negativ sein, so wird statt* $g = 0$ *die gleichwertige Restriktion* $-g$ *betrachtet, und dann ist der entsprechende Multiplikator* $-\lambda^*$ *positiv. Also kann generell* $\lambda^* > 0$ *angenommen werden (für* $\lambda^* = 0$ *wäre* $f_x(x^*, y^*) = f_y(x^*, y^*) = 0$*, was hier ausgeschlossen wurde).*

Man erhält die notwendige Bedingung auch aus der folgenden Betrachtung: Gesucht ist ein Optimum der Lagrangefunktion $\mathcal{L}(x, y, \lambda)$ *bei fixiertem* λ *und ohne Beachtung der Nebenbedingung (dies ergibt die ersten beiden Gleichungen der notwendigen Bedingung). Hat man solch ein – von diesem fixierten* λ *abhängiges – Optimum bestimmt und kann anschließend den Multiplikator* λ *so einrichten, daß zugleich die Nebenbedingung erfüllt ist, so ist ein Optimum der Funktion* f *(unter Beachtung der Nebenbedingung) gefunden.*

Beispielsweise mit Hilfe der Substitutionsmethode läßt sich auch hier eine hinreichende Bedingung formulieren. Diese kann mit der Lagrangefunktion übersichtlich dargestellt werden:

• Hinreichende Bedingung mit Lagrange-Multiplikator (Bedingung zweiter Ordnung): *Ist* (x^*, y^*, λ^*) *eine Lösung des Systems der notwendigen Bedingungen, so liegt im Punkt* (x^*, y^*) *ein lokales Optimum unter der Nebenbedingung* $g(x, y) = 0$ *vor, wenn der mit den partiellen Ableitungen an der Stelle* (x^*, y^*, λ^*) *berechnete Ausdruck*

$$\mathcal{L}_{xx} g_y^2 - 2\mathcal{L}_{xy} g_x g_y + \mathcal{L}_{yy} g_x^2$$

negativ (Maximum) bzw. positiv ist (Minimum).
Die Ableitungen zweiter Ordnung der Lagrangefunktion lauten dabei konkret:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{xx} &= f_{xx}(x^*, y^*) + \lambda^* g_{xx}(x^*, y^*), \\ \mathcal{L}_{xy} &= f_{xy}(x^*, y^*) + \lambda^* g_{xy}(x^*, y^*), \\ \mathcal{L}_{yy} &= f_{yy}(x^*, y^*) + \lambda^* g_{yy}(x^*, y^*). \end{aligned}$$

Unter Verwendung der Determinante für quadratische Matrizen kann die Bedingung zweiter Ordnung übersichtlich dargestellt werden.
Für eine zweireihige Matrix $\mathbf{A}$ *und entsprechend für eine dreireihige Matrix ist dabei die Determinante* $|\mathbf{A}|$ *wie folgt erklärt:*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{31} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} - a_{32} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} + a_{33} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

(Die Determinante einer dreireihigen Matrix ist hier beispielsweise mit Hilfe der Elemente der dritten Zeile als Faktoren und den aus den ersten beiden Zeilen gebildeten Determinanten zweireihiger Matrizen dargestellt. Entsprechende Formeln für $|\mathbf{A}|$ *gelten für jede Zeile und jede Spalte und die Determinanten der entsprechenden zweireihigen Matrizen.)*

Die Bedingung zweiter Ordnung kann nun gleichwertig mit Hilfe der Determinante der sogenannten geränderten Hesseschen Matrix

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathcal{L}_{xx} & \mathcal{L}_{xy} & g_x \\ \mathcal{L}_{xy} & \mathcal{L}_{yy} & g_y \\ g_x & g_y & 0 \end{bmatrix}$$

formuliert werden: Es ist

$$|\mathbf{H}| = -\mathcal{L}_{xx} g_y^2 + 2\mathcal{L}_{xy} g_x g_y - \mathcal{L}_{yy} g_x^2,$$

und damit liegt für $|\mathbf{H}| > 0$ *im Punkt* (x^*, y^*) *ein Maximum und für* $|\mathbf{H}| < 0$ *ein Minimum vor.*

• Inhaltliche Bedeutung des Lagrange-Multiplikators: *Bedeutet die Nebenbedingung, daß eine gewisse Funktion* $G(x, y)$*, etwa eine Ertragsfunktion, einen konstanten Wert* k *annimmt, also* $g(x, y) = k - G(x, y) = 0$ *gilt, und wird die Größe* k *als Parameter betrachtet, so sind die Koordinaten einer optimalen Stelle, der Lagrange-Multiplikator und der optimale Funktionswert selbst Funktionen dieses Parameters:*
$x^* = x^*(k)$, $y^* = y^*(k)$, $\lambda^* = \lambda^*(k)$, $f_{opt} = f(x^*(k), y^*(k))$.
Die Ableitung des optimalen Funktionswertes nach der Variablen k *wird – unter Verwendung der notwendigen Bedingung – nach der Kettenregel berechnet:*

$$\begin{aligned} \frac{d}{dk} f(x^*(k), y^*(k)) &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx^*(k)}{dk} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy^*(k)}{dk} \\ &= \lambda^* \left(\frac{\partial G}{\partial x}\frac{dx^*(k)}{dk} + \frac{\partial G}{\partial y}\frac{dy^*(k)}{dk} \right) \\ &= \lambda^* \frac{dG(x^*(k), y^*(k))}{dk} = \lambda^* \frac{dk}{dk} = \lambda^*. \end{aligned}$$

Der Lagrange-Multiplikator $\lambda^*(k)$ *erweist sich damit als Änderungsgeschwindigkeit des Optimums bezüglich des Parameters* k *in der Nebenbedingung* $G(x, y) = k$*. Damit ändert sich das Optimum* $f_{opt}(k)$ *bei hinreichend kleiner Verschiebung von* k *um die Größe* dk *näherungsweise um* $\lambda^* \cdot dk$*.*

Beispiel: Die bereits mit der Substitutionsmethode behandelte Maximierungsaufgabe soll jetzt mit Hilfe des Lagrange-Verfahrens gelöst werden. Die Lagrangefunktion und deren partielle Ableitungen lauten für $x > 0$ *und* $y > 0$:

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda) = x^{\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{2}} + \lambda(k - x - y),$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} &= \tfrac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{2}} - \lambda, & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x \partial x} &= -\tfrac{1}{4} x^{-\frac{3}{2}} y^{\frac{1}{2}}, \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} &= \tfrac{1}{2} x^{\frac{1}{2}} y^{-\frac{1}{2}} - \lambda, & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial y \partial y} &= -\tfrac{1}{4} x^{\frac{1}{2}} y^{-\frac{3}{2}}, \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} &= k - x - y, & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x \partial y} &= \tfrac{1}{4} x^{-\frac{1}{2}} y^{-\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Aus den ersten beiden Gleichungen $\partial \mathcal{L}/\partial x = \partial \mathcal{L}/\partial y = 0$ *der notwendigen Bedingung folgt durch Multiplikation mit* x^* *bzw.* y^**:* $x^{*\frac{1}{2}} y^{*\frac{1}{2}} = 2\lambda^* x^* = 2\lambda^* y^*$*. Da* x^* *und* y^* *positiv sein müssen, ergibt sich hieraus* $x^* = y^*$ *und* $\lambda^* = 1/2$*. Aus der Nebenbedingung folgt schließlich* $x^* = y^* = k/2$ *und damit* $f(x^*, y^*) = k/2$*. Dieser Wert wurde bereits mit der Substitutionsmethode erhalten.*

Für $(x^*, y^*) = \left(\frac{k}{2}, \frac{k}{2}\right)$ *ist auch die hinreichende Bedingung für ein Maximum erfüllt. Denn wegen* $g_x = g_y = -1$ *ist*

$$\begin{aligned} |\mathbf{H}| &= -\mathcal{L}_{xx} g_y^2 + 2\mathcal{L}_{xy} g_x g_y - \mathcal{L}_{yy} g_x^2 \\ &= \frac{1}{4}\left(\frac{k}{2}\right)^{-1} + \frac{2}{4}\left(\frac{k}{2}\right)^{-1} + \frac{1}{4}\left(\frac{k}{2}\right)^{-1} = \frac{2}{k} > 0. \end{aligned}$$

An der konkreten Lösung können die generellen Eigenschaften des Lagrange-Multiplikators abgelesen werden:

- *Die Ableitung des optimalen Funktionswertes nach dem Parameter* k *der Nebenbedingung ergibt den Lagrange-Multiplikator:*

$$\frac{d}{dk} f_{opt} = \frac{d}{dk}\left(\frac{k}{2}\right) = \frac{1}{2} = \lambda^*.$$

- *An der optimalen Stelle* $(x^*, y^*) = \left(\frac{k}{2}, \frac{k}{2}\right)$ *nimmt die Lagrangefunktion für den speziellen Wert* $\lambda^* = 1/2$ *ihr Maximum (ohne Nebenbedingung) an:*

$$f_{opt} = \frac{k}{2} \geq \sqrt{xy} + \frac{1}{2}(k - x - y) = \mathcal{L}(x, y, \lambda = \frac{1}{2}) \ \text{ für alle } \ x \geq 0,\ y \geq 0.$$

• Mehrere Nebenbedingungen: *Bei Funktionen mit mehr als zwei Variablen können weitere Gleichungen als Nebenbedingungen auftreten. Die ganz entsprechend gebildete Lagrangefunktion enthält dann für jede Nebenbedingung einen Lagrange-Multiplikator.*

Beispiel für drei Variable und zwei Nebenbedingungen $g = 0$ *und* $h = 0$:

$$\mathcal{L}(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2) = f(x, y, z) + \lambda_1 g(x, y, z) + \lambda_2 h(x, y, z).$$

10. Analytische Ableitung des Haushaltsoptimums. Die analytische Ermittlung des maximalen Nutzens eines Haushaltes aus dem Konsum zweier (oder mehrerer) Güter bei Berücksichtigung eines gegebenen Einkommens pro Periode kann mit Hilfe der Lagrange–Methode durchgeführt werden. Das Problem des Haushaltes besteht darin, den Nutzen $U = U(q_1, q_2)$ unter der Budgetrestriktion $y = p_1 q_1 + p_2 q_2$ zu maximieren. Die Lagrangefunktion lautet daher:

$$\max \;\; \mathcal{L}(q_1, q_2, \lambda) = U(q_1, q_2) + \lambda(y - p_1 q_1 - p_2 q_2). \tag{16}$$

Die Bedingungen erster Ordnung sind:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_1^*} = \frac{\partial U}{\partial q_1^*} - \lambda p_1 = 0, \tag{17}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_2^*} = \frac{\partial U}{\partial q_2^*} - \lambda p_2 = 0, \tag{18}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda^*} = y - p_1 q_1 - p_2 q_2 = 0. \tag{19}$$

Es soll angenommen werden, daß die Nutzenfunktion $U(q_1, q_2)$ bezüglich der Güter q_1 und q_2 einen konkaven Verlauf aufweist. Dies bedeutet ökonomisch, daß zusätzliche Konsummengen von q_1 oder q_2 einen abnehmenden zusätzlichen Nutzen stiften (Gesetz des abnehmenden Grenznutzens) und formal heißt das $\partial^2 U/\partial q_1^2 < 0, \partial^2 U/\partial q_2^2 < 0$ sowie $\partial^2 U/(\partial q_1 \partial q_2) > 0$. Die Bedingung 2. Ordnung für ein Maximum unter Nebenbedingungen ist damit erfüllt:

$$\left[-\frac{\partial^2 U}{\partial q_1^2} \cdot p_2^2 - \frac{\partial^2 U}{\partial q_2^2} \cdot p_1^2 + 2\frac{\partial^2 U}{\partial q_1 \partial q_2} p_1 p_2\right] > 0. \tag{20}$$

Der optimale Wert λ^* ergibt sich aus (17) und (18)

$$\lambda^* = \frac{\partial U/\partial q_1}{p_1} = \frac{\partial U/\partial q_2}{p_2}. \tag{21}$$

Aus (21) ergibt sich: Im Nutzenmaximum muß der Quotient aus Grenznutzen und Preis eines Gutes für *alle* Güter gleich und gleich dem Lagrange-Multiplikator λ sein, der den Grenznutzen der Geld- bzw. Einkommensverwendung verdeutlicht. Anders gesagt, die letzte Geldeinheit zum Gütererwerb muß sowohl bei Gut 1 als auch bei Gut 2 einen gleich hohen zusätzlichen Nutzen stiften. Diesen Sachverhalt bezeichnet man in der deutschen Literatur als 2. Gossensches Gesetz, das in dieser Form den Ausgleich der mit den Preisen gewogenen Grenznutzen postuliert. Gilt diese Bedingung nicht, so ist es nutzenerhöhend, wenn Einkommen zum Kauf zusätzlicher Güter mit hohem Grenznutzen zulasten jener Güter mit niedrigem Grenznutzen umgewidmet wird.

Aus Gleichung (21) folgt durch Umformen:

$$\frac{\partial U/\partial q_1^*}{\partial U/\partial q_2^*} = \frac{p_1}{p_2}. \tag{22}$$

Aus Gleichung (9′) wissen wir ferner, daß

$$\frac{\partial U/\partial q_1}{\partial U/\partial q_2} \quad = \quad -\frac{dq_2}{dq_1} \quad = \quad GRS_{2,1}$$

gilt. Kombiniert man (22) und (9′), so ergibt sich schließlich

$$\frac{\partial U/\partial q_1^*}{\partial U/\partial q_2^*} \quad = \quad \frac{p_1}{p_2} \quad = \quad -\frac{dq_2^*}{dq_1^*}. \tag{22′}$$

Satz: *Im partiellen Haushaltsgleichgewicht (Güterbeschaffung) ist das Verhältnis der Grenznutzen zweier Güter gleich dem Verhältnis der Preise und ferner gleich dem Kehrwert der Grenzrate der Substitution dieser Güter.*

Im nächsten Abschnitt wird für eine explizit angegebene Nutzenfunktion dieses Maximierungsproblem erneut gelöst und nach den Gütermengen gefragt, die der Haushalt am Markt nachfragt.

2.2 Güternachfrage des Haushaltes

11. Nachfragefunktionen. Die Nachfragefunktion eines Haushaltes (auch: Basisnachfragefunktion, konsumentenindividuelle Nachfragefunktion) gibt Auskunft über die Menge eines Gutes q_i, die der Haushalt in einer Periode in Abhängigkeit von dem Preis des Gutes p_i, den Preisen aller anderen Güter p_j $(j \neq i)$ und seinem Einkommen y nachfragt. Zusätzlich zu diesen

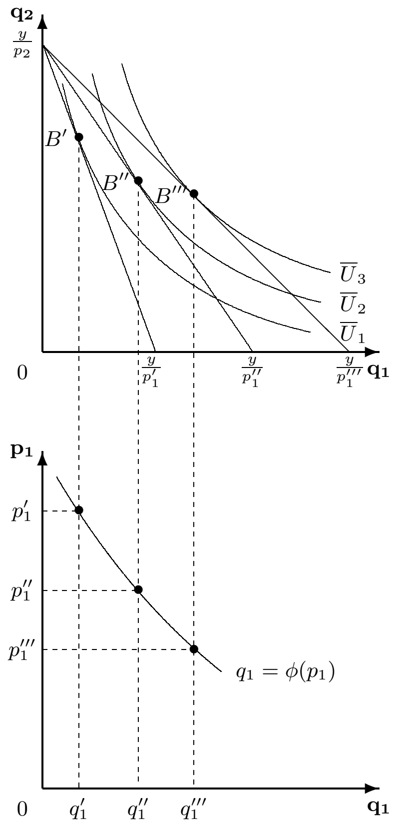


Abb. 7: Konsumentenindividuelle Nachfragekurve

Bestimmungsgründen für die Nachfragemenge können die Qualität des Gutes, Werbung und andere Faktoren in die Nachfragefunktion aufgenommen werden. Beschränkt man sich auf die zunächst genannten Variablen q_i, p_i und p_j mit $i = 1$ und $j = 2$, so lautet die Nachfragefunktion für das Gut 1 im Zwei-Güter-Fall:

$$q_1 = \phi(p_1, p_2, y). \tag{23}$$

Die normalen Reaktionen eines Haushaltes werden definiert als: $\partial q_1/\partial p_1 < 0$, $\partial q_1/\partial p_2 > 0$ und $\partial q_1/\partial y > 0$. Auf Beispiele anomaler Reaktionen wird später hingewiesen. Aus dem q_1/q_2-Diagramm können bei entsprechenden Variationen von Preis, Konkurrenzpreisen und Einkommen die direkte Nachfrage (Abbildung 7), die Kreuzpreisnachfrage (Abbildung 8) und die einkommensbezogene Nachfrage (Abbildung 9) durch senkrechte Verbindungslinien in die p/q- bzw. y/q-Diagramme übertragen werden. Die Mengen

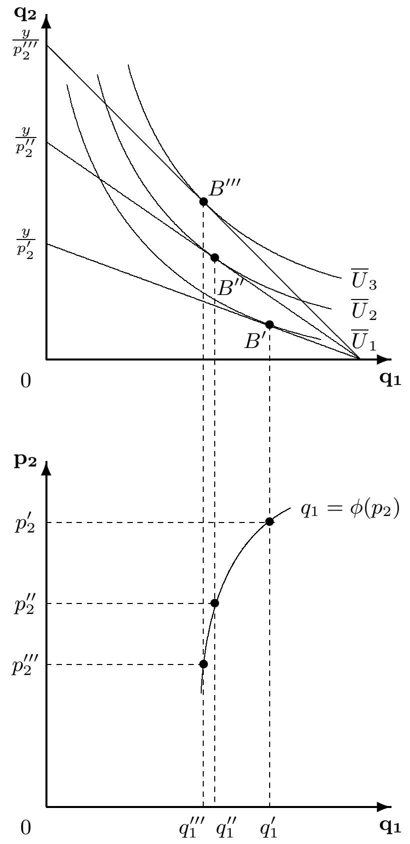


Abb. 8: Kreuzpreisnachfragefunktion

aller q_1p_1–Kombinationen ergeben die haushaltsindividuelle Nachfragekurve $q_1 = \phi(p_1, \overline{p}_2, \overline{y})$, wobei der Konkurrenzpreis und das Einkommen konstant gehalten werden (Abbildung 7). Aus den q_1p_2–Kombinationen erhält man die Kreuzpreisnachfragekurve $q_1 = \phi(\overline{p}_1, p_2, \overline{y})$ bei konstanten $\overline{p}_1, \overline{y}$ (Abbildung 8). Schließlich läßt sich die sogenannte Engel-Kurve aus variierenden Mengen q_1 und Einkommen y bei konstanten Preisen $\overline{p}_1\overline{p}_2$ konstruieren $q_1 = \phi(\overline{p}_1, \overline{p}_2, y)$ (Abbildung 9). Zur graphischen Ableitung der konsumentenindividuellen Nachfragefunktion soll im q_1/q_2–Diagramm der Preis p_1 variiert werden ($p_1^{'}$,$p_1^{''}$,$p_1^{'''}$), die sich aufgrund der Präferenzen (Indifferenzkurven) ergebenden Tangentialpunkte $B^{'}$,$B^{''}$,$B^{'''}$ ermittelt und die zugehörigen Konsummengen in ein p_1/q_1–Diagramm übertragen werden. Der Preis p_2 und das Einkommen des Haushaltes werden dabei konstant gehalten.

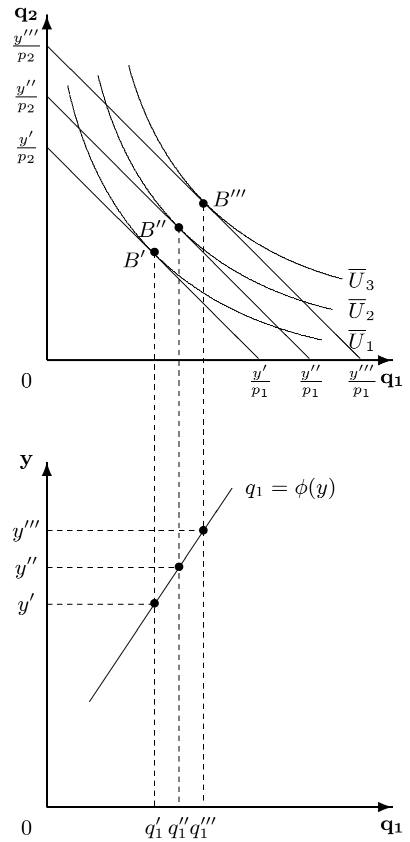


Abb. 9: Engel-Kurve für Gut 1 und 2

Die graphische Ableitung der Kreuzpreisnachfrage kann analog durchgeführt werden, wobei der Preis p_2 variiert $(p_2^{'},p_2^{''},p_2^{'''})$ und p_1 und y konstant gehalten werden. Zu beachten ist, daß an der Ordinate des unteren Teils von Abbildung 8 der Preis des zweiten Gutes abgetragen ist. Die Kreuzpreisnachfragefunktion, die die Veränderung der Menge q_1 in Abhängigkeit von dem Preis p_2 angibt, hat einen positiven Anstieg in Abbildung 8 . Dieser Anstieg kann auch negativ sein, wenn der später noch zu behandelnde Einkommenseffekt den Substitutionseffekt überkompensiert.

Der Zusammenhang zwischen Güternachfrage und Einkommensentwicklung wird durch die Variation des Einkommens $y^{'}$,$y^{''}$,$y^{'''}$ bei unveränderten Güterpreisen konstruiert. Die so entstehende Funktion wird als Engel-Kurve bezeichnet. Die Tangentialpunkte $B^{'}$,$B^{''}$,$B^{'''}$ der Budgetrestriktion mit den Indifferenzkurven $\overline{U}_1$, $\overline{U}_2$, $\overline{U}_3$ ergeben die Nachfragemengen für q_1. Es ist zu beachten, daß immer $\overline{p}_1 q_1 + \overline{p}_2 q_2 = y$ gelten muß. Je nach Lage und Krümmung der Indifferenzkurven kann die eine Engel-Kurve mehr oder weniger stark konkav oder mehr oder weniger stark konvex sein. In Ausnahmefällen kann die Engel-Kurve bei hohen Einkommen auch negativ steigen. Dieses als Giffen-Fall bezeichnete Phänomen, benannt nach dem englischen Ökonomen Robert Giffen, läßt sich ökonomisch wie folgt begründen: Je höher das Einkommen ist, um so stärker werden geringwertige Güter durch hochwertige Güter substituiert, so daß bei sehr hohem Einkommen nicht nur die zusätzliche Nachfrage nach dem geringwertigen Gut sinkt, sondern auch die Zuwächse negativ sind, d.h. die Konsummengen nehmen ab.

12. Analytische Ableitung der Nachfragefunktion. Die analytische Ableitung der konsumentenindividuellen Nachfragefunktion soll unter der Annahme zweier alternativer Nutzenfunktionen durchgeführt werden. Die erste Nutzenfunktion möge

$$U = q_1^\alpha q_2^\beta, \quad 0 < \alpha,\ \beta < 1 \tag{24}$$

sein. Unter Verwendung der Budgetrestriktion lauten die Lagrange-Funktion

$$\mathcal{L}(q_1, q_2, \lambda) = q_1^\alpha q_2^\beta + \lambda(y - p_1 q_1 - p_2 q_2) \tag{25}$$

und die partiellen Ableitungen, die im Optimum den Wert Null annehmen:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_1} = \alpha q_1^{*\alpha-1} q_2^{*\beta} - \lambda^* p_1 = 0, \tag{26}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_2} = \beta q_1^{*\alpha} q_2^{*\beta-1} - \lambda^* p_2 = 0, \tag{27}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = y - p_1 q_1^* - p_2 q_2^* = 0. \tag{28}$$

Die partiellen zweiten Ableitungen, die zur Bildung der Bedingung 2. Ordnung für ein Maximum benötigt werden, lauten:

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial q_1^2} = \alpha(\alpha - 1) q_1^{*\alpha-2} q_2^{*\beta} < 0 \qquad \text{wegen } \alpha < 1, \tag{29}$$

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial q_2^2} = \beta(\beta - 1) q_1^{*\alpha} q_2^{*\beta-2} < 0 \qquad \text{wegen } \beta < 1, \tag{30}$$

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial q_1 \partial q_2} = \alpha\beta q_1^{*\alpha-1} q_2^{*\beta-1} \quad > 0. \tag{31}$$

Die Bedingung 2. Ordnung für ein Maximum ist erfüllt, da:

$$\left[-(\alpha^2-\alpha)q_1^{\alpha-2}q_2^{\beta}p_2^2-(\beta^2-\beta)q_1^{\alpha}q_2^{\beta-2}p_1^2+2\alpha\beta q_1^{\alpha-1}q_2^{\beta-1}\right] \quad > 0 \tag{32}$$

ist. Aus (26) und (27) läßt sich λ^* errechnen:

$$\lambda^* = \frac{\alpha q_1^{*\alpha-1}q_2^{*\beta}}{p_1} \quad = \quad \frac{\beta q_1^{*\alpha}q_2^{*\beta-1}}{p_2},$$

woraus folgt:

$$\longrightarrow \quad \frac{\alpha}{q_1^* p_1^*} = \frac{\beta}{q_2^* p_2^*} \quad \longrightarrow \quad q_2^* p_2 = \frac{\beta}{\alpha}\, q_1^* p_1. \tag{33}$$

Setzt man dieses Ergebnis in (28) ein, so erhält man

$$y - \left(\frac{\alpha+\beta}{\alpha}\right) p_1 q_1^* = 0 \tag{34}$$

oder

$$q_1^* = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\,\frac{y}{p_1} \tag{35}$$

und

$$q_2^* = \frac{\beta}{\beta+\alpha}\,\frac{y}{p_2}. \tag{36}$$

Die Besonderheit der beiden aus der Nutzenfunktion (24) abgeleiteten Nachfragefunktionen (35) und (36) besteht darin, daß die Mengen zwar von der Höhe des verfügbaren Einkommens y und dem zugehörigen Gutspreis abhängen, nicht jedoch von dem Preis des jeweils anderen Gutes, da Einkommenseffekt und Substitutionseffekt sich gerade aufheben. Die Annahmen $\partial q_1/\partial p_1 < 0$ und $\partial q_1/\partial y > 0$ sind hingegen erfüllt. Im folgenden wird eine andere Nutzenfunktion angenommen, deren korrespondierende Nachfragefunktion auch vom Preis des anderen Gutes abhängt, was als der wahrscheinlichere Fall angesehen werden muß

$$U = \alpha_1 \ln(q_1-\beta_1) + \alpha_2 \ln(q_2-\beta_2), \tag{37}$$

wobei $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$ betragen soll und $q_1 - \beta_1 \geq 1$, $q_2 - \beta_2 \geq 1$ sind. Die β_1,β_2 bezeichnen Mindestmengen, die konsumiert werden müssen. Die Lagrangefunktion lautet

$$\mathcal{L}(q_1,q_2,\lambda) = \alpha_1 \ln(q_1-\beta_1) + \alpha_2 \ln(q_2-\beta_2) + \lambda(y - p_1q_1 - p_2q_2) \tag{38}$$

und die partiellen Ableitungen, die im Maximum den Wert Null annehmen, betragen

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_1} = \alpha_1(q_1^*-\beta_1)^{-1} - \lambda p_1 \quad = 0, \tag{39}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_2} = \alpha_2 (q_2^* - \beta_2)^{-1} - \lambda p_2 \quad = 0, \tag{40}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = y - p_1 q_1^* - p_2 q_2^* \quad = 0. \tag{41}$$

Die partiellen zweiten Ableitungen sind

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial q_1^2} = -\alpha_1 (q_1^* - \beta_1)^{-2} \quad < 0, \tag{42}$$

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial q_2^2} = -\alpha_2 (q_2^* - \beta_2)^{-2} \quad < 0, \tag{43}$$

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial q_1 \partial q_2} = 0, \tag{44}$$

womit die Bedingungen zweiter Ordnung für ein Maximum erfüllt sind. Aus den partiellen Ableitungen (39) und (40) erhält man wiederum

$$\lambda^* = \frac{\alpha_1}{(q_1^* - \beta_1) p_1} = \frac{\alpha_2}{(q_2^* - \beta_2) p_2} \quad . \tag{45}$$

Aus dem zweiten und dritten Ausdruck läßt sich nach Umformen

$$q_2^* p_2 = \frac{\alpha_2}{\alpha_1} q_1^* p_1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \beta_1 p_1 + \beta_2 p_2 \tag{46}$$

errechnen und in (41) einsetzen. Löst man diesen Ausdruck dann nach q_1^* auf, so läßt sich die Nachfragefunktion für Gut 1 mit

$$q_1^* = \frac{\alpha_2 \beta_1}{\alpha_1 + \alpha_2} - \frac{\alpha_1 \beta_2}{\alpha_1 + \alpha_2} \frac{p_2}{p_1} + \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2} \frac{y}{p_1} \tag{47}$$

bezeichnen. Dieses Ergebnis gilt mit umgekehrten Indizes auch für Gut 2. Der bemerkenswerte Unterschied zu den Nachfragefunktionen (35) und (36) besteht nun darin, daß die nachgefragte Menge q_1 nicht nur von p_1 und y, sondern auch von dem Preis des anderen Gutes p_2 abhängt.

Im Gegensatz zu diesen, aus den angegebenen Nutzenfunktionen abgeleiteten Nachfragefunktionen, werden häufig die Nachfragefunktionen als exogene Größen in ökonomische Probleme eingeführt. Eine beliebte, weil leicht zu handhabende Form, ist die lineare Nachfragefunktion

$$q_1 = a - b p_1 + c p_2, \qquad a, b, c > 0, \qquad (y = const.), \tag{48}$$

aber auch andere nichtlineare Funktionen werden oft verwendet, wie etwa

$$q_1 = (a - b p_1)^\alpha \qquad \text{mit } \alpha < 1 \tag{49}$$

oder die isoelastische Nachfrage

$$q_1 = a^{-\alpha} p_1^{\alpha} \qquad \text{mit } \alpha < 0 \tag{50}$$

bzw.

$$q_1 = ay/p_1 \qquad \text{mit } a > 0 \tag{51}$$

mit konstanten Preiselastizitäten der Nachfrage für alle pq-Kombinationen.

13. Elastizitäten. Die Steigung der konsumentenindividuellen Nachfragefunktion gibt die (absoluten) Nachfragemengenänderungen bei (absoluten) Preisänderungen (oder: [absolute] Preisänderungen bei [absoluten] Nachfragemengenänderungen) an. Im Fall der Nachfragefunktion (49) lauten die Steigungskoeffizienten $-b$ (bzw. $-1/b$). Es leuchtet unmittelbar ein, daß die numerischen Ausprägungen der Koeffizienten von den gewählten physikalischen Maßeinheiten an der Mengenachse (g, kg, t) und den monetären Einheiten an der Preisachse abhängen. Aus diesen Gründen ist die Aussagekraft der absoluten Änderungen stark eingeschränkt. In der Ökonomie verwendet man daher das Konzept der relativen oder prozentualen Änderungen, wobei das Verhältnis dieser Änderungsraten als Elastizität bezeichnet wird:

$$\eta_{x,y} = \frac{\textit{Änderung von } x}{x} : \frac{\textit{Änderung von } y}{y} \ . \tag{52}$$

Diese Elastizität gibt an, um wieviel Prozent sich die abhängige Variable x ändert, wenn sich die unabhängige Variable y um 1 % erhöht (oder sinkt). Handelt es sich um diskrete Größenänderungen, so spricht man auch von Strecken– oder Bogenelastizitäten

$$\eta_{x,y} = \frac{\Delta x}{x} : \frac{\Delta y}{y}, \tag{53}$$

und die Änderungen werden durch Differenzenquotienten dargestellt. Bei stetigen Größenänderungen treten an ihre Stelle Differentialquotienten

$$\eta_{x,y} = \frac{dx}{x} : \frac{dy}{y}, \tag{54}$$

und die Elastizitäten werden als Punktelastizitäten bezeichnet. Die Elastizitätenbildung ist ein universales Konzept und kann nicht nur auf Nachfragefunktionen, sondern auf jede beliebige Funktion $x = f(y)$ angewendet werden. Häufig werden zu (54) auch alternative, aber gleichbedeutende Schreibweisen gewählt:

$$\eta_{x,y} = \frac{dx}{x} : \frac{dy}{y} \ = \ \frac{dx}{dy} \cdot \frac{y}{x} \ = \ \frac{d \ln x}{d \ln y} \ . \tag{55}$$

Im Zusammenhang mit der Güternachfrage des Haushaltes werden insbesondere drei Elastizitäten ermittelt, die Preiselastizität der Nachfrage, die angibt, um wieviel Prozent sich die Nachfrage verändert, wenn der Preis um ein Prozent steigt (fällt):

$$\eta_{q_i,p_i} = \frac{dq_i}{dp_i} \cdot \frac{p_i}{q_i} \,, \tag{56}$$

die Kreuzpreiselastizität der Nachfrage, die angibt, um wieviel Prozent sich die Nachfrage verändert, wenn der Preis eines anderen Gutes um ein Prozent steigt (fällt):

$$\eta_{q_i,p_j} = \frac{dq_i}{dp_j} \cdot \frac{p_j}{q_i} \,, \qquad i \neq j \,, \tag{57}$$

und die Einkommenselastizität der Nachfrage, die angibt, um wieviel Prozent sich die Nachfrage verändert, wenn das Einkommen um ein Prozent steigt (fällt):

$$\eta_{q_i,y} = \frac{dq_i}{dy} \cdot \frac{y}{q_i} \,. \tag{58}$$

Eine normale Nachfragefunktion wird als elastisch bezeichnet, wenn $\eta_{q_i,p_i} < -1$, und sie wird im Fall $0 > \eta_{q_i,p_i} > -1$ als unelastisch klassifiziert.

Wir wollen nun die Elastizitäten (56) bis (58) für die im vorangegangenen Abschnitt aus konsumentenindividuellen Nutzenfunktionen (35) hergeleiteten oder exogen eingeführten Nachfragefunktionen (48) bis (50) berechnen. Die Nachfragefunktion $q_1 = \frac{\alpha}{\alpha+\beta} \cdot \frac{y}{p_1}$ weist folgende Elastizitäten auf

$$\eta_{q_1,p_1} = \frac{-\frac{\alpha}{\alpha+\beta} \cdot \frac{y}{p_1^2} \cdot p_1}{\frac{\alpha}{\alpha+\beta} \cdot \frac{y}{p_1}} \quad = \quad -1 \,, \tag{59}$$

$$\eta_{q_1,p_2} = 0 \,, \tag{60}$$

$$\eta_{q_1,y} = \frac{\frac{\alpha}{\alpha+\beta} \cdot \frac{1}{p_1} \cdot y}{\frac{\alpha}{\alpha+\beta} \cdot \frac{y}{p_1}} \quad = \quad 1 \,. \tag{61}$$

Die Nachfragefunktion ist hinsichtlich des Kreuzpreises völlig unelastisch und bezüglich des Güterpreises p_1 und des Einkommens isoelastisch, d.h. für jede beliebige Kombination von Preisen und Mengen entlang der Nachfragefunktion (35) ergibt sich eine Preiselastizität der Nachfrage von genau -1 bzw. für jede beliebige Kombination von Einkommen und Menge erhält man eine Einkommenselastizität der Nachfrage von genau 1. Die Nachfragefunktionen (48) bis (50) besitzen eine Einkommenselastizität von Null; die Kreuzpreiselastizität der Nachfrage beträgt für $q_1 = a - bp_1 + cp_2$

$$\eta_{q_1,p_2} = \frac{cp_2}{a - bp_1 + cp_2} \,. \tag{62}$$

Die Preiselastizitäten der Nachfrage lauten wie folgt:
für $q_1 = a - bp_1 + cp_2$

$$\eta_{q_1,p_1} = -\frac{bp_1}{a - bp_1 + cp_2} , \tag{63}$$

für $q_1 = (a - bp_1)^\alpha$

$$\eta_{q_1,p_1} = \frac{-\alpha bp_1}{a - bp_1} \tag{64}$$

und für $q_1 = a^{-\alpha} p_1^\alpha$, $\quad \alpha < 0$,

$$\eta_{q_1,p_1} = \frac{\alpha a^{-\alpha} p_1^{\alpha-1} p_1}{a^{-\alpha} p_1^\alpha} = \alpha . \tag{65}$$

Weitere Anwendungen von Elastizitäten werden in der Produktionstheorie diskutiert.

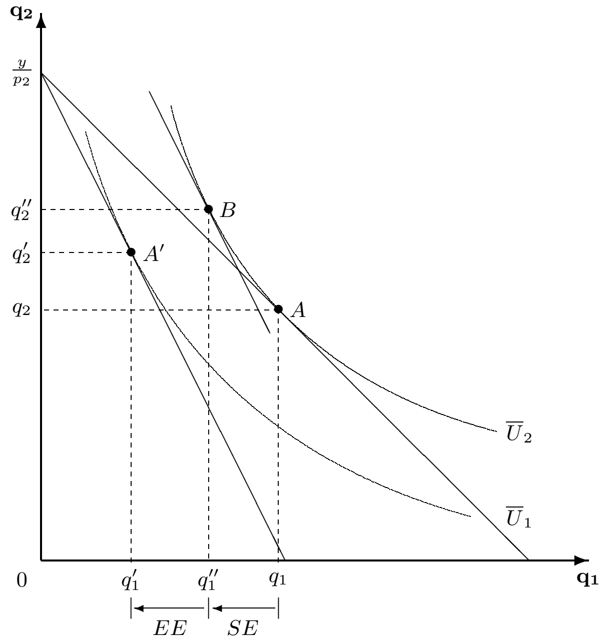


Abb. 10: Substitutions- und Einkommenseffekt

14. Substitutions- und Einkommenseffekt. Ändert sich der Preis eines Gutes (z.B. für Gut 1) bei unveränderten Preisen aller anderen Güter und bei konstanten Haushaltseinkommen, so wird sich auch in den meisten Fällen die nachgefragte Menge des Gutes 1 ändern. Diese Variationen erfolgen entlang der individuellen Nachfragefunktion, die aus den Nutzeneinschätzungen der Konsumenten, wie sie im Indifferenzkurven–Diagramm zum Ausdruck kommen, abgeleitet wird. Preisänderungen rufen im Indifferenzkurven–Diagramm den Übergang von einem Tangentialpunkt zu einem anderen hervor, wobei sich folgende Änderungen ergeben: Die Budgetgerade dreht sich im Schnittpunkt mit der Mengenachse für Gut 2 und erreicht so eine neue Indifferenzkurve. Aus analytischen Gründen kann der Übergang von einem Tangentialpunkt zu einem anderen in zwei Effekte aufgespalten werden. Der Substitutionseffekt (kurz: SE) zeigt die Änderung der Konsumwahl bei sich ändernden Preisverhältnissen entlang der ursprünglichen Indifferenzkurve, die durch angenommene gegenläufige Einkommensänderungen beibehalten werden kann. Der Einkommenseffekt (kurz: EE) zeigt die Änderung der Konsumwahl bei einem veränderten Realeinkommen und einem dann als unverändert angenommenen Preisverhältnis. Die Drehung der Budgetgeraden bedeutet nichts anderes als einen erweiterten oder eingeengten Konsummöglichkeitsbereich bei unverändertem nominalem Einkommen des Haushaltes, und somit eine Variation des Realeinkommens. Beide Effekte können graphisch verdeutlicht werden. Nehmen wir an, der Preis des Gutes 1 sei von p_1 auf p_1' gestiegen (vgl. Abbildung 10), so dreht sich die Budgetgerade in Punkt y/p_2 zum Ursprung hin. Der Tangentialpunkt (Gleichgewichtspunkt) wandert von A auf $\bar{U}_2$ nach A' auf $\bar{U}_1$. Der Übergang von A nach A' läßt sich analytisch in zwei Schritte aufspalten: Wäre das Einkommen von y auf y' gestiegen, so daß der durch den von p_1 auf p_1' erhöhten Preis hervorgerufene Realeinkommensverlust gerade ausgeglichen worden wäre, so würde entlang der Indifferenzkurve $\bar{U}_2$ aufgrund des veränderten Preisverhältnisses ein Substitutionsprozeß stattfinden, der durch den Übergang von Tangentialpunkt A nach B gekennzeichnet ist. Die konsumierten Mengen des ersten Gutes würden sich von q_1 auf q_1'' reduzieren, die des zweiten Gutes von q_2 auf q_2'' erhöhen. Diese gedachte Änderung der Konsummengen bezeichnet man als Substitutionseffekt, der sich aus der Anwendung des neuen Preisverhältnisses (Steigung der Budgetgeraden in Punkt B) auf die ursprüngliche Indifferenzkurve ergibt. Da sich das nominale Einkommen aber nicht tatsächlich ändert, sondern dies nur aus analytischen Gründen vorübergehend angenommen wird, reduziert eine Preiserhöhung die Güterwahlmöglichkeiten des Haushaltes. Das ursprüngliche Einkommen y und das neue Preisverhältnis lassen nur ein niedrigeres Nutzenniveau zu (Tangentialpunkt A' auf $\bar{U}_1$); den gedachten Übergang von B nach A' und die damit verbundene Reduktion der Konsummengen beider

Güter von q_1'' auf q_1' und von q_2'' auf q_2' bezeichnet man als Einkommenseffekt. Um es noch einmal zu betonen, beobachtet werden kann lediglich die Summe beider Effekte, somit die Verlagerung des Tangentialpunktes von A nach A' und die damit verbundenen Änderungen der Nachfragemengen.

Aus Abbildung 10 wird auch deutlich, daß der Substitutionseffekt entlang einer gegebenen Indifferenzkurve immer negativ ist

$$\frac{dq_1}{dp_1}\Big|_{\substack{dU=0\\dp_2=0}} < 0, \qquad \frac{dq_2}{dp_2}\Big|_{\substack{dU=0\\dp_1=0}} < 0,$$

und der Einkommenseffekt – wie in Abbildung 10 beispielsweise – negativ sein kann:

$$-q_1\frac{dq_1}{dy}\Big|_{\substack{dp_1=0\\dp_2=0}} < 0, \qquad -q_2\frac{dq_2}{dy}\Big|_{\substack{dp_1=0\\dp_2=0}} < 0.$$

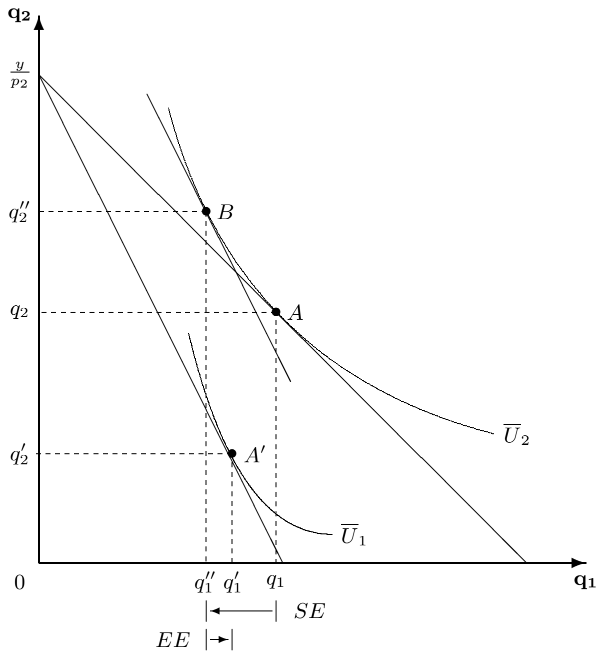


Abb. 11: Einkommenseffekt kompensiert Substitutionseffekt teilweise

Das negative Vorzeichen für die Substitutionseffekte folgt unmittelbar aus der Steigung der Indifferenzkurve, die für zwei nutzenstiftende Güter sinnvollerweise negativ angenommen wird. Das Vorzeichen des Einkommenseffekts ergibt sich aus der Lage der Indifferenzkurven zueinander und kann auch positiv sein. Positive Einkommenseffekte bedeuten, daß eine Einschränkung der Konsumwahlmöglichkeiten durch ein gesunkenes Realeinkommen

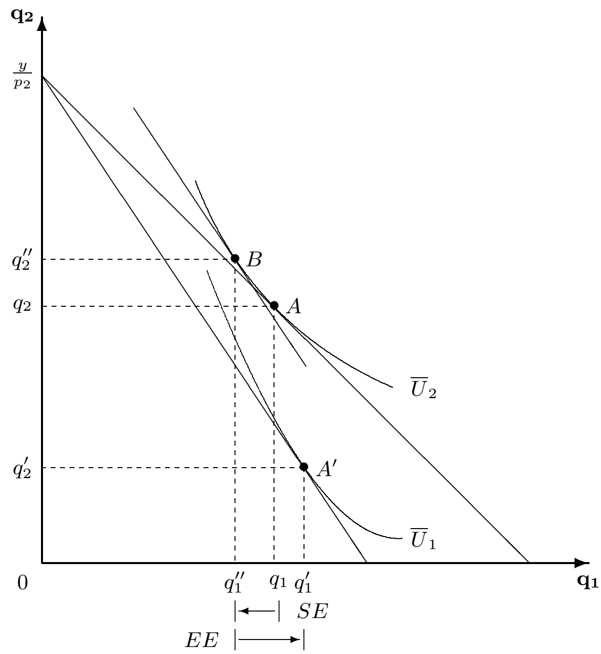


Abb. 12: Einkommenseffekt überkompensiert Substitutionseffekt

zu einer Ausweitung der Nachfrage nach einem der Güter führt. Beispiel: Steigen die Preise für Lebensmittel allgemein, so wird bei unverändertem Nominaleinkommen – also gesunkenem Realeinkommen – die Nachfrage nach Feinkostgütern sinken und die Nachfrage nach Grundnahrungsmitteln steigen, da eine unveränderte Versorgung mit einem bestimmten Nährwert vom Haushalt angestrebt wird. Im Falle eines positiven Einkommenseffektes kann dieser den Substitutionseffekt teilweise kompensieren (Abbildung 11) oder sogar überkompensieren (Abbildung 12).

Im letzten Fall erhält man einen anomalen Verlauf der konsumentenindividuellen Nachfragefunktion; mit steigendem Güterpreis steigt in einem bestimmten Bereich auch die Nachfrage nach diesem Gut an. In Abbildung 11 verdeutlicht der Übergang von A nach B den Substitutionseffekt (die Menge reduziert sich von q_1 auf q_1'') und der Übergang von B nach A' den Einkommenseffekt (die Menge erhöht sich von q_1'' auf q_1'). Der Nachfragerückgang $q_1''q_1'$ wird durch den positiven Einkommenseffekt kompensiert. In Abbildung 12 ergibt sich aufgrund der Krümmung und Lage der Indifferenzkurven nur ein in Mengeneinheiten geringer Substitutionseffekt (von A nach B bzw. von q_1 nach q_1''), aber ein ausgeprägter Einkommenseffekt (von B nach A' bzw. von q_1'' nach q_1'), wobei der Substitutionseffekt um die Menge $q_1 q_1'$ überkompensiert wird. Zeichnet man wie in Abbildung 7 die konsumentenindividuelle Nachfragefunktion $q_1 = \phi(p_1)$ dazu, so erhält man zumindest für den Übergang von A nach A' eine *positiv* ansteigende Nachfragefunktion. Dieser anomale Verlauf ist in die Literatur als Giffen–Fall eingegangen und beschreibt die Nachfrage nach inferioren Gütern. Der Sinn dieser Bezeichnung wird deutlich, wenn man den Preis für Gut 1 senkt; mit sinkendem Preis sinkt auch die Nachfrage nach diesem Gut, das Gut erweist sich als inferior. Zur mathematischen Bestimmung der Substitutions– und Einkommenseffekte mit Hilfe der Slutzky–Gleichung ist es notwendig, zunächst einige ökonomische Überlegungen zum Optimierungsproblem unter Nebenbedingungen anzufügen.

15. Kompensierte Nachfragefunktion. Im vorangegangenen Abschnitt haben wir angenommen, daß sich der Preis des Gutes 1 ändert und alle anderen unabhängigen Variablen der Haushaltsnachfrage - Einkommen und Preise der anderen Güter - konstant bleiben. Unter diesen Voraussetzungen führt eine Preiserhöhung zum Verlassen einer höheren Indifferenzkurve und zur Bildung des Haushaltsgleichgewichtes auf einer niedrigeren Indifferenzkurve. Möchte der Haushalt auf der ursprünglichen Indifferenzkurve verbleiben, so muß notwendigerweise das Einkommen um genau jenen Betrag steigen, der die Preiserhöhung kompensiert. Steigen beispielsweise die Preise von p_1^1 über p_1^2 auf p_1^3, so muß das Einkommen von y_1 über y_2 auf y_3 steigen (vgl. Abbildung 13). Die aus der Abfolge der Haushaltsgleichgewichte A_1 bis A_3 abgeleitete Nachfragefunktion wird als kompensierte Nachfragefunktion (auch Hickssche Nachfragefunktion, nach dem englischen Ökonomen John Richard Hicks) bezeichnet:

$$q_{1,k} \quad = \quad q_{1,k}(p_1, \bar{p}_2, \bar{U}). \tag{66}$$

Im Gegensatz zu der bisher betrachteten *unkompensierten* Nachfragefunktion (auch Marshallsche Nachfragefunktion, benannt nach dem englischen Ökonomen Alfred Marshall), wird das Nutzenniveau anstelle des Einkommens als konstant betrachtet. Unter der Voraussetzung einer konvexen Indifferenzkurve muß die kompensierte Nachfragefunktion immer einen *negativen Anstieg* haben: Da sich die Bilanzgerade entlang einer Indifferenzkurve dreht, liegen alle Haushaltsgleichgewichtspunkte auch entlang dieser einen Indifferenzkurve. Somit sind steigende Preise für Gut 1 immer mit sinkenden Mengen von Gut 1 verbunden und umgekehrt. Von diesen Überlegungen

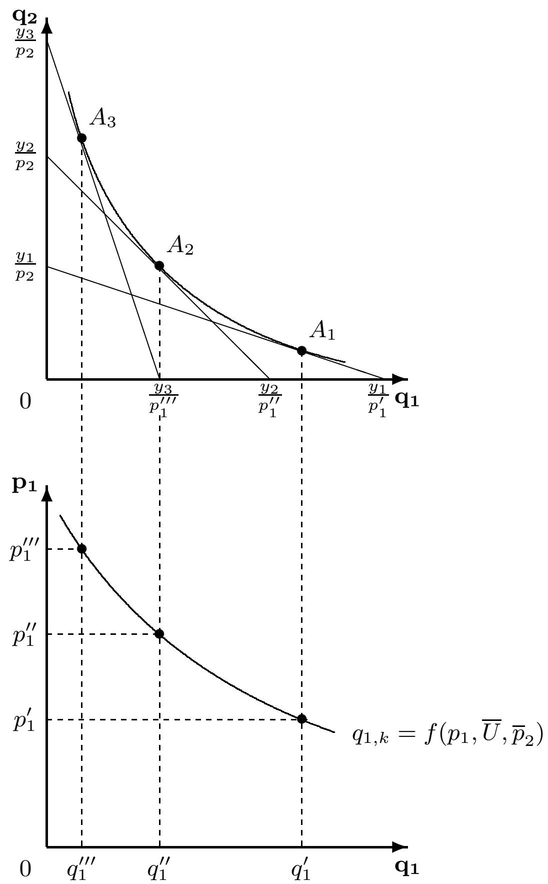


Abb. 13: Die kompensierte Nachfragefunktion

unberührt bleibt die Tatsache, daß die korrespondierende, unkompensierte Nachfragefunktion – wie in den vorangegangenen Abschnitten beschrieben – auch einen positiven, d.h. anomalen Verlauf aufweisen kann.

M5. Das Dualproblem. *In* M4 *wurde eine Optimierungsaufgabe der Form*

$$\max_{x,y} f(x,y), \quad g(x,y) = k - G(x,y) = 0$$

mit Hilfe der Lagrangefunktion $\mathcal{L}(x,y,\lambda)$ *behandelt.*

• Duale Optimierungsaufgabe: *Es wird jetzt vorausgesetzt, daß die Funktion* $\mathcal{L}(x,y,\lambda)$ *als Funktion von* x *und* y *(bei festem* λ*) im Punkt* (x^*,y^*)

ein (lokales) Maximum annimmt und daß der Maximalpunkt die Nebenbedingung erfüllt. Dann ist der Maximalwert von $\mathcal{L}$ *das Maximum* f_{max} *von* f *unter der Nebenbedingung* $G = k$*, und der Parameter* λ *stimmt notwendig mit dem Lagrange-Multiplikator* λ^* *überein. Das bedeutet in einer gewissen Umgebung des Maximalpunktes:*

$$\mathcal{L}(x^*, y^*, \lambda^*) = f_{max} \geq f(x,y) + \lambda^* \left(k - G(x,y)\right) = \mathcal{L}(x, y, \lambda^*).$$

Wird wie in M4 $\lambda^* \neq 0$ *vorausgesetzt, so kann bei* $\lambda^* > 0$ *die mittlere Ungleichung auch als*

$$k \leq G(x,y) + \frac{1}{\lambda^*}\left(f_{max} - f(x,y)\right)$$

für (x,y) *aus einer gewissen Umgebung von* (x^*, y^*) *geschrieben werden. Wird hierin für* (x,y) *ein beliebiger Punkt der Kurve* $f(x,y) = f_{max}$ *eingesetzt, so erweist sich der Wert* k *als eine Lösung der sogenannten* dualen *Optimierungsaufgabe*

$$\min_{x,y} G(x,y), \quad F(x,y) = f_{max} - f(x,y) = 0,$$

wobei das Minimum an der gleichen Stelle (x^*, y^*) *angenommen wird.*

Die ursprüngliche Aufgabe heißt in diesem Zusammenhang primale Aufgabe. *Diese kann natürlich auch eine Minimumaufgabe sein, hierzu dual ist dann eine Maximumaufgabe.*

Bemerkung: Bei negativem λ^* *ist die Maximumaufgabe für* f *durch die Minimumaufgabe für die Funktion* $-f$ *zu ersetzen, und der Wert* k *ist dann eine Lösung der dualen Maximumaufgabe für die Funktion* $G(x,y)$ *unter der Nebenbedingung* $-f(x,y) = -f_{max} = (-f)_{min}$.

• Zusammenhang zwischen primaler und dualer Aufgabe: *Die Lagrangefunktionen* $\mathcal{L}$ *der Maximumaufgabe und* $\hat{\mathcal{L}}$ *der dazu dualen Minimumaufgabe werden miteinander verglichen:*

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(x,y,\lambda) &= f(x,y) + \lambda\left(k - G(x,y)\right), \\ \hat{\mathcal{L}}(x,y,\mu) &= G(x,y) + \mu\left(f_{max} - f(x,y)\right). \end{aligned}$$

— *Die Lagrangefunktionen der primalen und dualen Aufgabe gehen durch Vertauschung der Zielfunktionen* f *und* G *und durch Vertauschung der Konstanten* k *und* f_{max} *auseinander hervor.*

— *Die Konstante in der Nebenbedingung der primalen Aufgabe ist der Optimalwert der dualen Aufgabe, und die Konstante in der Nebenbedingung der dualen Aufgabe ist der Optimalwert der primalen Aufgabe.*

— *Der Wert des Lagrange-Multiplikators in der Lösung der dualen Aufgabe ist gleich dem reziproken Wert des Lagrange-Multiplikators in der Lösung der primalen Aufgabe.*

Beispiel: Zu der in M4 *behandelten Optimierungsaufgabe* $\max\limits_{x,y}\sqrt{xy}$ *unter der Nebenbedingung* $x + y = k$ *wird die duale Aufgabe gebildet. (Die oben formulierte Voraussetzung über die Lagrangefunktion mit dem Lagrange-Multiplikator* $\lambda^* = 1/2$ *ist hier erfüllt.)*
Die duale Aufgabe lautet daher mit $f(x, y) = \sqrt{xy}$ *:*

$$\min_{x,y} x + y, \qquad F(x, y) = f_{max} - f(x, y) = \frac{k}{2} - \sqrt{xy} = 0.$$

Die zugehörige Lagrangefunktion ist $\hat{\mathcal{L}}(x, y, \mu) = x + y + \mu \left(\frac{k}{2} - \sqrt{xy}\right)$.
Der Lagrange-Multiplikator $\mu^* = \frac{1}{\lambda^*}$ *hat den Wert* 2. *Da die Optima der primalen und der dualen Aufgabe im gleichen Punkt mit den Koordinaten* $x^* = \frac{k}{2}$ *und* $y^* = \frac{k}{2}$ *angenommen werden, ergibt sich der Wert 2 für* μ^* *auch aus der notwendigen Bedingung:*

$$\frac{\partial \hat{\mathcal{L}}}{\partial x} = 1 - \frac{\mu^*}{2}\sqrt{\frac{y^*}{x^*}} = 1 - \frac{\mu^*}{2} = 0.$$

Schließlich kann auch der Multiplikator μ^* *als Änderungsgeschwindigkeit interpretiert werden: Wird für den Parameter in der Nebenbedingung der dualen Aufgabe* $k/2 = b$ *gesetzt, so hat das Minimum der Funktion* $x + y$ *den Wert* $2b$, *und die Ableitung des Minimums nach dem Parameter* b *der Nebenbedingung ergibt* $\mu^* = 2$.

16. Analytische Ableitung der kompensierten Nachfragefunktion. Wir können die bisher nur graphisch abgeleitete kompensierte Nachfragefunktion auch analytisch ermitteln. Während die unkompensierte Nachfrage von der exogen gegebenen Höhe des Einkommens y mitbestimmt wird und sich bei Preisänderungen das Nutzenniveau des Haushaltes ändert (Bewegung von einer Indifferenzkurve zu einer anderen), wird die kompensierte

Nachfrage von dem exogen gegebenen Nutzenniveau determiniert, was bedeutet, daß sich bei Preisänderungen das Einkommen ebenfalls in die gleiche Richtung ändern muß (Bewegung entlang einer Indifferenzkurve). Mit anderen Worten, die Nachfrage nach Gut 1 lautet im unkompensierten Fall

$$q_1 = f(p_1, \cdots, \bar{y}) \tag{67}$$

und im kompensierten Fall

$$q_{1,k} = f(p_1, \cdots, \bar{U}). \tag{68}$$

Zur Ableitung beider Nachfragefunktionen soll von der Nutzenfunktion

$$U = q_1 q_2, \quad q_1, q_2 > 0 \tag{69}$$

und der Nebenbedingung

$$y = p_1 q_1 + p_2 q_2 \tag{70}$$

ausgegangen werden. Die Lösung des Primalproblems - Maximierung der Nutzenfunktion bei gegebenem Einkommen - führt zur unkompensierten Nachfragefunktion

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(q_1, q_2, \lambda) &= q_1 q_2 + \lambda(y - p_1 q_1 - p_2 q_2), \qquad (71) \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_1} &= q_2^* - \lambda p_1 = 0, \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_2} &= q_1^* - \lambda p_2 = 0, \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} &= y - p_1 q_1 - p_2 q_2 = 0. \end{aligned}$$

Benutzt man die ersten beiden partiellen Ableitungen, um λ zu ersetzen, so erhält man $q_2^* = q_1^* p_1 / p_2$. Löst man die dritte partielle Ableitung ebenfalls nach q_2^* auf ($q_2^* = y/p_2 - (p_1 q_1^*)/p_2$), so kann aus der Gleichsetzung beider Funktionen die unkompensierte Nachfrage für Gut 1 ermittelt werden. Die unkompensierte Nachfrage für Gut 2 läßt sich analog bestimmen.

$$q_1^* = y/(2p_1). \tag{72}$$

Die Lösung des zugehörigen Dualproblems — Minimierung der Ausgaben bei gegebenem Nutzenniveau — führt zur kompensierten Nachfragefunktion

$$\mathcal{L}(q_1, q_2, \mu) = p_1 q_1 + p_2 q_2 + \mu(\bar{U} - q_1 q_2), \tag{73}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_1} &= p_1 - \mu q_2^* = 0, \\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_2} &= p_2 - \mu q_1^* = 0, \\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mu} &= \bar{U} - q_1 q_2 = 0.
\end{aligned}$$

Löst man wiederum die erste und zweite partielle Ableitung der Lagrangefunktion nach μ auf, so ergibt sich $q_2^* = q_1^* p_1/p_2$. Durch Einsetzen dieses Terms in die dritte partielle Ableitung erhält man $\bar{U} - q_1^*(q_1^* p_1/p_2) = 0$ oder $q_1^{*2} p_1/p_2 = \bar{U}$. Die kompensierte Nachfragefunktion lautet folglich

$$q_{1,k}^* = (\bar{U}\frac{p_2}{p_1})^{\frac{1}{2}}. \tag{74}$$

Die kompensierte Nachfrage für Gut 2 läßt sich analog ermitteln. Aus dem Primalproblem können wir das maximale Nutzenniveau bei gegebenen Konsumausgaben und Preisen bestimmen. Da die nachgefragten Gütermengen vom Einkommen und Preisen abhängen, läßt sich die Nutzenfunktion auch in Abhängigkeit dieser Größen ausdrücken; diese Funktion $U = U(y, p_1, p_2)$ wird als *indirekte* Nutzenfunktion bezeichnet,

$$U^* = q_1^* q_2^* = y^2/(4p_1 p_2), \tag{75}$$

da die konsumierten Gütermengen nur indirekt durch Einkommen und Preise enthalten sind. Aus dem Dualproblem lassen sich die minimalen Haushaltsausgaben in Abhängigkeit von Preisen und Nutzenniveau ermitteln $y = y(y, p_1, p_2)$:

$$\begin{aligned}
y* &= p_1 q_1^* + p_2 q_2^* = p_1 \left(\frac{p_2}{p_1}\bar{U}\right)^{\frac{1}{2}} + p_2 \left(\frac{p_1}{p_2}\bar{U}\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= 2(p_1 p_2 \bar{U})^{\frac{1}{2}}. \qquad (76)
\end{aligned}$$

An dieser Stelle wollen wir noch einmal zu den schon graphisch behandelten Substitutions– und Einkommenseffekten zurückkehren und ihre analytische Aufspaltung darstellen.

17. Slutzky-Gleichung. Die Voraussetzungen für eine normal verlaufende Basisnachfragefunktion wurden in Abschnitt 11 bereits auf graphischem Wege gezeigt: Entweder liegt ein Nichtsättigungsgut vor oder aber der negative Einkommenseffekt kann bei einem inferioren Gut den Substitutionseffekt nur teilweise kompensieren. Die Zerlegung des Gesamteffektes von Preisänderungen auf die Nachfrage in Substitutionseffekte und Einkommenseffekte kann mit Hilfe der Slutzky–Gleichung, benannt nach dem russischen Ökonomen Eugenio Slutzky, gezeigt werden. Ausgangspunkt der Überlegungen ist der optimale Wert der Zielfunktion des Dualproblems (minimale Haushaltsausgaben)

$$y^*(p_1, p_2, U) = p_1 q_1^* + p_2 q_2^*. \tag{77}$$

Da für den Zusammenhang zwischen Primal– und Dualproblem gilt (vgl. Abschnitt M5), daß die Optimalwerte der Variablen gleich sind (z.B. x_1^*, x_2^*) und ferner der maximale Wert der Zielfunktion im Primalproblem der Konstante in der Restriktion des Dualproblems bzw. der minimale Wert der Zielfunktion im Dualproblem der Konstante in der Restriktion des Primalproblems entspricht, läßt sich für das Haushaltsgleichgewicht postulieren:

Primalproblem:

$$\max_{q_1, q_2} \; U(q_1, q_2), \quad \text{Nebenbedingung } \bar{y} = p_1 q_1 + p_2 q_2,$$

Dualproblem:

$$\min_{q_1, q_2} \; y = p_1 q_1 + q_2 p_2, \quad \text{Nebenbedingung } \bar{U} = U(q_1, q_2),$$

Optimum:

$$U^* = \bar{U}, \quad y^* = \bar{y}, \quad q_1^* = q_1^*, \quad q_2^* = q_2^* \;.$$

Aus dem Dualproblem ergibt sich die kompensierte Nachfragefunktion (vgl. Gleichung (74)):

$$q_{1,k}^* = q_{1,k}^*(p_1, \bar{p}_2, \bar{U}).$$

und aus dem Primalproblem die unkompensierte Nachfragefunktion (vgl. Gleichung (72))

$$q_1^* = q_1^*(p_1, p_2, \bar{y}).$$

Da $q_1^* = q_{1,k}^*$, ferner $\bar{y} = y^*$ und die Ausgabenfunktion $y^* = y^*(p_1, p_2, \bar{U})$ gilt, läßt sich auch schreiben

$$q_{1,k}^*(p_1, p_2, \bar{U}) = q_1^*(p_1, p_2, y^*(p_1, p_2, \bar{U})). \tag{78}$$

Differenziert man beide Seiten nach p_1, so erhält man:

$$\frac{\partial q_{1,k}^*}{\partial p_1} = \frac{\partial q_1^*}{\partial p_1} + \frac{\partial q_1^*}{\partial y^*} \frac{\partial y^*}{\partial p_1}$$

oder

$$\left.\frac{dq^*_{1,k}}{dp_1}\right|_{\substack{dU=0\\dp_2=0}} = \left.\frac{dq^*_1}{dp_1}\right|_{\substack{dy=0\\dp_2=0}} + \left(\left.\frac{dq^*_1}{dy^*}\right|_{\substack{dp_1=0\\dp_2=0}}\right)\left(\left.\frac{dy^*}{dp_1}\right|_{\substack{dU=0\\dp_2=0}}\right). \tag{79}$$

Shephards Lemma $\left.\frac{dy^*}{dp_1}\right|_{\substack{dU=0\\dp_2=0}} = q^*_1$ besagt, daß im Optimum Ausgabeänderungen, die durch den Substitutionseffekt der Preisänderungen hervorgerufen werden, Null sind. Setzt man in die Slutzky–Gleichung q^*_1 ein, so kann die Gleichung wie folgt umformuliert werden:

$$\underbrace{\left.\frac{dq^*_1}{dp_1}\right|_{\substack{dy=0\\dp_2=0}}}_{\text{Steigung der unkompensierten Nachfragefunktion (Gesamteffekt)}} = \underbrace{\left.\frac{dq^*_{1,k}}{dp_1}\right|_{\substack{dU=0\\dp_2=0}}}_{\text{Steigung der kompensierten Nachfragefunktion (Substitutionseffekt)}} \underbrace{-q^*_1 \left.\frac{dq^*_1}{dy^*}\right|_{\substack{dp_1=0\\dp_2=0}}}_{\text{Gleichgewichtsmenge mal Steigung der Engel-Kurve (Einkommenseffekt)}} \tag{80}$$

Über die Vorzeichen der einzelnen Terme wissen wir:

— Die nachgefragte Gütermenge q^*_1 ist immer positiv.

— Die Steigung der kompensierten Nachfragefunktion ist immer negativ.

— Bei normalen Gütern ist die Steigung der Engel-Kurve positiv, so daß die unkompensierte Nachfragefunktion eine negative Steigung aufweist.

— Bei inferioren Gütern ist die Steigung der Engel-Kurve negativ, so daß die Steigung der unkompensierten Nachfragefunktion negativ oder positiv sein kann.

Es lassen sich nunmehr vier Fälle in Abhängigkeit vom Einkommenseffekt unterscheiden, wobei zu beachten ist, daß der Substitutionseffekt immer negativ ist:

— Ist der Einkommenseffekt ebenfalls negativ, so ist der Gesamteffekt negativ (normaler Verlauf der unkompensierten Nachfrage mit negativem Anstieg) und es handelt sich um ein superiores Gut.

— Ist der Einkommenseffekt positiv und gleich dem absoluten Wert des Substitutionseffekts, so heben sich beide Effekte gerade auf und wir sprechen von einem Sättigungsgut. (Die unkompensiere Nachfrage hat einen Anstieg von Null.)

— Ist der Einkommenseffekt positiv, aber kleiner als der absolute Wert des Substitutionseffektes, so ist der Gesamteffekt negativ. Es liegt ein inferiores Gut vor (jedoch: normaler Verlauf der unkompensierten Nachfrage mit negativem Anstieg).

— Ist der Einkommenseffekt positiv und sogar größer als der absolute Wert des Substitutionseffektes, so ist der Gesamteffekt positiv. Es liegt ein inferiores Gut vor (jedoch: anomaler Verlauf der unkompensierten Nachfrage mit positivem Anstieg).

Für superiore Güter können wir die Aussage treffen, daß die Steigung der unkompensierten Nachfragefunktion kleiner ist als die Steigung der kompensierten Nachfragefunktion, da von ihr der Term $q_1^*(dq_1^*/dy*)$ abgezogen wird. Ferner gilt offensichtlich, daß jedes anomale Gut ein inferiores Gut ist, aber nicht jedes inferiore Gut auch ein anomales Gut sein muß.

18. Marktnachfrage. Bisher wurde ausschließlich die konsumentenindividuelle Nachfrage nach Gütern diskutiert. Die gesamte an einem Markt wirksame Nachfrage Q_1 nach Gut 1 erhält man durch Aggregation der individuellen unkompensierten Nachfragefunktionen

$$q_1^j = q_1^j(p_1, \bar{p}_2, \bar{y}^j) \tag{81}$$

über alle Konsumenten j von 1 bis n

$$Q_1 = \sum_{j=1}^{n} q_1^j(p_1, \bar{p}_2, \bar{y}^j). \tag{82}$$

Geht man zur Vereinfachung davon aus, daß alle Konsumenten über die gleiche individuelle Nachfragefunktion verfügen, so stellt die Aggregation kein Problem dar. Addiert man z.B. die Nachfragefunktion (70) über alle Konsumenten, so erhält man:

$$Q_1 = \sum_{j=1}^{n} \big(\bar{y}^j/(2p_1)\big) = (1/2p_1) \sum_{j=1}^{n} \bar{y}^j. \tag{83}$$

Nimmt man eine lineare individuelle Nachfragefunktion

$$q_1^j = a_j - b_j p_1 \tag{84}$$

an, so lautet die Marktnachfrage bei unterschiedlichen Koeffizienten a_j, b_j

$$Q_1 = \sum_{j=1}^{n} a_j - p_1 \sum_{j=1}^{n} b_j \tag{85}$$

und bei identischen Koeffizienten $a_j = a$, $b_j = b$,

$$Q_1 = n \cdot a - nbp_1. \tag{86}$$

In diesem Fall ist der Prohibitivpreis, der keine Nachfrage entstehen läßt ($0 = q(a/b)$), für die individuelle und die aggregierte Nachfragefunktion identisch ($a/b = na/nb$), Steigung und Sättigungsmenge jedoch unterscheiden sich ($a < na, b < nb$). Mit diesen Bemerkungen zur Marktnachfrage soll die Behandlung der Güternachfrage des Haushaltes abgeschlossen werden.

2.3 Faktorangebot des Haushaltes

19. Zeitallokation des Haushaltes. Bisher haben wir angenommen, daß nur Güter in der Lage sind, dem Haushalt Nutzen zu stiften und daß das Einkommen des Haushaltes gegeben ist. Diese Annahmen wurden aus Vereinfachungsgründen eingeführt und sollen nun fallengelassen werden. Wie wir wissen, ist eine Vielzahl von Aktivitäten, die nicht im Konsum gekaufter Güter bestehen, geeignet, ein weites Spektrum menschlicher Bedürfnisse zu befriedigen. Bei diesen Aktivitäten kann es sich beispielsweise um Erholung, Sport oder Steckenpferde handeln, die wir zu Freizeitaktivitäten zusammenfassen wollen. Innerhalb eines gegebenen Zeitraumes (ein Tag, eine Woche, ein Monat, ein Jahr) lassen sich diese Aktivitäten höchstens bis zur Gesamtdauer dieses Zeitraumes ausdehnen. In diesem Grenzfall verbleibt aber keine Restzeit, um Arbeitsleistungen am Faktormarkt anbieten zu können. Der Haushalt hat die Tatsache zu berücksichtigen, daß das Produkt aus Arbeitszeit und exogen gegebenem Lohn satz ein Arbeitseinkommen ergibt, das zum Kauf von Gütern verwendet werden kann, deren Konsum wiederum Nutzen stiftet. In diesem Sinne hat der Haushalt die Entscheidung über die nutzenmaximale Kombination von Freizeit und Güterkonsum zu treffen, genauer gesagt, er muß die Nutzenfunktion, die beide Argumente enthält, unter der Einkommensnebenbedingung maximieren.

Für die weitere Behandlung des Problems soll angenommen werden, daß das Einkommen y vollständig konsumiert wird

$$y = cp, \tag{87}$$

wobei $c = q_1 + q_2 + \cdots + q_n$ die Mengen aller konsumierten Güter und p den Preisindex dieser Güter darstellen. Das Einkommen y setzt sich aus

Arbeitseinkommen y^a und Nichtarbeitseinkommen (z.B. Zinseinkommen) y^i zusammen

$$y = y^a + y^i. \tag{88}$$

Die Gesamtzeit $\bar{T}$ kann der Haushalt für Freizeitaktivitäten T^f verwenden oder aber als Arbeitszeit T^a am Faktormarkt anbieten:

$$\bar{T} = T^a + T^f. \tag{89}$$

Bei gegebenem Lohnsatz l lautet das Arbeitseinkommen

$$y^a = lT^a. \tag{90}$$

Aus den Gleichungen (87) bis (90) kann die Bilanzgerade (Restriktion) im Konsum–Freizeit–Diagramm (kurz c/T^f, vgl. Abbildung 14) ermittelt werden:

$$c = (\bar{T} - T^f)l/p + y^i/p. \tag{91}$$

Der reale Konsum ist gleich der Summe aus realem Arbeitseinkommen und realem Nichtarbeitseinkommen. Analog zur Theorie der Güternachfrage ergibt sich der Optimalpunkt im c/T^f–Diagramm durch den Tangentialpunkt von Bilanzgerade und der höchstmöglichen Indifferenzkurve aus der Nutzenfunktion

$$U = U(c, T^f), \quad \frac{\partial U}{\partial c} > 0, \frac{\partial U}{\partial T^f} > 0. \tag{92}$$

Anders gesagt, dort, wo die Steigung von (91) gleich der Steigung der Indifferenzkurve $\bar{U} = U(c, T^f)$ ist, erhält man die nutzenmaximale Kombination von Freizeit T^{f^*} und Konsum c^*.

Aus T^{f^*} läßt sich unmittelbar das Arbeitsangebot $T^a = \bar{T} - T^{f^*}$ ermitteln. Die Steigung der Restriktion (91) beträgt:

$$\frac{dc}{dT^f} = -\frac{l}{p}, \tag{93}$$

wobei dc/dT^f angibt, in welchem Verhältnis Güter in Freizeit transformiert werden können. Dieser Ausdruck ist gleich dem negativen Reallohnsatz. Die Steigung der Indifferenzkurve erhält man aus dem totalen Differential der Nutzenfunktion (92)

$$dU = \frac{\partial U}{\partial T^f} dT^f + \frac{\partial U}{\partial c} dc = 0 \tag{94}$$

oder

$$\frac{\partial U/\partial T^f}{\partial U/\partial c} = -\frac{dc}{dT^f} \Big|_{dU=0} \; . \tag{95}$$

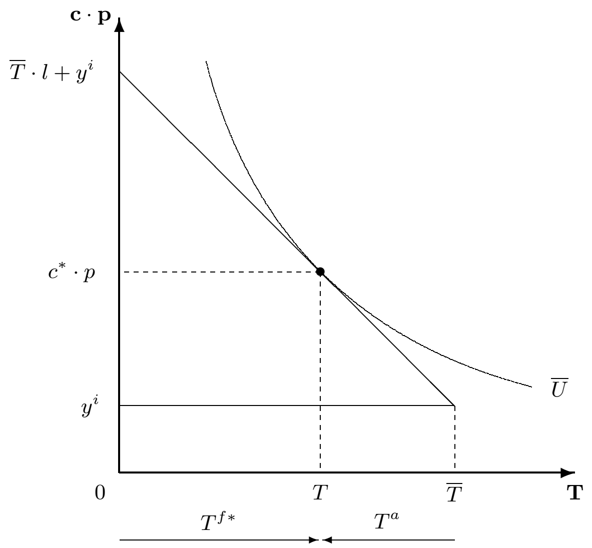


Abb. 14: Nutzenmaximaler Konsum und Freizeit

Die Grenzrate der Substitution ist gleich dem umgekehrten Verhältnis der Grenznutzen. Erzielt der Haushalt ein Arbeitseinkommen, so gibt Gleichung (95) die optimale Aufteilung der Zeit auf Freizeit und Arbeitszeit (= Einkommen und Konsummöglichkeiten) an, die Gleichung (93) enthält die Restriktion für die Verwirklichung dieser Aufteilung. Daher gilt ferner:

$$\frac{\partial U/\partial T^f}{\partial U/\partial c} = -\frac{dc}{dT^f}\Big|_{dU=0} = \frac{l}{p}. \tag{96}$$

Satz: *Die Grenzrate der Substitution von Konsum und Freizeit ist gleich dem umgekehrten Verhältnis der Grenznutzen dieser Aktivitäten und ebenfalls gleich dem Reallohnsatz.*

Die Aussage „Verhältnis des Grenznutzens der Freizeit zu Grenznutzen des Konsums ist gleich dem Reallohnsatz“ läßt sich auch analytisch zeigen. Maximiert man die Lagrangefunktion

$$\mathcal{L}(c, T^f, \lambda) = U(c, T^f) + \lambda \left[l(\bar{T} - T^f) + y^i - pc \right], \tag{97}$$

so erhält man die Bedingungen erster Ordnung

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c} &= \frac{\partial U}{\partial c} - \lambda p = 0, \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial T^f} &= \frac{\partial U}{\partial T^f} - \lambda l = 0, \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} \quad = \quad l(\bar{T} - T^f) + y^i - pc = 0.$$

Aus den beiden partiellen Ableitungen nach Konsum und Freizeit läßt sich ebenfalls

$$\frac{\partial U/\partial T^f}{\partial U/\partial c} = \frac{l}{p} \tag{98}$$

ermitteln.

20. Arbeitsangebot des Haushaltes. Mit Hilfe graphischer Darstellungen soll nun die Frage geklärt werden, wie sich das Arbeitsangebot bei Änderungen des Nichtarbeitseinkommens und bei Variationen des Lohnsatzes verändert. Daß ein Anstieg von y^i sowohl den Güterkonsum als auch den Freizeitkonsum erhöht und damit das Arbeitsangebot vermindert und in besonders ausgeprägten Fällen zu einem Arbeitsangebot von Null führt, ist aus der Realität hinlänglich bekannt (Lottokönig, Rentier). In Abbildung 15 ist die Erhöhung des Nichtarbeitseinkommens durch die Parallelverschiebung der Einkommensrestriktion verdeutlicht.

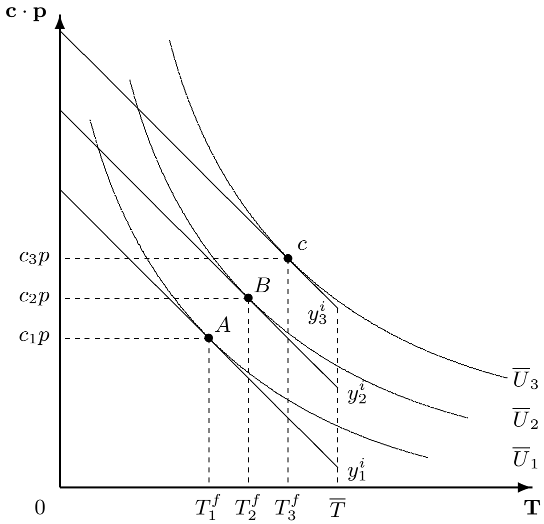


Abb. 15: Änderung von Nichtarbeitseinkommen und Arbeitsangebot

Der Anstieg von y_1^i über y_2^i zu y_3^i läßt die Tangentialpunkte A, B, C mit den Indifferenzkurven $\bar{U}_1$, $\bar{U}_2$, $\bar{U}_3$ entstehen. Die zugehörigen Konsummengen sind $c_1 < c_2 < c_3$ und bei Freizeit als superiorem Gut $T_1^f < T_2^f < T_3^f$. Daraus folgt, daß das Arbeitsangebot von $T_1^a = \bar{T} - T_1^f$ über $T_2^a = \bar{T} - T_2^f$ auf $T_3^a = \bar{T} - T_3^f$ sinken muß.

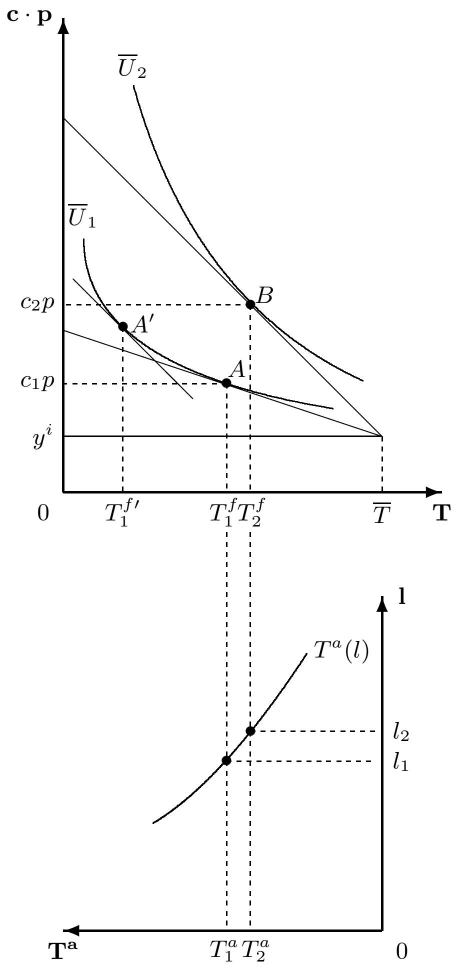


Abb. 16: Arbeitsangebot bei überkompensiertem Substitutionseffekt

Wie verändert eine Lohnsteigerung das Arbeitsangebot? Denkbar sind zwei Reaktionen des Haushaltes. Zum einen kann er – da mit dem Arbeitseinkommen aus der gleichen Arbeitszeit mehr Güter gekauft werden können – die Arbeitszeit vermindern, um so zu einem neuen ausgewogenen Verhältnis von mehr Güterkonsum *und* mehr Freizeit zu gelangen.. Zum andern kann er durch die Erhöhung des Lohnsatzes veranlaßt werden, sein Arbeitsangebot auszudehnen, da es lohnenswerter wird, Freizeit in zusätzliche Arbeitszeit umzuwandeln. Ob der erste oder zweite Fall auf das Verhalten des Haushaltes zutrifft, hängt davon ab, ob – ähnlich wie bei der Preisänderung eines Gutes im q_1/q_2–Diagramm – der Einkommenseffekt oder der Substitutionseffekt überwiegt. Daher sollen beide Fälle isoliert dargestellt werden.

In Abbildung 16 (oberer Teil) wird unterstellt, daß der Einkommenseffekt den Substitutionseffekt überkompensiert. Die Erhöhung des Lohnsatzes von l_1 auf l_2 bewirkt eine Rechtsdrehung der Einkommensrestriktion. Auf den Tangentialpunkt A auf Indifferenzkurve $\bar{U}_1$ folgt der Tangentialpunkt B auf Indifferenzkurve $\bar{U}_2$; die Freizeit wird ausgeweitet ($T_1^f < T_2^f$), die Arbeitszeit reduziert ($T_1^a > T_2^a$) und der Konsum ausgeweitet ($c_1 < c_2$). Der Übergang von A nach B kann analytisch in zwei Schritte aufgelöst werden: Entlang der Indifferenzkurve $\bar{U}_1$ gelangt man zum Tangentialpunkt A' mit der Einkommensrestriktion gleichen Einkommens (d.h. wenn $l_1 < l_2$, dann muß gelten $y_1^i > y_1^{i'}$). Die Freizeit reduziert sich durch diesen Substitutionseffekt von T_1^f auf $T_1^{f'}$. Berücksichtigt man nun den Einkommenszuwachs durch $l_1 < l_2$ und $y_1^i = const.$, so gelangt man zum Tangentialpunkt B auf der Indifferenzkurve $\bar{U}_2$. Durch diesen Einkommenseffekt erhöht sich die Freizeit von $T_1^{f'}$ über T_1^f hinaus auf T_2^f und das Arbeitsangebot vermindert sich. Wir können sagen, der Einkommenseffekt überkompensiert den Substitutionseffekt. Die Auswirkungen auf das Arbeitsangebot können in das untere T^a/l–Diagramm übertragen werden. Es zeigt sich, daß mit steigendem Lohnsatz das Arbeitsangebot zurückgeht.

In Abbildung 17 (oberer Teil) wird angenommen, daß der Substitutionseffekt den Einkommenseffekt überkompensiert. Die Argumentation ist die gleiche wie für Abbildung 16: Entlang der Indifferenzkurve $\bar{U}_1$ gelangt man vom Ausgangspunkt A zum Tangentialpunkt mit der einkommensgleichen Restriktion ($l_1 < l_2$, $y_1^{i'} < y_1^i$). Dieser Substitutionseffekt führt ebenso wie in Abbildung 16 zu einer Reduktion der Freizeit von T_1^f auf $T_1^{f'}$. Berücksichtigt man die Einkommenssteigerung durch l_2, erhält man den Tangentialpunkt B auf der Indifferenzkurve $\bar{U}_2$. Durch diesen Einkommenseffekt weitet sich die Freizeit von $T_1^{f'}$ auf T_2^f aus, dieser Wert ist aber geringer als der Ausgangswert T_1^f. Die Lohnerhöhung bewirkt eine Reduktion der Freizeit, eine Erhöhung des Konsums ($c_1 < c_2$) und – wie man auch aus dem T^a/l–Diagramm ersehen kann – eine Ausweitung des Arbeitsangebotes.

Damit ist klargeworden, daß die Angebotsreaktionen des Haushaltes auf Lohnsatzänderungen von der Lage der Indifferenzkurven, und somit von den Präferenzen der Arbeitsanbieter, abhängen. Häufig wird in der Literatur argumentiert, daß bei geringen Haushaltseinkommen der Substitutionseffekt (absolut) größer ist als der Einkommenseffekt und sich dieses Verhältnis bei

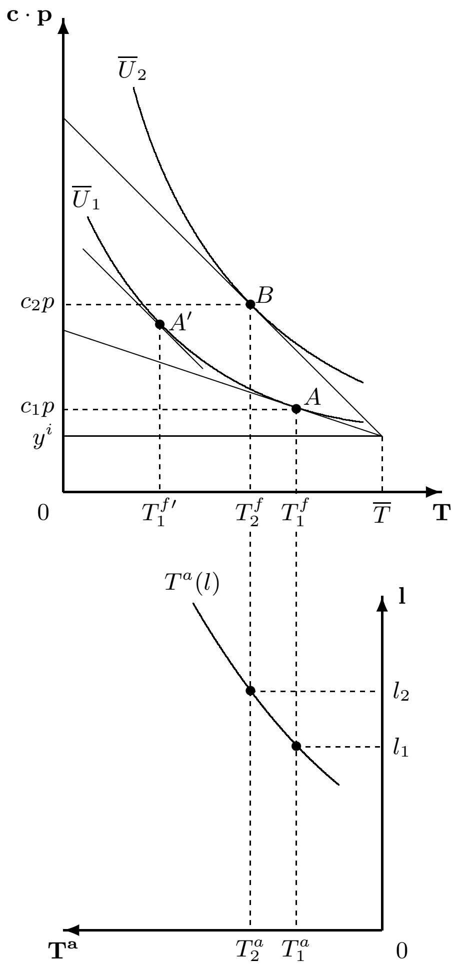


Abb. 17: Arbeitsangebot bei teilkompensiertem Substitutionseffekt

hohen Einkommen umkehrt. Die Folge aus dieser Annahme ist – wie man sich aus den Abbildungen 16 und 17 leicht verdeutlichen kann – eine mit steigendem Lohnsatz zunächst positiv ansteigende Arbeitsangebotsfunktion, die dann ab einem bestimmten Lohnsatz umschlägt in eine Arbeitsangebotsfunktion mit negativem Anstieg. Im englischen Sprachraum wird diese Kurve als „backward–bending labor supply curve" bezeichnet. Aus dieser Arbeitsangebotskurve ergeben sich möglicherweise für die Stabilität des Arbeitsmarktes Probleme.

21. Analytische Ableitung des Arbeitsangebotes. Die Arbeitsangebotsfunktion des Haushaltes kann ebenso wie die Güternachfragefunktion aus einer Nutzenfunktion unter Beachtung einer Nebenbedingung analytisch abgeleitet werden. Die Analogie läßt sich aber noch weiter verfolgen: Zunächst soll die unkompensierte Angebotsfunktion bestimmt werden und dann eine kompensierte Arbeitsangebotsfunktion, bei der Lohnsatzänderungen durch gedachte positive oder negative Kompensationen ein unverändertes Nutzenniveau beibehalten.

Zur analytischen Ableitung der Arbeitsangebotsfunktion sei die einfache Nutzenfunktion

$$U = cT^f \tag{99}$$

angenommen, die unter der Einkommensnebenbedingung

$$pc = l(\bar{T} - T^f) + y^i \tag{100}$$

zu maximieren ist. Die Lagrangefunktion lautet folglich:

$$\mathcal{L}(c, T^f, \lambda) = c \cdot T^f + \lambda \left(pc - l(\bar{T} - T^f) - y^i\right) \tag{101}$$

und die partiellen Ableitungen der Lagrangefunktion:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c} &= T^f + \lambda p \quad = 0, \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial T^f} &= c + \lambda l \quad = 0, \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} &= pc - l(\bar{T} - T^f) - y^i \quad = 0. \end{aligned}$$

Aus den partiellen Ableitungen nach c und T^f erhält man

$$c = T^f l/p \tag{102}$$

und aus der partiellen Ableitung nach λ

$$c = \frac{l}{p}(\bar{T} - T^f) + \frac{1}{p}y^i. \tag{103}$$

Ersetzt man in (102) T^f durch $T - T^a$ und in (103) $T - T^f$ durch T^a und setzt beide gleich, so ergibt sich die Arbeitsangebotsfunktion

$$T^{a^*} = (\bar{T} - y^i/l)/2. \tag{104}$$

Das Arbeitsangebot T^{a^*} – genauer gesagt, die nutzenmaximal angebotene Arbeitszeit – ist um so größer, je kleiner das Nichtarbeitseinkommen y^i und je größer der Lohnsatz l sind.

Zur Ableitung des kompensierten Arbeitsangebotes ist das Dualproblem zum oben formulierten Primalproblem (Maximierungsproblem) zu bilden. Die Einkommensfunktion, bei der die Kompensation über y_i stattfindet,

$$y^i = pc - l(\bar{T} - T^f) \tag{105}$$

wird unter der Nebenbedingung eines konstanten Nutzenniveaus

$$\bar{U} = cT^f \tag{106}$$

minimiert. Die Lagrangefunktion lautet in diesem Fall

$$\mathcal{L}(c, T^f, \mu) = pc - l(\bar{T} - T^f) + \mu(\bar{U} - cT^f) \tag{107}$$

und die partiellen Ableitungen

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c} &= p - \mu T^f \quad = 0, \\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial T^f} &= l - \mu c \quad = 0, \\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mu} &= \bar{U} - cT^f \quad = 0.
\end{aligned}$$

Aus den partiellen Ableitungen nach c und T^f erhält man wiederum

$$c = T^f l/p \tag{102}$$

und aus der partiellen Ableitung nach μ

$$c = \bar{U}/T^f. \tag{108}$$

Ersetzt man in beiden Gleichungen T^f durch $\bar{T} - T^a$ und setzt sie gleich, so ergibt sich das kompensierte Arbeitsangebot von

$$T_k^{a^*} = \bar{T} - \sqrt{\bar{U}p/l}. \tag{109}$$

Je höher der Lohnsatz l und je niedriger das angestrebte Nutzenniveau $\bar{U}$ sind, umso größer ist das Arbeitsangebot des Haushaltes. Der Leser mag selbst überprüfen, daß im Primal– und Dualproblem die Bedingungen zweiter Ordnung erfüllt sind.

22. Einkommens- und Substitutionseffekt bei Lohnsatzänderungen. Nach diesen Vorüberlegungen kann die Slutzky–Gleichung zur Aufspaltung von Einkommens- und Substitutionseffekt bei Lohnsatzänderungen formuliert werden. Allgemein lautet die Arbeitsangebotsfunktion aus dem Primalproblem

$$T^{a^*} = T^a(l, \bar{y}^i) \tag{110}$$

und die kompensierte Arbeitsangebotsfunktion aus dem Dualproblem

$$T_k^{a^*} = T_k^a(l, \bar{U}). \tag{111}$$

Nach Gleichung (105) gilt aber auch $y^i(l)$, und somit

$$T_k^{a^*}(l, \bar{U}) = T^{a^*}\left(l, y^i(l)\right). \tag{112}$$

Die partielle Ableitung von (112) nach l ergibt

$$\frac{\partial T_k^{a^*}}{\partial l} = \frac{\partial T^{a^*}}{\partial l} + \frac{\partial T^{a^*}}{\partial y^i} \cdot \frac{\partial y^i}{\partial l} \tag{113}$$

oder

$$\left.\frac{dT_k^{a^*}}{dl}\right|_{dU=0} = \left.\frac{dT^{a^*}}{dl}\right|_{dy^i=0} + \left(\left.\frac{dT^{a^*}}{dy^i}\right|_{dl=0}\right)\left(\left.\frac{dy^i}{dl}\right|_{dU=0}\right). \tag{114}$$

Unter Berücksichtigung der Tatsache, daß $dy^i/dl = -T^{a^*}$ ist, ergibt sich schließlich

$$\underbrace{\left.\frac{dT^{a^*}}{dl}\right|_{dy^i=0}}_{\substack{\text{Steigung der}\\ \text{unkompensier-}\\ \text{ten Angebots-}\\ \text{funktion (Ge-}\\ \text{samteffekt)}}} = \underbrace{\left.\frac{dT_k^{a^*}}{dl}\right|_{dU=0}}_{\substack{\text{Steigung der}\\ \text{kompensierten}\\ \text{Angebotsfunkti-}\\ \text{on (Substituti-}\\ \text{onseffekt)}}} \underbrace{-\left(-T^{a^*}\right)\left(\left.\frac{dT^{a^*}}{dy^i}\right|_{dl=0}\right)}_{\substack{\text{Gleichgewichtsangebot}\\ \text{mal Steigung der Ar-}\\ \text{beitsangebotsfunktion}\\ \text{bezüglich } y^i \text{ (Einkom-}\\ \text{menseffekt)}}} \tag{115}$$

Über die Vorzeichen der einzelnen Terme können wir sagen:

— Die angebotene Arbeitszeit (Arbeitsmenge) ist immer positiv definiert.

— Die Steigung der Arbeitsangebotsfunktion bezüglich y^i ist immer negativ.

— Die Steigung der kompensierten Arbeitsangebotsfunktion ist immer positiv.

Daraus ergibt sich, daß die Steigung der Arbeitsangebotsfunktion ungewiß ist; sie kann sowohl positiv als auch negativ sein. Das Ergebnis hängt von der relativen Stärke der oben aufgeführten Einzeleffekte ab. Damit gelangen wir zum gleichen Resultat wie mit Hilfe der graphischen Methode in Abschnitt 20.

23. Intertemporaler Konsum. Bei der Entscheidung des Haushaltes über das Arbeitsangebot ist – wie im vorangegangenen Abschnitt dargestellt wurde – ein gegebenes *Zeitbudget* auf verschiedene Aktivitäten (Arbeit und Freizeit) nutzenmaximal aufzuteilen. Die Entscheidung des Haushaltes über das Spar(–Kapital)–Angebot verlangt – wie noch zu zeigen sein wird – eine nutzenmaximale Aufteilung des Konsums auf *verschiedene Perioden*. Geht man zur Vereinfachung des Problems von zwei Perioden (1 und 2) aus, so stehen dem Haushalt prinzipiell drei mögliche Wege offen:

1. In jeder Periode wird das Einkommen vollständig für Konsumzwecke verwendet: $y_1 = p_1c_1$ und $y_2 = p_2c_2$.

2. In der ersten Periode wird ein Teil p_1c_1 des Einkommens konsumiert und ein anderer Teil s gespart: $y_1 = p_1c_1 + s$. In der zweiten Periode können zusätzlich zum Einkommen y_2 der in Periode 1 gesparte Teil des Einkommens und die darauf erhaltenen Zinsen dem Konsum zugeführt werden: $p_2c_2 = y_2+s+is$, wobei i den Sparzins (geteilt durch 100) repräsentiert. Das Kapitalangebot des Haushaltes in Periode 1 beträgt folglich s.

3. In der ersten Periode werden das gesamte Einkommen und ein Kreditbetrag von D zu Konsumzwecken verwendet: $p_1c_1 = y_1+D$. In der zweiten Periode wird der Kredit zuzüglich der angefallenen Kreditzinsen zurückgezahlt. Dieser Betrag reduziert die Konsummöglichkeiten in Periode 2: $p_2c_2 = y_2 - D - rD$, wobei r den Kreditzins (geteilt durch 100) repräsentiert. Die Geldkapitalnachfrage des Haushaltes beträgt in Periode 1 somit D.

Da wir in diesem Abschnitt zur Haushaltstheorie das Geld(–Kapital)–Angebot des Haushaltes bestimmen wollen, beschränken wir uns auf den Fall 2 der intertemporalen Aufteilung gegenwärtigen und zukünftigen Einkommens auf gegenwärtigen und zukünftigen Konsum. Nebenbei sei bemerkt, daß sich das Kapitalangebot der Haushalte durch den Kauf von Aktien direkt an die Unternehmen richten kann oder aber mittelbar über Kapitalsam-

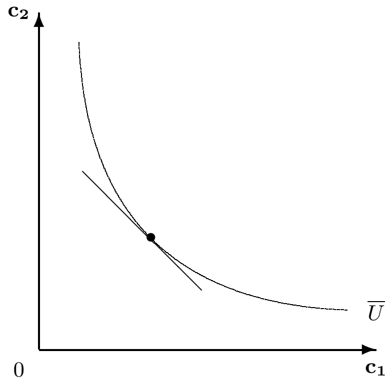


Abb. 18: Intertemporale Konsumwahl des Haushaltes

melstellen den Firmen zur Verfügung gestellt wird. Im letzten Fall bieten die Haushalte den Banken Spareinlagen an, die von den Unternehmen in Form von Krediten nachgefragt und zur Durchführung von Investitionen – also zum Aufbau von produktivem Realkapital – verwendet werden.

Der Haushalt verfügt über Präferenzen bezüglich des gegenwärtigen und zukünftigen Konsums; einen Teil des Gesamteinkommens möchte er heute (p_1c_1) und einen anderen Teil möchte er morgen (p_2c_2) ausgeben:

$$U = U(c_1, c_2). \tag{116}$$

Wir können uns eine Indifferenzkurve in einem c_1/c_2–Diagramm vorstellen, die – analog zum Zwei–Güter–Fall bei der Haushaltsnachfrage – Kombinationen von gegenwärtigem und zukünftigem Konsum gleichen Nutzens repräsentiert. Die Grenzrate der Substitution zwischen c_1 und c_2 kann als Grenzrate der Zeitpräferenzen definiert werden. Aus dem totalen Differential von (116) erhalten wir die Steigung der Indifferenzkurve (vgl. Abbildung 18):

$$d\bar{U} = \frac{\partial U}{\partial c_1} dc_1 + \frac{\partial U}{\partial c_2} dc_2 = 0 \tag{117}$$

oder die Grenzrate der Zeitpräferenz des Haushaltes

$$-\frac{dc_2}{dc_1} = \frac{\partial U}{\partial c_1} / \frac{\partial U}{\partial c_2}. \tag{118}$$

Satz: *Die Grenzrate der Zeitpräferenzen ist um so größer (d.h. die Steigung* *der Indifferenzkurve ist absolut um so größer), je stärker die Vorliebe des Haushaltes für gegenwärtigen Konsum ist, et vice versa.*

Mit anderen Worten: Je stärker die Gegenwartsvorliebe des Haushaltes ist, um so mehr zukünftigen Konsum muß er durch die Aufgabe einer Einheit des gegenwärtigen Konsums unter der Bedingung erlangen, daß sein Nutzenniveau unverändert bleibt.

Die intertemporale Budgetlinie, also die durch Einkommen, Preise und Zinssätze bestimmte Restriktion unseres intertemporalen Nutzenmaximierungsproblems im c_1/c_2–Diagramm, kann wie folgt – Sparen in der ersten Periode vorausgesetzt – formuliert werden:

$$p_2 c_2 = y_2 + (1+i)s. \tag{119}$$

Da $s \equiv y_1 - p_1 c_1$ ist, läßt sich die Restriktion zu

$$p_2 c_2 = y_2 + (1+i)(y_1 - p_1 c_1) \tag{120}$$

umformulieren. Unter Verwendung der Inflationsrate $\pi = (p_2 - p_1)/p_1$ oder $p_2 = (1+\pi)p_1$ kann auch

$$y_2 + (1+i)y_1 = p_1(1+\pi)c_2 + p_1(1+i)c_1 \tag{121}$$

geschrieben werden, wobei die linke Seite das aufdiskontierte Einkommen und die rechte Seite den aufdiskontierten Konsum verdeutlichen. Die Steigung der Budgetlinie dc_2/dc_1 repräsentiert das intertemporale Preisverhältnis. Zu diesem Zweck differenzieren wir die nach c_2 aufgelöste Budgetlinie nach c_1

$$\frac{dc_2}{dc_1} = -\frac{1+i}{1+\pi}. \tag{122}$$

Die Gleichung (122) gibt die realen Kosten einer zusätzlichen Konsumeinheit heute in zukünftigen Konsumpreisen an. Da die Inflationsrate $\pi = (p_2 - p_1)/p_1$ beträgt, steht auf der rechten Seite der Gleichung auch $-(1+i)p_1/p_2$. Kauft der Haushalt heute ein Güterbündel zum Preis von p_1, so setzen sich die Kosten aus p_1 und dem Zinsverlust ip_1 zusammen, da der Betrag alternativ auch hätte gespart werden können. Diese Kosten werden dem Preis p_2 des Güterbündels in der Periode 2 gegenübergestellt; der Quotient der beiden Terme ergibt das intertemporale Preisverhältnis. Der Preis des gegenwärtigen Konsums wird bestimmt durch den Sparzinssatz, der des zukünftigen Konsums durch die Inflationsrate.

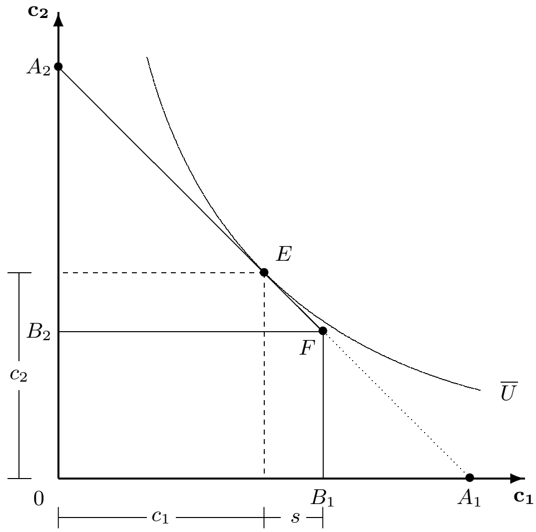


Abb. 19: Ableitung des Sparkapitalangebotes

24. Kapitalangebot des Haushaltes. Die graphische Ableitung des nutzenmaximalen Kapitalangebotes eines Haushaltes läßt sich durch die Berücksichtigung der intertemporalen Budgetrestriktion in Abbildung 19 durchführen. Die Endpunkte der Budgetrestriktion auf der c_1– und c_2–Achse lauten:

$$A_1 = (y_2 + (1+i)y_1)/(1+i)p_1, \tag{123}$$

$$A_2 = (y_2 + (1+i)y_1)/(1+\pi)p_1 \tag{124}$$

und der Punkt im c_1/c_2–Diagramm, an dem $s = 0$ beträgt: $B_1 = y_1/p_1$ sowie $B_2 = y_2/p_2$.

Die Höhe des Sparbetrages hängt – wie man aus Abbildung 19 erkennen kann – von der Lage der Indifferenzkurve ab. Ist $c_1 > B_1$, so wird in der Periode 1 ein Kredit aufgenommen, der in der Periode 2 zuzüglich Zinsen zurückgezahlt werden muß, also gilt: $c_2 < B_2$. Ist – wie in Abbildung 19 dargestellt – $c_1 < B_1$, so wird der Betrag s in der Periode 1 gespart und kann in Periode 2 zuzüglich Zinsen dem Konsum zugeführt werden: $c_2 > B_2$. Die Steigung der Budgetgeraden zwischen A_2 und F beträgt $(1+i)/(1+\pi)$. Die gestrichelte Hilfslinie FA_1 hat keine ökonomische Bedeutung, da in diesem Bereich ein Kredit genommen werden müßte und wegen $i \neq r$ eine andere Steigung entsteht.

Mit Hilfe der Lagrangefunktion kann das Kapitalangebot des Haushaltes auch analytisch bestimmt werden. Zu diesem Zweck nehmen wir die einfache Nutzenfunktion

$$U = c_1^{\frac{1}{2}} \cdot c_2^{\frac{1}{2}} \tag{125}$$

an und formulieren unter Hinzuziehung der Restriktion (121) die Lagrangefunktion

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(c_1, c_2, \lambda) &= c_1^{\frac{1}{2}} c_2^{\frac{1}{2}} + \lambda(y_2 + y_1(1+i) \\ &- p_1(1+\pi)c_2 - p_1(1+i)c_1). \end{aligned} \tag{126}$$

Die Bedingungen erster Ordnung lauten

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c_1} = \frac{1}{2} \frac{c_2^{\frac{1}{2}}}{c_1^{\frac{1}{2}}} - \lambda p_1(1+i) \quad = 0,$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c_2} = \frac{1}{2} \frac{c_1^{\frac{1}{2}}}{c_2^{\frac{1}{2}}} - \lambda p_1(1+\pi) \quad = 0,$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = y_2 + y_1(1+i) - p_1(1+\pi)c_2 - p_1(1+i)c_1 = 0.$$

Werden die ersten partiellen Ableitungen nach c_1 und c_2 nach λ aufgelöst, gleichgesetzt und umgeformt, so erhält man für c_2

$$c_2^* = \frac{1+i}{1+\pi} c_1^*. \tag{127}$$

Setzt man diesen Ausdruck für c_2^* in die partielle Ableitung nach λ ein, so ergibt sich

$$y_2 + (1+i)y_1 - p_1(1+i)c_1^* - p_1(1+i)c_1^* = 0 \tag{128}$$

oder, unter Verwendung von $s^* = y_1 - p_1 c_1^*$ und bei Division durch $1+i$,

$$y_2/(1+i) - p_1 c_1^* + s^* = 0. \tag{129}$$

Das nutzenmaximale Angebot an Sparkapital in Periode 1 beträgt somit

$$s^* = p_1 c_1^* - y_2/(1+i). \tag{130}$$

Aufgrund der angenommenen Nutzenfunktion – andere Funktionstypen führen auch zu anderen Ergebnissen – kann gesagt werden, daß jene Sparsumme am Kapitalmarkt angeboten wird, die gleich dem nutzenmaximalen Konsum der Periode 1 abzüglich dem auf die Periode 1 abgezinsten Einkommen der Periode 2 ist.

Mit diesen Ausführungen zum Kapitalangebot des Haushaltes wollen wir nicht nur den Abschnitt über das Faktorangebot, sondern auch das Kapitel Haushaltstheorie abschließen. Nicht behandelt wurde die Theorie der Revealed Preferences und die Fragen der Besteuerung von Haushalten (Konsumsteuer und Einkommensteuer). In allen Abschnitten wurde davon ausgegangen, daß Preise und Einkommen mit Sicherheit bekannt sind. In Abschnitt 54 des Kapitels 4 werden auch Wirkungen von Konsumaktivitäten diskutiert, die ein anderer Haushalt als positiv oder negativ wahrnimmt und für die er – da ein entsprechender Markt fehlt – weder ein Entgelt zu entrichten hat noch eine Entschädigung erhält. Derartige Wirkungen, die aber auch von Unternehmen ausgehen können, bezeichnen wir in der Ökonomie als externe Effekte. Im folgenden Kapitel „Theorie der Firma“ wird deutlich werden, daß wir die formalen Grundstrukturen, die zur Lösung der Probleme in der Haushaltstheorie beigetragen haben, weitgehend auch auf die Fragestellungen der Produktionstheorie übertragen können.

Literaturhinweise zu Kapitel 2:

— Böventer, E. von/Illing, R.-G., *Einführung in die Mikroökonomie*, 9. Aufl., München/Wien 1997.

— Henderson, J. M./Quandt, R. E., *Mikroökonomische Theorie*, 5. Aufl., München 1983.

— Kogiku, K. C., *Microeconomic Models*, New York usw. 1971.

— Koutsoyiannis, A., *Modern Microeconomics*, 2. Aufl., London usw. 1979.

— Schumann, J./Meyer, U./Ströbele, W., *Grundzüge der mikroökonomischen Theorie*, 7. Aufl., Berlin/Heidelberg 1999.

3 Theorie der Firma

25. Definition. Unter einer Firma verstehen wir den ökonomischen Ort der Produktion von Gütern. Aus institutioneller Sicht kann es sich dabei um eine Einpersonenfirma oder einen Großkonzern oder jede dazwischen angesiedelte Größenordnung handeln. Der Begriff der Produktion umfaßt sowohl die Herstellung von Gütern im engeren Sinn als auch Handel und Dienstleistungen; die Begriffe Unternehmen und Firma werden – im Unterschied zur Betriebswirtschaftslehre – bedeutungsgleich verwendet. Aus den Überlegungen ausgeklammert werden sollen Produktionsvorgänge im Haushalt (das Kuchenbacken der Hausfrau, die Reparaturen des Heimwerkers). Damit können wir Unternehmen auch als Institutionen der räumlich und organisatorisch ausgelagerten „Haushaltsproduktion“ verstehen. Die Gründe für die Auslagerung sind in den ökonomischen Vorteilen einer Zusammenfassung von Produktionsprozessen zu sehen. Somit können wir eine weitere Schlußfolgerung ziehen: Die Existenz von Firmen leitet sich aus der Tatsache ab, daß diese Güter – gleiche Qualität vorausgesetzt – zu geringeren Kosten herstellen können als private Haushalte. Unter Produktion verstehen wir die technische Transformation von Inputgütern in Outputgüter. Inputgüter sind Arbeit (dispositive und ausführende Tätigkeit) und Kapital (Maschinen, Anlagen, Gebäude, Rohstoffe, Energie) sowie Boden (als Standort, als Anbauboden in der Landwirtschaft oder als Abbaumedium in der Grundstoffindustrie); Outputgüter sind physische Produkte (Autos, Textilien, Feldfrüchte) oder Handels- und Dienstleistungen (Einzelhandel, Theateraufführungen, Bestattungsleistungen).

3.1 Produktion der Firma

26. Allgemeine Produktionsfunktion. Die technische Beziehung zwischen Input– und Outputgütern bezeichnen wir als Produktionsfunktion, genauer gesagt, die Outputmenge q ist eine Funktion der variablen Faktormengen $v_1, \cdots, v_n$.

$$q = f(v_1, \cdots, v_n), \quad \partial q/\partial v_i > 0, \quad i = 1, \cdots, n. \tag{131}$$

Es wird allgemein angenommen, daß eine gegebene Faktorkombination mit unterschiedlicher Intensität genutzt werden kann, und somit auch zu verschiedenen Outputmengen führen kann. Das Konzept der Produktionsfunktion schließt diese Möglichkeiten aus, da von einer technisch effizienten Produktion ausgegangen und einer gegebenen Faktorkombination der technisch maximal mögliche Output zugeordnet wird. Davon zu unterscheiden ist der Sachverhalt, daß ein gegebenes Produktionsziel mit unterschiedlichen Faktorkombinationen erreicht werden kann. Die Frage, welche Inputmengenkombination tatsächlich eingesetzt wird, ist eine Frage der ökonomisch effizienten Produktion und Gegenstand dieses Kapitels. Im Gegensatz zur Nutzenfunktion ist bei der Produktionsfunktion nicht nur der Input, sondern auch der Output kardinal in Mengeneinheiten meßbar. Input- und Outputmengen sind Stromgrößen je Zeiteinheit. Der Faktor Arbeit kann in Anzahl der Arbeiter, Anzahl der geleisteten Arbeitsstunden oder Arbeitstage angegeben und der Faktor Kapital kann durch den Kapitalverzehr je Zeiteinheit oder durch die Abschreibung operationalisiert werden. Für die nachfolgende Analyse ist es ferner nützlich, zwischen kurzfristigen Produktionszeiträumen und langfristigen Produktionszeiträumen zu unterscheiden. Kurzfristig können die Faktoreinsatzmengen einiger Produktionsfaktoren als nicht variierbar angesehen werden; langfristig sollen alle Inputmengen als variabel angenommen werden. Schließlich ist zu berücksichtigen, daß sich für sehr lange Produktionszeiträume die Produktionsfunktion durch technischen Fortschritt ändern kann.

Es ist zweckmäßig, zunächst einige Definitionen einzufügen, die in den nachfolgenden Überlegungen wiederholt Verwendung finden. Unter der *Durchschnittsproduktivität* des Faktors i versteht man das Gesamtprodukt, dividiert durch die Einsatzmenge des Faktors i, bei Konstanz aller anderen Faktoren

$$\frac{f(\bar{v}_1, \cdots, v_i, \cdots, \bar{v}_n)}{v_i} = \frac{q}{v_i}. \tag{132}$$

Die *Grenzproduktivität* des Faktors i ist definiert als die Veränderungsrate der Gesamtproduktivität bezüglich einer Mengenvariation des Faktors v_i bei Konstanz aller anderen Faktoren (partielle Ableitung der Produktionsfunktion nach v_i)

$$f_{v_i}(\bar{v}_1, \cdots, v_i, \cdots, \bar{v}_n) = \frac{\partial q}{\partial v_i}. \tag{133}$$

Die *Produktionselastizität* des Faktors v_i bezeichnet das Verhältnis der relativen Änderungen des Outputs zur relativen Änderung des Inputs v_i.

$$\epsilon_{q,v_i} = \frac{\partial q}{q} / \frac{\partial v_i}{v_i} = \frac{v_i}{q} \cdot \frac{\partial q}{\partial v_i} = \frac{v_i \cdot f_i(.)}{f(.)}. \tag{134}$$

Wie man leicht erkennen kann, setzt sich die partielle Produktionselastizität eines Faktors aus dem Produkt von partieller Grenzproduktivität und dem reziproken Wert der Durchschnittsproduktivität zusammen.

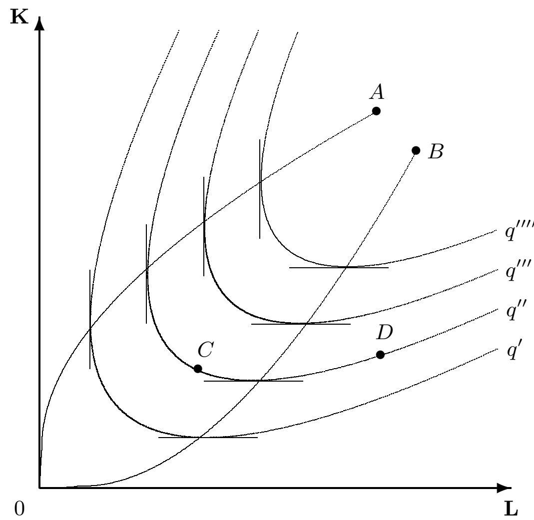


Abb. 20: Darstellung der Isoquanten

27. Isoquanten. Über den Verlauf der Gesamtproduktivität, der Grenz- und Durchschnittsproduktivitäten können verschiedene Annahmen getroffen werden. Die Gesamtproduktion kann mit zunehmenden, gleichbleibenden oder abnehmenden Ertragszuwächsen monoton ansteigen. Wenn wir die Analyse auf zwei Inputfaktoren, etwa v_1 = Kapital (K) und v_2 = Arbeit (L), beschränken, lassen sich in einem K/L-Diagramm Kurven gleichen Outputs konstruieren:

$$\bar{q} = f(K, L) = const. \tag{135}$$

Diese üblicherweise konvex verlaufenden Kurven, die durch die Menge aller Kombinationen von Arbeit und Kapital gebildet werden, die den gleichen

Output entstehen lassen, werden als *Isoquanten* bezeichnet. In Abbildung 20 sind vier Isoquanten eingezeichnet, für die gilt $q' < q'' < q''' < q''''$. Die Kammlinien $0A$ und $0B$ begrenzen das Gebiet der technisch sinnvollen Faktormengenkombinationen in Abbildung 20. Dieser Sachverhalt wird durch den Vergleich der Inputkombinationen C und D zur Herstellung der Gütermenge q'' unmittelbar deutlich: Es gilt sowohl $K^D > K^C$ als auch $L^D > L^C$ bei $q'' = const.$ Damit liegt die Kombination D außerhalb des Bereichs aller technisch sinnvollen Faktorkombinationen. Die Isoquanten im Bereich technisch sinnvoller Faktorkombinationen haben einen negativen Anstieg. Differenziert man

$$K = q(L, \bar{q}), \quad \bar{q} = const. \tag{136}$$

nach L, so erhält man die Grenzrate der technischen Substitution

$$GRTS_{K,L} = -\left.\frac{dK}{dL}\right|_{dq=0} > 0. \tag{137}$$

Da die Isoquante konvex ist, muß ferner gelten:

$$d(-dK/dL)/dL = -d^2K/dL^2|_{dq=0} < 0. \tag{138}$$

Da die Grenzrate der technischen Substitution positiv definiert ist, bedeutet $-d^2K/dL^2 < 0$ Konvexität der Isoquante. Bildet man das totale Differential der Produktionsfunktion $q = f(L, K)$ unter Berücksichtigung der Tatsache, daß entlang einer Isoquante definitionsgemäß eine Veränderung des Outputniveaus unterbleibt ($dq = 0$), so erhält man:

$$dq = \frac{\partial q}{\partial L}dL + \frac{\partial q}{\partial K}dK = 0 \tag{139}$$

oder

$$\frac{\partial q/\partial L}{\partial q/\partial K} = -\left.\frac{dK}{dL}\right|_{dq=0} = GRTS_{K,L} \tag{139'}$$

Satz: *Die Grenzrate der technischen Substitution ist gleich dem umgekehrten Verhältnis der partiellen Grenzproduktivitäten der Faktoren.*

Die Produktionsfunktion ist im Falle zweier Inputfaktoren, Arbeit (L) und Kapital (K), streng konkav, wenn gilt:

$$d^2q/dK^2 < 0, \qquad d^2q/dL^2 < 0 \tag{140}$$

und

$$\left(\frac{d^2q}{dK^2}\right)\left(\frac{d^2q}{dL^2}\right) - \left(\frac{d^2q}{dKdL}\right)^2 > 0. \tag{141}$$

Die *Substitutionselastizität* σ ist eine Maßzahl für die technische Substituierbarkeit und ist definiert als relative Veränderungsrate der Faktoreinsatzverhältnisse zu der relativen Veränderungsrate der Grenzrate der technischen Substitution:

$$\sigma = \frac{d\,(K/L)}{K/L} \Big/ \frac{d\,(dK/dL)}{dK/dL}. \tag{142}$$

Es kann sich als zweckmäßig erweisen, den Ausdruck in (142) umzuformen in:

$$\sigma = \frac{d(K/L)}{K/L}\frac{dK/dL}{d(dK/dL)}. \tag{143}$$

Die Substitutionselastizität σ ist geeignet, unterschiedliche Klassen von Produktionsfunktionen zu kennzeichnen. Graphisch kann sie auch als Maß für die Krümmung der Isoquanten interpretiert werden:

$\sigma = 0$	Die Isoquanten zeigen einen rechtwinkligen Verlauf, wie dies bei der Leontief–Funktion der Fall ist. Eine Substitution der Faktoren ist nicht möglich.
$0 < \sigma \leq 1$	Die Isoquanten sind konvex und schneiden die Achsen nicht. Jeder Faktor ist zur Produktion notwendig und kann nicht vollständig durch den anderen ersetzt werden.
$1 < \sigma < \infty$	Die Isoquanten sind konvex und schneiden die Achsen. Jeder Faktor kann durch den anderen vollständig ersetzt werden.
$\sigma \to \infty$	Die Isoquanten sind Geraden und schneiden die Achsen. Die Faktoren sind vollkommene Substitute.

28. Kurzfristige Produktionsvariation. Die Produktion von Gütern findet in einem bestimmten Zeitraum statt. Wählt man einen sehr kurzen Betrachtungszeitraum, so muß festgestellt werden, daß nur ein Teil der Produktionsfaktoren variierbar (Arbeitsstunden, Rohmaterial etc.), während ein anderer Teil fest vorgegeben ist (Gebäudenutzung, Maschinennutzung etc.). Längerfristig können Maschinen durch andere ersetzt und Gebäude in ihrer Zweckbestimmung verändert werden, so daß man davon ausgehen kann, daß langfristig alle Produktionsfaktoren variabel sind. Nimmt man vereinfachend an, daß kurzfristig der Kapitaleinsatz unveränderlich und der Arbeitseinsatz variierbar sei (eine Annahme, die für den Fall langfristiger Arbeitsverträge und eines funktionierenden Marktes für Kapitalgüter auch

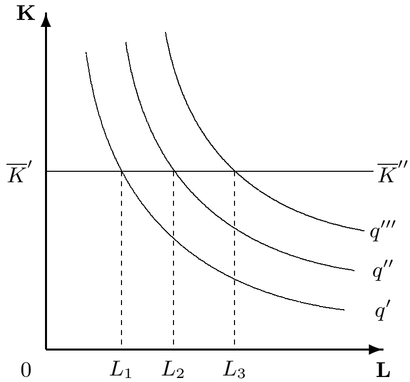


Abb. 21: Kurzfristige Variation der Produktion

umgekehrt formuliert werden kann), so ist die Veränderung des Outputniveaus nur über die Variation des Inputfaktors Arbeit zu erreichen:

$$q = f(L, \bar{K}) \quad = q(L). \tag{144}$$

Dieser Sachverhalt wird in Abbildung 21 verdeutlicht. Die Ausweitung der Produktion erfolgt entlang der Linie $\overline{K}'\overline{K}''$ durch den Übergang von L_1 auf L_3 bei unveränderlichem Kapitaleinsatz $\bar{K}$. Kurzfristige Outputvariationen im beschriebenen Sinne können insbesondere dann als sinnvoll erachtet werden, wenn die Ursachen für die Produktionsanpassungen ebenfalls kurzfristiger Natur sind, wie z.B. saisonale Nachfrageschwankungen.

29. Langfristige Produktionsvariation. Für die langfristige Betrachtung von Produktionsprozessen stellt sich die Frage, um wieviel Prozent sich der Output bei einer x-prozentigen Änderung *aller* Produktionsfaktoren ändert. Üblicherweise wird diese Frage unter der Annahme homogener Produktionsfunktionen vom Grade k diskutiert. Eine Funktion ist homogen vom Grade k, wenn gilt:

$$f(v_1, \cdots, v_n) = f(\alpha v_1^\circ, \cdots, \alpha v_n^\circ) = \alpha^k f(v_1^\circ, \cdots, v_n^\circ), \tag{145}$$

wobei v_1° bis v_n° beliebige Ausgangsniveaus der Produktionsfaktoren darstellen. In Worte gefaßt bedeutet Gleichung (145): Werden die gegebenen Inputs v_1° bis v_n° um einen Faktor α vervielfacht, so ändert sich der Output um α^k in die gleiche Richtung ($\alpha > 0$). Drei Fälle kann man hinsichtlich k unterscheiden:

$k = 1$: Die Produktionsfunktion ist linear homogen oder homogen vom Grade 1. Man spricht in diesem Fall von konstanten Skalenerträgen oder „constant returns to scale“. Die in Abbildung 22 eingezeichneten Isoquanten weisen bei gleichen Outputänderungen gleiche Abstände auf. Die produzierte Gütermenge hängt damit linear von dem Faktor α ab, mit dem alle Faktoren multipliziert werden.

$0 < k < 1$: Die Produktionsfunktion ist unterlinear homogen. In diesem Fall liegen sinkende Skalenerträge oder „decreasing returns to scale“ vor. Die Isoquanten in Abbildung 23 weisen, vom Ursprung aus gesehen, für gleiche Outputänderungen zunehmende Abstände auf. Die produzierte Gütermenge nimmt mit wachsendem α immer weniger zu.

$k > 1$: Die Produktionsfunktion ist überlinear homogen und weist zunehmende Skalenerträge oder „increasing returns to scale“ auf. Die Isoquanten in Abbildung 24 weisen, vom Ursprung aus gesehen, für gleiche Outputänderungen sinkende Abstände auf. Die Menge des produzierten Gutes steigt mit wachsendem α immer stärker.

Homogene Produktionsfunktionen haben einige interessante Eigenschaften, die unter dem Stichwort Euler-Theorem zusammengefaßt und nachfolgend diskutiert werden sollen. Die Skalenelastizität gibt an, um wieviel sich der Output bei einer α-prozentigen Änderung aller Inputs ändert; sie ist für eine homogene Produktionsfunktion

$$\vartheta_\alpha = \frac{dq}{d\alpha}\;\frac{\alpha}{q} = \frac{\alpha \cdot k \cdot \alpha^{k-1} f(v_1, \cdots, v_n)}{\alpha^k f(v_1, \cdots, v_n)} = k \qquad (146)$$

gleich dem Grad der Homogenität dieser Produktionsfunktion. Ferner kann gezeigt werden, daß die Summe der partiellen Produktionselastizitäten für alle Faktoren $v_1 \cdots v_n$ gleich der Skalenelastizität ist. Aus Gleichung (145) folgt unmittelbar: $v_i = \alpha v_i^\circ$ und $dv_i = v_i^\circ d\alpha$. Ersetzt man in dem zweiten Ausdruck v_i° durch v_i/α, so erhält man durch Umformen: $dv_i = v_i(d\alpha/\alpha)$; setzt man diesen Ausdruck in das totale Differential der Produktionsfunktion ein

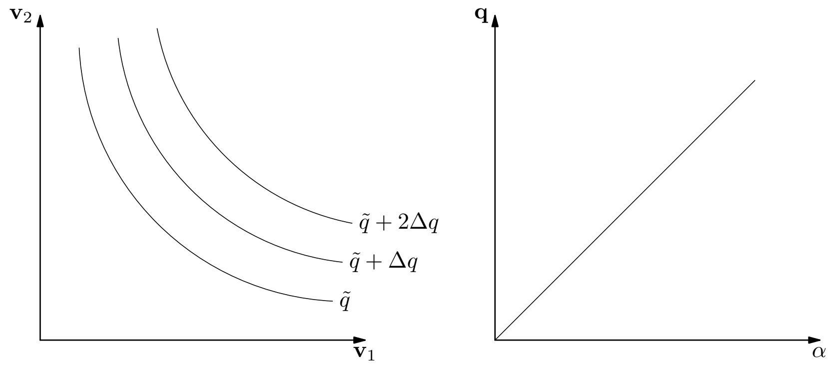


Abb. 22: Konstante Skalenerträge ($k = 1$)

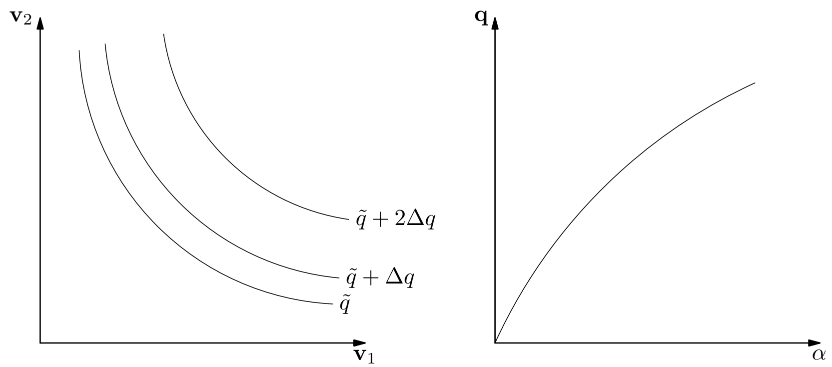


Abb. 23: Sinkende Skalenerträge ($k < 1$)

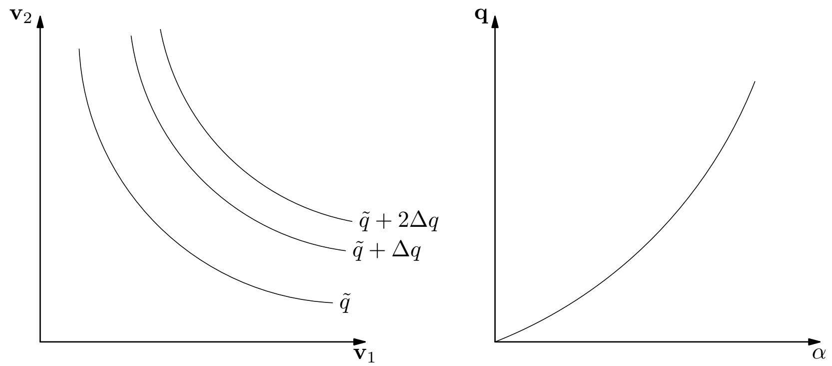


Abb. 24: Steigende Skalenerträge ($k > 1$)

$$
\begin{aligned}
dq &= \frac{\partial q}{\partial v_1} dv_1 + \cdots + \frac{\partial q}{\partial v_n} dv_n, \\
dq &= \frac{\partial q}{\partial v_1} v_1 \frac{d\alpha}{\alpha} + \cdots + \frac{\partial q}{\partial v_n} v_n \frac{d\alpha}{\alpha}, \\
dq &= \frac{d\alpha}{\alpha} \left(\frac{\partial q}{\partial v_1} v_1 + \cdots + \frac{\partial q}{\partial v_n} v_n \right),
\end{aligned}
\tag{147}
$$

und dividiert man beide Seiten durch den Output q, so ergibt sich:

$$
\frac{dq}{d\alpha} \cdot \frac{\alpha}{q} = \frac{\partial q}{\partial v_1} \frac{v_1}{q} + \cdots + \frac{\partial q}{\partial v_n} \frac{v_n}{q} = k. \tag{148}
$$

Damit ist gezeigt, daß die Skalenelastizität k gleich der Summe der in (134) definierten partiellen Produktionselastizitäten ist. Multipliziert man beide Seiten wiederum mit q

$$
\frac{\partial q}{\partial v_1} v_1 + \cdots + \frac{\partial q}{\partial v_n} v_n = kq, \tag{149}
$$

so erhält man einen für die neoklassische Ökonomie wichtigen Zusammenhang. Wenn – wie später noch gezeigt werden wird – die partielle Grenzproduktivität eines Faktors $\partial q / \partial v_i$ gleich der realen Entlohnung dieses Faktors für eine Inputeinheit ist, so stellt das Produkt $(\partial q / \partial v_i) v_i$ die gesamte Entlohnung des Faktors v_i dar und die linke Seite der Gleichung (149) die Summe der realen Faktorentlohnungen, die gleich dem k-fachen des realen Outputs ist. Bei $k = 1$ wird der Output vollständig zur Faktorentlohnung verwendet, und für $k > 1$ ergeben sich reale Verluste bzw. für $k < 1$ reale Gewinne der Firma.

Langfristig sind nicht nur alle Produktionsfaktoren variabel, sondern es können sich auch ihre Qualitäten ändern. Bei einer qualitativen Verbesserung des Faktors Kapital sprechen wir von technischem Fortschritt; eine gründlichere Ausbildung der Arbeiter verbessert die Qualität des Faktors Arbeit. In beiden Fällen kann der gleiche Output mit geringerem Input oder – was gleichbedeutend ist – mit gleichem Input ein höherer Output erzeugt werden. Die Isoquanten verschieben sich in einem Zwei-Faktor-Diagramm zum Ursprung hin. Auf die verschiedenen Formen des technischen Fortschritts soll hier nicht eingegangen werden und stattdessen auf die ausführliche Behandlung dieser Frage im Rahmen der Wachstumstheorie verwiesen werden.

30. Cobb-Douglas-Funktion. Nach den allgemeinen Vorüberlegungen zu Produktionsfunktionen sollen nunmehr einige in der Literatur häufig verwendete Funktionstypen vorgestellt und die Eigenschaften dieser Funktionen diskutiert werden. In diesem Zusammenhang genügt es, wenn wir uns auf die Faktoren Arbeit (L) und Kapital (K) beschränken.

Die Cobb-Douglas-Funktion, benannt nach den amerikanischen Forschern Paul H. Cobb und Charles W. Douglas, verbindet die Faktoren multiplikativ und gewichtet sie exponentiell:

$$q = aL^{\beta}K^{\gamma}, \qquad \beta > 0, \quad \gamma > 0, \ \ a > 0, \tag{150}$$

wobei a ein Niveauparameter ist und somit die unterschiedlichen Dimensionen von Input und Output aneinander angleicht. Der Einsatz nur eines Produktionsfaktors erlaubt keinen Output größer Null ($0 = aL^{\beta}0^{\gamma} = a0^{\beta}K^{\gamma}$). Die Durchschnittsproduktivitäten der Faktoren lauten

$$\frac{q}{L} = aL^{\beta-1}K^{\gamma}; \quad \frac{q}{K} = aL^{\beta}K^{\gamma-1} \tag{151}$$

und die Grenzproduktivitäten:

$$\frac{\partial q}{\partial L} = \beta\frac{q}{L}; \quad \frac{\partial q}{\partial K} = \gamma\frac{q}{K}. \tag{152}$$

Zu prüfen ist, ob es sich bei der Cobb-Douglas-Funktion um eine homogene Funktion handelt. Vervielfacht man den Faktoreinsatz L° und K° um α, so erhält man

$$q(L,K) = a(\alpha L^{\circ})^{\beta} \cdot (\alpha K^{\circ})^{\gamma} = \alpha^{\beta+\gamma} a L^{\circ\beta} K^{\circ\gamma}. \tag{153}$$

Die Cobb-Douglas-Funktion ist folglich homogen vom Grade $\beta + \alpha$; allgemein gesagt, die Summe der Exponenten einer Cobb-Douglas-Produktionsfunktion gibt ihren Homogenitätsgrad an: $\beta + \gamma = k$. Damit können alle Schlußfolgerungen, die in Abschnitt 29 für homogene Produktionsfunktionen diskutiert worden sind, auch auf die Cobb-Douglas-Funktion übertragen werden. Die Cobb-Douglas-Produktionsfunktion kann bei Variation beider Produktionsfaktoren wie in Abbildung 25 graphisch dargestellt werden. Dabei werden die partiellen Produktionselastizitäten mit $\beta = \gamma = 0,5$ angenommen und die Inputfaktoren auf zehn Einheiten begrenzt.

Die Cobb-Douglas-Funktion besitzt drei weitere interessante Eigenschaften hinsichtlich der Grenzrate der technischen Substitution, der partiellen Pro-

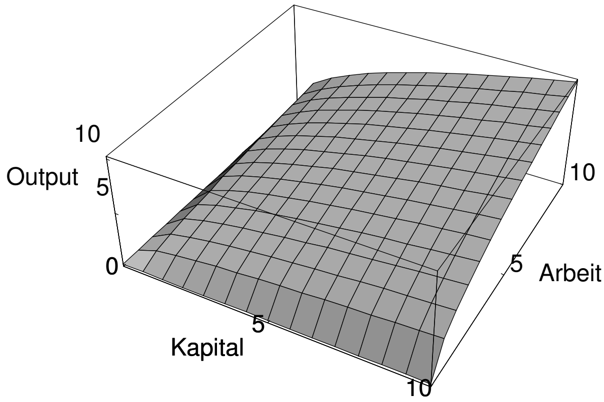


Abb. 25: Die Cobb-Douglas-Funktion

duktionselastizitäten und der Substitutionselastizität. Die partiellen Produktionselastizitäten betragen

$$\begin{aligned} \frac{\partial q}{\partial L} \cdot \frac{L}{q} &= \frac{\beta q}{L} \cdot \frac{L}{q} = \beta, \\ \frac{\partial q}{\partial K} \cdot \frac{K}{q} &= \frac{\gamma q}{K} \cdot \frac{K}{q} = \gamma \end{aligned} \tag{154}$$

und sind somit gleich den Exponenten der Produktionsfunktion. Die Grenzrate der technischen Substitution lautet

$$GRTS = \frac{\partial q}{\partial L} / \frac{\partial q}{\partial K} = \frac{\beta q K}{L \gamma q} = \frac{\beta}{\gamma} \cdot \frac{K}{L} \tag{155}$$

und setzt sich folglich aus dem Quotienten der partiellen Produktionselastizitäten und der Kapitalintensität (K/L) zusammen. Setzt man schließlich in die allgemeine Formel für die Substitutionselastizität (143) die nachstehenden speziellen Terme für die Cobb-Douglas-Funktion hinsichtlich der Grenzproduktivitäten für Arbeit und Kapital

$$\partial q / \partial L = \beta q / L; \quad \partial q / \partial K = \gamma q / K,$$

und

$$\frac{dK}{dL} = \frac{dq/dL}{dq/dK} = \frac{\beta q K}{\gamma q L} = \frac{\beta K}{\gamma L}$$

in

$$\sigma = \frac{d(K/L)}{K/L} \cdot \frac{dK/dL}{d(dK/dL)} \tag{143}$$

ein, so erhält man

$$\sigma = \frac{d(K/L)}{K/L} \cdot \frac{(\beta K)/(\gamma L)}{d((\beta K)/(\gamma L))} \quad = \quad 1, \tag{156}$$

da β und γ konstant sind. Die Substitutionselastizität jeder Cobb-Douglas-Funktion mit $\beta > 0$, $\gamma > 0$ ist konstant und beträgt genau 1. Die Isoquanten verlaufen streng konvex und nähern sich den Achsen asymptotisch an. Löst man die Cobb-Douglas-Funktion nach dem Faktor Kapital auf

$$K = (q/a)^{-1/\gamma} L^{-\beta/\gamma}$$

und bildet die zweite Ableitung nach L

$$\frac{\partial^2 K}{\partial L^2} = \frac{1}{\gamma^2} \left(\beta(\beta+\gamma)(q/a)^{-1/\gamma} L^{-(\beta+2\gamma)/\gamma} \right) > 0,$$

so ist damit der streng konvexe Verlauf der Isoquanten nachgewiesen.

Schließlich kann gezeigt werden, daß eine Cobb-Douglas-Funktion für $\beta + \gamma < 1$ streng konkav ist. Die zweiten Ableitungen der Produktionsfunktion

$$\frac{\partial^2 q}{\partial L^2} = (\beta^2 - \beta)\frac{q}{L^2} < 0, \qquad \frac{\partial^2 q}{\partial K^2} = (\gamma^2 - \gamma)\frac{q}{K^2} < 0$$

sind wegen $\beta^2 < \beta$ bzw. $\gamma^2 < \gamma$ negativ (1. Bedingung). Die Kreuzableitung ist

$$\frac{\partial^2 q}{\partial K \partial L} = \gamma\beta \frac{q}{LK},$$

und die zweite Bedingung für streng konkave Produktionsfunktionen läßt sich somit als

$$(\beta^2 - \beta)(\gamma^2 - \gamma)\frac{q^2}{L^2 K^2} - \gamma^2\beta^2 \frac{q^2}{L^2 K^2} > 0$$

oder nach Kürzen als $-\beta^2\gamma - \beta\gamma^2 + \beta\gamma > 0$ schreiben. Mit Hilfe dieser Formulierung kann festgestellt werden, daß die Funktion für $\beta + \gamma < 1$ streng konkav und für $\gamma + \beta = 1$ konkav ist.

31. CES-Funktion. Eine andere, allerdings seltener verwendete Produktionsfunktion ist die CES-Funktion (constant elasticity of substitution), die zwei Unterschiede zur Cobb-Douglas-Funktion aufweist. (1) Ihre Substitutionselastizität ist zwar ebenfalls konstant, jedoch muß sie nicht notwendigerweise 1 sein. (2) Die vorgestellte CES-Funktion ist homogen vom Grade

1, ein Sachverhalt, der für die Cobb-Douglas-Funktion nur für $\beta + \gamma = 1$ zutrifft.

Die CES-Funktion lautet:

$$q = A\left[aL^{-\rho} + (1-a)K^{-\rho}\right]^{-1/\rho} \tag{157}$$

mit den Parametern $A > 0$ und $0 < a < 1$ und ist – wie schon angekündigt – homogen vom Grade 1:

$$A\left[a(\alpha L^{\circ})^{-\rho} + (1-a)(\alpha K^{\circ})^{-\rho}\right]^{-1/\rho} = A\alpha^{1}\left[aL^{\circ^{-\rho}} + (1-a)K^{\circ^{-\rho}}\right]^{-1/\rho}. \tag{158}$$

Die weiteren Eigenschaften der Funktion können wie folgt beschrieben werden:

Die Grenzprodukte der CES-Funktion lauten:

$$\frac{\partial q}{\partial L} = -\frac{AaL^{-\rho}\left[(1-a)K^{-\rho} + aL^{-\rho}\right]^{-1/\rho}}{L\left[(a-1)K^{-\rho} - aL^{-\rho}\right]} = \frac{a}{A^{\rho}}\left(\frac{q}{L}\right)^{\rho+1} > 0 \tag{159}$$

und

$$\frac{\partial q}{\partial K} = -\frac{A(a-1)K^{-\rho}\left[(1-a)K^{-\rho} + aL^{-\rho}\right]^{-1/\rho}}{K\left[(a-1)K^{-\rho} - aL^{-\rho}\right]} = \frac{1-a}{A^{\rho}}\left(\frac{q}{K}\right)^{\rho+1} > 0. \tag{160}$$

Die Grenzrate der technischen Substitution beträgt:

$$GRTS = \frac{\partial q}{\partial L}/\frac{\partial q}{\partial K} = \frac{a}{A^{\rho}}\left(\frac{q}{L}\right)^{\rho+1}\frac{A^{\rho}}{1-a}\left(\frac{q}{K}\right)^{-\rho-1} = \frac{a}{1-a}\left(\frac{K}{L}\right)^{\rho+1}, \tag{161}$$

wobei wiederum K/L die Kapitalintensität darstellt und die GRTS negativ definiert ist. Schließlich können die partiellen Produktionselastizitäten durch

$$\frac{\partial q}{\partial L}\frac{L}{q} = \frac{a}{A^{\rho}}\cdot\left(\frac{q}{L}\right)^{\rho} \tag{162}$$

und

$$\frac{\partial q}{\partial K}\frac{K}{q} = \frac{1-a}{A^{\rho}}\cdot\left(\frac{q}{K}\right)^{\rho} \tag{163}$$

verdeutlicht werden, die offensichtlich mit der Ausdehnung der Faktoreinsatzmengen sinken. Für die Substitutionselastizität der CES-Funktion ergibt sich

$$\sigma = \frac{1}{1+\rho}, \tag{164}$$

wobei σ wegen des konstanten Exponenten ρ ebenfalls konstant ist, ein Sachverhalt, der zur Bezeichnung der Produktionsfunktion geführt hat. Schreibt man die Substitutionselastizität als

$$\sigma = \frac{d(K/L)}{d(dK/dL)} : \frac{(K/L)}{(dK/dL)},$$

wobei $dK/dL = GRTS$ ist, so können der erste Bruch mit

$$\frac{d(K/L)}{d\,GRTS} = \frac{1}{\rho+1}\frac{1-a}{a}\left(\frac{K}{L}\right)^{\rho}$$

und der zweite Bruch mit

$$\frac{(K/L)}{(dK/dL)} = \frac{1-a}{a}\left(\frac{K}{L}\right)^{\rho}$$

angegeben werden, woraus unmittelbar das Ergebnis (164) deutlich wird. Auf die Diskussion des Verlaufs der Isoquanten soll verzichtet werden.

32. Leontief-Funktion. Abschließend sollen zwei weitere Produktionsfunktionen diskutiert werden, die in gewisser Hinsicht Sonderstellungen einnehmen. Die erste, die Leontief-Funktion, die im Gegensatz zur Cobb-Douglas- oder CES-Funktion keine technisch sinnvolle Faktorsubstitution zuläßt, wird nach dem russischen Ökonomen Wassily Leontief benannt. Nach dieser Funktion kann ein bestimmtes Outputniveau q° mit einer fest vorgegebenen Faktorkombination L° und K° produziert werden. Erhöhungen von L bei fixem Einsatz von K bzw. Vermehrung von K bei unverändertem Einsatz von L verändern den Output nicht. Eine solche Produktionsfunktion bezeichnet man als limitationale Produktionsfunktion; sie verfügt über feste Inputkoeffizienten

$$a_L = L/q \quad = const. \qquad bzw. \qquad a_K = K/q \quad = const. \tag{165}$$

und konstante Durchschnittsproduktivitäten

$$1/a_L = b_L = q/L \quad = const. \qquad bzw. \qquad 1/a_K = b_K = q/K \quad = const. \tag{166}$$

Bezeichnet man den Faktorbestand mit $\bar{K}$ und $\bar{L}$, so sind jeweils gerade die Inputmengen einzusetzen, die eine effiziente Produktion gestatten ($K^\circ \leq \bar{K},\ L^\circ \leq \bar{L}$), d.h. die gerade den gewünschten Output von q° erzeugen:

$$q^\circ = b_L\ L^\circ \quad , \quad q^\circ = b_K\ K^\circ. \tag{167}$$

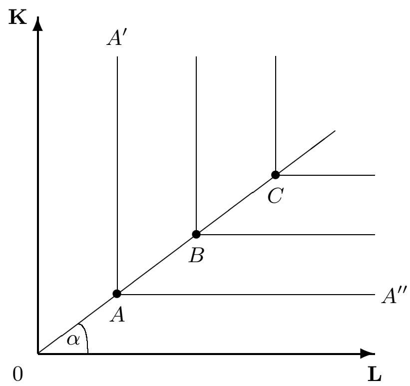


Abb. 26: Die Leontief-Produktionsfunktion

Diese Forderung kann auch als die Minimierung der Faktoreinsatzmengen auf das effiziente Maß ausgedrückt werden

$$q^\circ = \min\{b_L\bar{L},\ b_K\bar{K}\}. \tag{168}$$

Die Produktion wird auf ein bestimmtes Outputniveau begrenzt, wenn für einen der Inputfaktoren die vorhandene Faktormenge gleich der effizienten Faktormenge ist: $L^\circ = \bar{L}$ oder $K^\circ = \bar{K}$. In Abbildung 26 sind die rechtwinkligen Isoquanten der Leontief-Funktion abgebildet, wobei nur der Punkt A (oder B, C usw.) eine effiziente Produktion erlaubt. Die rechtwinklig auf dem Punkt A (oder B, C usw.) stehenden Seitenlinien der „Isoquanten" verdeutlichen eine ineffiziente Verwendung der Produktionsfaktoren, da entweder zuviel Arbeit AA'' oder zuviel Kapital AA' eingesetzt wird.

Die Verbindung aller denkbaren Punkte der effizienten Produktion, die Linie OC in Abbildung 26, ergibt einen Expansionspfad, dessen Steigung

$$tan\ \alpha = L/K = a_L/a_K = b_K/b_L \tag{169}$$

beträgt. Die Steigung ist somit gleich der Faktorintensität oder gleich dem Verhältnis der Inputkoeffizienten oder gleich dem umgekehrten Verhältnis der Produktivitäten. Aus der Diskussion dieses Typs der Produktionsfunktion geht hervor, daß sie besonders geeignet ist, Teilbereiche der Produktion im Sinne einer festen Zuordnung von Mensch und Maschine zu beschreiben.

33. Ertragsfunktion. Die zweite Produktionsfunktion wird in der Literatur als Ertragsfunktion oder als Produktionsfunktion mit ertragsgesetzlichem Verlauf bezeichnet. Sie ist nicht homogen und weist als partielle

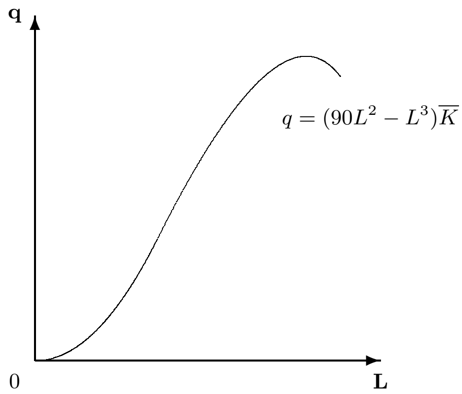


Abb. 27a: Partielle ertragsgesetzliche Produktionsfunktion

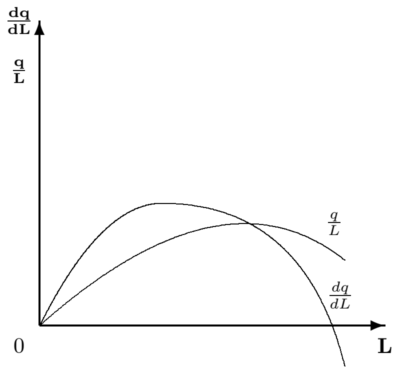


Abb. 27b: Durchschnitts- und Grenzertrag

Funktion in Abhängigkeit von einem Produktionsfaktor eine Reihe unterschiedlicher Eigenschaften auf. Wie man in Abbildung 27a leicht sehen kann, ist der erste Abschnitt der partiellen Produktionsfunktion (mit Arbeit als variablem Faktor) durch einen überproportionalen Anstieg gekennzeichnet, der sich nach einem Wendepunkt in einen unterproportionalen Anstieg verwandelt und nach einem Maximum eine negative Steigung aufweist.

Eine derartige Funktion kann beispielsweise durch

$$q = (90L^2 - L^3)\bar{K}, \text{ mit } L \in [0 \;\; 70] \qquad (170)$$

beschrieben werden, wobei $\bar{K}$ den als konstant angenommenen Kapitaleinsatz und L den Arbeitseinsatz verdeutlichen. Die zugehörigen Grenzertrags–

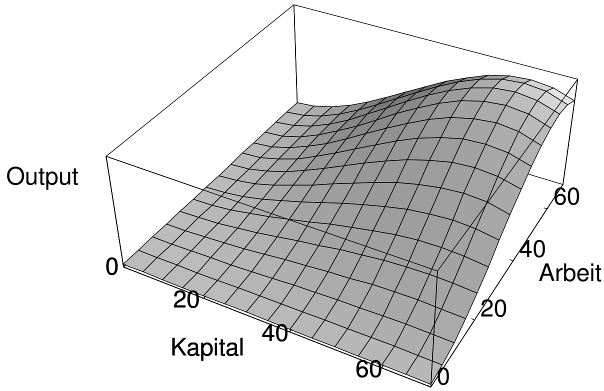


Abb. 28: Ertragsgesetzliche Produktionsfunktion

und Durchschnittsertragskurven sind in Abbildung 27b eingezeichnet und lauten im genannten Beispiel

$$dq/dL = (180L - 3L^2)\bar{K} \tag{171}$$

und

$$q/L = (90L - L^2)\bar{K}. \tag{172}$$

Bei $L = 45$ liegt das Maximum der Durchschnittsertragskurve, das von der Grenzertragskurve durchschnitten wird. Aus dieser in der Literatur üblichen Darstellung ergeben sich zwei Fragen. Zum einen ist bisher ungeklärt, wie die totale Produktionsfunktion mit zwei variablen Produktionsfaktoren aussieht. Zum anderen stellt sich die Frage nach der empirischen Bedeutung einer derartigen Produktionsfunktion. Fordert man für die totale Produktionsfunktion die Eigenschaften (a) der nicht vollständigen Substitution des einen Faktors durch den anderen und (b) der Ähnlichkeit der partiellen Produktionsfunktionen, so kann die Variante

$$q = (90L^2 - L^3)(90K^2 - K^3), \ \text{mit} \ L \in [0 \ \ 70], \ \ K \in [0 \ \ 70] \tag{173}$$

gewählt werden, die beide Forderungen erfüllt (vgl. Abbildung 28). Die zugehörigen Indifferenzkurven weisen entlang eines beliebigen Expansionspfades (Skalenvariation) die gleichen Eigenschaften auf, die auch schon die partiellen Funktionen zeigen: ein erster Bereich ist durch einen überproportionalen Anstieg gekennzeichnet, nach einem Wendepunkt zeigt sich ein unterproportionaler Anstieg und nach einem Maximum eine negative Steigung.

Sind derartige Produktionsprozesse in Industrie oder im Dienstleistungsbereich vorzufinden? In den genannten Sektoren sind kaum Technologien denkbar, die in Abhängigkeit von der Produktionsmenge derartige Variationen der Grenzproduktivitäten aufweisen. Vielmehr sind aufgrund der technischen Bedingungen der Produktion konstante, in einigen Fällen vielleicht kontinuierlich sinkende oder in wenigen Fällen auch steigende Grenzproduktivitäten oder, auf die totale Produktionsfunktion bezogen, Skalenerträge denkbar. Vorstellbar ist die ertragsgesetzliche Produktionsfunktion beim Abbau von Bodenschätzen oder in der Landwirtschaft (Nutzpflanzenanbau). Das letzte Beispiel kann an einer wenig mechanisierten Ernte innerhalb eines gegebenen Erntezeitraumes verdeutlicht werden. Wenige Landarbeiter können nur einen Teil der Ernte bewältigen und sind je Arbeiter mit umfangreichen Nebenarbeiten beschäftigt. Werden mehr Arbeiter eingesetzt, so steigt die Ernteleistung jedes einzelnen, werden noch mehr eingesetzt, so muß die Erntemenge durch mehr Köpfe geteilt werden. Aus empirischer Sicht hat der ertragsgesetzliche Verlauf einer Produktionsfunktion lediglich historische Bedeutung, gleichwohl werden auch heute noch viele Überlegungen auf diesem Ansatz aufgebaut.

Es soll abschließend noch einmal darauf hingewiesen werden, daß die Produktionsfunktion keinen ökonomischen, sondern einen technologischen Zusammenhang zwischen Input und Output beschreibt. Der Typ und die Spezifikation der Produktionsfunktion und der Bereich der technisch effizienten Produktion werden durch die von der Firma verwendete Technologie bestimmt. Durch technischen Fortschritt kann sich die Technologie im Zeitablauf wandeln, jedoch bleibt die Frage, welche Faktorkombination zur Erreichung eines Produktionsziels aus der Menge der technisch effizienten Faktorkombinationen ausgewählt werden soll. Die Beantwortung dieser Frage kann nur in Kenntnis der exogen gegebenen Faktorpreise, und damit der Produktionskosten, erfolgen. Das eigentlich ökonomische Problem der Produktion besteht darin, eine bestimmte Outputmenge mit den geringsten Kosten (Minimalprinzip) oder einen maximalen Output mit einem gegebenen Kostenbudget (Maximalprinzip) zu erreichen. Im nächsten Abschnitt soll auf der Grundlage der Produktionstheorie diesem Problem nachgegangen werden.

3.2 Kosten der Firma

34. Produktionsoptimum. An dieser Stelle wollen wir zunächst zu der allgemeinen Produktionsfunktion (131) zurückkehren, um an ihr die Grundprobleme ökonomisch effizienter Produktion zu klären. Im Verlauf der Diskussion werden wir dann wieder auf speziellere Funktionen – insbesondere auf die Cobb-Douglas-Funktion – zurückgreifen. Es soll angenommen werden, daß alle zu den Inputfaktoren $v_i,\ i = 1, ..., n$ gehörenden Faktorpreise w_i bekannt sind. Die gesamten Kosten in Abhängigkeit des Faktoreinsatzes lauten

$$C = \sum_{i=1}^{n} v_i w_i \qquad \text{mit} \quad w_i \geq 0 \tag{174}$$

und die Kosten in Abhängigkeit der Outputmenge

$$C \;=\; g(q^*) \;=\; g\left(f(v_1^*, \cdots, v_n^*)\right), \tag{175}$$

wobei v_1^* bis v_n^* die ökonomisch effizienten Faktoreinsatzmengen darstellen. Als *Durchschnittskosten* (auch totale Durchschnittskosten oder Stückkosten) wird der Quotient aus Kosten und Produktionsmenge $C_D = C/q^* = g(q^*)/q^* = g\left(f(v_1^*, \cdots, v_n^*)\right)/q$ bezeichnet. Mit *Grenzkosten* bezeichnen wir die Veränderung der Kosten bei einer Variation der Outputmenge $C' = dC/dq^* = g'(q^*)$. Durch die Anwendung eines Verfahrens der Optimierung unter Nebenbedingungen (Lagrange-Methode), können nunmehr die optimalen Faktoreinsatzmengen ermittelt werden. Es kann gezeigt werden, daß die Outputmaximierung bei einem gegebenen Kostenbudget zum gleichen Resultat führt wie die Kostenminimierung bei gegebenem Produktionsvolumen.

Die zu maximierende Produktionsfunktion möge $f(v_1, v_2)$ lauten und das Kostenbudget $\bar{C} = v_1 w_1 + v_2 w_2$. Die Lagrangefunktion ist somit

$$\max \;\; \mathcal{L}(v_1, v_2, \lambda) = f(v_1, v_2) + \lambda(\bar{C} - v_1 w_1 - v_2 w_2) \tag{176}$$

und die partiellen Ableitungen (Bedingungen 1. Ordnung)

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_1} \;=\; \frac{\partial f}{\partial v_1} - \lambda w_1 \;\; = 0, \tag{177}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_2} \;=\; \frac{\partial f}{\partial v_2} - \lambda w_2 \;\; = 0, \tag{178}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} \;=\; \bar{C} - v_1 w_1 - v_2 w_2 \;\; = 0. \tag{179}$$

Aus der Gleichsetzung von (177) und (178) ergibt sich

$$\frac{\partial f}{\partial v_1} \Big/ \frac{\partial f}{\partial v_2} \quad = \quad \frac{w_1}{w_2}, \tag{180}$$

woraus wir den nachfolgenden Satz ableiten können:

Satz: *Im Optimum der Produktion ist das Verhältnis der Grenzproduktivitäten zweier Faktoren gleich dem Verhältnis der zugehörigen Faktorpreise.*

Da die Grenzrate der technischen Substitution nach Gleichung (139') gleich dem umgekehrten Verhältnis der Grenzproduktivitäten ist, kann die Bedingung (180) auch als

$$GRTS_{v_2 v_1} \quad = \quad w_1/w_2 \tag{181}$$

geschrieben werden: Die Grenzrate der technischen Substitution ist im Optimum gleich dem Verhältnis der Faktorpreise. Ist die Produktionsfunktion – wie wir angenommen haben (vgl. Gleichung (140) und (141)) – streng konkav, so ist die Bedingung zweiter Ordnung immer erfüllt. Im Falle der Kostenminimierung bei gegebenem Produktionsvolumen lauten die Lagrangefunktion

$$\min \quad \mathcal{L}(v_1, v_2, \mu) = v_1 w_1 + v_2 w_2 + \mu \left(\bar{q} - f(v_1, v_2)\right) \tag{182}$$

und die partiellen Ableitungen (Bedingungen 1. Ordnung)

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_1} \quad = \quad w_1 - \mu \frac{\partial f}{\partial v_1} \quad = 0, \tag{183}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_2} \quad = \quad w_2 - \mu \frac{\partial f}{\partial v_2} \quad = 0, \tag{184}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mu} \quad = \quad \bar{q} - f(v_1, v_2) \quad = 0. \tag{185}$$

Durch Gleichsetzung von (183) und (184) erhält man $(\partial f/\partial v_1)/(\partial f/\partial v_2) = w_1/w_2$, und damit die gleiche Anforderung an das Verhältnis der Faktorpreise wie in (180). Löst man die Gleichungen (183) und (184) nach μ auf, so erhält man

$$\mu = 1/\lambda = \frac{w_1}{\partial f/\partial v_1} = \frac{w_2}{\partial f/\partial v_2}. \tag{186}$$

Die Lagrange-Multiplikatoren μ oder $1/\lambda$ lassen sich ökonomisch als Grenzkosten der Produktionsmengenänderung bei *partieller* Variation des Inputfaktors v_i interpretieren. Die Faktoränderung dv_i multipliziert mit dem Faktorpreis w_i ergibt die Kostenänderung bei Konstanz aller anderen Kosten, und df stellt die Produktionsmengenänderung dar. Somit lauten die Grenzkosten, die im Optimum für alle Faktoren gleich sind, $w_1 dv_1/df = w_2 dv_2/df$.

Satz: *Im Optimum der Produktion sind die partiellen Grenzkosten, die einer partiellen Faktorvariation entsprechen, für alle Produktionsfaktoren gleich.*

Die Optimalbedingungen können auch graphisch verdeutlicht werden. Da $-w_1/w_2$ die Steigung der Kostenbudgetlinie im v_1/v_2-Diagramm ist

$$\frac{dv_2}{dv_1} = -\frac{w_1}{w_2} \quad \text{aus:} \quad v_2 = -v_1\frac{w_1}{w_2} + \frac{C}{w_2} \tag{187}$$

und diese im Optimum gleich der Steigung der Isoquante sein muß

$$-\frac{dv_2}{dv_1} = \frac{\partial f/\partial v_1}{\partial f/\partial v_2} \quad \text{aus:} \quad d\bar{q} = \frac{\partial f}{\partial v_1}dv_1 + \frac{\partial f}{\partial v_2}dv_2 = 0, \tag{188}$$

ergibt sich das Optimum als Tangentialpunkt von Isoquante und Budgetlinie (vgl. Abbildung 29a). Die optimalen Faktoreinsatzmengen v_1^* und v_2^* lassen sich als die entsprechenden Achsenabschnitte unmittelbar ablesen. Die Optimalitätsbedingung in Abbildung 29a kann sowohl als das Ergebnis eines Minimierungsprozesses als auch als das Resultat eines Maximierungsverfahrens interpretiert werden und wird als *Minimalkostenkombination* bezeichnet. Im ersten Fall wird die Budgetlinie solange in Richtung des Nullpunktes verschoben, bis der Tangentialpunkt auf der gewünschten Isoquante entsteht; im zweiten Fall wird jene Isoquante gesucht, die die größte Entfernung vom Nullpunkt aufweist, und gleichzeitig einen Tangentialpunkt

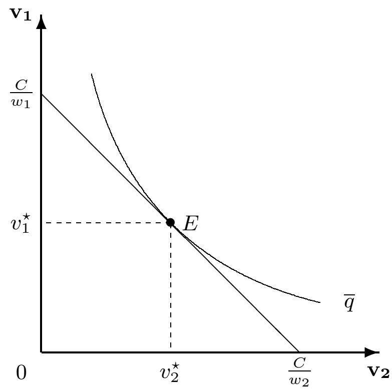


Abb. 29a: Produktionsoptimum

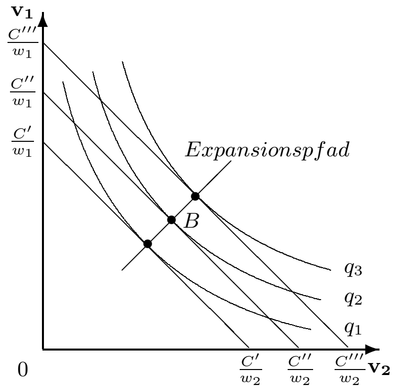


Abb. 29b: Änderung des Kostenbudgets

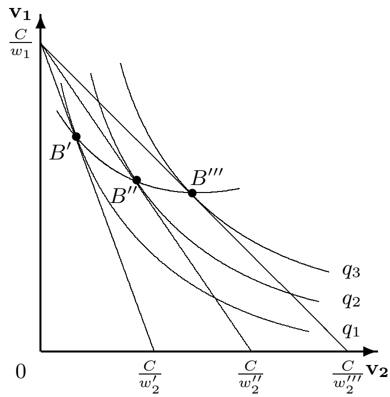


Abb. 29c: Änderung des Faktorpreises w_2

mit der vorgegebenen Budgetlinie hat. Die Ableitung der optimalen Faktoreinsatzmengen v_1^* und v_2^* soll im Abschnitt 35 auch analytisch dargestellt werden.

Die Erhöhung des Kostenbudgets von C' über C'' nach C''' läßt in Abbildung 29b drei Tangentialpunkte auf unterschiedlichen Isoquanten entstehen. Je größer bei konstanten Faktorpreisen das Kostenbudget ist $C' < C'' < C'''$, umso größer sind auch die Outputmengen $q_1 < q_2 < q_3$, die unter den oben beschriebenen Optimierungsverfahren zur Ermittlung der Minimalkostenkombinationen produziert werden können. Variiert man die Kosten in sehr kleinen Schritten, so ergibt sich aus der Menge der Tangentialpunkte der sogenannte *Expansionspfad* oder die *Faktoranpassungskurve*. Damit ist ein funktionaler Zusammenhang zwischen der Outputmenge und den Produktionskosten hergestellt $C = g(q*)$, der ebenfalls im Abschnitt 35 für eine Cobb-Douglas-Produktionsfunktion analytisch dargestellt werden soll. Ist das Kostenbudget konstant und ändert sich ein Faktorpreis, so ändern sich Outputmenge und Faktorkombination. Erhöht sich beispielsweise in Abbildung 29c der Preis w_2 für den Faktor v_2 von w_2''' auf w_2', so reduziert sich nicht nur die mögliche Outputmenge von q_3 auf q_1, sondern es wird auch der sich verteuernde Faktor v_2 durch den relativ dazu preiswerteren Faktor v_1 ersetzt. Dieser Substitutionsprozeß gilt analog auch für den Faktor v_1, wenn der Faktorpreis w_1 steigt. Die realisierten effizienten Faktorkombinationen hängen folglich von der Produktionstechnologie *und* von den relativen Faktorpreisen w_1/w_2 ab.

M6. Kuhn-Tucker-Bedingungen.

• Nichtnegativitätsbedingungen: *Wir sind bisher – auch in der Haushaltstheorie – bei der Optimierung unter einer Nebenbedingung von frei beweglichen Variablen x und y ausgegangen. Nun sollen aber generell die Nichtnegativitätsbedingungen $x \geq 0$ und $y \geq 0$ gefordert werden, da es im ökonomischen Kontext wenig sinnvoll ist, mit negativen Inputmengen in der Produktionstheorie oder negativen Konsumgütermengen in der Haushaltstheorie zu operieren. Lösungen (x^*, y^*) eines Optimierungsproblems können daher entweder innere Punkte der Menge $\{x \geq 0, y \geq 0\}$ sein, also sowohl $x^* > 0$ als auch $y^* > 0$ erfüllen* (innere Lösungen)*, oder Punkte auf den Koordinatenachsen sein, also $x^* = 0$ oder $y^* = 0$, erfüllen* (Ecklösungen).

• *Ungleichung als Nebenbedingung: Statt einer Gleichung $g(x, y) = 0$ treten im Normalfall Ungleichungen $g(x, y) \leq 0$ oder $g(x, y) \geq 0$ als Restriktionen auf. So wird im Haushalt nur ein Teil E des gesamten Einkommens E_0 zum Kauf von Gütern und Dienstleistungen ausgegeben, es ist also $g = E - E_0 \leq 0$ bzw. $-g = E_0 - E \geq 0$, und entsprechend werden im Unternehmen nicht alle budgetierten Kosten ausgeschöpft. Die Lösungspunkte (x, y) eines Optimierungsproblems mit einer solchen Restriktion $g(x, y) \leq 0$ bzw. $g(x, y) \geq 0$ sind nun unter den Ecklösungen, den Punkten auf der Isoquante $g(x, y) = 0$ und denjenigen Punkten mit $g(x, y) < 0$ bzw. $g(x, y) > 0$ zu suchen, die nicht zugleich Ecklösungen sind. Diese Lösungspunkte lassen sich einheitlich mit Hilfe von Lagrangefunktionen beschreiben.*

• Kuhn-Tucker-Bedingungen mit Schlupfvariablen: *Die Optimierungsaufgabe*

$$\min_{x,y} f(x, y), \qquad g(x, y) \leq 0, \ x \geq 0, \ y \geq 0$$

läßt sich durch Einführung von sog. Schlupfvariablen k, r und s als Optimierungsaufgabe mit den drei Gleichungen

$$k^2 + g(x, y) = 0,\ r^2 - x = 0,\ s^2 - y = 0$$

als Restriktionen darstellen. Die hierzu gehörende Lagrangefunktion hängt neben den ursprünglichen Variablen zusätzlich von den künstlichen Variablen k, r und s sowie von drei Lagrange-Multiplikatoren ab:

$$\mathcal{L}(x, y, k, r, s, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = f(x, y) + \lambda_1(k^2 + g(x, y)) + \lambda_2(r^2 - x) + \lambda_3(s^2 - y).$$

Die in M4 *formulierten notwendigen Bedingungen für ein (lokales) Minimum mit Gleichungen als Restriktionen bedeuten jetzt ein Gleichungssystem für die gesuchten Größen x, y, k, r, s und die Lagrange-Multiplikatoren* $\lambda_1 \geq 0,\ \lambda_2 \geq 0,\ \lambda_3 \geq 0$:

$$\begin{aligned}
(1) \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} &= f_x(x, y) + \lambda_1 g_x(x, y) - \lambda_2 = 0,\\
(2) \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} &= f_y(x, y) + \lambda_1 g_y(x, y) - \lambda_3 = 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{array}{lll}
(3) & \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_1} = k^2 + g(x, y) = 0, & \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial k} = 2\lambda_1 k = 0,\\[2ex]
(4) & \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_2} = r^2 - x = 0, & \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial r} = 2\lambda_2 r = 0,\\[2ex]
(5) & \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_3} = s^2 - y = 0, & \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial s} = 2\lambda_3 s = 0.
\end{array}$$

• Interpretation: *Aus den Gleichungen unter* (3), (4) *und* (5) *folgt, daß für eine Lösung des Systems die Werte $g(x, y)$, x und y nur dann von* 0 *verschieden sein können, wenn die zugehörigen Lagrange-Multiplikatoren λ_1, λ_2 bzw. λ_3 den Wert* 0 *haben. Im einzelnen bedeutet dies:*

(3) : *Es ist $k = 0$ oder $\lambda_1 = 0$:*

- *a)* $k \neq 0$ *und* $\lambda_1 = 0$ (*Restriktion $g = 0$ begrenzt das Minimum nicht*),
- *b)* $k = 0$ *und* $\lambda_1 \geq 0$ (*Restriktion $g = 0$ ist im Minimum bindend*).

(4) : *Es ist $x = 0$ oder $\lambda_2 = 0$:*

- *a)* $x > 0$ *und* $\lambda_2 = 0$ (*innere Lösung,* $f_x + \lambda_1 g_x = 0$),
- *b)* $x = 0$ *und* $\lambda_2 > 0$ (*Ecklösung,* $f_x + \lambda_1 g_x > 0$),

c) $x = 0$ *und* $\lambda_2 = 0$ (*spezielle Ecklösung*, $f_x + \lambda_1 g_x = 0$).

(5) : *Es ist* $y = 0$ *oder* $\lambda_3 = 0$:

a) $y > 0$ *und* $\lambda_3 = 0$ (*innere Lösung*, $f_y + \lambda_1 g_y = 0$),

b) $y = 0$ *und* $\lambda_3 > 0$ (*Ecklösung*, $f_y + \lambda_1 g_y > 0$),

c) $y = 0$ *und* $\lambda_3 = 0$ (*spezielle Ecklösung*, $f_y + \lambda_1 g_y = 0$).

Innere Lösungen mit $k \neq 0$ *erfüllen die Bedingung* $f_x = f_y = 0$*, also die notwendige Bedingung für ein Optimum ohne Nebenbedingungen* (*siehe* M3).

Bei speziellen Funktionen treten generell nur innere Lösungen von Optimierungsaufgaben auf. So nehmen Funktionen vom Cobb-Douglas-Typ $f(x, y) = x^\alpha y^\beta$, $\alpha > 0, \beta > 0$*, ihr Minimum nur unter trivialen Restriktionen auf den Koordinatenachsen an.*

• Kuhn-Tucker-Bedingungen: *Die mit Hilfe von Schlupfvariablen formulierten Bedingungen sind gleichwertig mit den klassischen Kuhn-Tucker-Bedingungen, die lediglich* einen *gesuchten Lagrange-Multiplikator* $\lambda \geq 0$ *enthalten:*

$$\begin{aligned}
&f_x(x, y) + \lambda g_x(x, y) \geq 0, \quad f_y(x, y) + \lambda g_y(x, y) \geq 0, \\
&x\,[f_x(x, y) + \lambda g_x(x, y)] + y\,[f_y(x, y) + \lambda g_y(x, y)] = 0, \\
&\lambda g(x, y) = 0, \quad g(x, y) \leq 0, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0.
\end{aligned}$$

Unter gewissen zusätzlichen Voraussetzungen an die Funktionen f *und* g *(z.B. bei deren in ökonomischen Anwendungen häufig zutreffenden Konvexität) sind die Kuhn-Tucker-Bedingungen sogar notwendig und hinreichend für ein globales Minimum.*

Maximumaufgaben werden durch Ersetzen der zu maximierenden Funktion f *durch die Funktion* $-f$ *behandelt, wobei dann im konkreten Fall zu prüfen ist, ob die Funktion* $-f$ *die entsprechenden Voraussetzungen erfüllt.*

• *Beispiel:*

$$\min_{x,y} x^2 + y^2 - x - y, \qquad y^2 - x + 1 \leq 0,\ x \geq 0,\ y \geq 0.$$

Mit $f(x, y) = x^2 + y^2 - x - y$ *und* $g(x, y) = y^2 - x + 1$ *lauten die Kuhn-Tucker-Bedingungen mit Schlupfvariablen:*

$$\begin{array}{ll}
(1) & 2x - 1 - \lambda_1 - \lambda_2 = 0, \\
(2) & 2y - 1 + 2\lambda_1 y - \lambda_3 = 0, \\
(3) & k^2 + y^2 - x + 1 = 0 \quad \textit{und} \quad \lambda_1 k = 0,
\end{array}$$

$$
\begin{array}{lll}
(4) & r^2 - x = 0 \quad \mathit{und} & \lambda_2 r = 0, \\
(5) & s^2 - y = 0 \quad \mathit{und} & \lambda_3 s = 0.
\end{array}
$$

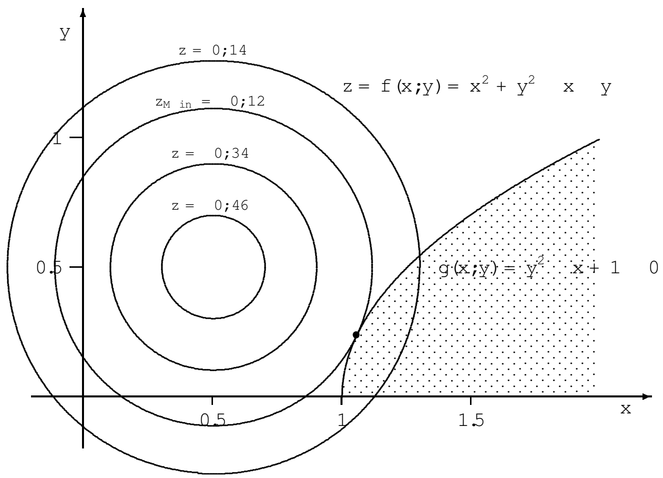
Angenommen, die Restriktion $g(x,y) = y^2 - x + 1 = 0$ *sei nicht bindend, also* $k \neq 0$*, dann ist* $\lambda_1 = 0$ *wegen* (3)*. Ist in diesem Fall* $x > 0$*, so folgt* $\lambda_2 = 0$ *aus* (4)*, und damit reduziert sich* (1) *auf* $2x - 1 = 0$*, also* $x = 1/2$*. Für* $x = 1/2$ *ist aber die linke der Gleichungen von* (3) *nicht erfüllbar. Aber auch für* $x = 0$ *ist diese Gleichung nicht möglich. Folglich ist die Restriktion* $g(x,y) = y^2 - x + 1 = 0$ *bindend, also ist* $k = 0$*.*

Für $k = 0$ *reduziert sich die linke Seite von* (3) *auf* $y^2 - x + 1 = 0$*, und das ist für* $x = 0$ *ausgeschlossen. Aber auch* $y = 0$ *ist wegen* (2) *nicht möglich, und damit ergibt sich* $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$ *aus* (4) *und* (5)*. Es verbleibt damit das Gleichungssystem*

$$
2x - 1 - \lambda_1 = 0, \quad 2y - 1 + 2\lambda_1 y = 0, \quad y^2 - x + 1 = 0.
$$

Dies führt auf $x = \frac{1+\lambda_1}{2}$, $y = \frac{1}{2}\frac{1}{1+\lambda_1} = \frac{1}{4x}$ *und damit für die gesuchte Größe* x *auf die kubische Gleichung* $16x^3 - 16x^2 - 1 = 0$*. Deren (eindeutig bestimmte reelle) Lösung lautet, auf drei Stellen nach dem Komma genau,* $x^* = 1{,}056$*, und hieraus folgt* $y^* = 0{,}237$ *und* $\lambda^* = 1{,}112$*. Die Voraussetzungen der (notwendigen und hinreichenden) Kuhn-Tucker-Bedingungen sind hier übrigens erfüllt, und daher wird für* $x = x^*$ *und* $y = y^*$ *das absolute Minimum mit dem Funktionswert* $f(x^*, y^*) = -0{,}122$ *angenommen.*

Die Lösung der Optimierungsaufgabe ist im folgenden Bild graphisch dargestellt. Die Isoquanten $f(x,y) = C$ *sind Kreislinien mit dem Mittelpunkt*



$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, *wobei das Niveau* C *nach außen zunimmt. Im angegebenen Minimalpunkt berührt die Isoquante* $f(x, y) = z_{min}$ *die Begrenzung der Restriktion* $g(x, y) \leq 0$.

35. Langfristige Kostenfunktion. Ausgangspunkt der Ableitung optimaler Faktoreinsatzmengen soll eine Cobb-Douglas-Produktionsfunktion mit den Faktoren $v_1 = K$ (Kapital) und $v_2 = L$ (Arbeit) sein. Die Faktorpreise sind folglich Kapitalkosten je Einsatzmengeneinheit $w_1 = r$ und Lohnsatz je Arbeitseinheit $w_2 = l$. Für eine gegebene Produktion von $\bar{q}$ Gütereinheiten sollen die Kosten

$$C = rK + lL \tag{189}$$

unter der Nebenbedingung der Produktionsfunktion

$$\bar{q} = aL^\beta K^\gamma, \quad \beta > 0, \ \gamma > 0 \tag{190}$$

minimiert werden. Die Lagrangefunktion lautet

$$\min \ \mathcal{L}(L, K, \mu) = rK + lL + \mu(\bar{q} - aL^\beta K^\gamma) \tag{191}$$

und die partiellen Ableitungen (Bedingungen 1. Ordnung) lauten

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial L} &= l - \mu\beta\frac{\bar{q}}{L^*} = 0 \longrightarrow \mu = \frac{lL^*}{\bar{q}\beta}, && (192) \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial K} &= r - \mu\gamma\frac{\bar{q}}{K^*} = 0 \longrightarrow \mu = \frac{rK^*}{\bar{q}\gamma}, && (193) \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mu} &= \bar{q} - aL^\beta K^\gamma = 0. && (194) \end{aligned}$$

Setzt man (192) und (193) gleich und löst den Ausdruck nach K^* bzw. L^* auf, so erhält man

$$K^* = \frac{\gamma}{\beta}\frac{l}{r}L^* \tag{195}$$

oder

$$L^* = \frac{\beta}{\gamma}\frac{r}{l}K^*. \tag{196}$$

Durch Verwendung von (195) in (194) ergibt sich

$$\bar{q} - aL^{*\beta}\left(\frac{\gamma}{\beta}\frac{l}{r}L^*\right)^\gamma = 0 \tag{197}$$

oder, wenn man die Gleichung nach L^* auflöst,

$$L^* = \left(\frac{\bar{q}}{a}\right)^{\frac{1}{\beta+\gamma}} \left(\frac{\beta r}{\gamma l}\right)^{\frac{\gamma}{\beta+\gamma}}. \tag{198}$$

Damit ist die Nachfrage nach dem Produktionsfaktor Arbeit eindeutig bestimmt; sie hängt ab von dem vorgegebenen Produktionsvolumen $\bar{q}$, den relativen Faktorpreisen r/l und den partiellen Produktionselastizitäten β und γ. Analog dazu kann die Nachfrage nach dem Produktionsfaktor Kapital bestimmt werden; aus (196) und (194) erhält man

$$\bar{q} - aK^{*\gamma}\left(\frac{\beta}{\gamma}\frac{r}{l}K^*\right)^{\beta} = 0 \tag{199}$$

oder für K^*

$$K^* = \left(\frac{\bar{q}}{a}\right)^{\frac{1}{\beta+\gamma}}\left(\frac{\gamma}{\beta}\frac{l}{r}\right)^{\frac{\beta}{\beta+\gamma}}. \tag{200}$$

Da nunmehr die ökonomisch effizienten Inputmengen zur Erzeugung einer gegebenen Gütermenge bekannt sind, stellt es kein Problem dar, die zugehörige Kostenfunktion $C = g(f(L^*, K^*))$ zu ermitteln. Die Diskussion dieser Kostenfunktion nimmt in der mikroökonomischen Literatur eine zentrale Rolle ein. Sie ist nicht nur notwendig für die Ermittlung des Gewinns der Firma, sondern auch für die Bestimmung der optimalen Outputmengen oder Güterpreise auf den Absatzmärkten. Zunächst reduzieren wir die Kostenfunktion (174), die die Produktionskosten in Abhängigkeit der Faktormengen beschreibt, auf die optimalen Einsatzmengen von Arbeit und Kapital

$$C = rK^* + lL^*. \tag{189'}$$

Diese Funktion lautet unter Verwendung der Nachfragegleichungen für beide Produktionsfaktoren (198) und (200)

$$C = r\left[\left(\frac{\bar{q}}{a}\right)^{\frac{1}{\beta+\gamma}}\left(\frac{\gamma}{\beta}\frac{l}{r}\right)^{\frac{\beta}{\beta+\gamma}}\right] + l\left[\left(\frac{\bar{q}}{a}\right)^{\frac{1}{\beta+\gamma}}\left(\frac{\beta}{\gamma}\frac{r}{l}\right)^{\frac{\gamma}{\beta+\gamma}}\right]$$

bzw.

$$C = \left[\frac{1}{a}\left(\left(\frac{\gamma}{\beta}\right)^{\beta} + \left(\frac{\beta}{\gamma}\right)^{\gamma}\right)\right]^{\frac{1}{\beta+\gamma}} \cdot r^{\frac{\gamma}{\beta+\gamma}} \cdot l^{\frac{\beta}{\beta+\gamma}} \cdot \bar{q}^{\frac{1}{\beta+\gamma}}. \tag{201}$$

Die Kosten der Produktion hängen von den Faktorpreisen r und l, den partiellen Produktionselastizitäten γ und β sowie von dem angestrebten Produktionsniveau $\bar{q}$ ab. Da sowohl die Produktionstechnologie (also γ und β) als auch die Faktorpreise (also r und l) als exogen gegeben angesehen werden, können alle Terme bis auf $\bar{q}$ in einer Konstanten B zusammengefaßt werden

$$C(q) = B \cdot q^{\frac{1}{\beta+\gamma}}. \tag{202}$$

Partielle Produktionselastizitäten $\gamma + \beta$	< 1	$= 1$	> 1
Produktionsfunktion	konkav	linear	konvex
Kostenfunktion	konvex	linear	konkav
Grenzkosten C'	konkav	konstant	konvex
$\partial C' / \partial q$	> 0	$= 0$	< 0
Durchschnittskosten C_D	konkav	konstant	konvex
$\partial C_D / \partial q$	> 0	$= 0$	< 0
Vergleich C_D / C'	$C' > C_D$	$C' = C_D$	$C' < C_D$

Tabelle 1: Zusammenhang Produktions- und Kostenfunktion

Es sei daran erinnert, daß Gleichung (202) für eine gegebene Outputmenge $\bar{q}$ unter Verwendung der kostenminimalen Faktoreinsatzmengen (198) und (200) ermittelt worden ist. Aus alternativ gegebenen Outputmengen $\bar{q}$ und den zugehörigen mit den Faktorkosten bewerteten kostenminimalen Faktoreinsatzmengen läßt sich die Kostenfunktion $C = g(q)$ ableiten. Da alle Faktoren variabel sind, handelt es sich um eine langfristige Kostenfunktion, die auf der Grundlage aller technisch effizienten Produktionsmöglichkeiten (Bewegung auf der Oberfläche eines Produktionsgebirges) und ferner auf der Basis aller ökonomisch effizienten Faktorkombinationen (Bewegung entlang des Expansionspfades AA') gefunden wurde. Der Zusammenhang von Minimalkostenkombinationen und Kostenfunktion ist in Abbildung 30 für $a = 1$, $\beta = 0,5$ und $\gamma = 0,5$ dargestellt.

Die *Grenzkosten*, also die Änderung der Kosten bei einer marginalen Änderung der Produktionsmenge, lauten

$$\frac{dC}{dq} = \frac{1}{\beta + \gamma} B q^{\frac{1-\beta-\gamma}{\beta+\gamma}} \tag{203}$$

und die *Durchschnittskosten*, also die Kosten pro produzierter Mengeneinheit, betragen

$$\frac{C}{q} = B q^{\frac{1-\beta-\gamma}{\beta+\gamma}} . \tag{204}$$

Wie aus den Gleichungen (202) bis (204) unmittelbar zu ersehen ist, hängt die Form der entsprechenden Kurven von der Größe der partiellen Produktionselastizitäten β und γ, und damit von der Form der angenommenen Produktionsfunktion, ab. An dieser Stelle wird deutlich, in welcher Weise die angewendete Produktionstechnologie unmittelbar den Kostenverlauf in

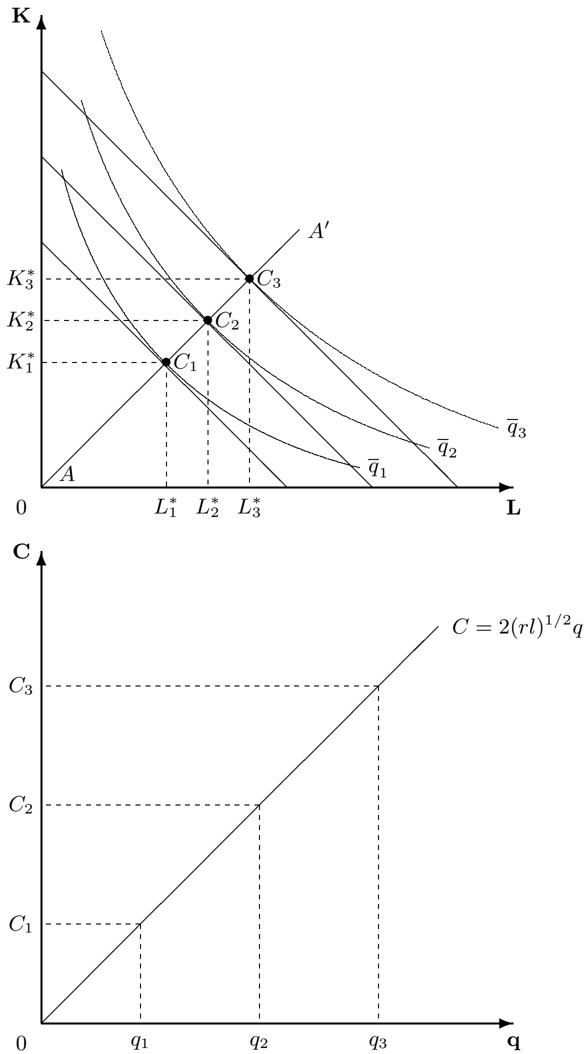


Abb. 30: Minimalkostenkombinationen und Kostenfunktion

Abhängigkeit von der Produktionsmenge beeinflußt. Die Eigenschaften der Produktionsfunktionen und Kostenfunktionen sind in Tabelle 1 zusammengefaßt.

36. Kurzfristige Kostenfunktion. In der Kostentheorie spricht man von einer kurzfristigen Analyse, wenn wenigstens ein Produktionsfaktor v_i konstant ist und die von diesem Faktor verursachten Kosten somit fix, d.h.

unabhängig von der Produktionsmenge, sind. Für $i = 1$ bis $n - m$ konstante Produktionsfaktoren lauten die *Fixkosten*

$$C_f = \sum_{i=1}^{n-m} \bar{v}_i w_i \tag{205}$$

und die *durchschnittlichen Fixkosten* $C_{fD} = C_f/q$. Die *Gesamtkosten* sind:

$$C = \sum_{i=n-m+1}^{n} v_i w_i + \sum_{i=1}^{n-m} \bar{v}_i w_i, \tag{206}$$

wobei der Ausdruck $\sum_{i=n-m+1}^{n} v_i w_i = C_v$ die *variablen Kosten* bezeichnet. Gleichung (206) kann unter Verwendung der Produktionsfunktion

$$q = f(\bar{v}_1, \cdots, \bar{v}_{n-m}, \;\; v_{n-m+1}, \cdots, v_n) \tag{131'}$$

verkürzt als

$$C = C(q) + C_f \tag{207}$$

geschrieben werden. Als *Durchschnittskosten* definieren wir in diesem Fall $C_D = C/q = C(q)/q + C_f/q$, als *durchschnittliche variable Kosten* $C_{vD} = C(q)/q$ und als *Grenzkosten* $C' = dC(q)/dq$.

Untersucht man wiederum eine Produktionsfunktion vom Cobb-Douglas-Typ mit $a = 1, \gamma = 1/2$ und $\beta = 1/2$, in der der Faktor Kapital als kurzfristig nicht variierbar angesehen wird

$$q = \bar{K}^{1/2} L^{1/2}, \quad \bar{K} = const., \tag{208}$$

so erhält man unter Verwendung von $L = q^2 \bar{K}^{-1}$ als kurzfristige Kostenfunktion

$$C = lL + r\bar{K} = lq^2 \bar{K}^{-1} + r\bar{K}, \tag{209}$$

als kurzfristige Durchschnittskostenfunktion

$$C_D = lq\bar{K}^{-1} + r\bar{K}q^{-1} \tag{210}$$

und als kurzfristige Grenzkostenfunktion

$$C' = 2lq\bar{K}^{-1}. \tag{211}$$

Die kurzfristige Kostenfunktion (209) hängt – ebenso wie die langfristige Kostenfunktion (201) – von der Produktionsmenge q ab, da annahmegemäß der Kapitaleinsatz konstant ist ($\bar{K} = const.$) und die Faktorpreise l und r exogen gegeben sind. Der Zusammenhang zwischen dem variablen Produktionsfaktor Arbeit und dem Verlauf der zugehörigen kurzfristigen Kostenfunktion ist in Abbildung 31 dargestellt. Die Expansion der Produktionsmengen erfolgt entlang des Pfades AA', wobei eine Minimalkostenkombination der Produktionsfaktoren nur in einem Fall (q_2) realisiert werden kann.

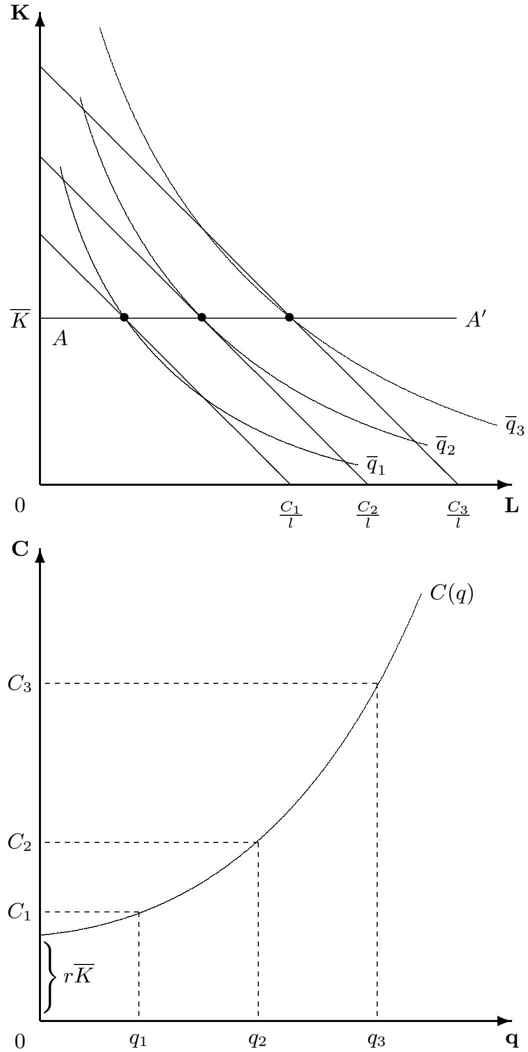


Abb. 31: Variation der Arbeit und kurzfristige Kostenfunktion

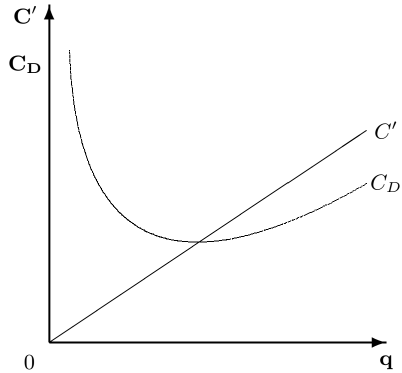


Abb. 32: Kurzfristige Durchschnitts- und Grenzkosten

Die zu der Kostenfunktion (209) gehörende Durchschnittskostenkurve (210) weist einen U-förmigen Verlauf auf, und die entsprechenden Grenzkosten steigen linear an. Diese Eigenschaften sind in Abbildung 32 verdeutlicht. Es soll eine interessante Eigenschaft der in dieser Abbildung gezeigten Kurvenverläufe gezeigt werden: Die Grenzkostenkurve schneidet die Durchschnittskostenkurve in ihrem Minimum. Zunächst ist das Minimum der Durchschnittskostenkurve zu bestimmen:

$$\frac{dC_D}{dq} = l\bar{K}^{-1} - r\bar{K}q^{-2} = 0, \tag{212}$$

$$\frac{d^2C_D}{dq^2} = 2r\bar{K}q^{-3} > 0. \tag{213}$$

Aus Gleichung (212) erhält man eine Produktionsmenge q^* für die geringsten Durchschnittskosten von

$$q^* = \left(\frac{r}{l}\right)^{1/2} \bar{K}. \tag{214}$$

Setzt man q^* in die Durchschnittskostengleichung (210) ein, so erhält man

$$\begin{aligned} C_{D\,min} &= lr^{1/2}l^{-1/2}\bar{K}\bar{K}^{-1} + r\bar{K}l^{1/2}r^{-1/2}\bar{K}^{-1} \\ &= 2(rl)^{1/2}. \end{aligned} \tag{215}$$

Verwendet man ferner q^* in der Grenzkostengleichung (211), so folgt daraus

$$C' = 2lr^{1/2}l^{-1/2}\bar{K}\bar{K}^{-1} = 2(rl)^{1/2}. \tag{216}$$

Aus den Gleichungen (215) und (216) kann der Schluß gezogen werden, daß das Minimum der kurzfristigen Durchschnittskostenkurve gleich den kurzfristigen Grenzkosten ist. Dieses Resultat stimmt überein mit den langfristigen Grenz- und Durchschnittskosten bei konstanten Skalenerträgen.

37. Kurzfristige S-förmige Kostenfunktion. An dieser Stelle ist als Beispiel die kurzfristige, umgekehrt S-förmige Kostenfunktion zu diskutieren. Die Entwicklung dieser Kostenfunktion aus nichthomogenen, S-förmigen, partiellen Produktionsfunktionen des Typs $q = f(v_1, \bar{v}_2)$ ist – vor allem auf graphischem Wege – möglich und könnte beispielsweise

$$C = q^3 - 18q^2 + 150q + 200, \;\; q \in [0 \;\; 15] \tag{217}$$

lauten. Eine exakte mathematische Ableitung aus einer bestimmten Produktionsfunktion, wie etwa aus $q = (90L^2 - L^3)\bar{K}$ oder aus einer Sinus-Approximation, ist sehr aufwendig. Daher soll auf diesen Schritt verzichtet und die Kostenfunktion ad–hoc eingeführt werden. Wie man leicht sieht, betragen die Fixkosten $C_f = 200$ und die variablen Kosten $C_v = q^3 - 18q^2 + 150q$; für die Grenzkosten erhält man einen U-förmigen Verlauf

$$dC/dq = 3q^2 - 36q + 150 \tag{218}$$

und die Stückkosten oder totalen Durchschnittskosten können mit

$$C/q = q^2 - 18q + 150 + 200q^{-1} \tag{219}$$

angegeben werden, deren Minimum mit

$$d(C/q)/dq = 2q - 18 - 200q^{-2} = 0$$

$$\text{und} \quad d^2(C/q)/dq^2 = 2 + 400q^{-3} > 0$$

bei $q^* = 10$ liegt. An diesem Punkt befindet sich, wie schon gezeigt wurde und was durch Einsetzen von $q^* = 10$ in (218) und (29) leicht errechnet werden kann, der Schnittpunkt der Durchschnittskostenkurve mit der zugehörigen Grenzkostenkurve bei $dC/dq^* = C/q^* = 90$. In den Abbildungen 33 und 34 sind die Kurvenverläufe graphisch verdeutlicht.

Die kurze Diskussion der umgekehrt S-förmigen Kostenfunktion sollte ein Problem deutlich gemacht haben: Da aus der partiellen S-förmigen Produktionsfunktion kein Schluß auf Skalenvariationen gezogen werden kann, wird die umgekehrt S-förmige Kostenfunktion vielfach ad-hoc eingeführt

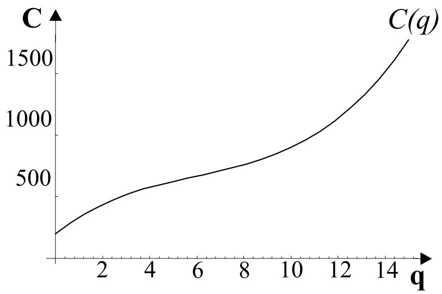


Abb. 33: Gesamtkostenfunktion

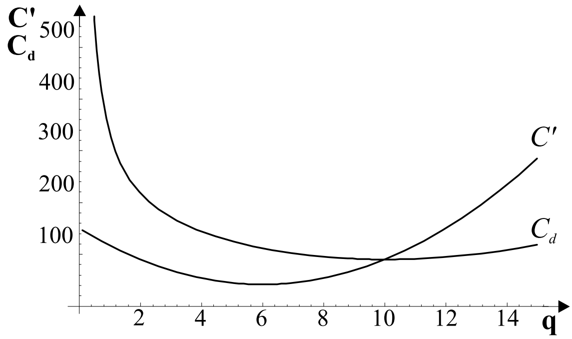


Abb. 34: Durchschnitts- und Grenzkosten

und auf eine produktionstechnische Begründung verzichtet. Da in allen vorangegangenen Abschnitten zur Kostentheorie der Gedanke verfolgt wurde, den Zusammenhang von Produktionsfunktion auf der einen Seite und Faktornachfrage sowie Kostenfunktion auf der anderen Seite zu verdeutlichen, d.h. alle langfristigen und kurzfristigen Kostenfunktionen sowie die dazugehörigen Grenz- und Durchschnittskostenfunktionen aus angegebenen Produktionsfunktionen zu entwickeln, wird auf eine ausführlichere Diskussion der umgekehrt S-förmigen Kostenfunktion verzichtet. Es fragt sich ferner, ob ein derartiger Kostenverlauf repräsentativ für eine moderne industrielle Produktion ist. Viele empirische Untersuchungen sprechen eher für bis zur Kapazitätsgrenze sinkende Durchschnittskosten.

3.3 Güterangebot und Faktornachfrage der Firma

38. Gewinn der Firma. Die im vorangegangenen Kapitel diskutierten Kostenfunktionen geben Auskunft über die Bedingungen einer effizienten Produktion bei gegebenen Faktorpreisen: Das Verhältnis der Grenzproduktivitäten muß gleich dem Verhältnis der zugehörigen Faktorpreise sein. Damit ist aber noch nicht die Frage gelöst, welche Mengen das Unternehmen herstellen oder zu welchen Marktpreisen es die Güter anbieten soll. Man kann noch grundsätzlicher argumentieren und danach fragen, ob die Produktion eines Gutes überhaupt aufgenommen oder sinnvollerweise eingestellt werden soll. In marktwirtschaftlich organisierten Volkswirtschaften gibt es ein Kriterium für die Beantwortung all dieser Fragen - den Gewinn des Unternehmens. Die zentrale Grundannahme der Theorie der Unternehmung bildet folglich die Gewinnmaximierungshypothese. An dieser Annahme ist vielfach Kritik geübt worden, wobei die Kritiker, die andere Unternehmensziele, wie Marktdurchdringung, Umsatzmaximierung unter der Nebenbedingung der Verwirklichung eines befriedigenden Gewinns oder der Beschäftigung von Arbeitskräften, vorschlagen, übersehen, daß in einer Wettbewerbswirtschaft *langfristig* nur jene Firmen im Markt verbleiben, die Gewinne erzielen können. Ferner muß eine kurzfristige Zielorientierung eines Unternehmens, die nicht der Gewinnmaximierung verpflichtet ist, keineswegs dem Ziel einer langfristigen Gewinnmaximierung widersprechen. Kurzfristig kann eine Firma mit Hilfe von niedrigen Preisen einen Markt erobern, auf Gewinne verzichten und die Konkurrenten zu Marktaustritten veranlassen, woraus sich durch spätere Monopolgewinne durchaus ein langfristiges Gewinnmaximum ergeben kann.

Der Gewinn Π einer Firma ist definiert als die Differenz zwischen den gesamten Markterlösen E und den gesamten Kosten C:

$$\Pi = E - C. \tag{220}$$

Die Markterlöse setzen sich bei einem Unternehmen mit m Produkten zusammen aus den verkauften Gütermengen $q_j^s,\ (j = 1, ..., m)$, multipliziert mit den jeweiligen Verkaufspreisen $p_j,\ (j = 1, ..., m)$

$$E = \sum_{j=1}^{m} q_j^s \cdot p_j. \tag{221}$$

Es ist möglich, daß die verkauften Gütermengen von der Höhe des Marktpreises abhängen, m.a.W., es liegen preiselastische Nachfragefunktionen $q_j^s =$

$q_j^s(p_j)$ vor. Ferner können die Verkaufsmengen auch von den Preisen der konkurrierenden Firmen k beeinflußt werden $q_j^s = q_j^s(p_j, p_{j,k})$, wobei die Preisänderungen der Konkurrenten als Reaktion r auf Preisänderungen der betrachteten Firma, $p_{j,k} = \phi(p_j)$ mit $dp_{j,k}/dp_j$, verstanden werden können. Unter Verwendung der Kostenfunktion (207), die die Kosten in Abhängigkeit von den Produktionsmengen q_j^p, $(j = 1, ..., m)$ beschreibt, können die Kosten wie folgt formuliert werden:

$$C = \sum_{j=1}^{m} C_j(q_j^p) + C_f. \tag{222}$$

Unterstellt man, daß die verkauften Gütermengen in einer Periode den produzierten Gütermengen entsprechen ($q_j^s = q_j^p = q_j$), so kann die allgemeine Gewinngleichung wie folgt formuliert werden:

$$\Pi = \sum_{j=1}^{m} q_j(p_j, p_{j,k}) \cdot p_j - \sum_{j=1}^{m} C_j(q_j(p_j, p_{j,k})) - C_f. \tag{223}$$

Diese Gewinngleichung beschreibt die empirisch sicherlich wichtigste Erscheinungsform: das auf einem Oligopolistischen Markt tätige Mehrproduktunternehmen. Berücksichtigt man statt der Nachfragefunktion $q_j(p_j)$ die inverse Form $p_j(q_j)$, so kann die Gewinnfunktion in Abhängigkeit von $i = 1, ..., n$ Faktoreinsatzmengen v_i, von $i = 1, ..., n$ Faktorpreisen w_i, der Produktionsfunktion (131) $q_j = q_j(v_{1,j}, ..., v_{n,j})$ und der Kostenfunktion (206) $C_j = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} v_{j,i} \cdot w_{j,i} + C_f$ wie folgt geschrieben werden:

$$\Pi = \sum_{j=1}^{m} q_j(v_{1,j}, ..., v_{n,j}) \cdot p_j(q_j(v_{1,j}, ..., v_{n,j})) - \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} v_{j,i} \cdot w_{j,i} - C_f. \tag{224}$$

Mit Hilfe der Gewinngleichung (223) kann die Frage beantwortet werden, welche Preissetzung auf dem Gütermarkt bzw. welche Gütermengen zu einem maximalen Gewinn führen (Outputregel der Gewinnmaximierung). Gleichung (224) kann Auskunft über die gewinnmaximalen Inputmengen geben (Inputregel der Gewinnmaximierung). Wir wollen uns der Lösung dieser Fragen schrittweise nähern und die dem Leser vielleicht unübersichtlich erscheinenden Gewinngleichungen zunächst stark vereinfachen. Zu diesem Zweck sollen die nachfolgenden Annahmen formuliert werden:

A1 Die Firma verfolgt das Ziel der Gewinnmaximierung.

A2 Die Produktionstechnologie ist exogen gegeben und wird nicht durch technischen Fortschritt verändert.

A3 Die Güterpreise sind bekannt, entweder konstant oder eine Funktion der Verkaufsmenge.

A4 Die Faktorpreise sind bekannt, entweder konstant oder eine Funktion der Einkaufsmenge.

A5 Da keine Lagerhaltung stattfindet, sind die produzierten Mengen in einer Periode gleich den verkauften Mengen.

A6 Die Firma produziert nur ein Gut.

Die Annahmen $A1$ bis $A6$ werden auch für die Diskussion der Marktergebnisse in den Kapiteln 4 und 5 Verwendung finden.

39. Outputregel. Es soll angenommen werden, daß die Firma nur ein Produkt herstellt, die Preissetzung der Konkurrenten unabhängig vom Preis der Firma ist und daß die verkaufte Gütermenge den Marktpreis nicht beeinflußt (Preisnehmer). Die Gewinngleichung eines Einproduktunternehmens auf einem Markt mit vielen Mitanbietern, auf dem jeder einzelne von ihnen keinen Einfluß auf den Marktpreis hat – wir nennen einen solchen Markt „polypolistische Konkurrenz“ – ist sehr einfach; Gleichung (223) reduziert sich zu

$$\Pi = q \cdot p - C(q) - C_f. \tag{225}$$

Da der Marktpreis gegeben ist, kann das Unternehmen nur die Mengenvariation als Aktionsparameter einsetzen. Maximiert man die Gewinnfunktion (225) bezüglich q, so lauten die Bedingungen für ein Gewinnmaximum 1. Ordnung

$$d\Pi/dq = p - dC(q)/dq = 0 \tag{226}$$

und 2. Ordnung

$$d^2\Pi/dq^2 = -d^2C(q)/dq^2 < 0. \tag{227}$$

Aus der Bedingung 2. Ordnung wird deutlich, daß die Grenzkostenkurve im betrachteten Bereich einen positiven Anstieg haben muß, da $d^2C(q)/dq^2 > 0$ gilt. Aus Abschnitt 35 wissen wir, daß von der Klasse der aus Cobb-Douglas-Funktionen abgeleiteten langfristigen Kostenfunktionen nur jene diese Bedingung erfüllen, die auf einer Produktionsfunktion mit abnehmenden Skalenerträgen basieren. Aus Abschnitt 36 ist ferner bekannt, daß auch kurzfristige Grenzkostenfunktionen auf der produktionstechnischen Grundlage linear homogener Cobb-Douglas-Funktionen diese Eigenschaft aufweisen. Es lassen sich weitere Kostenfunktionen finden, die die Bedingung (227) erfüllen. Beispielsweise ist dies bei der Kostenfunktion $C = aq^3 - bq^2 + cq + C_f$ für $3aq > b$ der Fall. Aus der Bedingung 1. Ordnung erhält man die Anweisung an die Firmenleitung: die Produktionsmenge ist so weit, nämlich bis q^*, auszudehnen, bis die Grenzkosten dem Grenzerlös entsprechen, der im polypolistischen Markt gleich dem gegebenen Marktpreis ist:

$$p = dC(q)/dq. \tag{228}$$

Dieses Resultat, die „Grenzkosten-gleich-Preis-Regel“, ist folglich eine spezielle Regel für den polypolistischen Markt und entspricht der allgemeinen „Grenzkosten-gleich-Grenzerlös-Regel“. Diese Regel stellt keineswegs sicher, daß tatsächlich ein positiver Gewinn erreicht werden kann, da beispielsweise die Fixkosten größer als die erwirtschafteten Deckungsbeiträge sein können. Es lassen sich unter Berücksichtigung der Fixkosten grundsätzlich vier Situationen unterscheiden, in denen die Outputregel $p = C'$ gleichwohl die Produktionsmenge q^* bestimmt:

— Der Preis ist höher als die gesamten Durchschnittskosten (beispielsweise $C_D = aq^2 - bq + c + C_f/q < p$), wodurch ein positiver Gewinn entsteht.

— Der Preis entspricht den gesamten Durchschnittskosten. Der Gewinn ist genau Null, und alle Kosten werden gedeckt. In diesem Fall hat der Preis seine langfristige Untergrenze erreicht.

— Der Preis liegt zwischen den gesamten und den variablen Durchschnittskosten (beispielsweise $C_D = aq^2 - bq + c + C_f/q > p > C_{vD} = aq^2 - bq + c$). Der Verkaufserlös deckt die variablen Kosten und einen Teil der Fixkosten. Da Fixkosten kurzfristig nicht zu Ausgaben führen, bezeichnet man die variablen Durchschnittskosten – im kostentheoretischen und liquiditätstheoretischen Sinne – als kurzfristige Preisuntergrenze. In diesem Fall werden die Verluste durch die $p = C'$-Regel minimiert.

— Der Preis liegt unter den variablen Durchschnittskosten. Der minimale Verlust entspricht C_f; es wird nicht produziert.

Aus den diskutierten Gründen können wir die Güterangebotsfunktion der Firma $q = \phi(p)$ als den *relevanten* Abschnitt der Grenzkostenkurve verstehen, der nach unten hin durch die alternativen Durchschnittskostenkurven

($p_u = C_D$ oder C_{vD}) begrenzt wird. Im Fall der kurzfristigen Kostenfunktion (209), die aus der Cobb-Douglas-Produktionsfunktion $q = \bar{K}^{1/2}L^{1/2}$ abgeleitet wurde und $C = lq^2\bar{K}^{-1} + r\bar{K}$ lautet, kann die zugehörige Angebotsfunktion unter Berücksichtigung der Outputregel (228) wie folgt formuliert werden:

$$q = \frac{\bar{K}p}{2l}, \quad p \geq p_u. \tag{229}$$

Verwendet man die S-förmige Kostenfunktion $C = aq^3 - bq^2 + cq + C_f$, so kann die entsprechende Angebotsfunktion der Firma mit

$$q = \frac{b + \sqrt{b^2 - 3a(c-p)}}{3a}, \quad p \geq p_u \geq (3ac - b^2)/(3a) \tag{230}$$

angegeben werden. Es wird aus diesen beiden Beispielen deutlich, daß die Angebotsfunktion von der Kostenfunktion und diese von der Produktionstechnologie und den Faktorpreisen bestimmt werden.

40. Outputregel bei unterschiedlichen Marktformen. Nunmehr soll wiederum ein Einproduktunternehmen angenommen werden, das aber auf einem Markt alleiniger Anbieter ist. Einen solchen Markt bezeichnen wir als *Monopolmarkt*. Definitionsgemäß ist seine Preissetzung unabhängig von Konkurrenzpreisen. Ferner hängt die Marktnachfrage, die in diesem Fall gleich jener Nachfrage ist, die auf den Anbieter entfällt, vom Preis $q = q(p)$ ab. Die Gewinnfunktion des Monopolisten lautet

$$\Pi = p \cdot q(p) - C(q(p)) - C_f. \tag{231}$$

Die Aufgabe der monopolistischen Firma besteht darin, jenen Güterpreis zu ermitteln, der zu einem maximalen Gewinn führt. Die Bedingungen 1. und 2. Ordnung lauten

$$d\Pi/dp = q(p) + p(dq/dp) - (dC/dq)(dq/dp) = 0 \tag{232}$$

sowie

$$\begin{aligned} d^2\Pi/dp^2 &= 2(dq/dp) + (d^2q/dp^2)p - (d^2C/dq^2)(dq/dp)^2 \\ &- (dC/dq)(d^2q/dp^2) < 0. \end{aligned} \tag{233}$$

Sehen wir uns zunächst die Bedingung zweiter Ordnung genauer an. Die Ableitung der Nachfragefunktion nach dem Preis ($dq/dp = q'$) ist - unterstellt man eine normale Nachfragefunktion - immer negativ. Die zweite Ableitung der Nachfragefunktion ($d^2q/dp^2 = q''$) kann positiv, negativ oder Null sein, je nachdem ob eine konkave, konvexe oder lineare Nachfragefunktion vorliegt. Die erste Ableitung der Kostenfunktion ($dC/dq = C'$) ist sinnvollerweise als positiv anzunehmen, und die zweite Ableitung ($d^2C/dq^2 = C''$) kann wiederum positiv, negativ oder Null sein. Der Marktpreis p wird als nicht negativ angenommen. Gleichung (233) kann vereinfacht als

$$2q' + q''p - C''(q')^2 - C'q'' < 0 \tag{233'}$$

geschrieben werden. Die Bedingung erster Ordnung kann unter Verwendung der Preiselastizität der Nachfrage $\eta_{qp} = (dq/dp)(p/q) < 0$ auch als

$$q(p) + p(dq/dp) - (dC/dq)(dq/dp) = 0,$$

$$p + q(p)/(dq/dp) = dC/dq,$$

$$\left(1 + \frac{1}{(dq)/(dp) \cdot (p/q)}\right) p = \frac{dC}{dq},$$

$$(\frac{1}{\eta_{qp}} + 1)p = \frac{dC}{dq} \tag{234}$$

geschrieben werden. Diese Bedingung bezeichnet man als *Amoroso-Robinson-Relation*, wobei $\eta_{qp} < -1$ sein muß, da die Grenzkosten dC/dq sinnvollerweise als größer Null angenommen werden. Im Monopolmarkt gilt folglich die allgemeine Outputregel *Grenzkosten = Grenzerlös*. Der Grenzerlös dE/dp entspricht der linken Seite der Gleichung. Die Grenzkosten sind kleiner als der Marktpreis, da der Klammerausdruck auf der linken Seite Werte zwischen Null und Eins annehmen kann.

Die Marktentscheidungen eines Unternehmens können auch von den Preissetzungen oder Angebotsmengen der Konkurrenten abhängen. Dies ist dann der Fall, wenn nur wenige Firmen am Markt auftreten, jede Firma über einen relativ großen Marktanteil verfügt und die Aktivitäten eines Anbieters den erwarteten Verkaufspreis oder die erwarteten Verkaufsmengen der restlichen Firmen beeinflussen. Einen solchen Markt bezeichnen wir als *Oligopolmarkt*. Ein Oligopolmarkt ist folglich durch zwei Kriterien gekennzeichnet. Zum einen befinden sich wenige Anbieter (oder Nachfrager) am Markt. Dies ist eine notwendige, aber keine hinreichende Bedingung, da sich die Frage nach der Abgrenzung von wenigen zu vielen Marktteilnehmern stellt. Die zweite Bedingung ist in den möglichen, wechselseitigen Erwartungen und Berücksichtigungen der Konkurrentenreaktionen auf Preis-oder Mengenänderungen zu sehen. Da die Gewinnmaximierungsbedingungen im Oligopol also auch von den erwarteten Reaktionen der Konkurrenten abhängen und über diese verschiedene Annahmen existieren, gibt es in der Literatur eine Vielzahl von Modellen, die recht komplexe formale Strukturen aufweisen. Aus diesem Grund ist der Gewinnermittlung im Oligopolmodell ein eigenes Unterkapitel (5.2) gewidmet.

41. Inputregel. Wir haben bisher nach den Gewinnmaximierungsbedingungen hinsichtlich der Outputmenge der Firma auf dem Gütermarkt gefragt. Wie aber sehen die gewinnmaximalen Faktoreinsatzmengen bei gegebenen Faktorpreisen aus, und welche Nachfrage nach den Produktionsfaktoren kann unter der Annahme eines gewinnmaximierenden Verhaltens der Unternehmen abgeleitet werden? Dieser Frage soll in dem folgenden Abschnitt nachgegangen werden. Dabei wird ein Einproduktunternehmen angenommen, das entweder auf dem Gütermarkt Monopolist oder Preisnehmer (Mengenanpasser) und auf dem Faktormarkt entweder Mengenanpasser oder alleiniger Nachfrager (Monopsonist) ist. Damit ist nicht mehr die Outputmenge q die zu optimierende Variable, sondern die Inputmengen $v_1, ..., v_n$. Es erweist sich als zweckmäßig, diese Frage zunächst von der empirisch selten anzutreffenden Kombination Monopol/Monopson aus zu beantworten und schrittweise andere Marktformen einzubeziehen.

Ausgangspunkt der Überlegungen möge die Gewinnfunktion des Monopolisten (231) aus Abschnitt 40 sein:

$$\Pi = p \cdot q(p) - C(q(p)) - C_f. \tag{231}$$

Zunächst ersetzen wir die Nachfragefunktion $q = q(p)$ durch die inverse Nachfragefunktion $p = q^{-1}(q)$ oder $p = p(q)$. Ferner berücksichtigen wir die Produktionsfunktion (131) aus Abschnitt 26: $q = f(v_1, ..., v_n), \;\; i = 1, ..., n$, so daß die Outputmengen der Firma auf ihre Inputmengen zurückgeführt werden können. Schließlich tauschen wir die in der Gewinnfunktion (231) enthaltene Kostenfunktion $C = C(q) + C_f$ gegen eine von den Kostenarten abhängende Kostenfunktion aus, wie sie in Abschnitt 34 in Gleichung (174) angegeben ist: $C = v_1w_1 + ... + v_nw_n$, wobei alle Faktoren als variabel angenommen werden. Da im Falle des Monopsons (des Nachfragemonopols) auf dem Faktormarkt die Faktorpreise nicht mehr als gegeben betrachtet werden können, sondern sich mit der nachgefragten Faktormenge ändern, gilt: $w_i(v_i), \;\; i = 1, ..., n$. Wie man leicht sieht, setzen sich die Grundlagen unseres

Problems aus schon bekannten Elementen zusammen. Die Gewinnfunktion des Monopols lautet nunmehr

$$\Pi = p(f(v_1, ..., v_n)) \cdot (f(v_1, ..., v_n)) - v_1 w_1(v_1) - .... - v_n w_n(v_n). \quad (235)$$

Fragt man nach der optimalen Einsatzmenge des Produktionsfaktors v_i bei Konstanz aller anderen Produktionsfaktoren $\bar{v}_2, ..., \bar{v}_n$, so ist genau jene Menge zu wählen, die den Gewinn maximiert. Die Bedingungen erster Ordnung für ein Gewinnmaximum lauten

$$\frac{\partial \Pi}{\partial v_i} = \frac{dp}{df}\frac{\partial f}{\partial v_i} \cdot f + p\frac{\partial f}{\partial v_i} - \frac{dw_i}{dv_i} \cdot v_i - w_i = 0 \quad (236)$$

und - schreiben wir nun für $f(.) = q$ - die Bedingungen zweiter Ordnung:

$$(p + q\frac{dp}{dq})\frac{\partial^2 q}{\partial v_i^2} + (2\frac{dp}{dq} + q\frac{d^2 p}{dq^2})(\frac{\partial q}{\partial v_i})^2 < 2\frac{dw_i}{dv_i} + v_i\frac{d^2 w_i}{dv_i^2}. \quad (237)$$

Da dieser Ausdruck etwas unübersichtlich ist, soll er vereinfacht werden. Setzt man für die erste Ableitung des Erlöses nach der Produktionsmenge E', für die zweite Ableitung des Erlöses nach der Produktionsmenge E'' und für die zweite Ableitung der Kosten nach der Inputmenge v_i in diesem Fall $C_{v_i v_i}$, so vereinfacht sich der Ausdruck zu

$$E'\frac{\partial^2 q}{\partial v_i^2} + E''(\frac{\partial q}{\partial v_i})^2 < C_{v_i v_i}. \quad (237')$$

Schreiben wir in den Bedingungen erster Ordnung die Grenzproduktivität des Faktors i, $\partial q/\partial v_i$., vor die Klammer, so erhalten wir

$$\frac{\partial q}{\partial v_i}(\frac{dp}{dq} \cdot q + p) = \frac{dw_i}{dv_i} \cdot v_i + w_i. \quad (236')$$

Bei Verwendung der Preiselastizität der Nachfrage auf dem Gütermarkt $\eta = (dq/dp)(p/q)$ und der Faktorpreiselastizität des Angebots auf dem Faktormarkt $\varepsilon = (dv_i/dw_i)(w_i/v_i)$, können die Bedingungen wie folgt geschrieben werden

$$p(1 + \frac{1}{\eta})\frac{\partial q}{\partial v_i} = w_i(1 + \frac{1}{\varepsilon})$$

$$\text{oder} \qquad w_i^* = \frac{p\left(1 + \frac{1}{\eta}\right) \partial q/\partial v_i}{(1 + \frac{1}{\varepsilon})}. \quad (238)$$

Im Gewinnmaximum ist der Faktorpreis gleich dem Quotienten aus folgenden Größen: Auf dem Bruchstrich steht der Grenzerlös, der durch den

Einsatz einer weiteren Einheit des Faktors v_i erzielt wird. Unter dem Bruchstrich stehen die zusätzlichen Kosten, die durch den Einsatz einer weiteren Einheit des Faktors v_i verursacht werden. Die gewinnmaximale Faktoreinsatzmenge ergibt sich aus der Faktornachfragefunktion:

$$v_i^* = v_i(w_i^*). \tag{239}$$

Dieser Ansatz wird in der ökonomischen Literatur als „Grenzproduktivitätstheorie" oder ausführlicher als „Grenzproduktivitätstheorie der Faktorentlohnung" bezeichnet.

42. Inputregel bei unterschiedlichen Marktformen. Die in Gleichung (238) dargestellte Gleichgewichtsbedingung für den Faktoreinsatz einer Firma gilt - wie schon gesagt wurde - für den Fall des Monopols auf dem Gütermarkt und des Monopsons auf dem Faktormarkt. Weisen einer der beiden Märkte oder beide Märkte die Eigenschaften eines Polypolmarktes auf, d.h. treten auf dem Gütermarkt viele Anbieter und/oder auf dem Faktormarkt viele Nachfrager auf, so ändert sich das Ergebnis in Gleichung (238). Viele Güteranbieter bewirken, daß bereits sehr kleine Preisänderungen zu sehr großen Rückgängen der Nachfrage führen, d.h. die Preiselastizität der Nachfrage strebt gegen minus unendlich. Viele Faktornachfrager bewirken analog dazu eine Faktorpreiselastizität des Angebotes von (plus) unendlich. Da 1 dividiert durch eine gegen ∞ strebende Elastizität gegen Null strebt, reduzieren sich im Polypol-Fall die Ausdrücke $p(1+\frac{1}{\eta})$ zu p und $w_i(1+\frac{1}{\varepsilon})$ zu w_i. Die Ergebnisse für die vier möglichen Unterformen aus Monopol/Monopson und Polypol können wie folgt dargestellt werden:

Monopol auf dem Gütermarkt/Monopson auf dem Faktormarkt (wie oben):

$$p(1+\frac{1}{\eta})\frac{\partial q}{\partial v_i} = w_i^*(1+\frac{1}{\varepsilon})$$

oder

$$\frac{p(1+\frac{1}{\eta})\partial q/\partial v_i}{(1+\frac{1}{\varepsilon})} = w_i^*, \tag{238}$$

Monopol auf dem Gütermarkt/Polypol auf dem Faktormarkt:

$$p\left(1+\frac{1}{\eta}\right)\frac{\partial q}{\partial v_i} = w_i, \tag{240}$$

Polypol auf dem Gütermarkt/Monopson auf dem Faktormarkt:

$$p\frac{\partial q}{\partial v_i} = w_i^*\left(1+\frac{1}{\varepsilon}\right)$$

oder

$$\frac{p(\partial q/\partial v_i)}{(1+\frac{1}{\varepsilon})} = w_i^*, \tag{241}$$

Polypol auf dem Gütermarkt/Polypol auf dem Faktormarkt:

$$p\frac{\partial q}{\partial v_i} = w_i. \tag{242}$$

Es ist zweckmäßig, die Interpretation der Ergebnisse bei Gleichung (242) zu beginnen. Im Falle polypolistischer Absatz- und Beschaffungsmärkte ist die in monetären Einheiten gemessene Faktorentlohnung w_i gleich dem mit dem Produktpreis bewerteten physischen Grenzprodukt, oder anders gesagt, die nominale Faktorentlohnung ist gleich dem Grenzwertprodukt (auch: Wertgrenzprodukt). Durch einfaches Umstellen der Gleichung (241)

$$\partial q/\partial v_i = w_i/p \tag{242'}$$

folgt daraus aber auch, daß ebenfalls gilt: Die reale Faktorentlohnung w_i/p ist gleich dem physischen Grenzprodukt. Ein Unternehmen setzt solange zusätzliche Faktormengen ein, bis der Wert des zusätzlichen Outputs dem Wert der Faktorentlohnung entspricht. Mit anderen Worten kann gesagt werden, daß die reale Entlohnung eines Produktionsfaktors sich nach dem Outputzuwachs richtet, der durch die letzte Einsatzmenge des Faktors erzeugt wird. Die Faktornachfragefunktion des Unternehmens $v_i = v_i(w_i)$ entspricht dem *relevanten* Abschnitt der Grenzwertproduktkurve, für den gilt $p(\partial^2 q/\partial v_i^2) < 0$ und $p(\partial q/\partial v_i) < pq/v_i$. Die Grenzwertproduktkurve muß fallen, damit ein Inputgleichgewicht existiert und die Nachfrage nach dem Faktor v_i nicht gegen Null strebt. Ferner erfüllt eine Faktorentlohnung über dem durchschnittlichen Wertprodukt nicht die Gewinnmaximierungsbedingung, da sie den Gesamtgewinn vermindert. Nimmt man beispielsweise eine kurzfirstige Cobb-Douglas-Produktionsfunktion $q = L^\beta \bar{K}^\gamma$ und die Kosten $C = lL + r\bar{K}$ an, so lautet die Nachfrage der Firma nach dem Faktor Arbeit (L):

$$L = \left(\frac{l}{\beta p \bar{K}^\gamma}\right)^{\frac{1}{\beta-1}}, \quad l \leq p(L^{\beta-1}\bar{K}^\gamma). \tag{243}$$

Im Falle der S-förmigen Produktionsfunktion $q = (90L^2 - L^3)\bar{K}$ und der gleichen Kosten kann die entsprechende Faktornachfragefunktion mit

$$\begin{aligned} L &= \frac{\sqrt{3}\sqrt{\bar{K}p(2700\bar{K}p - l)}}{3\bar{K}p} + 30 \\ L &> 30, \qquad l \leq \bar{K}p(90L - L^2), \end{aligned} \tag{244}$$

angegeben werden. In Abbildung 35 wird der Einsatz des Faktors L bis zu dem Punkt ausgedehnt, an dem die Bedingung (242') erfüllt ist. Die reale Faktorentlohnung w_i/p ist bei dieser Marktformenkombination exogen gegeben. Wie man aus den Gleichungen (238), (240) und (241) leicht erkennen kann, treffen diese Aussagen nur für den Polypol/Polypol-Fall zu.

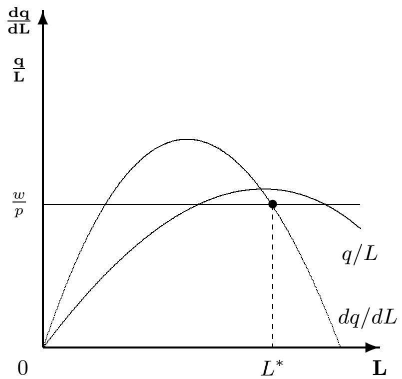


Abb. 35: Inputgleichgewicht im Polypol/Polypol-Fall

Wenn einer der beiden Märkte oder beide Märkte Monopolmärkte sind, ist diese Aussage zu modifizieren. Sehen wir uns zunächst den Monopol/Polypol-Fall in Gleichung (240) näher an. Da die Preiselastizität der Nachfrage η negativ ist (durch die im Normalfall sinkende Nachfrage bei steigendem Preis), ist der Ausdruck auf der linken Seite der Gleichung kleiner als in Gleichung (242). Das bedeutet aber, daß die Faktoren mit einem geringeren Betrag als dem Grenzwertprodukt entlohnt werden. Es entsteht ein monopolistischer Gewinn des Unternehmens. Ein ähnliches Ergebnis läßt sich im Polypol/Monopson-Fall in Gleichung (240) feststellen. Da die Faktorpreiselastizität des Angebotes $\varepsilon > 0$ positiv definiert ist (durch die im Normalfall positiv geneigte Angebotsfunktion), ist der Klammerausdruck in (241) größer 1, und damit werden die Faktoren ebenfalls mit einem geringeren Betrag entlohnt als dem Grenzwertprodukt. Da der Monopol/Monopson-Fall eine Kombination der beiden zuvor diskutierten Fälle darstellt, gilt für ihn das gleiche qualitative Ergebnis.

Wir kehren an dieser Stelle noch einmal zum Polypol/Polypol-Fall zurück. Bisher haben wir angenommen, daß alle Produktionsfaktoren außer einem Faktor konstant gehalten werden. Diese Annahme soll nun aufgegeben und die Variation aller Faktoren zugelassen werden. Beschränkt man die Untersuchung auf die Faktoren Arbeit L und Kapital K in der Produktionsfunktion $q = f(L, K)$, so kann die Gewinnfunktion (235) als

$$\Pi = p \cdot f(L, K) - lL - rK \tag{245}$$

geschrieben werden. Das totale Differential von (245) ist

$$d\Pi = \left(p\frac{\partial q}{\partial L} - l\right) dL + \left(p\frac{\partial q}{\partial K} - r\right) dK = 0$$

und kann unter den Annahmen $dL \neq 0$ und $dK \neq 0$ wie folgt umformuliert werden:

$$\frac{d\Pi}{dL} = p\frac{\partial q}{\partial L} - l + \left(p\frac{\partial q}{\partial K} - r\right) \frac{dK}{dL} = 0 \tag{246}$$

oder

$$p\left(\frac{\partial q}{\partial L} + \frac{\partial q}{\partial K}\frac{dK}{dL}\right) - r\frac{dK}{dL} = l.$$

Der Klammerausdruck in Gleichung (246) entspricht der totalen Ableitung dq/dL des Faktors Arbeit und kann in Gleichung (247) verwendet werden

$$p\frac{dq}{dL} - r\frac{dK}{dL} = l. \tag{247}$$

Die linke Seite der Gleichung bezeichnet man als das Netto-Grenzwertprodukt des Faktors Arbeit, das sich zusammensetzt aus dem Brutto-Grenzwertprodukt des Faktors Arbeit, vermindert um die Kostenveränderungen, die sich aus der Variation des Kapitaleinsatzes ergeben. Analoge Aussagen können auch für die anderen Faktoren, z.B. für den Faktor Kapital, getroffen werden. Die allgemeine Inputregel bei Gewinnmaximierung lautet im Polypol/Polypol-Fall bei Variabilität der Faktoren: Das Netto-Grenzwertprodukt muß gleich der Faktorentlohnung sein. Dieses Resultat kann auf andere Marktformen-Kombinationen übertragen werden.

Zu den Aussagen der Grenzproduktivitätstheorie sind drei wichtige Anmerkungen zu machen: (1) Die Faktorentlohnung wird nach den dargestellten Überlegungen offenbar produktionstechnisch bestimmt. Es darf allerdings nicht übersehen werden, daß die Ergebnisse nicht nur durch die angewandte Technologie determiniert werden, sondern auch durch die angenommenen Verhaltensweisen der Marktteilnehmer – das Gewinnmaximierungsverhalten der Unternehmen – und durch die angenommenen institutionellen Bedingungen – die Marktformen auf Güter- und Faktormärkten. Die Grenzproduktivitätstheorie der Faktorentlohnung stellt somit eine logische Implikation des Modells der gewinnmaximierenden Firma dar. (2) Ein stabiles

Gleichgewicht zwischen Grenzprodukt und Faktorlohnsatz stellt sich nur dann ein, wenn das Grenzprodukt mit zunehmender Faktoreinsatzmenge fällt. Das bedeutet, daß die Produktionsfunktion notwendigerweise die Eigenschaften $\partial q/\partial v_i > 0$ und $\partial^2 f/\partial v_i^2 < 0$ aufweisen muß. (3) Ein Vergleich der Resultate in den Gleichungen (238) und (240) bis (242) ist aus zwei Gründen nicht sinnvoll: Zum einen ist der Marktpreis p im Falle des Monopols immer höher als im Polypol-Fall; bei gleicher Technologie ist aber das physische Grenzprodukt im Polypol-Fall wegen der kleineren Produktionsmenge und $\partial^2 f/\partial v_i^2 < 0$ größer als im Monopol-Fall. Da beide Effekte gegenläufig sind und wir keine Aussage über den Unterschied zwischen den Grenzwertprodukten in beiden Märkten machen können, ist ein Vergleich nicht möglich. Zum anderen ist es denkbar, daß die verwendeten Technologien im Monopol- und Polypol-Fall unterschiedlich sind, wobei es gute Gründe für und gegen die Anwendung einer fortschrittlichen Technologie im Monopol gibt et vice versa. Eine monopolistische Ausbeutung der Produktionsfaktoren kann jedenfalls mit dem hier vorgelegten Instrumentarium nicht belegt werden.

Literaturhinweise zu Kapitel 3:

— Henderson, J. M./Quandt, R. E., *Mikroökonomische Theorie*, 5. Aufl., München 1983.

— Kogiku, K. C., *Microeconomic Models*, New York usw. 1971.

— Ott, A. E., *Grundzüge der Preistheorie*, 3. Aufl., Göttingen 1991.

— Schumann, J./Meyer, U./Ströbele, W., *Grundzüge der mikroökonomischen Theorie*, 7. Aufl., Berlin/Heidelberg 1999.

— Stobbe, A., *Mikroökonomik*, 2. Aufl., Berlin/Heidelberg 1991.

4 Theorie der Märkte: Vollkommene Konkurrenz

43. Definition. Nachdem wir die Wahlhandlungen der Marktteilnehmer, Haushalte und Unternehmen, auf Güter- und Faktormärkten untersucht haben, sollen nunmehr die Märkte näher betrachtet werden. Wir haben die Haushalte als ökonomischen Ort des Konsums und die Unternehmen als ökonomischen Ort der Produktion definiert; wir wollen unter einem Markt den ökonomischen Ort des Tausches verstehen. Im Tauschprozeß bilden sich Tauschrelationen zwischen den Gütern oder Leistungen heraus. Im Naturaltausch, bei dem Güter gegen Güter ohne die Verwendung von Geld getauscht werden, stellt sich zum Beispiel ein Wert einer Seidenkrawatte von drei Arbeitsstunden ein. In einer Geldwirtschaft, dem heute üblichen Fall, tritt Geld im Tauschprozeß zwischen die güterwirtschaftlichen Transaktionen; eine Seidenkrawatte kostet 60 Geldeinheiten, und für eine Arbeitsstunde werden 20 Geldeinheiten gezahlt. Unabhängig von der Art der Tauschwirtschaft informieren die Märkte über den Wert der Güter; der Marktpreis ist Ausdruck der Knappheit eines Gutes. Je knapper ein Gut ist, d.h. je größer die Bedürfnisse nach diesem Gut bei einem gegebenen Güterbestand sind, um so höher ist der Marktpreis. Damit hat der Preis eine lenkende Funktion, eine Allokationsfunktion, die das Gut seiner produktivsten oder nutzenmaximalen Verwendung zuführt. Als Nebenprodukt des Marktprozesses und der Marktergebnisse entstehen kostenlose Informationen über Marktentwicklungen, Überschüsse auf der Angebots- oder Nachfrageseite, Erwartungsfehler und Anpassungsprozesse. Der Markt hat somit auch eine Informations- oder Signalfunktion. Wird nur ein Markt und sein Gleichgewichtszustand betrachtet, so spricht man von einem partiellen Marktgleichgewicht, wobei Folgeänderungen auf anderen Märkten vernachlässigt werden (ceteris paribus-Klausel). Die Betrachtung aller Märkte einer Volkswirtschaft und ihrer simultanen Gleichgewichtszustände bezeichnen wir als totales Marktgleichgewicht.

4.1 Markteigenschaften

44. Klassifikationen. Märkte können in vielfältiger Hinsicht unterteilt und klassifiziert werden. Zunächst können vollkommene (homogene) und unvollkommene (heterogene) Märkte unterschieden werden. Ein homogener Markt liegt vor, wenn alle nachstehenden Eigenschaften erfüllt sind: (1) Es werden sachlich bzw. physisch gleichartige Güter gehandelt. (2) Zwischen den am Markt handelnden Personen bestehen keine persönlichen Präferenzen, d.h. weder Abneigungen noch Zuneigungen beeinflussen den Handel. (3) Es findet keine räumliche Preisdiskriminierung statt; an verschiedenen Orten im Raum unterscheiden sich die Preise nur durch die tatsächlichen Transportkostenunterschiede. (4) Es findet keine zeitliche Preisdiskriminierung statt; zu verschiedenen Zeiten gelten die gleichen Preise für ein Gut. (5) Es herrscht vollständige Markttransparenz; alle Teilnehmer eines Marktes, sowohl auf der Nachfrage- als auch auf der Angebotsseite, sind über alle marktrelevanten Sachverhalte informiert. Fehlt nur eine dieser Eigenschaften, so liegt ein heterogener Markt vor. Ist nur die Voraussetzung 5 für einen homogenen Markt nicht erfüllt, so spricht man von einem temporär unvollkommenen Markt. Dahinter steht die Vorstellung, daß die Ausbreitung von Informationen eines gewissen Zeitraumes bedarf; ist sie erfolgt, so wandelt sich der temporär unvollkommene Markt in einen vollkommenen Markt. Auf homogenen Märkten kann es nur genau einen Marktpreis geben, denn es findet sich - rational handelnde Akteure vorausgesetzt - kein vernünftiger Grund, warum eine Preisdifferenz zwischen physisch gleichartigen und subjektiv als gleichwertig wahrgenommenen Gütern bestehen soll. Ein über den Markt informierter Konsument würde gegen sein Nutzenmaximierungskalkül handeln, wenn er für ein in jeder Hinsicht identisches Gut mehr zahlen würde als bei einem anderen Anbieter. Ein Unternehmen würde gegen sein Ziel der Gewinnmaximierung verstoßen, wenn es das Gut zu einem niedrigeren Preis anböte als zu dem Gleichgewichtspreis, der Angebot und Nachfrage zum Ausgleich bringt.

Ferner kann man die Märkte danach unterscheiden, ob es sich um organisierte oder nichtorganisierte Märkte handelt. Organisierte Märkte zeichnen sich durch die Festlegung von Zeit, Ort und Preisermittlungsverfahren aus. Eine Auktion zum Beispiel findet an einem bekanntzugebenden Ort und Datum statt. Die Preisfindung erfolgt durch Abfragen der Zahlungsbereitschaft, wobei das Gut zu dem höchstmöglichen Preis verkauft wird, der sich üblicherweise nur in dem beschriebenen organisatorischen Rahmen ermitteln läßt. Zu den organisierten Märkten gehören auch die Wertpapier- oder Devisenbörsen. Schließlich kann man die Märkte auch danach unterscheiden, ob der Marktzutritt für neue Unternehmen beschränkt oder unbeschränkt ist. Es ist sinnvoll, von einem beschränkten Marktzutritt zu sprechen, wenn rechtliche, administrative oder andere institutionelle Regelungen den freien Marktzutritt behindern (Approbation für Ärzte und Apotheker, Konzession für Taxis usw.). Unterliegt ein Markt keinerlei institutioneller Zutrittsbarrieren, so können doch ökonomische Gründe den Marktzutritt verhindern, weil beispielsweise die Markteintrittskosten sehr hoch sind oder nach Markteintritt eines weiteren Unternehmens die erwarteten Gewinne aller Firmen am Markt, auch des newcomers, nicht positiv sind.

45. Marktformenschema. Die wichtigste und verbreitetste Unterscheidung der Märkte, die auch für die Gliederung der nachfolgenden Kapitel von Bedeutung ist, knüpft an der Anzahl der Marktteilnehmer und an der relativen Größe ihrer Marktanteile an. Zur Vereinfachung wird die sogenannte Symmetrieannahme eingeführt, die besagt, daß alle Marktteilnehmer einer Marktseite (Angebots- oder Nachfrageseite) über einen gleich großen Marktanteil verfügen. Damit wird eine definitorische und inverse Beziehung zwischen der Anzahl der Marktteilnehmer (n), dem Marktanteil (s) und dem Volumen des Gesamtmarktes (Q) postuliert: $s \equiv Q/n$. Diese Annahme hat zwei wichtige Konsequenzen. Zum einen ermöglicht sie die Aufstellung eines morphologischen Marktformenschemas, das auf eine überschaubare Anzahl von Markttypen begrenzt ist, da jene Konstellationen entfallen, die durch einen großen oder einige große Marktteilnehmer sowie einige kleine oder viele kleine Marktteilnehmer gekennzeichnet sind. Zum anderen erlaubt die Symmetrieannahme die Einführung des Konzepts der sogenannten „repräsentativen Firma“, da alle Firmen nicht nur über gleiche Marktanteile verfügen, sondern diese Tatsache auch auf gleiche Produktionstechnologien und Kosten schließen läßt. Keine der Firmen hat einen technologischen Vorsprung, und daher auch keine einen größeren Marktanteil. Das Konzept der repräsentativen Firma erlaubt es - und dies ist eine große Erleichterung in der Analyse von Marktprozessen -, von der Betrachtung aller Unternehmen abzusehen und sich auf eine Firma zu konzentrieren. Analog dazu kann auch das Konzept des repräsentativen Haushaltes eingeführt werden, wobei angenommen wird, daß alle Haushalte über die gleichen Nutzenfunktionen und Einkommen verfügen, und daher identische Nachfrage am Markt entfalten.

Bei der Formulierung eines Marktformenschemas sollen – neben der Symmetrieannahme – noch weitere Annahmen getroffen werden. Die Anzahl der Marktteilnehmer möge in drei Kategorien eingeteilt werden (einer, wenige, viele), und die Güter, die auf den Märkten gehandelt werden, sollen homogen sein. Daraus ergibt sich ein Neun-Felder-Schema, wobei jedem der Felder ein Name zugeordnet wird.

		Nachfrager		
		einer	*wenige*	*viele*
Anbieter	*einer*	Bilaterales Monopol	Beschränktes Monopol	Monopol
	wenige	Beschränktes Monopson	Bilaterales Oligopol	Oligopol
	viele	Monopson	Oligopson	(Bilaterales) Polypol

Tabelle 2: Marktformenschema

Im Zusammenhang mit den in Tabelle 2 dargestellten Marktformen ergeben sich nun drei Fragen: (1) Welches sind die aus theoretischer (und didaktischer) Sicht wichtigen Marktformen? (2) Welches sind die empirisch bedeutsamen Marktformen? (3) Wodurch unterscheiden sich wenige und viele Marktteilnehmer?

Zur Beantwortung der ersten Frage kann gesagt werden, daß das Angebotsmonopol den Vorzug besitzt, daß man preispolitische Aktionen ohne den störenden Einfluß von Konkurrenten untersuchen kann, da annahmegemäß keine Mitwettbewerber am Markt vorhanden sind. Von potentiellen Konkurrenten und der Berücksichtigung ihres möglichen Markteintrittes bei Preissetzungen des Monopolisten soll einmal abgesehen werden. Die Marktform des Polypols erleichtert die totalanalytische Betrachtung aller Märkte einer Volkswirtschaft, da sich im langfristigen Gleichgewicht alle Gewinne auf Null reduzieren, und damit jeder Anlaß für weitere Veränderungen des Marktes entfällt. Innerhalb der mikroökonomischen Literatur nehmen daher diese beiden Marktformen einen breiten Raum ein.

Aus empirischer Sicht - um die zweite Frage zu beantworten - kommt diesen beiden Marktformen jedoch nur geringe Bedeutung zu. In der deutschen Volkswirtschaft gibt es kaum ein Monopolunternehmen, das privatwirtschaftlich organisiert ist und den gesamten nationalen Markt abdeckt. Es soll nicht bestritten werden, daß einige staatliche Monopole existieren - für die es gute Argumente im Fall der sogenannten „natürlichen Monopole“ gibt - und daß viele regionale Monopole bestehen - man denke nur an die einzige Gaststätte in einem entlegenen Dorf des Bayerischen Waldes. Polypolistische Märkte sind ebenfalls nur in seltenen Ausnahmefällen in der Realität zu finden, wie etwa die Wertpapier- und Devisenbörsen, an denen viele kaufwillige Nachfrager mit vielen verkaufswilligen Anbietern zusammentreffen. Es ist zu beachten, daß viele Marktteilnehmer alleine noch keinen polypolistischen Markt entstehen lassen. Ohne Zweifel gibt es in der deutschen Volkswirtschaft eine große Anzahl von Bäckereien und eine noch größere Anzahl von Nachfragern nach Backwaren. Aus dieser Tatsache auf einen polypolistischen Markt zu schließen ist falsch, da nur die Bäcker eines Dorfes, einer Stadt oder eines Stadtteils in konkurrierender Beziehung zueinander stehen, woraus sich die Marktform eines regional begrenzten Oligopols ergibt. Die Marktformen mit wenigen Nachfragern oder einem Abnehmer und einem Anbieter oder wenigen Anbietern sind vor allem im Bereich der nicht konsumreifen Zwischenprodukte anzutreffen. Für Spezialmaschinen gibt es bei wenigen Nachfragern oft nur einen Hersteller (Beschränktes Monopol) oder nur wenige Produzenten (Bilaterales Oligopol). Einen Anbieter und einen Nachfrager (Bilaterales Monopol, nicht zu verwechseln mit dem beidseitigen Monopol, wobei ein Unternehmen alleiniger Anbieter auf dem Gütermarkt und alleiniger Nachfrager auf dem Faktormarkt ist) findet man häufig bei der staatlichen Beschaffung von Rüstungsgütern. Sieht man einmal von diesen Marktformen ab und betrachtet jene, die sich durch viele Nachfrager auszeichnen, so kann gesagt werden, daß die empirisch relevante Marktform die des Oligopols ist; Konsumenten treffen in fast allen Beschaffungsbereichen auf wenige Anbieter.

Wieviele Anbieter zahlenmäßig „wenige“ sind - und damit sind wir bei der Beantwortung der dritten Frage - kann nicht ohne weitere Informationen über das Verhalten der Firmen gesagt werden. Orientiert sich ein Anbieter bei der Setzung seiner Aktionsparameter nicht an den erwarteten Reaktionen jedes einzelnen Konkurrenten, sondern nur an den erwarteten Reaktionen der Mitwettbewerber als Gruppe, so liegt ein Polypol vor, und wir klassifizieren die Anzahl der Anbieter als „viele“. Bezieht hingegen eine Firma die erwarteten Reaktionen, und damit die Aktionsparameter jeder einzelnen

Konkurrenzfirma, in seine Marktstrategien ein, so deutet diese Verhaltensweise auf ein Oligopol mit „wenigen“ Anbietern hin. Die Verhaltensweisen bezeichnen wir im ersten Fall als „autonome Strategie“ und im zweiten Fall als „konjekturale Strategie“. Es besteht offensichtlich ein Zusammenhang zwischen Marktform und Verhaltensweise.

46. Marktform und Verhaltensweise. Die Diskussion der Frage, ob Marktergebnisse, also Gleichgewichtspreis und -menge, durch die morphologische Marktform oder durch die Verhaltensweisen der Marktteilnehmer bestimmt werden, hat in der Literatur der Vergangenheit zu einer ausgedehnten Kontroverse geführt. Auf die Darstellung dieser Diskussion kann verzichtet werden, gleichwohl sollen einige Anmerkungen zu diesem Problem gemacht werden. Zunächst einmal dürfte es unstrittig sein, daß einige Marktformen unterschiedliche Verhaltensvarianten erlauben und andere die Verhaltensweise determinieren. Unter der Annahme nicht negativer Gewinne der Anbieter erlaubt das homogene Polypol *nur* die Mengenanpassung bei einem gegebenen Preis: Das einzelne Unternehmen produziert und bietet jene Gütermenge an, bei der die Grenzkosten der Produktion gleich dem vom Gesamtmarkt gegebenen Marktpreis sind. Jede andere Verhaltensweise oder Strategie würde zu Verlusten führen oder nicht durchführbar sein. In diesem Fall kann ohne Zweifel gesagt werden, daß die morphologische Struktur des Marktes die Verhaltensweisen der Anbieter determiniert. Im Monopol-Fall hat der Anbieter die Möglichkeit, einen Preis zwischen jenem zu wählen, der sich aus der „Grenzerlös gleich Grenzkosten-Bedingung“ ergibt (gewinnmaximaler Monopolpreis) und der aus der „Preis gleich Grenzkosten-Bedingung“ resultiert (gewinnmaximaler Polypolpreis). Geht man von den Annahmen aus, daß keine potentiellen Konkurrenten auftreten, d.h. ein Abweichen vom Monopolpreis nach unten aus diesem Grund nicht notwendig ist, und daß die Grenzkosten größer/gleich den Durchschnittskosten sind, d.h. die polypolistische Preissetzung würde keine Verluste entstehen lassen, so gibt es kein rationales Argument, warum bei aller formalen Preisgestaltungsfreiheit der Monopolist nicht den Cournotschen Punkt („Grenzerlös gleich Grenzkosten“), und damit den gewinnmaximierenden Monopolpreis am Markt, verwirklichen soll. Ein ähnliches Ergebnis erhalten wir für den Oligopolmarkt. Wie noch zu zeigen sein wird, existieren unterschiedliche Oligopolmodelle, die sich durch alternative Verhaltensweisen gegenüber den Konkurrenten unterscheiden. Jedoch ist bei gegebenen Kosten- und Nachfragestrukturen genau eine Verhaltensweise mit der Gewinnmaximierungsannahme vereinbar; sie ist modellendogen bestimmbar und mit dem Unternehmensziel konsistent. Als Fazit dieser Überlegungen kann folglich gesagt werden: Wenn man als plausibles Ziel unternehmerischen Markthandelns die Maximierung des Gewinns annimmt, dann bestimmt die Marktform die Verhaltensweise der Firmen am Markt. Billigt man den Firmen zu, daß sie kurzfristig andere Ziele verfolgen und das Ziel der Gewinnmaximierung verletzen, dann erlauben einige Marktformen auch unterschiedliche Verhaltensweisen. Langfristig ist die Verfolgung des Gewinnmaximierungsziels aber eine existentielle Notwendigkeit für jedes Unternehmen, da jedem Kapitaleigentümer alternative ertragreichere Vermögensformen zur Verfügung stehen.

47. Marktabgrenzung. Im Zusammenhang mit dem Marktformenschema wurde angenommen, daß die Güter homogen in physischer Hinsicht und in der Beurteilung durch die Käufer sind. Für jedes Gut kann somit ein wohldefinierter Markt angegeben werden: der Markt für Rohöl, für Zement, für US-Dollar usw. Sind die Güter heterogen, so bereitet die Marktabgrenzung im Einzelfall erhebliche Schwierigkeiten. Zum Markt für Reinigungsmittel gehören beispielsweise Scheuersand, Waschbenzin, Seife und Duschgel, keineswegs konkurrieren alle diese Reinigungsmittel – was leicht einzusehen ist – miteinander. Von einem Reinigungsmittelmarkt in der theoretischen Analyse auszugehen ist offensichtlich nicht zweckmäßig. Es ist aber auch nicht sinnvoll, in Fragen der praktischen Wirtschaftspolitik – etwa in der Wettbewerbsaufsicht bei Firmenzusammenschlüssen – *einen* relevanten Markt zu unterstellen. Zur Lösung dieses Problems bietet sich das Konzept der „Substitutionslücke“ an. Zwar stehen alle Konsumgüter untereinander im Wettbewerb um das Konsumbudget der Haushalte, so daß eine Kette von Substitutionsbeziehungen entsteht. Diese Kette hat aber - um im Bild zu bleiben - starke und schwächere Glieder, genauer gesagt, zwischen einigen Gütern existieren große und zwischen anderen kleine Substitutionselastizitäten, einige Güter lassen sich leichter ersetzen und andere nicht. Ist beispielsweise die Kreuzpreiselastizität der Nachfrage zwischen Seife und Duschgel groß, zwischen beiden Gütern und Waschbenzin klein und ferner zwischen Waschbenzin und Scheuersand wiederum groß, so kann daraus geschlossen werden, daß Seife und Duschgel zu einem Bedarfsmarkt Körperreinigung gehören und durch eine Substitutionslücke von den beiden anderen Gütern getrennt sind, die dem Bedarfsmarkt Gegenstandsreinigung zuzurechnen sind. Für die praktische Wirtschaftspolitik ergeben sich allerdings zwei Probleme: Zum einen müssen empirische Werte für alle Substitutionselastizitäten vorliegen, ein Sachverhalt, der bezweifelt werden kann. Zum anderen müssen Kriterien festgelegt werden, in welchem Fall eine Substitutionselastizität als gering klassifiziert werden kann, ein Problem, das sich nur normativ lösen läßt. Ferner ergibt sich ein theoretisches und praktisches Problem, wenn die Märkte untereinander durch eine Kettenstruktur verbunden sind. Ein Beispiel aus der räumlichen Preistheorie möge dieses Problem verdeutlichen. Nehmen wir an, entlang einer Autobahn seien die Tankstellen T_1 bis T_n gleichmäßig verteilt. Ferner möge aufgrund der Abstände zwischen den Tankstellen jede Tankstelle nur mit den jeweiligen unmittelbaren Nachbarbetrieben konkurrieren, also T_2 mit T_1 und T_3, weiterhin T_3 mit T_2 und T_4, ferner T_4 mit T_3 und T_5 usw. In einem derartigen Kettenoligopol entsteht eine Vielzahl von regional sich überlappenden Märkten, die immer nur von einem bestimmten Anbieter aus identifiziert werden können. Es gibt offensichtlich aber keine Substitutionslücken über die Märkte aller Anbieter hinweg. Nebenbei sei bemerkt, daß an die Stelle eines geographischen Raumes auch ein Eigenschaftsraum treten kann, was das Problem verallgemeinert. In beiden Fällen handelt es sich um heterogene Güter in dem in Abschnitt 44 beschriebenen Sinne.

Die Klassifikation der Märkte und Marktformen kann über das in Tabelle 2 dargestellte einfache Neun-Felder-Schema hinaus verfeinert werden. Läßt man heterogene Güter zu, so erweitert sich die Tabelle auf 18 Felder; führt man die Unterscheidung nach freiem und beschränktem Marktzutritt ein, erhält man 36 Marktformen. Weitere Kriterien vermehren die Anzahl der Marktformen in dem angedeuteten Sinne. Dieser Weg soll allerdings aus zwei Gründen nicht beschritten werden. Zum einen wird eingeräumt, daß einige elementare Klassifikationen durchaus nützlich sind, um sich über Bedingungen der theoretischen Analyse zu verständigen. Es muß jedoch bedacht werden, daß Definitionen allein noch keinen Erklärungsgehalt haben. Zum anderen können nur einige der Marktformen behandelt werden, wobei sich die Auswahl an ihrer empirischen und theoretischen Bedeutung orientiert. In den nachfolgenden Abschnitten werden Monopol, Oligopol und Polypol sowohl unter der Annahme heterogener als auch homogener Güter behandelt. Ein homogenes Polypol wird auch als vollkommene Konkurrenz, vollständige Konkurrenz oder perfect competition bezeichnet.

4.2 Partielles Gleichgewicht bei vollkommener Konkurrenz

48. Annahmen. Die betrachtete Marktform des homogenen Polypols – dies geht aus den einleitenden Ausführungen in den Abschnitten 43 bis 47 hervor – zeichnet sich durch folgende Eigenschaften aus: (1) Viele Nachfrager treffen auf dem Markt auf viele Anbieter. Daraus folgt, daß jeder einzelne Anbieter über einen zu kleinen Marktanteil verfügt, um den Gleichgewichtspreis beeinflussen zu können und seine Angebotsmenge dem durch das Handeln aller Akteure entstehenden Preis anpaßt (Mengenanpasser). (2) Gehandelt wird ein homogenes Gut, woraus bei vollständiger Markttransparenz bereits geschlossen werden kann, daß genau ein Preis existiert, der ein Gleichgewicht auf dem Markt herstellt. (3) Unterstellt wird Gewinnmaximierung durch Unternehmen und Nutzenmaximierung durch Konsumenten.(4) Zunächst wird ein kurzfristiges Gleichgewicht betrachtet, das sich durch die Konstanz von wenigstens einem Produktionsfaktor und/oder durch die Abwesenheit von Marktzutritts- und Marktaustrittsprozessen auszeichnet. Anschließend wird das langfristige Gleichgewicht analysiert, in dem alle Produktionsfaktoren variabel und/oder die Marktzutritts- und Marktaustrittsprozesse abgeschlossen sind. (Die Unterscheidung kurzfristig/ langfristig ist folglich mit ökonomischen Sachverhalten verknüpft und nicht mit der Kalenderzeit.) (5) Schließlich wird nur ein Markt für ein Gut betrachtet und die Interdependenzen zu anderen Märkten vernachlässigt. Da auch keine dynamischen Prozesse über die Zeit hinweg untersucht werden, spricht man in einem solchen Fall von einer statischen Partialanalyse.

49. Grundmodell. Die Gewinnmaximierungsbedingung für ein derartiges Modell wurde bereits in Abschnitt 39 diskutiert und soll an dieser Stelle kurz wiederholt werden. Die Gewinngleichung eines Einproduktunternehmens auf einem Markt mit vielen Mitanbietern lautet

$$\Pi = q \cdot p - C(q) - C_f. \tag{225}$$

Da der Marktpreis gegeben ist, kann das Unternehmen nur die Mengen als Aktionsparameter einsetzen. Maximiert man die Gewinnfunktion (225) bezüglich q, so lauten die Bedingungen 1. Ordnung für ein Gewinnmaximum

$$d\Pi/dq = p - dC(q)/dq = 0 \tag{226}$$

und 2. Ordnung

$$d^2\Pi/dq^2 = -d^2C(q)/dq^2 < 0. \tag{227}$$

Aus der Bedingung 2. Ordnung wird deutlich, daß die Grenzkostenkurve im betrachteten Bereich einen positiven Anstieg haben muß $d^2C(q)/dq^2 > 0$. Beispielsweise ist dies bei der Kostenfunktion $C = aq^3 - bq^2 + cq + C_f$ für $3aq > b$ der Fall. Aus der Bedingung 1. Ordnung erhält man die Anweisung an die Firmenleitung: die Produktionsmenge ist so weit auszudehnen, bis die Grenzkosten dem Grenzerlös entsprechen, der im polypolistischen Markt gleich dem gegebenen Marktpreis ist:

$$p = dC(q)/dq. \tag{228}$$

Dieses Resultat kann graphisch als Gesamtdarstellung oder als Grenzdarstellung verdeutlicht werden. In Abbildung 36 (oben) sind Preis und Menge an den Achsen abgetragen. Neben der S-förmigen Kostenfunktion mit einem Fixkostenanteil C_f ist die lineare Erlösfunktion eingezeichnet. Das Gewinnmaximum kann ermittelt werden, indem auf die Kosten gedanklich ein Gewinnaufschlag vorgenommen wird, der so hoch ist, daß Kosten und Gewinn gerade noch von den Erlösen gedeckt werden. Die Menge, für die Erlös gleich Kosten und maximalem Gewinn ist, nennen wir die gewinnmaximale Menge q^*. Graphisch wird der Gewinn durch die Strecke zwischen Erlös und Kosten dargestellt. In Abbildung 36 (unten) sind wiederum Preis und Menge an den Achsen abgetragen, ebenso die als linear und für das einzelne Unternehmen horizontal angenommene Nachfragefunktion.

Nun sind die Grenzkosten dC/dq und die totalen Durchschnittskosten C/q als U-förmige Kurven eingezeichnet, wobei die Grenzkostenkurve die Durchschnittskostenkurve in ihrem Minimum schneidet (vgl. Abschnitt 37). Die Grenzerlöse $dE/dq = p$ sind gleich dem für die einzelne Firma exogen gegebenen Preis. Der Schnittpunkt von Preis (Grenzerlös) und Grenzkosten gibt wiederum die gewinnmaximale Menge q^* an. Das Rechteck p, E (Schnittpunkt Preis mit Grenzkosten), A (Senkrechte auf den totalen Durchschnittskosten) und B repräsentiert den Gewinn als Fläche. Selbstverständlich sind die gewinnmaximalen Mengen in beiden Abbildungen identisch, da sie denselben Sachverhalt nur unterschiedlich präsentieren.

50. Kurzfristiges Gleichgewicht. Die Kosten- und Nachfragefunktionen werden in der nachfolgenden analytischen Behandlung des Problems nicht als gegeben betrachtet, sondern auf die Nutzenfunktionen und Produktionsfunktionen zurückgeführt. Ferner soll zunächst von einem kurzfristigen Gleichgewicht ausgegangen werden, wobei keine Markteintritte und

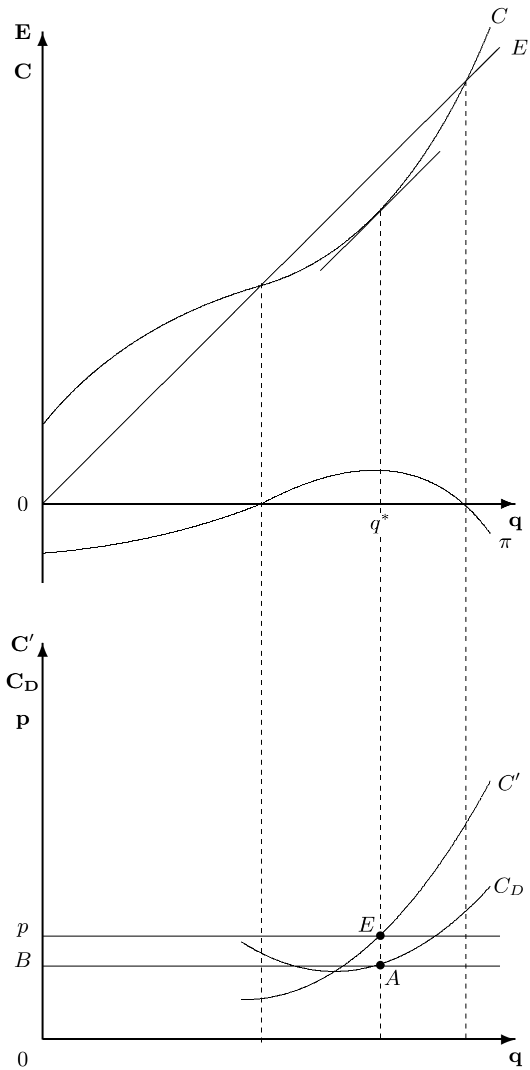


Abb. 36: Gewinn im Polypol

-austritte stattfinden, m.a.W. die Anzahl der Marktakteure ist konstant. Vereinbar mit der kurzfristigen Betrachtung ist auch die Tatsache, daß nicht alle Produktionsfaktoren variabel sind, d.h. sich in der kurzen Frist nicht an veränderte Outputmengen anpassen können. Das Modell hat die folgende Struktur: Es fragen $i = 1$ bis m Haushalte ein Gut nach, das von $j = 1$ bis n Firmen angeboten wird. Alle Haushalte mögen hinsichtlich ihrer Nutzeneinschätzungen (Nutzenfunktion) und Haushaltsausgaben (Einkommensrestriktion) und alle Unternehmen bezüglich ihrer Faktorpreise und Produktionstechnologie (Kostenfunktionen) identisch sein. Haushalts- und Unternehmensoptimum sind aus den beiden vorangegangenen Kapiteln bekannt und sollen hier kurz wiederholt werden. Jedoch ist zu beachten, daß der Marktpreis – anders als in der Haushalts- bzw. Unternehmenstheorie – nicht exogen ist, sondern endogen aus dem Marktgleichgewicht bestimmt wird. Die Ableitung des Gleichgewichtspreises und der Gleichgewichtsmenge erfolgt in fünf Schritten. Zunächst wird die Nachfrage des repräsentativen Haushaltes ermittelt und dann die Gesamtmarktnachfrage durch Aggregation festgestellt. Um Doppelindizierungen weitgehend zu vermeiden, wollen wir in diesem Kapitel einige Variablen umbenennen: Die Gütermengen q_1 und q_2 mögen x und y heißen; das Einkommen wird statt mit y mit e bezeichnet. Auf der Angebotsseite wird das Angebot der repräsentativen Firma bestimmt und danach das Gesamtmarktangebot errechnet. Schließlich kann aus der Gleichsetzung von Marktnachfrage und -angebot bei Markträumung der Preis gefunden werden.

Die Nutzenfunktion des repräsentativen Haushaltes i lautet $U_i = x_i y_i$, wobei x die Menge des gehandelten Guts und y die eines anderen Guts sind. Die Einkommensrestriktion ist $e_i = p_x x_i + p_y y_i$, wobei der Preis p_y durch einen anderen Markt bestimmt wird und für den betrachteten Markt exogen ist. Das Nutzenmaximierungsproblem des Haushaltes lautet:

$$\mathcal{L}(x_i, y_i, \lambda) = x_i y_i + \lambda(e_i - p_x x_i - p_y y_i), \tag{248}$$

und aus den partiellen Ableitungen der Lagrangefunktion (Bedingungen 1. Ordnung)

$$\mathcal{L}_{x_i} = y_i - \lambda p_x = 0,$$

$$\mathcal{L}_{y_i} = x_i - \lambda p_y = 0,$$

$$\mathcal{L}_{\lambda} = e_i - p_x x_i - p_y y_i = 0$$

erhält man die Nachfrage des Haushaltes i nach dem Gut x

$$x_i^d = \frac{e_i}{2p_x}. \tag{249}$$

Der Weg von Gleichung (248) zu (249) ist in Abschnitt 12 ausführlich dargestellt. Die Gesamtmarktnachfrage X^d ergibt sich aus der Aggregation über alle Haushalte m, die bei identischen Haushalten leicht durchzuführen ist:

$$X^d = \sum_{i=1}^{m} x_i = \sum_{i=1}^{m} \frac{e_i}{2p_x} = \frac{E}{2p_x}, \tag{250}$$

mit $E = \sum e_i$ oder $E = me_i$, der Kaufkraft aller Haushalte.

Die Produktionsfunktion der repräsentativen Firma j sei $x_j = K_j^{0,5} L_j^{0,5}$, mit den Faktoren Arbeit L_j und Kapital K_j. Die Gesamtkosten (Budgetrestriktion) lauten bei gegebenen Faktorpreisen für Arbeit l und Kapital r nunmehr $C_j = lL_j + rK_j$. Da das kurzfristige Marktgleichgewicht untersucht wird, wollen wir annehmen, daß der Kapitaleinsatz in der kurzen Frist unveränderbar ist. Aus der Produktionsfunktion folgt bei $\bar{K}_j = const.$ für die Arbeitsnachfrage $L_j = x_j^2/\bar{K}_j$, die in die kurzfristige Kostenfunktion eingesetzt wird:

$$C_j = lL_J + rK_j = lx_j^2/\bar{K}_j + r\bar{K}_j. \tag{251}$$

Die kurzfristige Grenzkostenfunktion lautet:

$$\frac{dC_j}{dx_j} = \frac{2lx_j}{\bar{K}_j}. \tag{252}$$

Da bei Annahme vollkommener Konkurrenz die Gewinnmaximierungsbedingung „Preis gleich Grenzkosten“ lautet (eigentlich „Grenzerlös gleich Grenzkosten“, aber bei dieser Marktform ist der Grenzerlös immer gleich dem Preis), kann aus der Gleichsetzung von (252) und dem Preis p_x eine firmenindividuelle Angebotsmenge von

$$x_j^s = \frac{p_x \bar{K}_j}{2l} \tag{253}$$

bestimmt werden. Das Marktangebot als Aggregat der firmenindividuellen Outputmengen beträgt:

$$X^s = \sum_{j=1}^{n} x_j = \sum_{j=1}^{n} \frac{p_x \bar{K}_j}{2l} = \frac{p_x \bar{\mathcal{K}}}{2l}, \tag{254}$$

mit $\bar{\mathcal{K}} = \sum \bar{K}_j$ oder $\bar{\mathcal{K}} = n\bar{K}_j$, dem Kapitaleinsatz aller Firmen.

Ein markträumendes Gleichgewicht stellt sich ein, wenn Angebots- und Nachfragemengen übereinstimmen $X^s = X^d = X^*$. Aus der Gleichsetzung von (250) und (254) erhält man den Gleichgewichtspreis p^*:

$$\frac{E}{2p_x} = \frac{p_x \bar{\mathcal{K}}}{2l},$$

$$p_x^* = \sqrt{lE/\bar{\mathcal{K}}}. \tag{255}$$

Das Marktangebot lautet, ebenso wie die Marktnachfrage, bei diesem Preis:

$$X^s = \frac{\bar{\mathcal{K}}\sqrt{lE/\bar{\mathcal{K}}}}{2l} = 0,5\sqrt{E\bar{\mathcal{K}}/l} = X^*, \tag{256}$$

$$X^d = \frac{E}{2\sqrt{lE/\bar{\mathcal{K}}}} = 0,5\sqrt{E\bar{\mathcal{K}}/l} = X^*. \tag{257}$$

Damit ist das kurzfristige Gleichgewicht bei homogenen Gütern im polypolistischen Markt beschrieben und kann wie in Abbildung 37 dargestellt werden. Die Angebotsfunktion ist linear und die Nachfragefunktion konvex und fallend. Preis und Menge sind endogen und hängen nur von exogenen Variablen ab. In der Realität sind diese nicht unabhängig voneinander: Die Löhne bestimmen das Haushaltseinkommen E, und auch die Höhe des Kapitaleinsatzes $\bar{\mathcal{K}}$ ist von den relativen Faktorkosten l/r abhängig. Diese Zusammenhänge werden aber, ebenso wie der Einfluß anderer Gütermärkte, in der partialanalytischen Untersuchung ausgeblendet.

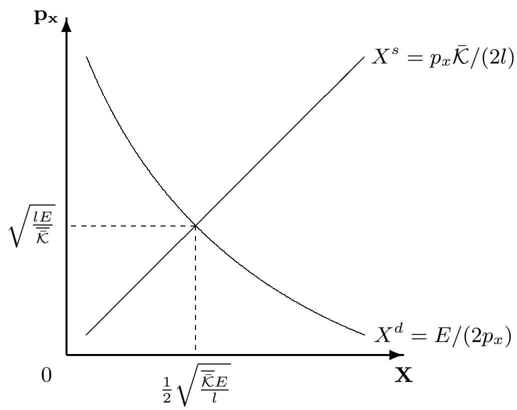


Abb. 37: Kurzfristiges Marktgleichgewicht

51. Langfristiges Gleichgewicht. Das langfristige Gleichgewicht bei vollkommener Konkurrenz (homogenes Polypol) kann auf analoge Weise bestimmt werden. Zu diesem Zweck bleibt die Nachfrageseite unverändert (Gleichungen (249) und (250)). Die langfristige Anpassung auf der Angebotsseite kann zwei Elemente umfassen: Zum einen kann im langfristigen Gleichgewicht die Anzahl der Firmen $\tilde{n}$ durch Marktzutritt größer sein als im kurzfristigen Gleichgewicht ($n \leq \tilde{n}$). Zum anderen sind langfristig alle Produktionsfaktoren variabel. Damit besteht das betriebliche Problem nicht mehr in der partiellen Variation eines Produktionsfaktors, sondern in der Realisierung der Minimalkostenkombination. Dieser Sachverhalt wurde in Abschnitt 35 ausführlich diskutiert und soll hier kurz wiederholt werden. Zur Vereinfachung wird wiederum eine Cobb-Douglas-Funktion mit den partiellen Produktionselastizitäten γ und β sowie dem Niveauparameter $a = 1$ angenommen. Die Kostenfunktion $C_j = lL_j + rK_j$ ist unter der Nebenbedingung $x_j = L_j^{\beta} K_j^{\gamma}$ zu minimieren. Die Lagrangefunktion lautet

$$\mathcal{L}(L, K, \mu) = rK_j + lL_j + \mu(x_j - L_j^{\beta} K_j^{\gamma}) \tag{258}$$

und die partiellen Ableitungen (Bedingungen 1. Ordnung)

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{L_j} &= l - \mu\beta\frac{x_j}{L_j} = 0 \longrightarrow \mu = \frac{lL_j}{\beta x_j}, \\
\mathcal{L}_{K_j} &= r - \mu\gamma\frac{x_j}{K_j} = 0 \longrightarrow \mu = \frac{rK_j}{\gamma x_j}, \\
\mathcal{L}_{\mu} &= x_j - L_j^{\beta} K_j^{\gamma} = 0.
\end{aligned}$$

Setzt man aus den ersten beiden Ableitungen $K_j = L_j(l/r)(\gamma/\beta)$ bzw. $L_j = K_j(r/l)(\beta/\gamma)$ in die dritte Ableitung ein, so erhält man die kostenminimalen Nachfragemengen nach den Produktionsfaktoren Arbeit und Kapital

$$L_j^* = (x_j)^{\frac{1}{\beta+\gamma}} \left(\frac{\beta r}{\gamma l}\right)^{\frac{\gamma}{\beta+\gamma}}, \tag{259}$$

$$K_j^* = (x_j)^{\frac{1}{\beta+\gamma}} \left(\frac{\gamma l}{\beta r}\right)^{\frac{\beta}{\beta+\gamma}}. \tag{260}$$

Verwendet man diese Resultate in der Zielfunktion, so ergibt sich die langfristige Kostenfunktion:

$$C_j = B \cdot x_j^{\frac{1}{\beta+\gamma}} \tag{261}$$

mit

$$B = \left[\left(\frac{\gamma}{\beta}\right)^{\beta} + \left(\frac{\beta}{\gamma}\right)^{\gamma}\right]^{\frac{1}{\beta+\gamma}} \cdot r^{\frac{\gamma}{\beta+\gamma}} \cdot l^{\frac{\beta}{\beta+\gamma}}$$

und den Grenzkosten

$$\frac{dC_j}{dx_j} = \frac{Bx_j^{(1-\gamma-\beta)/(\beta+\gamma)}}{\beta+\gamma}. \tag{262}$$

Setzt man wiederum nach der Gewinnmaximierungsregel für das homogene Polypol die Grenzkosten gleich dem Marktpreis ($p^* = dC_j/dx_j$), so erhält man eine firmenindividuelle Angebotsmenge für $\beta + \gamma < 1$ von

$$x_j = [p_x(\beta + \gamma)/B]^{\frac{\beta+\gamma}{1-\beta-\gamma}} \tag{263}$$

und ein Marktangebot von $X^s = x_j \tilde{n}$. Unter Berücksichtigung der Marktnachfrage (250) läßt sich das Gleichgewicht $X^s = X^d = X^*$ ermitteln. Der Gleichgewichtspreis beträgt

$$p_x^* = \frac{e_i m}{2\tilde{n}} \left(\frac{2\tilde{n}B}{e_i m(\gamma + \beta)} \right)^{\gamma+\beta} = \left(\frac{e_i m}{2\tilde{n}} \right)^{1-\gamma-\beta} \left(\frac{B}{\beta + \gamma} \right)^{\beta+\gamma} \tag{264}$$

und die Gleichgewichtsmenge

$$X^* = \tilde{n} \left(\frac{e_i m(\gamma + \beta)}{2\tilde{n}B} \right)^{\beta+\gamma} . \tag{265}$$

Im Sonderfall $\beta + \gamma = 1$ reduziert sich der Ausdruck für den Gleichgewichtspreis auf $p_x^* = B$ und die Gleichgewichtsmenge auf $X^* = e_i m/(2B)$. Wie man aus den Gleichungen (264) und (265) erkennen kann, ist das langfristige Marktgleichgewicht abhängig von der Kaufkraft der Konsumenten $e_i m$, den Faktorpreisen l und r, die in dem Term B enthalten sind, und der Technologie, die ihren Ausdruck in den partiellen Produktionselastizitäten γ und β findet. Je größer die Kaufkraft ist, und je geringer die Faktorkosten sind, um so größer ist die Gütermenge, die am Markt umgesetzt wird. Gibt man die partialanalytische Sicht auf und nimmt an, daß nur ein Gut x in der Volkswirtschaft produziert wird, so schließt sich der Kreis zwischen Einkommen und Faktorpreisen. Nimmt man an - um Verteilungsfragen auszublenden -, daß sich der Kapitalbestand $\bar{\mathcal{K}}$ und die Arbeitsleistungen $L_j n$ gleichmäßig auf die Haushalte aufteilen, so gilt $e_i = (\tilde{n}/m)(K_j r + L_j l)$, wobei es bei einem gegebenen Faktorbestand genau eine Relation der Faktorpreise (r/l) gibt, die sich als markträumend erweist. Auf diese Fragen soll in den Abschnitten über das totale mikroökonomische Gleichgewicht noch ausführlich eingegangen werden.

52. Stabilität des Gleichgewichtes. Kehren wir an dieser Stelle zur partialanalytischen Betrachtung zurück und fragen nach der Dynamik des Übergangs vom kurzfristigen zum langfristigen Gleichgewicht sowie nach der Stabilität des langfristigen Gleichgewichts. Es wurde bereits darauf hingewiesen, daß der Unterschied zwischen kurzfristigem und langfristigem Gleichgewicht sich auf die Variabilität der Inputfaktoren oder auf den Marktzutritt beziehen kann. Beide Sachverhalte sind unabhängig voneinander und müssen keineswegs in Verbindung miteinander auftreten, auch muß die lange Frist im einen Fall nicht nach Kalenderzeit mit der langen Frist des anderen Falls übereinstimmen. Die lange Frist ist erreicht, wenn ein ökonomischer Sachverhalt eingetreten ist, und nicht, wenn eine bestimmte Anzahl von Monaten verstrichen ist. Können alle Produktionsfaktoren bei variierenden Outputmengen angepaßt werden, so liegt ein langfristiges Firmengleichgewicht vor. Sind durch Markteintritte (oder Marktaustritte) die Gewinne (oder Verluste) der verbleibenden Firmen Null, so besteht für weitere Anpassungsaktivitäten kein Anlaß, und der Markt befindet sich im Zustand des langfristigen Gleichgewichts. Selbstverständlich können sich auch auf der Nachfrageseite Änderungen ergeben, aus denen die Unterscheidung in kurze und lange Frist abgeleitet werden kann. Ein Beispiel ist die Intensität der Bedürfnisse, die im Zeitablauf Wandlungen unterliegen kann.

An dieser Stelle ist es notwendig, eine genauere Definition des Gewinns zu formulieren. Man unterscheidet Normalgewinne (normal profits) und Marktlagengewinne (windfall profits). Der Normalgewinn ist jener Gewinn, der ausreicht, um ein Verbleiben des Unternehmens am Markt zu sichern, er umfaßt bei Eigentümerunternehmen den kalkulatorischen Unternehmerlohn als Entgelt für die Arbeitsleistung des Unternehmers, die kalkulatorische Kapitalverzinsung und eine kalkulatorische Risikoprämie. Diese kalkulatorischen Größen orientieren sich an den alternativen Verwendungen von Arbeit und Kapital, der Unternehmerlohn an den Bezügen bei einer vergleichbaren unselbständigen Managertätigkeit, die Kapitalverzinsung an einer risikolosen Anlage des Kapitals (z.B. in Staatspapieren) und die Risikoprämie an der Verlustwahrscheinlichkeit des in der Firma eingesetzten Kapitals. Der Normalgewinn ist also gleich den Opportunitätskosten für unternehmerische Arbeit und Kapital. Der Marktlagengewinn ist jener Gewinn, der den Normalgewinn temporär übersteigt und seine Ursache in Zufälligkeiten des Marktes hat, sei es nun, weil ein Konkurrent ausgeschieden ist und auf das betrachtete Unternehmen eine höhere Nachfrage entfällt oder weil ein zeitweiliger Technologievorsprung in Fertigung oder Produkt besteht. Dieser Gewinn wird langfristig entweder zu Marktzutritten führen oder zur Imitation der verwendeten Techniken, in jedem Fall wird der Marktlagengewinn sich in funktionierenden Märkten auf Null reduzieren und nicht von

Dauer sein. Wenn das langfristige Marktgleichgewicht durch Nullgewinne gekennzeichnet wird, dann sind damit die Marktlagengewinne, nicht jedoch die Normalgewinne, gemeint. Normalgewinne sind für die langfristige Existenz eines Unternehmens unverzichtbar. Die Trennung in Marktlagen- und Normalgewinne ist eine theoretisch-analytische Unterscheidung, die an ökonomischen Sachverhalten orientiert ist und sich in keiner entsprechenden Aufteilung in der Bilanz niederschlägt.

Der Zusammenhang zwischen langfristigem Marktgleichgewicht und Nullgewinn setzt allerdings sehr kleine Marktanteile der einzelnen Firmen voraus. Sind die Marktanteile größer, so ist es denkbar, daß auch im langfristigen Gleichgewicht auf Dauer positive Gewinne (i.S. der Marktlagengewinne) bestehen bleiben. Ein Beispiel soll diesen Gedanken verdeutlichen: Nehmen wir an, an einem Markt bieten zwanzig Firmen ein Gut an und können positive Gewinne realisieren. Der Zutritt des einundzwanzigsten Unternehmens würde die Marktanteile aller Anbieter - gleiche Unternehmensgrößen unterstellt - reduzieren und zu Verlusten führen. Erwartet der potentielle Marktteilnehmer dieses Ergebnis, so wird er nicht in den Markt eintreten, und die positiven Gewinne werden dauerhaft auch im langfristigen Gleichgewicht bestehen bleiben. Wird der beschriebene Prozeß nicht vorhergesehen, so entstehen nach dem Markteintritt Verluste, die zum Ausscheiden eines Anbieters führen. Hinsichtlich des langfristigen Marktergebnisses zeigen sich keine Unterschiede.

Das in Abschnitt 51 beschriebene langfristige Gleichgewicht soll etwas genauer betrachtet werden. Die Gewinnfunktion des Unternehmens j lautet unter Verwendung der beschriebenen Cobb-Douglas-Produktionstechnologie:

$$\Pi_j = (p_x^* - k_j)x_j, \tag{266}$$

wobei k_j den Durchschnittskosten $k_j = C_j/x_j = Bx_j^{(1-\gamma-\beta)/(\beta+\gamma)}$ entspricht. Unter Berücksichtigung der Gewinnmaximierungsregel (262) kann der langfristige Gewinn einer Firma wie folgt geschrieben werden:

$$\Pi_j = \frac{1-\beta-\gamma}{\beta+\gamma} Bx_j^{1/(\beta+\gamma)}. \tag{267}$$

Ist die Summe der Produktionselastizitäten größer 1, so sind die Grenzkosten, und damit der Preis für alle Produktionsmengen x_j, kleiner als die Durchschnittskosten, woraus sich Verluste ergeben. In diesem Fall versuchen die Unternehmen, die Produktionsmengen zu reduzieren. Ist die Summe der Produktionselastizitäten kleiner 1, so sind die Grenzkosten für alle

Produktionsmengen x_j größer als die Durchschnittskosten, woraus sich Gewinne ergeben. Ist die Summe der Produktionselastizitäten jedoch genau 1, so ist auch der langfristige Gewinn Null, da für alle Produktionsmengen x_j der Preis gleich den langfristigen Grenzkosten und gleich den langfristigen Durchschnittskosten ist. Allerdings sind die Unternehmensgröße und die Anzahl der Unternehmen in dem vorgestellten Modell nicht determiniert. Anders gesagt, das langfristige Ergebnis ist mit jeder Anzahl $\tilde{n}$ vereinbar, wenn nicht Hilfshypothesen, wie etwa eine technisch bedingte maximale Produktionsmenge x_j^{max}, eingeführt werden. In diesem Fall existiert genau eine Lösung für das langfristige Gleichgewicht, ebenso, wenn man U-förmige langfristige Grenz- und Durchschnittskosten annimmt, wie dies in Abbildung 38 geschehen ist.

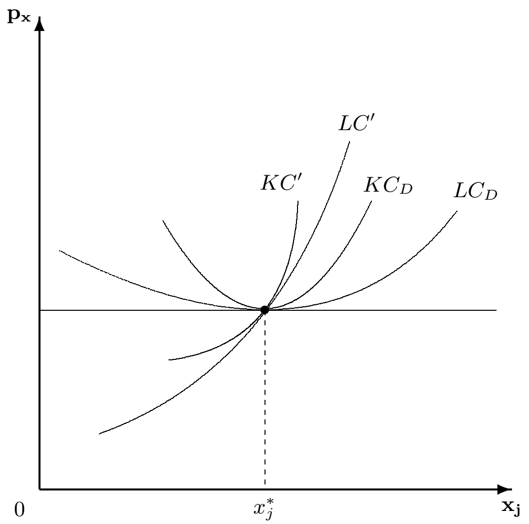


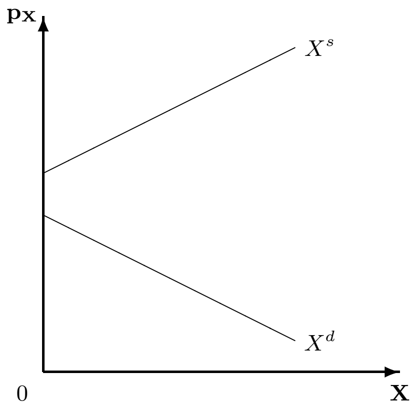
Abb. 38: Langfristiges Gleichgewicht bei U-förmigen Kostenkurven

Das Minimum der langfristigen Durchschnittskostenkurve (LC_D) wird nicht nur von der langfristigen Grenzkostenkurve (LC') geschnitten, sondern tangiert auch die Preislinie (p_x). Daraus folgt im langfristigen Gleichgewicht ein Gewinn von Null. Für jedes langfristige Gleichgewicht existiert auch ein kurzfristiges Gleichgewicht (KC_D, KC'). Ferner lassen sich weitere in Abbildung 35 nicht eingezeichnete kurzfristige Gleichgewichte entlang der langfristigen Durchschnittskostenkurve vorstellen, die bei einem gegebenen Preis nicht auf Dauer Bestand haben können. Ist ein kurzfristiges Gleichgewicht links vom langfristigen Gleichgewichtspunkt angesiedelt, erfolgen Marktaustritte, und damit Kapazitätserweiterungen der einzelnen Firmen bis x_j^* erreicht ist. Wie schon diskutiert wurde, können diesen Kostenverläufen nicht näher bezeichnete inhomogene Produktionsfunktionen zugrunde liegen.

Die Diskussion um die Stabilität des Marktgleichgewichts ist bisher aus dem Blickwinkel des Güterangebots geführt worden. Abgesehen davon, daß diese Diskussion auch hinsichtlich der Nachfrageseite geführt werden kann, stellt sich die Frage nach den Bedingungen für ein Marktgleichgewicht, die gleichzeitig für Angebots- und Nachfrageseite gelten müssen. Diese Frage kann in zwei Teilfragen aufgespalten werden: (1) Existiert ein Gleichgewicht? (2) Wenn es existiert, ist dieses Gleichgewicht stabil? Die Beantwortung dieser beiden Fragen soll auf graphischem Wege geschehen.

Da negative Preise und/oder Gütermengen aus ökonomischer Sicht sinnlos sind und den Definitionen beider Erscheinungen widersprechen, kann gesagt werden: Auf einem Wettbewerbsmarkt existiert ein Gleichgewicht, wenn wenigstens bei einem nicht negativen Preis die nicht negativen Angebots- und Nachfragemengen übereinstimmen. Diese Voraussetzung ist weder in Abbildung 39a noch in Abbildung 39b erfüllt. Die Situation in Abbildung 39a läßt zwar einen positiven Preis zu (wenn man gedanklich die Kurven nach links verlängert), aber keine positive Gütermenge. Die Preise, zu denen die Hersteller das Gut anzubieten bereit sind, liegen bei allen positiven Mengen über den Preisen, die die Nachfrager höchstens zahlen wollen. Als Beispiel können Kühlschränke in handwerklicher Einzelanfertigung genannt werden. Abbildung 39b verdeutlicht eine Situation, in der positive Gütermengen nur zu einem negativen Preis gehandelt würden (wenn man die Kurven gedanklich nach unten verlängert). Bei jedem positiven Preis ist die nachgefragte Menge kleiner als die Angebotsmenge. Bei einem Preis von Null können als Beispiel freie Güter wie Meerwasser und Luft angeführt werden.

Nehmen wir weiterhin an, daß die Angebotskurve einen positiven Anstieg aufweist, die Nachfragekurve aber anomal verläuft und ein Gleichgewicht existiert. In Abbildung 39c weist die Nachfragekurve X^d eine kleinere Steigung auf als die Angebotskurve X^s. Erhöht sich aus einem nicht näher zu untersuchenden Grund der Preis über den Gleichgewichtspreis p_x^*, so entsteht ein Nachfrageüberschuß $X^d - X^s = \Delta X^d$, den die Anbieter durch eine Ausweitung des Angebots entlang der gegebenen Angebotskurve zu behe-



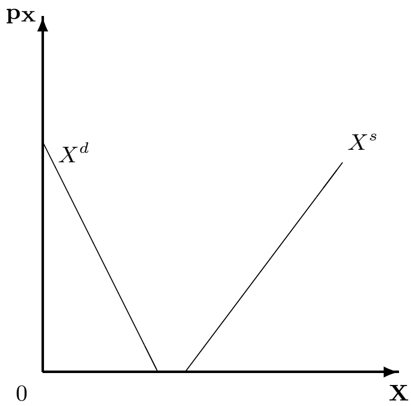
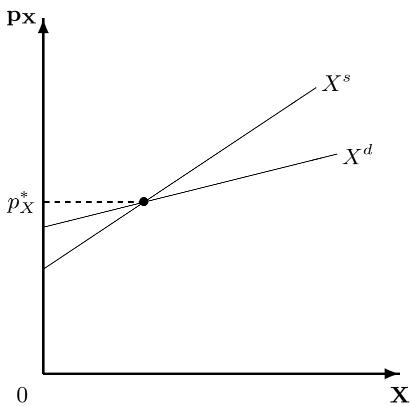


Abb. 39a: Kein Marktgleichgewicht *39b: Kein Marktgleichgewicht*



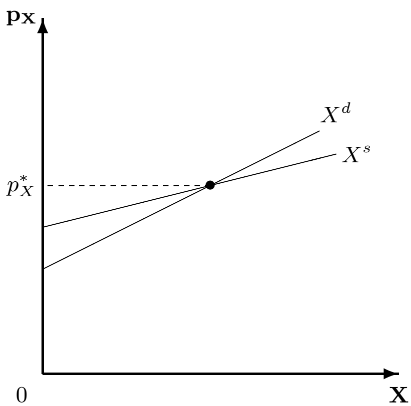


Abb. 39c: Instabiles Marktgleichgewicht *39d: Stabiles Marktgleichgewicht*

ben versuchen. Wie man leicht sieht, vergrößert sich dadurch der Nachfrageüberschuß und nimmt mit weiteren Angebotsausdehnungen zu. Liegt der Preis unterhalb des Gleichgewichtspreises, so entsteht ein Angebotsüberschuß $X^s - X^d = \Delta X^s$, dem die Firmen durch Angebotsreduktion zu begegnen versuchen. In diesem Fall vergrößert sich zweifellos der Angebotsüberschuß und nimmt mit weiteren Angebotseinschränkungen zu. Das Marktgleichgewicht bei p_x^* ist instabil, da Abweichungen vom Gleichgewichtspreis nach oben oder unten dauerhafte Ungleichgewichte erzeugen. In Abbildung 39d weist die Nachfragekurve X^d eine größere Steigung als die Angebotskurve X^s auf. Erhöht sich - ausgehend vom Gleichgewichtspreis - der Marktpreis, so kann ein Angebotsüberschuß $X^s - X^d = \Delta X^s$

festgestellt werden, dem die Firmen durch Angebotseinschränkungen begegnen. Dadurch sinkt der Angebotsüberschuß entlang der Angebotskurve bis zum Marktgleichgewicht. Bei einem Preis unterhalb des Gleichgewichtspreises entsteht ein Nachfrageüberschuß $X^d - X^s = \Delta X^d$, den die Firmen durch Angebotsausweitung bis zum Gleichgewicht beseitigen. Das Marktgleichgewicht bei p_x^* ist stabil, da Abweichungen vom Gleichgewichtspreis nach oben oder unten Anpassungsreaktionen hervorrufen, die Nachfrage- und Angebotsüberschüsse reduzieren. Zusammenfassend kann gesagt werden: Ein stabiles Gleichgewicht existiert, wenn die Steigung der anomalen Nachfragekurve größer als die Steigung der (normalen) Angebotskurve ist. Bei Störungen führen in diesem Fall die Marktkräfte zum ursprünglichen Gleichgewicht ($X^d - X^s = 0$).

53. Konsumenten- und Produzentenrente. Ein Gleichgewichtspreis p^*, der niedriger ist als jene Preise, die ein Teil der Konsumenten zu zahlen bereit ist, und der höher ist als die Preise, zu denen ein Teil der Firmen bereit ist, ein Angebot an den Markt zu bringen, läßt sogenannte Renten entstehen. Damit sind in Geld meßbare Vorteile gemeint, die sich bei den Konsumenten als vermiedene Ausgaben niederschlagen und den Firmen als Bruttogewinne zufließen. Zur Vereinfachung der Argumentation sollen sowohl lineare Nachfragefunktionen $X^d = a - bp$ als auch lineare Angebotsfunktionen $X^s = -c + dp$ mit $a, b, c, d > 0$ angenommen werden. Bei diesen Angebots- und Nachfragefunktionen erhält man ein Marktgleichgewicht $X^s = X^d$ bei einem Gleichgewichtspreis von $p^* = (a + c)/(b + d)$; die Gleichgewichtsmenge lautet ferner $X^* = (ad - bc)/(b + d)$.

Die Nachfragefunktion mit negativem Anstieg impliziert, daß einige Konsumenten bereit sind, einen höheren Preis als den Gleichgewichtspreis p^* zu zahlen. Die Käufer der ersten Mengeneinheiten vom Nullpunkt aus gesehen wären bereit, jeweils die Preise zu zahlen, die die Nachfragefunktion angibt (vgl. Abbildung 40). Alle Konsumenten, abgesehen von jenen Konsumenten, deren Zahlungsbereitschaft gerade bei p^* liegt, können aufgrund des Gleichgewichtspreises, der niedriger als ihre Zahlungsbereitschaft ist, einen Vorteil realisieren. Diese vermiedenen Geldausgaben nennen wir *Konsumentenrente*, die sich, über alle Konsumenten aggregiert, in Abbildung 40 als markierte Fläche unter der Nachfragefunktion darstellt. Bei linearen Nachfragefunktionen erstreckt sich diese Fläche vom Prohibitivpreis a/b bis zum Gleichgewichtspreis p^* und hat die Form eines rechtwinkligen Dreiecks mit

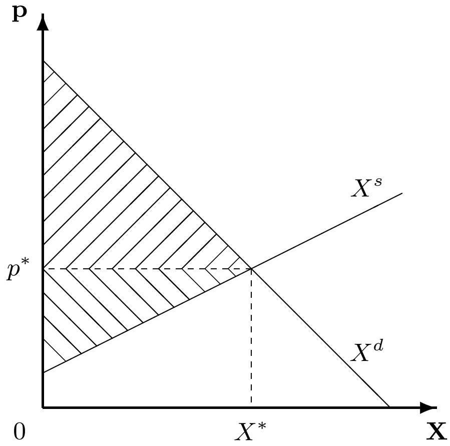


Abb. 40: Konsumenten- und Produzentenrente

den Katheten X^* und $a/b - p^*$. Die Konsumentenrente Γ kann bei der gegebenen linearen Nachfragefunktion nach der Flächenformel für rechtwinklige Dreiecke wie folgt berechnet werden:

$$\Gamma^* = X^*(a/b - p^*)/2,$$

$$\Gamma^* = \frac{(ad - bc)^2}{2b(b + d)^2}. \tag{268}$$

Die Angebotsfunktion mit positivem Anstieg impliziert, daß einige Produzenten bereit sind, zu einem niedrigeren Preis p_j^s als dem Gleichgewichtspreis p^* Güter am Markt anzubieten. Die ersten vom Nullpunkt aus gesehenen Angebotsmengen auf der über alle Firmen aggregierten Angebotsfunktion werden von Unternehmen an den Markt gebracht, die aufgrund ihres niedrigeren Angebotspreises einen Vorteil realisieren können, den man *Produzentenrente* (oder Bruttogewinn, da die Fixkosten noch enthalten sind) nennt. In Abbildung 40 ist die aggregierte Produzentenrente durch die markierte Fläche zwischen Angebotsfunktion und Gleichgewichtspreis gekennzeichnet. Bei linearen Angebotsfunktionen erstreckt sich die Produzentenrente vom geringsten Angebotspreis c/d bis zum Gleichgewichtspreis p^* und hat die Form eines rechtwinkligen Dreiecks mit den Katheten X^* und $p^* - c/d$. Die Produzentenrente Λ kann bei der gegebenen linearen Angebotsfunktion nach der Flächenformel für rechtwinklige Dreiecke wie folgt berechnet werden:

$$\Lambda^* = X^*(p^* - c/d)/2,$$

$$\Lambda^* = \frac{(ad - bc)^2}{2d(b + d)^2}. \tag{269}$$

Die Summe aus Konsumentenrente und Produzentenrente (Gewinne und Fixkosten) bezeichnen wir als Wohlfahrtswirkungen

$$\Omega^* = \Gamma^* + \Lambda^* = \frac{(ad - bc)^2}{2bd(b + d)}, \tag{270}$$

die ein Markt - unabhängig von seiner Form - zu stiften in der Lage ist. Auf die Wohlfahrtseffekte als Beurteilungskriterium alternativer Marktsituationen und Marktformen kommen wir in verschiedenen Zusammenhängen zurück.

M7. Inhomogene Differenzengleichungen ersten Grades. *Für eine in den Zeitpunkten $t = 0, 1, 2, \ldots$ erklärte Größe $x_t = x(t)$ sei der Wert zum Zeitpunkt t von Werten abhängig, die bis zu n Zeitpunkte zurückliegen:*

$$x_t = f(x_{t-1}, x_{t-2}, \ldots, x_{t-n}),\ \ t = n, n + 1, n + 2, \ldots$$

• *Eine derartige Beziehung wird als (explizite)* Differenzengleichung n-ten Grades *für die gesuchte Größe (Zahlenfolge) x_t bezeichnet. Sie stellt eine Vorschrift zur Berechnung des Wertes x_t aus n unmittelbar zurückliegenden Werten dar.*

Daher kann die Lösung schrittweise konstruiert werden:
Sind $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$ bekannt, so kann x_n als nächster Wert aus der Differenzengleichung bestimmt werden, vorausgesetzt, die Funktion f ist für $(x_0, \ldots, x_{n-1})$ erklärt. Anschließend wird aus $x_1, x_2, \ldots, x_n$ der Wert x_{n+1} bestimmt, usw. Die Lösungsfolge $x_t,\ t = 0, 1, \ldots,$ einer Differenzengleichung n-ten Grades ist daher durch die Vorgabe von n sogenannten Anfangswerten *$x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$ eindeutig bestimmt.*

Der einfachste Fall einer Differenzengleichung ersten Grades ist die
• lineare Differenzengleichung mit konstanten Koeffizienten:

$$x_t = bx_{t-1} + a,\ \ t = 1, 2, \ldots,\quad a, b, x_0 \ \textit{gegebene Konstanten.}$$

Hat die Konstante a den Wert 0, so heißt die Gleichung homogen, *im allgemeinen Fall* inhomogen. *Die Lösung einer solchen Differenzengleichung kann formelmäßig angegeben werden:*

$$x_1 = bx_0 + a,$$

$$\begin{aligned} x_2 &= bx_1 + a = b(bx_0 + a) + a = b^2 x_0 + a(b+1), \\ x_3 &= bx_2 + a = b\left(b^2 x_0 + a(b+1)\right) + a = b^3 x_0 + a(b^2 + b + 1) \text{ usw.} \end{aligned}$$

Das explizite Bildungsgesetz lautet also:

$$x_t = bx_{t-1} + a = b^t x_0 + a(b^{t-1} + b^{t-2} + \ldots + b + 1) = b^t x_0 + a \sum_{i=0}^{t-1} b^i.$$

Mit der Summenformel für die endliche geometrische Reihe wird hieraus:

$$x_t = \begin{cases} b^t x_0 + \dfrac{1-b^t}{1-b} a = b^t(x_0 - c) + c \left(\text{mit } c = \dfrac{a}{1-b} \right) & \text{für } \; b \neq 1, \\ x_0 + ta \quad \text{für} \quad b = 1. \end{cases}$$

Im einfachsten Fall $b \neq 1$ *und* $x_0 = c$ *haben die Glieder der Folge den konstanten Wert* c.

Das qualitative Verhalten von x_t *für* $t \to \infty$ *hängt vom absoluten Betrag der Größe* $|b|$ *ab, denn für* $|b| < 1$ *strebt* b^t *gegen* 0, *und für* $|b| > 1$ *wächst* $|b|^t$ *unbeschränkt.*

Im Einzelnen treten für $b \neq 1$ *(außer im Fall 5) und* $x_0 \neq c$ *folgende Fälle auf:*

(1) $b < -1:$ $x_t - c$ *hat alternierendes Vorzeichen,* $|x_t - c|$ *strebt wachsend nach* ∞.

(2) $b = -1:$ x_t *nimmt abwechselnd die Werte* x_0 *und* $a - x_0$ *an.*

(3) $-1 < b \leq 0:$ x_t *strebt gegen* c, *wobei für* $b < 0$ *das Vorzeichen von* $x_t - c$ *alterniert und* $|x_t - c|$ *fällt.*

(4) $0 < b < 1:$ x_t *strebt für* $x_0 < c$ *steigend gegen* c *und für* $x_0 > c$ *fallend gegen* c.

(5) $b = 1:$ x_t *ist für* $a < 0$ *unbeschränkt fallend, hat für* $a = 0$ *den konstanten Wert* x_0 *und ist für* $a > 0$ *unbeschränkt wachsend.*

(6) $b > 1:$ x_t *ist für* $x_0 < c$ *unbeschränkt fallend und für* $x_0 > c$ *unbeschränkt wachsend.*

Zur Lösung des Problems der verzögerten Angebotsanpassung am Markt (Abschnitt 53) *sind die ersten drei Fälle von Bedeutung.*

Beispiel: Einem Guthaben, beginnend mit dem Anfangskapital x_0 *zum Zeitpunkt 0, werde zu den Zeitpunkten* $0, 1, 2, \ldots$ *eine konstante Rate* r *entnommen bzw. hinzugefügt, und das jeweilige Guthaben werde zwischen je zwei Zeitpunkten mit dem konstanten Zinssatz* p *verzinst. Für das Gesamtkapital* x_t *am Ende der Periode zwischen den Zeitpunkten* $t-1$ *und* t *ist dann eine Differenzengleichung erster Ordnung mit den konstanten Koeffizienten* $a = r(1+p)$ *und* $b = 1+p$ *erfüllt:*

$$x_t = (x_{t-1} + r)(1+p) = bx_{t-1} + a, \;\; t = 1, 2, \ldots$$

Die allgemeine Darstellung der Lösung einer Differenzengleichung liefert dann:

$$x_t = \begin{cases} (1+p)^t \left(x_0 + \dfrac{1+p}{p} r \right) - \dfrac{1+p}{p} r & \textit{für} \;\; p \neq 0, \\ \\ x_0 + tr \;\; \textit{für} \;\; p = 0. \end{cases}$$

Das ist

— *für* $r > 0$ *die Formel der Rentenrechnung für das Kapital nach* n*-maliger vorschüssiger Zahlung der Rente* r *bzw.*

— *für* $r < 0$ *die Formel der Tilgungsrechnung für die Restschuld nach* n*-maliger vorschüssiger Zahlung der Annuität* r.

54. Cobweb-Theorem. Bisher wurde angenommen, daß sich das Marktgleichgewicht friktionslos einstellt, was entweder gleichbedeutend mit unendlich kurzen Anpassungszeiten der Marktteilnehmer oder aber mit einer rein komparativ-statischen Analyse ist, in der der Anpassungspfad vernachlässigt wird. In der Realität benötigen aber Haushalte eine gewisse Zeit, um sich an veränderte Marktdaten (Preise, Qualitäten etc.) anzupassen. Gleiches gilt auch für Unternehmen, für die lange Produktionszeiten zu verzögerten Angebotsreaktionen am Markt führen. Beispiele dafür lassen sich leicht in der landwirtschaftlichen Produktion finden: Über den Anbau von Kartoffeln wird heute entschieden, wobei als Grundlage der Entscheidung die erwarteten Vermarktungspreise zur Erntezeit dienen. Sieht man von zufälligen wetterbedingten Variationen des Ernteergebnisses ab, so kann die Produktionsmenge bis zur Ernte nicht mehr verändert und an tatsächliche Marktpreise angepaßt werden, wenn diese von den erwarteten Preisen abweichen. Die Angebotsanpassung erfolgt verzögert mit einem time-lag von einer Periode, da auf der Basis der aktuellen Marktdaten die Produktionsentscheidung für die Folgeperiode getroffen wird.

Diesen Sachverhalt kann man leicht formalisieren, wenn man lineare Nachfrage- und Angebotsfunktionen für einen Markt unterstellt. Die Nachfrage X_t^d möge auf den aktuellen Marktpreis des Gutes p_t reagieren

$$X_t^d = ap_t + b, \tag{271}$$

wobei ein normaler Verlauf der Nachfrage mit $a < 0$ und eine Sättigungsmenge von $b > 0$ angenommen wird. Das Angebot wird aufgrund der Preiserwartungen zum Zeitpunkt $t-1$ für den Zeitpunkt t festgelegt

$$X_t^s = c\mathcal{E}_{t-1}(p_t) + d, \;\; c > 0, \;\; d < 0, \tag{272}$$

wobei $\mathcal{E}_{t-1}$ der Erwartungswertoperator ist. An dieser Stelle soll angenommen werden, daß die Anbieter glauben, der zum Zeitpunkt $t-1$ beobachtete Preis p_{t-1} sei gleich dem für den Zeitpunkt t erwarteten Preis $\mathcal{E}_{t-1}(p_t)$. Man spricht in diesem Fall von *statischen* Erwartungen, die zu der Angebotsfunktion

$$X_t^s = cp_{t-1} + d, \;\; c > 0, \;\; d < 0 \tag{273}$$

führen. Das Marktgleichgewicht erhält man wieder bei $X_t^s = X_t^d$, woraus sich die Preisgleichung

$$p_t = \frac{c}{a}p_{t-1} + \frac{d-b}{a} \tag{274}$$

ergibt. Es handelt sich dabei um eine inhomogene Differenzengleichung ersten Grades (vgl. M7), deren Lösungsform

$$p_t = (\frac{c}{a})^t(p_o - \frac{d-b}{a-c}) + \frac{d-b}{a-c} \tag{275}$$

lautet, in der p_o den Anfangswert repräsentiert. Die Entwicklung des Preises p_t über die Zeit hinweg hängt nun offensichtlich von der Relation c/a, dem Verhältnis der positiven Steigung der Angebotsfunktion zur negativen Steigung der Nachfragefunktion, ab. Da $a < 0$ ist, ist auch $c/a < 0$, und alle Preise in den ungeraden Perioden (also $t = 1, 3, 5$ usw.) sind kleiner und alle in den geraden Perioden (also $t = 2, 4, 6$ usw.) sind größer als $(d-b)/(a-c)$. Dies bedeutet aber, daß der Preis um diesen Term schwankt, wobei sich fragt, ob diese Schwankungen ihrerseits kleiner oder größer werden. Werden sie kleiner, dann konvergiert der Preis p_t nach (theoretisch) unendlich vielen Perioden gegen den Term $(d-b)/(a-c) = p^*$, der damit als Gleichgewichtspreis identifiziert werden kann. Die Bedingung kann wie folgt angegeben werden:

1. Ist $|c/a| < 1$, dann oszilliert der Preis p_t für $t \to \infty$ in konvergierenden Schwankungen zum Gleichgewicht p^*.
2. Ist $|c/a| > 1$, dann oszilliert der Preis p_t für $t \to \infty$ in divergierenden Schwankungen vom Gleichgewicht p^*.
3. Ist $|c/a| = 1$, dann oszilliert der Preis p_t für $t \to \infty$ in gleichmäßigen Schwankungen um das Gleichgewicht p^*.

Diese Sachverhalte sind - für eine endliche Anzahl von Perioden - in den nachstehenden Abbildungen 41a bis 41c dargestellt. Da die graphische Darstellung an ein Spinnennetz erinnert, spricht man in der Literatur vom „Cobweb-Theorem“. In den Abbildungen ist zu erkennen, daß das Verhältnis der Steigungen von Angebots- und Nachfragefunktion für den Verlauf des Marktprozesses verantwortlich ist. Der Grund für die auslösende Nachfrageverschiebung von X_0^d auf X_t^d ist für die Analyse der Anpassung unerheblich.

Wie aus dem zweiten Fall zu ersehen ist, führen bestimmte Kombinationen von c und a zu einem Prozeß, der sich durch explosive Schwankungen immer weiter vom Gleichgewicht entfernt. Dies ist ein beunruhigender Gedanke, insbesondere für Ökonomen, die in Gleichgewichtskategorien zu denken gewohnt sind. Erfreulicherweise lassen sich solche Marktprozesse in der Realität nicht beobachten. Damit stellt sich aber die Frage, warum das diskutierte Modell Ergebnisse hervorbringt, die keinerlei empirische Bedeutung haben. Zwei Erklärungen bieten sich an: Zum einen könnte die Parameterkonstellation $|c/a| > 1$ in der Realität auf keinem der Märkte anzutreffen sein, ein Sachverhalt, für den es kein Argument gibt und der im höchsten Maße unwahrscheinlich ist. Zum anderen könnten Modellannahmen nicht mit der Wirklichkeit übereinstimmen. Da die Angebots- und Nachfragefunktionen plausible Eigenschaften aufweisen, ist die Erwartungsbildungsannahme einer genaueren Betrachtung zu unterziehen. Es wird unterstellt, daß die Produzenten unabhängig von den Erwartungsfehlern, die im zweiten Fall immer größer werden, an der statischen Erwartungsbildung festhalten. Damit erhöhen sich aber auch von Periode zu Periode die Verluste, da entweder bestimmte Mengen zu Grenzkosten produziert werden, die höher als die Marktpreise sind, oder aber auf die Produktion von Mengen verzichtet

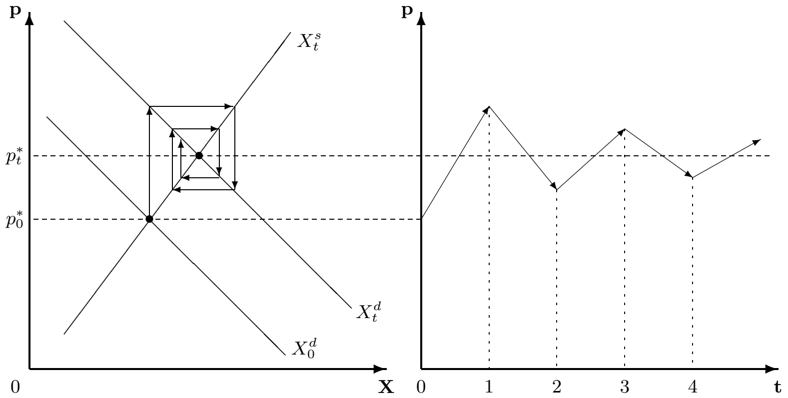


Abb. 41a: Cobweb-Theorem bei $|c/a| < 1$

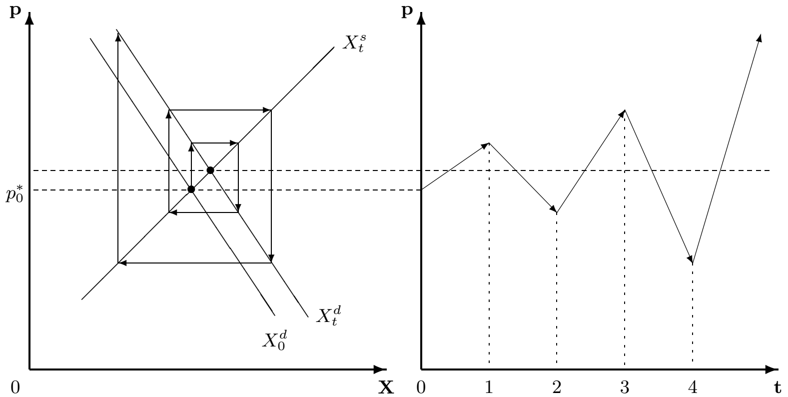


Abb. 41b: Cobweb-Theorem bei $|c/a| > 1$

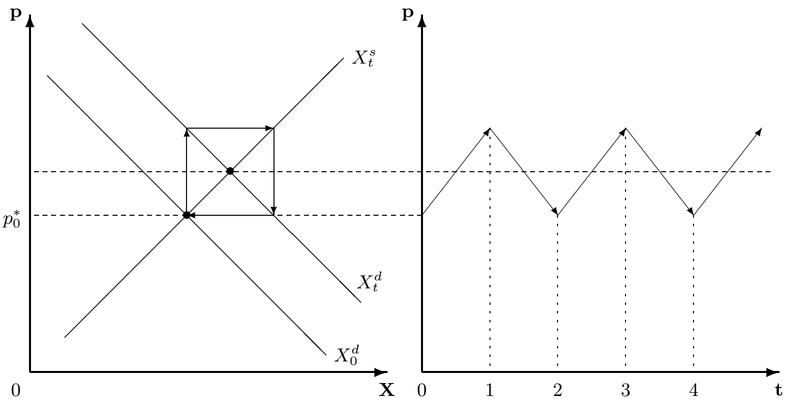


Abb. 41c: Cobweb-Theorem bei $|c/a| = 1$

wird, die zu Grenzkosten hätten erzeugt werden können und die kleiner als der Marktpreis sind, wodurch potentielle Gewinne nicht realisiert werden. Steigende Verluste aus wachsenden Erwartungsfehlern sind für Unternehmer allerdings ein starker Anreiz, aus dem laufenden Marktgeschehen zu lernen und die Erwartungsbildung zu modifizieren. Werden die Erwartungsfehler der Vergangenheit in die Erwartungsbildung einbezogen, so gelangt man zu *adaptiven* Erwartungen

$$\mathcal{E}_{t-1}(p_t) = \mathcal{E}_{t-2}(p_{t-1}) + \lambda[p_{t-1} - \mathcal{E}_{t-2}(p_{t-1})], \tag{276}$$

mit $0 \leq \lambda \leq 1$. Die Größe λ ist ein individueller Anteil, mit dem Erwartungsfehler der Vergangenheit Berücksichtigung finden. Für $\lambda = 1$ reduziert sich das Modell zu *statischen* Erwartungen $\mathcal{E}_{t-1}(p_t) = p_{t-1}$ und für $\lambda = 0$ zu *stationären* Erwartungen $\mathcal{E}_{t-1}(p_t) = \mathcal{E}_{t-2}(p_{t-1})$. Ist $\lambda \neq 1$, so können explosive Schwankungen, die dauerhaft vom Gleichgewichtspreis wegführen, vermieden werden. Werden zur Erwartungsbildung nicht nur die Erwartungsfehler der Vergangenheit herangezogen, sondern alle kostenlos verfügbaren systematischen Informationen, die zur Prognose des Marktpreises geeignet erscheinen, so spricht man von *rationalen* Erwartungen. Bei diesem Erwartungsbildungsmodell sind explosive Schwankungen völlig ausgeschlossen. Beide Konzepte, adaptive und rationale Erwartungen, die heute in der makroökonomischen Theorie eine bedeutende Rolle spielen, wurden ursprünglich in der Literatur am Beispiel des Cobweb-Theorems entwickelt, da die statischen Erwartungen zu den beschriebenen anomalen Resultaten führen. Die Tatsache, daß keine Märkte beobachtet werden können, die sich von Periode zu Periode immer weiter vom Gleichgewicht entfernen, spricht für die Lernfähigkeit der Marktakteure.

55. Externe Effekte. In der bisherigen Diskussion des Marktgleichgewichtes wurde die Abwesenheit sogenannter externer Effekte angenommen, die man in *physische* und *pekuniäre* externe Effekte aufspalten kann. Da letztere ihre Wirkungen über Märkte entfalten, sind sie aus Sicht der Markttheorie unproblematisch und können vernachlässigt werden. Physische externe Effekte entstehen bei Produktion oder Konsum eines Wirtschaftssubjektes und wirken über physische Medien auf die Produktion oder den Konsum eines oder mehrerer Wirtschaftssubjekte positiv oder negativ ein, ohne daß diese Wirkungen oder Beiträge über Märkte gehandelt werden und ein Entgelt oder eine Entschädigung erzielen. Wenn im Fall positiver externer Effekte nun nicht alle Bedürfnisse der Haushalte über Nachfrage am Markt befriedigt werden und nicht notwendigerweise der gesamte Input der Firmen über die Faktormärkte bezogen wird, dann verlieren Märkte ihre Allokationsfunktion. Dies gilt spiegelbildlich auch für negative externe Effekte. In beiden Fällen fallen *private* und *soziale* Kosten auseinander, wobei die sozialen Kosten die externen Effekte enthalten. Ein Haushalt, der positive externe Effekte empfängt, kann seine Ausgaben zur Erlangung eines bestimmten Nutzenniveaus ebenso reduzieren wie ein Unternehmen, bei dem positive externe Effekte auf die Produktion einwirken und das daher weniger Produktionsfaktoren nachfragt und einsetzt. Umgekehrt sind bei negativen externen Effekten zusätzliche Kosten aufzuwenden, um das gleiche Nutzen- oder Produktionsniveau zu erhalten, das sich ohne die Effekte eingestellt hätte. Externe Effekte haben ferner die Eigenschaft, sich der Gestaltung durch das empfangene Wirtschaftssubjekt zu entziehen, alle anderen Argumente der Nutzen- oder Produktionsfunktionen müssen entsprechend angepaßt werden.

Es ist nach der theoretischen Beschreibung der externen Effekte sinnvoll, einige Beispiele anzuführen. Ein positiver externer Effekt geht vom Konsum eines Haushaltes auf den Nutzen eines anderen aus, wenn der erste eine Schallplatten mit klassischer Musik hört und der zweite in einer Nachbarwohnung – ebenfalls ein Liebhaber dieser Musikrichtung – an diesen Musikdarbietungen Anteil haben kann. Dieser Konsum wird von dem zweiten Haushalt nicht durch Zahlungen entgolten, da für die ungezielte Musikverbreitung kein Markt existiert. Ist der zweite Haushalt an Schlagermelodien interessiert und empfindet das Abspielen klassischer Musik als Geräuschbelästigung, so liegen offensichtlich negative externe Effekte vor, für die keine Entschädigungen erlangt werden können. Leitet eine Textilfabrik Abwässer in einen Fluß ein, so wird die Produktion der Fischereiwirtschaft am Unterlauf des gleichen Flusses durch negative externe Effekte beeinträchtigt. Erfolgen Kühlwassereinleitungen durch ein Kraftwerk, so kann die dadurch bewirkte Temperaturerhöhung des Flußwassers als positiver externer Effekt die Fangergebnisse der Fischereiwirtschaft verbessern.

Verallgemeinert man diese Beispiele, so können Nutzenfunktion und Produktionsfunktion neu formuliert werden. Die Nutzenfunktion des Haushaltes i lautet nun

$$
\begin{aligned}
U = U(a_1, a_2, ...a_n; e_i^+, e_i^-, e_j^+, e_j^-), \\
\partial U/\partial a > 0, \;\; \partial U/\partial e^+ > 0, \;\; \partial U/\partial e^- < 0,
\end{aligned} \tag{277}
$$

wobei a_1 bis a_n die gestaltbaren Aktivitäten darstellen und die mit e bezeichneten positiven und negativen externen Effekte hinzutreten, die von den anderen Haushalten i oder den Unternehmen j ausgehen. Analog dazu kann die Produktionsfunktion eines Unternehmens formuliert werden:

$$x = f(v_1, v_2, ...v_n; e_i^+, e_i^-, e_j^+, e_j^-),$$
$$\partial x/\partial v > 0, \ \ \partial x/\partial e^+ > 0, \ \ \partial x/\partial e^- < 0. \tag{278}$$

Die allokativen Wirkungen externer Effekte sollen nun etwas genauer betrachtet werden, wobei der Blick auf die negativen externen Effekte im Produktionsbereich beschränkt wird. Zu diesem Zweck greifen wir das Beispiel der Textilfabrik, die Abwässer in einen Fluß einleitet und damit die Fischereiwirtschaft schädigt, erneut auf. Es soll ferner angenommen werden, daß viele weitere Textilfabriken am Fluß angesiedelt sind, die auf einem homogen Polypolmarkt ihre Güter anbieten. Alle Firmen produzieren mit der gleichen Technologie und weisen gleiche (private) Grenzkosten auf. Die Nachfrage X^d nach Texilien und das Angebot, das den aggregierten privaten Grenzkosten $X^s = C'_{priv}$ entspricht, sind in Abbildung 42 dargestellt. Da die einzelwirtschaftliche Gewinnmaximierungsbedingung für ein homogenes Polypol Grenzkosten gleich Preis lautet, ist das Marktgleichgewicht E durch den Preis p^* und die Menge X^* gekennzeichnet. Aus volkswirtschaftlicher Sicht sind aber die Grenzkosten zu niedrig, da der Transport der Abfallstoffe über das Abwasser kostenlos in Anspruch genommen wird und die Transportleistungen des Flusses in den Kostenrechnungen der Unternehmen nicht berücksichtigt werden. Bezieht man die Transportkosten für die Abfallstoffe, entweder bewertet mit den Schäden für die Fischereiwirtschaft oder mit den Kosten für alternative Transportsysteme (LKW, Bahn usw.), in die Kostenrechnung ein, so treten zu den privaten Grenzkosten zusätzliche soziale Grenzkosten; beide zusammen ergeben die volkswirtschaftlichen Grenzkosten der Textilproduktion. Wird z.B. die Einleitung von Abwasser gesetzlich verboten, so sind die Textilunternehmen gezwungen, andere kostenpflichtige Transportsysteme für die Abfallstoffe zu verwenden und diese Kosten in ihren Kostenrechnungen zu berücksichtigen. Man spricht in diesem Fall von der Internalisierung externer Effekte, wodurch private Grenzkosten und volkswirtschaftliche oder soziale Grenzkosten übereinstimmen. Die Angebotskurve $X^s = C'_{soz}$ entsteht wiederum aus der Aggregation der firmenindividuellen Grenzkosten und läßt zusammen mit der Nachfragekurve in Abbildung 42 ein Gleichgewicht G entstehen, das durch die Menge X^{**} und den Preis p^{**} gekennzeichnet ist.

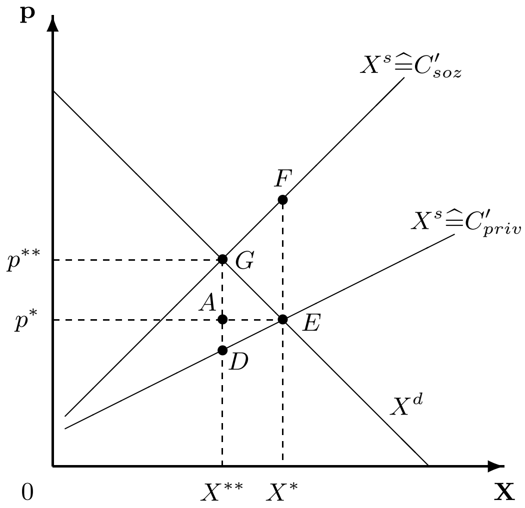


Abb. 42: Externer Effekt bei der Produktion

Vergleicht man die Situation vor und nach Internalisierung der negativen externen Effekte, so zeigen sich folgende Resultate: (1) Die kostenlose Inanspruchnahme des Flusses als Transportmittel läßt zu hohe Produktionsmengen und zu niedrige Preise entstehen, da die geschädigte Fischereiwirtschaft unfreiwillig die Textilproduktion subventioniert. (2) Die Internalisierung der negativen externen Effekte reduziert zwar die Konsumentenrente um die Fläche GEA und die Produzentenrente um die Fläche AED. Demgegenüber steht aber der Abbau der Gesamtverluste in Höhe von $FEDG$, so daß ein Nettoverlust von FEG vermieden wird. Mit anderen Worten gesagt, die Internalisierung negativer externer Effekte erhöht die Wohlfahrt.

Ziel einer marktorientierten Wirtschaftspolitik ist es, solche Institutionen zu schaffen, die geeignet sind, die externen Effekte zu internalisieren. Dabei sollen Entgelte für positive externe Effekte und Entschädigungen für negative externe Effekte entstehen, die, wären sie marktfähig, auch am Markt erzielt würden. Damit wird die Allokationsfunktion der Märkte wiederhergestellt, und die Preise spiegeln die tatsächlichen Knappheiten wider. Es mag überraschen, aber wie das Coase-Theorem (benannt nach dem amerikanischen Ökonomen Ronald Harry Coase) zeigt, ist es für das Allokationsergebnis – nicht für die Verteilungswirkungen – unerheblich, ob der durch negative externe Effekte Geschädigte eine Entschädigung erhält oder selbst eine Zahlung an den Schädiger mit der Auflage entrichtet, die externen Effekte zu unterbinden.

4.3 Totales Gleichgewicht bei vollkommener Konkurrenz

56. Einführung und Annahmen. Bei der partialanalytischen Untersuchung eines Marktes geht man davon aus, daß die Wirkungen auf andere Güter- und Faktormärkte vernachlässigt werden können. Diese Sicht des Marktgeschehens mag sowohl die Analyse vereinfachen als auch vielen Märkten angemessen sein, da sie innerhalb einer Volkswirtschaft tatsächlich nur eine unbedeutende Rolle spielen und ihre Interdependenz zu anderen Märkten marginal ist. Für die Gesamtheit aller Güter- und Faktormärkte einer Volkswirtschaft kann diese Betrachtung jedoch nicht aufrecht erhalten werden, da alle Märkte, genauer gesagt, die Gleichgewichtszustände aller Märkte, voneinander abhängen. Entsteht - aus welchem Grund auch immer - ein Ungleichgewicht auf einem Markt, setzt sich der Anpassungsprozeß über alle Märkte hinweg fort, bis wieder ein simultanes Gleichgewicht auf allen Märkten (totales Gleichgewicht) erreicht wird. Ein einfaches Beispiel soll diese Zusammenhänge verdeutlichen: Nehmen wir an, es existieren lediglich zwei Güter, x und y, und die Vorlieben der Konsumenten für diese Güter haben sich durch Modeeinflüsse verändert. Die Haushalte werden ein den veränderten Präferenzen entsprechendes Nutzenoptimum verwirklichen und z.B. größere Mengen von Gut x sowie kleinere Mengen von Gut y nachfragen. Auf dem x-Markt wird zunächst eine Überschußnachfrage und auf dem y-Markt ein Überschußangebot entstehen. Aus diesem Ungleichgewicht der Gütermärkte folgen zwei Anpassungsreaktionen: (1) Der Preis für x steigt und das Angebot wird ausgedehnt, (2) der Preis für y fällt und das Angebot wird eingeschränkt. Sieht man von Lagerhaltungen ab, dann sind die Angebotsveränderungen nur durch Variationen der Produktionsmengen möglich, wobei die Mengen so verändert werden, daß die Grenzkosten wieder den Preisen entsprechen. Da Faktorwanderungen von der y-Produktion zur x-Produktion stattfinden, um die neuen Mengen erzeugen zu können, ergeben sich bei unterschiedlichen Faktorintensitäten Verschiebungen der relativen Preise für Kapital und Arbeit r/l. Dieser Anpassungsprozeß auf dem Faktormarkt führt sowohl zu veränderten Grenzkosten als auch zu Einkommensänderungen der Haushalte. Damit wird deutlich, daß eine neue Anpassungsrunde notwendig wird, die weitere nach sich zieht, bis ein simultanes Gleichgewicht auf allen Märkten entstanden ist. Die Frage ist nun: Wie lauten die Bedingungen für ein derartiges totales Gleichgewicht?

Die Beantwortung der Frage nach den Bedingungen eines totalen Gleichgewichts soll unter der Annahme geschehen, daß auf allen Märkten vollkommene Konkurrenz herrscht. Zur Vereinfachung, insbesondere zur graphischen Präsentation der Zusammenhänge, soll zunächst von einer „2 Güter–2 Konsumenten–2 Faktoren–Welt“ ausgegangen werden. Die betrachtete Ökonomie wird wie folgt beschrieben:

1. Es existieren zwei Haushalte, die mit A und B bezeichnet werden.
2. Zwei Güter x und y werden von den Haushalten nachgefragt und von zwei Firmen produziert. Jeder Haushalt fragt jedes Gut nach, und jede Firma produziert nur ein Gut.
3. Die Haushalte verfügen über eine Erstausstattung an Gütern (z.B. durch Erbschaft) $\bar{x}_A,\ \bar{x}_B,\ \bar{y}_A,\ \bar{y}_B$.
4. Die Haushalte verfügen über einen als gegeben betrachteten Bestand an Produktionsfaktoren Arbeit L und Kapital K, woraus $\bar{L} = L_A + L_B$ und $\bar{K} = K_A + K_B$ folgt.
5. Für alle Produktionsfaktoren wird Vollbeschäftigung aufgrund der vollkommenen Märkte erreicht: $\bar{L} = L_x + L_y$ und $\bar{K} = K_x + K_y$.
6. Die Güterpreise lauten p_x und p_y, die Faktorentlohnung der Arbeit wird mit l und die des Kapitals mit r bezeichnet. Das Einkommen der Haushalte sei $e_A (= lL_A + rK_A)$ und $e_B (= lL_B + rK_B)$.
7. Güter und Produktionsfaktoren sind homogen und beliebig teilbar.
8. Die Firmen verfolgen das Ziel der Gewinnmaximierung und die Haushalte das Ziel der Nutzenmaximierung.
9. Die Produktionsfunktionen der Firmen $x(K_x, L_x)$ und $y(K_y, L_y)$ weisen konvexe Isoquanten und konstante Skalenerträge auf und sind unabhängig voneinander. Es existieren keine externen Effekte der Produktion oder Kuppelproduktbeziehungen. Unter Kuppelproduktion versteht man die technisch bedingte, nicht abwendbare gleichzeitige Herstellung von Gütern (Beispiel: Koks und Gas).
10. Die Nutzenfunktionen der Haushalte $U_A(x_A, y_A)$ und $U_B(x_B, y_B)$ weisen konvexe Indifferenzkurven auf und sind unabhängig voneinander. Es existieren keine externen Effekte des Konsums.

Dem totalen Gleichgewicht wollen wir uns in mehreren Erklärungsschritten nähern. Zunächst werden die Optimalitätsbedingungen für den reinen Tausch diskutiert und in einem zweiten Schritt die Bedingungen für effiziente Produktion dargestellt. Schließlich werden beide Elemente zusammengeführt und über den „2 Güter–2 Konsumenten–2 Faktoren–Fall“ hinaus verallgemeinert.

57. Reiner Tausch. Im ersten Schritt sollen die Bedingungen für den effizienten Tausch zwischen den Konsumenten A und B diskutiert werden. Dabei soll zunächst von Produktionsüberlegungen abgesehen werden. Es wird angenommen, daß die Nachfragefunktionen homogen vom Grade 0 bezüglich Einkommen und Preisen sind. Diese Formulierung bedeutet, daß die Käufer sich an realen Größen orientieren und frei von Geldillusion sind: Vervielfacht man Preise und Einkommen um denselben Faktor (Inflation), so zieht dies keine Nachfrageänderungen nach sich. Ferner wird angenommen, daß der Nutzen beider Konsumenten durch wechselseitigen Tausch eines Teils ihrer Erstausstattung erhöht werden kann, da diese Erstausstattung ohne Rücksicht auf die Präferenzstruktur der Akteure exogen gegeben ist. Schließlich ist die gesamte Gütermenge ebenfalls exogen gegeben $\bar{x}_A + \bar{x}_B = \bar{x}$, $\bar{y}_A + \bar{y}_B = \bar{y}$. Die Werte der Erstausstattung $e_A,\ e_B$ ergeben sich durch die Multiplikation der Mengen mit den zugehörigen Preisen und entsprechen den durch Verkauf der Erstausstattung erzielbaren Einkommen:

$$e_A = p_x\bar{x}_A + p_y\bar{y}_A, \tag{279}$$

$$e_B = p_x\bar{x}_B + p_y\bar{y}_B. \tag{280}$$

Aufgrund der Homogenitätsannahme bleiben die Lagen dieser beiden Budgetgleichungen in einem x/y-Diagramm unverändert und, da die Nutzenfunktion davon unberührt bleibt, auch das Haushaltsoptimum, wenn die Gleichungen mit einer Konstanten multipliziert (oder dividiert) werden. Dividiert man beide Gleichungen durch p_y, so erhält man

$$e_A/p_y = (p_x/p_y)\bar{x}_A + \bar{y}_A, \tag{281}$$

$$e_B/p_y = (p_x/p_y)\bar{x}_B + \bar{y}_B, \tag{282}$$

wobei der Ausdruck p_x/p_y den relativen Güterpreis darstellt, der die Austauschrelation der Güter bestimmt. Nicht ein einzelner absoluter Preis, sondern der relative Preis (definiert als p_x/p_y oder als reziproker Wert p_y/p_x)

ergibt sich - wie noch zu zeigen sein wird - aus dem Tauschgleichgewicht. Da ein relativer Preis mit unendlich vielen Kombinationen absoluter Preise vereinbar ist, ist es zweckmäßig, die Normierung *eines* absoluten Preises auf einen numerischen Wert vorzunehmen. Es sei $\tilde{p}_y = 1$, und damit $\tilde{p}_x = p_x/p_y$ sowie $\tilde{e}_i = e_i/p_y$, mit $i = A, B$. So kann auch der absolute Wert des Preises für Gut x gefunden werden.

Der Tausch zwischen den Haushalten soll zwar ihren Nutzen erhöhen, aber ihre Vermögenslage bzw. Einkommenslage, bewertet mit den noch zu bestimmenden Preisen, nicht verändern. Damit gelten die Haushaltsrestriktionen

$$\tilde{p}_x x_A + y_A = \tilde{p}_x \bar{x}_A + \bar{y}_A, \tag{283}$$

$$\tilde{p}_x x_B + y_B = \tilde{p}_x \bar{x}_B + \bar{y}_B, \tag{284}$$

wobei x_A, x_B und y_A, y_B die neuen Mengen darstellen, die nach dem Tausch konsumiert werden können. Unter der Restriktion (283) wird die Nutzenfunktion $U_A = U_A(x_A, y_A)$ bzw. unter (284) die Nutzenfunktion $U_B = U_B(x_B, y_B)$ maximiert. Die Ergebnisse sind in den Abbildungen 43a und 43b verdeutlicht. Wie man leicht sieht, würde die Erstausstattung (EA) einen Schnittpunkt mit einer Indifferenzkurve bilden, die ein geringeres Nutzenniveau aufweist als die den Tangentialpunkt $x_i^*, y_i^*, \; i = A, B$ bildende Indifferenzkurve. Da keine Gütermengen hinzukommen oder im Tauschprozeß verlorengehen, muß gelten: Es entstehen für beide Güter Kauf- und Verkaufsmengen derart, daß die von A verkaufte Menge von Gut y mit der von B gekauften Menge von y übereinstimmen muß und die von B verkaufte Menge des Gutes x mit der Kaufmenge x des A identisch ist. Kurz gesagt: Angebot und Nachfrage müssen für jedes Gut im markträumenden Gleichgewicht identisch sein:

$$Nachfrage(x_A) = x_A^* - \bar{x}_A = \bar{x}_B - x_B^* = Angebot(x_B), \tag{285}$$

$$Nachfrage(y_B) = y_B^* - \bar{y}_B = \bar{y}_A - y_A^* = Angebot(y_A). \tag{286}$$

Auch die gesamtwirtschaftliche Gütermenge muß nach dem Austausch mit jener vor dem Tausch gleich sein :$x_A^* + x_B^* = \bar{x}$, $y_A^* + y_B^* = \bar{y}$. Wie kann aber sichergestellt werden, daß die wechselseitigen Verkaufsabsichten und Kaufabsichten übereinstimmen? Die Antwort lautet: Es muß ein relativer Preis p_x/p_y gefunden werden, der die Bedingungen (285) und (286) simultan erfüllt. Unter der getroffenen Annahme der Normierung $\tilde{p}_y = 1$ ist

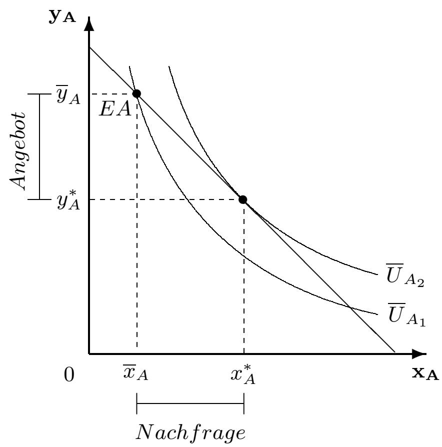


Abb. 43a: Nutzen des Haushaltes A

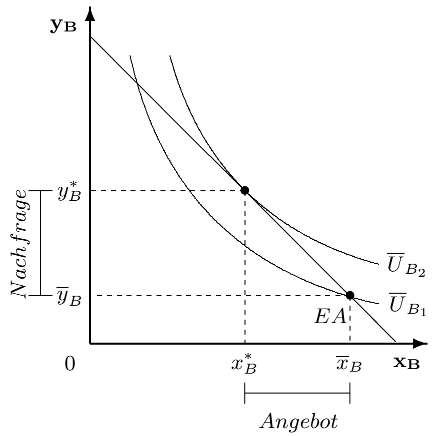


Abb. 43b: Nutzen des Haushaltes B

damit auch der Preis $\tilde{p}_x$ zu ermitteln. Über den Prozeß, der zum Gleichgewicht führt, kann aus dem vorliegenden Modellrahmen nur wenig gesagt werden. Man kann sich einen „Versuch-und-Irrtum-“, „trial-and-error-“ oder „tâtonnement“-Prozeß vorstellen, der Überschußangebote und -nachfragen abbaut und in ein Gleichgewicht mündet.

Zur Darstellung totalanalytischer Sachverhalte eignet sich besonders die „Edgeworth-Box“, benannt nach dem englischen Nationalökonomen Francis Ysidro Edgeworth. An der senkrechten Achse möge das Gut $\bar{y}$ und an der waagerechten Achse das Gut $\bar{x}$ abgetragen werden (Abbildung 43c). Wenn man die südwestliche Ecke der Box als Nullpunkt 0_A des x/y-Diagramms

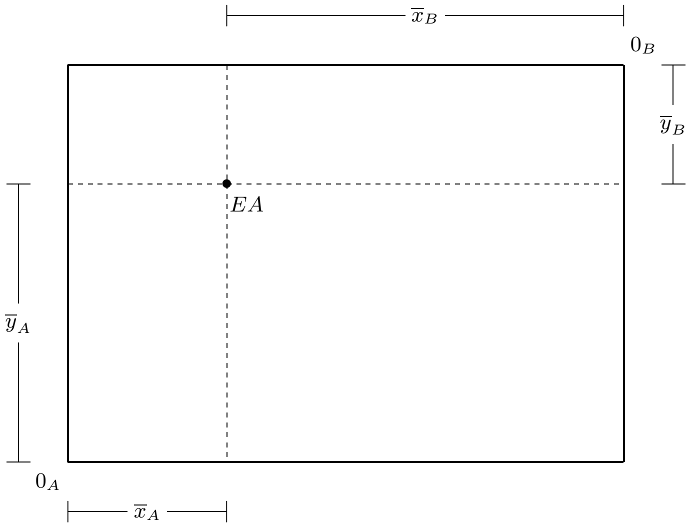


Abb. 43c: Edgeworth-Box und Erstausstattung

des Konsumenten A und die nordöstliche Ecke als Nullpunkt 0_B des x/y-Diagramms des Haushaltes B versteht, kann die Erstausstattung mit Gütern, wie auch jede andere Güterverteilung, durch einen Ort innerhalb der Box verdeutlicht werden. In Punkt 0_B ist der Nutzen des Haushaltes A maximal und in Punkt 0_A der des Haushaltes B; höhere Nutzen lassen die gegebenen Gütermengen nicht zu. In Abbildung 43c ist die Erstausstattung sehr unterschiedlich verteilt: Haushalt A verfügt über große y-Mengen und kleine x-Mengen und bei Haushalt B ist die Zusammensetzung der Güter umgekehrt. Zeichnet man in diese Edgeworth-Box einige Indifferenzkurven der beiden Haushalte aus den Abbildungen 43a und 43b ein (wobei die diametral angeordneten Ursprungspunkte $0_A, 0_B$ zu beachten sind), so erhält man die Abbildung 44. Da die Indifferenzkurven unendlich dicht gepackt sind, laufen auch zwei Indifferenzkurven $\bar{U}_A^1, \bar{U}_B^1$ durch den Erstausstattungspunkt EA. Wir wollen annehmen, daß sich die Indifferenzkurven im Erstausstattungspunkt schneiden. Würden sich die Indifferenzkurven tangieren, gäbe es keinen Grund für einen Gütertausch. Verfolgt man beide Indifferenzkurven, so zeigt sich ein zweiter Schnittpunkt, der die gleiche Nutzenkombination wie der Erstausstattungspunkt repräsentiert. Alle Punkte, die zwischen beiden Schnittpunkten und innerhalb der konkaven Fläche, der sogenannten Austauschlinse, liegen, die von den beiden Indifferenzkurven gebildet wird, weisen einen höheren Nutzen als die Erstausstattung für die beiden Haus-

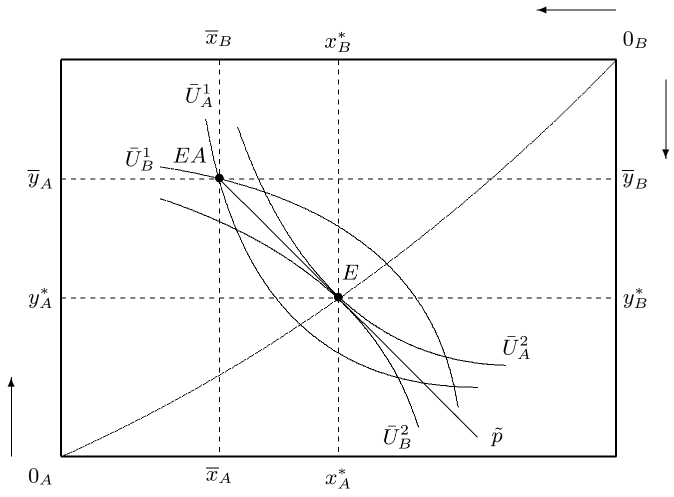


Abb. 44: Edgeworth-Box und Tauschgleichgewicht

halte auf. Dieser Sachverhalt trifft zum Beispiel für den Tangentialpunkt E der beiden Indifferenzkurven $\bar{U}_A^2, \bar{U}_B^2$ zu. Die Steigung im Tangentialpunkt entspricht - wie noch zu zeigen sein wird - dem realen Austauschverhältnis zwischen den Gütern und ist damit gleich dem relativen Preis $\tilde{p}_x$. Das Austauschverhältnis kann durch eine Gerade verdeutlicht werden. Es gibt nur einen relativen Preis, der Angebot und Nachfrage im Modell des reinen Tausches zum Ausgleich bringt, wodurch der Gleichgewichtspunkt E und der Nutzenzuwachs der Haushalte durch Tausch bestimmt sind. An den y- und x-Achsen können die Tauschmengen abgelesen werden. A verkauft die Menge $\bar{y}_A - y_A^*$, die von B gekauft wird $y_B^* - \bar{y}_B$; A kauft die Menge $x_A^* - \bar{x}_A$, die von B verkauft wird $\bar{x}_B - y_B^*$.

58. Pareto-Optimum. Das Ergebnis der Tauschaktivitäten im vorangegangenen Abschnitt kann verallgemeinert werden. Offensichtlich ist es für beide Akteure immer dann nutzensteigernd, Gütermengen auszutauschen, wenn ein Ort in der Edgeworth-Box erreicht werden kann, an dem sich die Indifferenzkurven beider Haushalte tangieren. Es ist leicht einsehbar, daß, ausgehend von zufälligen Startpunkten (Erstausstattungen), es zwischen den beiden Nullpunkten $0_A, 0_B$ eine unendlich dicht gepackte Menge von Tangentialpunkten gibt, die sich zu einer Linie verbinden lassen (Vgl. Abbildung 44). Diese Linie bezeichnet man als Kontraktkurve; alle möglichen Einigungen auf dieser Linie weisen eine wichtige Eigenschaft auf: Ein

Akteur kann nicht bessergestellt werden, ohne daß ein anderer schlechtergestellt würde. Diesen Zustand bezeichnet man als „Pareto-Optimum“, nach dem italienischen Nationalökonomen Vilfredo Pareto. Keiner der Akteure wird einer Vereinbarung zustimmen, die ihn schlechterstellt, aber er wird einen Vertrag schließen, der seine Lage verbessert oder zumindest nicht verschlechtert. Anders gesagt, ein Tauschergebnis ist effizient, wenn ein Pareto-Optimum erreicht wird und kein Anlaß für einen der Beteiligten besteht, den so definierten Gleichgewichtszustand zu verlassen.

Die Bedingungen für ein Pareto-Optimum können formal dargestellt werden. Das Pareto-Kriterium ist erfüllt, wenn der Nutzen des Haushaltes A maximiert und die Nutzensituation des Haushaltes B nicht verschlechtert wird. Ein gegebenes Nutzenniveau des Haushaltes B stellt für den Optimierungsprozeß eine erste Restriktion dar:

$$\bar{U}_B = U_B(x_B, y_B). \tag{287}$$

Ferner müssen die Güterbestände als Restriktionen berücksichtigt werden:

$$\bar{x} = x_A + x_B, \tag{288}$$

$$\bar{y} = y_A + y_B. \tag{289}$$

Setzt man in Gleichung (284) die Gleichungen (288) und (289) ein, so erhält man die Nebenbedingung, unter welcher der Nutzen des Haushaltes A, ausgedrückt durch die Nutzenfunktion $U_A = U_A(x_A, y_A)$, maximiert wird. Die Lagrangegleichung lautet:

$$\mathcal{L}(x_A, y_A, \lambda) = U_A(x_A, y_A) + \lambda[U_B(\bar{x} - x_A, \bar{y} - y_A) - \bar{U}_B], \tag{290}$$

und die Bedingungen 1. Ordnung:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_A} = \frac{\partial U_A}{\partial x_A} + \lambda \frac{\partial U_B}{\partial x_B} \frac{dx_B}{dx_A} = 0, \tag{291}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y_A} = \frac{\partial U_A}{\partial y_A} + \lambda \frac{\partial U_B}{\partial y_B} \frac{dy_B}{dy_A} = 0, \tag{292}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = [U_B(\bar{x} - x_A, \bar{y} - y_A) - \bar{U}_B] = 0. \tag{293}$$

Da sich aus den Restriktionen (288) $dx_B/dx_A = -1$ und (289) $dy_B/dy_A = -1$ ergeben, können die Ableitungen (291) und (292) wie folgt gleich λ gesetzt werden:

$$\lambda = \frac{\partial U_A/\partial x_A}{\partial U_B/\partial x_B} = \frac{\partial U_A/\partial y_A}{\partial U_B/\partial y_B}. \tag{294}$$

Bezeichnet man den Grenznutzen eines Haushaltes i hinsichtlich des j-ten Gutes mit $GN_{i,j}$, $i = A, B$, $j = x, y$, so läßt sich (294) vereinfacht als

$$\frac{GN_{A,x}}{GN_{A,y}} = \frac{GN_{B,x}}{GN_{B,y}} = GRS_A = GRS_B \tag{294'}$$

schreiben, d.h. die Grenzrate der Substitution GRS_i, mit $i = A, B$, definiert als das Verhältnis des Grenznutzens zweier Güter, muß im Pareto-Optimum für alle Akteure gleich sein. In Abschnitt 63 wird gezeigt, daß die Grenzrate der Substitution ferner gleich dem Preisverhältnis der Güter ist $GRS_{yx} = p_x/p_y$, woraus $\tilde{p} = \lambda$ folgt. Der Lagrange-Multiplikator gibt also - so seine ökonomische Interpretation - die relative Knappheit der Güter an. Zusammenfassend kann an dieser Stelle gesagt werden:

Satz: *Das Tauschoptimum bei gegebener Güterausstattung (reiner Tausch) ist gekennzeichnet durch die Gleichheit der Grenzraten der Substitution der Akteure. Das Optimum ist pareto-optimal, da kein Akteur bessergestellt werden kann, ohne wenigstens einen Akteur schlechterzustellen.*

Aus der Diskussion des reinen Tausches wird sichtbar, daß jede exogene Veränderung der Güterverteilung, die nicht entlang der Kontraktkurve erfolgt, Tauschaktivitäten der Haushalte nach sich zieht. Nehmen wir an, daß in der Ausgangssituation ein Pareto-Optimum verwirklicht ist und der Staat - aus welchen Gründen auch immer - einem Haushalt eine bestimmte Gütermenge x entzieht und sie dem anderen Haushalt zuführt, so wird die neue Ausstattung der Haushalte mit Gütern in der Regel kein Tauschoptimum darstellen. Die privaten Haushalte werden - wenn es zulässig ist - in einen Tauschprozeß eintreten, um wieder ein Optimum auf der Kontraktkurve zu erreichen. Ein zweiter Fall ist ebenso denkbar: Wenn man annimmt, daß der Staat über vollständige Informationen verfügt - insbesondere über die Nutzeneinschätzungen der Haushalte - und daß aus irgendeinem Grund die privaten Akteure keine Tauschbeziehungen aufnehmen können, so kann ein staatlicher Gütertransfer zu einem Pareto-Optimum auf der Kontraktlinie führen.

59. Produktionsgleichgewicht. In einem zweiten Schritt werden die Bedingungen für eine effiziente Güterproduktion dargestellt. Dabei ist zu beachten, daß die Faktormengen für die Produktion der Güter x und y in der Volkswirtschaft beschränkt und exogen gegeben sind $\bar{K} = K_x + K_y$, $\bar{L} = L_x + L_y$. Auch in diesem Fall kann zur Darstellung des totalanalytischen

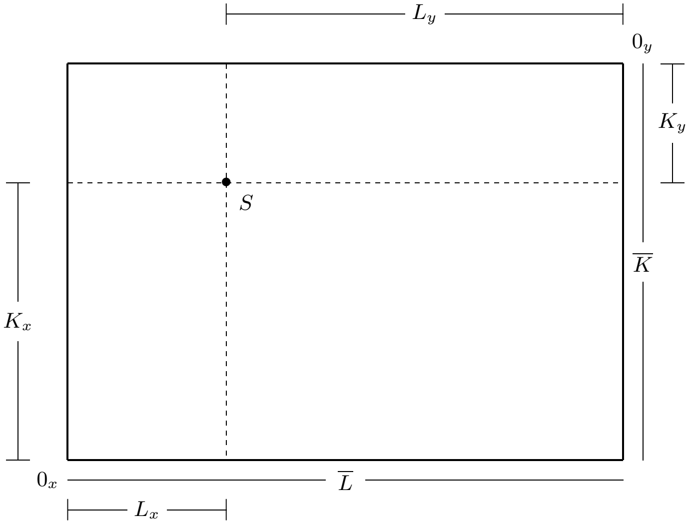


Abb. 45: Edgeworth-Box und Faktorallokation

Sachverhalts die „Edgeworth-Box" herangezogen werden. An der senkrechten Achse ist der Faktor Kapital $\bar{K}$ und an der waagerechten Achse der Faktor Arbeit $\bar{L}$ abgetragen (vgl. Abbildung 45). Die südwestliche Ecke der Box stellt den Nullpunkt 0_x der x-Produktion und die nordöstliche Ecke den Nullpunkt 0_y der y-Produktion dar. Eine beliebige Allokation der Ressourcen kann durch einen Punkt S innerhalb der Box verdeutlicht werden. Zeichnet man in diese Edgeworth-Box einige Isoquanten der beiden Einproduktfirmen ein, wobei die diametral angeordneten Ursprungspunkte $0_x, 0_y$ bei der Anordnung zu beachten sind, so erhält man die Abbildung 46. Die formale Analogie zum Tauschgleichgewicht wird deutlich: Da die Isoquanten unendlich dicht gepackt sind, laufen auch zwei sich schneidende Isoquanten x^1, y^1 durch den Startpunkt S der zufälligen Faktorallokation. Entlang dieser beiden Isoquanten, die einen zweiten Schnittpunkt aufweisen, bleiben bekanntlich die Produktionsmengen konstant. Zwischen den beiden Schnittpunkten öffnet sich ein konvexer Bereich, innerhalb dessen mit den gegebenen Faktoren höhere Produktionsmengen beider Güter erzielt werden könnten. Dieser Sachverhalt trifft auch für den Tangentialpunkt E der beiden Isoquanten x^2, y^2 zu. Die Steigung im Tangentialpunkt entspricht - wie noch zu zeigen sein wird - den relativen Faktorpreisen l/r, die im vollkommenen Faktormarkt unabhängig von der Verwendung der Faktoren sind $l_x = l_y = l,\ \ r_x = r_y = r$. Daraus folgt für den Tangentialpunkt auch

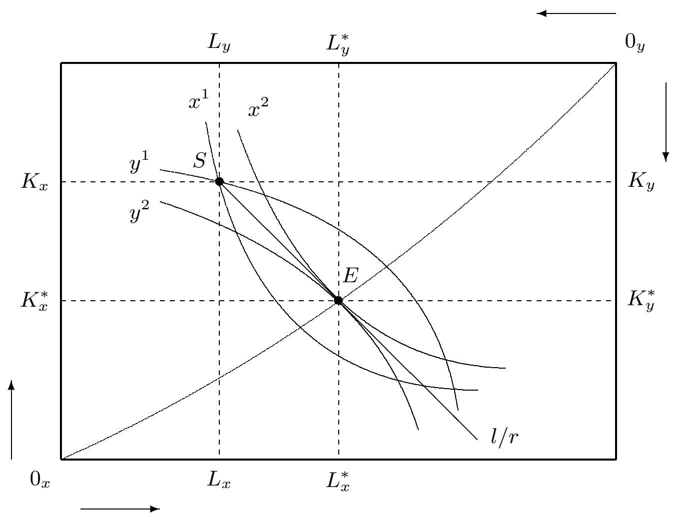


Abb. 46: Edgeworth-Box und Produktionsgleichgewicht

die Gleichheit der relativen Faktorpreise $l_x/r_x = l_y/r_y = l/r$. Wie man leicht zeigen kann, gilt diese Bedingung nur für E und nicht für die Schnittpunkte S, da dort die Steigungen der Isoquanten unterschiedlich sind. Mit anderen Worten, sind die relativen Faktorpreise in den beiden Industrien unterschiedlich, so werden so lange Faktorwanderungen (Reallokationen) stattfinden, bis die relativen Faktorpreise identisch sind. Da beide Firmen das Ziel der Gewinnmaximierung verfolgen, werden sie die Minimalkostenkombination verwirklichen, die erreicht ist, wenn die Grenzraten der technischen Substitution $GRTS$ gleich den relativen Faktorpreisen sind. Da dieses Verhalten für beide Firmen gilt, folgt daraus $GRTS_x = GRTS_y = l/r$.

Wir haben festgestellt, daß die Isoquanten unendlich dicht gepackt sind, woraus auch eine unendliche Anzahl von Tangentialpunkten entsteht, die - ähnlich der Kontraktkurve - eine Linie der effizienten Produktion bilden, welche die Nullpunkte der Produktionen $0_x, 0_y$ verbindet. Im Punkt 0_x ist die Produktion des Gutes y maximal und die des Gutes x gleich Null, im Punkt 0_y ist der Output y gleich Null und die Herstellungsmenge x maximal.

60. Analytische Ableitung des Produktionsgleichgewichts. Die Optimalitätsbedingung $GRTS_x = GRTS_y = l/r$ kann auch formal abgeleitet werden. Nehmen wir ein gegebenes Produktionsniveau der Firma y an, so stellt dieses für den Optimierungsprozeß eine erste Restriktion dar:

$$\bar{y} = y(K_y, L_y). \tag{295}$$

Die Optimierung der x-Produktion erfolgt also entlang einer gegebenen y-Isoquante, wobei die unter diesen Bedingungen höchste Menge des Gutes x auf einer x-Isoquante gesucht wird. Auch bei der analytischen Ableitung des Produktionsoptimums werden die formalen Ähnlichkeiten zum Problem des reinen Tausches sichtbar. Ferner müssen die Faktorbestände der Volkswirtschaft als Restriktionen berücksichtigt werden:

$$\bar{K} = K_x + K_y, \tag{296}$$

$$\bar{L} = L_x + L_y. \tag{297}$$

Setzt man in (295) die Gleichungen (296) und (297) ein, so erhält man die Lagrangefunktion

$$\mathcal{L}(K_x, L_x, \lambda) = x(K_x, L_x) + \lambda[\bar{y} - y(\bar{K} - K_x, \bar{L} - L_x)] \tag{298}$$

mit den Bedingungen 1. Ordnung:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial L_x} = \frac{\partial x}{\partial L_x} + \lambda \frac{\partial y}{\partial L_y}\frac{dL_y}{dL_x} = 0, \tag{299}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial K_x} = \frac{\partial x}{\partial K_x} + \lambda \frac{\partial y}{\partial K_y}\frac{dK_y}{dK_x} = 0, \tag{300}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = [\bar{y} - y(\bar{K} - K_x, \bar{L} - L_x)] = 0. \tag{301}$$

Da sich aus den Restriktionen (296) $dL_y/dL_x = -1$ und (297) $dK_y/dK_x = -1$ ergeben, können die Ableitungen (299) und (300) wie folgt gleich λ geschrieben werden:

$$\lambda = \frac{\partial x/\partial L_x}{\partial y/\partial L_y} = \frac{\partial x/\partial K_x}{\partial y/\partial K_y}. \tag{302}$$

Setzt man vereinfachend für die Grenzproduktivität des Faktors k hinsichtlich des j-ten Gutes $GP_{k,j},\ k = L, K,\ j = x, y$, so läßt sich Gleichung (302) wie folgt ausdrücken:

$$\frac{GP_{L,x}}{GP_{K,x}} = \frac{GP_{L,y}}{GP_{K,y}} = GRTS_x = GRTS_y. \tag{302'}$$

Im Produktionsoptimum sind die Grenzraten der technischen Substitution $GRTS_j,\ j = x, y$, definiert als die Verhältnisse der Grenzproduktivitäten zweier Faktoren, gleich. Das Pareto-Optimum kann analog angewandt werden: Die Produktion eines Gutes kann nicht ausgeweitet werden, ohne die Produktion wenigstens eines anderen Gutes einzuschränken. Die Resultate können unter der Annahme der Ein-Produkt-Unternehmung wie folgt zusammengefaßt werden:

Satz: *Das Optimum in der Produktion ist gekennzeichnet durch die Gleichheit der Grenzraten der technischen Substitution der Firmen. Es handelt sich um ein Pareto-Optimum, da keine Firma ihre Produktion ausdehnen kann, ohne daß die Produktion wenigstens einer Firma eingeschränkt wird.*

Entlang der Linie $(0_x, 0_y)$ kann nun die Produktionsmenge des einen Gutes zu Lasten des anderen Gutes ausgedehnt werden et vice versa, ohne daß die Effizienzbedingung verletzt wird. Bei einem gegebenen Faktorenbestand und bei einer gegebenen Faktorenqualität gibt diese Linie die alternativen effizienten Produktionsmöglichkeiten an, man könnte auch sagen, ein Gut wird zunehmend in ein anderes Gut überführt oder transformiert. Dieser Sachverhalt kann in ein x/y-Diagramm übertragen werden.

61. Transformationskurve. Die Abbildung 47 besteht aus zwei Teilen. In der oberen Abbildung ist die schon bekannte Edgeworth-Box mit der Linie der effizienten Produktion dargestellt. Die beliebig herausgegriffenen Punkte A, B, C und D auf der „Kontraktkurve“ bezeichnen alternative Gütermengenkombinationen xy gemäß den Produktionsmengen, die durch die sich in den bezeichneten Punkten tangierenden Isoquanten bestimmt sind. Diese Mengenkombinationen x^1y^1, x^2y^2, x^3y^3 und x^4y^4 lassen sich in ein x/y-Diagramm, das in der unteren Abbildung dargestellt ist, übertragen. (Zu beachten ist, daß die Verbindungslinien nicht senkrecht verlaufen, da auf den Achsen beider Abbildungen unterschiedliche Variable abgetragen sind.)

Jeder Punkt auf der Kontraktkurve kann in die zweite Darstellung übertragen werden, so daß dort eine Kurve entsteht, die konkav (oder linear) von der y- zur x-Achse verläuft und die man als Produktionsmöglichkeitenkurve oder Transformationskurve bezeichnet. Alle Punkte auf der Kurve stellen bei gegebener Faktorausstattung mögliche und effiziente Produktionsmengen dar, alle Punkte jenseits der Kurve sind ohne wirtschaftliches Wachstum nicht zu verwirklichen, und alle Punkte unterhalb der Kurve sind zwar bei der gegebenen Faktorausstattung möglich, aber nicht effizient, weil entweder

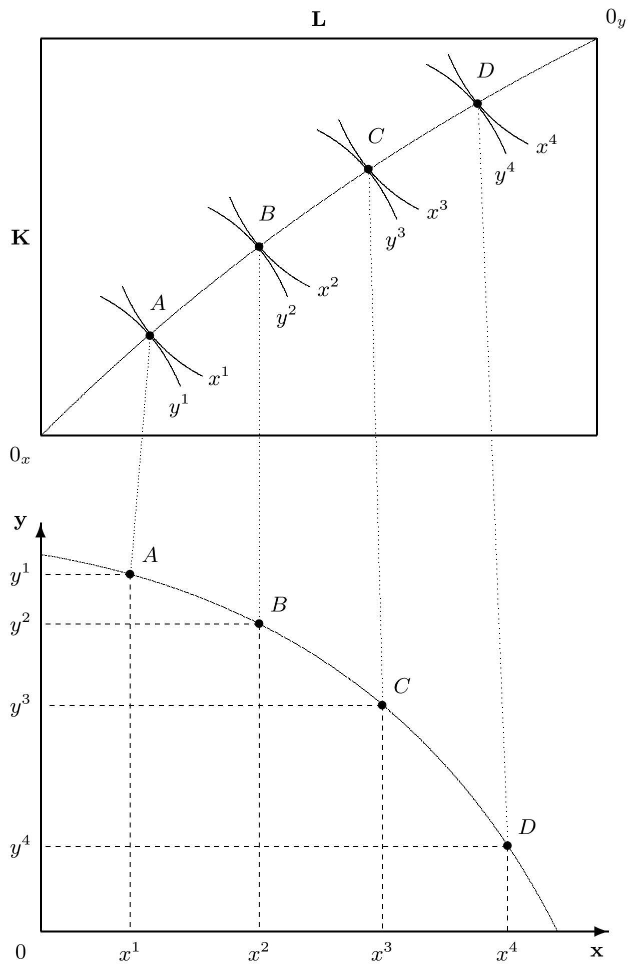


Abb. 47: Graphische Ableitung der Transformationskurve

Faktoren unterbeschäftigt oder suboptimal eingesetzt sind. Die Stärke der konkaven Krümmung der Transformationsfunktion in Abbildung 47 hängt, wie der Verlauf der Transformationskurve überhaupt, von den zur Herstellung beider Güter verwendeten Produktionstechnologien, also von den konkreten Produktionsfunktionen, ab.

62. Analytische Ableitung der Transformationskurve. Die Transformationsfunktion kann aus einfachen Produktionsfunktionen leicht formal abgeleitet werden. Es werden daher zwei linear homogene Produktionsfunktionen mit gleichen partiellen Produktionselastizitäten von 1/2 angenommen:

$$x = K_x^{1/2} L_x^{1/2}, \tag{303}$$

$$y = 2K_y^{1/2} L_y^{1/2}. \tag{304}$$

Wie wir aus den vorangegangenen Abschnitten wissen, müssen im Optimum die Grenzraten der technischen Substitution bei beiden Gütern gleich sein. Für Gut x ergibt sich somit:

$$GRTS_x = \frac{GP_{L,x}}{GP_{K,x}} = \frac{\partial x/\partial L_x}{\partial x/\partial K_x} = \frac{(1/2)x/L_x}{(1/2)x/K_x} = \frac{K_x}{L_x} \tag{305}$$

und für Gut y

$$GRTS_y = \frac{GP_{L,y}}{GP_{K,y}} = \frac{\partial y/\partial L_y}{\partial y/\partial K_y} = \frac{(1/2)y/L_y}{(1/2)y/K_y} = \frac{K_y}{L_y}. \tag{306}$$

Die Optimalbedingung aus der Gleichsetzung von (305) und (306) lautet folglich $K_x/L_x = K_y/L_y$, ein Resultat, das selbstverständlich nur für die angenommenen Produktionsfunktionen mit identischen partiellen Produktionselastizitäten 1/2 gilt. Setzt man für $K_y = \bar{K} - K_x$ und für $L_y = \bar{L} - L_x$ ein, so erhält man nach einigen Umformungen

$$K_x = \frac{\bar{K}}{\bar{L}} L_x. \tag{307}$$

Ersetzt man hingegen K_x durch $\bar{K} - K_y$ und L_x durch $\bar{L} - L_y$, so ergibt sich

$$K_y = \frac{\bar{K}}{\bar{L}} L_y. \tag{308}$$

Aus den Gleichungen (307) und (308) geht unzweifelhaft hervor, daß die Variation der Inputfaktoren linear ist. Die Linie der effizienten Produktion in der Edgeworth-Box, die die Nullpunkte $0_x, 0_y$ verbindet, ist eine Gerade mit der Steigung $\bar{K}/\bar{L}$. Nachdem die Bedingungen für eine effiziente Produktion ermittelt sind, kann die Formulierung der Transformationsfunktion wie folgt geschehen: In die Produktionsfunktion für das Gut x (303) setzen wir den Ausdruck der effizienten Kapitalverwendung (307) ein:

$$x = \left(\frac{\bar{K}}{\bar{L}} L_x\right)^{1/2} L_x^{1/2} = \left(\frac{\bar{K}}{\bar{L}}\right)^{1/2} L_x, \tag{309}$$

woraus man die Arbeitsnachfrage von

$$L_x = \left(\frac{\bar{L}}{\bar{K}}\right)^{1/2} x \tag{310}$$

erhält. Da $L_y = \bar{L} - L_x$ ist, kann die Produktionsfunktion für das Gut y (304) unter Verwendung von Gleichung (308) wie folgt geschrieben werden:

$$y = 2\left(\frac{\bar{K}}{\bar{L}}\right)^{1/2} \left(\bar{L} - L_x\right)$$

oder

$$y = 2\left(\frac{\bar{K}}{\bar{L}}\right)^{1/2} \left(\bar{L} - \left(\frac{\bar{L}}{\bar{K}}\right)^{1/2} x\right)$$

oder

$$y = 2\left[\left(\frac{\bar{K}\bar{L}^2}{\bar{L}}\right)^{1/2} - \left(\frac{\bar{K}}{\bar{L}}\frac{\bar{L}}{\bar{K}}\right)^{1/2} x\right]$$

oder

$$y = 2\left(\bar{K}\bar{L}\right)^{1/2} - 2x. \tag{311}$$

Die Gleichung (311) stellt die zu den Produktionsfunktionen (303) und (304) gehörende Transformationsfunktion dar, die eine konstante Steigung von $dy/dx = -2$ aufweist, und daher linear ist. Die Steigung der Transformationsfunktion wird allgemein als Grenzrate der Transformation GRT_{yx} des Gutes x in das Gut y bezeichnet.

Eine Änderung in der Produktionstechnologie, wie etwa die Ersetzung der Produktionsfunktion (304) durch die neue, ebenfalls linear homogene Funktion

$$y = K_y^{1/4} L_y^{3/4} \tag{312}$$

mit unterschiedlichen partiellen Produktionselastizitäten, läßt eine nichtlineare Variation der Inputfaktoren entstehen. Die Produktionsfunktion (303) möge unverändert bleiben. Aus der Bedingung $GRTS_x = GRTS_y$ folgt unmittelbar

$$\frac{K_x}{L_x} = 3\frac{\bar{K} - K_x}{\bar{L} - L_x}$$

oder

$$K_x = \frac{3L_x\bar{K}}{\bar{L} + 2L_x}. \tag{313}$$

Wie man leicht sieht, ist die Ableitung dK_x/dL_x keine Konstante mehr, d.h. die Kontraktkurve weist eine Krümmung auf und die Transformationskurve ist konkav. Für den Kapitaleinsatz bei der Produktion des Gutes y erhält man

$$K_y = \frac{\bar{K}L_y}{3\bar{L} - 2L_y}. \tag{314}$$

Die Transformationsfunktion kann analog zu den Schritten (309) bis (311) errechnet werden und lautet

$$y = \left(-\frac{x(x^2+3\bar{K}\bar{L})^{0,5} - x^2 - \bar{K}\bar{L}}{\bar{L}}\right)^{\frac{1}{4}} \left(\bar{L} - \frac{x(x^2+3\bar{K}\bar{L})^{0,5}x + x^2}{3\bar{K}}\right)^{\frac{3}{4}} . \tag{315}$$

Es kann gezeigt werden, z.B. auf graphischem Wege, daß die Transformationskurve konkav zum Ursprung ist. In einem Zahlenbeispiel in Abschnitt 64 wird jedoch auf die einfachere lineare Transformationsfunktion (311) zurückgegriffen.

63. Totales Gleichgewicht (ein Haushalt). Nachdem die Produktionsmöglichkeiten diskutiert worden sind, stellt sich die Frage, welche Gütermengenkombinationen tatsächlich produziert werden. Nur wenn diese Frage gelöst ist, können zwei wichtige weitere Fragen beantwortet werden: Wie lauten die relativen Faktorpreise und die relativen Güterpreise? Welche Allokation der Ressourcen wird tatsächlich realisiert? Es soll darauf hingewiesen werden, daß die Produktionsmengenkombination in Abbildung 46 willkürlich gewählt ist. In marktwirtschaftlich organisierten Volkswirtschaften entscheiden die Präferenzen der Haushalte über die Frage, welche Güter in welchen Mengen hergestellt werden. Die Präferenzen finden ihren graphischen Ausdruck in der Lage und der Krümmung der haushaltsindividuellen Indifferenzkurven; die gesellschaftlichen Präferenzen drücken sich analog dazu in gesellschaftlichen Indifferenzkurven aus, die prinzipiell die gleichen Eigenschaften aufweisen wie die individuellen. Um das Problem der Aggregation individueller Indifferenzkurven zu gesellschaftlichen Indifferenzkurven an dieser Stelle zu vermeiden - diese Frage wird später diskutiert -, können zwei alternative Annahmen getroffen werden. Entweder man geht davon aus, daß die Aggregation zu gesellschaftlichen Indifferenzkurven schon erfolgt ist, oder man nimmt eine Ein-Personen-Volkswirtschaft an. Welche der beiden Annahmen wir treffen, ist für das Resultat der Überlegungen unerheblich.

Die in einem x/y-Diagramm dargestellte Transformationskurve wird ergänzt durch eine Schar von Indifferenzkurven mit den Eigenschaften $\bar{U}_1 < \bar{U}_2 < \bar{U}_3 < \bar{U}_4$ (vgl. Abbildung 48). Es ist offensichtlich, daß $\bar{U}_4$ den höchsten Nutzen aufweist, aber keine Güterkombination auf dieser Kurve bei den vorhandenen Ressourcen verwirklicht werden kann. Die Indifferenzkurven $\bar{U}_1$ und $\bar{U}_2$ schneiden die Transformationskurve, enthalten folglich einen Bereich zulässiger Güterkombinationen, die aber - mit Ausnahme der Schnittpunk-

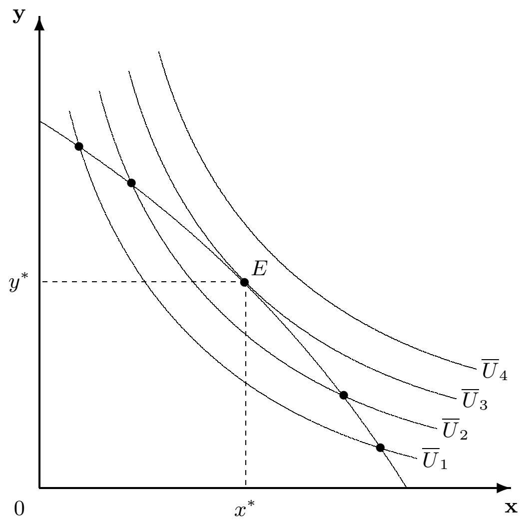


Abb. 48: Gleichgewicht auf dem Gütermarkt

te selbst - die Möglichkeiten des Ressourcenbestandes nicht ausschöpfen. Die Indifferenzkurve $\bar{U}_3$ tangiert in Punkt E die Transformationskurve und weist damit das höchstmögliche Nutzenniveau auf. Im Tangentialpunkt ist die Steigung der Indifferenzkurve - Grenzrate der Substitution des Gutes x in das Gut y, kurz GRS_{yx} - gleich der Steigung der Transformationskurve - Grenzrate der Transformation des Gutes x in das Gut y, kurz GRT_{yx} - und gleich dem relativen Preis p_x/p_y.

Die optimalen Gütermengen x^*, y^* sind an den Achsen abgetragen. Wenn man in Abbildung 49, der Edgeworth-Box für die Produktion, die entsprechenden sich tangierenden Isoquanten sucht, die genau diese Güterkombinationen repräsentieren, so erhält man nicht nur die zur Produktion eingesetzten Faktormengen $K_x^*, K_y^*, L_x^*, L_y^*$, sondern auch über die Steigung im Tangentialpunkt den relativen Faktorpreis l/r, der gleich den Grenzraten der technischen Substitution ist ($GRTS_x = GRTS_y$). Damit ist das totale mikroökonomische Gleichgewicht für eine Ein-Personen-Ökonomie sowie zwei Güter und zwei Faktoren graphisch dargestellt. Gegeben sind in diesem Modell die Faktorbestände, die Nutzenfunktion und die Produktionsfunktionen, wobei beide Funktionen nichtökonomische Sachverhalte beschreiben: die Nutzenfunktion psychologisch begründbare Präferenzen der Individuen und die Produktionsfunktionen den technischen Zusammenhang zwischen physischen Input- und Outputmengen. Modellendogen werden die relativen

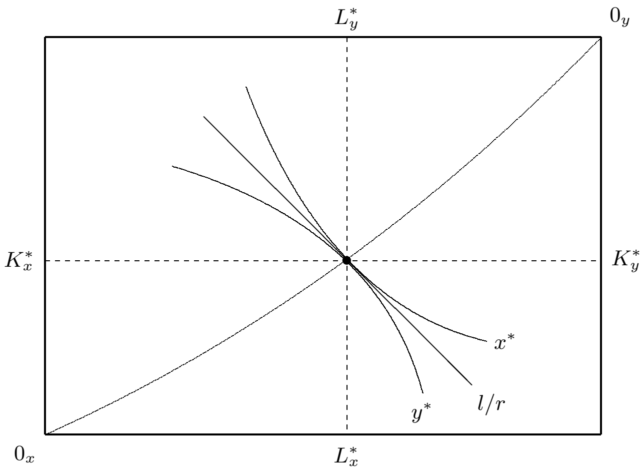


Abb. 49: Gleichgewicht auf dem Faktormarkt

Preise für Güter und Faktoren sowie die konsumierten Gütermengen und die Verwendung der Produktionsfaktoren ermittelt.

Der graphisch dargestellte Zusammenhang kann auch leicht analytisch abgeleitet werden. Zunächst soll gezeigt werden, daß die Grenzrate der Transformation GRT_{yx} gleich dem relativen Preis p_x/p_y ist. Da die beiden Isoquanten in Abbildung 49 durch die totalen Differentiale der beiden Produktionsfunktionen $x = x(K_x, L_x)$ und $y = y(K_y, L_y)$ beschrieben werden können, gilt:

$$dx = \frac{\partial x}{\partial K_x} dK_x + \frac{\partial x}{\partial L_x} dL_x, \tag{316}$$

$$dy = \frac{\partial y}{\partial K_y} dK_y + \frac{\partial y}{\partial L_y} dL_y. \tag{317}$$

Unter den Annahmen der Grenzproduktivitätstheorie ($\partial x/\partial L_x = l_x/p_x$, $\partial x/\partial K_x = r_x/p_x$, $\partial y/\partial L_y = l_y/p_y$ und $\partial y/\partial K_y = l_y/p_y$) und der Annahme homogener Faktormärkte, auf denen einheitliche Faktorpreise herrschen ($l_x = l_y = l, r_x = r_y = r$), kann das Verhältnis $-dy/dx$ (Grenzrate der Transformation) unter Berücksichtigung von $\bar{L} - L_y = L_x$ bzw. $\bar{K} - K_y = K_x$ und $dL_y = -dL_x$ bzw. $dK_y = -dK_x$ als

$$-\frac{dy}{dx} = \frac{(r/p_y)dK_x + (l/p_y)dL_x}{(r/p_x)dK_x + (l/p_x)dL_x} = \frac{p_x(rdK_x + ldL_x)}{p_y(rdK_x + ldL_x)} \tag{318}$$

geschrieben werden, woraus sich nach Kürzen

$$-\frac{dy}{dx} = \frac{p_x}{p_y} \tag{319}$$

der behauptete Zusammenhang ergibt. Das totale Differential der Nutzenfunktion $U = U(x, y)$ beschreibt die Indifferenzkurve des Konsumenten

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy = 0, \tag{320}$$

woraus sich durch Umformen

$$-\frac{dy}{dx} = \frac{\partial U/\partial y}{\partial U/\partial x} \tag{321}$$

ergibt. Der rechte Ausdruck ist bekanntlich die Grenzrate der Substitution GRS_{yx} und der linke die Grenzrate der Transformation. Zusammen mit dem Ergebnis aus dem Produktionsbereich erhalten wir die Gleichgewichtsbedingung: $GRS_{yx} = GRT_{yx} = p_x/p_y$. Setzt man die totalen Differentiale der Produktionsfunktionen $dx = 0$ und $dy = 0$, so gilt für den Tangentialpunkt der Isoquanten nach Umformen unter Berücksichtigung der Grenzproduktivitätstheorie der Faktorentlohnung und homogener Faktormärkte:

$$\frac{\partial x}{\partial K_x} dK_x = -\frac{\partial x}{\partial L_x} dL_x \quad oder \quad -\frac{dK_x}{dL_x} = \frac{\partial x/\partial L_x}{\partial x/\partial K_x} = \frac{l}{r} \tag{322}$$

und unter Verwendung von $dL_y = -dL_x$ bzw. $dK_y = -dK_x$

$$-\frac{\partial y}{\partial K_y} dK_x = \frac{\partial y}{\partial L_y} dL_x \quad oder \quad -\frac{dK_x}{dL_x} = \frac{\partial y/\partial L_y}{\partial y/\partial K_y} = \frac{l}{r}. \tag{323}$$

Im Gleichgewicht ist die Grenzrate der technischen Substitution für beide Produktionen gleich und identisch mit dem Verhältnis der Faktorpreise: $GRTS_x = GRTS_y = l/r$. Auf beide Gleichgewichtsbedingungen werden wir im Fall der Mehr-Personen-Volkswirtschaft noch zurückkommen.

64. Zahlenbeispiel für das totale Gleichgewicht. Die auf graphischem Weg gefundenen Resultate sollen nun in einem Zahlenbeispiel verdeutlicht werden. Die Faktorbestände mögen $\bar{K} = 200$ und $\bar{L} = 800$ sein. Wir nehmen ferner die schon bekannten Produktionsfunktionen

$$x = K_x^{1/2} L_x^{1/2}, \tag{303}$$

$$y = 2K_y^{1/2} L_y^{1/2} \tag{304}$$

sowie die daraus folgende Transformationskurve

$$y = 2\left(\bar{K}\bar{L}\right)^{1/2} - 2x \tag{311}$$

an, die nunmehr

$$y = 800 - 2x \tag{324}$$

lautet. Die in Abbildung 48 dargestellten Indifferenzkurven mögen auf die Nutzenfunktion $U = U(x, y) = xy$ zurückzuführen sein. Diese Nutzenfunktion ist unter der Restriktion der Transformationsfunktion (311) zu maximieren. Wir erhalten die Lagrangefunktion

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda) = xy + \lambda(y - 800 + 2x) \tag{325}$$

mit den partiellen Ableitungen (Bedingungen 1. Ordnung):

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = y + 2\lambda = 0, \tag{326}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = x + \lambda = 0, \tag{327}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = y - 800 + 2x = 0. \tag{328}$$

Setzt man aus (326) und (327) λ gleich, so erhält man die Relation $y = 2x$, die wiederum in (328) eingesetzt wird. Damit ist das System aus drei Gleichungen und drei Variablen (x, y, λ) gelöst. Aus $2x - 800 + 2x = 0$ ergibt sich die optimale Gütermenge x^* und durch Einsetzen dieses Ergebnisses in die Transformationsfunktion (324) auch y^*:

$$x^* = 200, \qquad y^* = 400.$$

Die Grenzrate der Transformation lautet

$$GRT_{yx} = -\frac{dy}{dx} = -\frac{d(800 - 2x)}{dx} = 2. \tag{329}$$

Da die Grenzrate der Transformation dem relativen Preisverhältnis entspricht, erhält man

$$p_x / p_y = 2. \tag{330}$$

Mit Hilfe der optimalen Produktionsmengen, die in die Arbeitsnachfrage sowie in die analog dazu abzuleitende Kapitalnachfrage eingesetzt werden, kann der optimale Einsatz der Ressourcen ermittelt werden:

$$K_x^* = \left(\frac{\bar{K}}{\bar{L}}\right)^{1/2} x^* = \left(\frac{200}{800}\right)^{1/2} 200 = 100, \tag{331}$$

$$L_x^* = \left(\frac{\bar{L}}{\bar{K}}\right)^{1/2} x^* = \left(\frac{800}{200}\right)^{1/2} 200 = 400, \tag{332}$$

$$K_y^* = 0.5\left(\frac{\bar{K}}{\bar{L}}\right)^{1/2} y^* = 0,5\left(\frac{200}{800}\right)^{1/2} 400 = 100, \tag{333}$$

$$L_y^* = 0,5\left(\frac{\bar{L}}{\bar{K}}\right)^{1/2} y^* = 0,5\left(\frac{800}{200}\right)^{1/2} 400 = 400. \tag{334}$$

Die Summe der Faktoreinsätze entspricht selbstverständlich den Beständen $K_x^* + K_y^* = 200$ und $L_x^* + L_y^* = 800$. Wie schon dargestellt wurde, ist im Optimum die Grenzrate der technischen Substitution gleich dem relativen Faktorpreis:

$$GRTS_x = \frac{GP_{L,x}}{GP_{K,x}} = \frac{\partial x/\partial L_x}{\partial x/\partial K_x} = \frac{K_x^*}{L_x^*} = \frac{100}{400} = 1/4, \tag{335}$$

$$GRTS_y = \frac{GP_{L,y}}{GP_{K,y}} = \frac{\partial y/\partial L_y}{\partial y/\partial K_y} = \frac{K_y^*}{L_y^*} = \frac{100}{400} = 1/4. \tag{336}$$

Aus beiden Gleichungen geht hervor, daß der relative Faktorpreis $l/r = 1/4$ lautet.

Von den relativen Preisen gelangt man zu den absoluten Preisen durch die Normierung eines absoluten Preises. Wählt man beispielsweise den Preis für den Faktor Kapital $\tilde{r} = 1$, so lautet der Lohnsatz $\tilde{l} = 1/4$. Über die Grenzproduktivitätstheorie der Faktorentlohnung lassen sich leicht die absoluten Güterpreise ermitteln. Nach der Inputregel der Gewinnmaximierung setzt ein Unternehmen bei vollkommenen Güter- und Faktormärkten die Faktormengen so ein, daß die nominale Faktorentlohnung dem Grenzwertprodukt entspricht. Für den Arbeitseinsatz bei der Herstellung des Gutes x gilt beispielsweise:

$$\tilde{l} = \tilde{p}_x GP_{L,x} \tag{337}$$

oder, wenn man die numerischen Werte aus unserem Beispiel einsetzt und berücksichtigt, daß $GP_{L,x} = (1/2)x/L_x$ ist:

$$1/4 = \tilde{p}_x[(1/2)(200/400)]. \tag{338}$$

Löst man diese Gleichung nach dem Güterpreis auf, so erhält man $\tilde{p}_x = 1$ und, da $\tilde{p}_x/\tilde{p}_y = 2$ ist, für das zweite Gut den absoluten Preis $\tilde{p}_y = 1/2$. In der beschriebenen geschlossenen Volkswirtschaft ohne Staatsaktivitäten und Finanzsektor, also bei Abwesenheit von Außenhandel, Steuern, Transferzahlungen und Krediten, müssen die Ausgaben der Firmen für Produktionsfaktoren, die gleich dem Einkommen der Haushalte (oder des einzigen

Haushaltes) sind, den Einnahmen der Unternehmen aus dem Güterverkauf entsprechen, die gleich den Ausgaben der Haushalte (oder des einzigen Haushaltes) für Güter sind:

$$\begin{aligned}
\text{Unternehmen: } Faktorausgaben &= Umsatz, \\
\text{Haushalte: } Faktoreinkommen &= Konsumausgaben, \\
\tilde{l}(L_x^* + L_y^*) + \tilde{r}(K_x^* + K_y^*) &= \tilde{p}_x x^* + \tilde{p}_y y^*, \\
(1/4)(400 + 400) + 1(100 + 100) &= 1(200) + (1/2)(400), \\
400 &= 400.
\end{aligned}$$

Dieses Zahlenbeispiel zeigt, daß bei den Unternehmen keine Gewinne entstehen. Die Ursachen dafür liegen sowohl in den vollkommenen Faktor- und Gütermärkten als auch in den linear homogenen Produktionsfunktionen. Ferner geben die Haushalte ihr gesamtes Einkommen für Güter aus, es wird weder gespart noch entspart.

65. Zwei-Haushalte-Fall. In den vorangegangenen Abschnitten wird die Bedingung für das Tauschgleichgewicht zwischen den Haushalten vernachlässigt, da eine Ein-Personen-Ökonomie unterstellt wird oder gesellschaftliche Indifferenzkurven als Ausgangspunkt genommen werden. Diese Vereinfachung soll nun aufgehoben und zwei Haushalte mit den Nutzenfunktionen $U_A(x_A, y_A)$ und $U_B(x_B, y_B)$ eingeführt werden. In Abschnitt 63 lautet die Optimalbedingung für den Produktionspunkt auf der Transformationskurve, der den Wünschen der Haushalte entspricht: $GRS_{yx} = GRT_{yx}$. Dabei bezeichnet die Grenzrate der Substitution die Steigung der Indifferenzkurve eines Haushaltes oder die Steigung der gesellschaftlichen Indifferenzkurve. Wie aber können die nutzenmaximalen, pareto-optimalen Gütermengen bei zwei Haushalten gefunden werden, die gleichzeitig von der Ausstattung mit Produktionsfaktoren zugelassen werden? Anders gesagt, wie läßt sich der Produktionspunkt auf der Transformationskurve unter diesen Annahmen finden, und wie lautet die Bedingung? Wie auch bei der Diskussion der vorangegangenen Probleme soll zunächst eine graphische und danach eine analytische Lösung vorgestellt werden.

In den nachstehenden Abbildungen 50a bis 50c sind die Transformationsfunktionen jeweils identisch. Die eingezeichnete Indifferenzkurve $\bar{U}_A$ des Haushaltes A ist ebenfalls unverändert, sie schneidet die Transformationskurve und repräsentiert ein gegebenes Nutzenniveau dieses Haushaltes. Wenn im Tauschgleichgewicht das Pareto-Optimum verwirklicht werden soll, so ist unter diesen Voraussetzungen der Nutzen des Haushaltes B zu maximieren. Graphisch kann das geschehen, indem der Nullpunkt eines y_B/x_B-Diagramms entlang der Indifferenzkurve $\bar{U}_A$ von Schnittpunkt zu Schnittpunkt verschoben wird und die höchste Indifferenzkurve $\bar{U}_B$ im y_B/x_B-Diagramm ermittelt wird, die die Transformationskurve gerade tangiert. Offensichtlich ist dieses Ziel in Abbildung 50a und 50c nicht verwirklicht, da im ersten Fall der Tangentialpunkt auf der Indifferenzkurve $\bar{U}_B^1$ und im zweiten Fall auf $\bar{U}_B^2$ liegt, in Abbildung 50b aber die höchste Indifferenzkurve $\bar{U}_B^3$ erreicht wird. Dieser Tangentialpunkt E repräsentiert unzweifelhaft ein Pareto-Optimum: Der Haushalt B kann nicht bessergestellt werden, ohne daß das Nutzenniveau des Haushaltes A sinkt.

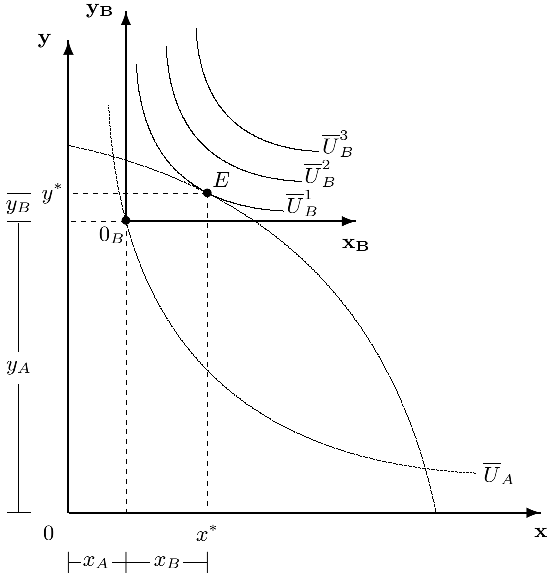


Abb. 50a: Suboptimale Lösung

Die Punkte E und 0_B entscheiden über die Güterverteilung zwischen den Haushalten. Der Tangentialpunkt E bestimmt die volkswirtschaftliche Produktion x^*, y^* im x/y-Diagramm und gleichzeitig die Gütermengen x_B und y_B im x_B/y_B-Diagramm, die der Haushalt B erhält. Der Nullpunkt dieses Diagramms bezeichnet den Rest der Produktion, den Haushalt A konsumiert: $x^* - x_B = x_A$ und $y^* - y_B = y_A$. Ferner kann festgehalten werden, daß im Tangentialpunkt E die Bedingung $GRT_{yx} = GRS_{yxB}$ gilt und - was aus der Graphik nicht zwingend abgeleitet werden kann - daß schließlich auch $GRT_{yx} = GRS_{yxB} = GRS_{yxA}$ gelten muß. Im folgenden Abschnitt soll diese letzte Aussage analytisch gezeigt werden.

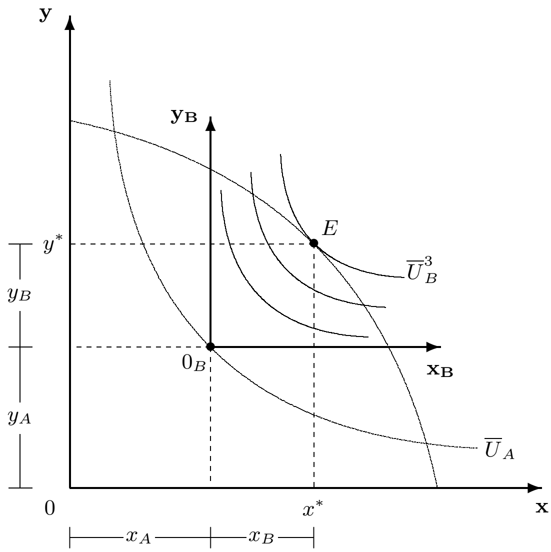


Abb. 50b: Optimale Lösung

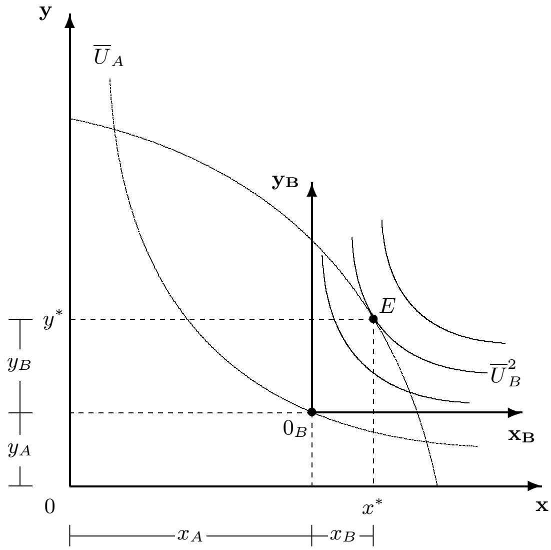


Abb. 50c: Suboptimale Lösung

Wie auch in der graphischen Darstellung möge der Nutzen des Haushaltes B maximiert werden. Dabei sind die nachstehenden Restriktionen zu beachten:

1. Das Nutzenniveau des Haushaltes A wird als konstant angenommen: $\bar{U}_A = U_A(x_A, y_A)$.

2. Das Gut x wird vollständig auf die Haushalte A und B aufgeteilt: $x = x_A + x_B$.
3. Das Gut y wird vollständig auf die Haushalte A und B aufgeteilt: $y = y_A + y_B$.
4. Gegeben seien eine Produktionstechnologie und ein Faktorbestand, die ihren Ausdruck in der Transformationsfunktion $y = \phi(x)$ finden.

Die Lagrangefunktion ist unter Berücksichtigung der vier Restriktionen wie folgt zu formulieren:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= U_B(x_B, y_B) + \lambda_1[\bar{U}_A - U_A(x_A, y_A)] \\ &+ \lambda_2[x - x_A - x_B] + \lambda_3[y - y_A - y_B] + \lambda_4[y - \phi(x)]. \end{aligned} \tag{339}$$

Die Bedingungen 1. Ordnung lauten:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_B} = \frac{\partial U_B}{\partial x_B} - \lambda_2 = 0 \quad \Longrightarrow GN_{Bx} = \lambda_2, \tag{340}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y_B} = \frac{\partial U_B}{\partial y_B} - \lambda_3 = 0 \quad \Longrightarrow GN_{By} = \lambda_3, \tag{341}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_A} = -\lambda_1 \frac{\partial U_A}{\partial x_A} - \lambda_2 = 0 \quad \Longrightarrow -\lambda_1 GN_{Ax} = \lambda_2, \tag{342}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y_A} = -\lambda_1 \frac{\partial U_A}{\partial y_A} - \lambda_3 = 0 \quad \Longrightarrow -\lambda_1 GN_{Ay} = \lambda_3, \tag{343}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = \lambda_3 + \lambda_4 = 0 \quad \Longrightarrow \lambda_3 = -\lambda_4, \tag{344}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = \lambda_2 - \lambda_4 \frac{dy}{dx} = 0 \quad \Longrightarrow \lambda_2 = \lambda_4 \frac{dy}{dx}. \tag{345}$$

Aus den Ableitungen (344) und (345) erhält man für die Grenzrate der Transformation $-dy/dx$ den Ausdruck $\lambda_2/\lambda_3 = GRT_{yx}$. Das Verhältnis der Lagrangemultiplikatoren λ_2/λ_3 aber ist nach (340) und (341) identisch mit GN_{Bx}/GN_{By} und nach (342) und (343) gleich GN_{Ax}/GN_{Ay}. Da die Verhältnisse der Grenznutzen bekanntlich als Grenzrate der Substitution bezeichnet werden, entspricht das Verhältnis der Schattenpreise der beiden Güter λ_2/λ_3 der Grenzrate der Transformation und den Grenzraten der Substitution beider Haushalte:

$$\lambda_2/\lambda_3 = GRT_{yx} = GRS^A_{yx} = GRS^B_{yx}.$$

Die im Zusammenhang mit Abbildung 48 aufgeworfene Frage ist damit eindeutig beantwortet; in Graphik 50b müssen die Steigungen der Indifferenzkurven $\bar{U}_A$ und $\bar{U}_B^3$ in den Punkten 0_B und E tatsächlich identisch sein, nur dann liegt ein Pareto-Optimum vor. Wie man sich leicht überzeugen kann, ist diese Bedingung in Abbildung 50a und 50c nicht erfüllt. Folgender Satz kann formuliert werden:

Satz: *Das Tausch- und Produktionsoptimum bei gegebener Faktorausstattung ist gekennzeichnet durch die Gleichheit der Grenzraten der Substitution der Akteure und der Grenzrate der Transformation sowie dem Verhältnis der (Schatten-)Preise der Güter. Es handelt sich um ein Pareto-Optimum, da kein Akteur bessergestellt werden kann, ohne daß wenigstens ein Akteur schlechtergestellt wird.*

Das Optimum in der Produktion, so wie es die Transformationsfunktion repräsentiert, ist ferner gekennzeichnet durch die Gleichheit der Grenzraten der technischen Substitution der Firmen. Im Maximierungsproblem (339) sind die Restriktionen einzeln aufgeführt und jeweils mit einem Lagrangemultiplikator versehen. Es wird darauf verzichtet, die Restriktionen durch wechselseitiges Einsetzen auf eine Restriktion zu reduzieren. Die Lagrangemultiplikatoren zu den Güterrestriktionen x und y geben die Knappheit dieser Güter an; je höher der Wert von λ_1 bzw. λ_2 ist, um so knapper ist das Gut. Beide Lagrangemultiplikatoren λ_1 und λ_2 können als Schattenpreise der beiden Güter verstanden werden, die nicht in Märkten entstanden, sondern das Ergebnis eines Optimierungsverfahrens sind und die Knappheit der Güter anzeigen. Schattenpreise und Marktpreise stimmen immer dann überein, wenn funktionsfähige Märkte vorliegen.

66. Totales Gleichgewicht (zwei Haushalte). Das totale mikroökonomische Gleichgewicht kann im „2 Personen–2 Güter–2 Faktoren–Fall“ durch die beiden Sätze

$$GRS_{yx}^A = GRS_{yx}^B = GRT_{yx} = p_x/p_y$$

und

$$GRTS_x = GRTS_y = l/r$$

zusammengefaßt werden. Die graphische Übertragung des Produktionspunktes auf der Transformationskurve auf die Isoquanten in der Produktions-Edgeworth-Box wird in gleicher Weise durchgeführt wie im „1 Konsumenten–

Fall". Es ergeben sich folgende Ströme, wenn man die Kapitalkosten auf $\tilde{r} = 1$ normiert, und damit $\tilde{l} = l/r$, $\tilde{p}_x = p_x/r$, $\tilde{p}_y = p_y/r$ berücksichtigt:

$$\begin{aligned} \text{Unternehmen: } &\textit{Faktorausgaben} &=& \quad \textit{Umsatz}, \\ \text{Haushalte: } &\textit{Faktoreinkommen} &=& \quad \textit{Konsumausgaben}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Unternehmen: } \tilde{l}L_x^* + \tilde{r}K_x^* + \tilde{l}L_y^* + \tilde{r}K_y^* &= \tilde{p}_x x^* + \tilde{p}_y y^*, \\ \text{Haushalte: } \tilde{l}L_A^* + \tilde{r}K_A^* + \tilde{l}L_B^* + \tilde{r}K_B^* &= \tilde{p}_x x_A^* + \tilde{p}_y y_A^* + \tilde{p}_x x_B^* + \tilde{p}_y y_B^*, \end{aligned}$$

mit

$$x_A^* + x_B^* = x^*, \qquad y_A^* + y_B^* = y^*,$$

$$L_A^* + L_B^* = L_x^* + L_y^* = \bar{L}, \qquad K_A^* + K_B^* = K_x^* + K_y^* = \bar{K}$$

als Bestandsgleichungen. Im dargestellten System sind folgende Unbekannte enthalten: Die Mengen der Güter, die von zwei Haushalten nachgefragt werden $(2 \cdot 2)$, die Mengen der Güter, die von zwei Firmen angeboten werden (2), die Mengen der nachgefragten Faktoren von zwei Firmen $(2 \cdot 2)$, die Mengen der Faktoren, die von zwei Haushalten angeboten werden $(2 \cdot 2)$, die Güterpreise (2) und die Faktorpreise (2).

67. Verallgemeinerung des totalen Gleichgewichts. Das totale mikroökonomische Gleichgewicht, nach dem französischen Ökonomen Marie Esprit Léon Walras auch als Walras-Gleichgewicht bezeichnet, kann auf viele Haushalte, Firmen bzw. Güter und Faktoren erweitert werden. Dabei gewinnt das Modell an Allgemeinheit, verliert aber seine Anschaulichkeit und die Möglichkeit, die Vorgänge und Ergebnisse graphisch darzustellen. Es mögen folgende Annahmen getroffen werden:

1. Es existieren M Haushalte, die mit $i = 1$ bis M bezeichnet werden.
2. Es existieren N Güter oder Firmen (Einproduktunternehmen), die mit $j = 1$ bis N benannt werden. Die Menge des Gutes j sei q_j.
3. Es existieren R Produktionsfaktoren, die mit $k = 1$ bis R bezeichnet werden. Die Menge des Faktors k sei v_k.
4. Die Güterpreise werden mit p_j und die Faktorpreise mit w_k bezeichnet.

Alle anderen Annahmen aus Abschnitt 56 gelten weiterhin. Die Nachfrage der Haushalte nach Gütern hängt von den Preisen der Güter, von den

Präferenzen und von den Einkommen der Haushalte ab. Die Einkommen wiederum sind abhängig von den Faktorpreisen und den Güterpreisen, wobei beide Variablen das Faktorangebot der Haushalte – neben den Nutzeneinschätzungen – bestimmen. Die Maximierung der Nutzen unter den entsprechenden Nebenbedingungen ergeben die Güternachfragefunktionen:

$$q_{ji} = f_{ji}(p_1, ..., p_N, w_1, ..., w_R), \quad i = 1, ..., M, \quad j = 1, ..., N, \tag{346}$$

und die Faktorangebotsfunktionen:

$$v_{ki} = f_{ki}(p_1, ..., p_N, w_1, ..., w_R), \quad i = 1, ..., M, \quad k = 1, ..., R. \tag{347}$$

Die haushaltsindividuellen Präferenzen hinsichtlich Gütern und Faktorenangebot finden ihren Ausdruck in den individuell unterschiedlichen Funktionen f_{ji} und f_{ki}. Die Unternehmen maximieren ihre Gewinne unter gegebenen technischen Nebenbedingungen. Ihre Nachfrage nach Produktionsfaktoren wird durch die produzierte Gütermenge, alle Faktorpreise und die Produktionstechnologie bestimmt:

$$v_{kj} = f_j(q_j, w_1, ..., w_R), \quad j = 1, ..., N, \quad k = 1, ..., R, \tag{348}$$

wobei f_j implizit die Produktionstechnologie enthält, die als linear homogen angenommen wird. Das Güterangebot der Firmen ist unter den Bedingungen vollkommener (perfekter) Märkte und Gewinnmaximierung durch die Gleichheit von Erlösen und Kosten gekennzeichnet:

$$p_j q_j = \sum_{k=1}^{R} v_{kj} w_{kj}, \quad j = 1, ..., N. \tag{349}$$

Das Gleichgewicht der Märkte ist erreicht, wenn alle angebotenen Mengen den nachgefragten Mengen entsprechen, d.h. keine Überschußangebote oder -nachfragen existieren. Die sogenannten „Markträumungsbedingungen" lauten folglich für die Gütermärkte:

$$\sum_{i=1}^{M} q_{ji} = q_j, \quad j = 1, ..., N \tag{350}$$

und für die Faktormärkte:

$$\sum_{j=1}^{N} v_{kj} = \sum_{i=1}^{M} v_{ki}, \quad k = 1, ..., R. \tag{351}$$

Das vorgestellte $N \cdot M \cdot R$-Modell umfaßt insgesamt die nachstehende Anzahl von Gleichungen: $M \cdot N$ Güternachfragegleichungen, N Güterangebotsgleichungen, $N \cdot R$ Faktornachfragegleichungen und $M \cdot R$ Faktorangebotsgleichungen. Das Modell enthält die folgenden endogenen Variablen, die aus dem Modell heraus erklärt werden: Die Gütermengen, die durch die Haushalte nachgefragt werden, also insgesamt $M \cdot N$ Mengen, die angebotenen Gütermengen N, die durch die Firmen nachgefragten Faktormengen $N \cdot R$ und die durch die Haushalte angebotenen Faktormengen $M \cdot R$. Eine Lösung für das Modell existiert, wenn die Anzahl der endogenen Variablen der Anzahl der unabhängigen Gleichungen entspricht. Im dargestellten Modell ist die Anzahl der unabhängigen Gleichungen um eine geringer als die Anzahl der endogenen Variablen; eine Gleichung ist nicht unabhängig, und somit redundant. Damit ist das System nur lösbar, wenn eine endogene Variable durch Annahme in eine exogene Variable verwandelt wird. Es soll nunmehr gezeigt werden, daß in dem angegebenen Modell eine Gleichung nicht unabhängig ist. Die gesamten Einkommen aller Haushalte sind gleich den gesamten Ausgaben für Konsumgüter

$$\sum_{i=1}^{M} \sum_{k=1}^{R} v_{ik} w_k = \sum_{i=1}^{M} \sum_{j=1}^{N} q_{ij} p_j . \tag{352}$$

Diese Gleichung ist im Modell eine Budgetrestriktion. Sie stellt eine Identität dar und gilt nicht nur für die Gleichgewichtspreise, sondern auch für ihr Vielfaches. Anders gesagt: Die Elemente der beiden Vektoren $\mathbf{w}$ und $\mathbf{p}$ mögen Gleichgewichtspreise darstellen, die mit einer gemeinsamen Zahl multipliziert werden können, ohne daß die Restriktion (352) ihre Gültigkeit verliert. Zur Lösung des Problems soll das Gut N separiert werden. Für alle Unternehmen gilt

$$\sum_{j=1}^{N-1} p_j q_j = \sum_{k=1}^{R} \sum_{j=1}^{N-1} v_{kj} w_{kj} \tag{353}$$

und

$$p_N q_N = \sum_{k=1}^{R} v_{kN} w_{kN} . \tag{354}$$

Die Faktoreinkommen aller Haushalte sind gleich den Faktorausgaben aller Firmen

$$\sum_{i=1}^{M} \sum_{k=1}^{R} v_{ik} w_k = \sum_{k=1}^{R} \sum_{j=1}^{N-1} v_{kj} w_{kj} + \sum_{k=1}^{R} v_{kN} w_{kN}$$

oder

$$\sum_{i=1}^{M}\sum_{k=1}^{R} v_{ik}w_k - \sum_{k=1}^{R}\sum_{j=1}^{N-1} v_{kj}w_{kj} = \sum_{k=1}^{R} v_{kN}w_{kN}. \tag{355}$$

Die Konsumausgaben aller Haushalte sind gleich dem Umsatz aller Unternehmen

$$\sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{N} q_{ij}p_j = \sum_{j=1}^{N-1} p_j q_j + p_N q_N$$

oder

$$\sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{N} q_{ij}p_j - \sum_{j=1}^{N-1} p_j q_j = p_N q_N. \tag{356}$$

Da die linken Seiten der Gleichungen (355) und (356) gleich sind, müssen auch die rechten Seiten gleich sein:

$$p_N q_N = \sum_{k=1}^{R} v_{kN}w_{kN}.$$

Dieser Ausdruck ist mit (354) identisch und stellt eine redundante Gleichung dar. Anders gesagt, das Gleichungssystem kann gelöst werden (im Fall linearer, inhomogener Gleichungen), wenn der Preis $\tilde{p}_N$ für das N-te Gut vorgegeben wird. Ist die Lösung für R Faktormärkte und $N-1$ Gütermärkte gefunden worden, dann ergibt sich daraus auch die Lösung für den Markt N. Jeder der Preise kann verwendet werden, um durch ihn alle anderen Preise auszudrücken:

$$p_1/p_N,\ \ p_2/p_N, ..., p_{N-1}/p_N,\ \ 1 \quad \text{und} \quad w_1/p_N,\ \ w_2/p_N, ..., w_R/p_N.$$

Mit diesen Überlegungen soll die Darstellung des mikroökonomischen totalen Gleichgewichts bei vollkommenen Märkten abgeschlossen werden. Zur Beantwortung weiterer Fragen zur Stabilität des Modells, zur Problematik nichtlinearer Gleichungssysteme und unvollkommener Märkte soll auf die weiterführende Literatur verwiesen werden.

68. Wohlfahrtsfunktion. Im totalen mikroökonomischen Gleichgewicht werden Gleichgewichtspreise und -mengen bestimmt, die die haushaltsindividuellen Einkommens- und Güterverteilungen auf der Grundlage einer als exogen angenommenen Erstausstattung mit Gütern und einer ebenfalls gegebenen Faktorausstattung entstehen lassen. Die Güterverteilung bestimmt die realisierten Nutzenniveaus der Haushalte, wobei die Frage offenbleibt, ob die entstandene Verteilung – eine unter vielen möglichen – aus gesellschaftlicher Sicht wünschenswert ist, genauer gesagt, ob die Verteilung die Wohlfahrt der Volkswirtschaft maximiert oder ein suboptimales Resultat erzeugt. Zur Lösung dieser Frage muß eine gesellschaftliche Wohlfahrtsfunktion eingeführt werden, die zweifach differenzierbar sein soll und als Argumente die individuellen Nutzenniveaus enthält:

$$W = W(U_1,\ U_2,\ U_3, ...,\ U_M). \tag{357}$$

Die Wohlfahrtsfunktion bündelt in einer noch zu diskutierenden Weise die Nutzen der Individuen zu einem sozialen Nutzen oder einer gesellschaftlichen Wohlfahrt. Mit Gleichung (357) ist der Schritt von der positiven (erklärenden) Ökonomik zur normativen (gestaltenden) Wirtschaftswissenschaft vollzogen. Die Konkretisierung der Wohlfahrtsfunktion erfordert nämlich zwei Entscheidungen, die normativer Art sind: Zum einen muß der Funktionstyp festgelegt werden, und zum anderen sind die Gewichte, mit denen die individuellen Nutzen in die Wohlfahrtsfunktion Eingang finden, zu bestimmen. Mit beiden Entscheidungen sind notwendigerweise Urteile über die gesellschaftliche Bedeutung des Wohlergehens der Haushalte verbunden, wofür es zwar viele mögliche Kriterien, aber kein objektives Kriterium gibt. Zwei Funktionstypen sollen herausgegriffen werden, um die Problematik zu verdeutlichen:

$$W = \sum_{i=1}^{M} a_i U_i, \ \text{ mit } \ a_i > 0, \tag{358}$$

$$W = \prod_{i=1}^{M} (U_i)^{a_i}, \ \text{ mit } \ a_i > 0. \tag{359}$$

In beiden Formen der Wohlfahrtsfunktion kann eine Nutzenreduktion des einen Haushaltes durch einen Nutzenzuwachs des anderen Haushaltes ausgeglichen werden. In der multiplikativen Verknüpfung (359) müssen alle individuellen Nutzen größer Null sein und in der additiven Aggregation (358) muß lediglich ein Nutzen größer Null sein, damit die gesellschaftliche Wohlfahrt auch größer Null ist. Die Wahl des Funktionstyps der gesellschaftlichen Wohlfahrtsfunktion ist entscheidend für den Beitrag der individuellen Nutzenniveaus zur gesellschaftlichen Wohlfahrt, und damit auch als normative Grundlage für die politische Veränderung bestimmter Situationen. Daß dies ebenfalls auf die Festlegung der Gewichtung a_i individueller Nutzen in der Wohlfahrtsfunktion zutrifft, ist leicht einsehbar; auch eine Gleichgewichtung aller Individuen stellt eine normative Entscheidung dar. Zusammenfassend kann gesagt werden, daß eine Wohlfahrtsfunktion immer das Ergebnis normativer Festlegungen ist und das Maximum sich mit ihnen verändert.

69. Wohlfahrts-Kriterien. Die aufgezeigten Probleme bei der Formulierung gesellschaftlicher Wohlfahrtsfunktionen sind Anlaß, über Alternativen nachzudenken, die kurz genannt werden sollen:

1. Bruttosozialprodukt-Kriterium. Wenn man als Wohlfahrtsindikator das Sozialprodukt Y verwendet, gemäß: $W^*(Y_1) > W(Y_2)$ mit $Y_1 > Y_2$, so werden alle Probleme, die bei der Bildung dieser Größe bestehen, übernommen (Erfassung nur von Marktaktivitäten, unterschiedliche Bewertungskriterien etc.). Ferner sagt die Höhe des Sozialprodukts weder über dessen Zusammensetzung (Konsum vs. Investitionen) noch über die Verteilung auf die Haushalte etwas aus.

2. Bentham-Kriterium. Das nach dem englischen Ökonomen Jeremy Bentham benannte Kriterium fordert das größte Glück (die größte Gütermenge) für die größte Anzahl von Individuen. Diese Forderung impliziert, daß die gesellschaftliche Wohlfahrt gleich der Summe der individuellen Nutzen ist. Für drei Individuen ergibt sich $W = U_A + U_B + U_C$, wobei $\Delta W > 0$ ist, wenn $(\Delta U_A + \Delta U_B + \Delta U_C) > 0$ ist. Diese Bedingung ist aber auch erfüllt, wenn der Nutzen von zwei Individuen zunimmt und der eines Individuums sinkt, die Zunahmen aber größer sind als die Abnahme: $(\Delta U_A + \Delta U_B) > |\Delta U_C|$. Damit werden implizit Aussagen über die gesellschaftliche Wertschätzung der Individuen getroffen. Der Nutzen jedes Individuums ist gleichwertig, ohne Berücksichtigung der persönlichen Bedürftigkeit oder Leistungsfähigkeit. Im Fall zweier Individuen verlaufen die gesellschaftlichen Indifferenzkurven also mit der konstanten Steigung -1 (vgl. Abbildung 51). Ferner kann das Kriterium nicht zum Vergleich zweier Situationen verwendet werden, da beide Forderungen, die größte Gütermenge bei der größten Anzahl von Individuen, nicht simultan verwirklicht sein müssen. Ein Beispiel möge dies verdeutlichen: $W^* = 300$ aus $U_A = 220,\ U_B = 50,\ U_C = 30$, ist größer als $W = 240$ aus $U_A = 80,\ U_B = 80,\ U_C = 80$, jedoch weist W eine gleichmäßigere Verteilung der Güter auf als der Fall der maximalen Güterausstattung W^*.

3. Kardinalisten-Kriterium. Mit diesem Kriterium wird vorgeschlagen, die Einkommen (oder Güter) so zu verteilen, daß die Grenznutzen aller Individuen gleich sind $U'_A = U'_B = U'_C$. Es leuchtet unmittelbar ein, daß bei

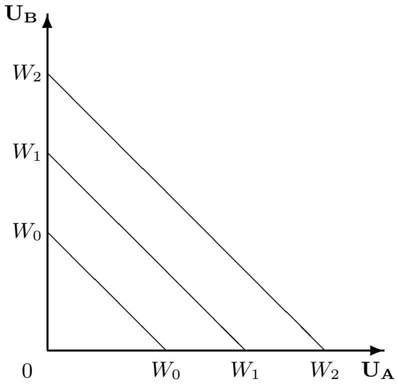


Abb. 51: Das Bentham-/ Kardinalisten-Kriterium

unterschiedlichen Nutzenfunktionen der Individuen (hinsichtlich Parametern und Funktionstyp) dieses auch zu einer ungleichen Verteilung führt. Sind hingegen die individuellen Nutzenfunktionen identisch, so folgt aus dem Kriterium eine Gleichverteilung der Einkommen. Abgesehen von der sehr strengen Annahme, daß alle Menschen über gleichartige Präferenzen hinsichtlich des Einkommens verfügen, könnten sich aus der Gleichverteilung negative Auswirkungen auf Allokation und Effizienz einer Ökonomie ergeben, wenn die Entstehung des Einkommens nicht berücksichtigt wird. Da auch bei diesem Kriterium nicht beachtet wird, welches der Individuen einen höheren oder niedrigeren Nutzen hat, und der Ausgleich der Grenznutzen impliziert, daß die Summe der individuellen Nutzen maximal ist, entsprechen die Kriterien einander. Ihre funktionale Form ist die Wohlfahrtsfunktion (358) mit $a_1 = a_2 = \cdots = a_M$. Die graphische Veranschaulichung des Bentham-Kriteriums in Abbildung 51 gilt somit auch für das Kardinalisten-Kriterium.

4. Maximin-Kriterium. Die Einwände, die gegen das Kardinalisten-Kriterium vorgetragen werden, gelten auch für das von dem amerikanischen Philosophen J. Rawls eingeführte Maximin-Kriterium $W = min(U_A, U_B, U_C)$. Es besagt, daß die Wohlfahrt einer Gesellschaft durch den Nutzen des am schlechtesten gestellten Individuums bestimmt wird. Damit entfallen aber die Anreize zur Produktion, die aus der Ungleichheit der Individuen resultieren. Wird das Kriterium durch gesellschaftliche Indifferenzkurven dargestellt, so entsprechen einem bestimmten Wohlfahrtsniveau im $U_A - U_B -$Diagramm vertikale und horizontale Linien, die von einem 45°-Fahrstrahl aus dem Ursprung starten. Steigt der Nutzen des besser gestellten Individuums, so ändert sich die Wohlfahrt nicht. Nur, wenn das schlechter gestellte Individuum einen höheren Nutzen erreicht, steigt auch die Wohlfahrt (vgl. Abbildung 52).

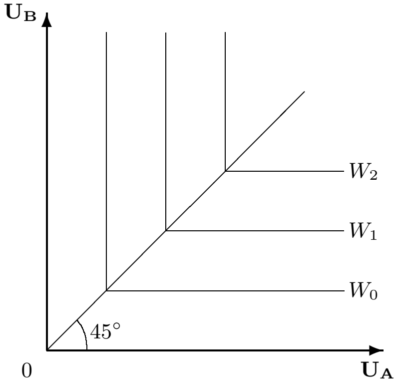


Abb. 52: Das Maximin-Kriterium

5. Pareto-Kriterium. Das Pareto-Optimum wurde bereits diskutiert; es ist erreicht, wenn kein Individuum bessergestellt werden kann, ohne ein anderes Individuum schlechterzustellen: W^{po} wenn $\Delta U_A > 0$ und $\Delta U_B < 0,\ \Delta U_C < 0$. Es gilt ferner für eine nicht Pareto-optimale Situation W: $\Delta U_A > 0$ und $\Delta U_B \geq 0,\ \ \Delta U_C \geq 0$. Wie noch zu zeigen sein wird, sagt das Pareto-Optimum noch nichts über das Wohlfahrtsmaximum aus $W^{po} \leq W^*$ und erlaubt keinen Vergleich verschiedener Pareto-optimaler Allokationen. Im Pareto-Optimum gilt aber immer: $GRS^A_{yx} = GRS^B_{yx} = GRT_{yx}$ und ferner auch $GRTS^x_{LK} = GRTS^y_{LK}$. Schließlich setzt das Pareto-Kriterium enge Grenzen für jede Form staatlicher Politik, da üblicherweise einige Personen oder Personengruppen durch eine politische Maßnahme begünstigt und andere benachteiligt werden.

6. Kaldor-Hicks-Kriterium. Dieses Kriterium, benannt nach den Ökonomen Nicholas Kaldor und John Hicks, stellt eine weniger strenge Formulierung des Pareto-Optimums dar. Im Vergleich zweier Situationen ist jene W^{KH} einer anderen W gegenüber vorzuziehen, wenn die Gewinner (z.B. $\Delta U_A > 0$) zur Herbeiführung von W^{KH} einen Betrag zu zahlen bereit wären, der höher ist als der Betrag, den die Verlierer (z.B. $\Delta U_B < 0,\ \ \Delta U_C < 0$) zur Ab-

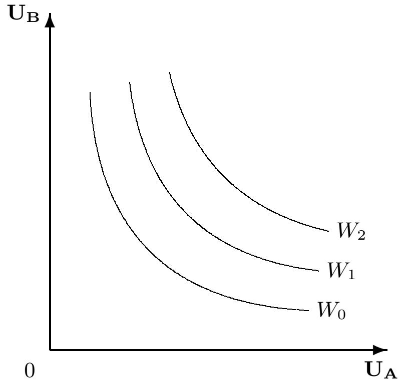


Abb. 53: Die Wohlfahrtsfunktion (359) im Fall $M = 2$

wendung von W^{KH} zu zahlen bereit wären. Nicht tatsächliche Entschädigungszahlungen sind vom Kaldor-Hicks-Kriterium gefordert, sondern nur die entsprechenden Zahlungsbereitschaften. Eine Voraussetzung sind allerdings gleiche Grenznutzen der Haushalte bezüglich des Einkommens. Ein Beispiel möge das verdeutlichen: A hat ein Einkommen von 800 Tsd. Geldeinheiten (GE) und B von 20 $Tsd.\ GE$; bei gleichen Nutzenfunktionen (mit den üblichen Eigenschaften $U' > 0$ und $U'' < 0$) ist der Grenznutzen einer Geldeinheit bei A geringer als bei B. A ist zur Herbeiführung der Situation W^{KH} bereit, 3 $Tsd.\ GE$ zu zahlen, B hingegen zur Abwendung 1 $Tsd.\ GE$. Nach dem Kaldor-Hicks-Kriterium, auch Kompensationsprinzip genannt, hat die Politik den Übergang von W auf W^{KH} zu vollziehen, da der in monetären Einheiten ausgedrückte Überschuß 2 $Tsd.\ GE$ beträgt. Der Nutzenzuwachs des A aus 2 $Tsd.\ GE$ ist aber aufgrund des geringen Grenznutzens sehr klein, der Nutzenentgang des B aus 1 $Tsd.\ GE$ fällt aufgrund seines hohen Grenznutzens hingegen groß aus. Daraus folgt, daß die gesellschaftliche Wohlfahrt gesunken ist $W^{KH} < W$, da der Nutzenzugang des A kleiner ausfällt als der Nutzenentgang des B. Das Kaldor-Hicks-Kriterium impliziert, daß der gleiche Geldbetrag für beide Individuen auch die gleichen absoluten Nutzenwirkungen hat.

Wie man aus der Darstellung der alternativen Kriterien erkennen kann, weisen alle spezifische Probleme auf. Wir kehren daher zur gesellschaftlichen Wohlfahrtsfunktion zurück und beziehen sie in die weiteren Überlegungen ein. Da weder die Vernachlässigung der Verteilung der Nutzen bei den Kardinalisten noch die ausschließliche Fokussierung auf den Nutzen des am schlechtesten gestellten Individuums bei Rawls überzeugen können, ist die Form der Wohlfahrtsfunktion zwischen diesen beiden Extremfällen zu wählen. Ein Beispiel für eine solche Funktion ist (359). Abbildung 53 zeigt den qualitativen Verlauf der gesellschaftlichen Indifferenzkurven in diesem Fall.

70. Wohlfahrtsmaximum. Es soll nun die Frage gelöst werden, wie eine Volkswirtschaft ihre maximale Wohlfahrt verwirklichen kann. Das Problem wird mit Hilfe der graphischen Darstellung verdeutlicht, wobei weiterhin die in Abschnitt 56 getroffenen Annahmen 1 bis 10 gelten. In Abbildung 50b wird das Tauschgleichgewicht auf der Grundlage gegebener Präferenzen sowie Produktionsfaktoren, Produktionstechnologie und einer daraus folgenden Transformationskurve abgeleitet. Die Gleichgewichtsbedingung lautet $GRS_{yx}^A = GRS_{yx}^B = GRT_{yx}$ und wird bei gegebenem Nutzenniveau eines Akteurs bestimmt. Es gibt aber unendlich viele Produktionspunkte auf der Transformationskurve, die diese Bedingung erfüllen, wenn man alternative Grenzraten der Substitution und alternative Güterverteilungen zuläßt. Zur Verdeutlichung dieses Sachverhaltes sei eine Graphik eingeführt, die äquivalent zu Abbildung 50b ist. In das y/x-Koordinatensystem der Abbildung 54 wird eine übliche konkave Transformationsfunktion eingezeichnet. Zu jedem beliebigen Produktionspunkt auf der Kurve kann eine Tausch-Edgeworth-Box mit den Indifferenzkurven der Haushalte A und B gezeichnet werden; in Abbildung 54 mögen zwei derartige Boxen genügen. Betrachten wir zunächst die Box AB, in der in den Tangentialpunkten der Indifferenzkurven h, e und k (selbstverständlich auch in anderen Punkten entlang der Kontraktkurve) die Bedingung $GRS_{yx}^A = GRS_{yx}^B$ erfüllt ist, jedoch lediglich in Punkt h auch die Bedingung $GRS_{yx}^A = GRS_{yx}^B = GRT_{yx}$. In der zweiten Box AB' erfüllen die Tangentialpunkte c, d und g die Bedingung $GRS_{yx}^A = GRS_{yx}^B$, jedoch lediglich Punkt c auch die Bedingung $GRS_{yx}^A = GRS_{yx}^B = GRT_{yx}$.

Offensichtlich ist in der ersten Box die Verteilung der Güter, gemessen an den Indifferenzkurven in den Punkten h und c, zugunsten von A und in der zweiten zugunsten von B angenommen. Diese Erkenntnisse können verallgemeinert werden: Zu jedem Produktionspunkt auf der Transformationskurve existiert eine Güterverteilung zwischen den Haushalten, die durch die Gleichheit von relativen Güterpreisen im Tausch (Wert des einen Gutes zu Wert des anderen Gutes) und Opportunitätskosten der Produktion

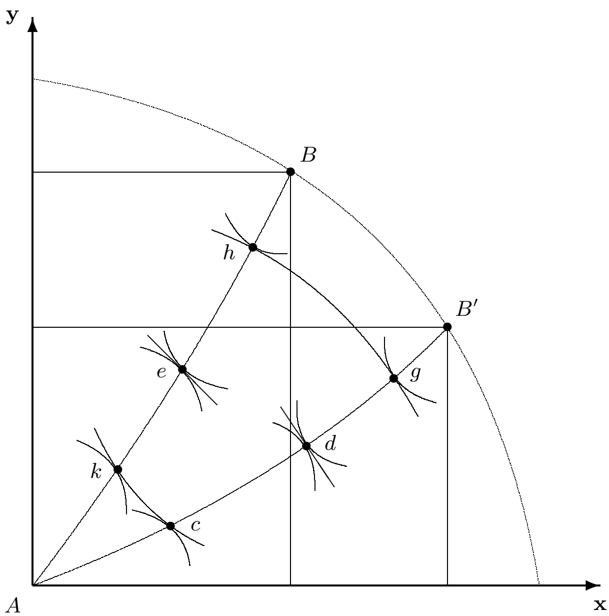


Abb. 54: Zwei Haushalte und unterschiedliche Verteilungen

(Verzicht auf Gut x bei Ausdehnung von Gut y) gekennzeichnet ist. Für einen Produktionspunkt ergeben sich entlang der Kontraktlinie alternative Güterverteilungen mit unterschiedlichen Nutzenniveaus, die in eine weitere Graphik eingezeichnet werden sollen. Auf den Achsen der Abbildung 55 sind die Nutzen der beiden Haushalte abgetragen. Die Nutzenmöglichkeitenkurve N entspricht der Kontraktlinie in der Abbildung 54 zwischen den Nullpunkten A und B, die Nutzenmöglichkeitenkurve N' der Kontraktlinie zwischen A und B'. Die effizienten Punkte c und h werden übernommen, ebenso wie einige der anderen pareto-optimalen Tangentialpunkte.

Die Güterverteilung, für die die Gleichheit von Grenzrate der Substitution und Grenzrate der Transformation gilt, läßt den höchsten Nutzen des einen Akteurs bei einem gegebenen Nutzenniveau des anderen Haushaltes entstehen: Für $U_A^{'}$ ist der Nutzen des Haushaltes B in Punkt c auf N' höher als in Punkt k auf N; ferner ist bei $U_B^{''}$ der Nutzen des Haushaltes A in Punkt h auf N höher als in Punkt g auf $N^{'}$. Zu jedem beliebigen Produktionspunkt auf der Transformationskurve in Abbildung 54 kann in Abbildung 55 eine Nutzenmöglichkeitenkurve eingetragen werden. Zeichnet man, wie in Abbildung 55 geschehen, eine Umhüllungskurve F zu den Nutzenmöglichkeitenkurven, so liegen auf dieser alle Punkte, für die gilt:

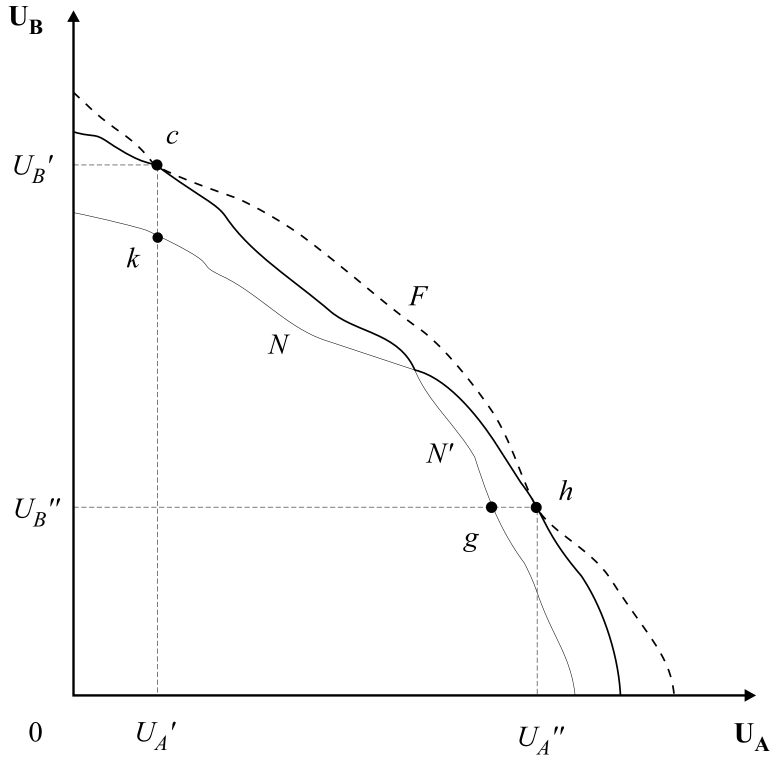


Abb. 55: Nutzenmöglichkeitskurve

$GRS^A_{yx} = GRS^B_{yx} = GRT_{yx}$ und ferner - was aus der Abbildung nicht hervorgeht, aber bei der Konstruktion der Transformationskurve gilt - auch $GRTS^x_{LK} = GRTS^y_{LK}$. Diese Umhüllungskurve, die auch als Wohlstandsgrenze bezeichnet wird, läßt allerdings die Fragen offen, (1) welche Verteilung der Nutzen auf die Haushalte A und B verwirklicht werden soll, (2) welche Güterkombination xy produziert und (3) welche Verteilung der Güter auf A und B erfolgen soll, schließlich auch, (4) in welche Produktionsrichtungen die Faktoren gelenkt werden sollen. Die Beantwortung dieser Fragen kann nur normativ durch eine gesellschaftliche Wohlfahrtsfunktion geschehen, deren gesellschaftliche Indifferenzkurven – die die gleichen Eigenschaften wie die individuellen Indifferenzkurven aufweisen sollen – in die nachfolgende Abbildung 56 eingezeichnet sind. Für die Indifferenzkurven gilt $\bar{W}_3 \succ \bar{W}_2 \succ \bar{W}_1$, wobei die gesellschaftliche Indifferenzkurve $\bar{W}_3$ die Wohlstandsgrenze in C tangiert, und damit eine Verteilung angibt, die die gesellschaftliche Wohlfahrt maximiert. Es kann leicht gezeigt werden, daß das Pareto-Optimum eine notwendige, aber keine hinreichende Bedingung für ein Wohlfahrtsmaximum ist; es existieren Kombinationen, die Pareto-optimal sind, gleichwohl aber kein Wohlfahrtsmaximum darstellen.

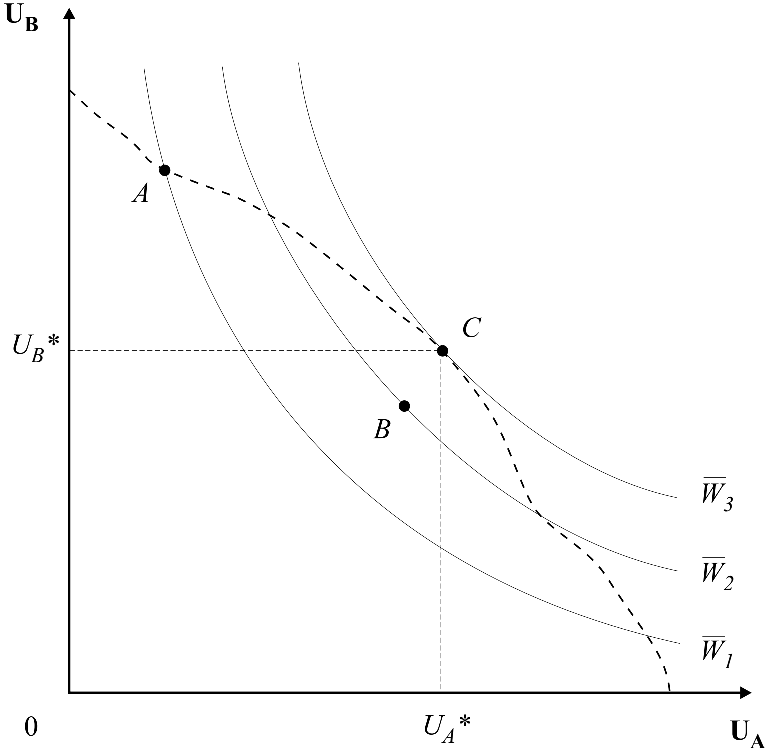


Abb. 56: Wohlfahrtsmaximum

Im Schnittpunkt A der gesellschaftlichen Indifferenzkurve $\bar{W}_1$ mit der Wohlstandsgrenze liegt eine Pareto-optimale Situation mit $GRS^A_{yx} = GRS^B_{yx} = GRT_{yx}$ und $GRTS^x_{LK} = GRTS^y_{LK}$ vor. Punkt B auf W_2 ist nicht Pareto-optimal (es gilt lediglich $GRS^A_{yx} = GRS^B_{yx} \neq GRT_{yx}$), jedoch von höherem gesellschaftlichem Nutzen als Punkt A, da angenommen wurde $\bar{W}_2 \succ \bar{W}_1$. Punkt C ist sowohl Pareto-optimal als auch wohlfahrtsmaximal. Wir könnten die Steigung der gesellschaftlichen Indifferenzkurve als „Grenzrate der interpersonellen Substitution", kurz: $GRIS_{AB}$, und die Steigung der Wohlstandsgrenze als „Grenzrate der Nutzentransformation", kurz: $GRNT_{AB}$, bezeichnen, für die im Maximum $GRIS_{AB} = GRNT_{AB}$ gelten muß. Damit ist die Verteilungsfrage im totalen mikroökonomischen Gleichgewicht – wenn auch durch die Einführung normativer Setzungen – gelöst.

Satz: *Das Wohlfahrtsoptimum bei gegebener Faktorausstattung ist gekennzeichnet durch die Gleichheit der Steigung der gesellschaftlichen Indifferenzkurve mit der Steigung der Wohlstandsgrenze. Für diesen Punkt gilt ferner die Gleichheit der Grenzraten der Substitution der Akteure, mit der Grenzrate der Transformation und dem Verhältnis der (Schatten-)Preise der Güter. Die Transformationsfunktion impliziert ein Produktionsoptimum, für das die Bedingung der Gleichheit der Grenzraten der technischen Substitution bei der Gütererzeugung gilt. Das Wohlfahrtsoptimum ist Pareto-optimal, da kein Akteur bessergestellt werden kann, ohne daß wenigstens ein Akteur schlechtergestellt wird.*

71. Zusammenfassung. Die Ergebnisse für das totale mikroökonomische Gleichgewicht, die in einer langen Beweisführung vorgestellt worden sind, werden nun zusammengefaßt. Zunächst soll darauf hingewiesen werden, daß die in dem vorstehenden Satz beschriebenen Gleichgewichte simultan erreicht werden müssen. Besteht in Produktion oder Konsum ein Ungleichgewicht, so werden Anpassungen alle Märkte verändern, bis das simultane Gleichgewicht erreicht ist. Die Beschreibung der Gleichgewichte erfolgt gleichwohl schrittweise: Aus der Maximierung der Wohlfahrtsfunktion unter der Restriktion der Wohlstandsgrenze folgt die optimale Verteilung U_A^*, U_B^*. Diese Verteilung ist unter Berücksichtigung der Bedingung $GRS_{yx}^A = GRS_{yx}^B = GRT_{yx} = p_y/p_x$ nur vereinbar mit genau einem Produktionspunkt x^*, y^*. Ferner ergibt sich aus der Bedingung auch die Aufteilung der Güter auf die Haushalte $x_A^*, x_B^*, y_A^*, y_B^*$. Aus dem Produktionspunkt wird bei gegebenen Produktionsfunktionen und Faktorbeständen die Allokation der Faktoren $K_A^*, K_B^*, L_A^*, L_B^*$ nach der Bedingung $GRTS_{LK}^x = GRTS_{LK}^y = r/l$ bestimmt. Die Grenzrate der Transformation ist gleich den relativen Güterpreisen, die Grenzrate der technischen Substitution gleich den relativen Faktorpreisen.

Weiterhin muß berücksichtigt werden, daß eine Vielzahl einschränkender Annahmen getroffen worden ist. Bei abnehmenden Skalenerträgen übersteigt der Outputwert den Wert der Ausgaben für Produktionsfaktoren; es entstehen Gewinne, die einem weiteren Produktionsfaktor „Unternehmer“ zugerechnet werden müssen. Auf allen Märkten gilt vollständige Markträumung, es existieren keine Überschüsse und keine Lagerhaltung. Die Abwesenheit von externen Effekten in der Produktion stellt sicher, daß die privaten und sozialen Grenzkosten übereinstimmen und gleich dem Güterpreis sind. Auch gibt es keine Kuppelproduktion, die eine eindeutige Zuordnung der produktiven Leistungen der Faktoren unmöglich macht. Schließlich ist die Annahme vollkommener Märkte eine starke Vereinfachung gegenüber der Realität, die monopolistische und oligopolistische Märkte aufweist. Gleichwohl stellt das Modell des totalen mikroökonomischen Gleichgewichts ein Paradigma dar, das in vielen anderen Bereichen der ökonomischen Theorie (Außenwirtschaftstheorie, Wachstumstheorie, Regionalökonomik etc.) eine wichtige erklärende Rolle spielt.

Literaturhinweise zu Kapitel 4:

— Binger, B. R./Hoffman, E., *Microeconomics with Calculus*, Glenview/ London 1988.

— Böventer, E. von,/Illing, R.-G:, *Einführung in die Mikroökonomie*, 9. Aufl., München/Wien 1997.

— Koutsoyiannis, A., *Modern Microeconomics*, 2. Aufl., London usw. 1979.

— Layard, P. R. G./Walters, A. A., *Microeconomic Theory*, New York usw. 1987.

— Ott, A. E., *Grundzüge der Preistheorie*, 3. Aufl., Göttingen 1991.

5 Theorie der Märkte: Imperfekte Märkte

72. Definition. Unter dem Begriff der imperfekten Märkte werden all jene Marktformen zusammengefaßt – auch das Monopol –, die nicht die Merkmale der vollkommenen Konkurrenz aufweisen. Ist die Anzahl der Anbieter nicht sehr groß und/oder sind die gehandelten Güter nicht homogen, so liegt ein unvollkommener oder imperfekter Markt vor. In Kapitel 5 wird ein Ausschnitt der nicht vollkommenen Märkte behandelt, das (Angebots-)Monopol, das homogene und das heterogene (Angebots-)Oligopol und die monopolistische Konkurrenz oder das heterogene Polypol. Es wurde schon darauf hingewiesen, daß das Monopol einige theoretische Vorzüge besitzt: Preispolitische Aktionen können ohne den störenden Einfluß von Konkurrenten untersucht werden, da annahmegemäß keine Mitwettbewerber am Markt vorhanden sind. Zu diesen preispolitischen Aktionen gehört auch die Preisdiskriminierung, die allerdings nicht auf die Marktform des Monopols beschränkt ist, sondern auch im Oligopol ihre Anwendung finden kann.

5.1 Das Monopol

73. Grundmodell. Im Monopolmarkt sind definitionsgemäß Marktnachfrage und Firmennachfrage (die auf ein Unternehmen entfallende Nachfrage) identisch. Wenn die Marktnachfrage die übliche normale Form aufweist, also negativ vom Preis abhängt, dann gilt diese Eigenschaft auch für die Nachfrage, die auf den Monopolisten entfällt, also $q = f(p)$ mit $f' < 0$ oder $p = f^{-1}(q)$ mit $f^{-1\prime} < 0$. Für die inverse Nachfrage kann man auch $p = p(q)$ schreiben. Der Erlös des Monopolisten sei $E(q) = qp(q)$ und die Kosten mögen $C(q)$ lauten. Unterstellt man wiederum, daß keine Fertigwarenlager gebildet werden, die produzierte Menge somit der verkauften Menge entspricht, so kann die Gewinnfunktion des Monopolisten wie folgt formuliert werden:

$$\Pi = E(q) - C(q) - C_f \tag{360}$$

mit den Bedingungen für ein Gewinnmaximum in Abhängigkeit von der Produktionsmenge (Outputregel)

$$\frac{d\Pi}{dq} = \frac{dE(q)}{dq} - \frac{dC(q)}{dq} = 0 \quad \text{oder:} \quad \frac{dE(q)}{dq} = \frac{dC(q)}{dq} \tag{361}$$

und

$$\frac{d^2\Pi}{dq^2} = \frac{d^2E(q)}{dq^2} - \frac{d^2C(q)}{dq^2} < 0 \quad \text{oder:} \quad \frac{d^2E(q)}{dq^2} < \frac{d^2C(q)}{dq^2}. \tag{362}$$

Das durch die Bedingung „Grenzerlös-gleich-Grenzkosten“ bezeichnete Gewinnmaximum kann in zwei alternativen Graphiken verdeutlicht werden: in der Gesamtdarstellung und in der Grenzdarstellung. In Abbildung 57 sind Preise und Mengen an den Achsen abgetragen. Neben der als linear angenommenen Nachfragefunktion sind die ebenfalls lineare Kostenfunktion mit einem Fixkostenanteil C_f und die Erlösfunktion eingezeichnet. Die Erlösfunktion ist bei einer linearen Nachfragefunktion eine quadratische Funktion hinsichtlich q und beschreibt eine Parabel. Das Gewinnmaximum kann nun ermittelt werden, indem auf die Kosten gedanklich ein Gewinnaufschlag vorgenommen wird, der so hoch ist, daß die Kosten und der Gewinn gerade noch von den Erlösen gedeckt werden. Die Menge, für die Erlös gleich Kosten zuzüglich maximalem Gewinn ist, nennen wir gewinnmaximale Menge q^*, für die auf der Nachfragefunktion auch der gewinnmaximale Preis p^*

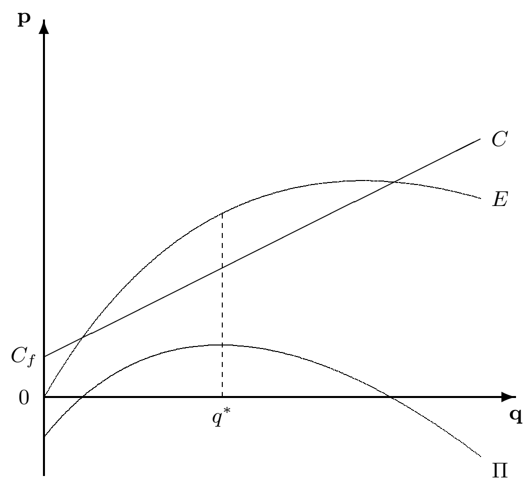


Abb. 57: Gewinn im Monopol (Streckendarstellung)

gefunden werden kann. Graphisch wird der Gewinn durch eine Kurve Π dargestellt, die die Differenz zwischen Erlös und Kosten abbildet.

Man kann sich aus Abbildung 57 leicht verdeutlichen, daß eine Erhöhung der Fixkosten zwar den Gewinn schmälert, aber die Menge q^* und den Preis p^* unverändert läßt. Eine Erhöhung der variablen Kosten – graphisch gleichbedeutend mit einer größeren Steigung der Kostenfunktion – läßt einen höheren gewinnmaximalen Preis und eine geringere gewinnmaximale Menge entstehen. Eine Steuer auf den Gewinn mit einem konstanten Steuersatz flacht zwar die Gewinnfunktion Π ab, die Lage des Maximums bezüglich q^* bleibt aber unverändert, und damit auch p^*. In Abbildung 58 sind wiederum Preis und Menge an den Achsen abgetragen, ebenso wie die als linear angenommene Nachfragefunktion. Nun sind die Grenzkosten dC/dq als horizontale Linie eingezeichnet, da für lineare Gesamtkosten die Grenzkosten konstant sind. Die Grenzerlöse dE/dq haben bei linearen Nachfragefunktionen die halbe Steigung – bezogen auf q – der Durchschnittserlöse (Nachfragefunktion) und halbieren mit ihrem Achsenabschnitt die Sättigungsmenge $\bar{q} = f(0)$. Der Schnittpunkt von Grenzerlös und Grenzkosten A und gibt senkrecht die gewinnmaximale Menge q^* an. Der senkrecht über dem Schnittpunkt auf der Nachfragefunktion liegende Punkt C wird nach dem französischen Ökonomen Augustin Cournot als Cournot-Punkt bezeichnet und verdeut-

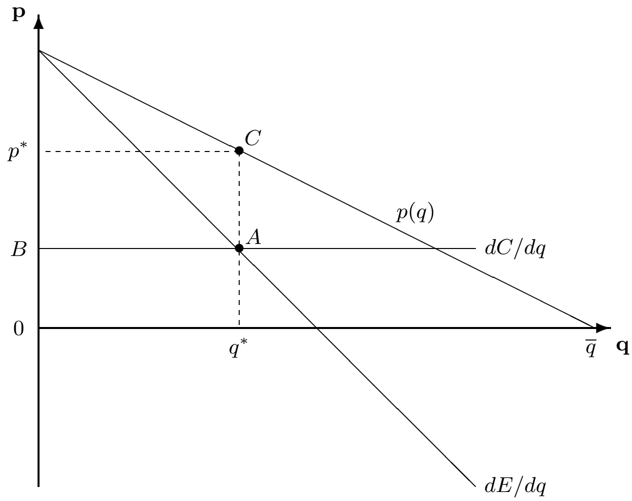


Abb. 58: Gewinn im Monopol (Flächendarstellung)

licht (in der Waagerechten) den gewinnmaximalen Preis p^*. Die rechteckige Fläche p^*, C, A, B repräsentiert den Gewinn des Monopolisten zuzüglich der Fixkosten. Selbstverständlich sind gewinnmaximale Menge und Preis in beiden Abbildungen identisch, da sie denselben Sachverhalt nur unterschiedlich präsentieren.

Der Monopolist kann die Menge oder den Preis *alternativ* als Aktionsparameter einsetzen und die jeweils andere Variable als Erwartungsparameter betrachten. Selbstverständlich unterliegt auch der Monopolist der für ihn exogen gegebenen Marktnachfrage, die er ohne zusätzliche Aktionsparameter (z.B. Werbung) nicht verändern kann. Beide alternativ eingesetzten Aktionsparameter führen zum gleichen Gewinnmaximum, wie mit Hilfe der schon in Abschnitt 40 diskutierten *Amoroso-Robinson-Relation* (Output-Regel) gezeigt werden kann. Geht man von der Nachfragefunktion $q = q(p)$ und von dem Aktionsparameter Preis aus, so lautet die Gewinnfunktion des Monopolisten

$$\Pi = p \cdot q(p) - C(q(p)) - C_f. \tag{231}$$

Die Bedingungen 1. und 2. Ordnung sind

$$d\Pi/dp = q(p) + p(dq/dp) - (dC/dq)(dq/dp) = 0 \tag{232}$$

sowie

$$\begin{aligned} d^2\Pi/dp^2 &= 2(dq/dp) + p(d^2q/dp^2) - (d^2C/dq^2)(dq/dp)^2 \\ &- (dC/dq)(d^2q/dp^2) < 0. \end{aligned} \tag{233}$$

Verwendet man die inverse Nachfragefunktion $p = f^{-1}(q)$ mit $f^{-1\prime} < 0$ oder $p = p(q)$ und betrachtet die Produktionsmenge als Aktionsparameter, so lautet die Gewinnfunktion

$$\Pi = q \cdot p(q) - C(q) - C_f. \tag{363}$$

Die Bedingungen 1. und 2. Ordnung sind

$$d\Pi/dq = p(q) + q(dp/dq) - (dC/dq) = 0 \tag{364}$$

sowie

$$d^2\Pi/dq^2 = 2(dp/dq) + (d^2p/dq^2)q - (d^2C/dq^2) < 0. \tag{365}$$

Aus beiden Bedingungen erster Ordnung (232) und (364) folgt

$$p + q(p)/(dq/dp) = dC/dq$$

oder nach einigen Umformungen

$$p\left(1+\frac{1}{\eta_{qp}}\right)=\frac{dC}{dq}. \tag{234}$$

Diese Bedingung bezeichnet man als *Amoroso-Robinson-Relation*, wobei aus $\eta_{qp} = -1$ nun $dC/dq = 0$, aus $\eta_{qp} < -1$ ferner $dC/dq > 0$ und aus $\eta_{qp} > -1$ schließlich $dC/dq < 0$ folgen. Da negative Grenzkosten ökonomisch sinnlos und Grenzkosten von Null (lediglich Fixkosten) empirisch bedeutungslos sind, kommt für das Gewinnmaximum des Monopolisten als relevanter Bereich der Nachfragefunktion $\eta \in (-1 \quad -\infty)$ in Frage.

74. Beispiel mit linearen Funktionen. In einem Beispiel mit linearer Nachfragefunktion und Kostenfunktion sollen nun die Marktergebnisse des Monopolmarktes, Monopolpreis und -menge sowie Gewinn und Konsumentenrente, ermittelt werden: Gegeben sei die inverse Nachfragefunktion:

$$p(q) = a/b - q/b, \quad \text{mit} \quad a,\ b > 0 \tag{366}$$

aus $q = a - bp$ und die lineare Kostenfunktion

$$C = kq + C_f, \quad \text{mit} \quad k > 0 \ \ C_f > 0. \tag{367}$$

Beide Funktionen werden in Kapitel 5.2 ebenfalls zur Diskussion des Oligopolmarktes herangezogen, so daß die Ergebnisse beider Marktformen direkt verglichen werden können. Die Gewinnfunktion des Monopolisten ist unter Verwendung von (366) und (367)

$$\Pi(q) = (a/b)q - q^2/b - kq - C_f. \tag{368}$$

Die Bedingungen 1. und 2. Ordnung lauten

$$d\Pi(q)/dq = a/b - 2q/b - k = 0 \tag{369}$$

und

$$d^2\Pi(q)/dq^2 = -2/b < 0, \tag{370}$$

wobei die Ungleichung (370) wegen $b > 0$ erfüllt ist. Aus (369) erhält man die gewinnmaximale Menge des Monopolisten

$$q^* = \frac{a}{2} - \frac{bk}{2}. \tag{371}$$

Setzt man (371) in die inverse Nachfragefunktion (366) ein, so ergibt sich der zugehörige gewinnmaximale Preis

$$p^* = \frac{a}{2b} + \frac{k}{2}. \tag{372}$$

Verwendet man q^* und p^* in der Gewinnfunktion, so kann das Maximum errechnet werden:

$$\Pi^* = q^* p^* - kq^* - C_f,$$

$$\Pi^* = \left(\frac{a}{2} - \frac{bk}{2}\right)\left(\frac{a}{2b} + \frac{k}{2}\right) - k\left(\frac{a}{2} - \frac{bk}{2}\right) - C_f,$$

$$\Pi^* = \frac{(a-bk)^2}{4b} - C_f. \tag{373}$$

Bei linearen Nachfragefunktionen erstreckt sich die Fläche, die die Konsumentenrente repräsentiert, vom Prohibitivpreis a/b bis zum Gleichgewichtspreis p^* und hat die Form eines rechtwinkligen Dreiecks mit den Katheten q^* und $a/b - p^*$ (vgl. Abbildung 40). Die Konsumentenrente Γ kann bei der linearen Nachfragefunktion $p(q) = a/b - bq$ nach der Flächenformel für rechtwinklige Dreiecke wie folgt berechnet werden:

$$\Gamma^* = q^*(a/b - p^*)/2,$$

$$\Gamma^* = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{2} - \frac{bk}{2}\right)\left(\frac{a}{2b} - \frac{k}{2}\right),$$

$$\Gamma^* = \frac{(a-bk)^2}{8b}. \tag{374}$$

Die Summe aus Konsumentenrente und Produzentenrente (Gewinn und Fixkosten) bezeichnen wir bekanntlich als Wohlfahrtswirkungen

$$\Omega^* = \Gamma^* + \Pi^* + C_f = \frac{3}{8}\frac{(a-bk)^2}{b}, \tag{375}$$

die sich im Monopolmarkt bei Gewinnmaximierung des Monopolisten ergeben. Die Resultate (373) bis (375) gewinnen ihre Bedeutung im Vergleich mit anderen Marktformen, beispielsweise mit dem Oligopolmarkt. Aus den Unterschieden können Aussagen über die wohlfahrtstheoretische Beurteilung der unterschiedlichen Marktformen und über die Verteilung der Renten auf Produzenten und Konsumenten getroffen werden.

75. Preisdiskriminierung. Die Konsumentenrente resultiert aus einer Zahlungsbereitschaft der Konsumenten, die höher ist als der monopolistische Gleichgewichtspreis. Würde es gelingen, den Markt in zwei oder mehrere Teilmärkte aufzuspalten, wobei die Teilmärkte durch die unterschiedlich hohen Zahlungsbereitschaften der dort zusammengefaßten Konsumenten gekennzeichnet wären, dann könnte der monopolistische Anbieter einen Teil der Konsumentenrente in Produzentenrente umwandeln, wenn er in den Teilmärkten unterschiedliche Preise verlangen würde. Die Setzung unterschiedlicher Preise in Teilmärkten bezeichnet man als Preisdifferenzierung oder Preisdiskriminierung (wobei der Begriff „Diskriminierung" wertneutral gebraucht wird). Die Preisdiskriminierung im Monopol – gleiches gilt auch für den Oligopolmarkt – ist an zwei Voraussetzungen gebunden: (1) Zum einen müssen Ansatzpunkte für die Aufspaltung des Gesamtmarktes gefunden werden und (2) zum anderen muß durch ökonomische oder institutionelle Vorkehrungen sichergestellt werden, daß Arbitragegeschäfte zwischen den Teilmärkten nicht stattfinden. Beide Voraussetzungen sollen diskutiert werden.

Eine Aufspaltung eines Marktes mit homogenen Gütern ist prinzipiell nicht möglich, da in diesem Markt durch Arbitragegeschäfte alle unterschiedlichen Preise auf letztlich einen Preis reduziert würden. Es ist also notwendig, daß wenigstens ein Grund für Heterogenität der Güter vorliegt. Werden physisch unterschiedliche Güter auf den Teilmärkten gehandelt, so liegt eine sachliche Preisdiskriminierung vor. Die in Leinen gebundene Klassikerausgabe wendet sich an den bibliophilen Käufer, während die Taschenbuchausgabe des gleichen Klassikers von Schülern und Studenten nachgefragt wird. Bestehen zwischen den am Markt handelnden Personen persönliche Präferenzen, so spricht man von persönlicher Preisdiskriminierung. Ein Händler verkauft beispielsweise seinen Mitarbeitern die Güter seines Sortiments mit einem Preisabschlag. Wird ein sachlich identisches Gut an verschiedenen Orten im Raum zu unterschiedlichen Preisen verkauft, deren Differenzen größer sind als die tatsächlichen Transportkostenunterschiede, so spricht man von räumlicher Preisdiskriminierung. Das völlig gleichartige Heizöl wird in verschiedenen Städten zu unterschiedlichen Preisen verkauft, wobei sich die Preise wiederum an der Zahlungsbereitschaft der Käufer orientieren. Eine zeitliche Preisdiskriminierung findet statt, wenn zu verschiedenen Zeiten für im übrigen gleichartige Güter unterschiedliche Preise gelten. Als Beispiel möge die Preisgestaltung der Reiseveranstalter im Ablauf eines Jahres dienen. Bei unvollständiger Markttransparenz ist es schließlich immer möglich, einen Gesamtmarkt in Teilmärkte aufzuspalten. Da sich Informationen – hier über die differierende Preissetzung des Monopolisten – im Zeitablauf ausbreiten, kann eine temporäre Preisdiskriminierung vorliegen. Die zweite

Voraussetzung ist die hinreichende Trennung der Teilmärkte. Ist diese nicht erfüllt, so wenden sich die Nachfrager aus dem Markt mit hohen Preisen dem Niedrigpreismarkt zu und entfalten dort ihre Nachfrage. Eine Vielzahl ökonomischer und institutioneller Vorkehrungen kann die Trennung herbeiführen. Um bei den genannten Beispielen zu bleiben: Das nachträgliche Binden von Taschenbuchausgaben und die Buchpreise müßten teurer sein als die Leinenausgaben. Die Marktspaltung, die durch Betriebszugehörigkeit und Kalender hervorgerufen wird, kann nicht aufgehoben werden. Für die räumliche Preisdiskriminierung ist es notwendig, daß die privaten Transportkosten höher als die des Monopolisten sind. Schließlich kann mit gezielter Desinformation die Markttransparenz verhindert werden.

Die Bedingung für eine erfolgreiche Preisdiskriminierung, die unterschiedliche Zahlungsbereitschaft in den Teilmärkten, kann leicht analytisch verdeutlicht werden. Es soll angenommen werden, daß die Produktionskosten für alle Güter, unabhängig auf welchem Teilmarkt sie angeboten werden, identisch sein mögen. Ferner werden m Teilmärkte unterstellt, wobei insgesamt $i = 1$ bis m Gütermengen q_i verkauft werden $q = \sum_{i=1}^{m} q_i$. Die Preise in den Teilmärkten hängen von den Verkaufsmengen ab: $p_i = p_i(q_i) \ \forall \ i$. Die Gewinnfunktion des Monopolisten lautet somit

$$\Pi(q_i) = \sum_{i=1}^{m} p_i(q_i) q_i - C(q) \tag{376}$$

und ist hinsichtlich der Gütermengen q_i zu maximieren. Die Bedingungen erster und zweiter Ordnung sind:

$$d\Pi/dq_i = p_i(q_i) + q_i(dp_i/dq_i) - (dC/dq)(dq/dq_i) = 0 \quad \forall \ i$$

oder unter Verwendung der Amoroso-Robinson-Relation sowie unter Berücksichtigung von $dq/dq_i = 1 \ \forall \ i$:

$$p_i \left(1 + \frac{1}{\eta_{qpi}}\right) = \frac{dC}{dq} \tag{377}$$

und

$$d^2\Pi/dq_i^2 = 2(dp_i/dq_i) + (d^2 p_i/dq_i^2) q_i - (d^2C/dq^2)(d^2q/dq_i^2) < 0 \quad \forall \ i,$$

oder, da $(d^2q/dq_i^2) = 0$ ist,

$$2(dp_i/dq_i) + (d^2 p_i/dq_i^2) q_i < 0. \tag{378}$$

Der erste Term in (378) ist bei normalen Nachfragefunktionen immer negativ und darf von dem zweiten Term - der bei konkaven Nachfragefunktionen auch positiv sein kann - nicht überkompensiert werden. Aus den Bedingungen erster Ordnung erkennt man leicht, daß die rechten Seiten der Gleichungen (dC/dq) für alle Teilmärkte i identisch sind. Daraus folgt die Bedingung für eine Preisdiskriminierung auf m Teilmärkten:

$$p_1 \left(1 + \frac{1}{\eta_{qp1}}\right) = p_2 \left(1 + \frac{1}{\eta_{qp2}}\right) = \;\; .... \; = p_m \left(1 + \frac{1}{\eta_{qpm}}\right). \qquad (379)$$

Sind die Preiselastizitäten der Nachfrage in den Märkten unterschiedlich $\eta_{qp1} \neq \eta_{qp2} \neq \;\; ... \;\; \neq \eta_{qpm}$, dann sind auch die gewinnmaximalen Preise des Monopolisten unterschiedlich $p_1 \neq p_2 \neq \;\; ... \;\; \neq p_m$. Je kleiner die Preiselastizität der Nachfrage (je größer im Betrag), um so geringer ist auch der Preis.

Je mehr unterschiedliche Preise der Monopolist setzt, desto mehr kann er von der Konsumentenrente abschöpfen. Im Extremfall der perfekten Preisdiskriminierung entspricht der Preis, den jeder Konsument für das Gut zu entrichten hat, genau seiner Zahlungsbereitschaft. Damit wird die Konsumentenrente vollständig in Produzentenrente transformiert. Kann ein Anbieter die Preispolitik der perfekten Preisdiskriminierung durch konsumentenindividuelle Einzelpreise verwirklichen, so lohnt sich aus seiner Sicht ein Verkauf, wenn der am Markt realisierte Preis mindestens die Kosten des Gutes deckt. Da bei perfekter Preisdiskriminierung das Produzieren und Anbieten einer zusätzlichen Gütereinheit – im Gegensatz zum nichtdiskriminierenden Standard-Monopol – nicht den Erlös aus dem Verkauf der anderen Einheiten berühren, beachtet der preisdiskriminierende Monopolist nur den Preis und die Kosten einer Gütereinheit. Damit wird die Produktion so lange ausgedehnt, bis sich die Preis-Absatz-Funktion und die Grenzkostenkurve schneiden. Die dabei entstehende Gesamtabsatzmenge entspricht der Menge, die auch im homogenen Polypol produziert und verkauft wird. Dieser Sachverhalt ist in Abbildung 59 verdeutlicht, in der die Punkte A, B und C den Punkten in Abbildung 58 entsprechen. Der Schnittpunkt von Grenzkosten- und Preis-Absatz-Funktion wird durch Punkt M symbolisiert.

Die Wohlfahrtseffekte bestehen im Fall perfekter Preisdiskriminierung nur aus der Produzentenrente und sind genauso groß wie im Fall der vollkommenen Konkurrenz, in der sie sich allerdings aus Produzentenrente und Konsumentenrente zusammensetzen. Die soziale Wohlfahrt bei perfekter Preisdiskriminierung umfaßt in Abbildung 59 die Fläche DMB; dagegen

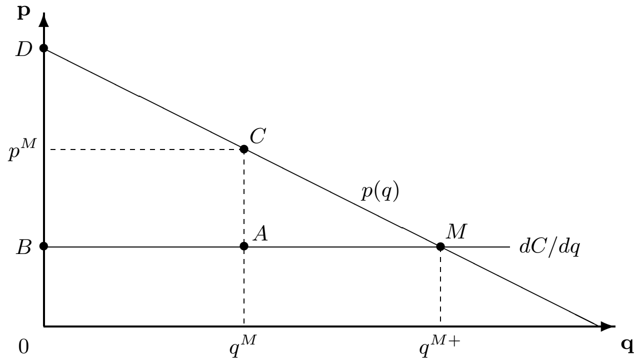


Abb. 59: Wohlfahrtswirkungen perfekter Preisdiskriminierung

entsteht im Fall des nichtpreisdiskriminierenden Monopols eine Konsumentenrente, die der Fläche DCp^M entspricht und eine Produzentenrente, die die Fläche $p^M CAB$ umfaßt. Der Monopolist profitiert also einerseits durch die Umwandlung von Konsumentenrente in Produzentenrente und andererseits durch die Aneignung der gesamten Rente, die durch die zusätzlich produzierten Einheiten $q^{M+} - q^M$ entsteht. Im Vergleich mit der Marktform der vollkommenen Konkurrenz, in der ebenfalls produziert wird, bis die Grenzkosten dem Preis entsprechen, dieser Preis jedoch im gesamten Markt einheitlich ist und keine konsumentenindividuellen Einzelpreise existieren, ist die gesamte Wohlfahrt unverändert. Der preisdiskriminierende Monopolist wandelt die in seinem Markt maximal mögliche Konsumentenrente DMB vollständig in Produzentenrente um.

76. Peak-Load-Pricing. In der Realität sind Preisdiskriminierung und andere Motive für unterschiedliche Preissetzungen nur schwer zu trennen. Der Händler, der die Güter seines Sortimentes an die Mitarbeiter mit einem Abschlag verkauft, kann aus Gründen der Verbesserung des Betriebsklimas so handeln oder aber, weil er die Preiselastizität der Nachfrage seiner Mitarbeiter niedriger einschätzt als die seiner restlichen Kunden. Ist der interne Verkaufspreis niedriger als die Preiselastizität der Mitarbeiter dies bewirken würde, so mögen andere Motive als die der vordergründigen Gewinnmaximierung eine Rolle spielen, wobei zum Beispiel die Verbesserung des Betriebsklimas indirekt auch zur Gewinnmaximierung eingesetzt werden kann. Ferner kann ein Fall des sogenannten „Peak-Load-Pricing“ vorliegen. Es gibt Unternehmen, die sich einer in der Zeit schwankenden

Nachfrage gegenübersehen und ihre Leistungen nicht lagern können, wie etwa Restaurants, Reiseveranstalter, Elektrizitätserzeuger u. a. In Zeiten voller Auslastung setzen sie ihren Preis nach der Amoroso-Robinson-Relation (234), wie es auch in Abbildung 60a dargestellt ist. Die Kapazitäten des Unternehmens, und damit auch die Kosten, sind auf die volle Auslastung ausgerichtet. In Zeiten schwacher Auslastung kann die Nachfrage so weit zurückgehen, daß die Kosten einer weiteren Mengeneinheit höher sind als der Vollastpreis. Dies bedeutet, daß kein Angebot stattfinden würde. Wenn aber, wie in Abbildung 60b dargestellt, nur ein Teil der Grenzkosten, etwa die Grenzkosten der Speisezubereitung $(dC/dq)_2$ (nicht die Grenzkosten der Sitzplätze $(dC/dq)_1 - (dC/dq)_2$, die bei Nichtauslastung ohnehin Null sind), berücksichtigt werden, kann sich bei Teilauslastung ein neuer und niedrigerer Preis

$$p_2\left(1+\frac{1}{\eta_{qp2}}\right)=\left(\frac{dC}{dq}\right)_2 \tag{380}$$

ergeben, der entweder einen Teil oder die gesamten Grenzkosten $(dC/dq)_1 + (dC/dq)_2$ deckt und darüber hinaus einen Beitrag zum Gewinn leisten kann.

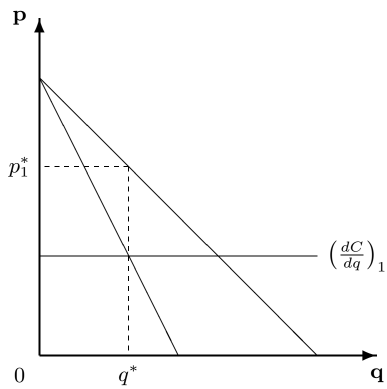


Abb. 60a: Volle Auslastung

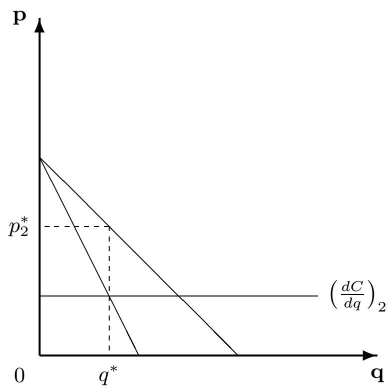


Abb. 60b: Teilauslastung

Die Preisdiskriminierung im Sinne des Peak-Load-Pricing hat ihre Ursache sowohl in unterschiedlichen Preiselastizitäten der Nachfrage als auch in unterschiedlichen Grenzkosten im Zeitablauf. Sieht man von diesen Fällen ab und betrachtet die Bedingung (379), so sollte deutlich werden, daß die Politik der Preisdiskriminierung lediglich eine Implikation der Gewinnmaximierungshypothese darstellt, wobei die Produzentenrente zu Lasten der

Konsumentenrente ausgedehnt wird. Wie gezeigt wurde, liegt eine totale Preisdiskriminierung vor, wenn die Konsumentenrente durch den Produzenten vollständig ausgeschöpft wird.

77. Vergleich Monopol/ Polypol. Die nachfolgenden Überlegungen zur Marktform des Monopols beziehen sich auf den Vergleich zwischen Polypol und Monopol bei homogenen Gütern. Zunächst wird die Gewinnmaximierungsbedingung des Monopolisten „Grenzerlös gleich Grenzkosten“ in ein Preis-Mengen-Diagramm bei einer gegebenen Nachfragefunktion eingezeichnet (vgl. Abbildung 61). Dabei werden zwei Grenzkostenfunktionen alternativ angenommen, wobei die eine einen positiven Anstieg hat $(dC/dq)_1$ und die andere waagerecht verläuft $(dC/dq)_2$. Beide mögen die Grenzerlöse im gleichen Punkt schneiden, aus dem sich – wie schon gezeigt wurde – der Monopolpreis p_M^* und die Monopolmenge q_M^* ergeben.

Für das einzelne Unternehmen im Polypolmarkt gilt die Gewinnmaximierungsbedingung „Preis gleich Grenzkosten“ und - betrachtet man den Gesamtmarkt - damit auch für alle Firmen. Da die Nachfrage, die auf ein einzelnes Unternehmen entfällt, sehr gering ist, können Mengenänderungen eines Unternehmens keinen Einfluß auf den Marktpreis haben; ändern jedoch alle Firmen ihre Outputmengen in die gleiche Richtung, so bleibt der Marktpreis davon nicht unberührt. Auch bei polypolistischen Märkten erhält man üblicherweise einen negativen Zusammenhang von Preis und Menge für die *Marktnachfragefunktion*. Die Nachfrage möge die gleiche sein wie im Monopol-Fall. Zeichnet man die Bedingung „Preis gleich Grenzkosten“ in Abbildung 61 ein, so erhält man für die Grenzkostenfunktion $(dC/dq)_1$ die Ergebnisse $p_P^{*\prime}$ und $q_P^{*\prime}$ und für die Grenzkostenfunktion $(dC/dq)_2$ die Ergebnisse $p_P^{*\prime\prime}$ und $q_P^{*\prime\prime}$. Vergleicht man den Monopol- und Polypolmarkt, so zeigt sich: Im Fall der positiv ansteigenden Grenzkostenfunktion erzeugt der Übergang vom Polypolmarkt zum Monopolmarkt einen sogenannten „toten“ Wohlfahrtsverlust in Höhe der Fläche ABC. Die Konsumenten verlieren Konsumentenrente in Höhe von $p_M^*, A, B, p_P^{*\prime}$, wobei der Teil $p_M^*, A, D, p_P^{*\prime}$ als Produzentenrente an den Monopolisten fällt. Die Produzenten verlieren die Produzentenrente D, B, C. Noch größer fällt der „tote“ Wohlfahrtsverlust A, E, C, im Fall der waagerechten Grenzkostenfunktion aus, wobei der gesamte Verlust zu Lasten der Konsumentenrente entsteht und die Umverteilung der Konsumentenrente $p_M^*, A, C, p_P^{*\prime\prime}$ zugunsten des Produzenten um $p_P^*, D, C, p_P^{*\prime\prime}$ und der „tote“ Wohlfahrtsverlust

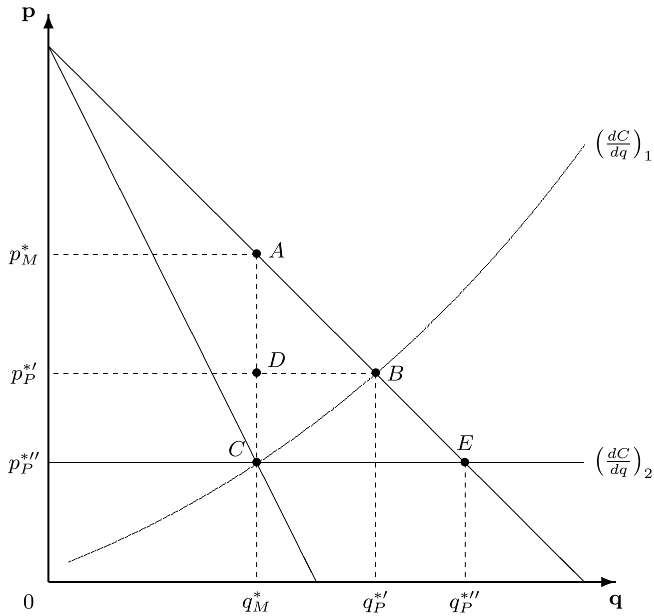


Abb. 61: Vergleich Monopol / Polypol

um B, C, E größer ist als im ersten Fall. Zusammenfassend kann gesagt werden, je flacher die Grenzkostenfunktion verläuft, um so größer sind der „tote“ Wohlfahrtsverlust und die Umverteilung zugunsten des Produzenten beim Übergang vom Polypolmarkt zum Monopolmarkt. Diese ungünstige Beurteilung des Monopols aus wohlfahrtstheoretischer Sicht wird durch die dynamische Betrachtung abgemildert bzw. relativiert. Auch der monopolistische Anbieter muß potentielle Konkurrenz in Betracht ziehen. Die hohen Marktlagengewinne sind – wenn sie bekannt werden – für andere bestehende oder zu gründende Unternehmen ein starker Anreiz, in den Markt einzutreten. Dies kann entweder durch hohe Eintrittsbarrieren oder aber durch den Verzicht auf einen Teil des Marktlagengewinns verhindert werden. Da die Eintrittsbarrieren in Form von institutionellen Gegebenheiten (z.B. Approbation für Ärzte und Apotheker usw.) oder technologischen Mindestgrößen der Produktion (z.B. Erdölverarbeitung, Fahrzeugbau usw.) nicht direkt von einer Firma beeinflußt werden können, bleibt die Option - die durchaus mit einer langfristigen Gewinnmaximierung vereinbar ist -, den maximal möglichen Gewinn nicht voll auszuschöpfen und zu einem niedrigeren Preis als dem durch den Cournot-Punkt bestimmten Monopolpreis anzubieten.

78. Regulierung des Monopols. Besonders hohe ökonomische Eintrittsbarrieren für Newcomer bestehen bei steigenden Skalenerträgen in der Produktion des Monopolisten. Economies of scale bedeuten, daß jede weitere Mengeneinheit, die produziert wird, zu einem niedrigeren Preis erzeugt werden kann als vorangegangene. Die totale Durchschnittskostenkurve und die Grenzkostenkurve fallen im relevanten Bereich monoton, wobei die Grenzkosten dauerhaft unterhalb der Durchschnittskosten verlaufen. Jedes in den Markt eintretende Unternehmen müßte zunächst geringe Mengen zu hohen Grenzkosten produzieren und wäre damit nicht wettbewerbsfähig. Ein solches Monopol bezeichnet man als natürliches Monopol; es liegt z.B. im Netzbereich der Stromversorgung, des Schienentransports und der Gas- und Wasserversorgung vor. Wenn die Kostenvorteile des Monopols nicht durch innere Ineffizienzen aufgehoben werden, stellt sich die Frage nach der Regulierung durch den Staat, um eine preisgünstige und mengenmäßig ausreichende Versorgung sicherzustellen. Als Regulierungsmaßnahme könnte man dem Monopolist die Pflicht auferlegen, seine Preise wie bei vollständiger Konkurrenz zu setzen. Eine derartige „Grenzkosten gleich Preis“-Regel läßt aber Regulierungsverluste entstehen, wie aus der Abbildung 62 leicht ersehen werden kann.

Im Preis-Mengen-Diagramm sind zunächst der Cournot-Punkt und das daraus folgende Monopolgleichgewicht mit Monopolgewinn, Preis und Menge eingezeichnet. Der Schnittpunkt der langfristigen Grenzkostenfunktion mit der Nachfragefunktion ergibt den Preis p_R und die Regulierungsmenge q_R, bei der ein Verlust in Höhe von $(LC_D - LC') \cdot q_R$ entsteht, da die langfristigen Durchschnittskosten beim natürlichen Monopol immer höher sind als die langfristigen Grenzkosten. Diese Verluste müssen von der Regulierungsbehörde ersetzt werden, wenn man an einem Verbleib der Firma am Markt interessiert ist und eine dauerhafte Versorgung der Bevölkerung mit den Gütern sicherstellen will. Eine andere Regulierungsauflage besteht in einer vorgegebenen Kapitalrendite, die nicht überschritten werden darf. Es leuchtet unmittelbar ein, daß eine derartige Maßnahme zu einer Fehlallokation der Ressourcen führen muá, da nicht mehr die Minimalkostenkombination bei gegebenen Faktorpreisen verwirklicht wird, sondern der Monopolist den Kapitaleinsatz über diesen Punkt hinaus ausdehnt, um für das Kriterium Kapitalrendite (Π/K) einen möglichst großen Nenner zu schaffen und so höhere Gewinne erzielen zu können.

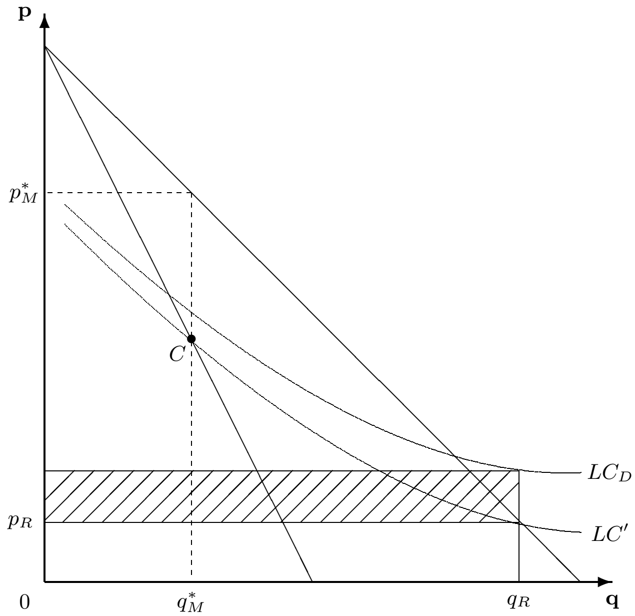


Abb. 62: Regulierung des Monopols

5.2 Das Oligopol

79. Definitionen. Der Oligopolmarkt ist nicht nur die empirisch bedeutendste, sondern auch die theoretisch anspruchsvollste und intellektuell anregendste Marktform. Im Angebotsoligopol steht vielen Nachfragern nur eine geringe Anzahl von Anbietern gegenüber, wobei die Zahl so gering ist, daß die Marktaktivitäten einer Firma die Gewinne der anderen Firmen beeinflussen, die sich ihrerseits zu Gegenaktivitäten veranlaßt sehen. Daher muß jeder Anbieter bei seinen Marktaktivitäten die erwarteten Reaktionen seiner Konkurrenten berücksichtigen. Zweifellos könnte der Anbieter seine Überlegungen noch weiter führen und sich – wie beim Schachspiel – fragen, welche Reaktion er auf die erwarteten Gegenreaktionen seiner Konkurrenten ergreifen könnte und welche Gegenreaktionen darauf vermutlich erfolgen. Diese Berücksichtigung der wechselseitigen Reaktionen kann unendlich fortgesetzt werden, aus praktischen Erwägungen mögen aber nur die unmittelbaren Gegenreaktionen auf Marktaktivitäten berücksichtigt werden. Derartige erwartete oder vermutete Gegenreaktionen bezeichnet man in der

Preistheorie als *konjekturale* Reaktionen oder Variationen. In der Literatur existiert eine Vielzahl von Oligopolmodellen, die sich aber auf die nachfolgenden Merkmale reduzieren läßt: (1) Bei homogenen Gütern sprechen wir von einem Mengenoligopol, da lediglich die Verkaufsmenge als Aktionsparameter eingesetzt werden kann. Liegen heterogene Güter vor, so können auch Preisvariationen als Aktionsparameter verwendet werden; folglich bezeichnet man diese Marktform als Preisoligopol. (2) Entweder werden die Ausprägungen der konjekturalen Reaktionen als symmetrisch oder als asymmetrisch angenommen. (3) Ferner können die konjekturalen Reaktionen als exogen angenommen oder aber aus dem Modell abgeleitet werden. (4) Die Strategie der Firmen kann unabhängig von den Aktivitäten der Konkurrenten verfolgt werden (autonome Strategie) oder von den tatsächlichen Marktaktionen der Mitwettbewerber abhängig gemacht werden. Ein Beispiel für den zweiten Fall ist das Stackelberg-Oligopol. (5) Eine Sonderform des Oligopols ist das Dyopol (auch: Duopol), bei dem nur zwei Anbieter am Markt auftreten. Dieser Fall ist für die graphische Darstellung vorteilhaft und ergibt eine einfache analytische Modellstruktur.

80. Cournot-Dyopol. Zunächst wird ein Oligopolmarkt diskutiert, der durch folgende Eigenschaften gekennzeichnet ist: (1) Es werden homogene Güter (wie Zement oder Steinkohle) angeboten. (2) Die konjekturalen Reaktionen mögen symmetrisch sein und Null betragen; jede Firma handelt autonom und nimmt an, daß der andere Anbieter auf seine Marktaktivitäten nicht mit Gegenmaßnahmen reagiert. (3) Die konjekturalen Variationen sollen exogen gegeben sein und könnten beispielsweise auf unzureichende Informationen über die Mitwettbewerber zurückgeführt werden, ohne daß dieser mögliche Grund im Modell aufgenommen wird. (4) Zunächst wird von nur zwei Anbietern ausgegangen. Einen derartigen Markt bezeichnet man als Cournot-Dyopol. Zur Vereinfachung sollen Nachfragefunktion und Kostenfunktion als linear angenommen werden: $q = f(p) = a - bp,\ \ a > 0,\ \ b > 0$ mit der inversen Nachfragefunktion $f^{-1}(q) = p = a/b - q/b$. Weil die Gütermenge q von zwei Firmen 1 und 2 angeboten wird, kann man auch schreiben:

$$p = a/b - (q_1 + q_2)/b. \tag{381}$$

Da die Unternehmen gleiche Herstellungstechnologien verwenden, sind die Kostenfunktionen beider Anbieter identisch

$$C_j = kq_j + C_f, \quad j = 1, 2. \tag{382}$$

Die Gewinnfunktion der Firma 1 lautet folglich:

$$\Pi_1(q_1, q_2) = [a/b - (q_1 + q_2)/b]q_1 - kq_1 - C_f. \tag{383}$$

Es werden symmetrische konjekturale Reaktionen von Null unterstellt, was bedeutet, daß jede Firma annimmt, daß die Reaktionen des Konkurrenten auf eigene Mengenänderungen Null sind: $q_2 = \psi_1(q_1)$ mit $dq_2/dq_1 = \psi_1' = 0$. Die Bedingungen erster und zweiter Ordnung für ein Gewinnmaximum sind

$$\partial\Pi_1/\partial q_1 = a/b - 2q_1/b - q_2/b - k = 0 \tag{384}$$

und

$$\partial^2\Pi_1/\partial q_1^2 = -2/b < 0. \tag{385}$$

Wie man leicht sieht, ist die Bedingung 2. Ordnung wegen $b > 0$ erfüllt. Für die zweite Firma gilt analog die Gewinnfunktion:

$$\Pi_2(q_1, q_2) = [a/b - (q_1 + q_2)/b]q_2 - kq_2 - C_f, \tag{386}$$

mit $q_1 = \psi_2(q_2)$ sowie $dq_1/dq_2 = \psi_2' = 0$. Die Bedingungen erster und zweiter Ordnung für ein Gewinnmaximum lauten:

$$\partial\Pi_2/\partial q_2 = a/b - 2q_2/b - q_1/b - k = 0 \tag{387}$$

und

$$\partial^2\Pi_2/\partial q_2^2 = -2/b < 0. \tag{388}$$

Nach Umformung erhalten wir aus (384) und (387) die sogenannten Reaktionsfunktionen der beiden Dyopolisten:

$$q_1 = a/2 - bk/2 - q_2/2, \tag{389}$$

$$q_2 = a/2 - bk/2 - q_1/2. \tag{390}$$

Damit haben wir im Dyopol ein Gleichungssystem mit zwei Unbekannten (q_1, q_2) und zwei Gleichungen, das durch wechselseitiges Einsetzen von (389) in (390) oder (390) in (389) gelöst werden kann. (Bei n Anbietern erhält man auf dem gleichen Weg n Gleichungen mit n Unbekannten.) Die gewinnmaximalen Gleichgewichtsverkaufsmengen sind:

$$q_1 = \frac{a}{2} - \frac{bk}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{a}{2} - \frac{bk}{2} - \frac{q_1}{2}\right)$$

oder

$$q_1^* = \frac{a}{3} - \frac{bk}{3} \tag{391}$$

bzw.

$$q_2 = \frac{a}{2} - \frac{bk}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{a}{2} - \frac{bk}{2} - \frac{q_2}{2}\right)$$

oder

$$q_2^* = \frac{a}{3} - \frac{bk}{3}. \tag{392}$$

Die Lösung kann auch graphisch in einem q_1/q_2-Diagramm verdeutlicht werden. Nimmt man zur Vereinfachung der Abbildung $k = 0$ an, so lassen sich die Reaktionsfunktionen leicht einzeichnen (vgl. Abbildung 63). Die Reaktionsfunktionen (auch: Reaktionslinien oder Kammlinien) sind aus den Bedingungen 1. Ordnung für ein Gewinnmaximum entstanden und repräsentieren alternative Gewinnmaxima der einen Firma bei alternativen Verkaufsmengen der anderen Firma. Die Reaktionsfunktion der Firma 1 beginnt nach (389) auf der q_1-Achse bei $a/2$ und endet auf der q_2-Achse bei a. Die Reaktionsfunktion (390) der Firma 2 ist analog dazu einzuzeichnen. Jeder Anbieter ist bestrebt, seine Produktionsmengen so zu verändern, daß er seine Reaktionsfunktion erreicht. Nehmen wir an, daß aus einem nicht weiter zu diskutierenden Grund die Mengenkombination durch Punkt A gegeben sei, so wird der Anbieter 2 durch Reduktion seiner Verkaufsmenge versuchen, seine Reaktionsfunktion zu erreichen (senkrechte Veränderungen), und Anbieter 1 wird durch Ausdehnung der Produktion (waagerechte Veränderungen) sich

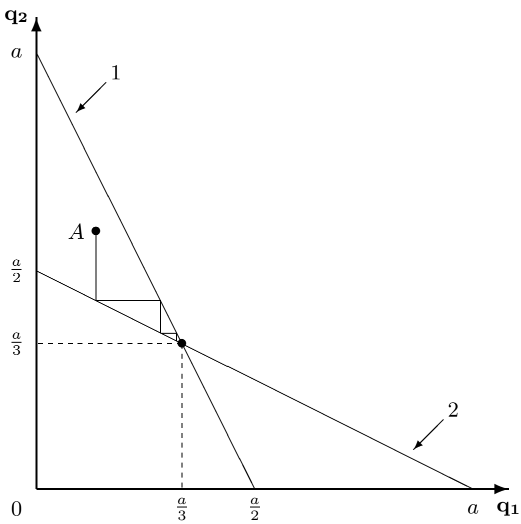


Abb. 63: Cournot-Gleichgewicht

ebenso auf seine Reaktionsfunktion zubewegen. Es gibt genau einen Punkt, an dem keines der beiden Unternehmen einen Anlaß hat, die Mengen zu verändern; dies ist der Schnittpunkt der beiden Reaktionsfunktionen bei $q_1^* = q_2^* = a/3$.

Setzt man die beiden Gleichgewichtsmengen, die wegen identischer Kostenfunktionen gleich sind, in die inverse Nachfragefunktion ein, so ergibt sich der Gleichgewichtspreis von

$$p^* = \frac{a}{b} - \frac{1}{b}\left(\frac{2}{3}(a - bk)\right),$$

$$p^* = \frac{1}{3}\frac{a}{b} + \frac{2}{3}k. \tag{393}$$

Die gesamte am Markt zu einem einheitlichen Preis von p^* abgesetzte Menge beträgt

$$q^* = q_1^* + q_2^* = \frac{2a}{3} - \frac{2bk}{3} \tag{394}$$

und der maximale Gewinn jeder Firma:

$$\Pi_j^* = (p^* - k)q_j^* - C_f$$

oder

$$\Pi_j^* = \frac{1}{9b}(a - bk)^2 - C_f, \quad j = 1, 2. \tag{395}$$

Die Konsumentenrente, die in diesem Markt entsteht, kann analog zum Monopolmarkt ermittelt werden (vgl. Abschnitt 74). Bei der angenommenen linearen Nachfragefunktion erstreckt sich die Konsumentenrentenfläche vom Prohibitivpreis a/b bis zum Gleichgewichtspreis p^*, hat die Form eines rechtwinkligen Dreiecks mit den Katheten q^* und $a/b - p^*$ und kann wie folgt berechnet werden:

$$\begin{aligned}\Gamma^* &= q^*(a/b - p^*)/2, \\ &= \left(\frac{2a}{3} - \frac{2bk}{3}\right)\left(\frac{2a}{3b} - \frac{2k}{3}\right)/2, \\ &= \frac{2}{9}\frac{(a - bk)^2}{b}.\end{aligned} \tag{396}$$

Als Summe aus Konsumentenrente und Produzentenrente (Gewinne der Firmen 1 und 2 zuzüglich der Fixkosten $2C_f$) bezeichnen wir bekanntlich die Wohlfahrtswirkungen eines Marktes mit

$$\Omega^* = \Gamma^* + \Pi_1^* + \Pi_2^* = \frac{4}{9}\frac{(a - bk)^2}{b}. \tag{397}$$

	Marktform	
	Monopol	*Dyopol*
Marktpreis	$(a/b+k)/2$	$(a/b+2k)/3$
Menge	$(a-bk)/2$	$(2a-2bk)/3$
Gewinne	$(a-bk)^2/(4b)$	$2(a-bk)^2/(9b)$
Konsumenten-rente	$(a-bk)^2/(8b)$	$2(a-bk)^2/(9b)$
Wohlfahrts-effekte	$3(a-bk)^2/(8b)$	$4(a-bk)^2/(9b)$

Tabelle 3: Vergleich der Marktergebnisse Monopol–Dyopol (ohne Fixkosten)

Vergleicht man die Ergebnisse des Dyopolmarktes mit dem Monopolmarkt, so zeigen sich die in Tabelle 3 zusammengefaßten Resultate:

Werden in beiden Marktformen die gleichen Technologien angewandt und entstehen daher auch die gleichen Kosten, so zeigen sich bei Vernachlässigung der Fixkosten folgende Ergebnisse: Im Dyopolmarkt ist der Preis niedriger, die verkaufte Menge größer, der Gewinn der beiden Produzenten zusammen kleiner, die Konsumentenrente größer und der Wohlfahrtseffekt höher als im Monopolmarkt. Wie sieht der Vergleich aus, wenn nicht ein Dyopol, sondern ein Tripoly (drei Anbieter) am Markt zu beobachten ist? Welche Ergebnisse erhält man schließlich bei vier und mehr Anbietern?

M8. Lineare Gleichungssysteme. *Ein aus m Gleichungen*

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1, \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2, \\ . & . & . & . & \dots & . & . & . & . \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & b_m, \end{array}$$

für n gesuchte Variable $x_1, \dots, x_n$ *bei gegebenen Koeffizienten* $a_{11}, \dots, a_{mn}$ *und gegebenen Größen* $b_1, \dots, b_m$ *auf der rechten Seite bestehendes System stellt ein* lineares Gleichungssystem *dar. Lineare Gleichungssysteme können unlösbar sein. So widersprechen sich die Gleichungen* $x_1 + 2x_2 + x_3 = 1$, $2x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 3$, *– das System besitzt keine Lösung.*

• Lineare Gleichungssysteme *weisen die folgenden grundlegenden Eigenschaften auf:*

(1) $m < n$: *Ein* lösbares *Gleichungssystem mit weniger Gleichungen als Variablen besitzt eine – von einer gewissen Anzahl freier Parameter abhängende – Vielfalt von Lösungen.*

(2) $m > n$: *Zwischen den Gleichungen eines* lösbaren *Systems mit mehr Gleichungen als Variablen bestehen lineare Abhängigkeiten: Mindestens eine der Gleichungen des Systems ergibt sich aus den übrigen Gleichungen durch Multiplikation mit gewissen Zahlenfaktoren und anschließende Summation.*
Ein derartiges System läßt sich durch schrittweises Weglassen abhängiger, also überflüssiger Gleichungen, in ein System mit $m \leq n$ *überführen, bei dem keine derartigen Abhängigkeiten mehr bestehen.*

(3) $m = n$: *Bestehen zwischen den Zeilen auf der linken Seite eines Gleichungssystems mit der gleichen Anzahl von Gleichungen wie Variablen keine der genannten Abhängigkeiten, so besitzt das Gleichungssystem – bei beliebig gegebenen Werten für* $b_1, \ldots, b_n$ *auf der rechten Seite – genau eine Lösung.*
Insbesondere kann bei einem eindeutig lösbaren System – nach Weglassen von abhängigen Gleichungen – generell $m = n$ *angenommen werden.*

Es sei jetzt ein eindeutig lösbares Gleichungssystem (mit gleichviel Gleichungen wie Variablen) gegeben. Die Lösung kann dann formelmäßig unter Verwendung von Determinanten (siehe M4) *angegeben werden. Die Lösungsformeln sind bei zwei und auch noch bei drei Gleichungen praktikabel, bei mehr als drei Gleichungen sollten sogenannte Eliminationsverfahren verwendet werden.*

• Cramersche Regel für $n = 2$: *Ein Gleichungssystem*

$$\begin{array}{ccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & = & b_1, \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & = & b_2, \end{array}$$

von zwei Gleichungen für zwei Variable ist genau dann eindeutig lösbar, wenn die Determinante $|\mathbf{A}| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ *der Koeffizientenmatrix* $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ *von Null verschieden ist. Die Lösung* (x_1^*, x_2^*) *lautet* *dann:*

$$x_1^* = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = \frac{a_{22}b_1 - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}},$$

$$x_2^* = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = \frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}.$$

Diese Formeln erhält man nach einigen Umformungen durch Auflösen einer der beiden Gleichungen des Systems nach einer der Variablen und Einsetzen des resultierenden Ausdrucks für diese Variable in die andere Gleichung.

• Cramersche Regel für $n = 3$: *Ein Gleichungssystem*

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & a_{13}x_3 & = & b_1, \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & a_{23}x_3 & = & b_2, \\ a_{31}x_1 & + & a_{32}x_2 & + & a_{33}x_3 & = & b_3, \end{array}$$

von drei Gleichungen für drei Variable ist genau dann eindeutig lösbar, wenn die Determinante $|\mathbf{A}|$ *der Koeffizientenmatrix* $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ *von Null verschieden ist. Die Lösung* (x_1^*, x_2^*, x_3^*) *lautet:*

$$x_1^* = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad x_2^* = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$x_3^* = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

Die Cramersche Regel kann sinngemäß allgemein für n Gleichungen mit n Variablen formuliert werden; die dafür benötigten Determinanten n-reihiger Matrizen lassen sich auf Determinanten $(n-1)$-reihiger Matrizen zurückführen, diese auf Determinanten $(n-2)$-reihiger Matrizen usw. (in M4 *wurde die Reduktion von $n = 3$ auf $n = 2$ angegeben). Allerdings erfordert die Berechnung von Determinanten für größere n einen meist unvertretbaren Aufwand.*

• Die Lösungsformeln der Cramerschen Regel *lassen sich mit Hilfe der Matrizentechnik übersichtlich formulieren. Dies wird zunächst allgemein dargestellt und anschließend für $n = 2$ und $n = 3$ demonstriert.*
Dafür werden Produkte von Matrizen benötigt, und zwar das Produkt einer n-reihigen Matrix mit einer Spalte aus n Elementen und das Produkt zweier n-reihiger Matrizen:

Für $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$ *und* $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & \dots & c_{nn} \end{bmatrix}$
ist die Produktspalte *(aus* n *Elementen) als*

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} a_{11}b_1 + \ldots + a_{1n}b_n \\ \vdots \\ a_{n1}b_1 + \ldots + a_{nn}b_n \end{bmatrix}$$

erklärt, und die (n*-reihige)* Produktmatrix $\mathbf{AC}$ *enthält in der* i*-ten Zeile und* j*-ten Spalte das Element*

$$a_{i1}c_{1j} + a_{i2}c_{2j} + \ldots + a_{in}c_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}c_{kj} \quad \textit{für} \quad i, j = 1, \ldots, n.$$

Ein Gleichungssystem von n *Gleichungen mit den Variablen* $x_1, \ldots, x_n$ *lautet dann in Matrizenform:*

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \quad \textit{bzw.} \quad \mathbf{AX} = \mathbf{B}.$$

Die Matrizengleichung für die gesuchte Spalte $\mathbf{X}$ *kann durch Multiplikation mit der sogenannten* inversen Matrix (*oder auch* Inversen) $\mathbf{A}^{-1}$ *der Matrix* $\mathbf{A}$ *gelöst werden. Die Inverse ist durch die Eigenschaft*

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{E} \quad \textit{oder auch gleichwertig durch} \quad \mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{E}$$

erklärt, wobei die n*-reihige Matrix*

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

die sogenannte Einheitsmatrix *ist. Letztere wirkt als ein neutraler Faktor bei der Matrizenmultiplikation, und daher ergibt sich aus* $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ *durch beiderseitige Multiplikation mit der Inversen zunächst* $\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{AX}) = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$, *aus den Regeln der Matrizenmultiplikation* $\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{AX}) = (\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A})\mathbf{X} = \mathbf{EX} = \mathbf{X}$ *und hieraus schließlich die Lösungsformel* $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$.

Die Inverse existiert für eine n*-reihige Matrix* $\mathbf{A}$ *dann, und nur dann, wenn deren Determinante von Null verschieden ist. Dies ist gleichbedeutend damit, daß zwischen den Zeilen der Matrix (oder auch gleichwertig:*

zwischen den Spalten) keine linearen Abhängigkeiten bestehen. In diesem Fall kann die Inverse von $\mathbf{A}$ *mit Hilfe ihrer* $(n-1)$*-reihigen* Unterdeterminanten *formelmäßig dargestellt werden. Dazu wird für* $i, j = 1, \ldots, n$ *die Determinante* A_{ij} *derjenigen* $(n-1)$*-reihigen Matrix gebildet, die durch Streichen der* i*-ten Zeile und* j*-ten Spalte aus* $\mathbf{A}$ *entsteht. Diese Unterdeterminanten* A_{ij}*, mit* $(-1)^{i+j}$ *für* $i, j = 1, \ldots, n$ *multipliziert, bilden die Matrix der Adjunkten oder Kofaktoren. Aus dieser wird schließlich durch Vertauschen von Zeilen und Spalten die Matrix* $\mathbf{A}_{ad}$ *gebildet. Die Inverse von* $\mathbf{A}$ *und die Lösung des Gleichungssystems* $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ *lauten dann:*

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|}\mathbf{A}_{ad}, \quad \mathbf{X}^* = \frac{1}{|\mathbf{A}|}\mathbf{A}_{ad}\mathbf{B}.$$

• Zwei- und dreireihige Matrizen:
Für $n = 2$ *ist* $A_{11} = a_{22}$, $A_{12} = a_{21}$, $A_{21} = a_{12}$ *und* $A_{22} = a_{11}$.
Für $n = 3$ *lauten die Unterdeterminanten:*

$$A_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32} \qquad A_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31} \qquad A_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}$$

$$A_{21} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{12}a_{33} - a_{13}a_{32} \qquad A_{22} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31} \qquad A_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = a_{11}a_{32} - a_{12}a_{31}$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} = a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22} \qquad A_{32} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} = a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21} \qquad A_{33} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Das ergibt die Matrizen

$$\mathbf{A}_{ad} = \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix} \quad \textit{bzw.} \quad \mathbf{A}_{ad} = \begin{bmatrix} A_{11} & -A_{21} & A_{31} \\ -A_{12} & A_{22} & -A_{32} \\ A_{13} & -A_{23} & A_{33} \end{bmatrix}$$

und damit schließlich die Cramersche Regel, jetzt in Matrizenschreibweise:

$$\mathbf{X}^* = \begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \end{bmatrix} = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{X}^* = \begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ x_3^* \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{|\mathbf{A}|} \begin{bmatrix} a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32} & a_{13}a_{32} - a_{12}a_{33} & a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22} \\ a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33} & a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31} & a_{13}a_{21} - a_{11}a_{23} \\ a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31} & a_{12}a_{31} - a_{11}a_{32} & a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

Beispiel: Die Matrix $\mathbf{A}$ *des Gleichungssystems*

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 2 \\ 2x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 1 \\ -x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 4 \end{array}$$

hat die Inverse

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 3 & 0 & -3 \\ -1 & 2 & 3 \\ 5 & -4 & -3 \end{bmatrix},$$

und daher lautet die (eindeutig bestimmte) Lösung des Systems:

$$\begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ x_3^* \end{bmatrix} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 3 & 0 & -3 \\ -1 & 2 & 3 \\ 5 & -4 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

81. Cournot-Oligopol. Das Cournot-Modell kann nun für drei Anbieter formuliert werden. Die ersten drei Annahmen (homogene Güter, symmetrische konjekturale Reaktionen von Null, autonome Strategie und exogen gegebene Verhaltensweisen) sollen weiterhin gelten. Die Verkaufsmenge lautet: $q = q_1 + q_2 + q_3$ und die inverse Nachfragefunktion:

$$p = a/b - (q_1 + q_2 + q_3)/b. \tag{398}$$

Die Kostenfunktionen der Firmen mögen identisch sein

$$C_j = kq_j + C_f, \quad j = 1, 2, 3. \tag{399}$$

Die Gewinnfunktion der Firma j ist:

$$\Pi_j = [a/b - (q_1 + q_2 + q_3)/b]q_j - kq_j - C_f, \;\; j = 1, 2, 3. \tag{400}$$

Da symmetrische konjekturale Reaktionen von Null angenommen werden, erwartet jede Firma, daß die Reaktionen des Konkurrenten auf eigene Mengenänderungen Null sind: $q_j = \psi_i(q_i)$ mit $dq_j/dq_i = \psi_i' = 0$ für $i, j = 1, 2, 3$ und $i \neq j$. Die Bedingungen erster und zweiter Ordnung für die Gewinnmaxima sind

$$\partial\Pi_j/\partial q_j = a/b - (q_1 + q_2 + q_3)/b - q_j/b - k = 0 \tag{401}$$

und

$$\partial^2\Pi_j/\partial q_j^2 = -2/b < 0 \quad j = 1, 2, 3. \tag{402}$$

In der Matrixform lauten die Bedingungen 1. Ordnung:

$$\mathbf{A}\ \mathbf{Q} = \mathbf{B},$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a - bk \\ a - bk \\ a - bk \end{bmatrix}. \tag{403}$$

Die Lösung mit Hilfe der Inversen der Matrix $\mathbf{A}$ ist:

$$\mathbf{Q}^* = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B},$$

$$\begin{bmatrix} q_1^* \\ q_2^* \\ q_3^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/4 & -1/4 & -1/4 \\ -1/4 & 3/4 & -1/4 \\ -1/4 & -1/4 & 3/4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a - bk \\ a - bk \\ a - bk \end{bmatrix}. \tag{404}$$

Die gewinnmaximale Menge je Unternehmen ist für alle drei Anbieter gleich und beträgt

$$q_j^* = (a - bk)/4, \ \ j = 1, 2, 3 \tag{405}$$

und die gesamte Verkaufsmenge ist

$$q^* = 3(a - bk)/4. \tag{406}$$

Unter Verwendung der Menge (406) in der inversen Nachfragefunktion (398) erhält man schließlich den Gleichgewichtspreis von:

$$p^* = (a/b)/4 + 3k/4. \tag{407}$$

Wenn man vier Anbieter unterstellt und das Problem in der gleichen Weise löst, erhält man $q_j^* = (a - bk)/5$, $j = 1, 2, 3, 4$ und für die gesamte Verkaufsmenge: $q^* = 4(a - bk)/5$. Die Ergebnisse können, wie man leicht sieht, auf n Firmen verallgemeinert werden: $q_j^* = (a - bk)/(n + 1)$ und $q^* = n(a - bk)/(n + 1)$ sowie über die inverse Nachfragefunktion: $p^* = (a/b)/(n + 1) + kn/(n + 1)$. Würde n sehr groß - was allerdings mit den Annahmen des Oligopols nicht übereinstimmt -, so streben q_j^* gegen Null, q^* gegen $(a - bk)$ und der Preis p^* gegen die Grenzkosten k. Wir können nun eine allgemeine Schlußfolgerung ziehen: Je mehr Firmen ein Gut am Markt anbieten, um so niedriger ist der Preis und um so höher ist die Marktversorgung. Dieses Resultat ist nicht überraschend, da es sich schon im Vergleich Monopol/Dyopol zeigte und mit den Beobachtungen der Realität übereinstimmt.

82. Allgemeines Mengendyopol. Nachdem ein homogenes Oligopol mit konjekturalen Reaktionen von Null (Cournot-Oligopol) diskutiert worden ist, soll nunmehr das Modell auf *beliebige* Reaktionsannahmen verallgemeinert werden. Es gelten weiterhin die Annahmen der homogenen Güter und der exogen gegebenen konjekturalen Variationen, der autonomen Strategien der Firmen und der Symmetrie der Verhaltensweisen. Zunächst wird vom Dyopol-Fall ausgegangen. Zur Vereinfachung werden die bekannten linearen Nachfrage- und Kostenfunktionen verwendet: $q = f(p) = a - bp,\ \ a > 0,\ \ b > 0$ mit der inversen Nachfragefunktion $f^{-1}(q) = p = a/b - (q_1 + q_2)/b$ und $C_j = kq_j + C_f,\ \ j = 1, 2$. Die Gewinnfunktion der Firma 1 lautet unverändert:

$$\Pi_1(q_1, q_2) = [a/b - (q_1 + q_2)/b]q_1 - kq_1 - C_f. \tag{383}$$

Da symmetrische konjekturale Reaktionen unterstellt werden, nimmt jede Firma an, daß die Reaktionen des Konkurrenten auf eigene Mengenänderungen einen bestimmten Wert haben: $q_2 = \psi_1(q_1)$ mit $dq_2/dq_1 = \psi_1' = \phi_{21}$ und $\psi_1'' = \phi_{21}' = 0$ und $q_1 = \psi_2(q_2)$ mit $dq_1/dq_2 = \psi_2' = \phi_{12}$ und $\psi_2'' = \phi_{12}' = 0$. Die Bedingungen erster und zweiter Ordnung für ein Gewinnmaximum sind

$$\frac{\partial \Pi_1}{\partial q_1} = \frac{a}{b} - \frac{2q_1}{b} - \frac{q_2}{b} - \frac{q_1}{b}\frac{dq_2}{dq_1} - k = 0 \tag{408}$$

und

$$\frac{\partial^2 \Pi_1}{\partial q_1^2} = -\frac{2}{b} - \frac{1}{b}\frac{dq_2}{dq_1} - \frac{1}{b}\frac{dq_2}{dq_1} - \frac{1}{b}q_1\frac{d^2q_2}{dq_1^2} < 0. \tag{409}$$

Die Bedingung 1. Ordnung unterscheidet sich vom Cournot-Modell durch den zusätzlichen Term $-(q_1/b)(dq_2/dq_1)$, der im Cournot-Modell mit Null angenommen wird. Die Bedingung 2. Ordnung ergibt nach einigen Umformungen und unter Berücksichtigung linearer Reaktionsfunktionen (in diesem Fall gilt $d^2q_2/dq_1^2 = 0$):

$$-\frac{2}{b}\left(1 + \frac{dq_2}{dq_1}\right) < 0 \quad \rightarrow \frac{dq_2}{dq_1} > -1. \tag{410}$$

Die Bedingung zweiter Ordnung ist bei linearen Nachfrage-, Kosten- und Reaktionsfunktionen erfüllt, wenn gilt $\phi_{21} > -1$. Gewinnfunktion und Bedingungen 1. und 2. Ordnung sind bei der zweiten Firma – bis auf die auszutauschenden Indizes – identisch und lauten

$$\Pi_2(q_1, q_2) = [a/b - (q_2 + q_1)/b]q_2 - kq_2 - C_f, \tag{386}$$

$$\frac{\partial \Pi_2}{\partial q_2} = \frac{a}{b} - \frac{2q_2}{b} - \frac{q_1}{b} - \frac{q_2}{b}\frac{dq_1}{dq_2} - k = 0 \tag{411}$$

und

$$\frac{\partial^2 \Pi_2}{\partial q_2^2} = -\frac{2}{b} - \frac{1}{b}\frac{dq_1}{dq_2} - \frac{1}{b}\frac{dq_1}{dq_2} - \frac{1}{b} q_2 \frac{d^2 q_1}{dq_2^2} < 0. \tag{412}$$

Da symmetrische Reaktionen für beide Unternehmen angenommen werden, gilt $dq_2/dq_1 = dq_1/dq_2 = \phi_{21} = \phi_{12} = \phi$. Die Reaktionsfunktionen der beiden Firmen aus den Bedingungen 1. Ordnung sind:

$$q_1 = \frac{a - bk - q_2}{2 + \phi}, \tag{413}$$

$$q_2 = \frac{a - bk - q_1}{2 + \phi}, \tag{414}$$

woraus sich die Gleichgewichtsmengen

$$q_1^* = q_2^* = \frac{a - bk}{\phi + 3} \tag{415}$$

ergeben. Aus der Nachfragefunktion kann der Gleichgewichtspreis unter Verwendung von $q_1^* + q_2^*$ ermittelt werden:

$$p^* = \frac{a(\phi + 1) + 2bk}{b(\phi + 3)}. \tag{416}$$

Wie man leicht sieht, entsprechen die Ergebnisse jenen im Cournot-Modell, die man bei $\phi = 0$ erhält. Diese Tatsache verdeutlicht, daß das Cournot-Modell ein Spezialfall eines allgemeinen homogenen Oligopols darstellt.

83. Allgemeines Mengenoligopol. Das allgemeine homogene Oligopol kann nun - ebenso wie das Cournot-Oligopol - für mehr als zwei Anbieter formuliert werden. Wir wollen uns aus Platzgründen auf drei Firmen beschränken; eine Erweiterung auf mehr als drei Unternehmen kann analog dazu erfolgen. Alle Annahmen, die für Abschnitt 82 gelten (mit Ausnahme der Anzahl der Firmen), werden auch weiterhin unterstellt. Die Gewinnfunktion der Firma j lautet:

$$\Pi_j = [a/b - (q_1 + q_2 + q_3)/b]q_j - kq_j - C_f, \quad j = 1, 2, 3 \tag{400}$$

und die Bedingungen 1. Ordnung sind:

$$\frac{\partial \Pi_1}{\partial q_1} = \frac{a}{b} - \frac{q_1 + q_2 + q_3}{b} - \frac{q_1}{b}\left(1 + \frac{\partial q_2}{\partial q_1} + \frac{\partial q_3}{\partial q_1}\right) - k = 0, \tag{417}$$

$$\frac{\partial \Pi_2}{\partial q_2} = \frac{a}{b} - \frac{q_1 + q_2 + q_3}{b} - \frac{q_2}{b}\left(\frac{\partial q_1}{\partial q_2} + 1 + \frac{\partial q_3}{\partial q_2}\right) - k = 0, \tag{418}$$

$$\frac{\partial \Pi_3}{\partial q_3} = \frac{a}{b} - \frac{q_1+q_2+q_3}{b} - \frac{q_3}{b}\left(\frac{\partial q_1}{\partial q_3} + \frac{\partial q_2}{\partial q_3} + 1\right) - k = 0. \tag{419}$$

In der Matrixschreibweise lauten diese Bedingungen:

$$\mathbf{A} \ \mathbf{Q} = \mathbf{B}$$

$$\begin{bmatrix} 2+\frac{\partial q_2}{\partial q_1}+\frac{\partial q_3}{\partial q_1} & 1 & 1 \\ 1 & 2+\frac{\partial q_1}{\partial q_2}+\frac{\partial q_3}{\partial q_2} & 1 \\ 1 & 1 & 2+\frac{\partial q_1}{\partial q_3}+\frac{\partial q_2}{\partial q_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a-bk \\ a-bk \\ a-bk \end{bmatrix}.$$

Die Lösung des Problems vereinfacht sich wesentlich durch die Symmetrieannahme, bei der alle konjekturalen Reaktionen identisch sind. Dabei kann für die Hauptdiagonale in der **A**-Matrix $2+2\phi$ geschrieben werden. Die Determinante der **A**-Matrix lautet:

$$|\mathbf{A}| = 8\phi^3 + 24\phi^2 + 18\phi + 4$$

und die adjungierte Matrix

$$\mathbf{A}_{ad} = \begin{bmatrix} (4\phi^2+8\phi+3) & (-2\phi-1) & (-2\phi-1) \\ (-2\phi-1) & (4\phi^2+8\phi+3) & (2\phi-1) \\ (-2\phi-1) & (-2\phi-1) & (4\phi^2+8\phi+3) \end{bmatrix}.$$

Die Inverse zu **A** ist somit

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^{-1} &= \frac{1}{|\mathbf{A}|}\mathbf{A}_{ad} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{2\phi+3}{4\phi^2+10\phi+4} & -\frac{1}{4\phi^2+10\phi+4} & -\frac{1}{4\phi^2+10\phi+4} \\ -\frac{1}{4\phi^2+10\phi+4} & \frac{2\phi+3}{4\phi^2+10\phi+4} & -\frac{1}{4\phi^2+10\phi+4} \\ -\frac{1}{4\phi^2+10\phi+4} & -\frac{1}{4\phi^2+10\phi+4} & \frac{2\phi+3}{4\phi^2+10\phi+4} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Aus $\mathbf{Q}^* = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$ kann die gewinnmaximale Verkaufsmenge der Firma j ermittelt werden:

$$q_j^* = \frac{a-bk}{2\phi+4}, \quad j = 1,2,3 \tag{420}$$

und aus der inversen Nachfragefunktion der Gleichgewichtspreis von

$$p^* = \frac{a(2\phi+1)+3bk}{b(2\phi+4)}. \tag{421}$$

Auch im Falle des allgemeinen Mengenoligopols kann man die Ergebnisse auf n Firmen übertragen. Die gewinnmaximale Outputmenge des Anbieters j ist nun $q_j^* = (a-bk)/[(n-1)\phi+n+1]$, und der Gleichgewichtspreis beträgt $p^* = [a(\phi(n-1)+1) + nbk]/[b\phi(n-1) + b(n+1)]$. Die Terme für Gleichgewichtsmengen und -preis werden sehr umfangreich, wenn man die Annahme identischer Kostenfunktionen aufgibt und auf symmetrische konjekturale Reaktionen verzichtet, sie lassen sich aber gleichwohl mit dem dargestellten Verfahren zur Lösung linearer Gleichungssysteme ermitteln.

84. Stackelberg-Dyopol. Das Cournot-Modell mit konjekturalen Reaktionen von Null (aber auch das allgemeine homogene Oligopol mit beliebigen konjekturalen Reaktionen) weist ein modellendogenes Problem auf, das nunmehr diskutiert werden soll. Jede der beiden Firmen nimmt an, daß die andere Firma auf die eigenen Mengenänderungen nicht reagiert (oder mit einem konstanten Reaktionskoeffizienten reagiert), tatsächlich verändert die Konkurrenzfirma ihre Angebotsmenge aber gemäß der eigenen Reaktionsfunktion $q_j = a/2 - bk/2 - q_i/2,\ \ j \neq i$. Die Beobachtungen des Mitwettbewerbers zeigen nun ein tatsächliches Verhalten, das mit den erwarteten (konjekturalen) Reaktionen nicht übereinstimmen muß und im Fall des Cournot-Oligopols auch offensichtlich nicht übereinstimmt. Die so entstehenden Erwartungsfehler werden nicht korrigiert und führen zu Gewinnreduktionen, von denen aber keine Anreize ausgehen, die Erwartungen an das tatsächliche Geschehen anzupassen. Diese Modellierung des Oligopolmarktes, die ein Lernverhalten der Akteure ausschließt und sie bei der autonomen Strategie verharren läßt, ist nicht sehr realitätsnah.

In einem ersten Schritt zur Lösung dieses Problems soll angenommen werden, daß in einem Dyopolmarkt dem Anbieter 1 die (tatsächliche) Reaktionsfunktion des Konkurrenten 2 bekannt ist und er diese in sein Gewinnmaximierungskalkül einbezieht. Damit sieht er die Angebotsmenge der Firma 2 nicht als gegeben an und weicht von seiner eigenen Reaktionsfunktion ab. Firma 1 nimmt die sogenannte Unabhängigkeitsposition ein. Firma 2 verhält sich weiterhin autonom und folgt ihrer Reaktionsfunktion $q_2 = a/2 - bk/2 - q_1/2$; sie nimmt die Abhängigkeitsposition ein. Ein solches asymmetrisches Oligopolmodell bezeichnet man nach dem deutschen Ökonomen Heinrich von Stackelberg als Stackelberg-Oligopol und kann bei Firmen mit sehr unterschiedlichen Marktanteilen angenommen werden. Die Gewinnfunktion der Firma 1 lautet bei Fixkosten von Null:

$$\Pi_1 = [a/b - (q_1 + q_2)/b]q_1 - kq_1,$$

$$\Pi_1 = \left[\frac{a}{b} - \frac{1}{b}\left(q_1 + \frac{a-bk}{2} - \frac{q_1}{2}\right)\right] q_1 - kq_1,$$

$$\Pi_1 = \frac{(a - bk - q_1)q_1}{2b}. \tag{422}$$

Die Bedingungen erster und zweiter Ordnung für ein Gewinnmaximum sind

$$\frac{\partial \Pi_1}{\partial q_1} = \frac{a - 2q_1 - bk}{2b} = 0 \tag{423}$$

und

$$\frac{\partial^2 \Pi_1}{\partial q_1^2} = -1/b < 0. \tag{424}$$

Wie man leicht sieht, ist die Bedingung 2. Ordnung wegen $b > 0$ erfüllt. Aus der Bedingung 1. Ordnung erhält man eine gewinnmaximale Verkaufsmenge von

$$q_1^* = (a - bk)/2. \tag{425}$$

Setzt man diese Menge in die Reaktionsfunktion der Firma 2 ein, so lautet ihre Verkaufsmenge:

$$q_2^* = (a - bk)/4. \tag{426}$$

Der Markt wird mit einer Menge von

$$q_1^* + q_2^* = 3(a - bk)/4 \tag{427}$$

zu einem Preis von

$$p^* = (a + 3bk)/4b \tag{428}$$

versorgt. Die Gewinne der Firmen lauten unter Verwendung von (425) und (426) bei $C_f = 0$

$$\Pi_1^* = \frac{(a - bk)^2}{8b} \tag{429}$$

und

$$\Pi_2^* = \frac{(a - bk)^2}{16b}. \tag{430}$$

Zusammenfassend kann im Vergleich zum Cournot-Dyopol festgehalten werden: (1) Das Unternehmen, das eine Unabhängigkeitsposition einnimmt, kann eine Verkaufsmenge und einen Gewinn erzielen, die doppelt so hoch sind wie die Marktergebnisse, die das Unternehmen realisiert, das in der Abhängigkeitsposition verbleibt. Dabei sind Gewinn und Produktionsmenge der Firma, die die Unabhängigkeitsposition einnimmt, größer und die der anderen Firma, die sich in der Abhängigkeitsposition befindet, kleiner als im Cournot-Dyopol. (2) Im Stackelberg-Dyopol ist der Gewinn aller Anbieter zusammen kleiner, der Preis geringer und die Marktangebotsmenge größer als im Cournot-Dyopol.

85. Konsistente konjekturale Reaktionen. Wie sieht das Marktergebnis aus, wenn man von beiden Firmen annimmt, daß sie vollständige Informationen über die Gewinnfunktion ihres jeweiligen Konkurrenten - und damit auch über die Reaktionsfunktionen als erste Ableitungen der Gewinnfunktionen - besitzen, und daher beide die Unabhängigkeitsposition einnehmen? Dabei kann man von der Vorstellung ausgehen, daß beide Unternehmen annehmen, der jeweilige Konkurrent würde sich in der Abhängigkeitsposition befinden. In diesem Fall liegen wieder symmetrische konjekturale Reaktionen vor, die aber nun mit den tatsächlichen Reaktionen übereinstimmen, da sie mit dem Gewinnmaximierungsverhalten der jeweiligen Konkurrenten konsistent sind. Zur Lösung des Problems können wir das Mengenergebnis der Firma 1 auch auf die Firma 2 übertragen, da beide die jeweilige Reaktionsfunktion ihres Konkurrenten in ihre Gewinnfunktion einsetzen. Wir erhalten die gewinnmaximalen Angebotsmengen:

$$q_1^* = q_2^* = (a - bk)/2 \tag{431}$$

und für die Marktmenge folglich

$$q_1^* + q_2^* = (a - bk). \tag{432}$$

Setzt man die Gesamtmenge (432) in die inverse Nachfragefunktion $p = a/b - (q_1 + q_2)/b$ ein, so stellt man fest, daß der Marktpreis auf die Grenzkosten k (bei linearen Gesamtkosten gleich den variablen Durchschnittskosten) fällt: $p^* = k$. Damit ist der Gewinn für beide Unternehmen - bei Fixkosten von Null - gleich: $\Pi_1^* = \Pi_2^* = 0$. Dieses Resultat ist in zweifacher Hinsicht überaus interessant. Zum einen ist es identisch mit dem Marktergebnis im homogenen Polypol. Dieses Ergebnis wird im Cournot-Oligopol nur bei sehr vielen Anbietern erreicht, wobei allerdings die Annahme sehr vieler Anbieter der grundlegenden Oligopolannahme von wenigen Firmen widerspricht. Zum anderen kann es auch erzielt werden, wenn man zunächst die sogenannten konsistenten konjekturalen Reaktionskoeffizienten ermittelt und in die Reaktionsfunktionen einsetzt. Reaktionskoeffizienten werden als *konsistent* bezeichnet, wenn sie nicht exogen angenommen werden, sondern endogen aus den Gewinnfunktionen ermittelt werden, und daher mit den tatsächlichen Reaktionen übereinstimmen. Aus Abschnitt 82 übernehmen wir die Reaktionsfunktionen des allgemeinen homogenen Dyopols

$$q_1 = \frac{a - bk - q_2}{2 + \phi}, \tag{414}$$

$$q_2 = \frac{a - bk - q_1}{2 + \phi}, \tag{415}$$

für das symmetrische Reaktionen gelten sollen: $(dq_2/dq_1) = (dq_1/dq_2) = \phi_{21} = \phi_{12} = \phi$. Die tatsächliche Reaktion $\hat{\phi}$ der Firma 2 ergibt sich aus der Steigung der Reaktionsfunktion (415)

$$\hat{\phi} = \frac{dq_2}{dq_1} = -1/(2 + \phi). \tag{433}$$

Da die tatsächlichen Reaktionen $\hat{\phi}$ bei konsistenten Reaktionen gleich den konjekturalen Reaktionen ϕ sind, erhält man aus Gleichung (433) $\phi^2 + 2\phi + 1 = 0$ mit der Lösung $\phi^* = -1$. Setzt man diesen konsistenten konjekturalen Reaktionskoeffizienten in die Marktergebnisse des allgemeinen homogenen Dyopols ein, so erhält man für die Produktionsmengen

$$q_1^{**} = q_2^{**} = \frac{a - bk}{\phi^* + 3} = \frac{a - bk}{2} \tag{434}$$

und für den Marktpreis aus der inversen Nachfragefunktion unter Verwendung von q_1^{**} und q_2^{**}

$$p^{**} = \frac{a(\phi^* + 1) + 2bk}{b(\phi^* + 3)} = k. \tag{435}$$

Wie man leicht sieht, sind die Resultate identisch mit dem Fall der beiderseitigen Unabhängigkeitsposition. Dieses Ergebnis ist nicht überraschend, da in beiden Ansätzen von den gleichen Voraussetzungen ausgegangen wird: Die Firmen kennen die Gewinnfunktionen der Konkurrenten, und wenn diese Informationen vorliegen, gibt es keinen Grund für das Auseinanderfallen von tatsächlichen und konjekturalen Reaktionskoeffizienten.

86. Kartell. Die im vorangegangenen Abschnitt diskutierten Marktergebnisse mit Nullgewinnen stellen keine endgültigen Gleichgewichte dar, da beide Anbieter durchaus - wie gezeigt wurde - positive Gewinne erzielen können. (Im Fall der beiderseitigen Unabhängigkeitspositionen spricht man vom Stackelberg-Ungleichgewicht.) Eine Möglichkeit liegt in der Kooperation der Anbieter oder Kartellbildung. Auch wenn diese Absprachen in vielen Rechtssystemen nicht erlaubt werden, sollen doch die ökonomischen Wirkungen eines derartigen Verhaltens untersucht werden. Nehmen wir an, zwei Anbieter legen fest, daß die am Markt gemeinsam verkaufte Menge zu gleichen Teilen von beiden Firmen produziert werden soll. Die für beide Anbieter zusammen als gewinnmaximal zu bestimmenden Mengen erhält man aus der aggregierten Gewinnfunktion:

$$\Pi_1 + \Pi_2 = [a/b - (q_1 + q_2)/b](q_1 + q_2) - k(q_1 + q_2), \tag{436}$$

die nach $(q_1 + q_2)$ abgeleitet

$$\frac{d(\Pi_1 + \Pi_2)}{d(q_1 + q_2)} = \frac{a - bk - 2(q_1 + q_2)}{b} = 0 \tag{437}$$

eine gewinnmaximale Angebotsmenge von

$$(q_1 + q_2)^* = (a - bk)/2 \tag{438}$$

ergibt. Wie man leicht sieht, entspricht das Ergebnis dem des Monopolmarktes bei gleichen Nachfrage- und Kostenfunktionen. Für die Marktergebnisse, also für ökonomische Sachverhalte, sind im Rahmen unseres Modells nicht die institutionelle und rechtliche Ausgestaltung der Anbieter, sondern deren Verhalten entscheidend. Ob nun mehrere rechtlich selbständige Firmen sich durch Absprachen monopolistisch verhalten oder dieses Verhalten von nur einem Unternehmen ausgeübt wird, ist für das Ergebnis bei konstanten Grenzkosten unerheblich.

87. Graphische Darstellung und Zusammenfassung. Es ist zweckmäßig, die Ergebnisse der Diskussion des homogenen Oligopols (Mengenoligopol) zusammenzufassen. Geht man vom Dyopol-Fall aus, so können die Resultate in einem q_1/q_2-Diagramm mit Hilfe von sogenannten *Isogewinnlinien* verdeutlicht werden. Isogewinnlinien verbinden alle Punkte gleichen Gewinns einer Firma im q_1/q_2-Raum. Trägt man auf der Abszisse die Menge q_2 ab, so erhält man ihre funktionale Form durch Auflösung der Gewinngleichung (383) des Dyopolisten 1 nach q_2 bei Konstanz von Π_1:

$$q_2 = a - q_1 - bk - (b(\overline{\Pi}_1 + C_f))/q_1. \tag{439}$$

Bei Variation der Werte für $\overline{\Pi}_1$ entsteht die in Abbildung 64 dargestellte Kurvenschar. Den größtmöglichen Gewinn erzielt Firma 1 in Punkt M_1, in dem ihre Reaktionsfunktion auf die q_1-Achse trifft. Hier bedient Firma 1 den gesamten Markt, und Firma 2 setzt eine Menge von Null ab. Mit zunehmender Entfernung von diesem Punkt in den Güterraum hinein sinkt der Gewinn der Firma 1; weitere von M_1 entfernte Isogewinnlinien kennzeichnen also niedrigere $\overline{\Pi}_1$-Werte.

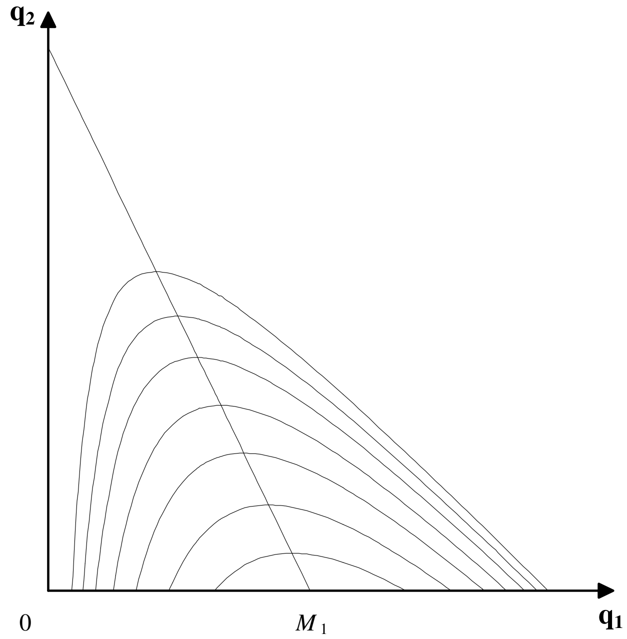


Abb. 64: Isogewinnlinien

Die Reaktionsfunktion der Firma schneidet jeweils die Maximalstellen der Isogewinnlinien. Zu jedem gegebenen q_2 zeigt der korrespondierende Punkt auf der Reaktionsfunktion die gewinnmaximale Menge q_1 an. Alle benachbarten Punkte sind aus Sicht der Firma 1 suboptimal und befinden sich auf weiter außen gelegenen Isogewinnlinien. Der Gewinn der Firma 1 ist maximal im Schnittpunkt der Reaktionsfunktion mit der innersten erreichbaren Isogewinnlinie. Isogewinnlinien und Reaktionsfunktion der Firma 2 lassen sich analog dazu ebenfalls in das q_1/q_2-Diagramm einzeichnen (Abbildung 65).

Die in den vorangegangenen Abschnitten unterschiedenen vier alternativen Marktergebnisse, die vom Verhalten der Firmen abhängig sind, können nun graphisch dargestellt werden (siehe Abbildung 65): (1) Wenn symmetrische konjekturale Reaktionen angenommen werden, die exogen vorgegeben sind (Cournot-Dyopol), so liegt der Gleichgewichtspunkt A im Schnittpunkt der beiden Reaktionsfunktionen. Werden von beiden Anbietern die autonomen Strategien nicht aufgegeben, so gibt es für sie keinen Grund, diesen Punkt zu verlassen. (2) Nimmt einer der beiden Anbieter – beispielsweise Firma 1 – eine Unabhängigkeitsposition ein und der andere die Abhängigkeitsposition,

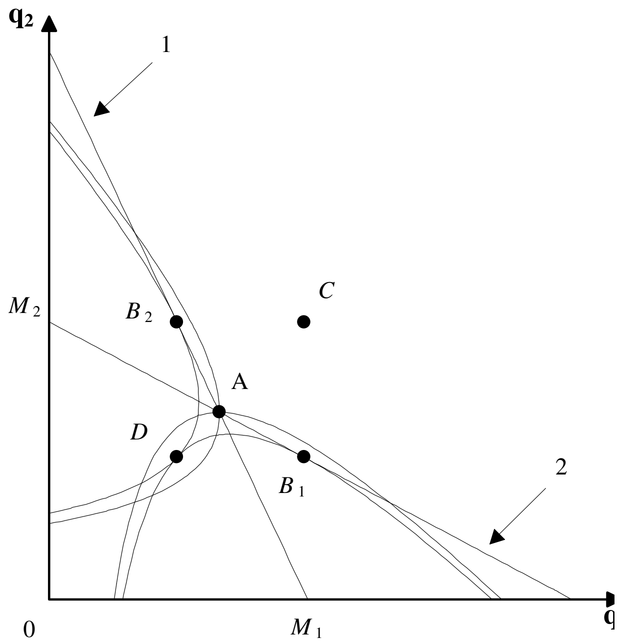


Abb. 65: Unterschiedliche Lösungen im Mengendyopol

so folgt aus diesem asymmetrischen Stackelberg-Dyopol ein Abweichen der Firma 1 von ihrer Reaktionsfunktion. Punkt B_1 markiert den Tangentialpunkt zwischen R_2 und der südlichsten hierzu erreichbaren Isogewinnlinie, folglich den maximalen Gewinn der Firma 1 unter Berücksichtigung der Reaktionsfunktion der Firma 2.

Wenn Firma 2 die Unabhängigkeitsposition einnimmt, erhält man analog dazu den Punkt B_2. Der Gewinn des jeweiligen Stackelbergführers ist größer als der im Cournot-Dyopol. (3) Beziehen beide Unternehmen die Reaktionsfunktionen des jeweiligen Konkurrenten in ihre Gewinnmaximierung ein, so weichen beide von ihren Reaktionsfunktionen ab und realisieren beide die schon im vorherigen Fall ermittelte Menge der Unabhängigkeitsposition. Wie man aus dem zugehörigen Punkt C ersehen kann, wird in diesem Fall die größte Marktversorgung erzielt. (4) Bilden die Anbieter ein Kartell, so ergibt sich die geringste Marktversorgung, wobei die gesamte abgesetzte Menge der eines Monopolisten entspricht. Der korrespondierende Punkt im Diagramm liegt, abhängig von der Aufteilung der Produktion auf beide Unternehmen, auf der (nicht eingezeichneten) Verbindungslinie zwischen

M_1 und M_2. Die Mengenaufteilung ist das Verhandlungsergebnis zwischen den beiden Firmen des Kartells und wird bei gleicher Aufteilung durch den Punkt D beschrieben. Wie man anhand der Isogewinnlinien leicht erkennen kann, ist der Gewinn für beide Unternehmen höher als im Cournot-Dyopol.

88. Allgemeines Preisdyopol. Gegenüber der bisherigen Diskussion des Oligopolmarktes wird nun eine der Annahmen geändert, die einen entscheidenden Einfluß auf die Marktergebnisse hat; es werden heterogene Güter angenommen, die aufgrund ihrer physischen oder wahrgenommenen Unterschiedlichkeit auch unterschiedliche Preise am Markt erzielen können. Es versteht sich von selbst, daß die Güter in einem engen Substitutionsverhältnis stehen, so daß sie einem Bedarfsmarkt zugerechnet werden können (wie Mittelklasseautos verschiedener Hersteller). Die Annahmen lauten im einzelnen: (1) Es werden heterogene Güter gehandelt. (2) Die konjekturalen Reaktionen mögen symmetrisch sein; jede Firma verfolgt die autonome Strategie. (3) Die konjekturalen Variationen sind exogen gegeben. (4) Zunächst wird von nur zwei Anbietern ausgegangen. Einen derartigen Markt bezeichnet man – bei konjekturalen Reaktionen von Null – in der Literatur nach dem deutschen Ökonomen Wilhelm Launhardt als Launhardt-Oligopol. Wir wollen allerdings den Fall der konjekturalen Reaktionen von Null nicht gesondert behandeln, da er – wie schon das Cournot-Oligopol – ein Sonderfall des allgemeinen Oligopolmodells darstellt. Zur Vereinfachung der Modellstruktur wollen wir davon ausgehen, daß die Kostenfunktionen der beiden Firmen identisch sind, was bei heterogenen Gütern nicht der Fall sein muß, und daß die Nachfragefunktionen, die die auf eine Firma entfallende Nachfragemenge bestimmen, identische Koeffizienten aufweisen. Die Nachfragefunktion für die Firma j lautet:

$$q_j = q_j(p_j, p_i), \ \text{ mit } \ \partial q_j/\partial p_j < 0, \ \ \partial q_j/\partial p_i > 0, \ \ j \neq i. \tag{440}$$

Die nachgefragte Menge wird durch einen steigenden Preis p_j reduziert und durch einen steigenden Konkurrenzpreis p_i ausgeweitet und umgekehrt. Die Kostenfunktion soll die Form $C_j = C_j(q_j(p_j, p_i)), \ j \neq i$, haben, woraus sich zusammen mit der Nachfragefunktion die Gewinnfunktion

$$\Pi_j(p_j, p_i) = q_j(p_j, p_i)p_j - C_j(q_j(p_j, p_i)) \tag{441}$$

ergibt. Im heterogenen Dyopol kann der Preis Aktionsparameter sein, d.h. wir können den Gewinn in Bezug auf den Verkaufspreis maximieren. Die

Bedingung erster Ordnung für ein Gewinnmaximum lautet:

$$\frac{\partial \Pi_j}{\partial p_j} = q_j + \left(p_j - \frac{\partial C_j}{\partial q_j}\right)\left(\frac{\partial q_j}{\partial p_j} + \frac{\partial q_j}{\partial p_i}\frac{dp_i}{dp_j}\right) = 0, \;\; j \neq i. \tag{442}$$

Der Term $dp_i/dp_j = \phi_{ij}$ stellt nunmehr den konjekturalen Reaktionskoeffizienten aus der Reaktionsfunktion $p_i = \psi_j(p_j)$ dar. Da für diese Form der Gewinnfunktion die Bedingung zweiter Ordnung sehr umfangreich ist, soll auf ihre Darstellung verzichtet werden. Für die weitere Diskussion ist es zweckmäßig, lineare Nachfrage- und Kostenfunktionen, und damit auch lineare Reaktionsfunktionen ($\psi_j'' = \psi_i'' = 0$), anzunehmen. Die Nachfrage der Firma 1 möge

$$q_1 = a - bp_1 + cp_2, \quad a, b, c > 0 \tag{443}$$

und die der Firma 2

$$q_2 = a - bp_2 + cp_1, \quad a, b, c > 0 \tag{444}$$

sein. Die linearen Kostenfunktionen sind

$$C_1 = kq_1 + C_f \tag{445}$$

und

$$C_2 = kq_2 + C_f. \tag{446}$$

Da beide Unternehmen gleiche Nachfrage- und Kostenstrukturen aufweisen, unterscheiden sich die Gewinnmaximierungsprobleme von Firma 1 und Firma 2 nur durch vertauschte Indizes. Es ist ausreichend, die Optimierung für ein Unternehmen darzustellen und die Ergebnisse analog auf das zweite zu übertragen. Die Gewinnfunktion des Anbieters 1 läßt sich wie folgt

$$\Pi_1 = (a - bp_1 + cp_2)(p_1 - k) - C_f \tag{447}$$

mit den Bedingungen 1. und 2. Ordnung für ein Gewinnmaximum

$$\partial \Pi_1/\partial p_1 = a - 2bp_1 + cp_2 + cp_1\phi_{21} + bk - ck\phi_{21} = 0, \tag{448}$$

$$\partial^2 \Pi_1/\partial p_1^2 = -2b + 2c\phi_{21} < 0 \tag{449}$$

formulieren. Es ist zu beachten, daß in der Bedingung zweiter Ordnung $\phi_{21}' = 0$ zur Anwendung gelangt. Aus der Bedingung 1. Ordnung erhält man die Reaktionsfunktion der Firma 1 von

$$p_1 = \frac{a + bk + c(p_2 - k\phi_{21})}{2b - c\phi_{21}}. \tag{450}$$

Analog dazu ergibt sich aus der Ableitung der Gewinnfunktion der Firma 2 nach ihrem Verkaufspreis p_2 die Reaktionsfunktion

$$p_2 = \frac{a + bk + c(p_1 - k\phi_{12})}{2b - c\phi_{12}}. \tag{451}$$

Da bei symmetrischen konjekturalen Reaktionen $\phi_{21} = \phi_{12} = \phi$ gilt und die Kosten- und Nachfragefunktionen identisch sind, erhält man identische Preise für beide Anbieter von

$$p_1^* = p_2^* = \frac{a + k(b - c\phi)}{2b - c(\phi + 1)}. \tag{452}$$

Die Launhardt-Lösung mit $\phi = 0$ reduziert den Ausdruck (452) zu $p_j^* = (a+bk)/(2b-c)$. Die Reaktionsfunktionen der beiden Firmen können in ein p_1/p_2-Diagramm eingezeichnet werden (vgl. Abbildung 66). Wie man aus (450) und (451) erkennt, haben beide Reaktionsfunktionen positive Steigungen. Ihr Schnittpunkt E repräsentiert bei autonomer Strategie der beiden Konkurrenten ein Gleichgewicht, da die Gewinnmaximierungsbedingungen beider Firmen simultan erfüllt sind und für keine Firma ein Anreiz besteht, ihren Preis zu ändern.

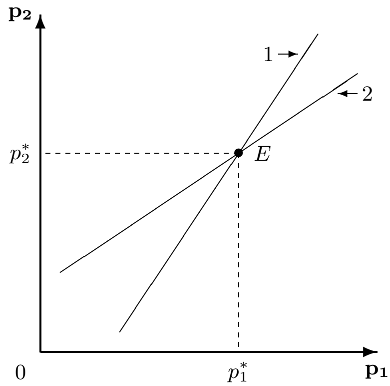


Abb. 66: Launhardt-Gleichgewicht

Es kann leicht gezeigt werden, daß der Grenzfall $\phi = 1$ zu Gleichgewichtspreisen führt, die mit denen im Preiskartell identisch sind. Wenn sich zwei Anbieter in ihren Preissetzungen gleich verhaltenden, so ist es für das Marktergebnis unerheblich, ob imitierende Preissetzungen oder Kartellabsprachen vorliegen. Im Kartellfall ist die gemeinsame Gewinnfunktion

$$\Pi_1 + \Pi_2 = 2(a - bp + cp)(p - k) - 2C_f \tag{453}$$

mit identischen Preisen $p_1 = p_2 = p$ zu maximieren. Als Ergebnis erhalten wir aus der Gewinnmaximierungsbedingung erster Ordnung $d(\Pi_1 + \Pi_2)/dp = 0$ unter Berücksichtigung der Bedingung zweiter Ordnung $c - b < 0$ einen Kartellpreis von

$$p_k^* = \frac{a + k(b-c)}{2(b-c)}, \tag{454}$$

der, – wären keine Konkurrenten am Markt und somit $c = 0$ –, auch mit dem Monopolpreis übereinstimmt.

89. Allgemeines Preisoligopol. Wie schon im Fall des homogenen Oligopols kann das Modell auf mehr als zwei Anbieter erweitert werden. Nimmt man an, daß die Nachfrage, die auf ein Unternehmen entfällt, bei drei Anbietern $q_j = a - bp_j + 2cp_i, \;\; j \neq i$, lautet und alle anderen Annahmen erhalten bleiben, so können die drei Bedingungen 1. Ordnung in Matrixschreibweise wie folgt angegeben werden:

$$\mathbf{A} \;\; \mathbf{P} = \mathbf{B}$$

$$\begin{bmatrix} -2b + 2c\phi & c & c \\ c & -2b + 2c\phi & c \\ c & c & -2b + 2c\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2ck\phi - a - bk \\ 2ck\phi - a - bk \\ 2ck\phi - a - bk \end{bmatrix}.$$

Die Lösung dieses Gleichungssystems ist

$$\mathbf{P}^* = \mathbf{A}^{-1} \;\; \mathbf{B}$$

oder

$$p_1^* = p_2^* = p_3^* = \frac{a + k(b - 2c\phi)}{2b - 2c(\phi + 1)}. \tag{455}$$

Leitet man das Resultat unter den gleichen Bedingungen für vier und mehr Anbieter ab, so zeigt sich, daß das Ergebnis auf n Anbieter verallgemeinert werden kann und

$$p_j^* = \frac{a + k(b - (n-1)c\phi)}{2b - (n-1)c(\phi + 1)} \tag{456}$$

lautet. Es ist leicht vorstellbar, daß unterschiedliche konjekturale Reaktionskoeffizienten und unterschiedliche Kosten- und Nachfragefunktionen, wie man sie bei heterogenen Gütern erwarten darf, zu sehr komplexen und unübersichtlichen Lösungen führen. Aus diesem Grund wurden die Vereinfachungen eingeführt. Alle weiteren Modellvarianten, die im homogenen Oligopol diskutiert werden (Stackelberg-Verhalten, konsistente konjekturale Reaktionen, Kartellbildung), können auf das heterogene Oligopol übertragen werden.

90. Preisführerschaft. Ein Phänomen, das wir immer wieder in oligopolistischen Märkten beobachten können, besteht darin, daß ohne Absprachen oder Kartellbildung sich die Preise der Anbieter im Gleichschritt verändern. Dabei orientieren sich die Preisvariationen von $n-1$ Anbietern an der Preissetzung des n-ten Mitwettbewerbers, des sogenannten Preisführers, der seinerseits eine autonome Preispolitik betreibt. Die Gründe für derartige asymmetrische Verhaltensweisen können zum einen darin liegen, daß der Preisführer über einen sehr großen Marktanteil verfügt und die anderen Anbieter seinen Preis als Datum hinnehmen müssen (dominierende Preisführerschaft) oder aber zum anderen dadurch begründet sein, daß der Preisführer zwar über keinen deutlich größeren Marktanteil verfügt, aber im Kreise seiner Mitwettbewerber als besonders kompetent und gut informiert gilt, so daß sich die anderen Anbieter seinen Preisveränderungen anschließen (barometrische Preisführerschaft). Dieser Fall soll etwas näher betrachtet werden.

Zunächst sollen der Gewinn im Falle des Launhardt-Dyopols ($\phi = 0$) unter der Annahme variabler Durchschnittskosten von $k = 0$ ermittelt und das Ergebnis den Gewinnen bei Preisführerschaft des Unternehmens 1 und Preisfolgerschaft des Unternehmens 2 gegenübergestellt werden. Der Gleichgewichtspreis (452) lautet unter den genannten Bedingungen (Launhardt-Dyopol und $k = 0$):

$$p_1^* = p_2^* = \frac{a}{2b - c} \tag{457}$$

und die Gewinne der beiden Firmen

$$\Pi_1^* = \Pi_2^* = \frac{a^2 b}{(2b - c)^2} - C_f. \tag{458}$$

In Analogie zum Stackelberg-Modell besteht die Strategie des Preisführers nun darin, sich in eine Unabhängigkeitsposition zu begeben, wobei er annimmt, daß das andere Unternehmen eine Abhängigkeitsposition einnimmt und sich wie im Launhardt-Oligopol verhält. Als gut informierter Marktteilnehmer ist dem Preisführer die Reaktionsfunktion

$$p_2 = (a + cp_1)/(2b) \tag{459}$$

seines Konkurrenten bekannt. Bezieht er sie in seine Gewinnfunktion

$$\Pi_1 = (a - bp_1 + cp_2)p_1 - C_f \tag{460}$$

ein, so kann er einen gewinnmaximalen Preis

$$p_1^* = \frac{a(c + 2b)}{4b^2 - 2c^2} \tag{461}$$

erzielen. Unternehmen 2 nimmt diesen Preis als gegeben und berücksichtigt ihn in seiner Reaktionsfunktion, woraus sich ein gewinnmaximaler Preis von

$$p_2^* = \frac{a(4b^2 + 2bc - c^2)}{4b(2b^2 - c^2)} \tag{462}$$

ergibt. Unter Berücksichtigung dieser Preise lauten der Gewinn des Preisführers

$$\Pi_1^* = \frac{a^2(2b + c)^2}{8b(2b^2 - c^2)} - C_f \tag{463}$$

und der Gewinn des Preisfolgers

$$\Pi_2^* = \frac{a^2(4b^2 + 2bc - c^2)^2}{16b(2b^2 - c^2)^2} - C_f. \tag{464}$$

Der Preisführer erzielt folglich einen Gewinn, der um $[a^2c^3(4b+3c)]/[16b(2b^2 -c^2)^2]$ niedriger ist als der Gewinn des Preisfolgers. Da beide Firmen einen höheren Gewinn realisieren können als im Launhardt-Modell, stellt sich die Frage, wer die Rolle des Preisführers übernimmt, um bei seinem Konkurrenten eine höhere Gewinnsteigerung als bei sich selbst zu verursachen. Eine mögliche Antwort kann aus dem vorgestellten Modellrahmen ohne zusätzliche Annahmen nicht gegeben werden.

Man mag am Ende des Kapitels zur Oligopoltheorie die Frage nach der empirischen Relevanz der Ergebnisse aufwerfen. Eine exakte empirische Überprüfung scheitert an der Nichtverfügbarkeit der notwendigen Daten, da im Wettbewerb stehende Firmen wenig Neigung verspüren, einen Einblick in ihre Ergebnisse und Strategien zu gewähren. Auch wenn die internen Daten unabhängigen wissenschaftlichen Institutionen zur Verfügung gestellt würden, bestünde die zwar unbegründete, aber dennoch nicht auszuräumende Befürchtung, daß Konkurrenten Informationen erhalten würden, die diesen einen Vorsprung am Markt ermöglichen könnten. Ein direkter empirischer Test kann in vielen Fällen nicht durchgeführt werden. Betrachtet man jedoch die Tendenz der Modellaussagen, so kann man feststellen, daß diese mit den Beobachtungen der Oligopolmärkte weitgehend übereinstimmen.

5.3 Das heterogene Polypol

91. Definition und Abgrenzung. Die Marktform des heterogenen Polypols (auch: monopolistische Konkurrenz, imperfect competition) zeichnet sich durch zwei Eigenschaften aus: Zum einen treten viele Anbieter am

Markt auf, deren Anzahl größer ist als im Oligopol. Daraus folgt bei Symmetrieannahme (alle Anbieter haben gleich große Marktanteile) $q_j = Q/n, \;\; j = 1, ..., n$, daß jeder Anbieter nicht mit den Reaktionen seiner Mitwettbewerber auf eigene Marktaktivitäten rechnet. Gleichwohl hängt sein Marktergebnis aber von den Verhaltensweisen *aller* Anbieter ab. Zum anderen werden heterogene Güter gehandelt, die in physischer Hinsicht oder in der Wahrnehmung durch die Nachfrager zwar unterschiedlich sind, jedoch in einem Substitutionsverhältnis zueinander stehen und zu einem Bedarfsmarkt zu rechnen sind. Der Unterschied zum Launhardt-Oligopol kann wie folgt beschrieben werden: Bei vielen Konkurrenten im heterogenen Polypol ist der Marktanteil des einzelnen Anbieters zu klein, um Reaktionen hervorzurufen. Sind wenige Konkurrenten im Markt, wie dies im Launhardt-Oligopol angenommen wird, so ist zwar der Marktanteil des einzelnen Anbieters groß genug, um zu Reaktionen zu führen, aber die konjekturalen Reaktionen werden exogen mit Null angenommen. In beiden Fällen ist $\phi = 0$, jedoch aus unterschiedlichen Gründen. Diese Tatsache legt die Vermutung nahe, daß der Gleichgewichtspreis im heterogenen Polypol formal dem des heterogenen Oligopols bei einer großen Anzahl von Anbietern und konjekturalen Reaktionskoeffizienten von Null entspricht. Nimmt man an, daß der Schwellenwert für die Anzahl der Anbieter, von dem an keine konjekturalen Reaktionen in einem Markt gebildet und berücksichtigt werden, $\hat{n}$ sei, so kann der Gleichgewichtspreis in Analogie zu Gleichung (452) gefunden werden:

$$p_j^* = \frac{a + bk}{2b - c(n-1)}, \quad n \geq \hat{n}. \tag{465}$$

Diese Analogie verkürzt jedoch die Überlegungen zum heterogenen Polypol, die von verschiedenen Autoren (u.a. J. Robinson, H. von Stackelberg, F. Machlup) formuliert worden sind. Im folgenden soll die Theorie der monopolistischen Konkurrenz nach dem amerikanischen Ökonomen Edward Hastings Chamberlin dargestellt werden.

92. Annahmen. Der Grundgedanke aller Ansätze besteht in der Überlegung, daß die Marktform der vollkommenen Konkurrenz (homogenes Polypol) die Marktergebnisse in einer Welt differenzierter Güter nur unzureichend erklären kann. Es ist das Bestreben konkurrierender Anbieter, sich durch Produktdifferenzierung dem direkten Wettbewerb zu entziehen. Durch Produktgestaltung werden Güter physisch unterschiedlich gemacht, durch Werbung auch physisch gleichartige Güter unterschiedlich beurteilt und durch Zusatzleistungen (Service, Kundendienst) Unterschiede im Konsum erzeugt. Damit entsteht für jedes Gut ein Teilmarkt, auf dem der Anbieter – innerhalb gewisser, durch die Substitutionsfähigkeit der Güter bedingter Grenzen – eine monopolistische Position einnehmen kann. Aus diesem Sachverhalt leitet sich der zunächst paradox erscheinende Begriff der monopolistischen Konkurrenz ab. Damit ergibt sich aber die Schwierigkeit, allgemeine Aussagen über diese Marktform zu formulieren, da viele unterschiedliche Firmen mit unterschiedlichen Produkten auftreten und im Fall des heterogenen Oligopols – also bei einer vergleichsweise geringen Anbieterzahl – schon mit sehr komplexen Ergebnissen gerechnet werden muß, wenn Kosten- und Nachfragefunktionen verschieden sind. In diesem Falle wären – technisch gesprochen – sowohl die Elemente des **B**-Vektors als auch alle Elemente entlang der Hauptdiagonale und alle c-Elemente in einer Reihe in der **A**-Matrix unterschiedlich (vgl. Gleichung (455)). Als Lösung des Problems bietet sich wiederum die Einführung der Symmetrieannahme an: Auf jede Firma entfällt der gleiche Anteil der Marktnachfrage, und jedes Unternehmen produziert unter den gleichen Kostenbedingungen. Da alle Unternehmen somit annahmegemäß gleich sind, genügt es, ein sogenanntes repräsentatives Unternehmen herauszugreifen, alle Anpassungsprozesse zum Gleichgewicht bei *einem* Unternehmen zu analysieren und auf alle anderen Firmen zu übertragen. Dieser Lösungsweg bringt jedoch wesentliche Einschränkungen mit sich: (1) Die Produktdifferenzierung ist nicht kostenwirksam (unterschiedliche Farben der Güter oder unterschiedliche Werbung zu gleichen Preisen). (2) Die Präferenzen der Konsumenten sind gleichmäßig verteilt, und die Nachfrager mit gleichartigen Präferenzen lassen sich zu gleich großen Gruppen zusammenfassen, deren Anzahl mit der Anzahl der Firmen übereinstimmt. (3) Die Einkommen und der Typ der Nutzenfunktion aller Konsumenten sind identisch. Für die Darstellung der Chamberlin-Variante des heterogenen Polypols ist es weiterhin erforderlich, von U-förmigen Grenz- und Durchschnittskosten auszugehen.

93. Grundmodell. Die zentrale Annahme des Unternehmens j besteht darin, daß keines der anderen Unternehmen auf eigene Preisvariationen reagiert. In der Nachfragefunktion dd, die das Unternehmen den eigenen Handlungen zugrunde legt, schlägt sich dies in der Konstanz der Konkurrenzpreise p_i nieder:

$$q_j = a - bp_j + c \sum_{i=1, i \neq j}^{n} \bar{p}_i. \tag{466}$$

Die Gewinnfunktion der Firma j lautet

$$\Pi_j = \left(a - bp_j + c \sum_{i=1, i \neq j}^{n} \bar{p}_i \right) p_j - C_j(q_j), \tag{467}$$

mit den Bedingungen erster und zweiter Ordnung

$$\frac{d\Pi_j}{dp_j} = a - 2bp_j + c \sum_{i=1, i \neq j}^{n} \bar{p}_i - \frac{dC_j(q_j)}{dq_j} \frac{\partial q_j}{\partial p_j} = 0, \tag{468}$$

mit $\partial q_j / \partial p_j = -b$ und

$$\frac{d^2\Pi_j}{dp_j^2} = -2b - \frac{d^2C_j(q_j)}{dq_j^2} \frac{\partial^2 q_j}{\partial p_j^2} < 0, \tag{469}$$

mit $\partial^2 q_j / \partial p_j^2 = 0$. Wie man leicht sieht, ist die Bedingung 2. Ordnung erfüllt. Aus der Bedingung 1. Ordnung erhält man den gewinnmaximalen Preis von

$$p_j^* = \frac{a + c \sum_{i=1, i \neq j}^{n} \bar{p}_i + b(\partial C_j / \partial q_j)}{2b}. \tag{470}$$

Aus dem Konzept der repräsentativen Firma folgt unmittelbar, daß alle Unternehmen ihren Gewinn nach der Nachfragefunktion (466) maximieren, d.h. alle Unternehmen nehmen an, daß bei eigenen Preisvariationen die Preise aller Konkurrenten konstant bleiben. Dies bedeutet aber, daß die Preise aller Anbieter nicht konstant und aufgrund der Symmetrieannahme auch gleich sind. Die Nachfragefunktion DD der tatsächlich nachgefragten Menge einer Firma lautet also:

$$q_j = a - bp_j + c(n-1)p_j. \tag{471}$$

Ersetzt man in (470) $\bar{p}_i$ folglich durch p_j, so ergibt sich der Gleichgewichtspreis bei monopolistischer Konkurrenz:

$$p_j^* = \frac{a + b(\partial C_j / \partial q_j)}{2b - c(n-1)}. \tag{472}$$

Wie man leicht sieht, ist dieses Ergebnis formal identisch mit dem aus dem Launhardt-Oligopol abgeleiteten Resultat (465) bei vielen Anbietern, deren Anzahl so groß sein mag, daß der Oligopolmarkt in einen Markt der monopolistischen Konkurrenz übergeht. (Es ist zu beachten, daß $\partial C_j / \partial q_j = k$ ist.) Das Auseinanderfallen von erwarteter Nachfrage dd (466) und tatsächlicher Nachfrage DD (471) erzeugt einen Anpassungsprozeß zwischen kurzfristigem und langfristigem Marktgleichgewicht, der sich graphisch verdeutlichen läßt.

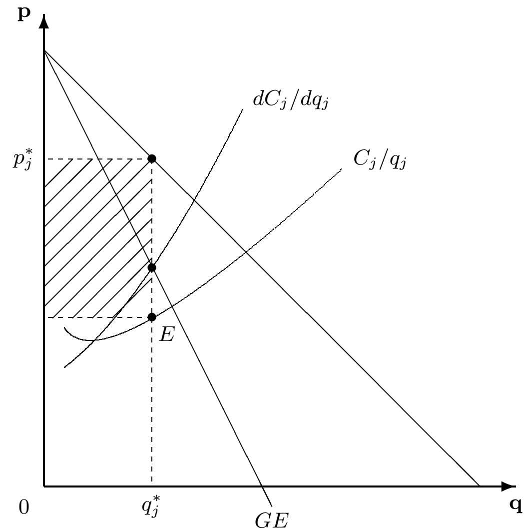


Abb. 67: Kurzfristiges Gleichgewicht

94. Kurzfristiges und langfristiges Gleichgewicht. Betrachtet man zunächst das kurzfristige Gleichgewicht, das sich in seiner graphischen Darstellung nicht vom Monopol-Fall unterscheidet, so wird in Abbildung 67 deutlich, daß die Gleichgewichtsmenge q_j^* und der Gleichgewichtspreis p_j^* sich durch den Schnittpunkt der (kurzfristigen) Grenzkostenkurve $\partial C_j/\partial q_j$ mit der Grenzerlöskurve bestimmen lassen, die aus der tatsächlichen Nachfragekurve DD hervorgehen. Die Differenz zwischen der Nachfragefunktion und den (kurzfristigen) totalen Durchschnittskosten C_j/q_j im Cournot-Punkt E gibt den durchschnittlichen Stückgewinn an, der mit der Menge q_j^* multipliziert die Fläche des Gewinns in der eingezeichneten Höhe verdeutlicht.

Ein positiver Marktlagengewinn der repräsentativen Firma löst Anpassungsprozesse aus, die in ein langfristiges Gleichgewicht münden. Zum einen können Newcomer durch den Gewinn angelockt werden, in den Markt eintreten und den Gewinn auf Null sinken lassen. Zum anderen können Preisvariationen des Anbieters – was zunächst erstaunen mag – zu einem langfristigen Null-Gewinn-Gleichgewicht führen. Beide Prozesse lassen im langfristigen Gleichgewicht die sogenannte Tangentenlösung der monopolistischen Konkurrenz entstehen und gelten nicht nur für die repräsentative Firma, sondern wegen der Symmetrieannahme für alle Teilnehmer auf der Ange-

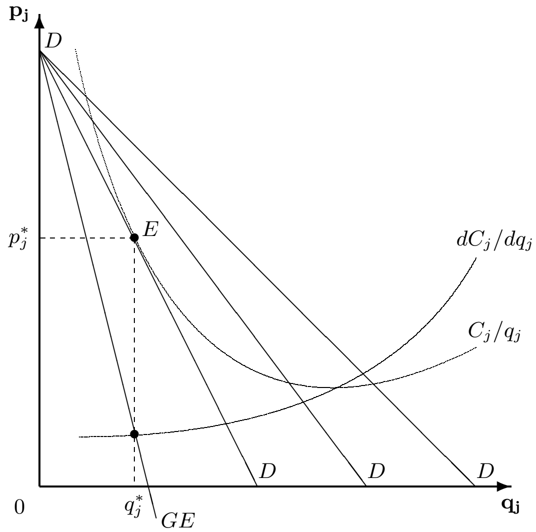


Abb. 68: Langfristiges Gleichgewicht durch Markteintritte

botsseite des Marktes. Im ersten Fall treten neue Anbieter in den Markt ein und reduzieren damit die Nachfrage, die auf eine Firma entfällt. In Abbildung 68 verschiebt sich dadurch die DD-Nachfragekurve nach links, wobei jeder Anbieter während des Anpassungsprozesses versucht, seinen Preis gemäß der Grenzkosten-gleich-Grenzerlös-Bedingung zu setzen. Der Preis sinkt folglich auf den langfristigen Gleichgewichtspreis, der erreicht wird, wenn der Gewinn der Firma (und damit die Gewinne aller Firmen) auf Null gesunken ist. Dieser Punkt ist erreicht, wenn die Nachfragekurve sich so weit verschoben hat, daß sie die Durchschnittskostenkurve tangiert, und im Cournot-Punkt die Differenz (Stückgewinn) zwischen Nachfragefunktion (Durchschnittserlös) und Durchschnittskostenkurve Null wird. Weil der Tangentialpunkt links vom Minimum der Durchschnittskostenkurve liegt, spricht man bei dieser Lösung auch vom Überschußkapazitätentheorem, da bei entsprechend größerer Nachfrage mit der gegebenen Technologie mehr Output zu wirtschaftlicheren Bedingungen produziert werden könnte. Das langfristige Gleichgewicht in Punkt E ist stabil, da für weitere Marktzutritte potentieller Konkurrenten kein Anreiz besteht und Zutritte zu Verlusten bei allen Anbietern führen würden.

Der zweite Anpassungsprozeß wird durch Preisänderungen der repräsentativen Firma hervorgerufen. Es sei angenommen, daß keine Marktzutritte

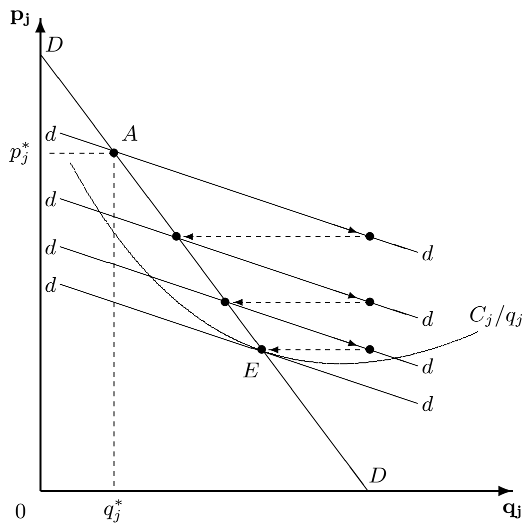


Abb. 69: Langfristiges Gleichgewicht durch Preisvariationen

erfolgen, und somit die Nachfragekurve DD unverändert bleibt. Ferner sei ein kurzfristiges Gleichgewicht mit dem Preis p_j^* in Abbildung 69 gegeben. Da der einzelne Anbieter von der Annahme ausgeht, daß er heterogene Güter auf einem monopolistischen Teilmarkt anbietet, und daher alle anderen Konkurrenten auf eigene Preisänderungen nicht reagieren, erwartet er bei Preisvariationen Mengenänderungen entlang der dd-Nachfragekurve. Senkt er nun seinen Preis entlang der dd-Kurve, die durch den Punkt A des kurzfristigen Gleichgewichts verläuft und eine geringere Steigung aufweist als die tatsächliche Nachfragefunktion, so erwartet er nicht nur eine größere Angebotsmenge, sondern auch einen höheren Gewinn. Da aber alle Anbieter von den gleichen dd-Kurven ausgehen und in der gleichen Weise ihre Preise setzen wie die repräsentative Firma, sinkt der Preis tatsächlich entlang der DD-Kurve. Der angestrebte Gewinn und die erwartete Preis-Mengen-Kombination werden nicht erreicht, und da die Anbieter stationäre Erwartungen haben und keine Lernprozesse angenommen werden, versuchen sie, durch erneute Preissenkungen entlang der neuen dd-Kurve ihren Gewinn zu steigern. Erneut kommt eine Preis-Mengen-Kombination auf der DD-Kurve zustande. Dieser Prozeß setzt sich fort, bis eine dd-Nachfragekurve eine Tangente mit der Durchschnittskostenkurve bildet.

Der Tangentialpunkt E zeichnet sich durch die folgenden Eigenschaften aus: (1) Der Punkt E ist ein stabiles langfristiges Gleichgewicht, da Preissenkungen sowohl entlang der dd-Kurve zu erwarteten als auch entlang der DD-Kurve zu tatsächlichen Verlusten führen. (2) Der (Marktlagen-) Gewinn in Punkt E ist Null, da Durchschnittserlös (=Preis) und Durchschnittskosten identisch sind. (3) Der Übergang vom kurzfristigen zum langfristigen Gleichgewicht wird durch das Gewinnmaximierungsverhalten der Firmen bei nicht korrigierten Erwartungsfehlern hervorgerufen. (Der nicht lernfähige Unternehmer, der seinen Gewinn steigern will und am Ende keinen realisieren kann, tritt uns hier als tragische Figur entgegen.) (4) Die Differenz zwischen dem Tangentialpunkt E und dem Minimum der Durchschnittskostenkurve kann wiederum als Überschußkapazität verstanden werden. (5) Je geringer die physischen oder wahrgenommenen Unterschiede zwischen den Gütern sind, umso schwächer ist die Monopolposition des einzelnen Anbieters, um so flacher verlaufen die Nachfragefunktionen und um so geringer sind die Überschußkapazitäten. Vergleicht man das homogene und das heterogene Polypol miteinander, so wird man feststellen, daß im heterogenen Polypol der Preis höher und die Menge geringer als im homogenen Polypol sind. Ferner treten Überschußkapazitäten auf, die man zusammen mit der geringeren Marktversorgung als „Preis“ der Produktvielfalt und Produktdifferenzierung in modernen Volkswirtschaften verstehen kann. Mit der Diskussion dieser Marktform werden nicht nur die Überlegungen zu den Märkten (Kapitel 4 und 5) abgeschlossen, sondern auch die Darstellung der Grundlagen des mikroökonomischen Denkens überhaupt.

Literaturhinweise zu Kapitel 5:

— Baldani, J./Bradfield, J./Turner, R., *Mathematical Economics*, Fort Worth usw. 1996.

— Fehl, U./Oberender, P., *Grundlagen der Mikroökonomie*, 8. Aufl., München 2002.

— Krelle, W., *Preistheorie, 1. Teil: Monopol- und Oligopoltheorie*, 2. Aufl., Tübingen 1976.

— Ott, A. E., *Grundzüge der Preistheorie*, 3. Aufl., Göttingen 1991.

— Schumann, J./Meyer, U./Ströbele, W., *Grundzüge der mikroökonomischen Theorie*, 7. Aufl., Berlin/Heidelberg 1999.

6 Ausblick

Zu Beginn des Buches wurde darauf hingewiesen, daß wir uns auf die Grundlagen der mikroökonomischen Theorie beschränken. In einem kleinen abschließenden Abschnitt sollen einige Hinweise gegeben werden, in welche Richtungen sich die diskutierten Ansätze prinzipiell erweitern ließen. Dabei ist zu bedenken, daß eine Verfeinerung der Theorie im Sinne eines realitätsnäheren Ansatzes immer auch ein komplexeres Modell hervorbringt, was übrigens nicht erstaunt, da die Realität wirtschaftlichen Handelns – wie menschliches Handeln überhaupt – überaus komplex ist. Verzichtet man auf die Diskussion von Spezialisierungen, wie etwa die Mikroökonomik der Staatstätigkeit, des Bildungswesens, des Gesundheitswesens, der Umwelt, der Institutionen usw., so lassen sich allgemein die Erweiterungsrichtungen mit den drei Schlagwörtern Zeit, Raum und Unsicherheit beschreiben. Zunächst zur Zeit.

Die Zeit kann selbst Gegenstand ökonomischer Wahlhandlungen sein, wie in den Zeitallokationsmodellen zur Erklärung des Arbeitsangebots. Die Zeit kann aber auch das Medium sein, in dem ökonomische Aktivitäten ablaufen. Ein Beispiel dafür ist das dargestellte Cobweb-Theorem, das auf Differenzengleichungen aufgebaut ist, oder das Kapitalangebot des Haushaltes über zwei Perioden. Oft stellt sich die Frage, wie eine Variable, z.B. der Konsum, über die Zeit hinweg optimal zu gestalten sei. Das Interesse richtet sich also nicht nur auf den Anfangs- und Endzustand, sondern auf den Prozeß, der zwischen beiden Zuständen abläuft. Dazu ist es notwendig, die Entwicklung von Variablen in der Zeit zu formulieren. Zukünftige Zustände sind durch einen Zinssatz abzudiskontieren und mit gegenwärtigen vergleichbar zu machen. Es eröffnet sich das weite Feld der dynamischen Konsum-, Produktions- und Marktmodelle, die mit Hilfe der dynamischen Optimierung gelöst werden können, wobei als Beispiele insbesondere die intergenerativen Modelle und Investitionsmodelle zu nennen sind.

Der Raum, als Erdoberfläche verstanden, ist nicht nur, wie in der Immobilienwirtschaft, ökonomisches Gut, sondern auch ein Medium, in dem wirtschaftliche Aktivitäten ablaufen. Fallen Produktions- und Konsumorte auseinander, so entstehen Transportkosten, die Konsum, Produktion und Marktergebnisse beeinflussen können. Für Unternehmen stellt sich die Frage des optimalen Standortes, wenn nicht alle Inputgüter überall gleichermaßen verfügbar und/oder die Konsumenten im Raum verteilt sind. Transportkosten beeinflussen auch die Wohnstandorte der Haushalte, die in ihrem Budget die Fahrtkosten zu Arbeitsstätten und Einkaufsorten berücksichtigen müssen. Die Wettbewerbsintensität in einem Markt wird gedämpft, wenn die Anbieterstandorte im Raum verteilt sind und jeder räumliche Teilmarkt aus einem anderen Teilmarkt heraus nur unter preiserhöhenden Transportkosten beliefert werden kann. So wie im Modell der monopolistischen Konkurrenz durch Produktdifferenzierung monopolistische Teilmärkte entstehen, können sich durch Transportkostenschutz monopolistische, regionale Teilmärkte bilden.

Ein weiterer Aspekt, der in der Realität wirtschaftlichen Handelns von Bedeutung ist, hier jedoch nicht behandelt wurde, ist die Unsicherheit. Investitionen in Produktionsanlagen müssen getätigt werden, bevor die Nachfrage für das Produkt bekannt ist. Die Wahl einer Ausbildung wird getroffen, bevor bekannt ist, ob später Arbeitsplätze verfügbar sein werden. Finden ökonomische Ereignisse in der Zukunft oder an entfernten Orten statt, so sind nicht alle Informationen vorhanden, um das Eintreten des Ereignisses mit Sicherheit vorhersagen zu können. Daraus folgt, daß die in dem Buch diskutierten deterministischen Ansätze in stochastische Modelle überführt werden müssen. Dies impliziert eine konsequente Anwendung der Erwartungsbildung auf Zielgleichungen und Nebenbedingungen und ein Hinzufügen von Störvariablen, die statistisch unabhängig von allen anderen Größen des Modells sein sollen. Dem aufmerksamen Leser wird nicht entgangen sein, daß Erwartungsbildung im Cobweb-Theorem, in der Oligopoltheorie und in der monopolistischen Konkurrenz eine Rolle spielt, wobei - wie in Lehrbüchern üblich - die Modelle ausdrücklich als stochastische Modelle formuliert sind. Neben die spezielle Möglichkeit, aus derartigen stochastischen Ansätzen die Existenz von Versicherungen (und zum Teil auch Banken) erklären zu können, tritt die Möglichkeit, sogenannte Risikoprämien als Differenzen zu den Ergebnissen deterministischer Modelle ableiten zu können.

Neben den beiden Zielen, die in der Einleitung des Buches genannt sind, hätte diese kurze Darstellung der Mikroökonomik ihre Aufgabe erfüllt, wenn sie den Leser anregt, mehr über mikroökonomische Fragen erfahren zu wollen, nachzudenken und nachzulesen. Diesem Zweck dient das sich anschließende Literaturverzeichnis, das keineswegs den Anspruch auf Vollständigkeit erhebt. Insbesondere ältere Titel, deren Qualität aber unbestritten ist, sind nicht aufgenommen worden, da sich sowohl in Buchhandel als auch Bibliotheken das Problem der Nichtverfügbarkeit ergibt. Das Verzeichnis ist gegliedert nach allgemeinen Darstellungen, Spezialgebieten und mathematischen Abhandlungen. Bei der Durchsicht der allgemeinen Literaturhinweise wird der Leser feststellen, daß die Bücher sich in Schwerpunktsetzung und Darstellungsform unterscheiden, auch ist die Abfolge der Gebiete oft unterschiedlich. Bei aller Unterschiedlichkeit mag für ihn tröstlich sein, daß die Schnittmenge des Stoffes aller Bücher recht groß ist und auf einen weiten, internationalen Konsens hinsichtlich der Frage hindeutet, was Mikroökonomik heute sein soll.

Literaturhinweise

Allgemeine Darstellungen

Alhadeff, D. A., *Microeconomics and Human Behavior*, University of California Press, Berkeley usw. 1982.

Asimakopulos, A., *Microeconomics*, Oxford University Press, Oxford usw. 1978.

Awh, R. Y., *Microeconomics*, John Wiley & Sons, Santa Barbara usw. 1976.

Binger, B.R./Hoffman, E., *Microeconomics with Calculus*, Scott, Foresman & Co. Glenview, London 1988.

Böventer, von, E., /Illing, R.-G., *Einführung in die Mikroökonomie*, 9. Aufl., Oldenbourg Verlag, München, Wien 1997.

Bradley, M., *Microeconomics*, 2. Aufl., Scott, Foresman & Co., Glenview usw. 1983.

Brandt, K./Engelkamp, P./Halbweiss, W./Tristam, K. J., *Grundzüge der Mikroökonomie*, 3. Aufl., Rudolf Haufe Verlag, Freiburg i. B. 1993.

Browning, E. K./Zupan, M.A., *Microeconomics: Theory and Applications*, 8. Aufl., John Wiley & Sons, NEw York usw. 2004.

Calvo, P./Waugh, G., *Microeconomics: An Introductory Text*, McGraw-Hill, Sydney usw. 1977.

Champsauer, P./Milleron, J.-C., *Advanced Exercises in Microeconomics*, Harvard University Press, Cambridge, Mass. 1983.

Clarke, R., *Applied Microeconomic Problems*, Philip Allan, Oxford 1985.

Cowell, F. A., *Microeconomic Principles*, Philip Allan, Oxford 1986.

DeSerpa, A. C., *Microeconomic Theory*, 2. Aufl., Allyn and Bacon, Boston usw. 1985.

Dieckheuer, G. (Hrsg.), *Beiträge zur angewandten Mikroökonomik*, Springer-Verlag, Berlin usw. 1995.

Dobson, S./Maddala, G. S./Miller, E., *Microeconomics*, McGraw-Hill, New York usw. 1995.

Dolan, E. G./Lindsey, D. E., *Microeconomics*, 5. Aufl., Dryden Press, Chicago usw. 1988.

Eaton, B. C./Eaton, D. F., *Microeconomics*, 5. Aufl., Prentice-Hall, London usw. 2001.

Else, P./Cruwen, P., *Principles of Microeconomics*, Unwin Hyman, London 1990.

Fehl, U./Oberender, P., *Grundlagen der Mikroökonomie*, 8. Aufl., Verlag Vahlen, München 2002.

Frank, R., *Microeconomics and Behavior*, 4. Aufl., McGraw-Hill, New York usw. 1999.

Franke, J., *Grundzüge der Mikroökonomik*, 8. Aufl. Oldenbourg Verlag, München, Wien 1996.

Garb, G., *Microeconomics: Theory, Applications, Innovations*, Macmillan Pub., New York 1981.

Glahe, F. R./Lee, D. R., *Microeconomics*, 2. Aufl., Harcourt Brace Jovanovich, New York usw. 1989.

Gravelle, H./Rees, R., *Microeconomics*, 2. Aufl., Longman, London, New York 1992.

Grinols, E. L., *Microeconomics*, Houghton Mifflin, 1994.

Güth, W., *Markt- und Preistheorie*, 2. Aufl., Springer-Verlag, Berlin usw. 1994.

Gwartney, J. D./Stroup, R./Sobel, R. S., *Microeconomics: Private and Public Choice*, 4. Aufl., Dryden Press, Chicago, 2000.

Helmstädter, E., *Wirtschaftstheorie*, Bd. I: Mikroökonomische Theorie, 4. Aufl., Verlag Vahlen, München 1991.

Henderson, J. M./Quandt, R. E., *Mikroökonomische Theorie*, 5. Aufl., Verlag Vahlen, München 1983.

Herberg, H., *Preistheorie*, 3. Aufl., Kohlhammer Verlag, Stuttgart 1994.

Herdzina, K., *Einführung in die Mikroökonomik*, 8. Aufl., Verlag Vahlen, München 2002.

Hoyer, W./Rettig, R./Rothe, K.-D., *Grundlagen der mikroökonomischen Theorie*, 3. Aufl., Werner Verlag, Düsseldorf 1993.

Hyman, D. N., *Modern Microeconomics*, 3. Aufl., McGraw-Hill, New York usw. 1992.

Kaish, S., *Microeconomics*, Harper & Row, New York usw. 1976.

Kamerschen, D. R./Valentine, L. M., *Intermediate Microeconomic Theory*, South-Western Pub., Cincinnati 1977.

Kogiku, K. C., *Microeconomic Models*, Harper & Row, New York usw. 1971.

Koutsoyiannis, A., *Modern Microeconomics*, 2. Aufl., Macmillan Press, London usw. 1979.

Koutsoyiannis, A., *Non-Price Decisions*, Macmillan Press, London usw. 1982.

Krelle, W., *Preistheorie*, 1. Aufl., Mohr-Siebeck und Polygraphischer Verlag, Tübingen und Zürich 1961.

Krelle, W., *Preistheorie*, 1. Teil Monopol- und Oligopoltheorie, 2. Aufl., Mohr-Siebeck, Tübingen 1976.

Krelle, W., *Preistheorie*, 2. Teil Theorie des Polypols usw., 2. Aufl., Mohr-Siebeck, Tübingen 1976.

Krelle, W., *Produktionstheorie*, 2. Aufl., Mohr-Siebeck, Tübingen 1969.

Kreps, D. M., *A Course in Microeconomic Theory*, Harvester Wheatsheaf, New York usw. 1990.

Lancaster, K., *Moderne Mikroökonomie*, 4. Aufl., Campus Verlag, Frankfurt, New York 1991.

Layard, P. R. G./Walters, A. A., *Microeconomic Theory*, McGraw-Hill, New York usw. 1987.

LeRoy Miller, R./Meiners, R., *Intermediate Microeconomics*, 3. Aufl., McGraw-Hill, New York usw. 1986.

Linde, R., *Einführung in die Mikroökonomie*, 3. Aufl., Kohlhammer, Stuttgart 1996.

Luenberger, D., *Microeconomic Theory*, McGraw-Hill, New York usw. 1995.

Malinvaud, E., *Lectures on Microeconomic Theory*, North-Holland, Amsterdam 1972.

Mansfield, E., *Microeconomics*, 9. Aufl., W. W. Norton, New York, London 1997.

Mas-Colell, A./Whinston, M. D./Green, J., *Microeconomic Theory*, Oxford University Press, New York 1995.

Miller/Fische, *Microeconomics: Price Theory in Practice*, Harper Collins, New York 1995.

Neumann, M., *Theoretische Volkswirtschaftslehre II: Produktion, Nachfrage und Allokation*, 4. Aufl., Verlag Vahlen, München 1995.

Nevin, E., *An Introduction to Micro-Economics*, Croom Helm, London 1973.

Nicholson, W., *Intermediate Microeconomics and its Application*, 6. Aufl., The Dryden Press Harcourt Brace College Publishers, Fort Worth usw. 1994.

Nicholson, W., *Microeconomic Theory: Basic Principles and Extensions*, 8. Aufl., The Dryden Press Harcourt Brace College Publishers, Fort Worth usw. 2001.

Ormiston, M. B., *Intermediate Microeconomics*, The Dryden Press Harcourt Brace College Publishers, Fort Worth usw. 1993.

Otani, Y./El-Hodiri, M., *Microeconomic Theory*, Springer-Verlag, Berlin usw. 1987.

Ott, A. E., *Grundzüge der Preistheorie*, 3. Aufl., Vandenhoeck u. Ruprecht, Göttingen 1991.

Pashigian, P., *Price Theory and Applications*, McGraw-Hill, New York usw. 1995.

Pfingsten, A., *Mikroökonomik*, Springer-Verlag, Berlin usw. 1989.

Pindyck, R. S./Rubinfeld, D. L., *Mikroökonomie*, Pearson Studium, München usw. 2003.

Quirk, J. P., *Intermediate Microeconomics*, 3. Aufl., Macmillan USA, New York usw. 1987.

Reiß, W., *Mikroökonomische Theorie: Historisch fundierte Einführung*, 5. Aufl., Oldenbourg Verlag, München, Wien 1998.

Roehner, B. M., *Theory of Markets: Trade and Space-Time Patterns of Price Fluctuations*, Springer-Verlag, Berlin usw. 1995.

Ruffin, R. J./Gregory, P. R., *Principles of Microeconomics*, Scott, Foresman & Co., Glenview usw. 1983.

Russell, R. R./Wilkinson, M., *Microeconomics*, John Wiley & Sons, New York usw. 1979.

Salvatore, D., *Microeconomic Theory*, 3. Aufl. (Schaum's Outline Series), McGraw-Hill, New York usw. 1991.

Schneider, H., *Mikroökonomie*, 5. Aufl., Verlag Vahlen, München 1995.

Schumann, J./Meyer, U./Ströbele, W., *Grundzüge der mikroökonomischen Theorie*, 7. Aufl., Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg 1999.

Sexton, R. L., *Microeconomics*, Prentice-Hall, London usw. 1995.

Shone, R., *Microeconomics: A Modern Treatment*, Macmillan Press, London usw. 1975.

Silberberg, E., *Principles of Microeconomics*, Prentice-Hall, London usw. 1995.

Solmon, L. C., *Microeconomics*, Addison-Wesley Pub., Reading, Mass. usw. 1977.

Stobbe, A., *Mikroökonomik*, 2. Aufl., Springer-Verlag, Berlin usw., 1991.

Theil, H., *The System-Wide Approach to Microeconomics*, Basil Blackwell, Oxford 1980.

Townsend, H. (Hrsg.), *Price Theory*, Penguin, Harmondsworth 1973.

Varian, H. R., *Grundzüge der Mikroökonomik*, 5. Aufl., Oldenbourg Verlag, München, Wien 2001.

Varian, H. R., *Mikroökonomie*, 3. Aufl., Oldenbourg Verlag, München, Wien 1994.

Wagner, A., *Mikroökonomik*, 4. Aufl., Lucius & Lucius, Stuttgart 1997.

Waud, R. N., *Microeconomics*, 4. Aufl., Harper & Row, New York 1989.

Wied-Nebbeling, S./Schott, H., *Grundlagen der Mikroökonomik*, 2. Aufl., Springer-Verlag, Berlin usw. 2001.

Wilson, H. J., *Microeconomics: Concepts and Applications*, Harper & Row, New York 1981.

Zamagni, S., *Microeconomic Theory*, Basil Blackwell, Oxford 1987.

Spezielle Darstellungen

Albrecht, A./Holler, M., *Mikroökonomie: Das sozialökonomische Optimum*, Verlag Moderne Industrie, München 1978.

Archibald, G. C. (Hrsg.), *The Theory of the Firm*, Penguin, Harmondsworth 1973.

Barreto, H., *The Entrepreneur in Microeconomic Theory*, Routledge, London, New York 1989.

Debreu, G., *Werttheorie*, Springer-Verlag, Berlin usw. 1976.

Eichberger, J., *Game Theory for Economists*, Academic Press, Orlando, Fl. 1993.

Hey, J. D., *Uncertainty in Microeconomics*, Martin Robertson, Oxford 1979.

Kaufer, E., *Industrieökonomik: Eine Einführung in die Wettbewerbstheorie*, Verlag Vahlen, München 1980.

Kuenne, R. E., *The Economics of Oligopolistic Competition: Price and Nonprice Rivalry*, Blackwell Publishers, Cambridge, Mass. 1992.

Mishan, E. J., *Introduction to Normative Economics*, Oxford University Press, Oxford 1981.

Nath, K. S., *A Reappraisal of Welfare Economics*, Routledge and Kegan Paul, London 1969.

Ohta, H., *Spatial Price Theory of Imperfect Competition*, Texas A & M University Press, College Station, Tex. 1988.

Rowley, C. K./Peacock, A. T., *Welfare Economics*, Martin Robertson, London 1977.

Sawyer, M. C., *Theories of the Firm*, Weidenfeld and Nicolson, London 1979.

Wied-Nebbeling, S., *Preistheorie und Industrieökonomik*, 4. Aufl., Springer-Verlag, Berlin usw. 2004.

Mathematische Darstellungen

Baldani, J./Bradfield, J./Turner, R., *Mathematical Economics*, The Dryden Press, Fort Worth usw. 1996.

Chiang, A., *Elements of Dynamic Optimization*, McGraw-Hill, New York usw. 1992.

Chiang, A., *Fundamental Methods of Mathematical Economics*, 3. Aufl., McGraw-Hill, New York usw. 1984.

Dixit, A. K., *Optimization in Economic Theory*, 2. Aufl., Oxford University Press, Oxford 1991.

Dowling, E., *Mathematical Economics*, 2. Aufl. (Schaum's Outline Series), McGraw-Hill, New York usw. 1992.

Dowling, E., *Mathematical Methods for Business and Economics*, (Schaum's Outline Series), McGraw-Hill, New York usw. 1993.

Intriligator, M., *Mathematical Optimization and Economic Theory*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs 1971.

Koo, D., *Elements of Optimization*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg 1977.

Kneis, G., *Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler*, Oldenbourg, München, Wien 2000.

McKenna, C. J./Rees, R., *Economics: A Mathematical Introduction*, Oxford University Press, Oxford 1992.

Novshek, W., *Mathematics for Economists*, Academic Press, Orlando, Fl. 1993.

Takayama, A., *Mathematical Economics*, 2. Aufl., Cambridge University Press, Cambridge usw. 1985.

Index

Abhängigkeitsposition, 228–230
Abstimmungsparadoxon, 9
Amoroso-Robinson-Relation, 206, 209
Angebotsüberschuß, 143, 144
Arbeitsangebot, 7, 62–69
Arbeitszeit, **59–64,** 66, 68

Bedarf, 5
Bedürfnisse, 2, 22, 59, 123, 152
Budget, 250
  -gerade, 24, 47, 72
  -gleichung, 23, 158
  -linie, 71, 95, 96
  -restriktion, 25, 36, 40, 41, 72, 135, 185
  Kostenbudget, 92, 93, 95–97
  Zeitbudget, 69

Cobweb-Theorem, **148–152,** 249, 250

Durchschnittsertragskurve, 91
Durchschnittsproduktivität, 76, 77, 84, 88
Dyopol, 214, 218, 230–232
  Cournot-, **214–218,** 229
  Mengen-, 224, 225, 234
  Preis-, 235–237
  Stackelberg-, 228–229

Edgeworth-Box, 160–162, 165, 166, 168, 170, 173, 182, 192
Einkommen, 23–25, **36–41,** 42, 45, **47–50,** 53–55, **59–61,** 65, 69, 71, 73, 74, 125, 134, 138, 157, 158, 177, 178, 184, 185, 188, 191, 242
  -seffekt, 40, 42, 47–49, 55, 57, 58, 63, 64
  -skonsumlinie, 25
  -srestriktion, 25, 62, 64, 134
Elastizität, 44, 118
  Einkommens-, 45
  Kreuzpreis-, 45
  Preis-, 44–46
  Produktions-, 77, 81, 83–85, 87, 102, 137, 138, 140, 141, 169–171
  Skalen-, 81, 83
  Substitutions-, 79, 85–88, 130
Engel-Kurve, 39–41, 57
Erlös, 3, 110, 113, 117, 132, 184, 199–201
Erstausstattung, 157–159, 161, 186
Erwartungen, 115, 228
  adaptive, 152
  rationale, 152
  stationäre, 152, 246
  statische, 149, 150, 152
externe Effekte, 74, **152–155,** 157
  pekuniäre, 152
  physische, 152

Faktorangebot, 62–74, 184, 185

Faktornachfrage, 109, 118, 119, 185
Freizeit, 7, **59–64,** 69

Gewinn, 83, 102, 110, 111, 113, 114, 117, 119, 120, 125, 126, 128, 129, 132, 133, **139–141,** 152, 178, 184, **200–203,** 209, 211–213, 217, 218, **229–231,** 235, **243–246,** 247
  -gleichung, 111, 112, 131
  Marktlagen-, 139, 140, 211, 244, 247
  Normal-, 139, 140
Gewinnmaximierungshypothese, 110, 121, 129, 209
Giffen-Fall, 41, 50
Gleichgewicht, 122, 126, 131, 132, **135–144,** 150, 152, 156, 158–160, 173, 174, 182–184, 186, 196, 197, 242, 244–247
  partielles, 25, 37, 123
  totales, 1, 156, 157, 183
Grenzertragskurve, 91
Grenzkosten-gleich-Grenzerlös-Regel, 113, 115, 128, 135, 200, 201, 210, 245
Grenzkosten-gleich-Preis-Regel, 113, 128, 135, 210, 212
Grenzproduktivität, 76–78, 83–85, 87, 92, 94, 110, **117–122,** 167
  -stheorie, 118, 121, 177
Grenzrate
  der Substitution, **19–22,** 37, 61, 70, 164, 173, 178, 181, 182, 192, 193, 196
  der technischen Substitution, **78, 79,** 84, 85, 87, 94, 166–168, 170, 173, 177, 182, 196
  der Transformation, 171, 173, 176, 181, 182, 193, 196
  der Zeitpräferenz, 70
Grenzwertprodukt, 119–122, 177
  brutto, 121
Güter, 3, 5–7
  öffentliche, 6
  bündel, 7–9, 71
  freie, 5, 6
  knappe, 5, 6
  private, 6
Güterangebotsfunktion, 113

Haushaltsoptimum, 24, 36, 158

Indifferenzkurve, **18–25,** 39, 40, 41, 47–50, 53, 54, 60, 62, 64, 70–72, 91, 159, 161, 162, 172, 173, 176, 178, 179, 182, 192, 194–196
Input, 75–78, 80, 81, 83, 84, 88, 89, 92, 93, 102, 111, 116, 117, 139, 153, 170, 171, 173, 177, 250
  -koeffizient, 88, 89
  -kombination, 78
  -regel, 111, 116, 118, 121, 177
Isogewinnlinien, 232
Isoquante, **77–79,** 81, 83, 86, 88, 89, 95, 96, 157, 165–168, 173, 182

Kammlinien, 78, 216
Kapitalangebot, 69, 72–74, 249
Kartell, 231, 234, 238

Konkurrenz
monopolistische, 3, 199, 240–244, 250
polypolistische, 112
potentielle, 211
vollkommene, 3, 130, 135, 136, 157, 199, 212, 241
Konsumentenrente, 144
Kontraktkurve, 162, 164, 166, 168, 171, 192
Kosten
Kosten
-funktion, S-förmige, 108
-funktion, kurzfristige, 104–106, 135
-funktion, langfristige, 103, 105, 112
Durchschnitts-, 93, 103, 105, 107–109, 113, 128, 132, 140, 141, 212, 230, 242, 244–247
Fix-, 105, 108, 113, 132, 200–203, 218, 228, 230
Grenz-, 103, 105, 107–109, 112, 113, 115, 128, 132, 135, 137, 138, 140, 141, 152, 156, 197, 201, 203, 209–212, 224, 230, 232
Stück, 108
Stück-, 93
Kreuzpreisnachfrage, 38–40

Lohnsatz, 60, 62–67, 101, 177

Marktabgrenzung, 129
Marktformenschema, 125, 126, 129
Monopol, 3, 110, **114–118,** 120, 122, 126–128, 130, **199–212,** 217, 218, 224, 232, 244, 247
Monopson, 116, 118, 120, 126

Nachfrageüberschuß, 142–144
neoklassisches Paradigma, 2
Nichtausschließbarkeit, 6
Nichtrivalität, 6
Nutzenfunktion, 3, **17–22,** 36, 37, 41–43, 45, 54, 55, 59, 60, 66, 73, 76, 125, 132–134, 153, 157–159, 163, 173, 176, 178, 189, 191, 242
indirekte, 55
Nutzenmöglichkeitenkurve, 193
Nutzentheorie, 8, 22
kardinale, 22
ordinale, 22

Oligopol, 111, 115, 116, 126–128, 130, 199, 203–205, 213, 214
Cournot-, **223–224,** 226, 228, 230, 235
Launhardt-, 235
Mengen-, 214, 226, 227
Preis-, 214, 238
Stackelberg-, 214, 228
Outputregel, **111–115,** 200

Pareto-Optimum, **162–164,** 168, 179, 182, 190, 195
Peak-Load-Pricing, 208, 209
Polypol, 118–122, 126–128, **131–138,** 199, 210, 211, 230, 240–242, 246, 247
Preisdiskriminierung, 124, 199, 204–210
Preiskonsumlinie, 25

Produktionsfaktor, 76, 79, 80, 83, 84, 89–91, 102, 104–106, 116, 117, 119, 120, 122, 133, 137, 139, 153, 157, 174, 177, 178, 183, 184, 192, 196
Produktionsfunktion, 3, **75–79,** 84, 92–94, 103, 104, 108, 109, 111, 112, 116, 122, 132, 135, 153, 154, 157, 169, 173
    CES-, 86, 88
    Cobb-Douglas-, **84–86,** 97, 101, 103, 105, 114, 119
    ertragsgesetzliche, 89–92, 108, 119
    heterogene, 142
    homogene, 80, 81, 169, 171, 178
    Leontief-, 88, 89
Produktionsgleichgewicht, 164, 166–168
Produzentenrente, 145

Reaktion
    konjekturale, 128, 214, 215, 223–225, 227, 228, 233, 235–238, 241
    konsistente konjekturale, 230, 231, 238
Reaktionsfunktion, 215–217, 225, 226, 228–231, 233, 234, 236, 237

Reiner Tausch, 158, 162, 164, 167

Slutzky–Gleichung, 50, 55–57, 67
Substitutionseffekt, 40, 42, 47–50, 55–58, 63–65, 67
Symmetrieannahme, 125, 126, 227, 241–244

Tauschgleichgewicht, 159, 162, 165, 178, 179, 192
Transformationskurve, 168, 169, 171–173, 176, 178, 179, 182, 192–194

Überschußkapazitätentheorem, 245
Unabhängigkeitsposition, 228–231, 233, 234

Wohlfahrtkriterium
    Bentham-, 188
    Bruttosozialprodukt-, 188
    Kaldor-Hicks-, 190, 191
    Kardinalisten-, 188, 189
    Maximin-, 189
    Pareto-, 190, 195, 196
Wohlfahrtsfunktion, 186–188, 191, 194, 196

Zeitallokation, 59, 249

Dieses Buch umfaßt die Darstellung der traditionellen und modernen mikroökonomischen Theorie; es enthält Modelle der grundlegenden ökonomischen Einheiten: Konsumenten, Produzenten und Märkte. Besondere Aufmerksamkeit wird dabei dem Oligopol zuteil, der typischen Marktform der modernen industriellen Welt. Ferner enthält das Buch Abschnitte zur Allgemeinen Gleichgewichtstheorie und zur Wohlfahrtstheorie.

ISBN 978-3-86956-162-2