

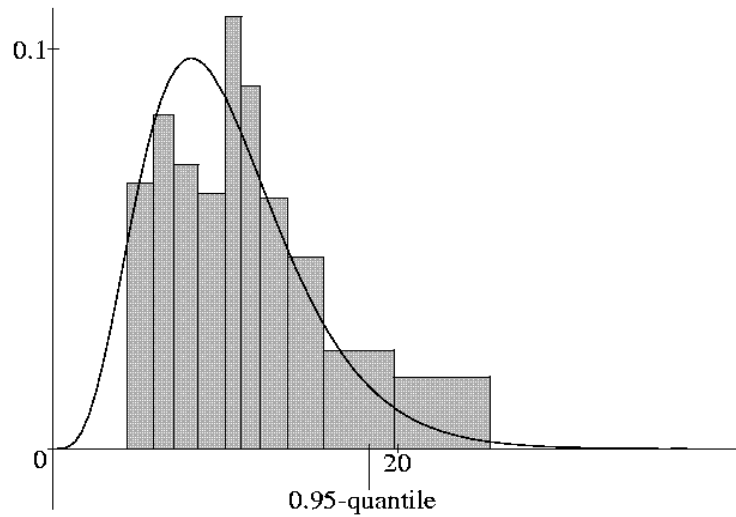


# UNIVERSITÄT POTSDAM

## Institut für Mathematik

### Harness-Prozesse

Diplomarbeit  
von  
Carola Regine Voss



Mathematische Statistik und  
Wahrscheinlichkeitstheorie

**Universität Potsdam – Institut für Mathematik**

Mathematische Statistik und Wahrscheinlichkeitstheorie

## Harness-Prozesse

Carola Regine Voss  
Institut für Mathematik der Humboldt-Universität zu Berlin

Preprint 2010/13

November 2010

## **Impressum**

**© Institut für Mathematik Potsdam, November 2010**

Herausgeber: Mathematische Statistik und Wahrscheinlichkeitstheorie  
am Institut für Mathematik

Adresse: Universität Potsdam  
Am Neuen Palais 10  
14469 Potsdam

Telefon: +49-331-977 1500

Fax: +49-331-977 1578

E-mail: [neisse@math.uni-potsdam.de](mailto:neisse@math.uni-potsdam.de)

ISSN 1613-3307

Humboldt-Universität zu Berlin  
Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät II

Institut für Mathematik



## **Harness-Prozesse**

Diplomarbeit

eingereicht von: Carola Regine Voss  
geb.: am 05.06.1984 in Uelzen  
Betreuer: Prof. Dr. Peter Imkeller  
2. Gutachter: Prof. Dr. Sylvie Roelly  
Berlin, den 8. September 2010

## ZUSAMMENFASSUNG

Harness-Prozesse finden in der Forschung immer mehr Anwendung. Vor allem gewinnen Harness-Prozesse in stetiger Zeit an Bedeutung. Grundlegende Literatur zu diesem Thema ist allerdings wenig vorhanden. In der vorliegenden Arbeit wird die vorhandene Grundlagenliteratur zu Harness-Prozessen in diskreter und stetiger Zeit aufgearbeitet und Beweise ausgeführt, die bisher nur skizziert waren. Ziel dessen ist die Existenz einer Zerlegung von Harness-Prozessen über  $\mathbb{Z}$  beziehungsweise  $\mathbb{R}^+$  nachzuweisen.

## ABSTRACT

Harness processes apply more and more in research. Particularly harness processes in continuous time gain in importance. However basic literature on this subject is scarce. In the present work we will process the existing basic literature on harness processes in discrete and continuous time and complete proofs which have only been sketched so far. The objective being to verify the existence of a decomposition of harness processes over  $\mathbb{Z}$  respectively  $\mathbb{R}^+$ .

## DANKSAGUNG

Während des Erstellens dieser Arbeit haben mich viele Menschen unterstützt und mit Aufmunterung beigestanden. Dafür bin ich ihnen sehr dankbar. Die gute Betreuung von Herrn Prof. Dr. Peter Imkeller und vor allem seine anregenden Fragen veranlassten mich dazu über meine eigenen Ideen hinaus zu denken und mich tiefer in das Thema Harness-Prozesse vorzuwagen. Frau Prof. Dr. Sylvie Roelly danke ich herzlich für die Geduld mit der Sie das Manuskript von D. Williams aufgespürt und damit diese Arbeit überhaupt erst möglich gemacht hat. Außerdem danke ich ihr für ihre engagierte Hilfe und Anleitung. Besonderer Dank geht an Saskia Becker und Chum Chum, dass sie mich immer wieder daran erinnern haben wieviel Spaß Mathematik machen kann. Sandra Gerber hat mir durch ihre konstruktiven Anmerkungen zu meiner Arbeit geholfen, aber vor allem durch ihre Freundschaft meine Studienzeit sehr bereichert. Meiner ganzen Familie danke ich dafür, dass sie mir dieses Studium ermöglicht haben und immer für mich da sind.



# INHALTSVERZEICHNIS

<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>1 Grundlagen</b>	<b>3</b>
<b>2 Harness-Prozesse in diskreter Zeit</b>	<b>9</b>
2.1 Harness-Prozesse über $Z$ . . . . .	9
2.2 Differenzenharness-Prozesse . . . . .	21
<b>3 Harness-Prozesse in stetiger Zeit</b>	<b>23</b>
3.1 Definition und Beispiele . . . . .	23
3.2 Der zu $Y$ assoziierte Prozesse . . . . .	29
3.3 Quadratische Variationen . . . . .	33
3.3.1 Die quadratische Variation des zu $Y$ assoziierten Prozesses	33
3.3.2 Umkehrung der Zeit . . . . .	36
3.4 Zerlegung von Harness-Prozessen in stetiger Zeit . . . . .	40
<b>4 Ausblick: Harness-Prozesse über den reellen Zahlen</b>	<b>44</b>
4.1 Ansatz 1: Affiner Prozess . . . . .	44
4.2 Ansatz 2: Brownsche Bewegung mit Drift . . . . .	46
4.3 Ansatz 3: Ornstein-Uhlenbeck Prozess . . . . .	48
<b>5 Fazit</b>	<b>50</b>
<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>52</b>
<b>Symbolverzeichnis</b>	<b>55</b>





## EINLEITUNG

Nach ihrer Einführung durch J.M. Hammersley fanden Harness-Prozesse als "isotrope Analogie der Martingaleigenschaft" in den achtziger Jahren wachsende Aufmerksamkeit in der mathematischen Forschung [26, 10]. Seit 2004 stoßen sie durch ihre enge Beziehung zu Martingalen und Lévy-Prozessen [6, 3] und Anwendungen in der Strukturanalyse von Metallen [11, 12] auf immer größer werdendes Interesse. Perspektivisch zeichnet sich darüber hinaus eine zunehmende Bedeutung für die Finanzmathematik ab, wo man für einige stochastische Prozesse durch die Erweiterung der betrachteten Filtrationen ("Enlargement of filtrations") die Harness-Eigenschaft erhält [16, 20].

In seinem Paper von 1966 hat J.M. Hammersley [15] für ein mathematisches Modell von metallischen Strukturen den Begriff "Harness-Prozess" vorgeschlagen. Die Atome in Metallen sind auf regelmäßigen Gittern angeordnet. Allerdings besteht ein Klumpen Metall nicht aus genau einem regelmäßigen Gitter von Atomen, sondern aus vielen Klümpchen, die aus solchen Gittern bestehen. Die Atomgitter der einzelnen Klümpchen stehen zueinander verdreht. Jedem Gitter wird nun durch Wahl eines Koordinatensystems eine Orientierung zugeordnet. Von einem zum nächsten Gitter kann dann die Abweichung als Winkel beschrieben werden. J.M. Hammersley sollte diese Abweichung der Gitter zueinander modellieren.

Durch Beobachtungen wurde festgestellt, dass die Abweichung von einem zum nächsten Gitter von derselben Größenordnung ist, wie von zwei beliebigen Gittern zueinander. Diese Erkenntnis wurde von J.M. Hammersley folgendermaßen umgesetzt:

Er fixierte ein Gitter  $G_0$  und legte dessen Orientierung durch das Standard-Koordinatensystem  $(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)$  fest. Da ein Klumpen Metall ein dreidimensionales Objekt ist und die Menge der Gitter abzählbar, kann die Indexmenge durch  $\mathbb{Z}^3$  beschrieben werden. Der Erwartungswert der Orientierung eines von  $G_0$  beliebig weit entfernten Gitters  $G_n$  hängt gemäß obiger Beobachtung nur von den Orientierungen seiner direkten Nachbarn ab und kann somit als Linearkombination der Orientierung der Nachbarn beschrieben werden. Für die Modellierung hat J.M. Hammersley vorgeschlagen, die Martingaleigenschaft geeignet zu erweitern.

Im eindimensionalen mit diskretem Index gilt für ein Martingal  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ , dass

$$\mathbb{E}[X_n | X_{n-1}] = X_{n-1}.$$

D. Williams schlug motiviert von J.M. Hammersleys Vorstudien in [26] die folgende Erweiterung vor:

$$\mathbb{E}[X_n | X_m : m \neq n] = \frac{1}{2}(X_{n+1} + X_{n-1}).$$

Im mehrdimensionalen Fall existieren zu jedem Gitter natürlich mehrere Nachbarn, was D. Williams in folgender Definition aufgriff:

**Definition 0.1 (Q-Harness-Prozess [24])**

Sei  $A \subseteq \mathbb{Z}^d$  ein Gitter, mit  $(i_1, \dots, i_d) = i \in A$ , und sei  $\mathbf{Q} = (\mathbf{q}_{ij})_{1 \leq i, j \leq d}$  die Ein-schritt-Übergangsmatrix einer einfachen Irrfahrt. Ein Prozess  $X = (X_i)_{i \in A}$  heißt Q-Harness-Prozess, wenn  $X_i \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  für alle  $i \in A$  und

$$\mathbb{E}[X_i | X_j, j \neq i] = \sum_{j \in A} \mathbf{q}_{ij} X_j.$$

Harness-Prozesse wie sie heute verwendet werden, zum Beispiel in [20] oder [11], basieren auf dieser Definition von D. Williams. Nachdem er 1973 für das Buch *Stochastic Analysis* [24] einen Abschnitt über Harness-Prozesse über der Indexmenge  $\mathbb{Z}^d$  beigetragen hatte, verfasste er 1980 ein Manuskript [25], in dem er sich mit Harness-Prozessen in stetiger Zeit befasste. Dieses Manuskript wurde nicht veröffentlicht. Und obwohl sein Hauptresultat in Fachkreisen bekannt ist, ist es aufgrund der wenigen vorhandenen Kopien kaum zugänglich. Hinzu kommt, dass dort auf nur sieben handschriftlichen Seiten in sehr knapper Form die Grundlagen von Harness Prozessen in stetiger Zeit skizziert werden. Auch zu Harness-Prozessen über eindimensionalen, diskreten Indexmengen ist nur sehr wenig Literatur bekannt. Dieser Fall wird auf nur zwei Seiten in [26] behandelt.

In der vorliegenden Arbeit wollen wir die Grundlagen von Harness-Prozessen über eindimensionalen Indexmengen aufarbeiten und so für Studenten und interessierte Mathematiker zugänglich machen. Wir befassen uns in Kapitel 2 mit Harness-Prozessen über  $\mathbb{Z}$  und in Kapitel 3 mit Harness-Prozessen über  $\mathbb{R}^+$ . In beiden Fällen existiert eine für diese Prozesse charakteristische Zerlegung, die wir herleiten werden. Außerdem geben wir Beispiele bekannter Prozesse an, die den jeweiligen Definitionen genügen. Im letzten Kapitel zeigen wir verschiedene Möglichkeiten auf, wie Harness-Prozesse über der erweiterten Indexmenge  $\mathbb{R}$  zerlegt werden könnten. In der gesamten Arbeit wird bewusst nur stochastisches Grundwissen vorausgesetzt. Um Missverständnisse zu vermeiden, werden später benötigte Definitionen und weiterführende Aussagen aus der Stochastik zu Beginn im Kapitel 1 eingeführt. Wichtige Notationen können zudem im Symbolverzeichnis jederzeit nachgeschlagen werden.

# 1 GRUNDLAGEN

Bevor wir beginnen uns mit Harness-Prozessen zu beschäftigen, müssen einige Voraussetzungen geschaffen werden. Im Grundlagenteil werden Notationen, Definitionen und Aussagen, die wir in dieser Arbeit verwenden wollen, zitiert und auf weiterführende Literatur verwiesen.

## Notation 1.1

Im Folgenden seien:

1.  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  der zugrundeliegende Wahrscheinlichkeitsraum,
2.  $\mathbb{N}^* := \{1, 2, \dots\} \subseteq \{0, 1, 2, \dots\} =: \mathbb{N}$ ,
3.  $T$  eine Indexmenge, genauer:

$$T := \mathbb{N}, T := \mathbb{Z} \text{ oder } T \subseteq \mathbb{R} \text{ ein Intervall.}$$

Diese und weitere Mengenbezeichnungen können bei Bedarf im Symbolverzeichnis auf Seite 55 nachgeschlagen werden.

## Notation 1.2 (Wichtige Begriffe zu $\sigma$ -Algebren)

1. Wenn  $\mathcal{G}$  und  $\mathcal{H}$  Unter- $\sigma$ -Algebren von  $\mathcal{F}$  sind und im Folgenden für die bedingte Erwartung steht  $\mathbb{E}[\cdot | \mathcal{G}, \mathcal{H}]$ , dann ist damit die korrekte Form gemeint:

$$\mathbb{E}[\cdot | \mathcal{G}, \mathcal{H}] := \mathbb{E}[\cdot | \sigma(\mathcal{G}, \mathcal{H})].$$

2. Eine Familie von Unter  $\sigma$ -Algebren  $\mathbb{F} := (\mathcal{F}_t)_{t \in T}$  heißt *aufsteigend* oder *Filtration*, wenn

$$\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F} \quad \forall s \leq t.$$

3. Eine Familie  $(\mathcal{F}_t)_{t \in T}$  von Unter- $\sigma$ -Algebren, für die gilt

$$\mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F} \quad \forall s \leq t$$

nennen wir *abnehmend* oder *absteigend*.

4. Wir nennen einen Prozess  $X = (X_t)_{t \in T}$  *adaptiert* bezüglich einer auf- oder absteigenden Familie  $(\mathcal{F}_t)_{t \in T}$  von  $\sigma$ -Algebren, wenn  $X_t$   $\mathcal{F}_t$ -messbar ist für alle  $t \in T$ .

5. Eine Familie von  $\sigma$ -Algebren  $(\mathcal{F}_t)_{t \in T}$  heißt gemäß [2] *rechts-stetig*, falls

$$\bigcap_{u>t} \mathcal{F}_u = \mathcal{F}_t \text{ für alle } t \in T$$

und *links-stetig*, falls

$$\bigcap_{s<t} \mathcal{F}_s = \mathcal{F}_t \text{ für alle } t \in T.$$

Für die folgenden Beweise wird wiederholt eine Eigenschaft der bedingten Erwartung verwendet, die sogenannte Turmeigenschaft, oder auch iterierte bedingte Erwartung:

**Lemma 1.3 (Turmeigenschaft [18], S.176)**

Seien  $X$  eine  $\mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ -Zufallsvariable und  $\mathcal{A}, \mathcal{G}$  mit

$$\mathcal{A} \subseteq \mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$$

Unter- $\sigma$ -Algebren von  $\mathcal{F}$ . Dann gilt:

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]|\mathcal{A}] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{A}]|\mathcal{G}] = \mathbb{E}[X|\mathcal{A}]. \quad (1.1)$$

Außerdem benötigen wir das 0-1-Gesetz von Kolmogorov:

**Theorem 1.4 (0-1-Gesetz von Kolmogorov, [18])**

Sei  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge von unabhängigen Zufallsvariablen und sei  $\mathcal{T}_\infty$  die Tail- $\sigma$ -Algebra von  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , das heißt

$$\mathcal{T}_\infty = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \sigma(X_m | m > n). \quad (1.2)$$

Dann gilt

$$\forall F \in \mathcal{T}_\infty \Rightarrow \mathbb{P}(F) = 0 \quad \text{oder} \quad \mathbb{P}(F) = 1.$$

Harness-Prozesse besitzen sowohl Vorwärts- als auch Rückwärtsmartingaleigenschaften. Daher führen wir uns hier noch einmal beide Definitionen vor Augen.

**Definition 1.5 ((Vorwärts-)Martingal)**

Sei  $\mathbb{F} := (\mathcal{F}_t)_{t \in T}$ , eine Filtration. Ein reellwertiger Prozess  $M = (M_t)_{t \in T}$  ist ein Martingal bezüglich der Filtration  $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \in T}$ , wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

- i)  $M_t \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \quad \forall t \in T$
- ii)  $M$  ist bezüglich  $\mathbb{F}$  adaptiert.
- iii)  $\mathbb{E}[M_t | \mathcal{F}_s] = M_s$   $\mathbb{P}$ -fast sicher für jedes Paar  $s, t \in T$  mit  $s < t$

**Definition 1.6 (Rückwärtsmartingal ([14], S.112, [21], S.115))**

Sei  $\mathbb{F} := (\mathcal{F}_t)_{t \in T}$  eine abnehmende Familie von Unter- $\sigma$ -Algebren von  $\mathcal{F}$ . Dann heißt  $M = (M_t)_{t \in T}$  Rückwärtsmartingal bezüglich  $(\mathcal{F}_t)_{t \in T}$ , falls

- i)  $M_t \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \quad \forall t \in T$  oder  $M_t(\omega) > 0 \quad \forall \omega \in \Omega, t \in T$
- ii)  $(M_t)_{t \in T}$  adaptiert ist bezüglich  $\mathbb{F}$ ,
- iii)  $\mathbb{E}[M_s | \mathcal{F}_t] = M_t$   $\mathbb{P}$ -fast sicher für jedes Paar  $s, t \in T$  mit  $s < t$ .

**Bemerkung 1.7 (Bezeichnungen)**

1. In der Literatur findet sich oft die Bezeichnung "inverse Martingale" für Rückwärtsmartingale. Dieser Begriff kann aber irreführend sein, wenn er so aufgefasst wird, als invertiere man ein Martingal. Daher legen wir uns in dieser Arbeit auf die Bezeichnung Rückwärtsmartingal fest.
2. Für den diskreten Fall findet man Definitionen von Rückwärtsmartingalen, die als Indexmenge  $-\mathbb{N}$  benutzen, siehe [1] oder [13]. In diesem Fall wird

$$\mathcal{F}_{-(n+1)} \subseteq \mathcal{F}_{-n} \subseteq \mathcal{F} \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (1.3)$$

als Folge von Unter- $\sigma$ -Algebren von  $\mathcal{F}$  betrachtet. Die Eigenschaft (iii) wird dann zu

$$\mathbb{E} \left[ M_{-n} | \mathcal{F}_{-(n+1)} \right] = M_{-(n+1)} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

3. In den folgenden Kapiteln wird immer wieder in der Betrachtung zwischen Vorwärts- und Rückwärtsmartingalen gewechselt. Der Einfachheit halber werden wir bei Vorwärtsmartingalen nur von Martingalen sprechen.

An dieser Stelle schließen wir Konvergenzsätze für Rückwärtsmartingale an. Wir werden sie nutzen, um in den nächsten Kapiteln eine allgemeine Zerlegung von Harness-Prozessen sowohl über  $\mathbb{Z}$ , als auch über  $\mathbb{R}^+$  zu zeigen. Den diskreten Fall findet man zum Beispiel in [21] auf S.115 oder in [1], S.171. Für den stetigen Fall siehe [8], S.79 oder [23], S.176 und vergleiche auch [1, 21]. Die Aussagen werden oft nur für Rückwärts-Supermartingale bewiesen. Martingale sind aber insbesondere auch Supermartingale und damit gelten das folgende Theorem und Korollar implizit auch für sie.

**Theorem 1.8 (Konvergenz von Rückwärtsmartingalen)**

Sei  $(\mathcal{F}_t)_{t \in T}$  eine absteigende Familie von Unter- $\sigma$ -Algebren von  $\mathcal{F}$ , und  $\mathcal{F}_\infty$  sei definiert durch

$$\mathcal{F}_\infty := \lim_{t \nearrow +\infty} \mathcal{F}_t.$$

Dann gilt für jedes Rückwärtsmartingal  $(M_t)_{t \in T}$  bezüglich  $(\mathcal{F}_t)_{t \in T}$ :

1.  $(M_t)_{t \in T}$  ist gleichgradig integrierbar.
2.  $M_\infty := \lim_{t \rightarrow \infty} M_t$  existiert  $\mathbb{P}$ -fast sicher und in  $\mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ .
3.  $M_\infty = \mathbb{E}[M_t | \mathcal{F}_\infty]$   $\mathbb{P}$ -fast sicher für alle  $t \in T$ .

Ein Spezialfall dieses Theorems ist das Downward Theorem. Dies ist für einige Beweise in dieser Arbeit der entscheidende Punkt. Es gibt davon allerdings viele verschiedene Versionen. Der diskrete Fall wird in [26] unter dem Namen *Lévy's Downward Theorem* behandelt und der stetige in [8, 17].

**Korollar 1.9 (Downward Theorem)**

Wir betrachten die gleiche Situation wie in Theorem 1.8. Zusätzlich sei  $\gamma$  eine integrierbare Zufallsvariable und

$$M_t := \mathbb{E}[\gamma | \mathcal{F}_t].$$

Dann existiert

$$M_\infty := \lim_{t \nearrow +\infty} M_t \quad \mathbb{P}\text{-fast sicher und in } \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$$

und

$$M_\infty = \mathbb{E} \left[ \gamma \mid \lim_{t \nearrow +\infty} \mathcal{F}_t \right] = \mathbb{E}[\gamma \mid \mathcal{F}_\infty] \quad \mathbb{P}\text{-fast sicher.}$$

**Bemerkung 1.10**

1. In diskreter Zeit gelten das Theorem und das Korollar völlig analog auch für  $T = -\mathbb{N}$ , beziehungsweise als Konvergenz für  $t \rightarrow -\infty$ .
2. Im stetigen Fall, siehe [8], existiert außerdem für jedes integrierbare Martingal  $(M_t)_{t>0}$  bezüglich der Filtration  $(\mathcal{F}_t)_{t>0}$

$$\lim_{t \searrow 0} M_t = M_0 \quad \mathbb{P}\text{-fast sicher und in } \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}).$$

Insbesondere gilt diese Konvergenzaussage für  $t \rightarrow 0$  auch für das Korollar.

3. Aufgrund der speziellen Form von  $(M_t)_{t \in T}$  im Korollar bildet  $(M_t)_{t \in T}$  hier ein Rückwärtsmartingal, das gleichgradig integrierbar ist, siehe [26].
4. Sowohl im Theorem als auch im Korollar betrachten wir Folgen von Unter- $\sigma$ -Algebren von  $\mathcal{F}$ . Aufgrund der Monotonie dieser Algebren gilt

$$\mathcal{F}_\infty = \bigcap_{t \in T} \mathcal{F}_t.$$

5. Wir werden in Kapitel 2 das Downward Theorem sowohl für die Indexmenge  $\mathbb{N}$ , als auch für  $-\mathbb{N}$  anwenden. Dabei betrachten wir dann also eine Folge von  $\sigma$ -Algebren wie in (1.3), wobei die Aussagen dann für  $M_{-n}$  und  $\mathcal{F}_{-n}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , gelten. Die Aussagen des Theorems 1.8 und des Korollars 1.9 werden nicht verändert, wenn anstelle von  $\mathbb{N} - \mathbb{N}$  verwendet wird.

Als nächstes zeigen wir eine Aussage, die D. Williams in [25] und in [26] als eine von P. Lévy bewiesene Tatsache voraussetzt, deren Beweis aber nicht mit angegeben wird. Sie ist im diskreten und im stetigen Fall entscheidend für den Beweis der allgemeinen Zerlegung von Harness-Prozessen.

**Lemma 1.11**

Seien  $X, Y \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  so, dass

$$\mathbb{E}[X|Y] = Y \quad \mathbb{P}\text{-fast sicher,} \quad \mathbb{E}[Y|X] = X \quad \mathbb{P}\text{-fast sicher.}$$

Dann gilt:

$$\mathbb{P}(X = Y) = 1.$$

**Beweis** Betrachte zunächst  $X, Y \in \mathcal{L}^2$ . Dann erhalten wir

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[(X - Y)^2 | X] &= \mathbb{E}[X^2 - 2XY + Y^2 | X] \\ &= X^2 - 2X\mathbb{E}[Y | X] + \mathbb{E}[Y^2 | X] \\ &= \mathbb{E}[Y^2 | X] - X^2,\end{aligned}$$

analog dazu ergibt sich

$$\mathbb{E}[(X - Y)^2 | Y] = \mathbb{E}[X^2 | Y] - Y^2.$$

Damit können wir weiter folgern

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[(X - Y)^2] &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[(X - Y)^2 | X]] \\ &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[Y^2 | X] - X^2] \\ &= \mathbb{E}[Y^2] - \mathbb{E}[X^2] \geq 0 \\ \Rightarrow \mathbb{E}[X^2] &\leq \mathbb{E}[Y^2].\end{aligned}$$

Aus Symmetriegründen ist auch

$$\mathbb{E}[Y^2] \leq \mathbb{E}[X^2],$$

und somit

$$\mathbb{E}[X^2] = \mathbb{E}[Y^2] \quad \text{und} \quad \mathbb{E}[(X - Y)^2] = 0.$$

Daraus folgt  $X = Y$   $\mathbb{P}$ -fast sicher. Um das Ergebnis auch für  $X, Y \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  folgern zu können, approximieren wir  $X$  und  $Y$  durch zwei in  $\mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  konvergierende Folgen von Zufallsvariablen  $(X_n)_n, (Y_m)_m \in \mathcal{L}^2$ .  $\square$

In Kapitel 3 benötigen wir die beiden folgenden Definitionen der quadratischen Variation eines stochastischen Prozesses:

**Definition 1.12 (Quadratische Variation)**

1. Definition nach [22]:

Sei  $(X_t)_{t \in \mathbb{R}}$  ein reellwertiger stochastischer Prozess. Dann hat  $(X_t)_{t \in \mathbb{R}}$  endliche quadratische Variation, falls ein Prozess  $(\langle X \rangle_t)_{t \in \mathbb{R}}$  existiert, so dass es für jedes  $t \in [0, \infty)$  eine Folge von Zerlegungen

$$\Delta_n := \{0 =: t_0^n < t_1^n < \dots < t_{i_n}^n := t\}$$

von  $[0, t]$  gibt mit  $|\Delta_n| := \max_{1 \leq i \leq i_n} |t_i^n - t_{i-1}^n| \rightarrow 0$  für  $n \rightarrow \infty$  und

$$\langle X \rangle_t := \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i \leq i_n} (X_{t_i^n} - X_{t_{i-1}^n})^2 < \infty.$$



2. Definition nach [14]:

Sei  $X = (X_t)_{t \geq 0}$  ein stetiges Martingal. Dann existiert ein eindeutig bestimmter Prozess  $(\langle X \rangle_t)_{t \geq 0}$ , für den  $(X_t^2 - \langle X \rangle_t)_{t \geq 0}$  ein Martingal ist. Dieser Prozess wird als quadratische Variation von  $X$  bezeichnet.

**Bemerkung 1.13**

Die quadratische Variation des Prozesses  $(X_t)_{t \geq 0}$  auf einem beliebigen Intervall  $[a, b] \subseteq [0, \infty)$  kann dann folgendermaßen bestimmt werden:

$$\langle X \rangle_a^b := \langle X \rangle_b - \langle X \rangle_a$$

## 2 HARNESS-PROZESSE IN DISKRETER ZEIT

Dieses Kapitel, das auf einigen Seiten des Buches *Probability with martingales* von D. Williams, [26] basiert, dient als Einstieg in das Thema Harness-Prozesse. Dazu beginnen wir mit der Definition von Harness-Prozessen in diskreter Zeit  $\mathbb{Z}$ . Die Idee dieser Definition ist eng verbunden mit der von Martingalen, weshalb auch ihre jeweiligen Interpretationen in einem engen Zusammenhang stehen. Außerdem besitzen Harness-Prozesse über  $\mathbb{Z}$  Martingal-, beziehungsweise Rückwärtsmartingaleigenschaften, die im Abschnitt 2.1 besprochen werden. Auch wenn auf den ersten Blick Harness-Prozesse zum Vergleich mit Martingalen anregen, muss man doch vorsichtig sein. Denn am Ende des Abschnitts 2.1 werden wir zeigen, dass ein Harness-Prozess über  $\mathbb{Z}$  eine sehr einfache Form hat. Genauer: wenn  $X$  ein Harness-Prozess über  $\mathbb{Z}$  ist, dann ist  $X$  affin in  $n$ , das heißt, fast alle Pfade von  $X$  sind Geraden. Wir wissen aber, dass es durchaus nicht-triviale Martingale über  $\mathbb{Z}$  gibt. Das bedeutet, die zusätzlichen Bedingungen, die im Vergleich zu Martingalen an Harness-Prozesse gestellt werden, schränken die Klasse der stochastischen Prozesse über  $\mathbb{Z}$  deutlich ein. Sobald man jedoch die Indexmenge vergrößert oder die betrachteten Prozesse modifiziert, erhält man Harness-Prozesse, die eine komplexere Form haben. Der Abschnitt 2.2 dient als Ausblick. Dort werden Differenzharness-Prozesse vorgestellt, welche eine Möglichkeit sind die Klasse der Harness-Prozesse über  $\mathbb{Z}$  zu vergrößern. Wir werden zeigen, dass zum Beispiel klassische Irrfahrten Differenzharness-Prozesse sind.

### 2.1 HARNESS-PROZESSE ÜBER $\mathbb{Z}$

Bevor wir zur Definition von Harness-Prozessen kommen, führen wir spezielle Unter- $\sigma$ -Algebren ein, die für das ganze Kapitel 2 benötigt werden.

#### Notation 2.1

Sei  $X := (X_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  ein stochastischer Prozess. Es sei für  $m \in \mathbb{Z}$ :

$$\begin{aligned}\mathcal{G}_m &:= \sigma(X_k | -\infty < k \leq m) = \sigma(X_m, X_{m-1}, X_{m-2}, \dots), \\ \mathcal{H}_m &:= \sigma(X_r | m \leq r < +\infty) = \sigma(X_m, X_{m+1}, X_{m+2}, \dots).\end{aligned}$$

#### Bemerkung 2.2 (Interpretation der $\sigma$ -Algebren)

1. Wir interpretieren hier  $\mathcal{G}_{n-1}$  als alle Informationen über den stochastischen Prozess  $X$  bis zum Zeitpunkt  $n-1$ , also die Vergangenheit, wenn  $n$  die Gegenwart darstellt. Analog dazu kann man  $\mathcal{H}_{n+1}$  als alle Informationen über  $X$  ab dem Zeitpunkt  $n+1$ , also die Zukunft des Prozesses  $X$ , interpretieren.
2. J.M. Hammersley führte in [15] Harness-Prozesse zur Modellierung dreidimensionaler Objekte ein. In diesem Kontext kann man die entsprechenden  $\sigma$ -Algebren als Informationen über die räumliche Orientierung der Nachbarn auffassen. Für eindimensionale Indexmengen hingegen erscheint die Interpretation als Zeitachse geeigneter, da so der Zusammenhang mit der Mar-

tingaltheorie hervorgehoben wird. Damit ergeben sich insbesondere Anwendungsbeispiele im Bereich der Finanzmathematik, wo zum Beispiel Kursverläufe in Abhängigkeit von der Zeit durch stochastische Prozesse beschrieben werden. Auch die sogenannten Nachbarn eines Punktes werden dann bezüglich der Zeit und nicht mehr bezüglich ihrer räumlichen Position festgelegt. Wir betrachten also ausgehend von der Gegenwart (heute) zum Beispiel die direkte Vergangenheit (gestern) und die direkte Zukunft (morgen).

**Definition 2.3 (Harness-Prozess über  $\mathbb{Z}$ )**

Ein stochastischer Prozess  $X := (X_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  heißt Harness-Prozess, wenn

$$\begin{aligned} i) \quad & X_n \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}), \quad \forall n \in \mathbb{Z} \\ ii) \quad & \mathbb{E}[X_n | X_m : m \neq n] = \frac{1}{2}(X_{n-1} + X_{n+1}), \quad \forall n \in \mathbb{Z}. \end{aligned} \quad (2.1)$$

**Bemerkung 2.4 (Interpretation der Definition)**

1. Mithilfe der Unter- $\sigma$ -Algebren  $\mathcal{G}_m$  und  $\mathcal{H}_m$  lässt sich die Eigenschaft (2.1) auch wie folgt schreiben:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X_n | X_m : m \neq n] &= \mathbb{E}[X_n | \mathcal{G}_{n-1}, \mathcal{H}_{n+1}] \\ &= \frac{1}{2}(X_{n-1} + X_{n+1}), \quad \forall n \in \mathbb{Z}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Diese Notation ermöglicht uns, auch andere Familien von  $\sigma$ -Algebren als die in Notation 2.1 eingeführten zu verwenden, wenn der betrachtete Prozess an sie adaptiert ist. Sie ist somit etwas allgemeiner, was wir insbesondere in Kapitel 3 ausnutzen wollen. Wie auch D. Williams in [25, 26] werden wir daher im weiteren Verlauf die bedingte Erwartung hauptsächlich bezüglich der entsprechenden  $\sigma$ -Algebren darstellen.

2. Mithilfe von  $\mathcal{G}_m$  und  $\mathcal{H}_m$  haben wir die Zeit symmetrisiert. Diese Symmetrie nutzen wir im weiteren Verlauf des Kapitels aus und drehen sozusagen die Zeit um. Der Grundgedanke ist, dass Eigenschaften, die man in eine 'Zeitrichtung' zeigen kann unter umgekehrter Zeit auch in der anderen Richtung gelten.
3. (2.2) besagt, dass ein Harness-Prozess zum Zeitpunkt  $n$  bedingt durch die ganze Vergangenheit bis  $n - 1$  und die ganze Zukunft ab  $n + 1$  nur vom Rand, also von der nächsten Vergangenheit  $X_{n-1}$  und von der nächsten Zukunft  $X_{n+1}$ , abhängt. Sie bildet insbesondere eine lineare Funktion des Randes.
4. So wie im Einleitungstext erklärt, kann die Orientierung eines Atomgitters in Metallen unter bedingter Erwartung durch seine direkten Nachbarn beschrieben werden. Die Definition von Harness-Prozessen über  $\mathbb{Z}$  greift diese Eigenschaft auf. Denn ein Harness-Prozess muss die Eigenschaft erfüllen, dass er unter bedingter Erwartung von seinen direkten zeitlichen Nachbarn ausgedrückt wird.

5. Außerdem erinnert die Harness-Eigenschaft in der Notation (2.2) stark an die Martingaleigenschaft:

$$\mathbb{E}[X_n | \mathcal{G}_{n-1}] = X_{n-1}.$$

Auch hier kann die bedingte Erwartung des Prozesses  $X$  unter der Vergangenheit als lineare Funktion des Randes aufgefasst werden. Der Rand besteht zum Zeitpunkt  $n$  aber nur aus  $X_{n-1}$  und damit ist der Koeffizient 1. Ein deutlicher Unterschied zu Harness-Prozessen ist die Symmetrisierung der Zeit. Bei Martingalen wird die Zukunft in die Betrachtungen nicht mit einbezogen.

6. Sogar der Name Harness-Prozess wurde von J.M. Hammersley bewusst vorgeschlagen, um die Verbindung zu Martingalen zu betonen. Der Begriff Martingal steht unter anderem für einen Riemen, welcher am Zaumzeug von Pferden befestigt werden kann. Er dient dazu, den Kopf eines Pferdes eng am Hals zu halten, damit es ihn nicht plötzlich hochreißen kann. Besonders im Dressurreiten wird dieser Riemen verwendet. Harness, übersetzt Geschirr, wird ebenfalls bei Zugtieren verwendet. Ein Geschirr schränkt ein Tier, zum Beispiel ein Pferd, in der Bewegung stärker ein, als ein Martingal. Diese Restriktion in mehrere Richtungen hat J.M. Hammersley bei der Namensgebung aufgegriffen, da sie Harness-Prozesse charakterisiert.

Wir wollen nun einige wichtige Eigenschaften von Harness-Prozessen untersuchen:

**Proposition 2.5 (Rekursionseigenschaft)**

Ein Harness-Prozess  $X = (X_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  erfüllt für  $a, b \in \mathbb{Z}$  mit  $a < b$  folgende Rekursionseigenschaft:

$$\mathbb{E}[X_n | \mathcal{G}_a, \mathcal{H}_b] = \frac{1}{2} (\mathbb{E}[X_{n-1} | \mathcal{G}_a, \mathcal{H}_b] + \mathbb{E}[X_{n+1} | \mathcal{G}_a, \mathcal{H}_b]) \quad a < n < b. \quad (2.3)$$

**Beweis** Für  $a < n < b$  folgt aus der Turmeigenschaft (1.1):

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X_n | \mathcal{G}_a, \mathcal{H}_b] &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[X_n | X_m : m \neq n] | \mathcal{G}_a, \mathcal{H}_b] \\ &= \mathbb{E}\left[\frac{1}{2}(X_{n-1} + X_{n+1}) | \mathcal{G}_a, \mathcal{H}_b\right] && \text{durch (2.1),} \\ &= \frac{1}{2} (\mathbb{E}[X_{n-1} | \mathcal{G}_a, \mathcal{H}_b] + \mathbb{E}[X_{n+1} | \mathcal{G}_a, \mathcal{H}_b]). && \square \end{aligned}$$

Aus dieser Proposition ergibt sich die Frage, ob die Rekursionseigenschaft nur für die nächsten Nachbarn von  $n \in \mathbb{Z}$ , also  $n+1$  und  $n-1$ , gilt. Die nächste Proposition und das daraus folgende Korollar stellen verallgemeinerte Rekursionseigenschaften dar.

**Korollar 2.6**

Sei  $X = (X_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  ein Harness-Prozess. Dann gilt für alle  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $u, k \in \mathbb{N}$  mit  $k \leq u$ , dass

$$\mathbb{E}[X_{n-k} | \mathcal{G}_{n-u}, \mathcal{H}_{n+1}] = (k+1)\mathbb{E}[X_n | \mathcal{G}_{n-u}, \mathcal{H}_{n+1}] - kX_{n+1} \quad (2.4)$$

und somit

$$\mathbb{E}[X_n | \mathcal{G}_{n-u}, \mathcal{H}_{n+1}] = \frac{1}{u+1} X_{n-u} + \frac{u}{u+1} X_{n+1}. \quad (2.5)$$

Hierbei kann man  $\frac{1}{u+1}$  und  $\frac{u}{u+1}$  als Gewichtung von  $X_{n-u}$  und  $X_{n+1}$  betrachten.

**Beweis** Wir zeigen die erste Aussage per Induktion. Dazu nutzen wir wiederholt die Turmeigenschaft (1.1) und die Harness-Eigenschaft (2.2). Für  $k = 1$  erhalten wir

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X_n | \mathcal{G}_{n-u}, \mathcal{H}_{n+1}] &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[X_n | \mathcal{G}_{n-1}, \mathcal{H}_{n+1}] | \mathcal{G}_{n-u}, \mathcal{H}_{n+1}] \\ &= \mathbb{E}\left[\frac{1}{2} X_{n-1} + \frac{1}{2} X_{n+1} | \mathcal{G}_{n-u}, \mathcal{H}_{n+1}\right] \\ &= \frac{1}{2} \mathbb{E}[X_{n-1} | \mathcal{G}_{n-u}, \mathcal{H}_{n+1}] + \frac{1}{2} X_{n+1}, \end{aligned}$$

so dass

$$\mathbb{E}[X_{n-1} | \mathcal{G}_{n-u}, \mathcal{H}_{n+1}] = 2 \mathbb{E}[X_n | \mathcal{G}_{n-u}, \mathcal{H}_{n+1}] - X_{n+1}.$$

Per Induktionsannahme sei Gleichung (2.4) für  $1 \leq k \leq u-1$  erfüllt. Andererseits ist

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X_{n-(u-1)} | \mathcal{G}_{n-u}, \mathcal{H}_{n+1}] &= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}[X_{n-(u-1)} | \mathcal{G}_{n-u}, \mathcal{H}_{n-(u-2)}] | \mathcal{G}_{n-u}, \mathcal{H}_{n+1}\right] \\ &= \frac{1}{2} X_{n-u} + \frac{1}{2} \underbrace{\mathbb{E}[X_{n-(u-2)} | \mathcal{G}_{n-u}, \mathcal{H}_{n+1}]}_{(2.4) \text{ für } k=u-2} \\ &= \frac{1}{2} X_{n-u} + \frac{1}{2} ((u-1) \mathbb{E}[X_n | \mathcal{G}_{n-u}, \mathcal{H}_{n+1}] - (u-2) X_{n+1}). \end{aligned} \quad (2.6)$$

Durch Gleichsetzen von (2.4) für  $k = u-1$  und (2.6) folgt

$$X_{n-u} = (u+1) \mathbb{E}[X_n | \mathcal{G}_{n-u}, \mathcal{H}_{n+1}] - u X_{n+1}.$$

Damit ist der erste Teil gezeigt. Die Gleichung (2.5) ergibt sich dann für  $k = u$ .

□

### Bemerkung 2.7

Obwohl die Eigenschaft (2.4) stärker ist als die Folgerung (2.5), wird sie im Folgenden keine weitere Rolle spielen. Denn für die nächsten Folgerungen reicht (2.5) aus und ist sogar ein entscheidender Punkt im weiteren Verlauf dieses Kapitels, um die allgemeine Zerlegung von Harness-Prozessen über  $\mathbb{Z}$  herleiten zu können.

Später in diesem Kapitel wollen wir die Zeit sozusagen umkehren und als Gegenstück zu der Vergangenheit  $\mathcal{G}_{n-u}$  die Zukunft  $\mathcal{H}_{n+u+1}$  betrachten. Dazu zeigen wir an dieser Stelle zunächst eine analoge Aussage zu Korollar 2.6 für beliebige Zukunft  $n+u+1$ .

**Korollar 2.8**

Sei  $(X_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  ein Harness-Prozess. Dann gilt für alle  $n \in \mathbb{Z}$  und  $u, k \in \mathbb{N}$  mit  $k \leq u$ , dass:

$$\mathbb{E}[X_{n+k+1} | \mathcal{G}_n, \mathcal{H}_{n+u+1}] = (k+1) \mathbb{E}[X_{n+1} | \mathcal{G}_n, \mathcal{H}_{n+u+1}] - kX_n$$

und insbesondere

$$\mathbb{E}[X_{n+1} | \mathcal{G}_n, \mathcal{H}_{n+u+1}] = \frac{u}{u+1} X_n + \frac{1}{u+1} X_{n+u+1}. \quad (2.7)$$

**Beweis** Analog zum Beweis von Korollar 2.6.

**Bemerkung 2.9 (Interpretation)**

Die Harness-Eigenschaft kann für jede Zukunft  $n+u+1$  und die Vergangenheit  $n$  als lineare Funktion des Randes mit entsprechender Gewichtung dargestellt werden, wenn  $n+1$  die Gegenwart ist.

**Folgerung 2.10**

Aus den Korollaren 2.6 und 2.8 lässt sich leicht folgern, dass für jede Vergangenheit  $n-u$  und jede Zukunft  $n+v$  für  $u, v \in \mathbb{N}$  gilt:

$$\mathbb{E}[X_n | \mathcal{G}_{n-u}, \mathcal{H}_{n+v}] = \frac{v}{u+v} X_{n-u} + \frac{u}{u+v} X_{n+v}. \quad (2.8)$$

**Bemerkung 2.11 (Analogie zur stetigen Zeit)**

Diese allgemeine Form der Harness-Bedingung wird uns bei der Definition von Harness-Prozessen über  $\mathbb{R}^+$  wieder begegnen.

Um die zuvor erwähnte Zerlegung von Harness-Prozessen folgern zu können, müssen wir Grenzwerte von  $\sigma$ -Algebren bilden. Dabei ist zu berücksichtigen, ob sie überhaupt konvergent sind. Die  $\sigma$ -Algebren  $\sigma(\mathcal{G}_{n-u}, \mathcal{H}_{n+1})$  nehmen für  $u \nearrow +\infty$  ab. Es liegt Nahe zu vermuten, dass

$$\lim_{u \nearrow +\infty} \sigma(\mathcal{G}_{n-u}, \mathcal{H}_{n+1}) \stackrel{?}{=} \sigma \left( \lim_{u \nearrow +\infty} \mathcal{G}_{n-u}, \mathcal{H}_{n+1} \right), \quad (2.9)$$

wobei aufgrund der Monotonie der  $\sigma$ -Algebren gilt

$$\bigcap_u \sigma(\mathcal{G}_{n-u}, \mathcal{H}_{n+1}) = \lim_{u \nearrow +\infty} \sigma(\mathcal{G}_{n-u}, \mathcal{H}_{n+1})$$

und  $\sigma \left( \bigcap_u \mathcal{G}_{n-u}, \mathcal{H}_{n+1} \right) = \sigma \left( \lim_{u \nearrow +\infty} \mathcal{G}_{n-u}, \mathcal{H}_{n+1} \right).$

Die Gleichung (2.9) gilt aber im Allgemeinen nicht. Im folgenden Gegenbeispiel, aus [26], soll verdeutlicht werden, warum. Da dort kein Beweis angegeben ist, werden wir ihn hier etwas ausführlicher diskutieren.

**Proposition 2.12 (Gegenbeispiel)**

Seien  $Y_0, Y_1, Y_2, \dots$  unabhängige Zufallsvariablen mit

$$\mathbb{P}(Y_n = +1) = \mathbb{P}(Y_n = -1) = \frac{1}{2}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Für  $n \in \mathbb{N}$ , definieren wir

$$X_n := Y_0 Y_1 \cdot \dots \cdot Y_n$$

und die  $\sigma$ -Algebren

$$\mathcal{Y} := \sigma(Y_1, Y_2, \dots), \quad \mathcal{T}_n := \sigma(X_r | r > n).$$

Dann gilt

$$\mathcal{L} := \bigcap_n \sigma(\mathcal{Y}, \mathcal{T}_n) \neq \sigma\left(\mathcal{Y}, \bigcap_n \mathcal{T}_n\right) =: \mathcal{R}.$$

Insbesondere sind folgende Aussagen erfüllt:

1. Die Variablen  $X_1, X_2, \dots$  sind unabhängig.
2. Es gilt die triviale Inklusion:  $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{L}$ .
3.  $Y_0$  ist eine  $\mathcal{L}$ -messbare Funktion, aber unabhängig von  $\mathcal{R}$ .

### Beweis

1. Zu zeigen ist, dass

$$\mathbb{P}(X_{i_0} = \epsilon_{i_0}, X_{i_1} = \epsilon_{i_1}, \dots, X_{i_k} = \epsilon_{i_k}) = \prod_{l=0}^k \mathbb{P}(X_{i_l} = \epsilon_{i_l}),$$

für alle  $i_0, \dots, i_k \subseteq \mathbb{N}$ , mit  $i_j \neq i_l$  für  $j \neq l$ , wobei  $\epsilon_{i_l} \in \{-1, +1\}$ .  
Es ist offensichtlich, dass

$$\mathbb{P}(X_i = +1) = \mathbb{P}(X_i = -1) = \frac{1}{2} \quad \text{für } i \in \mathbb{N}$$

und

$$\mathbb{P}(Y_i \cdot \dots \cdot Y_{i+l} = +1) = \mathbb{P}(Y_i \cdot \dots \cdot Y_{i+l} = -1) = \frac{1}{2} \quad \text{für } i, l \in \mathbb{N},$$

so dass einerseits

$$\mathbb{P}(X_i = \epsilon_i) \mathbb{P}(X_j = \epsilon_j) = \frac{1}{4}$$

und andererseits für jedes  $i < j$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_i = \epsilon_i, X_j = \epsilon_j) &= \mathbb{P}(X_i = \epsilon_i) \mathbb{P}(X_j = \epsilon_j | X_i = \epsilon_i) \\ &= \frac{1}{2} \mathbb{P}(X_i \cdot Y_{i+1} \cdot \dots \cdot Y_j = \epsilon_j | X_i = \epsilon_i) \\ &= \frac{1}{2} \mathbb{P}\left(Y_{i+1} \cdot \dots \cdot Y_j = \frac{\epsilon_j}{\epsilon_i}\right) \\ &= \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Wir haben somit bereits die paarweise Unabhängigkeit bewiesen. Zum Nachweis der allgemeinen Unabhängigkeit betrachten wir  $i_0 < i_1 < \dots < i_k$ . Dann

ist

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}(X_{i_0} = \epsilon_{i_0}, \dots, X_{i_k} = \epsilon_{i_k}) \\
&= \mathbb{P}(X_{i_1} = \epsilon_{i_1}, \dots, X_{i_k} = \epsilon_{i_k} | X_{i_0} = \epsilon_{i_0}) \mathbb{P}(X_{i_0} = \epsilon_{i_0}) \\
&= \frac{1}{2} \mathbb{P}\left(Y_{i_0+1} \cdots Y_{i_1} = \frac{\epsilon_{i_1}}{\epsilon_{i_0}}, \dots, Y_{i_0+1} \cdots Y_{i_k} = \frac{\epsilon_{i_k}}{\epsilon_{i_0}}\right) \\
&= \frac{1}{2} \mathbb{P}\left(Y_{i_0+1} \cdots Y_{i_2} = \frac{\epsilon_{i_2}}{\epsilon_{i_0}}, \dots, Y_{i_0+1} \cdots Y_{i_k} = \frac{\epsilon_{i_k}}{\epsilon_{i_0}} | Y_{i_0+1} \cdots Y_{i_1} = \frac{\epsilon_{i_1}}{\epsilon_{i_0}}\right) \\
&\quad \cdot \mathbb{P}\left(Y_{i_0+1} \cdots Y_{i_1} = \frac{\epsilon_{i_1}}{\epsilon_{i_0}}\right) \\
&= \frac{1}{4} \mathbb{P}\left(Y_{i_1+1} \cdots Y_{i_2} = \frac{\epsilon_{i_2}}{\epsilon_{i_1}}, \dots, Y_{i_1+1} \cdots Y_{i_k} = \frac{\epsilon_{i_k}}{\epsilon_{i_1}}\right) \\
&\quad \vdots \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^k \mathbb{P}\left(Y_{i_{k-1}+1} \cdots Y_{i_k} = \frac{\epsilon_{i_k}}{\epsilon_{i_{k-1}}}\right) \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}.
\end{aligned}$$

Es folgt die Unabhängigkeit der  $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ .

2.  $\mathcal{R}$  ist im Durchschnitt aller  $\sigma(\mathcal{Y}, \mathcal{T}_n)$  enthalten, da

$$\mathcal{R} = \sigma\left(\mathcal{Y}, \bigcap_m \mathcal{T}_m\right) \subseteq \sigma(\mathcal{Y}, \mathcal{T}_n) \quad \text{für } n \in \mathbb{N}.$$

3. Aus der Definition von  $X$ , ergibt sich, dass

$$Y_0 = \frac{X_{n+1}}{Y_1 \cdots Y_{n+1}} \quad \text{für } n \in \mathbb{N}.$$

Also ist  $Y_0$   $\sigma(\mathcal{Y}, \mathcal{T}_n)$ -messbar für alle  $n$  und damit auch  $\mathcal{L} = \bigcap_n \sigma(\mathcal{Y}, \mathcal{T}_n)$ -messbar. Es bleibt also zu zeigen, dass  $Y_0$  unabhängig von  $\mathcal{T}_\infty$  ist, wobei  $\mathcal{T}_\infty$  wie in (1.2) definiert sei. Für  $A \in \mathcal{T}_\infty$  gilt nach dem 0-1-Gesetz von Kolmogorov, Theorem 1.4, dass

$$\mathbb{P}(A) = 0 \quad \text{oder} \quad \mathbb{P}(A) = 1.$$

Wenn  $\mathbb{P}(A) = 0$ , dann ergibt sich

$$\mathbb{P}(\{Y_0 = \epsilon_0\} \cap A) = 0 = \mathbb{P}(\{Y_0 = \epsilon_0\}) \mathbb{P}(A).$$

Wenn  $\mathbb{P}(A) = 1$ , erhalten wir

$$\begin{aligned}
1 &= \mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(\{Y_0 = \epsilon_0\} \cup A) \\
&= \mathbb{P}(\{Y_0 = \epsilon_0\}) + \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(\{Y_0 = \epsilon_0\} \cap A) \leq 1
\end{aligned}$$

so dass

$$\mathbb{P}(\{Y_0 = \epsilon_0\} \cap A) = \mathbb{P}(Y_0 = \epsilon_0).$$

Es gilt also für alle  $A \in \mathcal{T}_\infty$ , dass  $\mathbb{P}(\{Y_0 = \epsilon_0\} \cap A) = \mathbb{P}(Y_0 = \epsilon) \mathbb{P}(A)$ .  $Y_0$  ist somit unabhängig von  $\mathcal{T}_\infty$  und per Definition auch von  $\mathcal{Y}$ , so dass schließlich die Unabhängigkeit von  $\mathcal{R}$  folgt.



4. Würde jetzt  $\mathcal{L} = \mathcal{R}$  gelten, dann müsste  $Y_0$  von sich selbst unabhängig sein. Die einzigen Zufallsvariablen, die von sich selbst unabhängig sind, sind aber Konstanten. Dies ist ein Widerspruch zur Definition von  $Y_0$ . Daraus ergibt sich:

$$\bigcap_n \sigma(\mathcal{Y}, \mathcal{T}_n) = \mathcal{L} \neq \mathcal{R} = \sigma(\mathcal{Y}, \bigcap_n \mathcal{T}_n).$$

□

Die Vermutung in (2.9) konnte also nicht bestätigt werden. Diese Feststellung ist für unser weiteres Vorgehen von besonderer Bedeutung, da wir an vielen Stellen mit einer ähnlichen Situation konfrontiert sein werden. In unserem Kontext bietet die Turmeigenschaft (1.1) zusammen mit Proposition 2.12 (2) einen geeigneten Ausweg. Damit wollen wir durch Grenzwertbildung die angekündigte Zerlegung von Harness-Prozessen schrittweise herleiten. Wir beweisen also, dass zu jedem Harness-Prozess  $X$  zwei Zufallsvariablen  $A$  und  $L$  existieren, so dass

$$X_n = A + nL \quad \mathbb{P}\text{-fast sicher } \forall n \in \mathbb{Z}.$$

**Proposition 2.13 (Existenz von  $L$ )**

Sei  $(X_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  ein Harness-Prozess, dann existiert der Grenzwert

$$L := \lim_{v \searrow -\infty} \frac{X_v}{v} \quad \mathbb{P}\text{-fast sicher und in } \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}). \quad (2.10)$$

**Beweis** Wendet man Korollar 1.9 auf  $M_{-u} := \mathbb{E}[X_n | \mathcal{G}_{n-u}, \mathcal{H}_{n+1}]$  für  $u \in \mathbb{N}$  an, ergibt sich

$$M_{-\infty} = \lim_{u \nearrow +\infty} M_{-u} \quad \text{existiert } \mathbb{P}\text{-fast sicher und in } \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}).$$

Wir wissen außerdem aus Korollar 2.6, dass

$$\mathbb{E}[X_n | \mathcal{G}_{n-u}, \mathcal{H}_{n+1}] = \frac{1}{u+1} X_{n-u} + \frac{u}{u+1} X_{n+1},$$

so dass insbesondere

$$\lim_{u \nearrow +\infty} \mathbb{E}[X_n | \mathcal{G}_{n-u}, \mathcal{H}_{n+1}] = \lim_{u \nearrow +\infty} \left( \frac{X_{n-u}}{u+1} \right) + X_{n+1}$$

$\mathbb{P}$ -fast sicher und in  $\mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  existiert. Daraus folgt wegen

$$L = \lim_{v \searrow -\infty} \frac{X_v}{v} = - \lim_{u \nearrow +\infty} \frac{X_{n-u}}{u+1}.$$

die Behauptung. □

**Folgerung 2.14 (Eigenschaften von  $L$ )**

1. Als Grenzwert einer in  $\mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  konvergenten Folge von integrierbaren Zufallsvariablen ist auch  $L$  integrierbar.

2. Per Konstruktion ist  $L$  messbar bezüglich  $\mathcal{G}_{-\infty}$ .

**Proposition 2.15 (Rückwärtsmartingaleigenschaft)**

Sei  $(X_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  ein Harness-Prozess. Dann ist  $(X_n - nL)_{n \in \mathbb{Z}}$  ein Rückwärtsmartingal bezüglich der absteigenden Folge von  $\sigma$ -Algebren  $(\sigma(L, \mathcal{H}_n))_{n \in \mathbb{Z}}$ , wobei  $L$  in Proposition 2.13 und  $\mathcal{H}_n$  in Notation 2.1 definiert ist.

**Beweis** Es ist ausreichend die Martingaleigenschaft zu zeigen, da die Integrierbarkeit und die Messbarkeit aus den entsprechenden Eigenschaften von  $(X_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  und  $L$  folgen. Wegen

$$\mathbb{E}[X_n - nL | L, \mathcal{H}_{n+1}] = \mathbb{E}[X_n | L, \mathcal{H}_{n+1}] - nL$$

genügt es zu zeigen, dass

$$\mathbb{E}[X_n | L, \mathcal{H}_{n+1}] = X_{n+1} - L. \quad (2.11)$$

Wir wissen aus Folgerung 2.14, dass

$$\sigma(L) \subseteq \mathcal{G}_{-\infty} \subseteq \mathcal{G}_{n-u}$$

für alle  $u \in \mathbb{N}$ . Daher folgt mit der Turmeigenschaft (1.1):

$$\mathbb{E}[X_n | L, \mathcal{H}_{n+1}] = \mathbb{E} \left[ \mathbb{E} \left[ X_n \mid \lim_{u \nearrow +\infty} \sigma(\mathcal{G}_{n-u}, \mathcal{H}_{n+1}) \mid L, \mathcal{H}_{n+1} \right] \right].$$

Für  $M_{-u} := \mathbb{E}[X_n | \mathcal{G}_{n-u}, \mathcal{H}_{n+1}]$ , besagt Korollar 1.9, dass

$$\mathbb{E} \left[ X_n \mid \lim_{u \nearrow +\infty} \sigma(\mathcal{G}_{n-u}, \mathcal{H}_{n+1}) \right] = \lim_{u \nearrow +\infty} \mathbb{E}[X_n | \mathcal{G}_{n-u}, \mathcal{H}_{n+1}] \quad \mathbb{P}\text{-fast sicher.}$$

Im Beweis des vorigen Lemmas haben wir außerdem gesehen, dass

$$\lim_{u \nearrow +\infty} \mathbb{E}[X_n | \mathcal{G}_{n-u}, \mathcal{H}_{n+1}] = X_{n+1} - L.$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X_n | L, \mathcal{H}_{n+1}] &= \mathbb{E}[X_{n+1} - L | L, \mathcal{H}_{n+1}] \\ &= X_{n+1} - L. \end{aligned} \quad \square$$

Wir können nun die Existenz von  $A$  beweisen. Dies hat zur Folge, dass  $L$  symmetrisch konstruiert werden kann, woraus insbesondere die Martingaleigenschaft des Prozesses  $(X_n - nL)_{n \in \mathbb{Z}}$  folgt.

**Proposition 2.16 (Existenz und Eigenschaften von A)**

Sei  $(X_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  ein Harness-Prozess, dann existiert

$$A := \lim_{n \nearrow +\infty} (X_n - nL) \quad \mathbb{P}\text{-fast sicher und in } \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}), \quad (2.12)$$

und ist integrierbar.

**Beweisskizze** Die Existenz folgt direkt aus Proposition 2.15 und Theorem 1.8. Als Grenzwert von in  $\mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ -konvergenten, integrierbaren Zufallsvariablen ist  $A$  ebenfalls integrierbar.  $\square$

**Lemma 2.17 (Symmetrie der Konstruktion von  $L$  und  $A$ )**

Sei  $(X_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  ein Harness-Prozess. Dann gilt:

1. Für  $L$  gilt auch folgende Darstellung

$$L = \lim_{n \nearrow +\infty} \left( \frac{X_n}{n} \right) \quad \mathbb{P}\text{-fast sicher}, \quad (2.13)$$

woraus insbesondere die Messbarkeit bezüglich  $\mathcal{H}_\infty$  folgt.

2.  $A$  erfüllt damit außerdem

$$A = \lim_{n \searrow -\infty} (X_n - nL) \quad \mathbb{P}\text{-fast sicher}$$

und somit ist  $A$  messbar bezüglich  $\mathcal{G}_{-\infty}$  und  $\mathcal{H}_\infty$ .

**Beweis**

1. Für hinreichend große  $n \in \mathbb{N}$  gilt nach Proposition 2.16  $\mathbb{P}$ -fast sicher

$$A \approx X_n - nL \quad \Rightarrow \quad \frac{A}{n} \approx \frac{X_n}{n} - L. \quad (2.14)$$

und somit

$$0 = \lim_{n \nearrow +\infty} \frac{A}{n} = \lim_{n \nearrow +\infty} \left( \frac{X_n}{n} - L \right).$$

2. Für große  $n \in \mathbb{N}$  folgt mit (2.14), dass

$$0 = \lim_{n \searrow -\infty} \frac{A}{n} = \lim_{n \searrow -\infty} \left( \frac{X_n}{n} - L \right). \quad \square$$

**Bemerkung 2.18 (Interpretation)**

Wir haben also gezeigt, dass

$$L = \lim_{u \searrow -\infty} \frac{X_u}{u} = \lim_{u \nearrow +\infty} \frac{X_u}{u}$$

und

$$A = \lim_{n \nearrow +\infty} (X_n - nL) = \lim_{n \searrow -\infty} (X_n - nL).$$

Das heißt, dass  $L$  (und ebenso  $A$ ) auf symmetrische Weise konstruiert werden kann. Darin spiegelt sich sowohl die Symmetrie der Definition von Harness-Prozessen, als auch die Symmetrisierung der Zeit wieder. Dementsprechend wechseln wir von nun an in unserer Betrachtungsweise je nach Bedarf zwischen Vergangenheit und Zukunft. Dazu untersuchen wir  $\mathcal{H}_{n+u+1}$  als Gegenstück zu  $\mathcal{G}_{n-u}$ , wie wir das bereits in Korollar 2.8 angedeutet haben und bilden den Grenzwert von  $\sigma(\mathcal{G}_n, \mathcal{H}_{n+u+1})$  für  $u \rightarrow +\infty$ . Wir können dann viele der folgenden Aussagen direkt an die bisher gezeigten anlehnen und analog beweisen.

**Proposition 2.19 (Martingaleigenschaft)**

Sei  $(X_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  ein Harness-Prozess. Dann ist  $(X_n - nL)_{n \in \mathbb{Z}}$  ein Martingal bezüglich der Filtration  $(\sigma(\mathcal{G}_n, L))_{n \in \mathbb{Z}}$ .

**Beweis** Analog zum Beweis von Proposition 2.15 genügt auch hier wegen

$$\mathbb{E}[X_{n+1} - (n+1)L | \mathcal{G}_n, L] = \mathbb{E}[X_{n+1} | \mathcal{G}_n, L] - (n+1)L$$

zu zeigen, dass

$$\mathbb{E}[X_{n+1} | \mathcal{G}_n, L] = X_n + L.$$

Mit der Turmeigenschaft (1.1) folgt aus  $\sigma(L) \subseteq \mathcal{H}_{n+u+1}$  für alle  $u \in \mathbb{N}$ , dass

$$\mathbb{E}[X_{n+1} | \mathcal{G}_n, L] = \mathbb{E} \left[ \mathbb{E} \left[ X_{n+1} \mid \lim_{u \nearrow +\infty} \sigma(\mathcal{G}_n, \mathcal{H}_{n+u+1}) \right] \mid \mathcal{G}_n, L \right].$$

Für  $n \in \mathbb{Z}$  liefert Korollar 1.9 mit  $M_u := \mathbb{E}[X_{n+1} | \mathcal{G}_n, \mathcal{H}_{n+u+1}]$ ,  $u \in \mathbb{N}$ , die  $\mathbb{P}$ -fast sichere und  $\mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  Existenz von

$$\lim_{u \nearrow +\infty} \mathbb{E}[X_{n+1} | \mathcal{G}_n, \mathcal{H}_{n+u+1}] \stackrel{(2.7)}{=} X_n + \lim_{u \nearrow +\infty} \left( \frac{1}{u+1} X_{n+u+1} \right) \stackrel{(2.13)}{=} X_n + L,$$

so dass sich mit Korollar 1.9 auch

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X_{n+1} | \mathcal{G}_n, L] &= \mathbb{E}[X_n + L | \mathcal{G}_n, L] \\ &= X_n + L \end{aligned} \tag{2.15}$$

ergibt. □

**Lemma 2.20**

Sei  $X = (X_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  ein Harness-Prozess. Dann gilt:

$$X_n = X_{n+1} + L \quad \mathbb{P}\text{-fast sicher } \forall n \in \mathbb{Z}.$$

**Beweis** Wir zeigen zunächst die folgenden Gleichungen für  $n \in \mathbb{Z}$ :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X_n + L | X_{n+1}] &= X_{n+1} \\ \mathbb{E}[X_{n+1} | X_n + L] &= X_n + L. \end{aligned}$$

Weil  $\sigma(X_{n+1}) \subseteq \sigma(L, \mathcal{H}_{n+1})$  ergibt sich, dass:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X_n + L | X_{n+1}] &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[X_n | L, \mathcal{H}_{n+1}] + L | X_{n+1}] && \text{wegen (1.1),} \\ &= \mathbb{E}[X_{n+1} - L + L | X_{n+1}] && \text{mittels (2.11),} \\ &= X_{n+1}. \end{aligned}$$

Für die zweite Gleichung gehen wir ähnlich vor.  $X_n + L$  ist  $\sigma(\mathcal{G}_n, L)$ -messbar, also folgt

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X_{n+1} | X_n + L] &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[X_{n+1} | \mathcal{G}_n, L] | X_n + L] && \text{mithilfe von (1.1),} \\ &= \mathbb{E}[X_n + L | X_n + L] && \text{wegen (2.15),} \\ &= X_n + L. \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich mit Lemma 1.11, dass für jedes  $n \in \mathbb{Z}$  gilt:

$$X_{n+1} = X_n + L \quad \mathbb{P}\text{-fast sicher.}$$

Sei nun  $\Omega_n$  für jedes  $n$  die Nullmenge, auf der die Gleichung nicht erfüllt ist, das heißt:

$$\Omega_n := \{\omega \in \Omega \mid X_{n+1}(\omega) \neq X_n(\omega) + L(\omega)\} \quad \text{mit } \mathbb{P}(\Omega_n) = 0.$$

Aus der Abzählbarkeit von  $\mathbb{Z}$  erhalten wir

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_n \Omega_n\right) = \sum_n \mathbb{P}(\Omega_n) = 0.$$

Somit ergibt sich die Behauptung.  $\square$

Wir haben bereits gezeigt, dass sowohl  $L$  als auch  $A$  existieren. Damit und mithilfe des obigen Lemmas beweisen wir zum Schluss, dass für Harness-Prozesse über  $\mathbb{Z}$  die folgende Zerlegung gilt.

**Theorem 2.21 (Zerlegung von Harness-Prozessen über  $\mathbb{Z}$ )**

Sei  $(X_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  ein Harness-Prozess. Dann existieren integrierbare Zufallsvariablen  $L$  und  $A$ , die  $\sigma(\mathcal{G}_{-\infty}, \mathcal{H}_{\infty})$ -messbar sind, so dass

$$X_n = A + nL \quad \mathbb{P}\text{-fast sicher} \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Dabei sind  $L = \lim_{v \searrow -\infty} \frac{X_v}{v}$  in (2.10) und  $A = \lim_{n \nearrow +\infty} (X_n - nL)$  in (2.12) definiert.

**Beweis** Aus Lemma 2.20 wissen wir, dass  $\mathbb{P}$ -fast sicher für alle  $n \in \mathbb{Z}$

$$X_{n+1} = X_n + L, \tag{2.16}$$

so dass insbesondere  $\mathbb{P}$ -fast sicher für alle  $n \in \mathbb{Z}$  gilt:

$$X_n = X_{n+1} - L = X_{n+1} - (n+1)L + nL. \tag{2.17}$$

Durch einsetzen von (2.17) für  $X_{n+1}$  in (2.16) erhalten wir

$$\begin{aligned} X_n &= X_{n+2} - L - (n+1)L + nL \\ &= X_{n+2} - (n+2)L + nL \\ &\vdots \\ &= \lim_{k \nearrow +\infty} (X_{n+k} - (n+k)L) + nL \\ &= A + nL. \end{aligned} \quad \square$$

Dieses Ergebnis bedeutet anschaulich, dass Pfade von Harness-Prozessen in diskreter Zeit  $\mathbb{P}$ -fast sicher Geraden sind. Nur sehr wenige Prozesse erfüllen diese Bedingung. Wir werden in Kapitel 3 zeigen, dass alle bezüglich der entsprechenden  $\sigma$ -Algebren messbaren affinen Prozesse Harness-Prozesse sind. Das Ergebnis

bedeutet somit, dass sich die Forderungen an Harness-Prozesse sehr restriktiv auswirken. Diese Erkenntnis war unvorhersehbar. Aber um so wichtiger war es, sich für das Verständnis eingehend mit Harness-Prozessen über  $\mathbb{Z}$  zu befassen. Denn sowohl in einem erweiterten Rahmen in diskreter Zeit, als auch in stetiger Zeit, erhalten wir bemerkenswerte Resultate. Dazu werden wir im nächsten Abschnitt kurz Differenzharness-Prozesse betrachten und zeigen, dass jede Irrfahrt ein solcher Harness-Prozess ist. Im stetigen Fall werden wir ähnlich wie im diskreten eine Zerlegungseigenschaft für Harness-Prozesse beweisen, indem wir genau wie zuvor die 'Konvergenz der Zeit' betrachten. Außerdem verwenden wir in Kapitel 4 die Zerlegung von Harness-Prozessen über  $\mathbb{Z}$  und deren Herleitung, um in Abschnitt 4.1 eine vermutete ähnliche Zerlegung von Harness-Prozessen über  $\mathbb{R}$  zu skizzieren.

## 2.2 DIFFERENZHARNESS-PROZESSE

In [26], S.171, gibt D. Williams eine Möglichkeit an, wie die Klasse der Harness-Prozesse über  $\mathbb{Z}$  erweitert werden könnte: Dies soll hier erwähnt, aber nicht im Detail ausgeführt werden, da wir uns auf Kapitel 3, also auf die Zerlegung von Harness-Prozessen über  $\mathbb{R}^+$  konzentrieren wollen. Entfernt man sich von dem Anspruch, für jedes  $X_n$  Eigenschaften zu suchen, und betrachtet stattdessen die Zufallsvariablen  $X_r - X_s$  für  $r, s \in \mathbb{Z}$ , dann kann man eine neue Klasse von Harness-Prozessen definieren.

### Definition 2.22 (Differenzharness-Prozess)

Seien  $X_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  für alle  $n \in \mathbb{Z}$  integrierbare Zufallsvariablen. Die Differenzen  $(X_r - X_s)_{r,s \in \mathbb{Z}}$  bilden einen sogenannten Differenzharness-Prozess, wenn zusätzlich für  $n, k \in \mathbb{Z}$  mit  $k \neq n$  gilt, dass:

$$\mathbb{E}[X_n - X_k | X_m - X_k : m \neq n] = \frac{1}{2}(X_{n-1} - X_k) + \frac{1}{2}(X_{n+1} - X_k).$$

### Proposition 2.23

*Jede Irrfahrt über  $\mathbb{Z}$  ist ein Differenzharness-Prozess.*

Dazu definieren wir zunächst Irrfahrten über  $\mathbb{Z}$ , indem wir gemäß D. Williams [26] die übliche Definition über  $\mathbb{N}$  in folgender Weise erweitern.

### Definition 2.24 (Irrfahrt)

Seien  $(Z_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  unabhängige, identisch verteilte und integrierbare Zufallsvariablen. Sei  $X_0$  irgendeine integrierbare Zufallsvariable auf  $\Omega$ , die unabhängig von den  $(Z_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  ist. Dann ist die Irrfahrt  $X = (X_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  definiert durch

$$X_n := \begin{cases} X_0 + \sum_{k=1}^n Z_k & \text{wenn } n > 0 \\ X_0 - \sum_{k=n+1}^0 Z_k & \text{wenn } n < 0. \end{cases}$$

### Bemerkung 2.25 (Rechtfertigung)

Die angegebene Definition erfüllt offensichtlich für alle  $n \in \mathbb{Z}$  die für Irrfahrten charakteristische Eigenschaft, dass

$$Z_n = X_n - X_{n-1}.$$

**Beweis der Proposition** Wegen

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X_n - X_k | X_m - X_k : m \neq n] &= \mathbb{E}[Z_n + X_{n-1} - X_k | X_m - X_k : m \neq n] \\ &= \mathbb{E}[Z_n | X_m - X_k : m \neq n] + X_{n-1} - X_k\end{aligned}$$

und

$$\frac{1}{2}(X_{n-1} - X_k) + \frac{1}{2}(X_{n+1} - X_k) = X_{n-1} - X_k + \frac{1}{2}X_{n+1} - \frac{1}{2}X_{n-1}.$$

genügt zu zeigen, dass:

$$\mathbb{E}[Z_n | X_m - X_k : m \neq n] = \frac{1}{2}(X_{n+1} - X_{n-1}).$$

Dazu betrachten wir zunächst die  $\sigma$ -Algebren  $\sigma(X_m - X_k : m \neq n)$  für  $k < n$ :

$$\begin{aligned}\sigma(X_m - X_k | m \neq n) &= \sigma\left(\sum_{l=m+1}^k Z_l : m < k; \sum_{l=k+1}^m Z_l : m > k \mid m \neq n\right) \\ &= \sigma(\dots, Z_k, Z_{k+1}, \dots, Z_{n-1}, Z_n + Z_{n+1}, Z_{n+2}, \dots).\end{aligned}$$

Diese Form erhalten wir, da eine  $\sigma$ -Algebra, die von  $Z_l, Z_l + Z_{l+1}$  erzeugt wird, für unabhängige und identisch verteilte Zufallsvariablen  $Z_i, i \in \mathbb{Z}$  äquivalent zu einer  $\sigma$ -Algebra ist, die nur von  $Z_l$  und  $Z_{l+1}$  erzeugt wird. Aufgrund der Bedingung  $m \neq n$  gibt es unter den Erzeugern der  $\sigma$ -Algebra keine Summe genau bis  $n$  oder ab  $n$ . Daher erhalten wir als einen der Erzeuger  $Z_n + Z_{n+1}$ , der sich nicht in  $Z_n$  und  $Z_{n+1}$  auftrennen lässt. Die  $Z_i$  sind voneinander unabhängig und dadurch reduziert sich die bedingte Erwartung insgesamt auf Folgendes

$$\mathbb{E}[Z_n | X_m - X_k : m \neq n] = \mathbb{E}[Z_n | Z_n + Z_{n+1}].$$

Weil die  $Z_i$  identisch verteilt sind, gilt außerdem

$$\mathbb{E}[Z_n | Z_n + Z_{n+1}] = \mathbb{E}[Z_{n+1} | Z_n + Z_{n+1}].$$

Woraus wir folgern können, dass

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[Z_n | X_m - X_k : m \neq n] &= \frac{1}{2}(\mathbb{E}[Z_n | Z_n + Z_{n+1}] + \mathbb{E}[Z_{n+1} | Z_n + Z_{n+1}]) \\ &= \frac{1}{2}(Z_n + Z_{n+1}) \\ &= \frac{1}{2}(X_{n+1} - X_{n-1})\end{aligned}$$

Für  $k > n$  läuft der Beweis völlig analog. Somit ist das Gewünschte gezeigt.  $\square$

Wir konnten also zeigen, dass durch die Modifikation der Definition von Harness-Prozessen in Differenzharness-Prozesse die Bedingungen nicht mehr so restriktiv wirken wie im vorigen Abschnitt. Eine vielleicht noch interessantere Art von Harness-Prozessen sind Harness-Prozesse über  $\mathbb{R}^+$  und deren Zerlegung, womit wir uns im nächsten Kapitel eingehend beschäftigen wollen.

### 3 HARNESS-PROZESSE IN STETIGER ZEIT

Wir wenden uns nun Harness-Prozessen in stetiger Zeit zu und erweitern somit die Indexmenge. Da wir in diesem Kapitel das Manuskript [25] von D. Williams aufarbeiten wollen, betrachten wir allerdings nicht ganz  $\mathbb{R}$ , sondern nur  $\mathbb{R}^+$ . Das Ziel des Manuskriptes, und demnach dieses Kapitels, ist Harness-Prozesse ins Verhältnis zur Brownschen Bewegung zu setzen, welche nur auf  $[0, \infty)$  definiert ist. Wir werden uns aber in Kapitel 4 Harness-Prozessen über  $\mathbb{R}$  zuwenden. Dort werden wir Vermutungen anstellen wie eine Zerlegung von Harness-Prozessen über  $\mathbb{R}$  aussehen könnte. Die Vermutungen sind an Kapitel 2 und 3 angelehnt. Um also in Kapitel 4 die Zuordnung zu erleichtern und die Unterschiede zwischen Harness-Prozessen in diskreter zu stetiger Zeit zu verdeutlichen, die wir in diesem Kapitel ausführen, werden wir Harness-Prozesse über  $\mathbb{R}^+$  nicht wie vorher mit  $X$ , sondern mit  $Y = (Y_t)_{t>0}$  bezeichnen.

Ausgehend vom vorigen Kapitel könnte man erwarten, dass Harness-Prozesse über  $\mathbb{R}^+$  genauso einfach aufgebaut sind wie Harness-Prozesse über  $\mathbb{Z}$ . Dies ist aber nicht der Fall, wie wir im Folgenden zeigen werden. Wir wollen in den nächsten Abschnitten beweisen, dass unter gewissen Zusatzannahmen für jeden Harness-Prozess in stetiger Zeit eine Zerlegung existiert, die nicht nur affin ist, sondern zusätzlich von der Brownschen Bewegung abhängt.

Zur Motivation stellen wir im Abschnitt 3.1 nach der Definition von Harness-Prozessen über  $\mathbb{R}^+$  einige interessante Beispiele von Prozessen vor, die dieser Definition genügen. Anschließend führen wir den zu einem Harness-Prozess assoziierten Prozess als den Restterm von  $Y_t - S - tR$  ein. Wir diskutieren wichtige Eigenschaften und untersuchen dann im Abschnitt 3.3 seine quadratische Variation, wobei auch die Umkehrung der Zeit zum Tragen kommen wird. Aufgrund dieser Vorbereitungen können wir schließlich die angekündigte Zerlegung beweisen.

#### 3.1 DEFINITION UND BEISPIELE

Ähnlich wie im vorigen Kapitel beginnen wir mit der Einführung einiger wichtiger  $\sigma$ -Algebren. Um die Betrachtungen zu erleichtern setzen wir wie folgendes voraus:

##### **Zusatzannahme**

Der Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  sei vollständig, das heißt für alle  $N \subseteq \Omega$  mit  $\mathbb{P}(N) = 0$  gilt  $N \in \mathcal{F}$ .

##### **Notation 3.1 ( $\sigma$ -Algebren)**

Wir bezeichnen mit  $(\mathcal{G}_t)_{t>0}$  und  $(\mathcal{H}_t)_{t>0}$  zwei Familien von vollständigen Unter-



$\sigma$ -Algebren von  $\mathcal{F}$ , wobei

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_s &\subseteq \mathcal{G}_t \subseteq \mathcal{F} & \forall 0 < s \leq t, \text{ und} \\ \mathcal{H}_t &\subseteq \mathcal{H}_s \subseteq \mathcal{F} & \forall 0 < s \leq t. \end{aligned}$$

Außerdem sei  $(\mathcal{G}_t)_{t>0}$  rechts- und  $(\mathcal{H}_t)_{t>0}$  links-stetig. Wir definieren weiterhin

$$\mathcal{G}_0 := \lim_{t \searrow 0} \mathcal{G}_t, \quad (3.1)$$

$$\mathcal{H}_\infty := \lim_{t \nearrow +\infty} \mathcal{H}_t, \quad (3.2)$$

$$\mathcal{T}_\infty := \sigma(\mathcal{G}_0, \mathcal{H}_\infty). \quad (3.3)$$

### Bemerkung 3.2

1. Die Familien von  $\sigma$ -Algebren  $(\mathcal{G}_t)_{t>0}$  und  $(\mathcal{H}_t)_{t>0}$  werden wir, wie schon in Kapitel 2, als Vergangenheit und Zukunft interpretieren.
2. Im vorigen Kapitel haben wir die  $\sigma$ -Algebren nicht so allgemein definiert, sondern nur als die von dem Prozess  $X$  erzeugten  $\sigma$ -Algebren. Wir hätten hier genauso vorgehen können. Allerdings sind die Zusatzannahmen der Rechts- beziehungsweise Links-Stetigkeit eine Erleichterung. Denn wir können dadurch in Abschnitt 3.3 die Rechts- beziehungsweise Links-Stetigkeit von Hilfsprozessen zeigen, die wir zur Identifikation der quadratischen Variation eines Harness-Prozess benötigen. Somit ersparen wir es uns auf Versionen dieser Prozesse umsteigen zu müssen.
3. Aufgrund der Monotonie der  $\sigma$ -Algebren gilt:

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_0 &= \bigcap_{t>0} \mathcal{G}_t \\ \mathcal{H}_\infty &= \bigcap_{t>0} \mathcal{H}_t \end{aligned}$$

### Definition 3.3 (Harness-Prozesse über $\mathbb{R}^+$ )

Ein stochastischer Prozess  $Y := (Y_t)_{t>0}$  heißt Harness-Prozess bezüglich der Familie von  $\sigma$ -Algebren  $(\sigma(\mathcal{G}_s, \mathcal{H}_u))_{s, u \in \mathbb{R}^+}$ , wenn er folgende Bedingungen erfüllt:

- (i)  $Y_t \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$   $\forall t > 0,$
- (ii)  $\sigma(Y_s | s \leq t) \subseteq \mathcal{G}_t, \quad \sigma(Y_u | u \geq t) \subseteq \mathcal{H}_t,$   $\forall t > 0,$
- (iii)  $\mathbb{E}[Y_t | \mathcal{G}_s, \mathcal{H}_u] = \frac{u-t}{u-s} Y_s + \frac{t-s}{u-s} Y_u,$  für  $s < t < u.$  (3.4)

### Bemerkung 3.4

1. Die Eigenschaft (ii) bedeutet, dass der Prozess  $(Y_t)_{t>0}$  an die  $\sigma$ -Algebren  $(\mathcal{G}_t)_{t>0}$  und  $(\mathcal{H}_t)_{t>0}$  adaptiert sein soll. Im diskreten Fall brauchten wir diese Bedingung nicht, da die  $\sigma$ -Algebren vom Prozess  $X$  selbst erzeugt waren.
2. In stetiger Zeit gibt es keine direkten Nachbarn von  $t$ , so wie im diskreten Fall. Daher muss auch die Harness-Bedingung (iii) angepasst werden. Allerdings haben wir im diskreten Fall gezeigt, dass aus der Harness-Bedingung

(2.1) eine allgemeinere Bedingung folgt, siehe (2.8):

$$\mathbb{E}[X_n | \mathcal{G}_{n-u}, \mathcal{H}_{n+v}] = \frac{v}{u+v} X_{n-u} + \frac{u}{u+v} X_{n+v},$$

wobei  $u, v \in \mathbb{N}$  und  $n \in \mathbb{Z}$ . Mit  $t = n$ ,  $u = t - s$  und  $v = u - t$  hat sie die gleiche Form wie die Harness-Bedingung in stetiger Zeit, wodurch die enge Beziehung zwischen den beiden Ansätzen deutlich wird.

Äquivalent zur Harness-Eigenschaft gilt auch folgende Bedingung.

### Korollar 3.5 (Äquivalente Harness-Bedingung)

Die Harness-Eigenschaft ist äquivalent zu:

$$\mathbb{E}\left[\frac{Y_t - Y_{t'}}{t - t'} | \mathcal{G}_s, \mathcal{H}_u\right] = \frac{Y_u - Y_s}{u - s} \quad \text{für alle } s < t' < t < u$$

**Beweis** Sei  $s < t' < t < u$ :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\frac{Y_t - Y_{t'}}{t - t'} | \mathcal{G}_s, \mathcal{H}_u\right] &= \frac{1}{t - t'} (\mathbb{E}[Y_t | \mathcal{G}_s, \mathcal{H}_u] - \mathbb{E}[Y_{t'} | \mathcal{G}_s, \mathcal{H}_u]) \\ &= \frac{1}{t - t'} \left( \frac{u-t}{u-s} Y_s + \frac{t-s}{u-s} Y_u - \frac{u-t'}{u-s} Y_s - \frac{t'-s}{u-s} Y_u \right) \\ &= \frac{1}{t - t'} \left( \frac{(t-t')Y_u - (t-t')Y_s}{u-s} \right) \\ &= \frac{Y_u - Y_s}{u - s} \quad \square \end{aligned}$$

### Bemerkung 3.6

Diese Eigenschaft wird in [20] verwendet, um eine Verbindung zwischen Harness-Prozessen und den sogenannten "Past-Future-Martingales" herzustellen. Sie findet auch in [7] als spezielle Eigenschaft der Brownschen Bewegung Verwendung.

Im Gegensatz zu Harness-Prozessen in diskreter Zeit, kann man in stetiger Zeit einige interessante Prozesse finden, die Harness-Prozesse sind. Die folgenden Beispiele sind in [6], S.198-200, inklusive kurzer Beweisskizzen nachzulesen. Wir führen die Beweise für die ersten beiden Beispiele ausführlicher durch, da wir sie im weiteren Kapitel verwenden wollen. Wir setzen im Folgenden voraus, dass

$$\mathcal{G}_s = \sigma(Y_r | r \leq s) \quad \mathcal{H}_s = \sigma(Y_r | s \leq r) \quad \forall s \geq 0$$

für den jeweils betrachteten Prozess  $Y = (Y_t)_{t \geq 0}$ .

### Beispiel 3.7 (Affine Prozesse)

Seien  $R$  und  $S$  zwei integrierbare Zufallsvariablen, die messbar sind bezüglich  $\sigma(\mathcal{G}_0, \mathcal{H}_\infty)$ , dann ist  $(Y_t)_{t > 0} := (S + tR)_{t > 0}$  ein Harness-Prozess.

**Beweis** Sei  $s < t < u$ , dann gilt mit  $\mathcal{G}_0 \subseteq \mathcal{G}_s$  und  $\mathcal{H}_\infty \subseteq \mathcal{H}_u$ ,  $\forall s, u \in \mathbb{R}^+$ :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[Y_t | \mathcal{G}_s, \mathcal{H}_u] &= S + tR \\ &= \frac{u-t}{u-s} (S + sR) + \frac{t-s}{u-s} (S + uR) \\ &= \frac{u-t}{u-s} Y_s + \frac{t-s}{u-s} Y_u \quad \square \end{aligned}$$

**Beispiel 3.8 (Brownsche Bewegung)**

$(B_t)_{t \geq 0}$  bezeichne eine Standard Brownsche Bewegung. Dann ist  $(B_t)_{t \geq 0}$  auch ein Harness-Prozess.

Bevor wir die Aussage beweisen, rufen wir uns die Definition der Brownschen-Bewegung und ihre Charakterisierung nach P. Lévy in Erinnerung:

**Definition 3.9 (Brownsche Bewegung, [18])**

Ein reellwertiger stochastischer Prozess  $B = (B_t)_{t \geq 0}$  heißt Brownsche Bewegung, falls

- i)  $B_0 = 0$   $\mathbb{P}$ -fast sicher,
- ii)  $B$  hat unabhängige, stationäre Zuwächse, das heißt:

unabhängige Zuwächse: für alle  $n \in \mathbb{N}$  und alle  $t_0 < t_1 < \dots < t_n$  gilt

$$(B_{t_i} - B_{t_{i-1}})_{i=1, \dots, n} \text{ ist unabhängig.}$$

stationäre Zuwächse: für alle  $r, s, t \geq 0$  ist

$$B_{s+t+r} - B_{t+r} \sim B_{s+t} - B_t.$$

- iii)  $B_t \sim \mathcal{N}(0, t)$  für  $t > 0$ ,
- iv)  $t \mapsto B_t$  ist  $\mathbb{P}$ -fast sicher stetig.

Die folgende Charakterisierung der Brownschen Bewegung, die wir im Abschnitt 3.4 benötigen, kann zum Beispiel in [18], S.559, nachgelesen werden.

**Proposition 3.10 (Lévy Charakterisierung der Brownschen Bewegung)**

Es sei  $Z = (Z_t)_{t \geq 0}$  ein stochastischer Prozess für den gilt: Wenn  $Z$  ein Martingal ist mit  $Z_0 = 0$   $\mathbb{P}$ -fast sicher, dann sind folgende Bedingungen äquivalent:

1. die quadratische Variation von  $Z$  erfüllt für alle  $t \geq 0$ :  $\langle Z \rangle_t = t$ ,
2.  $(Z_t^2 - t)_{t \geq 0}$  ist ein Martingal,
3.  $Z$  ist eine Brownsche Bewegung.

**Beweis zu Beispiel 3.8** In [19] hat P. Lévy bereits gezeigt, dass

$$B_t - \frac{t-s}{u-s} B_u - \frac{u-t}{u-s} B_s$$

für  $0 < s < t < u$  unabhängig von  $\sigma(\mathcal{G}_s, \mathcal{H}_u)$  ist.

**Denn:**

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left[ B_t - \frac{t-s}{u-s} B_u - \frac{u-t}{u-s} B_s \mid \mathcal{G}_s, \mathcal{H}_u \right] \\ &= \mathbb{E} \left[ \mathbb{E} \left[ B_t - \frac{t-s}{u-s} B_u \mid \mathcal{G}_s \right] \mid \mathcal{G}_s, \mathcal{H}_u \right] - \frac{u-t}{u-s} B_s \\ &= B_s - \frac{t-s}{u-s} B_s - \frac{u-t}{u-s} B_s = 0. \end{aligned}$$

Andererseits ist eine Brownsche Bewegung auch ein Gaußscher- und ein Lévy Prozess, siehe [16], S.30, 599. Das bedeutet hier, dass reelle Zahlen  $v$  und  $w$  existieren, so dass

$$\mathbb{E}[B_t | \mathcal{G}_s, \mathcal{H}_u] = vB_s + wB_u$$

Daraus erhalten wir

$$\mathbb{E}[B_t - B_s | \mathcal{G}_s, \mathcal{H}_u] = (v - 1 + w)B_s + w(B_u - B_s). \quad (3.5)$$

Wir wollen jetzt zeigen, dass die reellen Zahlen  $v$  und  $w$  die Form der Harness-Bedingung haben. Dazu betrachten wir die folgenden Erwartungswerte.

$$\mathbb{E}[B_s(B_t - B_s)] = \mathbb{E}[B_s \underbrace{\mathbb{E}[B_t - B_s | \mathcal{G}_s]}_{=0}] = 0. \quad (3.6)$$

Andererseits erhalten wir für denselben Erwartungswert mit (3.5) folgendes

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[B_s(B_t - B_s)] &= \mathbb{E}[B_s \mathbb{E}[B_t - B_s | \mathcal{G}_s, \mathcal{H}_u]] \\ &= \mathbb{E}[B_s ((v - 1 + w)B_s + w(B_u - B_s))] \\ &= (v - 1 + w) \mathbb{E}[B_s^2] + w \underbrace{\mathbb{E}[B_s(B_u - B_s)]}_{=0} \\ &= s(v - 1 + w). \end{aligned} \quad (3.7)$$

Wegen  $s > 0$ , ergibt sich aus (3.6) und (3.7), dass

$$0 = v - 1 + w \quad (3.8)$$

Auf ähnliche Weise erhalten wir eine zweite Bedingung für die Zahlen  $v$  und  $w$ .

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[(B_t - B_s)(B_u - B_s)] &= \mathbb{E}[(B_t - B_s) \mathbb{E}[B_u - B_s | \mathcal{G}_t]] \\ &= \mathbb{E}[(B_t - B_s)^2] \\ &= t - s. \end{aligned}$$

Es folgt aber auch für denselben Erwartungswert mit (3.5)

$$\begin{aligned} t - s &= \mathbb{E}[(B_t - B_s)(B_u - B_s)] \\ &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[B_t - B_s | \mathcal{G}_s, \mathcal{H}_u](B_u - B_s)] \\ &= (v - 1 + w) \underbrace{\mathbb{E}[B_s(B_t - B_s)]}_{=0} + w \underbrace{\mathbb{E}[(B_u - B_s)^2]}_{=u-s} \\ &= w(u - s) \end{aligned} \quad (3.9)$$

woraus mit (3.8) folgt

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad w &= \frac{t - s}{u - s} \\ \Rightarrow \quad v &= \frac{u - t}{u - s} \end{aligned}$$

□

**Beispiel 3.11**1. *Lévy Prozess:*

Sei  $Y := (Y_t)_{t \geq 0}$  ein Lévy Prozess bezüglich der Filtration  $(\mathcal{G}_t)_{t \geq 0}$ , also gemäß [16, 2] ein  $\mathbb{R}^d$ -wertiger stochastischer Prozess mit

- i)  $Y_0 = 0$ ,
- ii) für alle  $s, t \geq 0$  ist  $Y_{t+s} - Y_s$  unabhängig von  $\mathcal{G}_s$ ,
- iii) für alle  $s, t \geq 0$  haben die Zufallsvariablen  $Y_{t+s} - Y_s$  und  $Y_t$  die gleiche Verteilung,
- iv)  $Y$  ist stochastisch stetig, das heißt für jedes  $t > 0$  und beliebiges  $\varepsilon > 0$  gilt

$$\lim_{u \rightarrow t} \mathbb{P}(|Y_t - Y_u| > \varepsilon) = 0.$$

Falls  $Y$  integrierbar ist, bildet  $Y$  einen Harness-Prozess.

2. *Gaußscher Prozess:*

Sei  $Y := (Y_t)_{t \geq 0}$  ein zentrierter Gaußscher Prozess, das heißt: für  $n \in \mathbb{N}$  und  $t_1, \dots, t_n \geq 0$  gilt

$$(Y_{t_1}, Y_{t_2}, \dots, Y_{t_n}) \quad \text{ist n-dimensional normalverteilt.}$$

Wenn  $Y$  außerdem Markovsch ist, also für jedes  $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ , die Borelmengen von  $\mathbb{R}$ , und jedes Paar  $s, t \geq 0$  mit  $s \leq t$  gilt

$$\mathbb{P}(Y_t \in A | \mathcal{G}_s) = \mathbb{P}(Y_t \in A | Y_s),$$

dann existieren Konstanten  $\alpha_{s,t,u}$  und  $\beta_{s,t,u}$  so dass

$$\mathbb{E}[Y_t | \mathcal{G}_s, \mathcal{H}_u] = \alpha_{s,t,u} Y_s + \beta_{s,t,u} Y_u \quad \text{für alle } 0 < s < t < u.$$

3. *Prozess mit stationären Zuwächsen:*

Sei  $Y := (Y_t)_{t \geq 0}$  ein in  $\mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  stetiger Prozess mit stationären Zuwächsen. Dann ist  $(Y_t)_{t \geq 0}$  ein Harness-Prozess.

4. *Differenzierbarer Harness-Prozess:*

Wenn ein Harness-Prozess  $(Y_t)_{t \geq 0}$   $\mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ -differenzierbar ist, das heißt

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{Y_{t+h} - Y_t}{h} = Y_t \quad \text{in } \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}),$$

dann ist  $\mathbb{P}(Y_s = Y_t) = 1$  für alle  $s, t$  und  $(Y_t)_{t \geq 0}$  ist ein trivialer Harness-Prozess, das heißt für alle  $s, t$  ist  $Y_t = S + tR$  für integrierbare Zufallsvariablen  $R$  und  $S$ , die  $\sigma(\mathcal{G}_0, \mathcal{H}_\infty)$ -messbar sind.

**Beweis** Die erste Aussage haben wir bereits für einen Spezialfall bewiesen, da jede Brownsche Bewegung auch ein Lévy Prozess ist. Für einen allgemeinen Nachweis siehe zum Beispiel [16], S.620, 621. Die anderen Beispiele können in [6] nachgelesen werden.  $\square$

## 3.2 DER ZU $Y$ ASSOZIIERTE PROZESSE $\tilde{Y}$

Wir wenden uns nun der angekündigten Zerlegung von Harness-Prozessen über  $\mathbb{R}^+$  zu. Wir werden also zeigen, dass für Harness-Prozesse  $(Y_t)_{t>0}$ , unter gewissen Zusatzvoraussetzungen, Zufallsvariablen  $R, S$  und  $\alpha$  existieren, so dass

$$Y_t = S + tR + \sqrt{\alpha}B_t \quad \mathbb{P}\text{-fast sicher } \forall t > 0,$$

wobei  $(B_t)_{t \geq 0}$  eine Standard Brownsche Bewegung bezeichnet. Diese Zerlegung ist aus stochastischer Sicht deutlich interessanter als die unter diskreter Zeit, da sie insbesondere von der Brownschen Bewegung abhängt und ihre Pfade damit im Allgemeinen keine Geraden mehr bilden.

Für den Beweis ist auch hier wieder die Symmetrie der Definition von Harness-Prozessen von zentraler Bedeutung. Allerdings unterscheidet sich die konkrete Beweisführung dadurch, dass die Zeitachse nicht mehr symmetrisch ist. Im diskreten Fall sind wir in 0, beziehungsweise verschoben in  $n$  gestartet und Richtung  $-\infty$  gegangen. Dann haben wir die Symmetrie ausgenutzt und die Zeit umgekehrt. So können wir in stetiger Zeit nicht vorgehen, da wir nur  $\mathbb{R}^+$  betrachten. Stattdessen werden wir im Zeitpunkt  $t$  beginnen und den Grenzwert in Richtung  $+\infty$  bilden. Um die Zeit umzukehren, haben wir dann zwei Möglichkeiten. Wir betrachten entweder bei einem Start in  $t$  den Grenzwert in Richtung 0 oder wir invertieren  $t$  und untersuchen somit den Prozess bezüglich  $\frac{1}{t}$  für  $t \rightarrow +\infty$ .

Dazu betrachten wir zunächst den ersten Teil der oben erwähnten Zerlegung von Harness-Prozessen über  $\mathbb{R}^+$ . Wir definieren dafür zwei Zufallsvariablen  $R$  und  $S$ , die wir anschließend zu einem von der Zeit affin abhängenden Prozess zusammensetzen. Wir können damit dann einen Prozess identifizieren, der die Differenz zwischen dem betrachteten Harness-Prozess  $Y$  und dem zuvor konstruierten affinen Prozess  $(S + tR)_{t>0}$  beschreibt. Auf diesen sogenannten zu  $Y$  assoziierten Prozess wollen wir uns konzentrieren. Er bildet wieder einen Harness-Prozess, wie wir in Proposition 3.16 zeigen und erfüllt außerdem interessante Grenzwert- und Martingaleigenschaften, die wir in den folgenden Abschnitten verwenden wollen.

### Proposition 3.12 (Existenz von $R$ und $S$ )

Für einen Harness-Prozess  $Y = (Y_t)_{t>0}$  sind folgende Aussagen erfüllt:

1. Es existieren  $\mathbb{P}$ -fast sicher und in  $\mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$

$$R := \lim_{u \nearrow +\infty} \frac{1}{u} Y_u \quad \text{und} \quad S := \lim_{s \searrow 0} Y_s. \quad (3.10)$$

2.  $R$  und  $S$  sind  $\mathcal{T}_\infty$ -messbar, wobei  $\mathcal{T}_\infty = \sigma(\mathcal{G}_0, \mathcal{H}_\infty)$  wie in (3.3).
3.  $(Y_t - tR)_{t>0}$  ist ein Martingal bezüglich  $(\sigma(\mathcal{G}_t, \mathcal{H}_\infty))_{t>0}$ .
4.  $(\frac{1}{t}(Y_t - S))_{t>0}$  ist ein Rückwärtsmartingal bezüglich  $(\sigma(\mathcal{G}_0, \mathcal{H}_t))_{t>0}$ .

**Beweis** Sei  $Y$  ein Harness-Prozess und sei  $s < t < u$ . Wir zeigen erst die Existenz der Zufallsvariablen  $R$  und  $S$  analog zum Beweis von Proposition 2.13 und folgern daraus die Martingaleigenschaften analog zum Beweis von Proposition 2.15. Zum Beweis der Existenz von  $R$  nutzen wir Korollar 1.9, für  $M_u := \mathbb{E}[Y_t | \mathcal{G}_s, \mathcal{H}_u]$ . Damit existiert

$$M_\infty = \lim_{u \nearrow +\infty} M_u \quad \mathbb{P}\text{-fast sicher und in } \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$$

$$\text{und es gilt} \quad M_\infty = \mathbb{E} \left[ Y_t \mid \lim_{u \nearrow +\infty} \sigma(\mathcal{G}_s, \mathcal{H}_u) \right] \quad \mathbb{P}\text{-fast sicher.}$$

Die Harness-Eigenschaft (3.4) liefert dabei, dass

$$\begin{aligned} M_\infty &= \lim_{u \nearrow +\infty} \mathbb{E}[Y_t | \mathcal{G}_s, \mathcal{H}_u] = \lim_{u \nearrow +\infty} \left( \frac{u-t}{u-s} Y_s + \frac{t-s}{u-s} Y_u \right) \\ &= Y_s + (t-s) \lim_{u \nearrow +\infty} \left( \frac{1}{u-s} Y_u \right) \\ &= Y_s + (t-s)R. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Daraus folgt, dass  $R$   $\mathbb{P}$ -fast sicher und in  $\mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  existiert. Per Definition von  $\mathcal{H}_\infty$  (3.2) und weil der Prozess  $(Y_t)_{t>0}$  and die  $\sigma$ -Algebren  $(\mathcal{H}_t)_{t>0}$  adaptiert ist, folgt  $R$  ist  $\mathcal{H}_\infty$ - und damit auch  $\mathcal{T}_\infty$ -messbar. Für den nächsten Schritt nutzen wir erneut die Turmeigenschaft (1.1) und die triviale Inklusion wie in Proposition 2.12 (2) für  $\sigma$ -Algebren in stetiger Zeit.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[Y_t | \mathcal{G}_s, \mathcal{H}_\infty] &= \mathbb{E} \left[ \mathbb{E} \left[ Y_t \mid \lim_{u \nearrow +\infty} \sigma(\mathcal{G}_s, \mathcal{H}_u) \right] \mid \mathcal{G}_s, \mathcal{H}_\infty \right] \\ &= \mathbb{E}[Y_s + (t-s)R | \mathcal{G}_s, \mathcal{H}_\infty] \quad \text{wegen (3.11),} \\ &= Y_s + (t-s)R. \end{aligned}$$

Wir erhalten damit

$$\mathbb{E}[Y_t - tR | \mathcal{G}_s, \mathcal{H}_\infty] = Y_s - sR$$

Mit Korollar 1.9, allerdings für  $s \rightarrow 0$  und  $M_s := \mathbb{E}[Y_t | \mathcal{G}_s, \mathcal{H}_u]$ , folgern wir analog die Existenz von  $S$ . Damit existiert  $M_0$   $\mathbb{P}$ -fast sicher und in  $\mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ , so dass wir mit der Harness-Eigenschaft (3.4)

$$\begin{aligned} M_0 &= \lim_{s \searrow 0} \mathbb{E}[Y_t | \mathcal{G}_s, \mathcal{H}_u] = \lim_{s \searrow 0} \left( \frac{u-t}{u-s} Y_s + \frac{t-s}{u-s} Y_u \right) \\ &= \frac{u-t}{u} \lim_{s \searrow 0} Y_s + \frac{t}{u} Y_u. \end{aligned} \quad (3.12)$$

erhalten, woraus die Existenz von

$$S = \lim_{s \searrow 0} Y_s$$

$\mathbb{P}$ -fast sicher und in  $\mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  folgt. Wegen der Adaptiertheit von  $(Y_t)_{t>0}$  an  $(\mathcal{G}_t)_{t>0}$  ist  $S$  außerdem  $\mathcal{G}_0$ - und damit auch  $\mathcal{T}_\infty$ -messbar. Die Turmeigenschaft

liefert nun, dass  $(\frac{1}{t}(Y_t - S))_{t>0}$  ein Rückwärtsmartingal ist:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[Y_t | \mathcal{G}_0, \mathcal{H}_u] &= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[Y_t \mid \lim_{s \searrow 0} \sigma(\mathcal{G}_s, \mathcal{H}_u)\right] \mid \mathcal{G}_0, \mathcal{H}_u\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\frac{u-t}{u}S + \frac{t}{u}Y_u \mid \mathcal{G}_0, \mathcal{H}_u\right] && \text{wegen (3.12),} \\ &= \frac{u-t}{u}S + \frac{t}{u}Y_u \\ &= S + \frac{t}{u}(Y_u - S).\end{aligned}$$

Es gilt damit

$$\mathbb{E}\left[\frac{1}{t}(Y_t - S) \mid \mathcal{G}_0, \mathcal{H}_u\right] = \frac{1}{u}(Y_u - S) \quad \square$$

**Bemerkung 3.13 (Messbarkeit von  $R$  und  $S$ )**

1. Als Grenzwerte von in  $\mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  konvergenten integrierbaren Zufallsvariablen, sind  $R$  und  $S$  ebenfalls integrierbar.
2. Ähnlich wie im diskreten Fall die Zufallsvariablen  $L$  und  $A$ , existieren für  $t \rightarrow \infty$  die Zufallsvariable  $R$  und für  $t \rightarrow 0$  die Zufallsvariable  $S$ . Und so erhalten wir auch eine Martingal- beziehungsweise Rückwärtsmartingaleigenschaft. Allerdings sind im diskreten Fall das Martingal und das Rückwärtsmartingal identisch  $(X_n - nL)_{n \in \mathbb{Z}}$ , bezüglich verschiedener  $\sigma$ -Algebren. In stetiger Zeit sind  $(Y_t - tR)_{t>0}$  und  $(\frac{1}{t}(Y_t - S))_{t>0}$  verschieden. Das liegt daran, dass die Zeit nicht auf lineare Weise symmetrisiert ist, wie im diskreten Fall. Wir bilden nicht die Grenzwerte in Richtung  $\pm\infty$ , sondern betrachten die Grenzwerte gegen  $+\infty$  und gegen 0. In Kapitel 4 werden wir auf die Frage eingehen, ob Harness-Prozesse über  $R$  doch wieder die eben erwähnten symmetrische Eigenschaften haben, so wie im diskreten Fall.

**Definition 3.14 (Zu  $Y$  assoziierter Prozess  $\tilde{Y}$ )**

Sei  $Y = (Y_t)_{t>0}$  ein Harness-Prozess, und seien  $R$  und  $S$  die in (3.10) definierten Zufallsvariablen. Dann bezeichnen wir

$$\tilde{Y}_t := Y_t - tR - S \quad \forall t > 0 \tag{3.13}$$

als den zu  $Y$  assoziierten Prozess  $\tilde{Y} = (\tilde{Y}_t)_{t>0}$ .

**Bemerkung 3.15 (Bedeutung des assoziierten Prozesses  $\tilde{Y}$ )**

Wir wollen jetzt zeigen, dass  $\tilde{Y}$  ein Vielfaches einer Brownschen Bewegung ist. Dafür nutzen wir die Lévy Charakterisierung der Brownschen Bewegung, Proposition 3.10, und beweisen nacheinander, dass  $\tilde{Y}_0 = 0$ ,  $\tilde{Y}$  ein Martingal ist und die quadratische Variation von  $\tilde{Y}$  für eine nicht-negative Zufallsvariable  $\alpha$  erfüllt  $\langle \tilde{Y} \rangle_t = \alpha t$ .

**Proposition 3.16**

Sei  $Y = (Y_t)_{t>0}$  ein Harness-Prozess, dann ist der in (3.13) definierte assoziierte Prozess  $\tilde{Y} = (\tilde{Y}_t)_{t>0}$ , ein Harness-Prozess, der außerdem folgende Eigenschaften erfüllt:

$$\lim_{s \searrow 0} \tilde{Y}_s = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{u \nearrow +\infty} \frac{1}{u} \tilde{Y}_u = 0. \tag{3.14}$$



**Beweis** Wir zeigen zunächst, dass  $\tilde{Y}$  ein Harness-Prozess ist.  $\tilde{Y}_t$  ist integrierbar für alle  $t > 0$ , da sowohl  $R$  und  $S$ , als auch  $Y_t$  integrierbar sind für alle  $t > 0$ . Außerdem ist  $(\tilde{Y}_t)_{t>0}$  an die  $\sigma$ -Algebren  $(\mathcal{G}_t)_{t>0}$  und  $(\mathcal{H}_t)_{t>0}$  adaptiert, weil  $Y$  als Harness-Prozess und  $R$  und  $S$  aufgrund ihrer  $\mathcal{T}_\infty$ -Messbarkeit an  $(\mathcal{G}_t)_{t>0}$  und  $(\mathcal{H}_t)_{t>0}$  adaptiert sind. Die Harness-Eigenschaft ergibt sich ebenfalls aus den Harness-Eigenschaften von  $Y$  und  $(S + tR)_{t>0}$ .

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[ \tilde{Y}_t | \mathcal{G}_s, \mathcal{H}_u \right] &= \mathbb{E} [Y_t | \mathcal{G}_s, \mathcal{H}_u] - S - tR \\ &= \frac{u-t}{u-s} Y_s + \frac{t-s}{u-s} Y_u - \frac{u-t}{u-s} (S + sR) - \frac{t-s}{u-s} (S + uR) \\ &= \frac{u-t}{u-s} \tilde{Y}_s + \frac{t-s}{u-s} \tilde{Y}_u. \end{aligned}$$

Die Grenzwerteigenschaften von  $\tilde{Y}$  folgen direkt aus der Definition von  $R$  und  $S$ :

$$\lim_{s \searrow 0} \tilde{Y}_s = \lim_{s \searrow 0} (Y_s - S - sR) = \lim_{s \searrow 0} Y_s - S = 0$$

und

$$\lim_{u \nearrow +\infty} \frac{1}{u} \tilde{Y}_u = \lim_{u \nearrow +\infty} \frac{1}{u} (Y_u - S - uR) = \lim_{u \nearrow +\infty} \frac{Y_u}{u} - \lim_{u \nearrow +\infty} \frac{S}{u} - R = 0 \quad \square$$

### Folgerung 3.17 (Translationsinvarianz)

Die Harness-Eigenschaft (3.4) bleibt also bei Translation durch integrierbare Prozesse der Form  $\{S + tR | t > 0; R, S \in \mathcal{T}_\infty\}$  erhalten. Dies liegt daran, dass Prozesse der obigen Form selbst Harness-Prozesse sind, siehe Abschnitt 3.1, und die Zeit linear eingeht. Würde stattdessen zum Beispiel einen Harness-Prozess um einen Prozess der Form  $(R + t^2 S)_{t>0}$  verschoben werden, dann ginge die Harness-Eigenschaft verloren.

### Proposition 3.18 (Martingaleigenschaften)

Der zu  $Y$  assoziierte Harness-Prozess  $\tilde{Y}$  ist ein Martingal bezüglich der Filtration  $(\sigma(\mathcal{G}_s, \mathcal{H}_\infty))_{s>0}$  und der Prozess  $(\frac{\tilde{Y}_u}{u})_{u>0}$  ist ein Rückwärtsmartingal bezüglich der  $\sigma$ -Algebren  $(\sigma(\mathcal{G}_0, \mathcal{H}_u))_{u>0}$ .

**Beweis** Integrier- und Messbarkeit erbt  $\tilde{Y}$  von  $Y$ . Daher reicht es, die Martingaleigenschaft nachzuprüfen. Mithilfe der Proposition 3.16 und Korollar 1.9, angewendet auf  $M_u := \mathbb{E} \left[ \tilde{Y}_t | \mathcal{G}_s, \mathcal{H}_u \right]$  erhalten wir die  $\mathbb{P}$ -fast sichere und  $\mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  Existenz von

$$\lim_{u \nearrow +\infty} \mathbb{E} \left[ \tilde{Y}_t | \mathcal{G}_s, \mathcal{H}_u \right] = \lim_{u \nearrow +\infty} \frac{u-t}{u-s} \tilde{Y}_s + \lim_{u \nearrow +\infty} \frac{t-s}{u-s} \tilde{Y}_u = \tilde{Y}_s.$$

Korollar 1.9 liefert außerdem, dass

$$\lim_{u \nearrow +\infty} \mathbb{E} \left[ \tilde{Y}_t | \mathcal{G}_s, \mathcal{H}_u \right] = \mathbb{E} \left[ \tilde{Y}_t | \lim_{u \nearrow +\infty} \sigma(\mathcal{G}_s, \mathcal{H}_u) \right]$$

und damit

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\tilde{Y}_t|\mathcal{G}_s, \mathcal{H}_\infty] &= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[\tilde{Y}_t \mid \lim_{u \nearrow +\infty} \sigma(\mathcal{G}_s, \mathcal{H}_u)\right] \mid \mathcal{G}_s, \mathcal{H}_\infty\right] \\ &= \mathbb{E}[\tilde{Y}_s|\mathcal{G}_s, \mathcal{H}_\infty] \\ &= \tilde{Y}_s.\end{aligned}$$

Die Rückwärtsmartingaleigenschaft von  $(Y_t)_{t>0}$  folgt analog, wobei wir  $s \rightarrow 0$  anstelle von  $u \rightarrow \infty$  betrachten. Nach Korollar 1.9 existiert  $\mathbb{P}$ -fast sicher und in  $\mathcal{L}^1$

$$\frac{1}{t} \lim_{s \searrow 0} \mathbb{E}[\tilde{Y}_t|\mathcal{G}_s, \mathcal{H}_u] = \frac{1}{t} \lim_{s \searrow 0} \left( \frac{u-t}{u-s} \tilde{Y}_s + \frac{t-s}{u-s} \tilde{Y}_u \right) \stackrel{(3.14)}{=} \frac{1}{u} \tilde{Y}_u.$$

Jetzt können wir mittels der Turmeigenschaft (1.1) folgern, dass

$$\mathbb{E}\left[\frac{\tilde{Y}_t}{t} \mid \mathcal{G}_0, \mathcal{H}_u\right] = \frac{1}{t} \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[\tilde{Y}_t \mid \lim_{s \searrow 0} \sigma(\mathcal{G}_s, \mathcal{H}_u)\right] \mid \mathcal{G}_0, \mathcal{H}_u\right] = \mathbb{E}\left[\frac{1}{u} \tilde{Y}_u \mid \mathcal{G}_0, \mathcal{H}_u\right] = \frac{1}{u} \tilde{Y}_u.$$

□

### 3.3 QUADRATISCHE VARIATIONEN

Ab jetzt werden wir die Zeit getrennt betrachten. Wir wollen die quadratische Variation von  $\tilde{Y}$  identifizieren. Dafür gehen wir zunächst nur von der Martingaleigenschaft von  $\tilde{Y}$  aus. Später werden wir ganz analog die Rückwärtsmartingaleigenschaft von  $(\frac{\tilde{Y}_t}{t})_{t>0}$  ausnutzen, um damit die quadratische Variation von  $(\frac{\tilde{Y}_t}{t})_{t>0}$  zu bestimmen. Für die Herleitung benutzen wir zwei Hilfsprozesse, die wir mit  $(\alpha_s)_{s>0}$  und  $(\beta_s)_{s>0}$  bezeichnen werden.

#### Zusatzannahme

Für den weiteren Verlauf dieses Kapitels nehmen wir zusätzlich an, dass der Harness-Prozess  $Y$  quadrat-integrierbar sei. Die Aussage des Korollars 1.9 kann zu  $\mathcal{L}^p$ -Konvergenz verallgemeinert werden, [8], und daraus kann insbesondere die  $\mathcal{L}^2$ -Konvergenz für  $R$  und  $S$  gefolgert werden. Damit sind dann auch  $R$  und  $S$  quadrat-integrierbar. Dies hat zur Folge, dass der zu  $Y$  assoziierte Prozess  $\tilde{Y}$  die Quadrat-Integrierbarkeit von  $Y$  erbt.

#### 3.3.1 DIE QUADRATISCHE VARIATION DES ZU $Y$ ASSOZIIERTEN PROZESSES

##### Proposition 3.19 (Definition und Existenz von $(\alpha_s)_{s>0}$ )

$\tilde{Y}$  bezeichne den zu  $Y$  assoziierten Prozess. Dann existiert für alle  $s > 0$  eine nicht-negative,  $\sigma(\mathcal{G}_s, \mathcal{H}_\infty)$ -messbare Zufallsvariable  $\alpha_s$ , so dass

$$\mathbb{E}[\tilde{Y}_t^2 - \tilde{Y}_s^2 | \mathcal{G}_s, \mathcal{H}_\infty] = (t-s) \alpha_s \quad \text{für alle } t > s. \quad (3.15)$$

**Beweis** Die Martingaleigenschaft von  $\tilde{Y}$  liefert, dass

$$\mathbb{E}[\tilde{Y}_t \tilde{Y}_u | \mathcal{G}_t, \mathcal{H}_\infty] = \tilde{Y}_t \mathbb{E}[\tilde{Y}_u | \mathcal{G}_t, \mathcal{H}_\infty] = \tilde{Y}_t^2.$$

Dies nutzen wir aus und erhalten mithilfe der Turmeigenschaft (1.1) eine allgemeinere Aussage für  $s \leq t < u$ :

$$\mathbb{E}[\tilde{Y}_t \tilde{Y}_u | \mathcal{G}_s, \mathcal{H}_\infty] = \mathbb{E}[\tilde{Y}_t \mathbb{E}[\tilde{Y}_u | \mathcal{G}_t, \mathcal{H}_\infty] | \mathcal{G}_s, \mathcal{H}_\infty] = \mathbb{E}[\tilde{Y}_t^2 | \mathcal{G}_s, \mathcal{H}_\infty] \quad (3.16)$$

Andererseits erhalten wir mit (1.1), der Harness-Eigenschaft (3.4) und der Martingaleigenschaft des Prozesses  $\tilde{Y}$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\tilde{Y}_t \tilde{Y}_u | \mathcal{G}_s, \mathcal{H}_\infty] &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[\tilde{Y}_t | \mathcal{G}_s, \mathcal{H}_u] \tilde{Y}_u | \mathcal{G}_s, \mathcal{H}_\infty] \\ &= \mathbb{E}\left[\left(\frac{u-t}{u-s} \tilde{Y}_s + \frac{t-s}{u-s} \tilde{Y}_u\right) \tilde{Y}_u | \mathcal{G}_s, \mathcal{H}_\infty\right] \\ &= \frac{u-t}{u-s} \tilde{Y}_s \mathbb{E}[\tilde{Y}_u | \mathcal{G}_s, \mathcal{H}_\infty] + \frac{t-s}{u-s} \mathbb{E}[\tilde{Y}_u^2 | \mathcal{G}_s, \mathcal{H}_\infty] \\ &= \frac{u-t}{u-s} \tilde{Y}_s^2 + \frac{t-s}{u-s} \mathbb{E}[\tilde{Y}_u^2 | \mathcal{G}_s, \mathcal{H}_\infty]. \end{aligned}$$

Es ist also wegen (3.16)

$$\mathbb{E}[\tilde{Y}_t^2 | \mathcal{G}_s, \mathcal{H}_\infty] = \frac{u-t}{u-s} \tilde{Y}_s^2 + \frac{t-s}{u-s} \mathbb{E}[\tilde{Y}_u^2 | \mathcal{G}_s, \mathcal{H}_\infty],$$

so dass insbesondere

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\tilde{Y}_t^2 - \tilde{Y}_s^2 | \mathcal{G}_s, \mathcal{H}_\infty] &= \frac{t-s}{u-s} \left( \mathbb{E}[\tilde{Y}_u^2 | \mathcal{G}_s, \mathcal{H}_\infty] - \tilde{Y}_s^2 \right) \\ &= \frac{t-s}{u-s} \mathbb{E}[\tilde{Y}_u^2 - \tilde{Y}_s^2 | \mathcal{G}_s, \mathcal{H}_\infty] \end{aligned}$$

und somit

$$\alpha_s := \frac{1}{u-s} \mathbb{E}[\tilde{Y}_u^2 - \tilde{Y}_s^2 | \mathcal{G}_s, \mathcal{H}_\infty].$$

Für den Beweis der Nicht-Negativität von  $(\alpha_s)_{s>0}$  benötigen wir nur die Martingaleigenschaft von  $(\tilde{Y}_t)_{t>0}$ . Durch einsetzen von

$$\tilde{Y}_t^2 - \tilde{Y}_s^2 = (\tilde{Y}_s + \tilde{Y}_t - \tilde{Y}_s)^2 - \tilde{Y}_s^2 = 2\tilde{Y}_s(\tilde{Y}_t - \tilde{Y}_s) + (\tilde{Y}_t - \tilde{Y}_s)^2$$

in (3.15), erhalten wir für  $0 < s < t$

$$\begin{aligned} (t-s)\alpha_s &= \mathbb{E}[\tilde{Y}_t^2 - \tilde{Y}_s^2 | \mathcal{G}_s, \mathcal{H}_\infty] \\ &= 2\tilde{Y}_s \mathbb{E}[\tilde{Y}_t | \mathcal{G}_s, \mathcal{H}_\infty] - 2\tilde{Y}_s^2 + \mathbb{E}[(\tilde{Y}_t - \tilde{Y}_s)^2 | \mathcal{G}_s, \mathcal{H}_\infty] \\ &= \mathbb{E}[(\tilde{Y}_t - \tilde{Y}_s)^2 | \mathcal{G}_s, \mathcal{H}_\infty] \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

Die Messbarkeit folgt per Konstruktion.  $\square$

Nun wollen wir für  $(\alpha_s)_{s>0}$  ein paar Eigenschaften zeigen, um beweisen zu können, dass  $\langle \tilde{Y} \rangle_t = \int_0^t \alpha_s ds$  die quadratische Variation von  $\tilde{Y}$  ist. Dazu zunächst folgendes Lemma.

**Lemma 3.20 (Martingaleigenschaft von  $(\alpha_s)_{s>0}$ )**

Sei  $(\alpha_s)_{s>0}$  aus Proposition 3.19. Dann ist  $(\alpha_s)_{s>0}$  ein Martingal bezüglich der Filtration  $(\sigma(\mathcal{G}_s, \mathcal{H}_\infty))_{s>0}$ .

**Beweis** Wir müssen wiederum nur die Martingaleigenschaft überprüfen, da die Integrier- und Messbarkeit bereits aus der Konstruktion folgt. Für  $s < t < u$  gilt:

$$\begin{aligned} (u-s)\alpha_s &= \mathbb{E}[\tilde{Y}_u^2 - \tilde{Y}_s^2 | \mathcal{G}_s, \mathcal{H}_\infty] \\ &= \mathbb{E}[\tilde{Y}_u^2 - \tilde{Y}_t^2 | \mathcal{G}_s, \mathcal{H}_\infty] + \mathbb{E}[\tilde{Y}_t^2 - \tilde{Y}_s^2 | \mathcal{G}_s, \mathcal{H}_\infty] \\ &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[\tilde{Y}_u^2 - \tilde{Y}_t^2 | \mathcal{G}_t, \mathcal{H}_\infty] | \mathcal{G}_s, \mathcal{H}_\infty] + (t-s)\alpha_s \\ &= (u-t)\mathbb{E}[\alpha_t | \mathcal{G}_s, \mathcal{H}_\infty] + (t-s)\alpha_s, \end{aligned}$$

so dass

$$\mathbb{E}[\alpha_t | \mathcal{G}_s, \mathcal{H}_\infty] = \alpha_s. \quad \square$$

**Lemma 3.21 (Rechts-Stetigkeit von  $(\alpha_s)_{s>0}$ )**

$s \mapsto \alpha_s$  ist rechts-stetig, für  $(\alpha_s)_{s>0}$  aus (3.15).

**Beweis** Zu zeigen ist

$$\lim_{u \searrow t} \alpha_u = \alpha_t \quad \text{für alle } t > 0.$$

Die Familie  $(\mathcal{G}_s)_{s>0}$  ist rechts-stetig und aufgrund der Monotonie ist auch erfüllt, dass

$$\bigcap_t \sigma(\mathcal{G}_t, \mathcal{H}_\infty) = \lim_{t \searrow 0} \sigma(\mathcal{G}_t, \mathcal{H}_\infty).$$

Dies liefert mit der Martingaleigenschaft von  $(\alpha_s)_{s>0}$ :

$$\lim_{u \searrow t} \alpha_u = \lim_{u \searrow t} \mathbb{E}[\alpha_u | \mathcal{G}_u, \mathcal{H}_\infty] = \mathbb{E}[\alpha_u | \lim_{u \searrow t} \sigma(\mathcal{G}_u, \mathcal{H}_\infty)] = \mathbb{E}[\alpha_u | \mathcal{G}_t, \mathcal{H}_\infty] = \alpha_t \quad \square$$

**Bemerkung 3.22 (Verallgemeinerung)**

Für den Nachweis der Rechts-Stetigkeit von  $(\alpha_s)_{s>0}$  haben wir die in Notation 3.1 geforderte Rechts-Stetigkeit der  $\sigma$ -Algebren  $(\mathcal{G}_s)_{s>0}$  verwendet. Lässt man diese Annahme weg, so kann man trotzdem immer eine Version des Prozesses  $(\alpha_s)_{s>0}$  finden, die rechts-stetig ist und damit weiterarbeiten ohne die Allgemeingültigkeit zu verlieren. Die Voraussetzung aus Notation 3.1 ist also nützlich, aber nicht notwendig.

**Proposition 3.23 (Quadratische Variation von  $\tilde{Y}$ )**

Es seien  $\tilde{Y}$  der zu  $Y$  assoziierte Prozess und  $(\alpha_s)_{s>0}$  wie in Proposition 3.19. Dann ist

$$\langle \tilde{Y} \rangle_t = \int_0^t \alpha_r dr,$$

die quadratische Variation von  $\tilde{Y}$ .

**Beweis** Nach Definition 1.12 (2) genügt es zu zeigen, dass

$$\left( \tilde{Y}_t^2 - \int_0^t \alpha_r dr \right)_{t>0}$$

ein Martingal bezüglich der Filtration  $\sigma(\mathcal{G}_t, \mathcal{H}_\infty)$  ist. Dazu überprüfen wir nur die Martingaleigenschaft, denn die Integrier- und Messbarkeit folgt wie zuvor aus der Konstruktion. Da  $(\alpha_s)_{s>0}$  nicht-negativ ist, können wir im folgenden den Satz von Fubini [18] anwenden. Für  $s < t$  erhalten wir dann

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[ \tilde{Y}_t^2 - \int_0^t \alpha_r dr \mid \mathcal{G}_s, \mathcal{H}_\infty \right] &= \mathbb{E} \left[ \tilde{Y}_t^2 - \tilde{Y}_s^2 + \tilde{Y}_s^2 \mid \mathcal{G}_s, \mathcal{H}_\infty \right] - \mathbb{E} \left[ \int_0^s \alpha_r dr + \int_s^t \alpha_r dr \mid \mathcal{G}_s, \mathcal{H}_\infty \right] \\ &= (t-s)\alpha_s + \tilde{Y}_s^2 - \int_0^s \alpha_r dr - \int_s^t \mathbb{E}[\alpha_r \mid \mathcal{G}_s, \mathcal{H}_\infty] dr \\ &= \tilde{Y}_s^2 - \int_0^s \alpha_r dr + (t-s)\alpha_s - \int_s^t \alpha_s dr \\ &= \tilde{Y}_s^2 - \int_0^s \alpha_r dr. \end{aligned} \quad \square$$

### 3.3.2 UMKEHRUNG DER ZEIT

Wir haben zu Anfang dieses Kapitels die Zeit in Richtung 0 und in Richtung  $\infty$  parallel betrachtet. Der Übersicht wegen haben wir in diesem Abschnitt zunächst nur das Martingal  $(\tilde{Y}_t)_{t>0}$  bezüglich der  $\sigma$ -Algebren  $(\sigma(\mathcal{G}_t, \mathcal{H}_\infty))_{t>0}$  ausführlicher behandelt. Wir wollen jetzt die gleichen Überlegungen für das Rückwärtsmartingal  $(\frac{\tilde{Y}_t}{t})_{t>0}$  bezüglich der  $\sigma$ -Algebren  $(\sigma(\mathcal{G}_0, \mathcal{H}_t))_{t>0}$  anstellen. Dabei gibt es zwei Möglichkeiten fortzufahren.

1. Wir können das Rückwärtsmartingal  $(\frac{\tilde{Y}_t}{t})_{t>0}$  bezüglich der abnehmenden Folge von  $\sigma$ -Algebren  $(\sigma(\mathcal{G}_0, \mathcal{H}_t))_{t>0}$  und die Grenzwerte für  $t \rightarrow 0$  untersuchen.
2. Oder wir invertieren das Setting. Das heißt anstelle von

$$(\mathcal{G}_t, \mathcal{H}_t, \mathcal{G}_0, \mathcal{H}_\infty, Y_t, S, R, \tilde{Y}_t)$$

betrachten wir

$$(\mathcal{H}_{\frac{1}{t}}, \mathcal{G}_{\frac{1}{t}}, \mathcal{H}_\infty, \mathcal{G}_0, tY_{\frac{1}{t}}, R, S, t\tilde{Y}_{\frac{1}{t}}),$$

wobei wir  $t$  gegen  $+\infty$  konvergieren lassen.

In beiden Fällen kann man darauf schließen, dass ein nicht-negativer, links - stetiger Prozess  $(\beta_u)_{u>0}$  existiert, der messbar ist bezüglich  $(\sigma(\mathcal{G}_0, \mathcal{H}_u))_{u>0}$  beziehungsweise bezüglich  $(\sigma(\mathcal{H}_{\frac{1}{t}}, \mathcal{G}_0))_{u>0}$  und ähnliche Eigenschaften wie  $(\alpha_s)_{s>0}$  erfüllt. Durch Vergleich von  $(\alpha_s)_{s>0}$  und  $(\beta_u)_{u>0}$  können wir schließlich die für unsere Zerlegung benötigte Zufallsvariable  $\alpha$  identifizieren. Die Beweise der folgenden Aussagen geben wir gar nicht oder nur verkürzt an, da sie die gleichen Ideen wie die entsprechenden Beweise der analogen Aussagen für  $(\alpha_s)_{s>0}$  verwenden.

**Proposition 3.24 (Definition und Existenz von  $(\beta_u)_{u>0}$ )**

Sei  $\tilde{Y}$  der zu  $Y$  assoziierte Harness-Prozess. Dann existiert für alle  $u > 0$  eine nicht-negative,  $\sigma(\mathcal{G}_0, \mathcal{H}_u)$ -messbare Zufallsvariable  $\beta_u$ , so dass für alle  $u > t$

$$\mathbb{E} \left[ \frac{\tilde{Y}_t^2}{t^2} - \frac{\tilde{Y}_u^2}{u^2} \middle| \mathcal{G}_0, \mathcal{H}_u \right] = \left( \frac{1}{t} - \frac{1}{u} \right) \beta_u. \quad (3.17)$$

**Beweis** Analog zum Beweis der Proposition 3.19 ergibt sich aus der Rückwärtsmartingaleigenschaft von  $(\frac{\tilde{Y}_t}{t})_{t>0}$ , dass für  $0 < s < t \leq u$

$$\mathbb{E} \left[ \frac{\tilde{Y}_s}{s} \frac{\tilde{Y}_t}{t} \middle| \mathcal{G}_0, \mathcal{H}_u \right] = \mathbb{E} \left[ \frac{\tilde{Y}_t}{t} \mathbb{E} \left[ \frac{\tilde{Y}_s}{s} \middle| \mathcal{G}_0, \mathcal{H}_t \right] \middle| \mathcal{G}_0, \mathcal{H}_u \right] = \mathbb{E} \left[ \frac{\tilde{Y}_t^2}{t^2} \middle| \mathcal{G}_0, \mathcal{H}_u \right] \quad (3.18)$$

und mit (1.1) und (3.4), dass

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[ \frac{\tilde{Y}_s}{s} \frac{\tilde{Y}_t}{t} \middle| \mathcal{G}_0, \mathcal{H}_u \right] &= \frac{s(u-t)}{t(u-s)} \mathbb{E} \left[ \frac{\tilde{Y}_s^2}{s^2} \middle| \mathcal{G}_0, \mathcal{H}_u \right] + \frac{u(t-s)}{t(u-s)} \frac{\tilde{Y}_u}{u} \mathbb{E} \left[ \frac{\tilde{Y}_s}{s} \middle| \mathcal{G}_0, \mathcal{H}_u \right] \\ &= \frac{s(u-t)}{t(u-s)} \mathbb{E} \left[ \frac{\tilde{Y}_s^2}{s^2} \middle| \mathcal{G}_0, \mathcal{H}_u \right] + \frac{u(t-s)}{t(u-s)} \frac{\tilde{Y}_u^2}{u^2}. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Aus (3.18) und (3.19) folgt dann

$$\mathbb{E} \left[ \frac{\tilde{Y}_t^2}{t^2} \middle| \mathcal{G}_0, \mathcal{H}_u \right] = \frac{s(u-t)}{t(u-s)} \mathbb{E} \left[ \frac{\tilde{Y}_s^2}{s^2} \middle| \mathcal{G}_0, \mathcal{H}_u \right] + \left( 1 - \frac{s(u-t)}{t(u-s)} \right) \frac{\tilde{Y}_u^2}{u^2},$$

woraus sich schließlich mit

$$\beta_u := \frac{su}{u-s} \mathbb{E} \left[ \frac{\tilde{Y}_s^2}{s^2} - \frac{\tilde{Y}_u^2}{u^2} \middle| \mathcal{G}_0, \mathcal{H}_u \right]$$

das Gewünschte ergibt:

$$\begin{aligned} \left( \mathbb{E} \left[ \frac{\tilde{Y}_t^2}{t^2} \middle| \mathcal{G}_0, \mathcal{H}_u \right] - \frac{\tilde{Y}_u^2}{u^2} \right) &= \frac{s(u-t)}{t(u-s)} \left( \mathbb{E} \left[ \frac{\tilde{Y}_s^2}{s^2} \middle| \mathcal{G}_0, \mathcal{H}_u \right] - \frac{\tilde{Y}_u^2}{u^2} \right) \\ &= \left( \frac{1}{t} - \frac{1}{u} \right) \frac{su}{u-s} \mathbb{E} \left[ \frac{\tilde{Y}_s^2}{s^2} - \frac{\tilde{Y}_u^2}{u^2} \middle| \mathcal{G}_0, \mathcal{H}_u \right] \quad \square \end{aligned}$$

**Lemma 3.25 (Rückwärtsmartingaleigenschaft von  $(\beta_u)_{u>0}$ )**

Sei  $(\beta_u)_{u>0}$  wie in (3.17). Dann ist  $(\beta_u)_{u>0}$  ein Rückwärtsmartingal bezüglich der  $\sigma$ -Algebren  $\sigma(\mathcal{G}_0, \mathcal{H}_u)$ .

**Beweis** Um die Rückwärtsmartingaleigenschaft zu zeigen, nutzen wir (3.17), so dass für  $s < t < u$

$$\begin{aligned} \left( \frac{1}{s} - \frac{1}{u} \right) \beta_u &= \mathbb{E} \left[ \frac{\tilde{Y}_s^2}{s^2} - \frac{\tilde{Y}_t^2}{t^2} \middle| \mathcal{G}_0, \mathcal{H}_u \right] + \mathbb{E} \left[ \frac{\tilde{Y}_t^2}{t^2} - \frac{\tilde{Y}_u^2}{u^2} \middle| \mathcal{G}_0, \mathcal{H}_u \right] \\ &= \mathbb{E} \left[ \mathbb{E} \left[ \frac{\tilde{Y}_s^2}{s^2} - \frac{\tilde{Y}_t^2}{t^2} \middle| \mathcal{G}_0, \mathcal{H}_t \right] \middle| \mathcal{G}_0, \mathcal{H}_u \right] + \left( \frac{1}{t} - \frac{1}{u} \right) \beta_u \\ &= \mathbb{E} \left[ \left( \frac{1}{s} - \frac{1}{t} \right) \beta_t \middle| \mathcal{G}_0, \mathcal{H}_u \right] + \left( \frac{1}{t} - \frac{1}{u} \right) \beta_u \end{aligned}$$

und damit

$$\mathbb{E}[\beta_t | \mathcal{G}_0, \mathcal{H}_u] = \beta_u. \quad \square$$

**Lemma 3.26 (Links-Stetigkeit von  $(\beta_u)_{u>0}$ )**

$u \mapsto \beta_u$  ist links-stetig, das heißt:

$$\lim_{t \nearrow u} \beta_t = \beta_u \quad \text{für alle } u \geq 0.$$

**Bemerkung 3.27 (Verallgemeinerung)**

Wie schon bei  $(\alpha_s)_{s>0}$  kann auch diese Aussage durch ausweichen auf eine links-stetige Version von  $(\beta_u)_{u>0}$  für den Fall einer nicht links-stetigen Familie von  $\sigma$ -Algebren verallgemeinert werden.

**Proposition 3.28 (Quadratische Variation von  $\frac{\tilde{Y}_u}{u}$ )**

Für den zu  $Y$  assoziierten Harness-Prozess  $\tilde{Y}$  gilt:

$$\langle \frac{\tilde{Y}_u}{u^2} \rangle_t = \int_u^\infty \frac{\beta_w}{w^2} dw,$$

wobei  $(\beta_u)_{u>0}$  wie in Proposition 3.24.

**Beweis** Wir zeigen, dass

$$\left( \frac{\tilde{Y}_u^2}{u^2} - \int_u^\infty \frac{\beta_w}{w^2} dw \right)_{u>0}$$

ein Rückwärtsmartingal bezüglich der  $\sigma$ -Algebren  $(\sigma(\mathcal{G}_0, \mathcal{H}_u))_{u>0}$  ist. Für  $s < u$  folgt analog zum Beweis von Proposition 3.23 aus dem Satz von Fubini [18] und (3.17), dass

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left[ \frac{\tilde{Y}_s^2}{s^2} - \int_s^\infty \frac{\beta_w}{w^2} dw \mid \mathcal{G}_0, \mathcal{H}_u \right] \\ &= \left( \frac{1}{s} - \frac{1}{u} \right) \beta_u + \frac{\tilde{Y}_u^2}{u^2} - \int_u^\infty \frac{\beta_w}{w^2} dw - \int_s^u \frac{1}{w^2} \mathbb{E}[\beta_w \mid \mathcal{G}_0, \mathcal{H}_u] dw \\ &= \frac{\tilde{Y}_u^2}{u^2} - \int_u^\infty \frac{\beta_w}{w^2} dw + \left( \frac{1}{s} - \frac{1}{u} \right) \beta_u - \beta_u \int_s^u \frac{1}{w^2} dw \\ &= \frac{\tilde{Y}_u^2}{u^2} - \int_u^\infty \frac{\beta_w}{w^2} dw. \quad \square \end{aligned}$$

**Bemerkung 3.29 (Alternativer Ansatz: Inversion der Zeit)**

Wie schon zu Beginn des Abschnitts angedeutet, kann die Existenz von  $(\beta_u)_{u>0}$  auch durch den Prozess  $(t\tilde{Y}_{\frac{1}{t}})_{t>0}$  hergeleitet werden. Dazu verändert man das Setting auf folgende Weise: Anstelle von

$$(\mathcal{G}_t, \mathcal{H}_t, \mathcal{G}_0, \mathcal{H}_\infty, Y_t, S, R, \tilde{Y}_t)$$

wird

$$(\mathcal{H}_{\frac{1}{t}}, \mathcal{G}_{\frac{1}{t}}, \mathcal{H}_\infty, \mathcal{G}_0, tY_{\frac{1}{t}}, R, S, t\tilde{Y}_{\frac{1}{t}})$$

beachtet. Wir werden jetzt nicht alle Beweise ein zweites Mal führen, sondern nur die wichtigsten Aussagen im veränderten Setting wiedergeben. Allerdings gilt für jeden Harness-Prozess  $Y$  im invertierten Setting eine besondere Eigenschaft, die das Rückwärtsmartingal  $(\frac{\tilde{Y}_t}{t})_{t>0}$  nicht erfüllt:

**Lemma 3.30 (Harness-Prozess nach Inversion der Zeit)**

Wenn  $(Y_t)_{t>0}$  ein Harness-Prozess bezüglich  $(\sigma(\mathcal{G}_s, \mathcal{H}_u))_{u,s>0}$  ist, dann ist  $(tY_{\frac{1}{t}})_{t>0}$  ein Harness-Prozess bezüglich  $(\sigma(\mathcal{H}_{\frac{1}{u}}, \mathcal{G}_{\frac{1}{s}}))_{u,s>0}$ .

**Beweis** Sei  $0 \leq s < t < u$ , dann ist  $\frac{1}{u} < \frac{1}{t} < \frac{1}{s}$  und somit, gilt

- i)  $tY_{\frac{1}{t}} \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \quad \forall t > 0$ , weil  $Y$  ein integrierbarer Prozess ist,
- ii)  $(tY_{\frac{1}{t}})_{t>0}$  ist adaptiert an  $(\mathcal{G}_{\frac{1}{t}})_{t>0}$  und  $(\mathcal{H}_{\frac{1}{t}})_{t>0}$ , weil  $(Y_t)_{t>0}$  an  $(\mathcal{G}_t)_{t>0}$  und  $(\mathcal{H}_t)_{t>0}$  adaptiert ist.
- iii) Die Harness-Bedingung erhalten wir aus der Harness-Bedingung von  $Y$ :

$$\mathbb{E} \left[ tY_{\frac{1}{t}} | \mathcal{H}_{\frac{1}{u}}, \mathcal{G}_{\frac{1}{s}} \right] = t \left( \frac{\frac{1}{s} - \frac{1}{t}}{\frac{1}{s} - \frac{1}{u}} Y_{\frac{1}{u}} + \frac{\frac{1}{t} - \frac{1}{u}}{\frac{1}{s} - \frac{1}{u}} Y_{\frac{1}{s}} \right) = \frac{t-s}{u-s} (uY_{\frac{1}{u}}) + \frac{u-t}{u-s} (sY_{\frac{1}{s}}). \quad \square$$

**Bemerkung 3.31 (Verbindung zur Brownschen Bewegung)**

Die in Lemma 3.30 bewiesene Eigenschaft gilt als eine Besonderheit der Brownschen Bewegung. Da wir am Ende dieses Abschnitts zeigen wollen, dass jeder zu einem Harness-Prozess  $Y$  assoziierte Prozess  $\tilde{Y}$  ein Vielfaches der Brownschen Bewegung ist, erklärt sich auch diese Eigenschaft von Harness-Prozessen in stetiger Zeit. Die Bezeichnung "Inversion der Zeit" stammt ebenfalls aus der Theorie der Brownschen Bewegung.

**Bemerkung 3.32 (Zu  $(Y_t)_{t>0}$  assoziierter Prozess)**

Der zu  $Y$  assoziierte Prozess hat im invertierten Setting die folgende Gestalt:

$$t\tilde{Y}_{\frac{1}{t}} = tY_{\frac{1}{t}} - R - tS. \quad (3.20)$$

**Bemerkung 3.33 (Quadrat-Integrierbarkeit)**

Ab hier müssen wir uns bewusst machen, dass der zu  $Y$  assoziierte Harness-Prozess  $t\tilde{Y}_{\frac{1}{t}}$  der Form (3.20) quadratisch integrierbar ist für alle  $t > 0$ , da wir dies für den Prozess  $Y$  zusätzlich vorausgesetzt hatten.

**Proposition 3.34**

Für den zu  $Y$  assoziierten Harness-Prozess  $(t\tilde{Y}_{\frac{1}{t}})_{t>0}$  nach Inversion der Zeit gelten folgende Eigenschaften:

1. Der Prozess  $(t\tilde{Y}_{\frac{1}{t}})_{t>0}$  ist bezüglich der Filtration  $(\sigma(\mathcal{H}_{\frac{1}{t}}, \mathcal{G}_0))_{t>0}$  ein Martingal und der Prozess  $(\tilde{Y}_{\frac{1}{t}})_{t>0}$  ist ein Rückwärtsmartingal bezüglich der  $\sigma$ -Algebren  $(\sigma(\mathcal{H}_{\infty}, \mathcal{G}_{\frac{1}{t}}))_{t>0}$ .
2. Existenz von  $(\beta_u)_{u>0}$ : Für alle  $u > 0$  existiert eine nicht-negative, bezüglich  $\sigma(\mathcal{H}_{\frac{1}{u}}, \mathcal{G}_0)$ -messbare Zufallsvariable  $\beta_u$ , so dass für alle  $t < u$

$$\mathbb{E} \left[ (t\tilde{Y}_{\frac{1}{t}})^2 - (u\tilde{Y}_{\frac{1}{u}})^2 | \mathcal{H}_{\frac{1}{u}}, \mathcal{G}_0 \right] = (u-t)\beta_u.$$



3.  $(\beta_u)_{u>0}$  ist ein Martingal bezüglich der Filtration  $\sigma(\mathcal{H}_{\frac{1}{u}}, \mathcal{G}_0)_{u>0}$ .
4.  $u \mapsto \beta_u$  ist links-stetig.
5. Quadratische Variation:

$$\langle u\tilde{Y}_{\frac{1}{u}} \rangle_u = \int_u^\infty \beta_w dw$$

### 3.4 ZERLEGUNG VON HARNESS-PROZESSEN ÜBER $\mathbb{R}^+$

Wir haben nun die quadratische Variation von  $(\tilde{Y}_t)_{t>0}$  durch  $(\int_0^t \alpha_r dr)_{t>0}$  und die quadratische Variation von  $(\frac{\tilde{Y}_t}{t})_{t>0}$  durch  $(\int_t^\infty \frac{\beta_w}{w^2} dw)_{t>0}$  beschrieben. Wir werden damit beweisen, dass  $(\alpha_s)_{s>0}$  und  $(\beta_u)_{u>0}$  sogar  $\mathbb{P}$ -fast sicher gleich sind und dadurch folgern, dass  $\alpha_s = \alpha$   $\mathbb{P}$ -fast sicher für alle  $s > 0$ , für eine Zufallsvariable  $\alpha$ . Mit der Lévy Charakterisierung der Brownschen Bewegung folgt dann direkt, dass  $\tilde{Y}$  das Vielfache einer Brownschen Bewegung ist. Um dies alles folgern zu können müssen wir allerdings noch eine weitere Annahme machen:

#### Zusatzannahme

Im Folgenden wird zusätzlich angenommen, dass  $Y$  stetige Pfade besitzt. Äquivalent gilt dies dann auch für den assoziierten Prozess  $\tilde{Y}$ .

#### Lemma 3.35

Für  $(\alpha_s)_{s>0}$ , aus Proposition 3.19, und  $(\beta_u)_{u>0}$ , aus Proposition 3.24, gilt:

$$\mathbb{P}(\alpha_s = \beta_s \text{ für fast alle } s) = 1$$

**Beweis** Wir wollen mithilfe der quadratischen Variation folgende Gleichung für beliebige  $a, b \in \mathbb{R}^+$  mit  $a < b$  zeigen:

$$\int_a^b \frac{\alpha_s}{s^2} ds = \int_a^b \frac{\beta_u}{u^2} du.$$

Dazu betrachten wir die Definition der quadratischen Variation 1.12 für den Prozess  $(\frac{\tilde{Y}_t}{t})_{t>0}$  und ein beliebiges Intervall  $[a, b]$  in  $\mathbb{R}^+$

$$\langle \frac{\tilde{Y}_t}{t} \rangle_a^b = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i \leq i_n} \left( \frac{\tilde{Y}_{t_i^n}}{t_i^n} - \frac{\tilde{Y}_{t_{i-1}^n}}{t_{i-1}^n} \right)^2,$$

wobei

$$\begin{aligned} \left( \frac{\tilde{Y}_{t_i^n}}{t_i^n} - \frac{\tilde{Y}_{t_{i-1}^n}}{t_{i-1}^n} \right)^2 &= \left( \frac{t_{i-1}^n \tilde{Y}_{t_i^n} - t_i^n \tilde{Y}_{t_{i-1}^n} - t_{i-1}^n \tilde{Y}_{t_{i-1}^n} + t_{i-1}^n \tilde{Y}_{t_{i-1}^n}}{t_i^n t_{i-1}^n} \right)^2 \\ &= \left( \frac{\tilde{Y}_{t_i^n} - \tilde{Y}_{t_{i-1}^n}}{t_i^n} \right)^2 - 2 \frac{\tilde{Y}_{t_{i-1}^n} (\tilde{Y}_{t_i^n} - \tilde{Y}_{t_{i-1}^n}) (t_i^n - t_{i-1}^n)}{(t_i^n)^2 t_{i-1}^n} + \left( \frac{t_i^n - t_{i-1}^n}{t_i^n t_{i-1}^n} \tilde{Y}_{t_{i-1}^n} \right)^2. \end{aligned}$$

Für  $n \rightarrow \infty$  geht  $|t_i^n - t_{i-1}^n| \rightarrow 0$ , daher konvergiert der letzte Term gegen 0. Aufgrund der stetigen Pfade von  $\tilde{Y}$  konvergiert auch  $|\tilde{Y}_{t_i^n} - \tilde{Y}_{t_{i-1}^n}|$  gegen 0. Es bleibt also nur der erste Term zu betrachten und somit gilt für  $f(t) := (\frac{1}{t})^2$ :

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\tilde{Y}_t}{t} \right\rangle_a^b &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i \leq i_n} \left( \tilde{Y}_{t_i^n} - \tilde{Y}_{t_{i-1}^n} \right)^2 \frac{1}{(t_i^n)^2} \\ &= \int_a^b \alpha_s f(s) ds \\ &= \int_a^b \frac{\alpha_s}{s^2} ds \end{aligned}$$

Aus Proposition 3.28 folgt insbesondere, dass

$$\left\langle \frac{\tilde{Y}_t}{t} \right\rangle_a^b = \int_a^b \frac{\beta_u}{u^2} du = \int_a^b \frac{\alpha_s}{s^2} ds.$$

Da dies für alle  $a, b$  gilt folgt für die Integranden

$$\mathbb{P}(\alpha_s = \beta_s \text{ für fast alle } s) = 1 \quad \square$$

**Lemma 3.36** ( $(\alpha_s)_{s>0}$  ist konstant in der Zeit)

Für  $(\alpha_s)_{s>0}$  aus Proposition 3.19 existiert eine Zufallsvariable  $\alpha$ , so dass:

$$\mathbb{P}(\alpha_s = \alpha, \forall s) = 1$$

**Beweis** Aus dem vorherigen Lemma folgt insbesondere die schwächere Eigenschaft:

$$\mathbb{P}(\alpha_s = \beta_s) = 1 \quad \text{für fast alle } s.$$

Dies und die Martingaleigenschaften von  $(\alpha_s)_{s>0}$  beziehungsweise  $(\beta_u)_{u>0}$  nutzen wir aus, um das Gewünschte zu zeigen. Sei  $t, v$  fest gewählt, so dass  $\alpha_t = \beta_t$  und  $\alpha_v = \beta_v$   $\mathbb{P}$ -fast sicher. Dann folgt aus der Martingaleigenschaft von  $(\alpha_s)_{s>0}$ , dass

$$\mathbb{E}[\alpha_v | \alpha_t] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[\alpha_v | \mathcal{G}_t, \mathcal{H}_\infty] | \alpha_t] = \mathbb{E}[\alpha_t | \alpha_t] = \alpha_t$$

und andersherum aus der Rückwärtsmartingaleigenschaft von  $(\beta_u)_{u>0}$  ergibt sich, dass

$$\mathbb{E}[\alpha_t | \alpha_v] = \mathbb{E}[\beta_t | \beta_v] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[\beta_t | \mathcal{G}_0, \mathcal{H}_u] | \beta_v] = \mathbb{E}[\beta_v | \beta_v] = \beta_v = \alpha_v.$$

Mit Lemma 1.11 erhalten wir aus der wechselseitigen bedingten Erwartung

$$\mathbb{P}(\alpha_t = \alpha_v) = 1.$$

Dies ist für fast alle  $t$  und  $v$  erfüllt. Somit existiert eine Zufallsvariable  $\alpha$ , so dass für fast alle  $s > 0$

$$\mathbb{P}(\alpha_s = \alpha) = 1.$$

Die Behauptung folgt nun durch Widerspruch. Nehmen wir also an es existiere eine Menge  $M \neq \emptyset$  mit

$$M := \{s > 0 \mid \mathbb{P}(\alpha_s \neq \alpha) > 0\}.$$

Diese Menge ist abzählbar, aufgrund des vorher gezeigten. Daher existiert für jedes  $s^* \in M$  ein  $w > s^*$ , so dass die Menge  $(s^*, w) \cap M$  leer ist. Wegen der Rechts-Stetigkeit von  $(\alpha_s)_{s>0}$  ist dann

$$\alpha_{s^*} = \lim_{u \searrow s^*} \alpha_u = \lim_{u \searrow s^*} \alpha = \alpha \quad \mathbb{P}\text{-fast sicher.}$$

Das heißt aber

$$\mathbb{P}(\alpha_s \neq \alpha) = 0 \quad \forall s > 0$$

und damit folgt  $M = \emptyset$ , so dass schließlich

$$\mathbb{P}(\alpha_s = \alpha \forall s) = 1.$$

□

### Bemerkung 3.37 (Messbarkeit und Integrierbarkeit)

Aus den Eigenschaften von  $(\alpha_s)_{s>0}$  und  $(\beta_u)_{u>0}$  folgt die Messbarkeit bezüglich  $\sigma(\mathcal{G}_0, \mathcal{H}_\infty)$  und die quadratische Integrierbarkeit von  $\alpha$ .

### Korollar 3.38

Sei  $\tilde{Y}$  der zu  $Y$  assoziierte Harness-Prozess. Dann existiert ein nicht-negativer Prozess  $\alpha$ , so dass

$$\langle \tilde{Y} \rangle_t = \alpha t \quad \forall t > 0.$$

**Beweis** Wegen Lemma 3.36 gilt für die quadratische Variation von  $\tilde{Y}$ :

$$\langle \tilde{Y} \rangle_t = \int_0^t \alpha_s ds = \int_0^t \alpha ds = \alpha t \quad \square$$

### Proposition 3.39

Der zu  $Y$  assoziierte Harness-Prozess  $\tilde{Y}$  ist das Vielfache einer Brownschen Bewegung, das heißt:

$$\tilde{Y}_t = \sqrt{\alpha} B_t \quad \forall t \geq 0$$

für eine Brownsche Bewegung  $(B_t)_{t \geq 0}$  und eine nicht-negative Zufallsvariable  $\alpha$ .

**Beweis** Wir wollen die geforderten Bedingungen der in Proposition 3.10 angegebenen Lévy Charakterisierung der Brownschen Bewegung überprüfen:

1.  $\tilde{Y}$  ist ein Martingal, wie wir in Proposition 3.18 gezeigt haben.
2.  $\tilde{Y}_0 = 0$  gilt wegen der Grenzwerteigenschaft aus Proposition 3.16.
3. Für die quadratische Variation haben wir in Korollar 3.38 gezeigt, dass:

$$\langle \tilde{Y} \rangle_t = \alpha t \quad \Rightarrow \quad \left\langle \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \tilde{Y} \right\rangle_t = t.$$

Insbesondere gilt nach Proposition 3.23 für  $s > 0$

$$\mathbb{E} \left[ \frac{1}{\alpha} \tilde{Y}_t^2 - t \mid \mathcal{G}_s, \mathcal{H}_\infty \right] = \frac{1}{\alpha} \tilde{Y}_s^2 - s.$$

Also ist  $\tilde{Y}_t = \sqrt{\alpha}B_t$  für alle  $t \in \mathbb{R}^+$ . □

Aus der Definition von  $\tilde{Y}_t$ , vergleiche (3.13), folgt damit die gewünschte Zerlegung des Harness-Prozess  $(Y_t)_{t>0}$ :

**Theorem 3.40 (Zerlegung von Harness-Prozessen in stetiger Zeit)**

Für jeden quadratisch integrierbaren Harness-Prozess  $Y$  mit stetigen Pfaden existieren  $\sigma(\mathcal{G}_0, \mathcal{H}_\infty)$ -messbare Zufallsvariablen  $R, S$  und  $\alpha$ , so dass

$$Y_t = S + tR + \sqrt{\alpha}B_t \quad \forall t > 0$$

wobei  $(B_t)_{t \geq 0}$  die Standard Brownsche Bewegung bezeichnet.

**Bemerkung 3.41**

Jeder Prozess der Form

$$Y_t = S + tR + \sqrt{\alpha}B_t \quad \forall t > 0$$

für  $\sigma(\mathcal{G}_0, \mathcal{H}_\infty)$ -messbare, integrierbaren Zufallsvariablen  $R, S$  und  $\alpha$  und eine Standard Brownsche Bewegung  $(B_t)_{t \geq 0}$  ist ein Harness-Prozess.

Wir haben in den Beispielen zu Beginn dieses Kapitels gezeigt, dass sowohl der affine Teil als auch die Brownsche Bewegung Harness-Prozesse sind. Bei linearem Zusammensetzen von Harness-Prozessen bleibt also die Harness-Bedingung erhalten.

Wir haben in diesem Kapitel eine ähnliche Zerlegungseigenschaft für Harness-Prozesse über  $\mathbb{R}^+$  gefolgert, wie im vorigen Kapitel für Harness-Prozesse über  $\mathbb{Z}$ . Allerdings wäre die natürlichere Verallgemeinerung von Harness-Prozessen über  $\mathbb{Z}$  Harness-Prozesse über  $\mathbb{R}$  gewesen. Diesen Prozessen wollen wir uns im nächsten Kapitel kurz zuwenden und mögliche Zerlegungen studieren.

## 4 AUSBLICK: HARNESS-PROZESSE ÜBER $\mathbb{R}$

In diesem Kapitel wollen wir uns mit Harness-Prozessen über  $\mathbb{R}$  beschäftigen. Dabei richten wir unsere Aufmerksamkeit nur auf Zerlegungen, die wir aufgrund der Kapitel 2 und 3 für möglich halten. Es gibt drei verschiedene Ansätze, wie Harness-Prozesse über  $\mathbb{R}$  beschrieben werden könnten. In den folgenden Abschnitten werden wir jeden der Ansätze erklären, die zugehörige vermutete Zerlegung vorstellen und einen Beweis dazu skizzieren. Bei jedem der Ansätze gibt es allerdings noch ungeklärte Schwierigkeiten auf die wir an gegebener Stelle hinweisen werden.

### Bemerkung 4.1

Die drei Ansätze, die wir besprechen wollen, sind reine Vermutungen. Im Folgenden werden wir auf entsprechende Lücken hinweisen. Um aber auf die gewünschten Resultate zu kommen, werden wir an den problematischen Stellen die Gültigkeit der jeweils benötigten Aussagen annehmen. Dabei wurde die Beweisbarkeit allerdings nicht überprüft. Es ist also möglich, dass es echte Lücken sind, die sich nicht schließen lassen und damit wären die Ansätze falsch.

### 4.1 ANSATZ 1: AFFINER PROZESS

Die erste Variante ist angelehnt an Kapitel 2. Dabei gehen wir von vornherein von ganz  $\mathbb{R}$  als Indexmenge aus und folgern symmetrische Eigenschaften, so wie in diskreter Zeit.

#### Voraussetzung

Für diesen Ansatz setzen wir voraus, dass die Konvergenzsätze aus den Grundlagen, Theorem 1.8 und Korollar 1.9, auch für  $t \rightarrow -\infty$  gelten. Die Definition für Harness-Prozesse bleibt so wie im stetigen Fall aber mit Erweiterung der Indexmenge.

#### Vermutete Zerlegung: Affiner Prozess

Für einen Harness-Prozess  $X = (X_t)_{t \in \mathbb{R}}$  existieren Zufallsvariablen  $\hat{A}$  und  $\hat{L}$ , so dass

$$X_t = \hat{A} + t\hat{L} \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

### Bemerkung 4.2

Da dieser Ansatz an Kapitel 2 angelehnt ist, nennen wir den betrachteten Harness-Prozess wieder  $X$  und die Bezeichnung der Zufallsvariablen  $\hat{A}$  und  $\hat{L}$  soll die Ähnlichkeit zu den Zufallsvariablen  $A$  und  $L$  verdeutlichen.

#### Beweisskizze

Sei also  $(X_t)_{t \in \mathbb{R}}$  ein Harness-Prozess. Dann können wir völlig analog zu Kapitel 2 die Existenz einer Zufallsvariable  $\hat{L}$  beweisen. Wegen dem Konvergenzsatz, Theorem 1.8, existiert  $\mathbb{P}$ -fast sicher und in  $\mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$

$$\lim_{r \nearrow +\infty} \mathbb{E}[X_t | \mathcal{G}_{s-r}, \mathcal{H}_u] = X_u + (u-t) \lim_{r \nearrow +\infty} \frac{1}{u-(s-r)} X_{s-r}$$

und damit erhalten wir

$$\hat{L} := \lim_{r \searrow -\infty} \frac{X_r}{r} = - \lim_{r \nearrow +\infty} \frac{1}{u-(s-r)} X_{s-r}.$$

Es folgt daraus direkt eine ähnliche Martingaleigenschaft wie im diskreten Fall

$$\mathbb{E} [X_t - t\hat{L} | \mathcal{G}_{-\infty}, \mathcal{H}_u] = X_u - u\hat{L}.$$

Dann ergibt sich die Existenz von  $\hat{A}$ :

$$\hat{A} := \lim_{t \nearrow +\infty} (X_t - t\hat{L}) \quad \text{existiert } \mathbb{P}\text{-fast sicher.}$$

Im nächsten Schritt kann die Symmetrie der Konstruktion von  $\hat{L}$  bewiesen werden

$$\hat{L} = \lim_{t \nearrow +\infty} \frac{X_t}{t}.$$

So erhalten wir weiter die Martingaleigenschaft

$$\mathbb{E} [X_t - t\hat{L} | \mathcal{G}_s, \mathcal{H}_\infty] = X_s - s\hat{L}.$$

Wenn wir weiter argumentieren wollen wie im Kapitel 2, dann müssten wir  $u = t + 1$  betrachten

$$\mathbb{E} [X_t + \hat{L} | X_{t+1}] = X_{t+1} \quad \mathbb{E} [X_{t+1} | X_t + \hat{L}] = X_t + \hat{L}$$

Der nächste Schritt wird auch noch ohne Problem klappen für festes  $t \in \mathbb{R}$

$$X_{t+1} = X_t + \hat{L} \quad \mathbb{P}\text{-fast sicher.}$$

Nun aber kommen wir nicht so einfach weiter voran. Für jedes feste  $t$  gilt die obige Gleichung  $\mathbb{P}$ -fast sicher. Wir brauchen aber die stärkere Forderung, dass die Gleichung  $\mathbb{P}$ -fast sicher für jedes  $t$  gilt. Da die Menge der Nullmengen, auf denen die Gleichung nicht erfüllt ist, aber nicht abzählbar sein muss, brauchen wir ein anderes Argument, als wir es in Kapitel 2 verwendet haben.

Nur wenn wir dieses Problem lösen können erhalten wir die Zerlegung jedes Harness-Prozess über  $\mathbb{R}$  in einen affinen Prozess:

$$X_t = \hat{A} + t\hat{L}$$

**Problem:**

Wir halten fest, dass das Problem der Nicht-Abzählbarkeit der Nullmengen gelöst werden muss, um Harness-Prozesse über  $\mathbb{R}$  als affine Prozesse darzustellen. Außerdem sollte die Anwendbarkeit der Konvergenzsätze überprüft werden, obwohl es intuitiv vielleicht keine Bedenken gibt.

## 4.2 ANSATZ 2: BROWNSCHE BEWEGUNG MIT DRIFT

Der zweite Ansatz verläuft analog zu Kapitel 3, indem wir die Zeit von  $\mathbb{R}^+$  auf  $\mathbb{R}^-$  spiegeln, damit eine Zerlegung von Harness-Prozessen über  $\mathbb{R}^-$  folgern und dann beide Teile zu einem Harness-Prozess über ganz  $\mathbb{R}$  verbinden.

### Voraussetzung

Auch für diesen Ansatz setzen wir voraus, dass die Konvergenzsätze analog für  $\mathbb{R}^-$  gelten, entsprechend für beide Richtungen  $t \nearrow 0$  und  $t \searrow -\infty$ . Außerdem behalten wir die Struktur der  $\sigma$ -Algebren bei. Das heißt  $(\mathcal{G}_s)_{s < 0}$  sei aufsteigend, vollständig und rechts-stetig und  $(\mathcal{H}_u)_{u < 0}$  sei absteigend, vollständig und links-stetig. Die Definition von Harness-Prozessen bleibt weiterhin wie gewohnt, für  $s < t < u < 0$ .

### Vermutete Zerlegung: Brownsche Bewegung mit Drift

Für einen Harness-Prozess  $(Y_t)_{t \in \mathbb{R}}$  existieren Zufallsvariablen  $\hat{R}, \hat{S}, \hat{\alpha}$ , sowie  $R, S$  und  $\alpha$ , so dass

$$Y_t = \begin{cases} \hat{S} + t\hat{R} + \sqrt{\hat{\alpha}}B_{-t} & t < 0 \\ 0 & t = 0 \\ S + tR + \sqrt{\alpha}B_t & t > 0 \end{cases}$$

### Bemerkung 4.3

Wie bereits im vorigen Abschnitt, haben wir auch hier entsprechend die Bezeichnungen an Kapitel 3 angelehnt.

### Beweisskizze

Wir folgern zunächst die Zerlegung des Harness-Prozess über  $\mathbb{R}^-$  und verwenden erst am Ende die aus Kapitel 3 bekannte Zerlegung für  $\mathbb{R}^+$ .

Sei  $(Y_t)_{t < 0}$  ein Harness-Prozess. Somit können wir analog zum Kapitel 3 die Existenz von Zufallsvariablen  $\hat{R}$  und  $\hat{S}$  folgern. Das heißt es existieren

$$\hat{R} := \lim_{s \searrow -\infty} \frac{Y_s}{s} \quad \text{und} \quad \hat{S} := \lim_{u \nearrow 0} Y_u \quad \mathbb{P}\text{-fast sicher,}$$

Folgende Martingal-beziehungswise Rückwärtsmartingaleigenschaften sind dann erfüllt:

$$\mathbb{E} \left[ Y_t - t\hat{R} \mid \mathcal{G}_{-\infty}, \mathcal{H}_u \right] := Y_u - u\hat{R}, \quad \mathbb{E} \left[ \frac{1}{t}(Y_t - \hat{S}) \mid \mathcal{G}_s, \mathcal{H}_0 \right] = \frac{1}{s}(Y_s - \hat{S}).$$

An dieser Stelle gehen wir wieder über auf den assoziierten Prozess  $\tilde{Y}$

$$\tilde{Y}_t = Y_t - t\hat{R} - \hat{S} \quad \forall t < 0.$$

Für diesen Prozess gelten analoge Grenzwert und Martingaleigenschaften, wie im Kapitel 3 für  $\tilde{Y}$ :

$$\lim_{u \nearrow 0} \tilde{Y}_u = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{s \searrow -\infty} \frac{\tilde{Y}_s}{s} = 0$$

$$\mathbb{E} \left[ \tilde{Y}_t \mid \mathcal{G}_{-\infty}, \mathcal{H}_u \right] = \tilde{Y}_u \quad \text{und} \quad \mathbb{E} \left[ \frac{1}{t}\tilde{Y}_t \mid \mathcal{G}_s, \mathcal{H}_0 \right] = \frac{1}{s}\tilde{Y}_s.$$

Basierend auf diesen Eigenschaften kann die Existenz eines nicht-negativen Prozesses  $(\hat{\alpha}_u)_{u<0}$  gefolgert werden

$$\mathbb{E} \left[ \tilde{Y}_t^2 - \tilde{Y}_u^2 | \mathcal{G}_{-\infty}, \mathcal{H}_u \right] = (u - t) \hat{\alpha}_u.$$

Der Prozess  $(\hat{\alpha}_u)_{u<0}$  ist links-stetig und ein Rückwärtsmartingal bezüglich  $(\sigma(\mathcal{G}_{-\infty}, \mathcal{H}_u))_{u<0}$ . Die quadratische Variation ergibt sich daraus wie folgt

$$\mathbb{E} \left[ \tilde{Y}_t^2 - \int_t^0 \hat{\alpha}_r dr | \mathcal{G}_{-\infty}, \mathcal{H}_u \right] = \tilde{Y}_u^2 - \int_u^0 \hat{\alpha}_r dr.$$

Entsprechend kann man die Existenz des nicht-negativen Prozesses  $(\hat{\beta}_s)_{s<0}$  folgern.

$$\mathbb{E} \left[ \frac{\tilde{Y}_t^2}{t^2} - \frac{\tilde{Y}_s^2}{s^2} | \mathcal{G}_s, \mathcal{H}_0 \right] = \left( \frac{1}{s} - \frac{1}{t} \right) \hat{\beta}_s.$$

$(\hat{\beta}_s)_{s<0}$  ist rechts-stetig und ein Martingal bezüglich  $(\sigma(\mathcal{G}_s, \mathcal{H}_0))_{s<0}$ . Damit ergibt sich dann auch die quadratische Variation

$$\mathbb{E} \left[ \frac{\tilde{Y}_t^2}{t^2} - \int_{-\infty}^t \frac{\hat{\beta}_w}{w^2} dw | \mathcal{G}_s, \mathcal{H}_0 \right] = \frac{\tilde{Y}_s^2}{s^2} - \int_{-\infty}^s \frac{\hat{\beta}_w}{w^2} dw.$$

Angenommen, dass die Definition der quadratischen Variation 1.12 auch in  $[r, 0]$  gilt, dann kann gefolgert werden, dass

$$\hat{\alpha}_u = \hat{\alpha} = \hat{\beta}_s \quad \mathbb{P}\text{-fast sicher für fast alle } u < 0.$$

Damit erhalten wir dann

$$\langle \tilde{Y} \rangle_t = \int_t^0 \hat{\alpha}_r dr = -\hat{\alpha} t \quad \forall t < 0.$$

Das bedeutet wiederum, analog zu Kapitel 3,

$$\tilde{Y}_t = \sqrt{\hat{\alpha}} B_{-t} \quad \forall t < 0.$$

Damit erhalten wir zunächst eine Zerlegung von Harness-Prozessen über  $\mathbb{R}^-$

$$Y_t = \hat{S} + t\hat{R} + \sqrt{\hat{\alpha}} B_{-t} \quad \forall t < 0.$$

Für die Zerlegung eines Harness-Prozess  $Y$  über ganz  $\mathbb{R}$  würde damit gelten:

$$Y_t = \begin{cases} \hat{S} + t\hat{R} + \sqrt{\hat{\alpha}} B_{-t} & t < 0 \\ 0 & t = 0 \\ S + tR + \sqrt{\alpha} B_t & t > 0 \end{cases}$$



**Problem:**

Wie schon im ersten Fall, setzen wir voraus, dass die Konvergenzsätze anwendbar bleiben. Das muss überprüft werden. Genauso besteht die Frage, ob die quadratische Variation auf  $(-\infty, 0]$  geeignet definiert werden kann. Ohne diese Überprüfung kann die Zerlegung nicht als gültig angenommen werden. Wenn diese Zerlegung allerdings gültig wäre, dann ist interessant zu untersuchen, ob es in diesem Szenario Verbindungen zwischen den Zufallsvariablen  $R$  und  $\hat{R}$  beziehungsweise zwischen  $S$  und  $\hat{S}$  gibt. Gilt zum Beispiel  $R = \hat{R}$  und  $S = \hat{S}$ ? Oder gibt es keinen Zusammenhang zwischen diesen Zufallsvariablen?

### 4.3 ANSATZ 3: ORNSTEIN-UHLENBECK PROZESS

Im letzten Ansatz wollen wir durch Transformation der Zeit mithilfe der Exponentialfunktion  $\mathbb{R}$  auf  $\mathbb{R}^+$  projizieren. Die Idee dabei ist, das Wissen aus Kapitel 3 auszunutzen. Nach der Projektion von  $\mathbb{R}$  auf  $\mathbb{R}^+$ , mittels der Exponentialfunktion  $e^\cdot$  greift die Zerlegung aus Kapitel 3 für Harness-Prozesse über  $\mathbb{R}^+$ .

**Voraussetzung**

Die Definition von Harness-Prozessen und die zugehörigen  $\sigma$ -Algebren bleiben wie in Kapitel 3 allerdings für die erweiterte Indexmenge  $\mathbb{R}$ .

**Vermutete Zerlegung: Ornstein-Uhlenbeck Prozess**

Für einen Harness-Prozess  $Z = (Z_t)_{t \in \mathbb{R}}$  existieren Zufallsvariablen  $R, S$  und  $\alpha$ , so dass

$$Z_t = S + e^t R + \sqrt{\alpha} B_{e^t} \quad t \in \mathbb{R}.$$

**Bemerkung 4.4**

Als einzige völlig neue Idee, nennen wir in diesem Abschnitt den Harness-Prozess  $Z$ . Die Zufallsvariablen  $R$  und  $S$  haben wir nicht umbenannt, da es sich um genau die aus Kapitel 3 gefolgerten Zufallsvariablen handelt.

**Beweisskizze**

Das heißt, wenn  $Z = (Z_t)_{t \in \mathbb{R}}$  ein Harness-Prozess ist, dann gilt für  $s < t < u$  die übliche Definition von Harness-Prozess in stetiger Zeit

$$\mathbb{E}[Z_t | \mathcal{G}_s, \mathcal{H}_u] = \frac{u-t}{u-s} Z_s + \frac{t-s}{u-s} Z_u$$

und nach Transformation der Zeit mittels  $e^\cdot$  ergibt sich

$$\mathbb{E}[Z_{e^t} | \mathcal{G}_{e^s}, \mathcal{H}_{e^u}] = \frac{e^u - e^t}{e^u - e^s} Z_{e^s} + \frac{e^t - e^s}{e^u - e^s} Z_{e^u}.$$

$e^\cdot$  ist eine stetige und monotone Transformation der Zeit, das heißt  $e^s < e^t < e^u$ . Damit erhalten wir für  $t' = e^t, s' = e^s$  und  $u' = e^u$

$$\mathbb{E}[Z_{t'} | \mathcal{G}_{s'}, \mathcal{H}_{u'}] = \frac{u'-t'}{u'-s'} Z_{s'} + \frac{t'-s'}{u'-s'} Z_{u'}$$

einen Harness Prozess über  $\mathbb{R}^+$ . Wenn  $(Z_t)_{t \in \mathbb{R}}$  stetige Pfade besitzt und quadratintegrierbar ist, dann gilt dies auch für  $(Z_{e^t})_{t \in \mathbb{R}}$ . Das heißt, es existieren Zufallsvariablen  $R, S$  und  $\alpha$ , so dass folgende Zerlegung gilt

$$\begin{aligned} Z_{t'} &= S + t'R + \sqrt{\alpha}B_{t'} && \forall t \in \mathbb{R} \\ \Rightarrow Z_{e^t} &= S + e^tR + \sqrt{\alpha}B_{e^t} && \forall t \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

wobei  $(B_v)_{v \geq 0}$  eine Standard Brownsche Bewegung ist. Und insbesondere ist  $(\sqrt{\alpha}B_{e^t})_{t \in \mathbb{R}}$  ein Ornstein-Uhlenbeck-Prozess.

**Problem:**

Mathematisch gibt es bei dieser Methode keine offenen Fragen, da alle Beweise schon in Kapitel 3 geführt wurden. Aber entspricht diese Antwort dem, was wir suchen? Wir haben durch Transformation der Zeit einen Harness-Prozess über  $\mathbb{R}$  in einen Harness-Prozess über  $\mathbb{R}^+$  überführt. Wir wollen aber eine Zerlegung für einen Harness-Prozess über  $\mathbb{R}$  finden.

Wir haben nun die drei verschiedenen Ansätze studiert und können festhalten, dass die Ansätze 2 und 3 eine interessante Form haben. Insbesondere der Ornstein-Uhlenbeck Prozess würde einen weiteren interessanten Einblick in Harness-Prozesse ermöglichen, wenn er sich als richtig herausstellt.

## 5 FAZIT

Wir haben uns jetzt eingehend mit Harness-Prozessen über  $\mathbb{Z}$  und  $\mathbb{R}^+$  beschäftigt. Dabei haben wir unsere Aufmerksamkeit auf die Zerlegungen von Harness-Prozessen gerichtet. Zusammengefasst gilt:

- Sei  $(X_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  ein Harness-Prozess, dann existieren Zufallsvariablen  $L$  und  $A$ , so dass

$$X_n = A + nL \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

- Sei  $(Y_t)_{t > 0}$  ein Harness-Prozess, der  $\mathcal{L}^2$ -integrierbar ist und stetige Pfade hat, dann existieren Zufallsvariablen  $R, S$  und  $\alpha$ , so dass

$$Y_t = S + tR + \sqrt{\alpha}B_t \quad \forall t > 0,$$

wobei  $(B_t)_{t \geq 0}$  eine Standard Brownsche Bewegung ist.

### Mögliche Weiterführungen der Arbeit

Wir haben in dieser Arbeit den Schwerpunkt auf die oben erwähnten Zerlegungen von Harness-Prozessen über  $\mathbb{Z}$  und  $\mathbb{R}^+$  gelegt und im Ausblick, Kapitel 4, Vermutungen geäußert wie Zerlegungen über  $\mathbb{R}$  aussehen könnten und dazu Beweisideen skizziert. Dabei bleiben aber noch einige andere Themen und Fragen offen, die interessant anzuschauen sind und auf die wir hier nur kurz hinweisen wollen.

1. Im Abschnitt 2.2 haben wir gezeigt, dass jede Irrfahrt über  $\mathbb{Z}$  ein Differenzenharness-Prozess ist. Gilt dann auch die Umkehrung? Die Frage ist also: Existiert für jeden Differenzenharness-Prozess eine Zerlegung in eine Irrfahrt? Es bleibt also zu untersuchen, ob für Differenzenharness-Prozesse ähnliche Zerlegungseigenschaften gelten wie für die einfachen Harness-Prozesse in diskreter und stetiger Zeit.
2. Um die oben genannte Zerlegung von Harness-Prozessen über  $\mathbb{R}^+$  zu beweisen, mussten wir zwei Zusatzannahmen machen: Erstens die Quadrat-Integrierbarkeit des Prozesses  $Y$  und zweitens die stetigen Pfade. Daraus ergibt sich die Frage, ob es eine allgemeinere Zerlegung von Harness-Prozessen über  $\mathbb{R}^+$  gibt, für die die oben angeführte nur einen Spezialfall darstellt.
3. In Kapitel 4 haben wir mögliche Zerlegungen von Harness-Prozessen über  $\mathbb{R}$  betrachtet. Deren Existenz-Beweise konnten wir aber nicht lückenlos führen. Es bleibt also zu überprüfen, ob eine Zerlegung von Harness-Prozessen über  $\mathbb{R}$  existiert und ob sie tatsächlich eine der vermuteten Formen annimmt.
4. Im Einleitungstext haben wir kurz  $\mathbf{Q}$ -Harness-Prozesse erwähnt, die D. Williams in seinem Beitrag zu dem Buch *Stochastic Analysis* [24] vorgestellt hat. Dort setzt er den  $\mathbf{Q}$ -Harness-Prozess ins Verhältnis zu dem von J.M. Hammersley in [15] motivierten Harness-Prozess und zeigt unter anderem, dass solche  $\mathbf{Q}$ -Harness-Prozesse ebenfalls eine Zerlegung besitzen, genauer eine Riesz-Zerlegung. Es wäre eine natürliche Erweiterung dieser Arbeit, Harness-Prozessen über mehrdimensionaler Indexmenge und deren Zerlegungseigenschaften zu studieren.

### **Forschung und Anwendbarkeit**

Nachdem D. Williams 1973 in [24] und 1980 in [25] Harness-Prozesse wie wir sie heute kennen eingeführt hat, haben sie immer mehr an Bedeutung gewonnen. Schon in den Achtzigern haben verschiedene Mathematiker sich mit Harness-Prozessen beschäftigt. Zum Beispiel hat sich 1981 M. Dozzi in seinem Paper [9] damit befasst 2 Parameter Harness-Prozesse im Vergleich zu Wiener Prozessen (Brownsche Bewegung) über  $(\mathbb{R}^+)^2$  zu studieren. Dieses Thema greift er in seinem Buch [10] von 1989 erneut auf. Es haben sich außerdem 1988 R.C.Zhang und X.W. Zhuang und 1992 Z.G. Zhou ebenfalls mit zwei Parameter Harness-Prozessen beschäftigt, [29, 27, 28]. In moderneren Papern von 2004, 2006 und 2007 haben sich verschiedene Autoren mit dem Thema Harness-Prozesse in Bezug auf kristalline Strukturen befasst, [20, 11, 12]. Dieser Ansatz liegt wohl der Motivation von J.M. Hammersley am nächsten. Das vielleicht interessanteste Anwendungsgebiet findet sich in der Finanzmathematik. In dem Buch *Mathematical Methods for Financial Markets* von M. Jeanblanc, M. Yor und M. Chesney, [16], werden Harness-Prozesse zusammen mit Poisson-Brücken im Rahmen der Ruin-Theorie erwähnt. Dort wird auch auf den Artikel [7] verwiesen, indem J.M. Corcuera, P. Imkeller et.al. eine Verbindung zwischen Harness-Prozessen und dem Insider Trading hergestellt haben. Allerdings wird die Harness-Eigenschaft der Brownschen Bewegung nicht als solche genannt, sondern folgt aus der Erweiterung der zugehörigen Filtration ("enlargement of filtration"). Es bleibt zu erwähnen, dass sich Harness-Prozesse seit 2006 auch in Papern aus der 'russischen Schule' wiederfinden, [5, 3, 4].

## LITERATURVERZEICHNIS

- [1] BAUER, Heinz: *Wahrscheinlichkeitstheorie*. Fourth. Berlin : Walter de Gruyter & Co., 1991 (de Gruyter Lehrbuch. [de Gruyter Textbook]). – xviii+520 S. – ISBN 3-11-012190-5; 3-11-012191-3
- [2] BERTOIN, Jean: *Cambridge Tracts in Mathematics*. Bd. 121: *Lévy processes*. Cambridge : Cambridge University Press, 1996. – x+265 S. – ISBN 0-521-56243-0
- [3] BRYC, Włodzimierz ; MATYSIAK, Wojciech ; WESOŁOWSKI, Jacek: Quadratic harnesses,  $q$ -commutations, and orthogonal martingale polynomials. In: *Trans. Amer. Math. Soc.* 359 (2007), Nr. 11, S. 5449–5483. – URL <http://dx.doi.org/10.1090/S0002-9947-07-04194-3>. – ISSN 0002-9947
- [4] BRYC, Włodzimierz ; MATYSIAK, Wojciech ; WESOŁOWSKI, Jacek: The bi-Poisson process: a quadratic harness. In: *Ann. Probab.* 36 (2008), Nr. 2, S. 623–646. – URL <http://dx.doi.org/10.1214/009117907000000268>. – ISSN 0091-1798
- [5] BRYC, Włodzimierz ; WESOŁOWSKI, Jacek: The classical bi-Poisson process: an invertible quadratic harness. In: *Statist. Probab. Lett.* 76 (2006), Nr. 15, S. 1664–1674. – URL <http://dx.doi.org/10.1016/j.spl.2006.04.050>. – ISSN 0167-7152
- [6] CHAUMONT, L. ; YOR, M.: *Cambridge Series in Statistical and Probabilistic Mathematics*. Bd. 13: *Exercises in probability*. Cambridge : Cambridge University Press, 2003. – xvi+236 S. – URL <http://dx.doi.org/10.1017/CB09780511610813>. – A guided tour from measure theory to random processes, via conditioning. – ISBN 0-521-82585-7
- [7] CORCUERA, José M. ; IMKELLER, Peter ; KOHATSU-HIGA, Arturo ; NUALART, David: Additional utility of insiders with imperfect dynamical information. In: *Finance Stoch.* 8 (2004), Nr. 3, S. 437–450. – URL <http://dx.doi.org/10.1007/s00780-003-0119-y>. – ISSN 0949-2984
- [8] DELLACHERIE, Claude ; MEYER, Paul-André: *Actualités Scientifiques et Industrielles [Current Scientific and Industrial Topics]*. Bd. 1385: *Probabilités et potentiel. Chapitres V à VIII*. Revised. Paris : Hermann, 1980. – xviii+476 S. – Théorie des martingales. [Martingale theory]. – ISBN 2-7056-1385-4
- [9] DOZZI, M.: Two-parameter harnesses and the Wiener process. In: *Z. Wahrsch. Verw. Gebiete* 56 (1981), Nr. 4, S. 507–514. – URL <http://dx.doi.org/10.1007/BF00531429>. – ISSN 0044-3719
- [10] DOZZI, M.: *Pitman Research Notes in Mathematics Series*. Bd. 194: *Stochastic processes with a multidimensional parameter*. Harlow : Longman Scientific & Technical, 1989. – viii+198 S. – ISBN 0-582-03127-3

- [11] FERRARI, Pablo A. ; NIEDERHAUSER, Beat M.: Harness processes and harmonic crystals. In: *Stochastic Process. Appl.* 116 (2006), Nr. 6, S. 939–956. – URL <http://dx.doi.org/10.1016/j.spa.2005.12.004>. – ISSN 0304-4149
- [12] FERRARI, Pablo A. ; NIEDERHAUSER, Beat M. ; PECHERSKY, Eugene A.: Harness processes and non-homogeneous crystals. In: *J. Stat. Phys.* 128 (2007), Nr. 5, S. 1159–1176. – URL <http://dx.doi.org/10.1007/s10955-007-9343-8>. – ISSN 0022-4715
- [13] GÄNSSLER, Peter ; STUTE, Winfried: *Wahrscheinlichkeitstheorie*. Berlin : Springer-Verlag, 1977. – xii+418 S. – ISBN 3-540-08418-5
- [14] HACKENBROCH, Wolfgang ; THALMAIER, Anton: *Stochastische Analysis*. Stuttgart : B. G. Teubner, 1994 (Mathematische Leitfäden. [Mathematical Textbooks]). – 560 S. – Eine Einführung in die Theorie der stetigen Semimartingale. [An introduction to the theory of continuous semimartingales]. – ISBN 3-519-02229-X
- [15] HAMMERSLEY, J. M.: Harnesses. In: *Proc. Fifth Berkeley Sympos. Mathematical Statistics and Probability (Berkeley, Calif., 1965/66), Vol. III: Physical Sciences*. Berkeley, Calif. : Univ. California Press, 1967, S. 89–117
- [16] JEANBLANC, Monique ; YOR, Marc ; CHESNEY, Marc: *Mathematical methods for financial markets*. London : Springer-Verlag London Ltd., 2009 (Springer Finance). – xxvi+732 S. – URL <http://dx.doi.org/10.1007/978-1-84628-737-4>. – ISBN 978-1-85233-376-8
- [17] KALLENBERG, Olav: *Foundations of modern probability*. Second. New York : Springer-Verlag, 2002 (Probability and its Applications (New York)). – xx+638 S. – ISBN 0-387-95313-2
- [18] KLENKE, Achim: *Wahrscheinlichkeitstheorie*. Springer, 2008. – 2
- [19] LÉVY, Paul: Une propriété d’invariance projective dans le mouvement brownien. In: *C. R. Acad. Sci. Paris* 219 (1944), S. 378–379
- [20] MANSUY, Roger ; YOR, Marc: Harnesses, Lévy bridges and *Monsieur Jourdain*. In: *Stochastic Process. Appl.* 115 (2005), Nr. 2, S. 329–338. – URL <http://dx.doi.org/10.1016/j.spa.2004.09.001>. – ISSN 0304-4149
- [21] NEVEU, Jacques: *Martingales à temps discret*. Masson et Cie, éditeurs, Paris, 1972. – vii+218 S
- [22] REVUZ, Daniel ; YOR, Marc: *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Bd. 293: *Continuous martingales and Brownian motion*. Third. Berlin : Springer-Verlag, 1999. – xiv+602 S. – ISBN 3-540-64325-7
- [23] ROGERS, L.C.G. ; WILLIAMS, David: *Diffusions, Markov Processes, and Martingales*. Wiley, 1994

- [24] WILLIAMS, David: Some basic theorems on harnesses. In: *Stochastic analysis (a tribute to the memory of Rollo Davidson)*. London : Wiley, 1973, S. 349–363
- [25] WILLIAMS, David: *Brownian Motion as a Harness*. 1980. – unveröffentlichtes Manuskript
- [26] WILLIAMS, David: *Probability with martingales*. Cambridge : Cambridge University Press, 1991 (Cambridge Mathematical Textbooks). – xvi+251 S. – ISBN 0-521-40455-X; 0-521-40605-6
- [27] ZHANG, Run C. ; ZHUANG, Xing W.: Two-parameter harnesses and a characterization of Brownian sheets. In: *Kexue Tongbao (Chinese)* 33 (1988), Nr. 22, S. 1694–1697. – ISSN 0023-074X
- [28] ZHOU, Zhan G.: Two-parameter harnesses and the generalized Brownian sheet. In: *Natur. Sci. J. Xiangtan Univ.* 14 (1992), Nr. 2, S. 111–115. – ISSN 1000-5900
- [29] ZHUANG, Xing W.: The generalized Brownian sheet and two-parameter harnesses. In: *Fujian Shifan Daxue Xuebao Ziran Kexue Ban* 4 (1988), Nr. 4, S. 1–9. – ISSN 1000-5277

# SYMBOLVERZEICHNIS

## Indexmengen

$\mathbb{N}^*$	natürliche Zahlen ohne Null, $\{1, 2, \dots\}$
$\mathbb{N}$	natürliche Zahlen einschließlich Null, $\{0, 1, 2, \dots\}$
$\mathbb{Z}$	ganze Zahlen, $\{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$
$\mathbb{Z}^d$	d-dimensionale Vektoren mit Einträgen in $\mathbb{Z}$ , $\{(i_1, \dots, i_d) \mid i_l \in \mathbb{Z}, l = 1, \dots, d\}$
$\mathbb{R}^+$	positive reelle Zahlen, $(0, \infty)$
$\mathbb{R}^-$	negative reelle Zahlen, $(-\infty, 0)$
$\mathbb{R}$	reelle Zahlen $(-\infty, \infty)$

## Wahrscheinlichkeitstheorie

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$	Wahrscheinlichkeitsraum
$\mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$	Menge der $p$ -integrierbaren Zufallsvariablen, $\{X : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid \mathbb{E}[ X ^p] < \infty\}$ , $p \in \mathbb{N}^*$
$\mathbb{E}[X]$	Erwartungswert der Zufallsvariable $X$
$\mathbb{E}[X Y]$	bedingte Erwartung von $X$ unter $Y$
$\mathbb{E}[\cdot   \mathcal{G}, \mathcal{H}]$	$= \mathbb{E}[\cdot   \sigma(\mathcal{G}, \mathcal{H})]$ für $\sigma$ -Algebren $\mathcal{G}$ und $\mathcal{H}$
$\sigma(\mathcal{E})$	vom Mengensystem $\mathcal{E}$ erzeugte $\sigma$ -Algebra

## Spezielle Symbole

$(\mathcal{G}_n)_{n \in \mathbb{Z}}$	$\mathcal{G}_m = \sigma(X_k \mid -\infty < k \leq m)$ die Vergangenheit des Prozesses $(X_n)_{n \in \mathbb{Z}}$	Def. S.9
$(\mathcal{H}_n)_{n \in \mathbb{Z}}$	$\sigma(X_r \mid m \leq r < +\infty)$ die Zukunft des Prozesses $(X_n)_{n \in \mathbb{Z}}$	Def. S.9
$(\mathcal{G}_t)_{t > 0}$	vollständige, aufsteigende und rechts-stetige Familie von $\sigma$ -Algebren	Def. S.23
$(\mathcal{H}_t)_{t > 0}$	vollständige, absteigende und links-stetige Familie von $\sigma$ -Algebren	Def. S.23
$L$	$= \lim_{v \searrow -\infty} \frac{X_v}{v}$ , für einen Harness-Prozess $(X_n)_{n \in \mathbb{Z}}$	Def. S.16
$A$	$= \lim_{n \nearrow +\infty} (X_n - nL)$ , für einen Harness-Prozess $(X_n)_{n \in \mathbb{Z}}$	Def. S.17
$R$	$\lim_{u \nearrow +\infty} \frac{Y_u}{u}$ , für einen Harness-Prozess $(Y_t)_{t > 0}$	Def. S.29
$S$	$= \lim_{s \searrow 0} Y_s$ , für einen Harness-Prozess $(Y_t)_{t > 0}$	Def. S.29
$\tilde{Y}_t$	$= Y_t - tR - S$ , zu $(Y_t)_{t > 0}$ assoziierter Prozess	Def. S.31



*Erklärung zur Urheberschaft*

Hiermit erkläre ich, dass ich die vorliegende Arbeit selbständig und nur unter Verwendung der angegebenen Literatur und Hilfsmittel angefertigt habe.

*Einverständniserklärung*

Hiermit erkläre ich mich einverstanden, dass ein Exemplar meiner Diplomarbeit in der Bibliothek des Instituts für Mathematik verbleibt.

Berlin, den 8. September 2010

Carola R. Voss