Das Yamabe-Problem auf global-hyperbolischen Lorentz-Mannigfaltigkeiten

Viktoria Rothe

Dissertation
zur Erlangung des akademischen Grades
"doctor rerum naturalium" (Dr. rer. nat)
in der Wissenschaftsdisziplin Mathematik

eingereicht an der
Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Universität Potsdam

Datum der Disputation:
26. 10. 2020

Betreuer: Prof. Dr. Christian Bär

Gutachter/Gutachterinnen:
Prof. Dr. Christian Bär
Prof. Dr. Jan Metzger
JProf. Dr. Nadine Große

Online veröffentlicht auf dem
Publikationsserver der Universität Potsdam:
https://doi.org/10.25932/publishup-48601
https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:kobv:517-opus4-486012

Zusammenfassung

Im Jahre 1960 behauptete Yamabe ([13]) folgende Aussage bewiesen zu haben: Auf jeder kompakten Riemannschen Mannigfaltigkeit (M, g) der Dimension $n \geq 3$ existiert eine zu g konform äquivalente Metrik mit konstanter Skalarkrümmung. Diese Aussage ist äquivalent zur Existenz einer Lösung einer bestimmten semilinearen elliptischen Differentialgleichung, der Yamabe-Gleichung. 1968 fand Trudinger ([11]) einen Fehler in seinem Beweis und infolgedessen beschäftigten sich viele Mathematiker mit diesem nach Yamabe benannten Yamabe-Problem. In den 80er Jahren konnte durch die Arbeiten von Trudinger ([11]), Aubin ([2]) und Schoen ([9]) gezeigt werden, dass diese Aussage tatsächlich zutrifft. Dadurch ergeben sich viele Vorteile, z. B. kann beim Analysieren von konform invarianten partiellen Differentialgleichungen auf kompakten Riemannschen Mannigfaltigkeiten die Skalarkrümmung als konstant vorausgesetzt werden.

Es stellt sich nun die Frage, ob die entsprechende Aussage auch auf Lorentz-Mannigfaltigkeiten gilt. Das Lorentz'sche Yamabe Problem lautet somit: Existiert zu einer gegebenen räumlich kompakten global-hyperbolischen Lorentz-Mannigfaltigkeit (M, g) eine zu g konform äquivalente Metrik mit konstanter Skalarkrümmung? Das Ziel dieser Arbeit ist es, dieses Problem zu untersuchen.

Bei der sich aus dieser Fragestellung ergebenden Yamabe-Gleichung handelt es sich um eine semilineare Wellengleichung, deren Lösung eine positive glatte Funktion ist und aus der sich der konforme Faktor ergibt. Um die für die Behandlung des Yamabe-Problems benötigten Grundlagen so allgemein wie möglich zu halten, wird im ersten Teil dieser Arbeit die lokale Existenztheorie für beliebige semilineare Wellengleichungen für Schnitte auf Vektorbündeln im Rahmen eines Cauchy-Problems entwickelt. Hierzu wird der Umkehrsatz für Banachräume angewendet, um mithilfe von bereits existierenden Existenzergebnissen zu linearen Wellengleichungen, Existenzaussagen zu semilinearen Wellengleichungen machen zu können. Es wird bewiesen, dass, falls die Nichtlinearität bestimmte Bedingungen erfüllt, eine fast zeitglobale Lösung des Cauchy-Problems für kleine Anfangsdaten sowie eine zeitlokale Lösung für beliebige Anfangsdaten existiert.

Der zweite Teil der Arbeit befasst sich mit der Yamabe-Gleichung auf global-hyperbolischen Lorentz-Mannigfaltigkeiten. Zuerst wird gezeigt, dass die Nichtlinearität der Yamabe-Gleichung die geforderten Bedingungen aus dem ersten Teil erfüllt, so dass, falls die Skalarkrümmung der gegebenen Metrik nahe an einer Konstanten liegt, kleine Anfangsdaten existieren, so dass die Yamabe-Gleichung eine fast zeitglobale Lösung besitzt. Mithilfe von Energieabschätzungen wird anschließend für 4-dimensionale global-hyperbolische Lorentz-Mannigfaltigkeiten gezeigt, dass unter der Annahme, dass die konstante Skalarkrümmung der konform äquivalenten Metrik nichtpositiv ist, eine zeitglobale Lösung der Yamabe-Gleichung existiert, die allerdings nicht

notwendigerweise positiv ist. Außerdem wird gezeigt, dass, falls die H^2-Norm der Skalarkrümmung bezüglich der gegebenen Metrik auf einem kompakten Zeitintervall auf eine bestimmte Weise beschränkt ist, die Lösung positiv auf diesem Zeitintervall ist. Hierbei wird ebenfalls angenommen, dass die konstante Skalarkrümmung der konform äquivalenten Metrik nichtpositiv ist. Falls zusätzlich hierzu gilt, dass die Skalarkrümmung bezüglich der gegebenen Metrik negativ ist und die Metrik gewisse Bedingungen erfüllt, dann ist die Lösung für alle Zeiten in einem kompakten Zeitintervall positiv, auf dem der Gradient der Skalarkrümmung auf eine bestimmte Weise beschränkt ist. In beiden Fällen folgt unter den angeführten Bedingungen die Existenz einer zeitglobalen positiven Lösung, falls $M = I \times \Sigma$ für ein beschränktes offenes Intervall I ist. Zum Schluss wird für $M = \mathbb{R} \times \Sigma$ ein Beispiel für die Nichtexistenz einer globalen positiven Lösung angeführt.

Abstract

Yamabe([13]) claimed in 1960 that he had proven the following theorem: Any Riemannian metric g on a compact smooth manifold M of dimension $n \geq 3$ is conformal to a metric with constant scalar curvature. An equivalent formulation of this theorem is the existence of a solution to a certain semilinear elliptic differential equation, the so-called Yamabe equation. In 1968 Trudinger ([11]) found a mistake in Yamabe's paper and consequently many mathematicians dealt with this so-called Yamabe problem. In the 80s Trudinger ([11]), Aubin ([2]) and Shoen ([9]) were able to fix the mistake and prove that Yamabe's theorem was indeed true. This has many advantages, for example when analyzing a conformally invariant partial differential equation on compact Riemannian manifolds one can assume that the scalar curvature is constant.
The question now arises whether the analogous statement on Lorentzian manifolds also applies. The Lorentzian Yamabe Problem can be stated as follows: Given a spatially compact globally hyperbolic Lorentzian manifold (M, g), does there exist a metric conformal to g with constant scalar curvature? The goal of this dissertation is to examine this problem.
The Yamabe equation which arises from this question is a semilinear wave equation which must have a positive smooth solution. In the first part of this dissertation the local theory of existence of general semilinear wave equations for sections on vector bundles was developed. For this the inverse function theorem and already existing statements about the existence of solutions to linear wave equation on Lorentzian manifolds were used. It will be proven that there exists an almost global solution to the corresponding Cauchy problem for small initial data as well as a time local solution for arbitrary initial data if the nonlinearity fulfills certain conditions.
The second part of the dissertation deals with the Yamabe equation on globally hyperbolic Lorentzian manifolds. First by using the results of the first part it will be proven that there exist initial data such that the Yamabe equation has an almost time global solution if the scalar curvature of the given metric is sufficiently close to a constant. Afterwards by using energy estimates it will be shown in the case of 4-dimensional Lorentzian manifolds that under the assumption that the constant scalar curvature of the conformal metric is non-positive there exists a global smooth solution to the Yamabe equation which is not necessarily positive. But it will be proven that the solution is positive on a compact time interval if the H^2-Norm of the scalar curvature of the given metric is bounded on this time interval in a certain way or if the scalar curvature is negative and the gradient of the scalar curvature is bounded in a specific way. In both cases the existence of a global positive smooth solution follows, if the Lorentzian manifold has the form $M = I \times \Sigma$ where I is an open bounded time interval and Σ is a Riemannian manifold. At the end an example for the nonexistence of a global positive solution in the case of $M = \mathbb{R} \times \Sigma$ will be presented.

Danksagungen

Mein Dank gilt zunächst meinem Betreuer Christian Bär für die Vergabe dieses für mich sehr interessanten Themas und für die hilfreiche Unterstützung.
Besonders danken möchte ich Florian Hanisch, der sich immer viel Zeit genommen hat, um mit mir über die Probleme der Promotionsarbeit zu diskutieren und mir viele sehr nützliche Anregungen geben konnte, um diese Probleme zu überwinden. Des Weiteren danke ich Andreas Hermann, Klaus Kröncke und Christian Becker für die hilfreichen Diskussionen. Danken möchte ich außerdem meinen weiteren (ehemaligen) Kollegen aus der Potsdamer Geometrie Gruppe: Lashi Bandara, Marco Benini, Sebastian Hannes, Max Lewandowski, Matthias Ludewig, Oliver Lindblad Petersen, Saskia Roos, Christoph Stephan, Horst Wendland, Ramona Ziese und insbesondere Ariane Beier und Claudia Grabs für die vielen interessanten und humorvollen Mittags- und Kaffeepausen.
Ein besonderer Dank gilt meinem Ehemann René Rothe für das liebevolle Verständnis und den moralischen Beistand, der mir die Kraft zur Fertigstellung meiner Dissertation gegeben hat.
Zudem danke ich der Studienstiftung des deutschen Volkes für die finanzielle Unterstützung.

Eigenständigkeitserklärung

Hiermit erkläre ich, dass ich die vorliegende Arbeit selbständig angefertigt habe. Ich versichere, dass die vorgelegte Arbeit weder im Inland noch im Ausland in gleicher oder ähnlicher Form einer anderen Prüfungsbehörde zum Zweck einer Promotion oder eines anderen Prüfverfahrens vorgelegt wurde. Alles aus anderen Quellen oder von anderen Personen übernommene Material, das in der Arbeit verwendet wurde oder auf das direkt Bezug genommen wird, wurde als solches kenntlich gemacht.

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Das Yamabe-Problem auf einer Lorentz-Mannigfaltigkeit lautet: Existiert zu einer gegebenen Lorentz-Mannigfaltigkeit (M, g) eine zu g konform äquivalente Metrik $\bar{g}$ mit konstanter Skalarkrümmung $S_{\bar{g}}$? Sei S_g die Skalarkrümmung bezüglich der Metrik g und sei $\dim(M) = n + 1$. Dann ist diese Fragestellung äquivalent zum Finden einer glatten Lösung der Differentialgleichung

$$\Box_g u + \frac{n-1}{2}|\nabla u|_g^2 + \frac{1}{2n}S_g = \frac{1}{2n}S_{\bar{g}}e^{2u} \tag{1.1}$$

bzw. einer positiven glatten Lösung der Differentialgleichung

$$\Box_g \varphi + \frac{n-1}{4n}S_g\varphi - \frac{n-1}{4n}S_{\bar{g}}\varphi^{\frac{n+3}{n-1}} = 0. \tag{1.2}$$

Hierbei bezeichnet $\Box_g = -\mathrm{div} \circ \mathrm{grad} = -\mathrm{tr}(\nabla^2)$ den skalaren d'Alembert-Operator bezüglich g. In beiden Fällen handelt es sich um semilineare Wellengleichungen. Aus diesem Grund wird zuerst die lokale Existenz von Lösungen allgemeiner semilinearer Wellengleichungen untersucht. Um die Ergebnisse so allgemein wie möglich zu halten, wird die Theorie für Schnitte auf Vektorbündel entwickelt. Anschließend wird die globale Existenz einer Lösung der Gleichung (1.1) bzw. einer positiven Lösung von (1.2) untersucht.

Der erste Teil der Arbeit befasst sich mit allgemeinen semilinearen Wellengleichungen auf global-hyperbolischen Lorentz-Mannigfaltigkeiten. Um das zugehörige Cauchy-Problem sinnvoll behandeln zu können, werden global-hyperbolische Lorentz-Mannigfaltigkeiten betrachtet. Solche Mannigfaltigkeiten sind nach dem Theorem von Bernal - Sánchez (siehe Thm. 2.2) isometrisch zu $(\mathbb{R} \times \Sigma, -\beta dt^2 + g_t)$, wobei $\Sigma_t := \{t\} \times \Sigma$ glatte raumartige Cauchy-Hyperflächen für alle $t \in \mathbb{R}$ sind und $\{g_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ eine Familie Riemannscher Metriken auf Σ_t darstellt. Es wird angenommen, dass Σ geschlossen ist. Sei $E \to M$ ein reelles Vektorbündel und sei $\mathcal{L}$ ein semilinearer Wellenoperator. Für $t_0 \in \mathbb{R}$ wird das zugehörige Cauchy-Problem

$$\left.\begin{aligned} \mathcal{L}u &= f, \\ u|_{\Sigma_{t_0}} &= u_0, \\ \nabla_\nu u|_{\Sigma_{t_0}} &= u_1, \end{aligned}\right\} \tag{1.3}$$

betrachtet, wobei ν das zukunftsgerichtete zeitartige Einheitsnormalenfeld entlang Σ ist. Die Schnitte f, u_0, u_1 und die Lösung u liegen in geeigneten Räumen, die in Kapitel 2 eingeführt werden. Des Weiteren werden in Kapitel 2 bereits vorhandene Existenzresultate zu linearen Wellengleichungen auf Lorentz-Mannigfaltigkeiten aus [5] kurz vorgestellt. Diese Ergebnisse werden verwendet, um in Kapitel 3 Aussagen zur Existenz einer Lösung des Cauchy-Problems (1.3) machen zu können. Das Ziel ist es, die semilineare Wellengleichung zu linearisieren, um mithilfe des Umkehrsatzes für Banachräume eine fast zeitglobale Lösung für kleine Anfangsdaten u_0, u_1, f (siehe Theorem 3.10) bzw. eine zeitlokale Lösung für beliebige Anfangsdaten (siehe Theorem 3.12) zu erhalten.

In Kapitel 4 wird schließlich das Yamabe-Problem untersucht. In Abschnitt 4.1 und 4.3 werden bereits existierende Resultate zum Yamabe-Problem auf Riemannschen Mannigfaltigkeiten bzw. auf ultrastatischen Raumzeiten vorgestellt. Mithilfe von Theorem 3.10 wird in Abschnitt 4.4 gezeigt, dass für kleine Anfangsdaten u_0, u_1 und für Skalarkrümmungen S_g, die nahe an $S_{\bar{g}}$ liegen, für ein beliebiges fest vorgegebenes Zeitintervall eine Lösung von (1.1) existiert.
In Abschnitt 4.5 werden Lorentz-Mannigfaltigkeiten der Dimension 3 bzw. 4 betrachtet. In diesen beiden Fällen wird in Theorem 4.16 mithilfe von Energieabschätzungen gezeigt, dass für $S_{\bar{g}} \leq 0$ eine glatte zeitglobale Lösung der Yamabe-Gleichung (1.2) existiert, die aber nicht unbedingt positiv ist. In Abschnitt 4.6 werden für 4-dimensionale Lorentz-Mannigfaltigkeiten in Theorem 4.17 und 4.25 zwei verschiedene Bedingungen an die Metrik g vorgestellt, so dass die Lösung von (1.2) auf einem fest vorgegebenem Zeitintervall positiv ist. Auch dies wird mithilfe von Energieabschätzungen erreicht. In Abschnitt 4.7 wird, falls $S_g \geq 0$ und $S_{\bar{g}} \leq 0$ gilt, ein Beispiel für die Nichtexistenz einer zeitglobalen positiven Lösung gegeben.

2 Das lineare Cauchy-Problem

In diesem Kapitel werden einige Notation eingeführt und die Ergebnisse zu linearen Wellengleichungen auf global-hyperbolischen Lorentz-Mannigfaltigkeiten aus [5] kurz vorgestellt. Während des gesamten Kapitels sei angenommen, dass (M, g) eine global-hyperbolische Lorentz-Mannigfaltigkeit der Dimension $n+1$ ist. Es gibt verschiedene Möglichkeiten eine global-hyperbolische Lorentz-Mannigfaltigkeit zu definieren. Eine mögliche Definition ist die folgende:

Definition 2.1. *Eine zusammenhängende, zeitorientierte Lorentz-Mannigfaltigkeit M heißt genau dann global-hyperbolisch, wenn sie eine Cauchy-Hyperfläche Σ besitzt, d.h. eine Teilmenge $\Sigma \subset M$, die von jeder nicht-erweiterbaren zeitartigen Kurve in M genau einmal getroffen wird.*

Weitere Definitionen und Eigenschaften können z. B. in [6] nachgelesen werden. Für global-hyperbolische Lorentz-Mannigfaltigkeiten gilt das folgende wichtige Theorem von Bernal-Sánchez:

Theorem 2.2 ([4], Thm. 1.1)**.** *Jede global-hyperbolische Lorentz-Mannigfaltigkeit (M, g) ist isometrisch zu der Produktmannigfaltigkeit $(\mathbb{R} \times \Sigma, -\beta\, dt^2 + g_t)$, wobei $\beta : \mathbb{R} \times \Sigma \to (0, \infty)$ eine positive glatte Funktion ist. Die Niveaumengen $\Sigma_t := \{t\} \times \Sigma$ sind für alle $t \in \mathbb{R}$ glatte raumartige Cauchy-Hyperflächen und $(g_t)_{t\in\mathbb{R}}$ ist eine glatte Familie Riemannscher Metriken auf Σ_t.*

Folglich kann die global-hyperbolische Lorentz-Mannigfaltigkeit (M, g) in der Form $(\mathbb{R} \times \Sigma, -\beta\, dt^2 + g_t)$ geschrieben werden, wobei angenommen wird, dass die Cauchy-Hyperfläche Σ geschlossen ist.

2.1 Der lineare Wellenoperator

Zuerst soll erläutert werden, was man unter einem Wellenoperator auf einer Lorentz-Mannigfaltigkeit versteht. Sei $E \to M$ ein reelles Vektorbündel.

Definition 2.3. *Ein linearer Wellenoperator $L : C^\infty(M, E) \to C^\infty(M, E)$ ist ein linearer Differentialoperator der Ordnung zwei, dessen Hauptsymbol durch die Metrik g gegeben ist, d.h. es gilt*

$$\sigma_L(\xi) = -\langle \xi, \xi \rangle_g \cdot id_{E_x}$$

für alle $x \in M$ und alle $\xi \in T_x^*M$. Wählt man lokale Koordinaten $x^0, x^1, ..., x^n$ auf M und eine lokale Trivialisierung von E, dann lässt sich ein linearer Wellenoperator in der Form

$$L = -\sum_{i,j=0}^{n} g^{ij}(t,x)\frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} + \sum_{i=0}^{n} B_i(t,x)\frac{\partial}{\partial x^i} + C(t,x),$$

schreiben, wobei B_i, C Matrix-wertige glatte Koeffizienten sind, $(g^{ij})_{ij}$ die inverse Matrix von (g_{ij}) mit $g_{ij} = \langle \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \rangle_g$ ist und $x_0 = t$ gilt.

Ein Beispiel eines Wellenoperators ist der Zusammenhangs-d'Alembert-Operator, der folgendermaßen definiert ist:

Definition 2.4. *Sei ∇ ein Zusammenhang auf E. Dieser Zusammenhang induziert zusammen mit dem Levi-Civita-Zusammenhang auf T^*M einen Zusammenhang auf $T^*M \otimes E$, der wieder mit ∇ bezeichnet werden soll. Sei $tr : T^*M \otimes T^*M \to \mathbb{R}$ die metrische Spur, die gegeben ist durch $tr(\xi \otimes \eta) = \langle \xi, \eta \rangle$ für $\xi, \eta \in T^*M$.*
Dann ist der Zusammenhangs-d'Alembert-Operator $\Box^\nabla : C^\infty(M,E) \to C^\infty(M,E)$ definiert durch

$$C^\infty(M,E) \overset{\nabla}{\to} C^\infty(M, T^*M \otimes E) \overset{\nabla}{\to} C^\infty(M, T^*M \otimes T^*M \otimes E) \overset{-tr\otimes id_E}{\longrightarrow} C^\infty(M,E).$$

Dies ist nicht nur ein Beispiel für einen Wellenoperator, darüber hinaus zeigt das nächste Lemma, dass sich jeder lineare Wellenoperator als ein Zusammenhangs- d'Alembert-Operator zuzüglich eines Terms nullter Ordnung schreiben lässt.

Lemma 2.5 ([6], Lemma 1.5.5)**.** *Sei $L : C^\infty(M,E) \to C^\infty(M,E)$ ein linearer Wellenoperator. Dann existiert ein eindeutiger Zusammenhang ∇ auf E und ein eindeutiges Endomorphismenfeld $B \in C^\infty(M, Hom(E,E))$, so dass*

$$L = \Box^\nabla + B$$

gilt.

2.2 Notationen

Bevor das Hauptresultat aus [5] zur Existenz von Lösungen linearer Wellengleichungen vorgestellt werden kann, werden einige Notationen eingeführt. Insbesondere wird der sogenannte Raum der Schnitte beschränkter k-Energien eingeführt, in dem die Lösungen enthalten sein werden. Im Unterschied zu den Notationen in [5] werden diese Räume für ein beliebiges festes kompaktes Zeitintervall $I = [t_0, t_1] \subset \mathbb{R}$ definiert.

Damit wird sichergestellt, dass die nachfolgend definierten Räume Banachräume sind. Sei $E \to M$ ein reelles Vektorbündel und $E^* \to M$ das duale Vektorbündel.

Definition 2.6. *Der Zusammenhang auf dem auf Σ eingeschränkten Vektorbündel $E|_\Sigma$ sei mit $\overline{\nabla}$ bezeichnet. Der sich aus diesem Zusammenhang und dem Levi-Civita-Zusammenhang auf $T^*\Sigma$ ergebende Zusammenhang wird ebenfalls mit $\overline{\nabla}$ bezeichnet. Auf $E|_\Sigma$ sei eine riemannsche Metrik gegegeben. Sei des Weiteren $\overline{\nabla}^*$ der formal adjungierte Operator zu $\overline{\nabla}$ und sei $\bar{\Delta} := \overline{\nabla}^*\overline{\nabla} + id$. Dies ist ein positiver, formal selbstadjungierter elliptischer Operator. Infolgedessen ist $\bar{\Delta}^{\frac{k}{2}}$ definiert.*
Dann ist für $k \in \mathbb{R}$ die Sobolev-Norm eines Schnittes $u \in C^\infty(\Sigma, E|_\Sigma)$ definiert durch

$$\|u\|_k := \|\bar{\Delta}^{\frac{k}{2}} u\|_{L^2(\Sigma)}.$$

Der Sobolev-Raum $H^k(\Sigma, E|_\Sigma)$ ist definiert als der Abschluss von $C^\infty(\Sigma, E_{|\Sigma})$ bezüglich $\|\cdot\|_k$. Wenn es offensichtlich ist, welches Vektorbündel gemeint ist, wird $H^k(\Sigma)$ anstatt $H^k(\Sigma, E|_\Sigma)$ geschrieben.

Bemerkung 2.7. *Für $k \in \mathbb{N}_0$ ist*

$$\|u\|_{H^k(\Sigma)} := \left(\sum_{i=0}^{k} \|\overline{\nabla}^i u\|^2_{L^2(\Sigma)} \right)^{\frac{1}{2}}$$

eine zu $\|\cdot\|_k$ äquivalente Norm.

Sei $\mathcal{D}'(M, E)$ der Raum der distributionellen Schnitte von E. Seien des Weiteren $u[\varphi]$ die Auswertung eines distributionellen Schnittes u an einem Testschnitt $\varphi \in C_c^\infty(M, E^*)$ und $\varphi(x)\,(u(x))$ die Auswertung der linearen Form $\varphi(x) \in E_x^*$ an der Stelle $u(x) \in E_x$. Jeder Sobolev-Schnitt $u \in H^k(\Sigma, E|_\Sigma)$ kann durch

$$u[\varphi] = \int_\Sigma \left(\Delta^{\frac{k}{2}}\varphi(x)\right)\left(\Delta^{-\frac{k}{2}}u(x)\right)\, dA(x)$$

als distributioneller Schnitt aufgefasst werden, wobei dA das Volumenelement von Σ bezeichnet.

Sei $I = [t_0, t_1] \subset \mathbb{R}$. Die Familie $\{H^k(\Sigma_t)\}_{t \in I}$ ist ein Bündel von Banachräumen über dem Intervall I. Für $l, k \in \mathbb{N}_0$ ist $C^l(I, H^k(\Sigma_\bullet))$ der Raum der l-mal stetig differenzierbaren Schnitte dieses Bündels.

Definition 2.8. *Der Banachraum*

$$\mathcal{FE}^k(\Sigma, I) := C^0(I, H^k(\Sigma_\bullet)) \cap C^1(I, H^{k-1}(\Sigma_\bullet))$$

beinhaltet die Schnitte mit beschränkter k-Energie. Seine Norm ist gegeben durch

$$\|u\|^2_{\mathcal{FE}^k} = \max_{t\in I}\left(\|u\|^2_{H^k(\Sigma_t)} + \|\nabla_t u\|^2_{H^{k-1}(\Sigma_t)}\right).$$

Die Schnitte $u \in C^l(I, H^k(\Sigma_\bullet))$ bzw. $u \in L^2(I, H^k(\Sigma_\bullet))$ können durch

$$u[\varphi] = \int_I u(s)[(\beta^{\frac{1}{2}}\varphi)|_{\Sigma_s}]\, ds$$

als distributionelle Schnitte aufgefasst werden. Da für $k \geq 0$ insbesondere $u \in L^2(I\times\Sigma)$ gilt, lässt sich u in diesem Fall schreiben als

$$u[\varphi] = \int_I \left(\int_{\Sigma_s} (\beta^{\frac{1}{2}}\varphi)|_{\Sigma_s}(x)\,(u(s)(x))\; dA_s(x)\right)\, ds = \int_{I\times\Sigma} \varphi u\, dV,$$

wobei dA_s das Volumen auf Σ_s und dV das Volumenelement auf $I \times \Sigma$ bezeichnet, für das $dV = \beta^{\frac{1}{2}} dA_s\, ds$ gilt.

Für den weiteren Verlauf ist es notwendig, den Wellenoperator auf den Raum der distributionellen Schnitte zu erweitern. Dies geschieht mithilfe des formal dualen Operators $L^\dagger$.
Sei $u \in \mathcal{D}'(M, E)$ und $\varphi \in C^\infty_c(M, E^*)$, dann kann jeder Differentialoperator L durch

$$Lu[\varphi] = u[L^\dagger\varphi]$$

zu einem Operator $L : \mathcal{D}'(M, E) \to \mathcal{D}'(M, E)$ erweitert werden.

Im Folgenden wird der Raum definiert, in dem sich die Lösung der linearen Wellengleichung befindet.

Definition 2.9. *Sei $L : \mathcal{D}'(M, E) \to \mathcal{D}'(M, E)$ ein linearer Wellenoperator. Sei*

$$\mathcal{FE}^k(\Sigma, L, I) := \{u \in \mathcal{FE}^k(\Sigma, I) : Lu \in L^2(I, H^{k-1}(\Sigma))\}.$$

Für $f \in L^2(I, H^{k-1}(\Sigma_\bullet))$ liegen die Lösungen von $Lu = f$ mit beschränkter k-Energie im Banachraum $\mathcal{FE}^k(\Sigma, L, I)$.

Man kann nun das zur linearen Wellengleichung zugehörige Cauchy-Problem formulieren: Existiert für gegebene $f \in L^2(I, H^{k-1}(\Sigma_\bullet))$, $u_0 \in H^k(\Sigma_{t_0})$, $u_1 \in H^{k-1}(\Sigma_{t_0})$ mit

$I = [t_0, t_1]$ eine Lösung $u \in \mathcal{FE}^k(\Sigma, L, I)$ von

$$\left.\begin{aligned} Lu &= f, \\ u|_{\Sigma_{t_0}} &= u_0, \\ \nabla_\nu u|_{\Sigma_{t_0}} &= u_1, \end{aligned}\right\} \tag{2.1}$$

wobei ν das zukunftsgerichtete zeitartige Einheitsnormalenfeld entlang Σ bezeichnet? Da die gegebene Metrik von der Form $g = -\beta dt^2 \oplus g_t$ ist, hat der Zusammenhangs-d'Alembert-Operator folgende Gestalt

$$\Box^\nabla = \frac{1}{\beta}\nabla_t\nabla_t + \Delta + \text{Terme höchstens 1. Ordnung.}$$

Infolgedessen lässt sich nach Lemma 2.5 ein beliebiger linearer Wellenoperator für distributionelle Schnitte $u \in \mathcal{D}'(M, E)$ schreiben als

$$L = \frac{1}{\beta}\nabla_t\nabla_t + \Delta + A_1\overline{\nabla} + A_2\nabla_t + A_3,$$

wobei A_1, A_2, A_3 Vektorbündelhomomorphismen von $T^*M \otimes E$ nach E beziehungsweise von E nach E sind. Da für $u \in \mathcal{FE}^k(\Sigma, L, I)$

$$A_1(\overline{\nabla}u) + A_2(\nabla_t u) + A_3(u) \in C^0(I, H^{k-1}(\Sigma_\bullet))$$

gilt, kann der Raum $\mathcal{FE}^k(\Sigma, L, I)$ durch den Raum

$$\mathcal{FE}^k(\Sigma, \Box, I) := \left\{ u \in \mathcal{FE}^k(\Sigma, I) \,\middle|\, \frac{1}{\beta}\nabla_t\nabla_t u + \Delta_{g_t} u \in L^2(I, H^{k-1}(\Sigma_\bullet)) \right\}$$

ersetzt werden.

2.3 Wohlgestelltheit des linearen Cauchy-Problems

In diesem Abschnitt werden die Hauptresultate aus [5] vorgestellt. Zur Lösung des Cauchy-Problems (2.1) wird folgende Energie definiert:

Definition 2.10. *Sei $I = [t_0, t_1] \subset \mathbb{R}$ ein kompaktes Zeitintervall. Für $k \in \mathbb{R}$ und $t \in I$ bezeichnet*

$$E_k(u, t) := E_k(u, \Sigma_t) = \|u|_{\Sigma_t}\|^2_{H^k(\Sigma_t)} + \|\nabla_\nu u\|^2_{H^{k-1}(\Sigma_t)}$$

die k-Energie von u entlang Σ.

Es gilt folgende Energieabschätzung:

Theorem 2.11 ([5], Thm. 8, Cor. 17)**.** *Sei $k \in \mathbb{R}$ und $I = [t_0, t_1] \subset \mathbb{R}$. Sei L ein linearer Wellenoperator. Dann existiert eine Konstante $C > 0$, so dass für alle $t \in I$ und für alle $u \in \mathcal{FE}^k(\Sigma, \Box, I)$*

$$\frac{d}{dt} E_k(u,t) \leq C \cdot E_k(u,t) + \|Lu\|^2_{H^{k-1}(\Sigma_t)} \tag{2.2}$$

und infolgedessen

$$E_k(u,t) \leq E_k(u,t_0) \cdot e^{C(t-t_0)} + \int\limits_{t_0}^{t} e^{C(t-s)} \|Lu\|^2_{H^{k-1}(\Sigma_s)}\, ds \tag{2.3}$$

gilt.

Unter Verwendung dieser Energieabschätzung folgt

Theorem 2.12 ([5], Thm. 13)**.** *Sei $k \in \mathbb{R}$ und $I = [t_0, t_1] \subset \mathbb{R}$. Sei L ein linearer Wellenoperator. Dann ist für jedes feste $t_0 \in I$ die Abbildung*

$$\begin{aligned} \mathcal{FE}^k(\Sigma, \Box, I) &\to H^k(\Sigma_{t_0}) \oplus H^{k-1}(\Sigma_{t_0}) \oplus L^2(I, H^{k-1}(\Sigma_\bullet)), \\ u &\mapsto (u\big|_{\Sigma_{t_0}}, \nabla_\nu u\big|_{\Sigma_{t_0}}, Lu), \end{aligned}$$

ein Isomorphismus.

Dies bedeutet, dass für alle $f \in L^2(I, H^{k-1}(\Sigma_\bullet))$, $u_0 \in H^k(\Sigma_{t_0})$, $u_1 \in H^{k-1}(\Sigma_{t_0})$ eine eindeutige Lösung $u \in \mathcal{FE}^k(\Sigma, \Box, I)$ von (2.1) existiert. Um eine Lösung für alle $t \in \tilde{I} \subseteq \mathbb{R}$ zu erhalten, wobei $\tilde{I}$ offen ist, wählt man eine Ausschöpfung $t_0 \in I_1 \subset I_2 ... \subset \tilde{I}$ durch kompakte Intervalle I_j. Seien u_j jeweils die Lösungen auf I_j mit den gegeben Anfangsdaten zur Zeit t_0. Wegen der Eindeutigkeit gilt $u_k|_{I_j} = u_j$ für alle $k > j$ und somit sind die Lösungen u_j Einschränkungen einer globalen Lösung u auf I. Aufgrund der Stetigkeit der Umkehrabbildung ergibt sich zudem die stetige Abhängigkeit der Lösung von den Anfangsdaten. Folglich ist das Cauchy-Problem (2.1) wohlgestellt.

Bemerkung 2.13. *In den Theoremen 2.11 und 2.12 müssen die Koeffizienten des Wellenoperators nicht notwendigerweise glatt sein. Sei L ein linearer Wellenoperator der Form*

$$Lu = \frac{1}{\beta} \nabla_t \nabla_t u + \Delta_{g_t} u + B_1(u) + B_2(\overline{\nabla} u) + B_3(\nabla_t u) \tag{2.4}$$

oder

$$Lu = \Box^\nabla u + B_1(u) + B_2(\overline{\nabla} u) + B_3(\nabla_t u), \tag{2.5}$$

wobei

$$
\begin{aligned}
B_1 &: C^0(I, H^k(\Sigma_\bullet)) \to L^2(I, H^{k-1}(\Sigma_\bullet)),\\
B_2 &: C^0(I, H^{k-1}(\Sigma_\bullet)) \to L^2(I, H^{k-1}(\Sigma_\bullet)),\\
B_3 &: C^0(I, H^{k-1}(\Sigma_\bullet)) \to L^2(I, H^{k-1}(\Sigma_\bullet))
\end{aligned}
$$

stetige lineare Operatoren sind.
Im Beweis von Theorem 2.11 ist folgende Abschätzung für alle $t \in I$ erforderlich:

$$
\begin{aligned}
&\left(\bar{\Delta}^{\frac{k-1}{2}}\left(\beta^{\frac{1}{2}}\left(B_1(u) + B_2(\overline{\nabla} u) + B_3(\nabla_t u)\right)\right), \bar{\Delta}^{\frac{k-1}{2}}\left(\beta^{-\frac{1}{2}}\nabla_t u\right)\right)_{L^2(\Sigma_t)}\\
&\leq C_1 \|B_1(u) + B_2(\overline{\nabla} u) + B_3(\beta^{\frac{1}{2}}\nabla_t u)\|_{H^{k-1}(\Sigma_t)} \|\beta^{-\frac{1}{2}}\nabla_t u\|_{H^{k-1}(\Sigma_t)}\\
&\leq C_2 \left(\|u\|_{H^k(\Sigma_t)} + \|\beta^{-\frac{1}{2}}\overline{\nabla}_t u\|_{H^{k-1}(\Sigma_t)}\right) \|\beta^{-\frac{1}{2}}\nabla_t u\|_{H^{k-1}(\Sigma_t)}.
\end{aligned}
$$

Die zweite Ungleichung ist erfüllt, wenn für jedes feste $t \in I$ die Abbildungen

$$
\begin{aligned}
B_1(t) &: H^k(\Sigma_t) \to H^{k-1}(\Sigma_t)\\
B_2(t) &: H^{k-1}(\Sigma_t) \to H^{k-1}(\Sigma_t)\\
B_3(t) &: H^{k-1}(\Sigma_t) \to H^{k-1}(\Sigma_t)
\end{aligned}
$$

wohldefiniert und stetig sind.

3 Das semilineare Cauchy-Problem

In diesem Kapitel werden allgemeine semilineare Wellengleichungen auf global-hyperbolischen Lorentz-Mannigfaltigkeiten im Rahmen eines Cauchy-Problems betrachtet. Das Ziel ist es, die semilineare Wellengleichung zu linearisieren, um mithilfe des Umkehrsatzes für Banachräume die Existenz von Lösungen zu untersuchen. Auf diese Weise kann gezeigt werden, dass unter bestimmten Annahmen an die Nichtlinearität eine Lösung auf beliebigen kompakten Zeitintervallen für entsprechend klein gewählte Anfangsdaten gefunden werden kann. Des Weiteren wird mit einem ähnlichen Argument gezeigt, dass unter diesen Annahmen auch eine zeitlokale Lösung für beliebige Anfangsdaten existiert. Durch den Umkehrsatz erhält man zuerst Lösungen in $\mathcal{FE}^k(\Sigma, \Box, I)$. Durch ein Bootstrapping-Argument wird dann gezeigt, dass für glatte Anfangsdaten diese Lösungen ebenfalls glatt sind.

Es sei erneut angenommen, dass $(M, g) = (\mathbb{R}\times\Sigma,\ -\beta dt^2 \oplus g_t)$ eine global-hyperbolische Lorentz-Mannigfaltigkeit der Dimension $n + 1$ ist, wobei Σ geschlossen ist. Seien $E \to M$ ein reelles Vektorbündel und $I = [t_0, t_1] \subset \mathbb{R}$ ein festes kompaktes Intervall. Der Banachraum $\mathcal{F}_k(\Sigma, I)$ sei definiert durch

$$\mathcal{F}_k(\Sigma, I) := C^0(I, H^k(\Sigma_\bullet)) \oplus C^0(I, H^{k-1}(\Sigma_\bullet, T^*\Sigma \otimes E)) \oplus C^0(I, H^{k-1}(\Sigma_\bullet))$$

und für $\bar{u} := (u, \overline{\nabla} u, \nabla_t u) \in \mathcal{F}_k(\Sigma, I)$ ist eine Norm auf $\mathcal{F}_k(\Sigma, I)$ gegeben durch

$$\|\bar{u}\|_{\mathcal{F}_k} := \|u\|_{C^0(I,H^k(\Sigma_\bullet))} + \|\overline{\nabla} u\|_{C^0(I,H^{k-1}(\Sigma_\bullet))} + \|\nabla_t u\|_{C^0(I,H^{k-1}(\Sigma_\bullet))}. \tag{3.1}$$

Die folgenden zwei Lemmata werden im weiteren Verlauf häufig verwendet.

Lemma 3.1 ([12], Lemma 1.8)**.** *Sei Σ eine kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit der Dimension n. Seien E und F zwei Vektorbündel über M und sei $f : E \to F$ eine glatte fasertreue Abbildung. Dann ist die Abbildung*

$$\begin{aligned} g : H^k(\Sigma, E) &\to H^k(\Sigma, F) \\ u &\mapsto f \circ u \end{aligned}$$

für alle $k > \frac{n}{2}$ ebenfalls glatt.

Lemma 3.2 (Omega lemma ([1], Lemma 2.4.18)). *Seien X, Y Banachräume. Sei $f: X \to Y$ eine C^r-Abbildung. Dann ist die Abbildung*

$$\begin{aligned} \Omega_g : C^{r-q}(\mathbb{R}, X) &\to C^{r-q}(\mathbb{R}, X) \\ u &\mapsto f \circ u \end{aligned}$$

eine C^q-Abbildung. Insbesondere ist die Abbildung

$$\begin{aligned} \Omega_g : C^{0}(\mathbb{R}, X) &\to C^{0}(\mathbb{R}, X) \\ u &\mapsto f \circ u \end{aligned}$$

ebenfalls C^r.

Sei nun

$$A : E \oplus T^*M \otimes E \oplus E \to E$$

eine glatte fasertreue Abbildung. Nach Lemma 3.1 und Lemma 3.2 ist die induzierte Abbildung

$$\mathcal{A} : \mathcal{F}_k(\Sigma, I) \quad \to C^0(I, H^{k-1}(\Sigma_\bullet)) \subset L^2(I, H^{k-1}(\Sigma_\bullet))$$

mit $\mathcal{A}(v, w, z)(x) = A(v(x), w(x), z(x))$ für alle $x \in M$ wohldefiniert und glatt, falls $k - 1 > \frac{n}{2}$ gilt. Aus diesem Grund wird im folgenden Theorem angenommen, dass $k - 1 > \frac{n}{2}$ ist. Dann kann ein semilinearer Wellenoperator $\mathcal{L}$ in der Form

$$\mathcal{L}u := \Box^\nabla u + \mathcal{A}(u, \overline{\nabla} u, \nabla_t u) \tag{3.2}$$

oder

$$\mathcal{L}u := \frac{1}{\beta} \nabla_t \nabla_t u + \Delta_{g_t} u + \mathcal{A}(u, \overline{\nabla} u, \nabla_t u) \tag{3.3}$$

geschrieben werden.

Für $u_0 \in H^k(\Sigma_{t_0})$, $u_1 \in H^{k-1}(\Sigma_{t_0})$ und $f \in L^2(I, H^{k-1}(\Sigma_\bullet))$ wird im Folgenden das semilineare Cauchy-Problem

$$\left.\begin{aligned} \mathcal{L}u &= f, \\ u|_{\Sigma_{t_0}} &= u_0, \\ \nabla_\nu u|_{\Sigma_{t_0}} &= u_1 \end{aligned}\right\} \tag{3.4}$$

für $k - 1 > \frac{n}{2}$ betrachtet.

3.1 Fast globale Existenz einer Lösung für kleine Anfangsdaten

Zuerst wird für ein beliebiges festes Zeitintervall $I = [t_0, t_1]$ die Existenz einer Lösung in $\mathcal{FE}^k(\Sigma, \Box, I)$ für kleine Anfangsdaten gezeigt. In Theorem 3.10 wird anschließend die Glattheit dieser Lösung bewiesen, falls die Anfangsdaten glatt sind.

Theorem 3.3. *Sei $(M, g) = (\mathbb{R} \times \Sigma, -\beta dt^2 \oplus g_t)$ eine $(n+1)$-dimensionale global-hyperbolische Lorentz-Mannigfaltigkeit und sei Σ geschlossen. Seien $I := [t_0, t_1]$, $k - 1 > \frac{n}{2}$ und sei $\mathcal{L}u$ ein semilinearer Wellenoperator der Form*

$$\mathcal{L}u = \Box^\nabla u + \mathcal{A}(u, \overline{\nabla} u, \nabla_t u)$$

oder

$$\mathcal{L}u = \frac{1}{\beta}\nabla_t \nabla_t u + \Delta_{g_t} u + \mathcal{A}(u, \overline{\nabla} u, \nabla_t u),$$

wobei

$$\mathcal{A} : \mathcal{F}_k(\Sigma, I) \to C^0(I, H^{k-1}(\Sigma_\bullet)) \subset L^2(I, H^{k-1}(\Sigma_\bullet))$$

die induzierte Abbildung zu einer glatten fasertreuen Abbildung

$$A : E \oplus T^*M \otimes E \oplus E \to E$$

sei.

Dann existiert ein $\varepsilon > 0$, so dass für alle $f \in L^2(I, H^{k-1}(\Sigma_\bullet))$, $u_0 \in H^k(\Sigma_{t_0})$ und $u_1 \in H^{k-1}(\Sigma_{t_0})$ mit

$$\|u_0\|_{H^k(\Sigma_{t_0})} + \|u_1\|_{H^{k-1}(\Sigma_{t_0})} + \|f - \mathcal{A}(0,0,0)\|_{L^2(I, H^{k-1}(\Sigma_\bullet))} < \varepsilon \tag{3.5}$$

eine eindeutige Lösung $u \in \mathcal{FE}^k(\Sigma, \Box, I)$ von (3.4) existiert. Diese hängt stetig von f, u_0 und u_1 ab.

Bemerkung 3.4. *In Lemma 3.7 wird die Größe von ε genauer bestimmt.*

Beweis. Seien $A : E \oplus T^*M \otimes E \oplus E \to E$ eine fasertreue glatte Abbildung, $\mathcal{A} : \mathcal{F}_k(\Sigma, I) \to L^2(I, H^{k-1}(\Sigma_\bullet))$ die induzierte Abbildung und $\mathcal{L}u := \Box^\nabla u + \mathcal{A}(u, \overline{\nabla} u, \nabla_t u)$, wobei $k - 1 > \frac{n}{2}$ gilt. Um die Existenz einer Lösung von (3.4) zu erhalten, wendet man den Umkehrsatz für Banachräume auf die Abbildung

$$\bar{\mathcal{L}} : \mathcal{FE}^k(\Sigma, \Box, I) \to H^k(\Sigma_{t_0}) \oplus H^{k-1}(\Sigma_{t_0}) \oplus L^2(I, H^{k-1}(\Sigma_\bullet)),$$

$$u \mapsto (u\big|_{\Sigma_{t_0}}, \nabla_\nu u\big|_{\Sigma_{t_0}}, \mathcal{L}u),$$

an. Nach Voraussetzung an A ist $\mathcal{A}$ insbesondere C^1-differenzierbar ist und somit auch $\bar{\mathcal{L}}$. Es bleibt zu zeigen, dass es ein $\tilde{u} \in \mathcal{FE}^k(\Sigma, \Box, I)$ gibt, so dass die Ableitung von $\bar{\mathcal{L}}$ an der Stelle $\tilde{u}$,

$$\mathbf{D}\bar{\mathcal{L}}(\tilde{u}) : \mathcal{FE}^k(\Sigma, \Box, I) \to H^k(\Sigma_{t_0}) \oplus H^{k-1}(\Sigma_{t_0}) \oplus L^2(I, H^{k-1}(\Sigma_\bullet)),$$

ein Isomorphismus ist. Sei $f = \mathcal{A}(0,0,0)$, $u_0 = 0$ und $u_1 = 0$. Dann ist $\tilde{u} = 0$ eine Lösung von (3.4). Folglich kann $\bar{\mathcal{L}}$ um $\tilde{u} = 0$ linearisiert werden. Sei $v \in \mathcal{FE}^k(\Sigma, \Box, I)$. Dann ist

$$\begin{aligned}
\mathbf{D}\bar{\mathcal{L}}(0) \cdot v &= \frac{d}{d\lambda}\bar{\mathcal{L}}(\lambda v)|_{\lambda=0} \\
&= \left(\frac{d}{d\lambda}(\lambda v|_{\Sigma_{t_0}})|_{\lambda=0}, \frac{d}{d\lambda}(\lambda \nabla_\nu v|_{\Sigma_{t_0}})|_{\lambda=0}, \frac{d}{d\lambda}\mathcal{L}(\lambda v)|\lambda = 0\right) \\
&= \left(v|_{\Sigma_{t_0}}, \nabla_\nu v|_{\Sigma_{t_0}}, \frac{d}{d\lambda}\mathcal{L}(\lambda v)|_{\lambda=0}\right).
\end{aligned}$$

Weiterhin berechnet man

$$\begin{aligned}
\mathbf{D}\mathcal{L}(0) \cdot v &= \frac{d}{d\lambda}\mathcal{L}(\lambda v)|_{\lambda=0} \\
&= \Box^\nabla v + \frac{d}{d\lambda}\mathcal{A}(\lambda v, \lambda\overline{\nabla} v, \lambda \nabla_t v)|_{\lambda=0} \\
&= \Box^\nabla v + \mathbf{D}\mathcal{A}(0,0,0) \cdot (v, \overline{\nabla} v, \nabla_t v) \\
&= \Box^\nabla v + \mathbf{D}_1\mathcal{A}(0,0,0) \cdot v + \mathbf{D}_2\mathcal{A}(0,0,0) \cdot \overline{\nabla} v + \mathbf{D}_3\mathcal{A}(0,0,0) \cdot \nabla_t v
\end{aligned}$$

mit $B_1 := \mathbf{D}_1\mathcal{A}(0,0,0)$, $B_2 := \mathbf{D}_2\mathcal{A}(0,0,0)$ und $B_3 := \mathbf{D}_3\mathcal{A}(0,0,0)$. Da die Abbildung $A : E \oplus T^*M \otimes E \oplus E \to E$ glatt und fasertreu ist, ist auch die Abbildung $A : E|_{\Sigma_t} \oplus T^*\Sigma_t \otimes E|_{\Sigma_t} \oplus E|_{\Sigma_t} \to E|_{\Sigma_t}$ für jedes feste $t \in I$ glatt und infolgedessen ist nach Lemma 3.1 die induzierte Abbildung

$$\tilde{A}_t : H^k(\Sigma_t) \oplus H^{k-1}(\Sigma_t, T^*\Sigma \otimes E) \oplus H^{k-1}(\Sigma_t) \to H^{k-1}(\Sigma_t)$$

für alle $k - 1 > \frac{n}{2}$ und für alle $t \in I$ glatt. Folglich ist

$$\mathbf{D}\mathcal{A}(0,0,0)(t) : H^k(\Sigma_t) \oplus H^{k-1}(\Sigma_t, T^*\Sigma \otimes E) \oplus H^{k-1}(\Sigma_t) \to H^{k-1}(\Sigma_t)$$

insbesondere für jedes feste $t \in I$ wohldefiniert und stetig. Somit erfüllen B_1, B_2 und B_3 die in Bemerkung 2.13 genannten Bedingungen. Aufgrund dessen ist

$$L := \mathbf{D}\mathcal{L}(0) = \Box^\nabla + B_1 + B_2 \cdot \overline{\nabla} + B_3 \cdot \nabla_t$$

ein linearer Wellenoperator. Nach Theorem 2.12 ist die Abbildung

$$\begin{aligned}\mathcal{FE}^k(\Sigma,\Box,I) &\to H^k(\Sigma_{t_0}) \oplus H^{k-1}(\Sigma_{t_0}) \oplus L^2(I, H^{k-1}(\Sigma_\bullet)),\\ v &\mapsto (v\big|_{\Sigma_{t_0}},\, \nabla_\nu v\big|_{\Sigma_{t_0}},\, \mathbf{D}\mathcal{L}(0)\cdot v),\end{aligned}$$

ein linearer Isomorphismus. Aus dem Umkehrsatz für Banachräume folgt direkt, dass die Abbildung $\bar{\mathcal{L}}$ ein lokaler C^1-Diffeomorphismus bei $\tilde{u}=0$ ist. Folglich bildet $\bar{\mathcal{L}}$ eine Umgebung $U \subset \mathcal{FE}^k(\Sigma,\Box,I)$ um $\tilde{u}=0$ diffeomorph auf $U_1 \oplus U_2 \oplus U_3$ ab, wobei $U_1 \subset H^k(\Sigma_{t_0})$, $U_2 \subset H^{k-1}(\Sigma_{t_0})$ Umgebungen um 0 und $U_3 \subset L^2(I, H^{k-1}(\Sigma_\bullet))$ eine Umgebung um $\mathcal{A}(0,0,0)$ sind. Dies bedeutet, dass ein $\varepsilon > 0$ existiert, so dass für alle $(u_0,u_1,f) \in H^k(\Sigma_{t_0}) \oplus H^{k-1}(\Sigma_{t_0}) \oplus L^2(I, H^{k-1}(\Sigma_\bullet))$, die (3.5) erfüllen, eine eindeutige Lösung $u \in U \subset \mathcal{FE}^k(\Sigma,\Box,I)$ existiert, die aufgrund der Stetigkeit von $\bar{\mathcal{L}}^{-1}$ stetig von (u_0,u_1,f) abhängt.

Die Lösung u ist eindeutig in U. Es bleibt zu zeigen, dass es keine weitere Lösung in $\mathcal{FE}^k(\Sigma,\Box,I)$ gibt. Sei $u \in U$ eine Lösung von (3.4) und sei $u_2 \in \mathcal{FE}^k(\Sigma,\Box,I) \setminus U$ eine weitere Lösung von (3.4). Seien $v := u - u_2$, $\bar{v} := (v, \overline{\nabla} v, \nabla_t v)$ und $\bar{u}$, $\bar{u}_2$ seien analog definiert. Dann gilt

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(\bar{u}) - \mathcal{A}(\bar{u}_2) &= \int_0^1 \frac{d}{ds}\mathcal{A}(\bar{u}_2 + s\cdot(\bar{u}-\bar{u}_2))\,ds\\ &= \int_0^1 \mathbf{D}\mathcal{A}(\bar{u}_2 + s\cdot(\bar{u}-\bar{u}_2))\cdot(\bar{u}-\bar{u}_2)\,ds\\ &= \int_0^1 \mathbf{D}_1\mathcal{A}(\bar{\xi}_s)\cdot v + \mathbf{D}_2\mathcal{A}(\bar{\xi}_s)\cdot \overline{\nabla} v + \mathbf{D}_3\mathcal{A}(\bar{\xi}_s)\cdot \nabla_t v\,ds\end{aligned}$$

für $\bar{\xi}_s := \bar{u}_2 + s\cdot(\bar{u}-\bar{u}_2)$. Aufgrund dessen ist $v \in \mathcal{FE}^k(\Sigma,\Box,I)$ eine Lösung des linearen homogenen Cauchy-Problems

$$\left.\begin{aligned} Lv := \Box^\nabla v + \int_0^1 \mathbf{D}_1\mathcal{A}(\bar{\xi}_s)\cdot v + \mathbf{D}_2\mathcal{A}(\bar{\xi}_s)\cdot\overline{\nabla} v + \mathbf{D}_3\mathcal{A}(\bar{\xi}_s)\cdot\nabla_t v\,ds &= 0,\\ v|_{\Sigma_{t_0}} &= 0,\\ \nabla_\nu v|_{\Sigma_{t_0}} &= 0.\end{aligned}\right\}$$

Weiterhin gilt aufgrund der obigen Überlegungen, dass wegen $k-1 > \frac{n}{2}$

$$\mathbf{D}\mathcal{A}(w, \overline{\nabla} w, \nabla_t w)(t) : H^k(\Sigma_t) \oplus H^{k-1}(\Sigma_t, T^*\Sigma \otimes E)) \oplus H^{k-1}(\Sigma_t) \to H^{k-1}(\Sigma_t)$$

für jedes feste $t \in I$ und für alle $w \in \mathcal{FE}^k(\Sigma, I)$ stetig ist. Dies induziert die Abschätzung

$$\begin{aligned}
&\left\| \int_0^1 \mathbf{D}_1\mathcal{A}(\bar{\xi}_s)\cdot v + \mathbf{D}_2\mathcal{A}(\bar{\xi}_s)\cdot \overline{\nabla} v + \mathbf{D}_3\mathcal{A}(\bar{\xi}_s)\cdot \beta^{\frac{1}{2}}\nabla_t v\, ds \right\|_{H^{k-1}(\Sigma_t)} \\
&\leq \max_{s\in[0,1]} \left\| \mathbf{D}_1\mathcal{A}(\bar{\xi}_s)\cdot v + \mathbf{D}_2\mathcal{A}(\bar{\xi}_s)\cdot \overline{\nabla} v + \mathbf{D}_3\mathcal{A}(\bar{\xi}_s)\cdot \beta^{\frac{1}{2}}\nabla_t v \right\|_{H^{k-1}(\Sigma_t)} \\
&\leq \quad C\left(\|v\|_{H^k(\Sigma_t)} + \|\beta^{-\frac{1}{2}}\nabla_t v\|_{H^{k-1}(\Sigma_t)} \right).
\end{aligned}$$

Demzufolge gilt für v nach Bemerkung 2.13 die Energieabschätzung

$$E_k(v,t) \leq E_k(v,t_0)\cdot e^{C(t-t_0)} + \int\limits_{t_0}^{t} e^{C(t-s)}\|Lv\|^2_{H^{k-1}(\Sigma_s)}\, ds = 0,$$

woraus $v=0$ und damit die Eindeutigkeit der Lösung folgt. $\square$

Bemerkung 3.5. *Wenn $f=0$ ist, d.h. die Wellengleichung die Form*

$$\Box^\nabla u + \mathcal{A}(u, \overline{\nabla} u, \nabla_t u) = 0$$

mit $\mathcal{A}(0,0,0)=0$ hat, dann existiert ein $\varepsilon>0$, so dass das zugehörige Cauchy-Problem eine eindeutige Lösung für alle $u_0 \in H^k(\Sigma_{t_0})$, $u_1 \in H^{k-1}(\Sigma_{t_0})$ mit

$$\|u_0\|_{H^k(\Sigma_{t_0})} + \|u_1\|_{H^{k-1}(\Sigma_{t_0})} < \varepsilon$$

hat.

Nun stellt sich die Frage, von welchen Größen die in Theorem 3.3 genannte Umgebung abhängt. Dies wird unter Verwendung des folgenden Theorems untersucht.

Theorem 3.6 ([1], Prop. 2.5.6)**.** *Seien E,F Banachräume, $U\subset E$ offen und sei $f: U\subset E \to F$ eine C^r-Abbildung mit $r\geq 1$, sei $u_0\in U$ und sei*

$$\begin{aligned}
\mathbf{D}f(u_0) : E &\to F \\
v &\mapsto \mathbf{D}f(u_0)\cdot v := (\mathbf{D}f(u_0))\,(v)
\end{aligned}$$

ein Isomorphismus. Dann ist f ein lokaler C^r-Diffeomorphismus nahe u_0 und für $r\geq 2$ lassen sich auf folgende Weise Schranken für die Umgebungen angeben. Sei

$$L = \|\mathbf{D}f(u_0)\| \;\; \textit{und} \;\; M = \|\mathbf{D}f(u_0)^{-1}\|,$$

wobei $\|\cdot\|$ die jeweilige Operatornorm beschreibt. Es gelte des Weiteren

$$\|\mathbf{D}^2 f(u)\| \leq K \;\textit{für}\; \|u-u_0\|\leq R \;\textit{und}\; \bar{B}_R(u_0)\subset U.$$

Sei $P = \min\left(\frac{1}{2KM}, R\right)$. Dann bildet f eine offene Menge $G \subset B_P(u_0)$ diffeomorph auf $B_{\frac{P}{2M}}(f(u_0))$ ab.

Mit Hilfe des Theorems 3.6 kann die Größe ε in Theorem 3.3 genauer abgeschätzt werden.

Lemma 3.7. *Sei $C > 0$ die Konstante aus der Energieabschätzung (2.3) für den linearen Wellenoperator $L := \mathbf{D}\mathcal{L}(0)$. Für $u \in \mathcal{FE}^k(\Sigma, \Box, I)$ mit $\|u\|_{\mathcal{FE}^k} \leq R$ gelte $\|\mathbf{D}^2\mathcal{A}(u, \overline{\nabla}u, \nabla_t u)\| \leq K(R)$. Sei R_* die größte Zahl, so dass $R_* \cdot K(R_*) \leq \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}C|I|}$ gilt.*
Dann existiert unter den Voraussetzungen aus Theorem 3.3 eine Lösung des Cauchy-Problems (3.4) für alle $f \in L^2(I, H^{k-1}(\Sigma_\bullet)), u_0 \in H^k(\Sigma_{t_0}), u_1 \in H^{k-1}(\Sigma_{t_0})$ mit

$$\|u_0\|_{H^k(\Sigma_{t_0})} + \|u_1\|_{H^{k-1}(\Sigma_{t_0})} + \|f - \mathcal{A}(0,0,0)\|_{L^2(I, H^{k-1}(\Sigma_\bullet))} \leq \frac{R_*}{2}e^{-\frac{1}{2}C|I|}.$$

Beweis. Für $u, w \in \mathcal{FE}^k(\Sigma, \Box, I)$ ist

$$\mathbf{D}\Box^\nabla(u) \cdot w = \frac{d}{d\lambda}\Box^\nabla(u + \lambda w) = \Box^\nabla w$$

unabhängig von u. Folglich gilt für die zweite Ableitung an der Stelle u in Richtung $v, w \in \mathcal{FE}^k(\Sigma, \Box, I)$,

$$\mathbf{D}^2\Box^\nabla(u) \cdot (v, w) = \mathbf{D}\left(\mathbf{D}\Box^\nabla(\cdot) \cdot w\right) \cdot v = \frac{d}{d\lambda}\Box^\nabla w|_{\lambda=0} = 0.$$

Dies impliziert

$$\mathbf{D}^2\mathcal{L}(u) = \mathbf{D}^2\left(\Box^\nabla + \mathcal{A}\right)(u) = \mathbf{D}^2\mathcal{A}(u, \overline{\nabla}u, \nabla_t u),$$

was wiederum

$$\mathbf{D}^2\bar{\mathcal{L}}(u) = \mathbf{D}^2\mathcal{A}(u, \overline{\nabla}u, \nabla_t u)$$

ergibt. Infolgedessen gilt nach Voraussetzung $\|\mathbf{D}^2\bar{\mathcal{L}}(u)\| \leq K(R)$ für $u \in \mathcal{FE}^k(\Sigma, \Box, I)$ mit $\|u\|_{\mathcal{FE}^k} \leq R$. Sei

$$M := \|\mathbf{D}\bar{\mathcal{L}}(0)^{-1}\| \ \text{ und } \ P := \min\left(\frac{1}{2K(R)M}, R\right).$$

Dann gilt unter Verwendung des Theorems 3.6, dass für alle $f \in L^2(I, H^{k-1}(\Sigma_\bullet))$, $u_0 \in H^k(\Sigma_{t_0})$, $u_1 \in H^{k-1}(\Sigma_{t_0})$ mit

$$\|u_0\|_{H^k(\Sigma_{t_0})} + \|u_1\|_{H^{k-1}(\Sigma_{t_0})} + \|f - \mathcal{A}(0,0,0)\|_{L^2(I, H^{k-1}(\Sigma_\bullet))} \leq \frac{P}{2M}$$

eine Lösung von (3.4) existiert.

Als Nächstes wird unter Verwendung der Energieabschätzung (2.3) die Konstante M abgeschätzt. In Theorem 3.3 wurde gezeigt, dass $\mathbf{D}\bar{\mathcal{L}}(0) = L$ ist, wobei L einen linearen Wellenoperator beschreibt. Die Umkehrabbildung ist gegeben durch

$$\begin{aligned} L^{-1} : H^k(\Sigma_{t_0}) \oplus H^{k-1}(\Sigma_{t_0}) \oplus L^2(I, H^{k-1}(\Sigma_\bullet)) &\to \mathcal{FE}^k(\Sigma, \Box, I), \\ (v_0, v_1, f) &\mapsto v, \end{aligned}$$

wobei v die Lösung des Cauchy-Problems

$$\left.\begin{aligned} Lv &= f, \\ v|_{\Sigma_{t_0}} &= v_0, \\ \nabla_\nu v|_{\Sigma_{t_0}} &= v_1 \end{aligned}\right\} \tag{3.6}$$

ist. Sei

$$\|(f, v_0, v_1)\|_k := \|f\|_{L^2(I,H^{k-1}(\Sigma_\bullet))} + \|v_0\|_{H^k(\Sigma_{t_0})} + \|v_1\|_{H^{k-1}(\Sigma_{t_0})}.$$

Dann ist

$$M = \sup_{v_0,v_1,f} \{\|v\|_{\mathcal{FE}^k} \mid Lv = f,\ v|_{\Sigma_{t_0}} = v_0,\ \nabla_\nu v|_{\Sigma_{t_0}} = v_1,\ \|(f, v_0, v_1)\|_k = 1\}.$$

Unter Verwendung der Energieabschätzung für lineare Wellengleichungen aus Theorem 2.11 folgt für die Lösung $v \in \mathcal{FE}^k(\Sigma, \Box, I)$ des Cauchy-Problems (3.6) mit $\|(f, v_0, v_1)\|_k = 1$

$$\begin{aligned} \|v\|^2_{H^k(\Sigma_t)} + \|\nabla_\nu v\|^2_{H^{k-1}(\Sigma_t)} &\le \left(\|v_0\|^2_{H^k(\Sigma_{t_0})} + \|v_1\|^2_{H^{k-1}(\Sigma_{t_0})}\right) \cdot e^{C(t_1-t_0)} \\ &\quad + \int_{t_0}^{t} \|Lv\|^2_{H^{k-1}(\Sigma_s)} \cdot e^{C(t-s)}\, ds \\ &\le e^{C(t_1-t_0)} \left(\|v_0\|^2_{H^k(\Sigma_{t_0})} + \|v_1\|^2_{H^{k-1}(\Sigma_{t_0})} + \|f\|^2_{L^2(I,H^{k-1}(\Sigma_\bullet))}\right) \\ &\le e^{C|I|}. \end{aligned}$$

Da diese Abschätzung für alle $t \in I$ gilt, folgt $\|v\|^2_{\mathcal{FE}^k} \le e^{C|I|}$ und somit $M \le e^{\frac{1}{2}C|I|}$. Für R_* gilt

$$R_* \cdot K(R_*) \le \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}C|I|} \le \frac{1}{2M}$$

und aufgrund dessen folgt $P = R^*$ und die Behauptung. $\Box$

Bemerkung 3.8. *Im Allgemeinen ist es nicht möglich, durch das Theorem 3.3 nicht-triviale zeitglobale Lösungen auf $\tilde{I} \times \Sigma$ zu erhalten, wobei $\tilde{I}$ ein offenes Intervall oder $\mathbb{R}$ bezeichnet. Angenommen (u_0, u_1, f) erfüllt für $I_1 = [t_0, t_1] \subset \tilde{I}$ die Bedingung (3.5). Dann existiert eine Lösung $u \in \mathcal{FE}^k(\Sigma, \Box, [t_0, t_1])$. Um diese Lösung auf $[t_0, t_2]$ für ein $t_2 > t_1$ fortzusetzen, müssen die neuen Anfangsdaten $\tilde{u}_0 := u|_{\Sigma_{t_1}}$, $\tilde{u}_1 := \nabla_\nu u|_{\Sigma_{t_1}}$, $\tilde{f} = f|_{\Sigma_{t_1}}$ ebenfalls (3.5) mit $I_2 = [t_1, t_2]$ erfüllen. Um dies zu gewährleisten, ist es unter Umständen notwendig die Anfangsbedingungen (u_0, u_1, f) so zu wählen, dass die rechte Seite der Energieabschätzung*

$$\|u\|^2_{\mathcal{FE}^k} \leq e^{C|I_1|} \left(\|u_0\|^2_{H^k(\Sigma_{t_0})} + \|u_1\|^2_{H^{k-1}(\Sigma_{t_0})} + \|f - \mathcal{A}(u, \overline{\nabla} u, \nabla_t u)\|^2_{L^2(I_1, H^{k-1}(\Sigma_\bullet))} \right)$$

entsprechend kleiner wird. Setzt man dies unendlich oft bis $\tilde{I}$ fort, werden zwar, falls $\tilde{I}$ ein endliches offenes Intervall ist, die Zeitintervalllängen immer kleiner, dennoch ist es möglich, dass die Lösung auf dem neuen Zeitintervall aufgrund des Terms

$$\|f - \mathcal{A}(u, \overline{\nabla} u, \nabla_t u)\|^2_{L^2(I, H^{k-1}(\Sigma_\bullet))}$$

aus der Energieabschätzung nicht mehr (3.5) genügt, so dass die ursprünglichen Anfangsbedingungen wieder kleiner gewählt werden müssen. So ist es möglich, dass die Anfangsbedingungen gegen 0 konvergieren und dementsprechend die eindeutige zeitglobale Lösung des Cauchy-Problems die triviale Lösung ist.

Im Folgenden wird gezeigt, dass die Lösung von (3.4) glatt ist, wenn glatte Anfangsdaten vorausgesetzt werden.

Theorem 3.9. *Sei $m \in \mathbb{N}_0$. Zusätzlich zu den Voraussetzungen aus Theorem 3.3 gelte $\nabla^j_t f \in C^0(I, H^{k-j-1}(\Sigma_\bullet))$ für alle $0 \leq j \leq m$ und für alle $k - m - 2 > \frac{n}{2}$. Dann gilt für die Lösung von (3.4)*

$$u \in \bigcap_{i=0}^{m+2} C^i(I, H^{k-i}(\Sigma_\bullet))$$

für alle $k - m - 2 > \frac{n}{2}$.

Beweis. Der Beweis erfolgt durch vollständige Induktion über $m \in \mathbb{N}_0$. Sei u die Lösung des Cauchy-Problems (3.4) mit $\mathcal{L}u = \frac{1}{\beta}\nabla_t \nabla_t u + \Delta_{g_t} u + \mathcal{A}(u, \overline{\nabla} u, \nabla_t u)$. Für $m = 0$ folgt aus Theorem 3.3, dass $u \in C^0(I, H^k(\Sigma_\bullet)) \cap C^1(I, H^{k-1}(\Sigma_\bullet))$ gilt. Aus f, $\mathcal{A}(u, \overline{\nabla} u,\ \nabla_t u)$, $\Delta_{g_t} u \in C^0(I, H^{k-2}(\Sigma_\bullet))$ folgt

$$\frac{1}{\beta}\nabla_t \nabla_t u = f - \Delta_{g_t} u - \mathcal{A}(u, \overline{\nabla} u, \nabla_t u) \in C^0(I, H^{k-2}(\Sigma_\bullet))$$

und demnach $u \in C^2(I, H^{k-2}(\Sigma_\bullet))$. Damit folgt die Behauptung für $m = 0$.
Für den Induktionsschritt sei angenommen, dass $\nabla_t^j f \in C^0(I, H^{k-j-1}(\Sigma_\bullet))$ für alle $0 \leq j \leq m+1$ gelte. Sei u die Lösung des Cauchy-Problems (3.4), d.h. es gilt

$$\frac{1}{\beta}\nabla_t \nabla_t u + \Delta_{g_t} u + \mathcal{A}(u, \overline{\nabla} u, \nabla_t u) = f. \tag{3.7}$$

Nach Induktionsvoraussetzung gilt $u \in \cap_{i=0}^{m+2} C^i(I, H^{k-i}(\Sigma_\bullet))$. Folglich bleibt zu zeigen, dass $\nabla_t^{m+3} u \in C^0(I, H^{k-m-3}(\Sigma_\bullet))$ gilt. Wendet man nun auf die Gleichung (3.7) die $(m+1)$-te kovariante Ableitung bezüglich t an, so erhält man

$$\begin{aligned} &\sum_{i=0}^{m+1} \binom{m+1}{i} \frac{\partial^{m+1-i}}{\partial t^{m+1-i}} \left(\frac{1}{\beta}\right) \nabla_t^i \nabla_t \nabla_t u + \Delta_{g_t}\left(\nabla_t^{m+1} u\right) \\ &+ \left[\nabla_t^{m+1}, \Delta_{g_t}\right] u + \nabla_t^{m+1}\left(\mathcal{A}(u, \overline{\nabla} u, \nabla_t u)\right) = \nabla_t^{m+1} f. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Für den Kommutator gilt

$$[\nabla_t^{m+1}, \Delta_{g_t}] u \in C^0(I, H^{k-m-3}(\Sigma_\bullet)),$$

da $u \in C^{m+1}(I, H^{k-m-1}(\Sigma_\bullet))$. Ebenso gilt auch $\Delta_{g_t}\left(\nabla_t^{m+1} u\right) \in C^0(I, H^{k-m-3}(\Sigma_\bullet))$ und nach Voraussetzung an A gilt nach Lemma 3.1 und Lemma 3.2 $\nabla_t^{m+1}\left(\mathcal{A}(u, \overline{\nabla} u, \nabla_t u)\right) \in C^0(I, H^{k-m-2}(\Sigma_\bullet))$ für $u \in \cap_{i=0}^{m+2} C^i(I, H^{k-i}(\Sigma_\bullet))$ für alle $k - m - 2 > \frac{n}{2}$. Die zu (3.8) äquivalente Gleichung

$$\begin{aligned} \nabla_t^{m+3} u = -\beta \Bigg(&\sum_{i=0}^{m} \binom{m+1}{i} \frac{\partial^{m+1-i}}{\partial t^{m+1-i}} \left(\frac{1}{\beta}\right) \nabla_t^{i+2} u + \Delta_{g_t}\left(\nabla_t^{m+1} u\right) + \left[\nabla_t^{m+1}, \Delta_{g_t}\right] u \\ &+ \nabla_t^{m+1}\left(\mathcal{A}(u, \overline{\nabla} u, \nabla_t u)\right) - \nabla_t^{m+1} f \Bigg) \end{aligned}$$

impliziert dann $\nabla_t^{m+3} u \in C^0(I, H^{k-m-3}(\Sigma_\bullet))$, woraus $u \in C^{m+3}(I, H^{k-m-3}(\Sigma_\bullet))$ und dementsprechend die Behauptung für $m+1$ folgt. □

Aus diesem Theorem lässt sich nun sehr leicht die Glattheit der Lösung folgern.

Theorem 3.10. *Sei $(M, g) = (\mathbb{R} \times \Sigma, -\beta dt^2 \oplus g_t)$ eine $(n+1)$-dimensionale global-hyperbolische Lorentz-Mannigfaltigkeit und sei Σ geschlossen. Seien $I := [t_0, t_1]$ und sei $\mathcal{L}u$ ein semilinearer Wellenoperator, wie in Theorem 3.3 beschrieben.*

Dann existiert ein $\varepsilon > 0$, so dass für alle $u_0, u_1 \in C^\infty(\Sigma_{t_0})$, $f \in C^\infty(I \times \Sigma)$, *die für alle $k-1 > \frac{n}{2}$ die Bedingung*

$$\|u_0\|_{H^k(\Sigma_{t_0})} + \|u_1\|_{H^{k-1}(\Sigma_{t_0})} + \|f - \mathcal{A}(0,0,0)\|_{L^2(I,H^{k-1}(\Sigma_\bullet))} < \varepsilon \tag{3.9}$$

erfüllen, eine eindeutige Lösung glatte Lösung u von (3.4) existiert.

Beweis. Nach Theorem 3.9 gilt $u \in C^{m+2}(I, H^{k-m-2}(\Sigma_\bullet))$ für alle $k, m \in \mathbb{N}_0$ mit $k-m-2 > \frac{n}{2}$ und somit auch für alle $k, m \in \mathbb{N}_0$ mit $k-m-2 > \frac{n}{2}+m+2$. Aus dem Sobolev-Einbettungssatzes, der auch für Schnitte auf geschlossenen Riemannschen Mannigfaltigkeiten gilt (siehe z.B. [7], Appendix, Theorem C.6), folgt $H^{k-m-2}(\Sigma) \subset C^{m+2}(\Sigma)$, woraus $u \in C^{m+2}(I, C^{m+2}(\Sigma_\bullet))$ und demzufolge $u \in C^{m+2}(I \times \Sigma)$ folgt. Da dies für alle $k, m \in \mathbb{N}_0$ mit $k-m-2 > \frac{n}{2}+m+2$ gilt, folgt die Glattheit der Lösung u. □

3.2 Existenz einer zeitlokalen Lösung für beliebige Anfangsdaten

Es stellt sich nun die Frage, ob man Existenzaussagen auch für beliebige Anfangsdaten u_0, u_1, f machen kann, die nicht in einer kleinen Umgebung um 0 bzw. $\mathcal{A}(0,0,0)$ liegen. Wie im folgenden Theorem gezeigt wird, ist dies möglich. Allerdings erhält man auf diese Weise nur zeitlokale Lösungen, d.h. es gibt ein $T > t_0$, so dass die Lösung für alle $t \leq T$ existiert.

Theorem 3.11. *Sei $(M,g) = (\mathbb{R}\times\Sigma, -\beta dt^2 \oplus g_t)$ eine $(n+1)$-dimensionale global-hyperbolische Lorentz-Mannigfaltigkeit und sei Σ geschlossen. Seien $I := [t_0, t_1]$, $k-1 > \frac{n}{2}$ und sei $\mathcal{L}u$ ein semilinearer Wellenoperator der Form*

$$\mathcal{L}u = \Box^\nabla u + \mathcal{A}(u, \overline{\nabla}u, \nabla_t u)$$

oder

$$\mathcal{L}u = \frac{1}{\beta}\nabla_t\nabla_t u + \Delta_{g_t}u + \mathcal{A}(u, \overline{\nabla}u, \nabla_t u),$$

wobei

$$\mathcal{A} : \mathcal{F}_k(\Sigma, I) \to C^0(I, H^{k-1}(\Sigma_\bullet)) \subset L^2(I, H^{k-1}(\Sigma_\bullet))$$

die induzierte Abbildung zu einer glatten fasertreuen Abbildung

$$A : E \oplus T^*M \otimes E \oplus E \to E$$

sei.

Dann existiert für alle $u_0 \in H^{k+3}(\Sigma_{t_0})$, $u_1 \in H^{k+1}(\Sigma_{t_0})$, $f \in C^0(I, H^{k+1}(\Sigma_\bullet))$ *ein* $T \in (t_0, t_1]$, *so dass eine eindeutige zeitlokale Lösung* $u \in \mathcal{FE}^k(\Sigma, \Box, [t_0, T])$ *des Cauchy-Problems* (3.4) *existiert.*

Beweis. Sei $\mathcal{L}$ ein Wellenoperator der Form $\mathcal{L}u = \frac{1}{\beta}\nabla_t\nabla_t u + \Delta_{g_t} u + \mathcal{A}(u, \overline{\nabla}u, \nabla_t u)$. Seien $u_0 \in H^{k+3}(\Sigma_{t_0})$, $u_1 \in H^{k+1}(\Sigma_{t_0})$ gegeben. Sei $g := f|_{\Sigma_{t_0}} \in H^{k+1}(\Sigma_{t_0})$. Das Ziel ist es, ein $\varphi \in \mathcal{FE}^k(\Sigma, \Box, I)$ zu finden, welches

$$\left.\begin{aligned} \mathcal{L}\varphi|_{\Sigma_{t_0}} &= g, \\ \varphi|_{\Sigma_{t_0}} &= u_0, \\ \nabla_\nu\varphi|_{\Sigma_{t_0}} &= u_1 \end{aligned}\right\}$$

erfüllt, so dass die Abblidung

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{L}} : \mathcal{FE}^k(\Sigma, \Box, I) &\to H^k(\Sigma_{t_0}) \oplus H^{k-1}(\Sigma_{t_0}) \oplus L^2(I, H^{k-1}(\Sigma_\bullet)), \\ u &\mapsto (u\big|_{\Sigma_{t_0}}, \nabla_\nu u\big|_{\Sigma_{t_0}}, \mathcal{L}u), \end{aligned}$$

um φ linearisiert werden kann.
Sei hierzu $\tilde{u}_1 = \beta^{\frac{1}{2}}|_{\Sigma_{t_0}} \cdot u_1$. Die Parallelverschiebung von u_0 und u_1 längs der t-Kurven seien ebenfalls mit u_0 bzw. u_1 bezeichnet. Man betrachte folgenden Ansatz

$$\varphi = u_0 + (t - t_0) \cdot \tilde{u}_1 + (t - t_0)^2 w, \tag{3.10}$$

wobei w ein Schnitt auf Σ_{t_0} ist und später genauer bestimmt werden wird.
Zuerst prüft man leicht,

$$\begin{aligned} \varphi|_{\Sigma_{t_0}} &= u_0, \\ \nabla_\nu\varphi|_{\Sigma_{t_0}} &= \beta^{-\frac{1}{2}}\nabla_t\varphi|_{\Sigma_{t_0}} = u_1. \end{aligned}$$

Des Weiteren ist $\mathcal{L}\varphi|_{\Sigma_{t_0}} = g$ äquivalent zu

$$2\beta^{-1}|_{\Sigma_{t_0}} w + \Delta_{g_0} u_0 + \mathcal{A}(u_0, \overline{\nabla}u_0, \tilde{u}_1) = g,$$

wodurch

$$w = \frac{1}{2}\beta|_{\Sigma_{t_0}} \left(-\Delta_{g_0} u_0 - \mathcal{A}(u_0, \overline{\nabla}u_0, \tilde{u}_1) + g\right)$$

folgt. Da $u_1 \in H^{k+1}(\Sigma_{t_0})$ und $u_0 \in H^{k+3}(\Sigma_{t_0})$ gilt, folgt $\overline{\nabla}u_0 \in H^{k+2}(\Sigma_{t_0})$ und dementsprechend $\mathcal{A}(u_0, \overline{\nabla}u_0, \tilde{u}_1) \in H^{k+1}(\Sigma_{t_0})$. Dies impliziert $w \in H^{k+1}(\Sigma_{t_0})$ und insbesondere $\varphi \in C^\infty(I, H^{k+1}(\Sigma_\bullet))$. Da

$$\beta^{-1}\nabla_t\nabla_t\varphi + \Delta_{g_t}\varphi = 2\beta^{-1}w + \Delta_{g_t}\varphi \in C^0(I, H^{k-1}(\Sigma_\bullet)) \subset L^2(I, H^{k-1}(\Sigma_\bullet))$$

gilt, ist $\varphi \in \mathcal{FE}^k(\Sigma, \Box, I)$ und deswegen $\varphi \in V$. Sei $\psi := \mathcal{L}\varphi$. Dann gilt wegen $\mathcal{A}(\varphi, \overline{\nabla}\varphi, \nabla_t\varphi) \in C^0(I, H^{k-1}(\Sigma_\bullet))$ auch $\psi \in C^0(I, H^{k-1}(\Sigma_\bullet)) \subset L^2(I, H^{k-1}(\Sigma_\bullet))$. Für $v \in \mathcal{FE}^k(\Sigma, \Box, I)$ gilt

$$\begin{aligned}
\mathbf{D}\mathcal{L}(\varphi) \cdot v &= \frac{d}{d\lambda}\mathcal{L}(\varphi + \lambda v)|_{\lambda=0} \\
&= \beta^{-1}\nabla_t\nabla_t v + \Delta v + \frac{d}{d\lambda}\mathcal{A}(\varphi + \lambda v, \overline{\nabla}\varphi + \lambda\overline{\nabla}v, \nabla_t\varphi + \lambda\nabla_t v)|_{\lambda=0} \\
&= \beta^{-1}\nabla_t\nabla_t v + \Delta v + \mathbf{D}_1\mathcal{A}(\varphi, \overline{\nabla}\varphi, \nabla_t\varphi) \cdot v + \mathbf{D}_2\mathcal{A}(\varphi, \overline{\nabla}\varphi, \nabla_t\varphi) \cdot \overline{\nabla}v \\
&\quad + \mathbf{D}_3\mathcal{A}(\varphi, \overline{\nabla}\varphi, \nabla_t\varphi) \cdot \nabla_t v,
\end{aligned}$$

wobei $B_1 := \mathbf{D}_1\mathcal{A}(\varphi, \overline{\nabla}\varphi, \nabla_t\varphi)$, $B_2 := \mathbf{D}_2\mathcal{A}(\varphi, \overline{\nabla}\varphi, \nabla_t\varphi)$, $B_3 := \mathbf{D}_3\mathcal{A}(\varphi, \overline{\nabla}\varphi, \nabla_t\varphi)$ aufgrund der gleichen Argumentation wie im Beweis von Theorem 3.3 für alle $k-1 > \frac{n}{2}$ die in Bemerkung 2.13 genannten Bedingungen erfüllen. Somit ist $L_\varphi := \mathbf{D}\mathcal{L}(\varphi)$ ein linearer Wellenoperator. Da nach Theorem 2.12 die Abbildung

$$\begin{aligned}
\mathcal{FE}^k(\Sigma, \Box, I) &\to H^k(\Sigma_{t_0}) \oplus H^{k-1}(\Sigma_{t_0}) \oplus L^2(I, H^{k-1}(\Sigma_\bullet)), \\
v &\mapsto (v\big|_{\Sigma_{t_0}}, \nabla_\nu v\big|_{\Sigma_{t_0}}, \mathbf{D}\mathcal{L}(\varphi) \cdot v),
\end{aligned}$$

ein linearer Isomorphismus ist, kann erneut der Umkehrsatz angewendet werden. Somit ist die Abbildung $\bar{\mathcal{L}}$ ein lokaler C^1-Diffeomorphismus bei φ. Folglich existiert eine Lösung $u \in \mathcal{FE}^k(\Sigma, \Box, I)$ des Cauchy-Problems

$$\left.\begin{aligned}
\mathcal{L}u &= \tilde{f}, \\
u|_{\Sigma_{t_0}} &= \tilde{u}_0, \\
\nabla_\nu u|_{\Sigma_{t_0}} &= \tilde{u}_1
\end{aligned}\right\} \tag{3.11}$$

für alle $\tilde{u}_0 \in H^k(\Sigma_{t_0})$ in einer Umgebung um $\varphi\big|_{\Sigma_{t_0}} = u_0$ und für alle $\tilde{u}_1 \in H^{k-1}(\Sigma_{t_0})$ in einer Umgebung um $\nabla_\nu\varphi\big|_{\Sigma_{t_0}} = u_1$. Infolgedessen existiert insbesondere eine Lösung für die zu Beginn des Beweises fest vorgegebenen, aber beliebigen Anfangsdaten $u_0 \in H^{k+3}(\Sigma_{t_0}), u_1 \in H^{k+1}(\Sigma_{t_0})$. Zusätzlich muss für $\tilde{f}$ die Abschätzung

$$\|\tilde{f} - \psi\|_{L^2(I, H^{k-1}(\Sigma_\bullet))} < \varepsilon(I)$$

für ein genügend kleines ε gelten, wobei $\varepsilon(I)$ monoton fallend in $|I|$ ist. Aufgrund der Tatsache, dass $\mathcal{L}\varphi = \psi$, $f \in C^0(I, H^{k-1}(\Sigma_\bullet))$, sowie $f\big|_{\Sigma_{t_0}} = \psi\big|_{\Sigma_{t_0}}$ gelten, existiert

$I^* = [t_0, T] \subset I$, so dass

$$\|f - \psi\|_{L^2(I^*, H^{k-1}(\Sigma_\bullet))} < \varepsilon(I).$$

erfüllt ist. Ersetzt man nun im obigen Beweis I durch I^*, so existiert eine Lösung $u \in \mathcal{FE}^k(\Sigma, \Box, I^*)$ für alle $\tilde{f}$ mit

$$\|\tilde{f} - \psi\|_{L^2(I^*, H^{k-1}(\Sigma_\bullet))} < \varepsilon(I^*)$$

und wegen $\varepsilon(I) < \varepsilon(I^*)$ insbesondere auch für f. Folglich gibt es für alle $u_0 \in H^{k+3}(\Sigma_{t_0})$, $u_1 \in H^{k+1}(\Sigma_{t_0})$, $f \in C^0(I, H^{k+1}(\Sigma_\bullet))$ ein $T \in (t_0, t_1]$, so dass eine zeitlokale Lösung des Cauchy-Problems (3.4) für alle $t \in [t_0, T]$ existiert. Diese ist aufgrund der gleichen Argumentation wie in Beweis von Theorem 3.3 eindeutig. $\Box$

Analog zu Theorem 3.10 zeigt man, dass bei gegebenen glatten Anfangsdaten die Lösung glatt ist und erhält somit folgendes Theorem.

Theorem 3.12. *Sei $(M, g) = (\mathbb{R} \times \Sigma, -\beta dt^2 \oplus g_t)$ eine $(n+1)$-dimensionale global-hyperbolische Lorentz-Mannigfaltigkeit und sei Σ geschlossen. Seien $I := [t_0, t_1]$ und sei $\mathcal{L}u$ ein semilinearer Wellenoperator, wie in Theorem 3.11 beschrieben.*
Dann existiert für alle $u_0, u_1 \in C^\infty(\Sigma_{t_0})$, $f \in C^\infty(I \times \Sigma)$ eine eindeutige glatte Lösung $u \in C^\infty([t_0, T] \times \Sigma)$ des Cauchy-Problems (3.4).

4 Das Yamabe-Problem

In diesem Teil der Arbeit wird die semilineare Wellengleichung betrachtet, die sich aus dem Yamabe-Problem auf Lorentz-Mannigfaltigkeiten ergibt. Zuerst werden das Riemannsche Yamabe-Problem und die bereits bekannten Resultate auf Lorentz-Mannigfaltigkeiten kurz dargestellt.

4.1 Das Yamabe-Problem auf Riemannschen Mannigfaltigkeiten

Yamabe beschäftigte sich in den 60er Jahren mit folgendem Problem, das nach ihm benannt wurde: Sei eine kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit (M, g) der Dimension $n \geq 3$ gegeben. Existiert eine zu g konform äquivalente Metrik mit konstanter Skalarkrümmung?
Yamabe selbst behauptete in [13], eine Lösung für das Problem gefunden zu haben, jedoch fand Trudinger 1968 einen Fehler in seinem Beweis. Schließlich konnten Trudinger [11], Aubin [2] und Schoen [9] einen korrekten Beweis dafür liefern, dass tatsächlich immer so eine konform äquivalente Metrik gefunden werden kann. Im Folgenden sollen kurz die Ergebnisse vorgestellt werden.

Sei Σ eine zusammenhängende, kompakte n-dimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit mit Metrik g. Jede konform äquivalente Metrik lässt sich schreiben als $\bar{g} = e^{2u}g$, wobei $u \in C^\infty(\Sigma)$ eine glatte reellwertige Funktion auf Σ ist. Unter Verwendung der Transformationsformel für die Skalarkrümmung S_g unter einer konformen Änderung der Metrik (siehe z.B. [7], Thm. 1.159) ergibt sich für die Skalarkrümmung $S_{\bar{g}}$ bezüglich der Metrik $\bar{g}$,

$$S_{\bar{g}} = e^{-2u}\left(2(n-1)\Delta_g u - (n-2)(n-1)|\nabla u|_g^2 + S_g\right).$$

Sei $\varphi := e^{\frac{n-2}{2}u}$. Für $u = \frac{2}{n-2}\ln(\varphi)$ gilt dann

$$\Delta_g u = \frac{2}{n-2}\left(\frac{1}{\varphi}\Delta_g\varphi + \frac{1}{\varphi^2}|\nabla\varphi|_g^2\right)$$

und

$$|\nabla u|_g^2 = \frac{4}{(n-2)^2} \frac{1}{\varphi^2} |\nabla \varphi|_g^2.$$

Für $p := \frac{n+2}{n-2}$ gilt für die Skalarkrümmung bezüglich $\bar{g} = \varphi^{p-1} g$

$$\begin{aligned} S_{\bar{g}} &= \varphi^{1-p} \left(2(n-1) \left(\frac{2}{n-2} \frac{\Delta_g \varphi}{\varphi} + \frac{2}{n-2} \frac{|\nabla \varphi|_g^2}{\varphi^2} \right) - \frac{4(n-1)}{n-2} \frac{|\nabla \varphi|_g^2}{\varphi^2} + S_g \right) \\ &= \varphi^{-p} \left(\frac{4(n-1)}{n-2} \Delta_g \varphi + S_g \varphi \right). \end{aligned}$$

Für $a_n := \frac{n-2}{4(n-1)}$ ergibt sich

$$\Delta_g \varphi + a_n S_g \varphi = a_n S_{\bar{g}} \varphi^p. \tag{4.1}$$

Demnach existiert genau dann eine zu g konform äquivalente Metrik mit konstanter Skalarkrümmung $S_{\bar{g}}$, wenn es eine Konstante $S_{\bar{g}}$ gibt, so dass (4.1) eine positive glatte Lösung besitzt. Dies konnte in folgendem Theorem bewiesen werden:

Theorem 4.1 ([13], [11], [2], [9])**.** *Sei Σ eine zusammenhängende, kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit der Dimension $n \geq 2$. Für $L_g \varphi := \Delta_g \varphi + a_n S_g \varphi$ sei*

$$I_q(\varphi) := \frac{\int_\Sigma \varphi L_g \varphi \, dA}{\|\varphi\|_{L^{q+1}}^2}.$$

Dann existiert für $2 \leq q \leq p = \frac{n+2}{n-2}$ eine positive glatte Lösung φ_q von $L_g \varphi = \lambda \varphi^q$ mit

$$\lambda = \inf\{I_q(\varphi) : \varphi \in H_1(\Sigma), \varphi \geq 0, \varphi \not\equiv 0\} = I_q(\varphi_q).$$

Somit ist jede Metrik auf einer kompakten Riemannschen Mannigfaltigkeit konform äquivalent zu einer Metrik mit konstanter Skalarkrümmung $S_{\bar{g}} := \frac{\lambda}{a_n}$.

Bemerkung 4.2. *Betrachtet man den Koeffizienten p genauer, stellt man fest, dass $p = \frac{n+2}{n-2}$ dem kritischen Exponenten entspricht, von dem bereits bekannt ist, dass die Gleichung $\Delta w = w^q$ im subkritischen Fall $q < \frac{n+2}{n-2}$ einfach zu lösen ist, während für den superkritischen Fall $q > \frac{n+2}{n-2}$ eventuell keine globale glatte Lösung existiert.*

4.2 Das Lorentz'sche Yamabe-Problem

Im Folgenden sei M eine $(n+1)$-dimensionale global-hyperbolische Lorentz-Mannigfaltigkeit mit metrischer Signatur $(- + ...+)$ und $n \geq 2$. Nach Theorem 2.2 lässt sich M schreiben als $M = \mathbb{R} \times \Sigma$ mit Metrik $g = -\beta dt^2 \oplus g_t$, wobei $\Sigma_t := \{t\} \times \Sigma$ glatte raumartige Cauchy-Hyperflächen für alle $t \in \mathbb{R}$ sind und $\{g_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ eine Familie Riemannscher Metriken auf Σ_t darstellt. Es sei angenommen, dass Σ geschlossen ist und dass die Metrik g sowie die Skalarkrümmung S_g glatt sind. Analog zum Riemannschen Yamabe-Problem stellt man sich nun auch hier die Frage: Lässt sich zur Lorentz-Mannigfaltigkeit (M, g) eine zu g konform äquivalente Metrik $\bar{g}$ mit konstanter Skalarkrümmung $S_{\bar{g}}$ finden?

Bemerkung 4.3. *Es kann zur Vereinfachung angenommen werden, dass $\beta \equiv 1$ gilt. Denn sei $\tilde{g} = -\beta dt^2 \oplus \tilde{g}_t$ gegeben, dann betrachte die Metrik $g = \frac{1}{\beta}\tilde{g} = -dt^2 \oplus g_t$ mit $g_t := \frac{1}{\beta}\tilde{g}_t$. Wenn nun zu g eine konform äquivalente Metrik $\bar{g}$ mit konstanter Skalarkrümmung gefunden werden kann, dann ist $\bar{g}$ auch konform äquivalent zur ursprünglichen Metrik $\tilde{g}$.*

Wie im Riemannschen Fall kann das Yamabe-Problem auf Lorentz-Mannigfaltigkeiten auf eine Differentialgleichung zurückgeführt werden. Im Unterschied zum Riemannschen Yamabe-Problem führt dies nicht zu einer elliptischen partiellen Differentialgleichung, sondern zu einer Wellengleichung. Es gilt

Lemma 4.4 ([7], Thm. 1.159)**.** *Seien g und $\bar{g} = e^{2u}g$ konform äquivalente Metriken auf einer $(n+1)$-dimensionalen Mannigfaltigkeit M und $u \in C^\infty(M)$. Dann gilt für die Skalarkrümmung bezüglich $\bar{g}$*

$$S_{\bar{g}} = e^{-2u}\left(2n\Box_g u - n(n-1)|\nabla u|_g^2 + S_g\right), \tag{4.2}$$

wobei $\Box = -div \circ grad = -tr(\nabla^2)$ den skalaren d'Alembert-Operator bezüglich g bezeichnet.

Sei $\overline{\nabla}$ der Gradient, der nur die Ableitungen entlang Σ enthält. Da die Metrik g die Form $-dt^2 \oplus g_t$ hat, lautet die Yamabe-Gleichung

$$\Box_g u + \frac{n-1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 - \frac{n-1}{2}|\overline{\nabla} u|_{g_t}^2 + \frac{1}{2n}S_g = \frac{1}{2n}S_{\bar{g}}e^{2u}. \tag{4.3}$$

Setzt man $\varphi := e^{\frac{n-1}{2}u}$, dann folgt analog zu den Berechnungen zur Herleitung von (4.1)

$$\Box\varphi + \frac{n-1}{4n}S_g\varphi - \frac{n-1}{4n}S_{\bar{g}}\varphi^{\frac{n+3}{n-1}} = 0. \tag{4.4}$$

Deshalb ist das Lösen des Yamabe-Problems äquivalent zum Finden einer globalen glatten Lösung u von (4.3) oder einer positiven globalen glatten Lösung φ von (4.4). Die Nichtlinearität in (4.4) hat eine einfachere analytische Form als die Nichtlinearität in (4.3). Aufgrund dessen ist es für $n = 2$ und $n = 3$ möglich, für die Gleichung (4.4) eine Energie zu definieren, um, wie in Abschnitt 4.5 gezeigt wird, durch Energieabschätzungen die Existenz einer zeitglobalen glatten Lösung zu zeigen. Allerdings muss für diese Lösung, im Unterschied zur Lösung von (4.3), noch zusätzlich die Positivität gezeigt werden.

Bemerkung 4.5. *Der Exponent* $p := \frac{n+3}{n-1}$ *in* (4.4) *ist der kritische Exponent bezüglich der* $(n+1)$*-dimensionalen Lorentz-Mannigfaltigkeit* M*. Da aber im weiteren Verlauf Sobolev-Einbettungen nur auf* Σ_t *und nicht auf* M *betrachtet werden, ist es nicht notwendig, die Techniken, die üblicherweise im kritischen Fall angewendet werden, zu benutzen.*

In Abschnitt 4.3 werden bereits existierende Resultate zum Yamabe-Problem auf ultrastatischen Raumzeiten vorgestellt. Im weiteren Verlauf werden für ein beliebiges festes Zeitintervall $I = [t_0, t_1]$ die Gleichungen (4.3) sowie (4.4) im Rahmen eines Cauchy-Problems betrachtet. In Abschnitt 4.4 wird das Cauchy-Problem

$$\left.\begin{aligned} \Box_g u + \tfrac{n-1}{2}\left(\tfrac{\partial u}{\partial t}\right)^2 - \tfrac{n-1}{2}|\overline{\nabla} u|^2_{g_t} + \tfrac{1}{2n}S_g &= \tfrac{1}{2n}S_{\bar{g}}e^{2u}, \\ u|_{t=t_0} &= u_0, \\ \partial_t u|_{t=t_0} &= u_1 \end{aligned}\right\} \tag{4.5}$$

untersucht. Es wird gezeigt, dass für Skalarkrümmungen S_g, die sich in einer kleinen Umgebung um $S_{\bar{g}}$ befinden, das Cauchy-Problem (4.5) für kleine glatte Anfangsdaten u_0, u_1 eine glatte Lösung auf $I \times \Sigma$ besitzt. Anschließend wird für $\dim(M) = n+1 = 4$ bzw. $n + 1 = 3$ das Cauchy-Problem zur Gleichung (4.4) betrachtet:

$$\left.\begin{aligned} \Box\varphi + \tfrac{n-1}{4n}S_g\varphi - \tfrac{n-1}{4n}S_{\bar{g}}\varphi^{\frac{n+3}{n-1}} &= 0, \\ \varphi|_{t=t_0} &= \varphi_0, \\ \partial_t\varphi|_{t=t_0} &= \varphi_1. \end{aligned}\right\} \tag{4.6}$$

In Abschnitt 4.5 wird gezeigt, dass das Cauchy-Problem (4.6) für $S_{\bar{g}} \leq 0$ eine glatte Lösung für alle $t \in \mathbb{R}$ besitzt. In Abschnitt 4.6 wird für den Fall $n = 3$ untersucht, unter welchen Bedingungen an die Metrik g bzw. die Skalarkrümmung S_g diese Lösung positiv auf einem vorgegebenen Zeitintervall ist. In Abschnitt 4.7 wird anschließend ein Gegenbeispiel für globale Existenz einer positiven Lösung auf $\mathbb{R} \times \Sigma$ vorgestellt, falls $S_{\bar{g}} \leq 0$ und $S_g \geq 0$ für alle $(t, x) \in M$ gilt.

4.3 Das Yamabe-Problem auf ultrastatischen Raumzeiten

Für den Fall einer ultrastatischen Raumzeit, bei der die Metrik die Form $g = -dt^2 \oplus g_\Sigma$ hat, wobei g_Σ nicht von t abhängt, wurde die Gleichung (4.4) in [8] bereits untersucht. In diesem Fall lässt sich der d'Alembert-Operator vereinfacht schreiben als

$$\Box = \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \Delta_{g_\Sigma}.$$

Die Yamabe-Gleichung hat dann für $p := \frac{n+3}{n-1}$ und $a_n := \frac{n-1}{4n}$ die Form

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\varphi + \tilde{L}_{g_\Sigma}\varphi = a_n S_{\bar{g}}\varphi^p, \tag{4.7}$$

wobei

$$\tilde{L}_{g_\Sigma} := \Delta_{g_\Sigma} + a_n S_{g_\Sigma}$$

bis auf den Koeffizienten a_n dem Riemannschen Yamabe-Operator aus Abschnitt 4.1 entspricht. Aufgrund der speziellen Form der Metrik ist es in diesem Fall möglich, die Resultate des Riemannschen Yamabe-Problems zu verwenden, um Existenzaussagen für die Yamabe-Gleichung (4.7) machen zu können. In [8] wird gezeigt, dass die Existenz einer positiven Lösung von den Vorzeichen von $S_{\bar{g}}$ und dem kleinsten Eigenwert von $\tilde{L}_{g_\Sigma}$ abhängt.

Theorem 4.6. *([8], Theorem 3.9) Sei (Σ, g_Σ) eine kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit und sei (M, g) eine global-hyperbolische Lorentz-Mannigfaltigkeit der Dimension $n+1$, $n \geq 2$, die für ein offenes Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ isometrisch zu $(I \times \Sigma, -dt^2 \oplus g_\Sigma)$ ist. Sei $\mu_1(\tilde{L}_{g_\Sigma})$ der kleinste Eigenwert von $\tilde{L}_{g_\Sigma}$.*
Dann gilt:

1) *Ist $\mu_1(\tilde{L}_{g_\Sigma}) < 0$, dann*
   a) *existiert ein $S_{\bar{g}} \leq 0$, so dass (4.7) eine globale Lösung $\varphi \in C^\infty(I \times \Sigma, \mathbb{R}_{>0})$ besitzt.*
   b) *existiert für $S_{\bar{g}} > 0$ keine globale Lösung $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R} \times \Sigma, \mathbb{R}_{>0})$ von (4.7).*
2) *Ist $\mu_1(\tilde{L}_{g_\Sigma}) = 0$, dann*
   a) *existiert für $S_{\bar{g}} \neq 0$ keine globale Lösung $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R} \times \Sigma, \mathbb{R}_{>0})$ von (4.7).*
   b) *existiert für $S_{\bar{g}} = 0$ eine globale Lösung $\varphi \in C^\infty(I \times \Sigma, \mathbb{R}_{>0})$ von (4.7).*
3) *Ist $\mu_1(\tilde{L}_{g_\Sigma}) > 0$, dann*

a) *existiert für* $S_{\bar{g}} = 0$ *genau dann eine globale Lösung* $\varphi \in C^\infty(I \times \Sigma, \mathbb{R}_{>0})$ *von* (4.7), *wenn* $|I| \leq \frac{\pi}{\mu_1(\tilde{L}_{g_\Sigma})}$.

b) *existiert für* $S_{\bar{g}} < 0$ *keine globale Lösung* $\varphi \in C^\infty(I \times \Sigma, \mathbb{R}_{>0})$ *von* (4.7), *wenn* $|I| > \frac{\pi}{\mu_1(\tilde{L}_{g_\Sigma})}$.

c) *existiert ein* $S_{\bar{g}} > 0$, *so dass* (4.7) *eine globale Lösung* $\varphi \in C^\infty(I \times \Sigma, \mathbb{R}_{>0})$ *besitzt.*

Bemerkung 4.7. *Betrachtet man eine allgemeine Metrik* $g = -\beta dt^2 \oplus g_t$, *so dass die Familie von Riemannschen Metriken von* t *abhängt, dann lassen sich die Methoden in [8] nicht mehr anwenden.*

4.4 Fast globale Existenz für S_g nahe $S_{\bar{g}}$

In diesem Abschnitt wird für ein fest vorgegebenes Zeitintervall $I = [t_0, t_1]$ mit $-\infty < t_0 < t_1 < \infty$ das Cauchy-Problem (4.5) betrachtet. Im weiteren Verlauf wird folgendes Lemma häufig verwendet werden, das aus Theorem 3.70 in [3] und Proposition 3.6 in [10] folgt.

Lemma 4.8. *Sei* Σ *eine geschlossene Riemannsche Mannigfaltigkeit der Dimension* n *und* $k \geq 1$. *Dann existiert eine Konstante* $C > 0$, *so dass für alle* $f, g \in H^k(\Sigma, \mathbb{R}) \cap C^0(\Sigma, \mathbb{R})$

$$\|f \cdot g\|_{H^k(\Sigma)} \leq C \left(\|f\|_{L^\infty(\Sigma)} \|g\|_{H^k(\Sigma)} + \|f\|_{H^k(\Sigma)} \|g\|_{L^\infty(\Sigma)} \right) \tag{4.8}$$

gilt.

Beweis. Seien $l, m \in \mathbb{N}$ mit $k = l + m$. Für $f \in H^k(\Sigma, \mathbb{R}) \cap C^0(\Sigma, \mathbb{R})$ sei $\tilde{f}$ definiert durch

$$\tilde{f} := f - \frac{1}{\mathrm{vol}(\Sigma)} \int\limits_\Sigma f \, dA.$$

Dann gilt wegen $\int_\Sigma \tilde{f} \, dA = 0$ nach Theorem 3.70 in [3]

$$\|\nabla^l \tilde{f}\|_{L^{\frac{2k}{l}}(\Sigma)} \leq C_1 \|\nabla^k \tilde{f}\|_{L^2(\Sigma)}^{\frac{l}{k}} \|\tilde{f}\|_{L^\infty(\Sigma)}^{1-\frac{l}{k}}. \tag{4.9}$$

Wegen $k, l \geq 1$ und $\|\tilde{f}\|_{L^\infty(\Sigma)} \leq 2\|f\|_{L^\infty(\Sigma)}$ gilt die Ungleichung (4.9) auch für f. Dies impliziert

$$\|\nabla^l f\|_{L^{\frac{2k}{l}}(\Sigma)} \leq C_2 \|\nabla^k f\|_{L^2(\Sigma)}^{\frac{l}{k}} \|f\|_{L^\infty(\Sigma)}^{1-\frac{l}{k}} \leq C_3 \|f\|_{H^k(\Sigma)}^{\frac{l}{k}} \|f\|_{L^\infty(\Sigma)}^{\frac{m}{k}}. \tag{4.10}$$

Durch Verwendung der Hölder-Ungleichung und (4.10) ergibt sich für $f, g \in H^k(\Sigma, \mathbb{R}) \cap C^0(\Sigma, \mathbb{R})$ analog zum Beweis von Proposition 3.6 in [10] für Funktionen auf $\mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned}
\| \left(\nabla^l f\right) (\nabla^m g) \|_{L^2(\Sigma)} &\leq \|\nabla^l f\|_{L^{\frac{2k}{l}}(\Sigma)} \|\nabla^m g\|_{L^{\frac{2k}{m}}(\Sigma)} \\
&\leq C_4 \|f\|_{H^k(\Sigma)}^{\frac{l}{k}} \|f\|_{L^\infty(\Sigma)}^{\frac{m}{k}} \|g\|_{H^k(\Sigma)}^{\frac{m}{k}} \|g\|_{L^\infty(\Sigma)}^{\frac{l}{k}} \\
&= C_4 \left(\|f\|_{H^k(\Sigma)} \|g\|_{L^\infty(\Sigma)}\right)^{\frac{l}{k}} \left(\|g\|_{H^k(\Sigma)} \|f\|_{L^\infty(\Sigma)}\right)^{\frac{m}{k}} \\
&\leq C_4 \left(\|f\|_{L^\infty(\Sigma)} \|g\|_{H^k(\Sigma)} + \|f\|_{H^k(\Sigma)} \|g\|_{L^\infty(\Sigma)}\right),
\end{aligned}$$

wobei in der letzten Ungleichung benutzt wurde, dass $(a+b)^k \geq a^m b^l$ für $m + l = k$ und $a, b \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ gilt. Da zudem

$$\|f \cdot \nabla^k g\|_{L^2(\Sigma)} \leq \|f\|_{L^\infty(\Sigma)} \|g\|_{H^k(\Sigma)}$$

und

$$\|g \cdot \nabla^k f\|_{L^2(\Sigma)} \leq \|g\|_{L^\infty(\Sigma)} \|f\|_{H^k(\Sigma)}$$

gilt, folgt

$$\| \left(\nabla^l f\right) (\nabla^m g) \|_{L^2(\Sigma)} \leq C_5 \left(\|f\|_{L^\infty(\Sigma)} \|g\|_{H^k(\Sigma)} + \|f\|_{H^k(\Sigma)} \|g\|_{L^\infty(\Sigma)}\right)$$

für alle $l, m \in \mathbb{N}_0$ mit $l + m = k$ und demzufolge die Behauptung. □

Aufgrund der Sobolev-Einbettung $H^k(\Sigma) \subset C^0(\Sigma)$ für $k > \frac{n}{2}$ impliziert Lemma 4.8 folgendes Lemma:

Lemma 4.9. *Sei Σ eine geschlossene Riemannsche Mannigfaltigkeit der Dimension n. Sei $k > \frac{n}{2}$ und seien $f, g \in H^k(\Sigma)$. Dann existiert eine Konstante $C > 0$, so dass*

$$\|f \cdot g\|_{H^k(\Sigma)} \leq C \|f\|_{H^k(\Sigma)} \|g\|_{H^k(\Sigma)} \tag{4.11}$$

erfüllt ist.

Durch Induktion lässt sich dies auf beliebige endliche Produkte von Funktionen erweitern.

Lemma 4.10. *Sei Σ eine geschlossene Riemannsche Mannigfaltigkeit der Dimension n. Seien $p \in \mathbb{N}$ und $k > \frac{n}{2}$. Dann existiert eine Konstante $C > 0$, so dass*

$$\left\| \prod_{i=1}^p f_i \right\|_{H^k(\Sigma)} \leq C^{p-1} \prod_{i=1}^p \|f_i\|_{H^k(\Sigma)}$$

für alle $f_i \in H^k(\Sigma)$ gilt.
Für $f \in H^k(\Sigma)$ gilt insbesondere

$$\|f^p\|_{H^k(\Sigma)} \leq C^{p-1}\|f\|^p_{H^k(\Sigma)}.$$

Aus Lemma 4.8 folgt zudem mit vollständiger Induktion folgendes Lemma:

Lemma 4.11. *Sei Σ eine geschlossene Riemannsche Mannigfaltigkeit der Dimension n. Seien $p \in \mathbb{N}$, $k > \frac{n}{2}$ und $f \in H^k(\Sigma)$. Dann existiert eine Konstante $C > 0$, so dass*

$$\|f^p\|_{H^k(\Sigma)} \leq p \cdot C\|f\|^{p-1}_{L^\infty(\Sigma)}\|f\|_{H^k(\Sigma)}$$

gilt.

Mithilfes des Theorems 3.10 kann die fast-zeitglobale Existenz einer Lösung von (4.5) für kleine Anfangsdaten gezeigt werden.

Theorem 4.12. *Sei $(M, g) = (\mathbb{R} \times \Sigma, -dt^2 \oplus g_t)$ eine $(n+1)$-dimensionale global-hyperbolische Lorentz-Mannigfaltigkeit und sei Σ geschlossen. Für $t_0 \in \mathbb{R}$ sei $I = [t_0, t_1]$ gegeben. Dann existiert ein $\varepsilon > 0$, so dass für alle $u_0, u_1 \in C^\infty(\Sigma_{t_0})$ und $S_g \in C^\infty(M)$, die für alle $k > \frac{n}{2} + 1$ die Bedingung*

$$\|u_0\|_{H^k(\Sigma_{t_0})} + \|u_1\|_{H^{k-1}(\Sigma_{t_0})} + \int_{t_0}^{t_1} \frac{1}{2n}\|S_g - S_{\bar{g}}\|_{H^{k-1}(\Sigma_s)}\, ds < \varepsilon \tag{4.12}$$

erfüllen, eine eindeutige Lösung $u \in C^\infty(I \times \Sigma)$ des Cauchy-Problems (4.5) existiert.

Beweis. Seien $b_n := \frac{n-1}{2}$, $c_n := \frac{1}{2n}$ und $E = M \times \mathbb{R}$. Dann ist die Abbildung

$$\begin{aligned} A : E \oplus T^*M \otimes E \oplus E &\to E \\ ((p,x),(p,y),(p,z)) &\mapsto (p, b_n z^2 - b_n|y|^2_{g_t} - c_n S_{\bar{g}} e^{2x}) \end{aligned}$$

glatt und fasertreu. Die Yamabe-Gleichung in (4.5) hat dann die Form

$$\Box u + \mathcal{A}(u, \overline{\nabla} u, \nabla_t u) = c_n S_g, \tag{4.13}$$

wobei

$$\mathcal{A} : \mathcal{F}_k(\Sigma, I) \;\; \to C^0(I, H^{k-1}(\Sigma_\bullet)) \subset L^2(I, H^{k-1}(\Sigma_\bullet))$$

die von A induzierte Abbildung mit $\mathcal{A}(v,w,z)(x) = A(v(x), w(x), z(x))$ für alle $x \in M$ ist. Dann existiert nach Theorem 3.10 ein $\varepsilon > 0$, so dass für alle

$u_0, u_1 \in C^\infty(\Sigma_{t_0})$, $S_g \in C^\infty(I \times \Sigma)$, die für alle $k-1 > \frac{n}{2}$ die Bedingung

$$\|u_0\|_{H^k(\Sigma_{t_0})} + \|u_1\|_{H^{k-1}(\Sigma_{t_0})} + \|f - \mathcal{A}(0,0,0)\|_{L^2(I,H^{k-1}(\Sigma_\bullet))} < \varepsilon \tag{4.14}$$

erfüllen, eine eindeutige Lösung glatte Lösung u von (3.4) existiert. □

Im Folgenden soll die Größe von ε aus Theorem 4.12 genauer bestimmt werden. Sei $\tilde{u} := (u, \overline{\nabla} u, \nabla_t u) \in \mathcal{F}_k(\Sigma, I)$, wobei

$$\mathcal{F}_k(\Sigma, I) = C^0(I, H^k(\Sigma_\bullet)) \oplus C^0(I, H^{k-1}(\Sigma_\bullet, T^*\Sigma \otimes E)) \oplus C^0(I, H^{k-1}(\Sigma_\bullet))$$

wie in Kapitel 3 definiert ist. Sei $\mathcal{A}$ wie im Beweis von Theorem 4.12 gegeben durch

$$\begin{aligned} &\mathcal{A} : \mathcal{F}_k(\Sigma, I) \to L^2(I, H^{k-1}(\Sigma_\bullet)),\\ &(v, w, z) \mapsto \frac{n-1}{2} z^2 - \frac{n-1}{2} |w|^2_{g_t} - \frac{1}{2n} S_{\bar{g}} e^{2v}. \end{aligned}$$

Sei $u \in \mathcal{FE}^k(\Sigma, \Box, I)$ mit $\|u\|_{\mathcal{FE}^k} \le R$. Nach Lemma 3.7 gilt $\varepsilon \ge \frac{R_*}{2} e^{-\frac{1}{2}C|I|}$, wobei R_* die größte Zahl mit $R_* \cdot K(R_*) \le \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}C|I|}$ ist und $K(R)$ die von R abhängige Konstante ist, die sich aus der Abschätzung $\|\mathbf{D}^2\mathcal{A}(u, \overline{\nabla} u, \nabla_t u)\| \le K(R)$ ergibt. Für $u \in C^0(I, H^k(\Sigma_\bullet))$ gilt nach Lemma 4.10 wegen $k-1 > \frac{n}{2}$ für alle $t \in I$

$$\|e^u\|_{H^{k-1}(\Sigma_t)} \le \sum_{i=0}^\infty \frac{\|u^i\|_{H^{k-1}(\Sigma_t)}}{i!} \le \sum_{i=0}^\infty \frac{C^{i-1}\|v\|^i_{H^{k-1}(\Sigma_t)}}{i!} \le \frac{1}{C} e^{C\|u\|_{H^{k-1}(\Sigma_t)}}.$$

Für $\tilde{v} = (v, \overline{\nabla} v, \nabla_t v)$, $\tilde{w} = (w, \overline{\nabla} w, \nabla_t w) \in \mathcal{F}_k(\Sigma, I)$ mit

$$1 = \|\tilde{v}\|_{\mathcal{F}_k} = \|\tilde{w}\|_{\mathcal{F}_k} = \|w\|_{C^0(I,H^k(\Sigma_\bullet))} + \|\overline{\nabla} w\|_{C^0(I,H^{k-1}(\Sigma_\bullet))} + \|\nabla_t w\|_{C^0(I,H^{k-1}(\Sigma_\bullet))}$$

gilt

$$\mathbf{D}^2\mathcal{A}(u, \overline{\nabla} u, \nabla_t u) \cdot (\tilde{v}, \tilde{w}) = (n-1)\partial_t v \partial_t w - (n-1)\langle \overline{\nabla} v, \overline{\nabla} w\rangle - \frac{2}{n} S_{\bar{g}} v w e^{2u}$$

und folglich

$$\begin{aligned} &\|\mathbf{D}^2\mathcal{A}(u, \overline{\nabla} u, \nabla_t u) \cdot (\tilde{v}, \tilde{w})\|_{H^{k-1}(\Sigma_t)}\\ &\le (n-1)\tilde{C}\|\partial_t v\|_{H^{k-1}(\Sigma_t)}\|\partial_t w\|_{H^{k-1}(\Sigma_t)} + (n-1)\tilde{C}\|\overline{\nabla} v\|_{H^{k-1}(\Sigma_t)}\|\overline{\nabla} w\|_{H^{k-1}(\Sigma_t)}\\ &\quad + \frac{2}{n}|S_{\bar{g}}|\tilde{C}^2\|v\|_{H^{k-1}(\Sigma_t)}\|w\|_{H^{k-1}(\Sigma_t)}\frac{1}{\tilde{C}} e^{2\tilde{C}\|u\|_{H^{k-1}(\Sigma_t)}}\\ &\le 2(n-1)\tilde{C}\left(\|\tilde{v}\|_{\mathcal{F}_k}\|\tilde{w}\|_{\mathcal{F}_k}\right) + \frac{2}{n}\tilde{C}|S_{\bar{g}}|e^{2\tilde{C}R}\left(\|\tilde{v}\|_{\mathcal{F}_k}\|\tilde{w}\|_{\mathcal{F}_k}\right) \end{aligned}$$

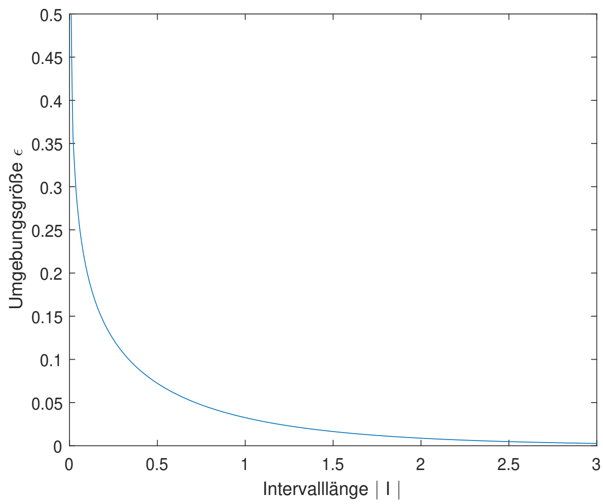
$$\leq 2(n-1)\tilde{C} + \frac{2}{n}\tilde{C}|S_{\bar{g}}|e^{2\tilde{C}R} =: \bar{K}(R),$$

wobei $\tilde{C} \geq 0$ die Konstante aus Lemma 4.10 bezeichnet. Aufgrund dessen gilt

$$\begin{aligned}
&\|\mathbf{D}^2\mathcal{A}(u, \overline{\nabla}u, \nabla_t u)\| \\
&= \sup\left\{\|\mathbf{D}^2\mathcal{A}(u, \overline{\nabla}u, \nabla_t u)\cdot(\tilde{v}, \tilde{w})\|_{L^2(I, H^{k-1}(\Sigma_\bullet))} \mid \|\tilde{v}\|_{\mathcal{F}_k} = \|\tilde{w}\|_{\mathcal{F}_k} = 1\right\} \\
&\leq \sqrt{|I|}\bar{K}(R) =: K(R).
\end{aligned}$$

Sei $C > 0$ die Konstante aus der Energieabschätzung (2.3) für den linearen Wellenoperator $Lv := \mathbf{D}\mathcal{L}(0)\cdot v = \Box v - \frac{1}{n}S_{\bar{g}}v$. Sei des Weiteren R_* die größte Zahl mit $R_* \cdot K(R_*) \leq \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}C|I|}$. Dann ist $\varepsilon \geq \frac{R_*}{2}e^{-\frac{1}{2}C|I|}$. Folglich hängt ε von der Intervalllänge $|I|$ und den beiden Konstanten C aus der Energieabschätzung für lineare Wellengleichungen (2.3) und $\tilde{C}$ aus Lemma 4.10 ab. Es ist zu beachten, dass man durch diese Rechnungen eine untere Schranke für ε erhält, da genauere Abschätzungen von $\|\mathbf{D}^2\mathcal{A}(\tilde{u})\cdot(\tilde{v}, \tilde{w})\|_{H^{k-1}(\Sigma_t)}$ eventuell ein größeres R_* und somit auch ein größeres ε implizieren können.

Um die Größenordnungen zu verdeutlichen sei angenommen, dass $\tilde{C} = C = |S_{\bar{g}}| = 1$ und $n = 3$ ist. Anhand der Grafik erkennt man, dass ε mit wachsender Intervalllänge $|I|$ stark fallend ist.



Somit stellt (4.12) eine sehr starke Bedingung an die Skalarkrümmung dar. Aus diesem Grund wird im Folgenden das Cauchy-Problem (4.6) betrachtet. Da diese semilineare Wellengleichung eine einfachere analytische Form als die Wellengleichung aus dem Cauchy-Problem (4.5) aufweist, ist es in diesem Fall möglich mit Hilfe von Energieabschätzungen für $\dim(\Sigma) = 2, 3$ und $S_{\bar{g}} \leq 0$ eine zeitlokale Lösung von (4.6) zu einer zeitglobalen Lösung zu erweitern. Dieses Verfahren wird im nächsten Abschnitt beschrieben. Für die Lösung des Yamabe-Problems muss zusätzlich noch die Positivität der Lösung gezeigt werden. Unter welchen Bedingungen dies möglich ist, wird in Abschnitt 4.6 untersucht.

4.5 Globale Lösung der Yamabe-Gleichung

In diesem Abschnitt wird das Cauchy-Problem (4.6) betrachtet. Das Ziel ist es, mithilfe von Energieabschätzungen eine zeitglobale Lösung zu erhalten. Hierzu wird zuerst die Existenz einer zeitlokalen Lösung von (4.6) für beliebige glatte Anfangsdaten φ_0, φ_1, S_g gezeigt.

Theorem 4.13. *Sei* $(M, g) = (\mathbb{R} \times \Sigma, -dt^2 \oplus g_t)$ *eine* $(n+1)$*-dimensionale global-hyperbolische Lorentz-Mannigfaltigkeit und sei* Σ *geschlossen. Für* $t_0 \in \mathbb{R}$ *sei* $\varphi_0 \in C^\infty(\Sigma_{t_0}, \mathbb{R})$, $\varphi_1 \in C^\infty(\Sigma_{t_0})$ *und* $S_g \in C^\infty(M)$.
Dann existiert ein $T > t_0$*, so dass* (4.6) *eine positive glatte Lösung für alle* $t \in [t_0, T)$ *besitzt.*

Beweis. Im Beweis von Theorem 4.12 wurde bereits gezeigt, dass die Nichtlinearität in (4.5) auch die Bedingungen des Theorems 3.12 erfüllt. Infolgedessen existiert eine zeitlokale glatte Lösung u des Cauchy-Problems (4.5), wobei die Anfangsdaten $(u_0,\, u_1,\, S_g)$ nicht mehr in einer kleinen Umgebung um $(0, 0, S_{\bar{g}})$ liegen müssen. Da für $\varphi = e^{\frac{n-1}{2}u} > 0$ die beiden Cauchy-Probleme äquivalent sind, existiert demzufolge eine zeitlokale positive glatte Lösung φ des Cauchy-Problems (4.6), falls $\varphi_0 > 0$ gilt. □

Da nach Annahme die Metrik die Form $g = -dt^2 \oplus g_t$ hat, gilt für den d'Alembert-Operator in lokalen Koordinaten

$$\begin{aligned}
\Box f &= -div(grad\, f)\\
&= -\sum_{i,j=0}^{n} \frac{\partial}{\partial x^j}\left(g^{ij}\frac{\partial f}{\partial x^i}\right) - \frac{1}{2\mathrm{det}g_t} g^{ij}\frac{\partial f}{\partial x^i}\frac{\partial \mathrm{det}g_t}{\partial x^j}\\
&= \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + \frac{1}{2\mathrm{det}g_t}\frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial \mathrm{det}g_t}{\partial t} - \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x^j}\left(g^{ij}\frac{\partial f}{\partial x^i}\right) - \frac{1}{2\mathrm{det}g_t} g^{ij}\frac{\partial f}{\partial x^i}\frac{\partial \mathrm{det}g_t}{\partial x^j}\\
&= \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + \alpha\frac{\partial f}{\partial t} + \Delta_{g_t} f,
\end{aligned}$$

wobei angenommen wird, dass $\alpha := \frac{1}{2} tr_{g_t}\left(\frac{\partial g_t}{\partial t}\right)$ glatt ist. Unter Verwendung der Schreibweise $\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \dot{\varphi}$, $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \ddot{\varphi}$ und mit $a_n = \frac{n-1}{4n}$, $p_n = \frac{n+3}{n-1}$ lässt sich das Cauchy-

Problem (4.6) schreiben als

$$\left.\begin{aligned} \ddot{\varphi} + \Delta_{g_t}\varphi + \alpha\dot{\varphi} + a_n S_g \varphi &= a_n S_{\bar{g}} \varphi^{p_n}, \\ \varphi\big|_{t=t_0} &= \varphi_0, \\ \dot{\varphi}\big|_{t=t_0} &= \varphi_1. \end{aligned}\right\} \tag{4.15}$$

Im Folgenden sei $S_{\bar{g}} \leq 0$ und $n = \dim(\Sigma) = 2$ oder $n = 3$, d.h. $(a_2, p_2) = \left(\frac{1}{8}, 5\right)$ und $(a_3, p_3) = \left(\frac{1}{6}, 3\right)$. In diesem Fall lässt sich zeigen, dass die Lösung für alle $t \in \mathbb{R}$ existiert.

Für den Beweis im Fall $n = 2$ wird unter anderem eine Sobolev-Einbettung der Form $H^1(\Sigma_t) \subset L^{18}(\Sigma_t)$ benötigt. Sei hierzu der Sobolev'sche Einbettungssatz auf kompakten Mannigfaltigkeiten (siehe z.B. [3], Thm. 2.10) betrachtet:

Theorem 4.14 (Sobolev'scher Einbettungssatz)**.** *Sei Σ eine kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit der Dimension $n \geq 2$. Dann existiert für alle $k, l \in \mathbb{N}_0$, $p, q \in \mathbb{R}$ mit $1 \leq q < n$ und $\frac{1}{p} = \frac{1}{q} - \frac{l}{n}$ die stetige Einbettung*

$$W^{k+l,q}(\Sigma) \subset W^{k,p}(\Sigma).$$

Für $\frac{1}{p} > \frac{1}{q} - \frac{l}{n}$ ist die Einbettung kompakt.

Um eine Aussage für $q = n = 2$ zu erhalten, benötigt man folgendes Lemma, das sich leicht aus dem obigen Theorem folgern lässt.

Lemma 4.15. *Sei Σ eine kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit der Dimension 2. Dann existiert für alle $p \geq 2$ die stetige Einbettung*

$$H^1(\Sigma) \subset L^p(\Sigma).$$

Beweis. Sei $p \geq 2$ und $n = \dim(\Sigma) = 2$. Definiere $s := \frac{2p}{2+p}$. Dann ist $s \in [1, 2)$ und $\frac{1}{p} = \frac{2-s}{2s} = \frac{1}{s} - \frac{1}{2}$. Nach Theorem 4.14 ist die Einbettung $W^{1,s}(\Sigma) \subset L^p(\Sigma)$ stetig. Wegen $s < 2$ ist die Einbettung $H^1(\Sigma) = W^{1,2}(\Sigma) \subset W^{1,s}(\Sigma)$ ebenfalls stetig. Dies impliziert die stetige Einbettung $H^1(\Sigma) \subset L^p(\Sigma)$. □

Im Folgenden wird nun gezeigt, dass das Cauchy-Problem (4.15) eine zeitglobale Lösung besitzt.

Theorem 4.16. *Sei $(M, g) = (\mathbb{R} \times \Sigma, -dt^2 \oplus g_t)$ eine $(n+1)$-dimensionale global-hyperbolische Lorentz-Mannigfaltigkeit mit $n = 2$ oder $n = 3$. Sei Σ geschlossen und sei $t_0 \in \mathbb{R}$. Dann existiert für glatte Anfangsdaten $\varphi_0, \varphi_1 \in C^\infty(\Sigma_{t_0})$ eine glatte Lösung des Cauchy-Problems (4.15) für alle $t \in \mathbb{R}$, falls $S_{\bar{g}} \leq 0$ gilt.*

Beweis. Sei für ein $T^* > t_0$ mit $T^* < \infty$ das Intervall $[t_0, T^*)$ das maximale Intervall, für das eine glatte Lösung von (4.15) bei gegebenen glatten Anfangsdaten φ_0, φ_1 existiert. Nach Theorem 4.13 existiert so ein $T^* > t_0$. Ziel ist es nun zu zeigen, dass die Lösung in der L^∞-Norm gleichmäßig für alle $t < T^*$ beschränkt ist, so dass dann die Lösung über T^* hinaus erweitert werden kann, was einen Widerspruch zur Maximalität von T^* ergibt. Folglich existiert dann eine Lösung für alle $t \geq t_0$. Durch Rückwärtslösen der Wellengleichung ergibt sich dann eine zeitglobale Lösung für alle $t \in \mathbb{R}$.

Um eine derartige gleichmäßige Schranke für die Lösung zu erhalten, wird für $n = 2$ oder $n = 3$ folgendes Energiefunktional definiert

$$\mathcal{E}_1(\varphi, t) := \int\limits_{\Sigma_t} \frac{1}{2}\left(\dot{\varphi}^2 + |\overline{\nabla}\varphi|^2_{g_t} + \varphi^2\right) - \frac{a_n}{p_n + 1} S_{\bar{g}} \varphi^{p_n+1} \, dA_t,$$

wobei φ die Lösung von (4.15) für alle $t \in [t_0, T^*)$ ist. Wegen $p_2 = 5$ und $p_3 = 3$, ist $\varphi^{p_n+1} \geq 0$. Infolgedessen ist das Energiefunktional wegen $S_{\bar{g}} \leq 0$ nichtnegativ. Sei des Weiteren $e_1(t, x)$ definiert durch

$$e_1(t, x) := \frac{1}{2}\left(\dot{\varphi}^2 + |\overline{\nabla}\varphi|^2_{g_t} + \varphi^2\right) - \frac{a_n}{p_n + 1} S_{\bar{g}} \varphi^{p_n+1}.$$

Sei $I := [t_0, T^*]$ und sei $C_1 > 0$ eine Konstante, so dass die Matrix $\left(\dot{g_t}^{-1} - C_1 g_t^{-1}\right)$ negativ-definit für alle $t \in I$ ist. Sei zudem $C_2 = \|\alpha\|_{L^\infty(I \times \Sigma)}$. Für die Zeitableitung des Energiefunktionals gilt dann für alle $t < T_*$

$$\begin{aligned}
\dot{\mathcal{E}}_1(\varphi, t) &= \int\limits_{\Sigma_t} \dot{\varphi}\ddot{\varphi} + \langle \overline{\nabla}\varphi, \overline{\nabla}\dot{\varphi}\rangle_{g_t} + \varphi\dot{\varphi} - a_n S_{\bar{g}} \varphi^{p_n} \dot{\varphi} + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial g_t^{ij}}{\partial t} \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} \frac{\partial \varphi}{\partial x^j} + \alpha e_1 \, dA_t \\
&\leq \int\limits_{\Sigma_t} \dot{\varphi}\left(\ddot{\varphi} + \Delta_{g_t}\varphi - a_n S_{\bar{g}} \varphi^{p_n}\right) + \frac{1}{2}\varphi^2 + \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} C_1 |\overline{\nabla}\varphi|^2_{g_t} \, dA_t + C_2 \mathcal{E}_1(\varphi, t) \\
&\leq \int\limits_{\Sigma_t} \dot{\varphi}\left(-\alpha\dot{\varphi} - a_n S_g \varphi\right) + \frac{1}{2} C_1 |\overline{\nabla}\varphi|^2_{g_t} \, dA_t + \mathcal{E}_1(\varphi, t) + C_2 \mathcal{E}_1(\varphi, t) \\
&\leq \int\limits_{\Sigma_t} C_2 \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} a_n \|S_g\|_{L^\infty(\Sigma_t)} \left(\dot{\varphi}^2 + \varphi^2\right) + \frac{1}{2} C_1 |\overline{\nabla}\varphi|^2_{g_t} \, dA_t + (1 + C_2)\mathcal{E}_1(\varphi, t) \\
&\leq C_3 \mathcal{E}_1(\varphi, t).
\end{aligned}$$

Unter Verwendung der Gronwallschen Ungleichung erhält man für $t < T^*$

$$\mathcal{E}_1(\varphi, t) \leq e^{C_3(t - t_0)} \cdot \mathcal{E}_1(\varphi, t_0) \leq e^{C_3(T_* - t_0)} \cdot \mathcal{E}_1(\varphi, t_0) \leq C.$$

Dies impliziert insbesondere $\|\varphi\|_{H^1(\Sigma_t)} \leq \sqrt{2C}$ für alle $t \in [t_0, T^*)$. Da für $n = 2, 3$ $H^2(\Sigma_t)$ kompakt in $C^0(\Sigma_t)$ eingebettet ist, wird des Weiteren die H^2-Energie uniform in t abgeschätzt.
Wendet man den Gradienten auf die Yamabe-Gleichung

$$\ddot{\varphi} + \Delta_{g_t}\varphi + \alpha\dot{\varphi} + a_n S_g \varphi = a_n S_{\bar{g}} \varphi^{p_n} \tag{4.16}$$

an und bildet anschließend das Skalarprodukt bezüglich g_t dieses Gradienten mit $\overline{\nabla}\dot{\varphi}$, dann ergibt sich nach Integration über Σ_t

$$\begin{aligned}\int_{\Sigma_t} & \left\langle \overline{\nabla}\ddot{\varphi}, \overline{\nabla}\dot{\varphi} \right\rangle_{g_t} + \Delta_{g_t}\varphi \cdot \Delta_{g_t}\dot{\varphi} + \alpha |\overline{\nabla}\dot{\varphi}|^2_{g_t} + \langle \overline{\nabla}\alpha, \overline{\nabla}\dot{\varphi}\rangle_{g_t}\dot{\varphi} + a_n S_g \left\langle \overline{\nabla}\varphi, \overline{\nabla}\dot{\varphi} \right\rangle_{g_t} \\ & + a_n \varphi \left\langle \overline{\nabla} S_g, \overline{\nabla}\dot{\varphi} \right\rangle_{g_t} - a_n p_n S_{\bar{g}} \varphi^{p_n - 1} \left\langle \overline{\nabla}\varphi, \overline{\nabla}\dot{\varphi} \right\rangle_{g_t} \, dA_t = 0.\end{aligned} \tag{4.17}$$

Zu dieser Gleichung sei das Energiefunktional $\mathcal{E}_2(\varphi, t)$ definiert durch

$$\mathcal{E}_2(\varphi, t) = \int_{\Sigma_t} \frac{1}{2}\left(|\overline{\nabla}\dot{\varphi}|^2_{g_t} + (\Delta_{g_t}\varphi)^2\right) - \frac{a_n p_n}{2} S_{\bar{g}} \varphi^{p_n - 1} |\overline{\nabla}\varphi|^2_{g_t} \, dA_t + \mathcal{E}_1(\varphi, t).$$

Zudem sei

$$e_2(t, x) := \frac{1}{2}\left(|\overline{\nabla}\dot{\varphi}|^2_{g_t} + (\Delta_{g_t}\varphi)^2\right) - \frac{a_n p_n}{2} S_{\bar{g}} \varphi^{p_n - 1} |\overline{\nabla}\varphi|^2_{g_t}.$$

Auch in diesem Fall ist das Energiefunktional $\mathcal{E}_2(\varphi, t)$ wegen $p_2 - 1 = 4$, $p_3 - 1 = 2$ und $S_{\bar{g}} \leq 0$ nichtnegativ.

Zunächst wird die Zeitableitung von $(\Delta_{g_t}\varphi)^2$ abgeschätzt. Sei hierzu

$$f_k := \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial t}\left(g_t^{ij}\Gamma^k_{ij}\right)$$

und sei F die Matrix mit den Einträgen $F_{kl} = f_k \cdot f_l$, $1 \leq k, l \leq n$. Sei zudem C_4 eine positive Konstante, so dass die Matrix $F - C_4 g_t^{-1}$ für alle $t \in I$ negativ-definit ist. Dann gilt

$$\left(\sum_{i,j,k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial t}\left(g_t^{ij}\Gamma^k_{ij}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial x^k}\right)^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} f_k \frac{\partial\varphi}{\partial x^k}\right)^2 = \sum_{k,l=1}^{n} F_{kl}\frac{\partial\varphi}{\partial x^k}\frac{\partial\varphi}{\partial x^l} \leq C_4 |\overline{\nabla}\varphi|^2_{g_t}.$$

Demzufolge gilt

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\Delta_{g_t}\varphi\right)^2 = \Delta_{g_t}\varphi \cdot \frac{\partial}{\partial t}\Delta_{g_t}\varphi \\
&= \Delta_{g_t}\varphi \cdot \left[-\frac{\partial}{\partial t}\sum_{i,j=1}^{n} g_t^{ij}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^i \partial x^j} - \Gamma_{ij}^k \frac{\partial \varphi}{\partial x^k}\right)\right] \\
&= \Delta_{g_t}\varphi \cdot \left[-\sum_{i,j=1}^{n} \dot{g}_t^{ij}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^i \partial x^j} + \frac{\partial}{\partial t}\left(\sum_{i,j,k=1}^{n} g_t^{ij}\Gamma_{ij}^k\right)\frac{\partial \varphi}{\partial x^k} + \Delta_{g_t}\dot{\varphi}\right] \\
&\leq \Delta_{g_t}\varphi \cdot \Delta_{g_t}\dot{\varphi} + \frac{1}{2}\left(\left(\Delta_{g_t}\varphi\right)^2 + \left(\sum_{i,j=1}^{n} \dot{g_t}^{ij}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^i \partial x^j}\right)^2\right) \\
&\quad + \frac{1}{2}\left(\left(\Delta_{g_t}\varphi\right)^2 + \left(\sum_{i,j,k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial t}\left(g_t^{ij}\Gamma_{ij}^k\right)\frac{\partial \varphi}{\partial x^k}\right)^2\right) \\
&= \Delta_{g_t}\varphi \cdot \Delta_{g_t}\dot{\varphi} + \left(\Delta_{g_t}\varphi\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\sum_{i,j=1}^{n} \dot{g_t}^{ij}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^i \partial x^j}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\sum_{i,j,k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial t}\left(g_t^{ij}\Gamma_{ij}^k\right)\frac{\partial \varphi}{\partial x^k}\right)^2 \\
&\leq \Delta_{g_t}\varphi \cdot \Delta_{g_t}\dot{\varphi} + \left(\Delta_{g_t}\varphi\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\sum_{i,j=1}^{n} \dot{g_t}^{ij}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^i \partial x^j}\right)^2 + \frac{1}{2}C_4|\overline{\nabla}\varphi|_{g_t}^2 .
\end{aligned}
$$

Für das Integral des dritten Summanden in der letzten Ungleichung gilt aufgrund elliptischer Regularität (siehe z.B. [7], Appendix Thm H. 27) und der Tatsache, dass auf einer kompakten Riemannschen Mannigfaltigkeit die H^2-Norm bezüglich verschiedener Metriken äquivalent ist

$$
\begin{aligned}
\int_{\Sigma_t}\left(\sum_{i,j=1}^{n} \dot{g_t}^{ij}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^i \partial x^j}\right)^2 dA_t &\leq \int_{\Sigma_t}\left(\sum_{i,j=1}^{n} \dot{g}_t^{ij}\right)^2 \cdot \left(\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^i \partial x^j}\right)^2 dA_t \\
&\leq \max_{(t,x)\in I\times\Sigma}\left(\sum_{i,j=1}^{n} \dot{g}_t^{ij}\right)^2 \int_{\Sigma_t} |\overline{\nabla}^2\varphi|_{g_{\mathrm{eukl}}}^2 \, dA_t \\
&\leq \max_{(t,x)\in I\times\Sigma}\left(\sum_{i,j=1}^{n} \dot{g}_t^{ij}\right)^2 \cdot C_5\|\varphi\|_{H^2(\Sigma_t)}^2 \\
&\leq \max_{(t,x)\in I\times\Sigma}\left(\sum_{i,j=1}^{n} \dot{g}_t^{ij}\right)^2 \cdot C_6\left(\|\Delta_{g_t}\varphi\|_{L^2(\Sigma_t)}^2 + \|\varphi\|_{L^2(\Sigma_t)}^2\right).
\end{aligned}
$$

Folglich existiert eine Konstante $C_7 > 0$, so dass

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\Sigma_t} \frac{\partial}{\partial t}\left(\Delta_{g_t}\varphi\right)^2\, dA_t \leq \int\limits_{\Sigma_t} \Delta_{g_t}\varphi \cdot \Delta_{g_t}\dot{\varphi}\, dA_t + C_7\mathcal{E}_2(\varphi,t)$$

gilt.

Sei erneut $C_1 > 0$ eine Konstante, so dass die Matrix $\left(\dot{g_t}^{-1} - C_1 g_t^{-1}\right)$ für alle $t \in I$ negativ-definit ist und $C_2 = \|\alpha\|_{L^\infty(I\times\Sigma)}$. Dann gilt für die Zeitableitung des Energiefunktionals $\mathcal{E}_2$ unter Verwendung der Gleichung (4.17):

$$\begin{aligned}
\dot{\mathcal{E}}_2(\varphi,t) \leq & \int\limits_{\Sigma_t} \left\langle \overline{\nabla}\dot{\varphi}, \overline{\nabla}\ddot{\varphi}\right\rangle_{g_t} + \frac{1}{2}C_1|\overline{\nabla}\dot{\varphi}|^2_{g_t} + \Delta_{g_t}\varphi\cdot\Delta_{g_t}\dot{\varphi} - a_n p_n S_{\bar{g}}\varphi^{p_n-1}\left\langle\overline{\nabla}\varphi,\overline{\nabla}\dot{\varphi}\right\rangle_{g_t} \\
& - \frac{a_n p_n}{2} S_{\bar{g}}\varphi^{p_n-1}\cdot\sum_{i=1}^{n}\dot{g}_t^{ij}\frac{\partial\varphi}{\partial x^i}\frac{\partial\varphi}{\partial x^j} - \frac{a_n p_n}{2}(p_n-1)S_{\bar{g}}\varphi^{p_n-2}|\overline{\nabla}\varphi|^2_{g_t}\cdot\dot{\varphi} + \alpha e_2\, dA_t \\
& + C_7\mathcal{E}_2(\varphi,t) + \dot{\mathcal{E}}_1(\varphi,t) \\
\leq & \int\limits_{\Sigma_t} -\alpha|\overline{\nabla}\dot{\varphi}|^2_{g_t} - \langle\overline{\nabla}\alpha,\overline{\nabla}\dot{\varphi}\rangle_{g_t}\dot{\varphi} - a_n S_g\left\langle\overline{\nabla}\varphi,\overline{\nabla}\dot{\varphi}\right\rangle_{g_t} - a_n\varphi\left\langle\overline{\nabla}S_g,\overline{\nabla}\dot{\varphi}\right\rangle_{g_t} \\
& - \frac{a_n p_n}{2} S_{\bar{g}} C_1\varphi^{p_n-1}\cdot|\overline{\nabla}\varphi|^2_{g_t} + C_8|\overline{\nabla}\varphi|^2_{g_t}\cdot\dot{\varphi}\cdot\varphi^{p_n-2}\, dA_t \\
& + (C_7 + C_2 + C_1)\mathcal{E}_2(\varphi,t) + \dot{\mathcal{E}}_1(\varphi,t) \\
\leq & \int\limits_{\Sigma_t} C_2|\overline{\nabla}\dot{\varphi}|^2_{g_t} + \frac{1}{2}\left(|\overline{\nabla}\alpha|^2_{g_t}\dot{\varphi}^2 + |\overline{\nabla}\dot{\varphi}|^2_{g_t}\right) + \frac{1}{2}a_n\|S_g\|_{L^\infty(I\times\Sigma)}\left(|\overline{\nabla}\varphi|^2_{g_t} + |\overline{\nabla}\dot{\varphi}|^2_{g_t}\right) \\
& + \frac{1}{2}a_n\left(|\overline{\nabla}S_g|^2_{g_t}\varphi^2 + |\overline{\nabla}\dot{\varphi}|^2_{g_t}\right) + C_8|\overline{\nabla}\varphi|^2_{g_t}\cdot\dot{\varphi}\cdot\varphi^{p_n-2}\, dA_t \\
& + (C_7 + C_2 + 2C_1)\mathcal{E}_2(\varphi,t) + \dot{\mathcal{E}}_1(\varphi,t) \\
\leq & C_9\cdot\mathcal{E}_2(\varphi,t) + \int\limits_{\Sigma_t} C_8|\overline{\nabla}\varphi|^2_{g_t}\cdot\dot{\varphi}\cdot\varphi^{p_n-2}\, dA_t,
\end{aligned}$$

wobei in der letzten Ungleichung die oben bereits hergeleitete Abschätzung für $\dot{\mathcal{E}}_1(\varphi,t)$ benutzt wurde.

Betrachtet man den letzten Summanden dieser Abschätzung für $p_2 = 5$, dann ergibt sich aufgrund der Hölder-Ungleichung, der Sobolev-Einbettung aus Lemma 4.15 und elliptischer Regularität

$$
\begin{aligned}
\||\overline{\nabla}\varphi|^2 \cdot \dot{\varphi} \cdot \varphi^3\|_{L^1(\Sigma_t)} &\leq \|\varphi^3\|_{L^6(\Sigma_t)} \|\dot{\varphi}\|_{L^2(\Sigma_t)} \||\overline{\nabla}\varphi|^2\|_{L^3(\Sigma_t)} \\
&\leq \|\varphi\|^3_{L^{18}(\Sigma_t)} \|\dot{\varphi}\|_{L^2(\Sigma_t)} \|\overline{\nabla}\varphi\|^2_{L^6(\Sigma_t)} \\
&\leq C_{10} \|\varphi\|^3_{H^1(\Sigma_t)} \|\dot{\varphi}\|_{L^2(\Sigma_t)} \|\overline{\nabla}\varphi\|^2_{H^1(\Sigma_t)} \\
&\leq C_{11} \mathcal{E}_1(\varphi, t)^4 \mathcal{E}_2(\varphi, t) \\
&\leq C_{12} \mathcal{E}_2(\varphi, t),
\end{aligned}
$$

wobei die bereits hergeleitete uniforme Schranke für $\mathcal{E}_1(\varphi, t)$ verwendet wurde. Für $p_3 = 3$ gilt analog

$$
\begin{aligned}
\|\varphi \cdot \dot{\varphi} \cdot |\overline{\nabla}\varphi|^2\|_{L^1(\Sigma_t)} &\leq \|\varphi\|_{L^6(\Sigma_t)} \|\dot{\varphi}\|_{L^2(\Sigma_t)} \||\overline{\nabla}\varphi|^2\|_{L^3(\Sigma_t)} \\
&\leq C_{13} \|\varphi\|_{H^1(\Sigma_t)} \|\dot{\varphi}\|_{L^2(\Sigma_t)} \|\overline{\nabla}\varphi\|^2_{L^6(\Sigma_t)} \\
&\leq C_{14} \mathcal{E}_1(\varphi, t)^2 \|\overline{\nabla}\varphi\|^2_{H^1(\Sigma_t)} \\
&\leq C_{15} \mathcal{E}_2(\varphi, t).
\end{aligned}
$$

Infolgedessen existiert sowohl im Fall $n = 2$ als auch $n = 3$ eine Konstante $C > 0$, so dass $\dot{\mathcal{E}}_2(\varphi, t) \leq C\mathcal{E}_2(\varphi, t)$ für alle $t \in [t_0, T^*)$ gilt. Unter Verwendung der Gronwallschen Ungleichung ergibt sich eine von t unabhängige Schranke für $\mathcal{E}_2(\varphi, t)$:

$$
\mathcal{E}_2(\varphi, t) \leq e^{C(T^* - t_0)} \cdot \mathcal{E}_2(\varphi, t_0).
$$

Infolgedessen gilt für $n = 2, 3$ aufgrund des Sobolevschen Einbettungssatzes für alle $t \in [t_0, T^*)$

$$
\|\varphi\|^2_{L^\infty(\Sigma_t)} \leq \tilde{C}_1 \|\varphi\|^2_{H^2(\Sigma_t)} \leq \tilde{C}_2 \mathcal{E}_2(\varphi, t) \leq \tilde{C}
$$

mit einer von t unabhängigen Konstanten $\tilde{C}$.

Mithilfe der Energieabschätzung aus Theorem 2.11 lässt sich hiermit eine uniforme Schranke für alle H^k-Normen herleiten. Sei $k \geq 3$ und sei die H^k-Energie definiert durch $\mathcal{E}_k(\varphi, t) := \|\varphi\|^2_{H^k(\Sigma_t)} + \|\dot{\varphi}\|^2_{H^{k-1}(\Sigma_t)}$. Dann gilt aufgrund der Energieabschätzung (2.2) und Lemma 4.11

$$
\begin{aligned}
\dot{\mathcal{E}}_k(\varphi, t) &\leq B_1 \mathcal{E}_k(\varphi, t) + a_n S_{\bar{g}} \|\varphi^{p_n}\|^2_{H_{k-1}(\Sigma_t)} \\
&\leq B_2 \left(\mathcal{E}_k(\varphi, t) + \|\varphi\|^{2(p_{n-1})}_{L^\infty(\Sigma_t)} \|\varphi\|^2_{H^{k-1}(\Sigma_t)} \right) \\
&\leq B_3 \mathcal{E}_k(\varphi, t).
\end{aligned}
$$

Dies impliziert eine in t uniforme Schranke für alle $t \in [t_0, T^*)$ und für alle $k \geq 3$:

$$
\mathcal{E}_k(\varphi, t) \leq e^{B_3(T^* - t_0)} \mathcal{E}_k(\varphi, t_0).
$$

Da $H^{k+2}(\Sigma_t)$ für alle $t \in I$ kompakt in $C^k(\Sigma_t)$ eingebettet ist, lässt sich φ auf $[t_0, T^*]$ glatt fortsetzen. Nun kann man das lokale Existenztheorem 4.13 für die Anfangswerte $\varphi(T^*, x)$ und $\dot{\varphi}(T^*, x)$ verwenden und erhält eine glatte Lösung für alle $t \in [t_0, T^* + \varepsilon)$, was ein Widerspruch zur Maximalität von T^* darstellt. Folglich existiert eine glatte Lösung φ des Cauchy-Problems (4.15) für alle $t \geq t_0$ und durch Rückwärtslösen von (4.15) folgt die Existenz einer glatten Lösung für alle $t \in \mathbb{R}$. $\square$

4.6 Positivität der Lösung

In Abschnitt 4.5 wurde gezeigt, dass das Cauchy-Problem (4.15) eine zeitglobale, glatte Lösung für glatte Anfangsdaten im Fall $n = 2$ und $n = 3$ besitzt. Im Folgenden sei $n = 3$ angenommen. Das Cauchy-Problem lautet dann

$$\left.\begin{aligned} \ddot{\varphi} + \Delta_{g_t}\varphi + \alpha\dot{\varphi} + \tfrac{1}{6}S_g\varphi &= \tfrac{1}{6}S_{\bar{g}}\varphi^3, \\ \varphi|_{t=t_0} &= \varphi_0, \\ \dot{\varphi}|_{t=t_0} &= \varphi_1. \end{aligned}\right\} \tag{4.18}$$

Im nächsten Theorem wird gezeigt, unter welchen Bedingungen an die Skalarkrümmung die Lösung für alle Zeiten in einem festen vorgegebenen kompakten Zeitintervall positiv ist.

Theorem 4.17. *Sei $(M, g) = (\mathbb{R} \times \Sigma, -dt^2 \oplus g_t)$ eine 4-dimensionale global-hyperbolische Lorentz-Mannigfaltigkeit und sei Σ geschlossen. Sei zudem $S_{\bar{g}} \leq 0$.*
Dann existieren für jedes feste Zeitintervall $I := [t_0, t_1]$ mit $-\infty < t_0 < t_1 < \infty$, auf der die Skalarkrümmung der Abschätzung

$$\int_{t_0}^{t} \frac{1}{\tilde{C}_s} e^{\int_s^t \tilde{C}_r dr} \|S_g(s)\|^2_{H^1(\Sigma_s)}\, ds \leq \frac{72\varepsilon}{C_S^2} \tag{4.19}$$

für ein $\varepsilon \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ und für alle $t \in I$ genügt, kleine Anfangsdaten $\varphi_0 \in C^\infty(\Sigma_{t_0}, \mathbb{R}_+)$, $\varphi_1 \in C^\infty(\Sigma_{t_0}, \mathbb{R})$, so dass die Lösung des Cauchy-Problems (4.18) *positiv auf $I \times \Sigma$ ist. Die Konstante $\tilde{C}_t$ wird in Bemerkung 4.18 genauer erläutert und C_S bezeichnet die Sobolev-Konstante aus* (4.20)*.*

Beweis. Sei $I = [t_0, t_1]$ ein beliebiges kompaktes Zeitintervall. Sei $\varphi \in C^\infty(I \times \Sigma)$ die Lösung des Cauchy-Problems (4.18). Für eine Konstante $A > 0$ sei $w := \varphi - A$. Eine zu $\|\cdot\|_{H^2(\Sigma_t)}$ äquivalente Norm ist

$$\|\varphi\|_{\tilde{H}^2(\Sigma_t)} := \left(\int_{\Sigma_t} (\Delta_{g_t}\varphi)^2 + |\overline{\nabla}\varphi|^2_{g_t} + \varphi^2\, dA_t \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Sei $C_S := \max_{t \in I} C_S(t)$ das Maximum der Sobolev-Konstanten aus der Sobolev-Ungleichung

$$\|\varphi - A\|_{C^0(\Sigma_t)} = \|w\|_{C^0(\Sigma_t)} \leq C_S(t)\|w\|_{\tilde{H}^2(\Sigma_t)}. \tag{4.20}$$

Das Ziel ist es zu zeigen, dass die Konstante A so gewählt werden kann, dass

$$\|w\|_{\tilde{H}^2(\Sigma_t)} < \frac{A}{C_S}$$

für alle $t \in I$ gilt. Dies impliziert

$$\|\varphi - A\|_{C^0(I \times \Sigma)} < A$$

und somit $\varphi > 0$ für alle $t \in I$. Unter Verwendung der Gleichung aus (4.18) gilt

$$\begin{aligned} 0 &= \Box_{g_t}(w+A) - \frac{1}{6}S_{\bar{g}}(w+A)^3 + \frac{1}{6}S_g(w+A) \\ &= \Box_{g_t} w - \frac{1}{6}S_{\bar{g}}w^3 - \frac{1}{2}S_{\bar{g}}Aw^2 - \frac{1}{2}S_{\bar{g}}A^2 w + \frac{1}{6}S_g w - \frac{1}{6}S_{\bar{g}}A^3 + \frac{1}{6}S_g A. \end{aligned}$$

Nach Theorem 4.16 ist diese Gleichung für alle $t \in I$ erfüllt. Dann ist w die Lösung des Cauchy-Problems

$$\left.\begin{aligned} \ddot{w} + \Delta_{g_t} w + \alpha\dot{w} - \tfrac{1}{6}S_{\bar{g}}w^3 - \tfrac{1}{2}S_{\bar{g}}Aw^2 - \tfrac{1}{2}S_{\bar{g}}A^2 w + \tfrac{1}{6}S_g w &= \tfrac{1}{6}S_{\bar{g}}A^3 - \tfrac{1}{6}S_g A, \\ w|_{t=t_0} &= w_0 := \varphi_0 - A, \\ \dot{w}|_{t=t_0} &= w_1 := \varphi_1, \end{aligned}\right\}, \tag{4.21}$$

wobei $\varphi_0 > 0$ genügend klein sei, so dass $\|w_0\|_{C^0(\Sigma_{t_0})} < A$ erfüllt ist.

Bevor die H^2-Energie abgeschätzt werden kann, wird zuvor die H^1-Energie untersucht. Sei $\mathcal{E}_1(w,t)$ das Energiefunktional, das durch

$$\mathcal{E}_1(w,t) = \int_{\Sigma_t} \frac{1}{2}\dot{w}^2 + \frac{1}{2}|\overline{\nabla} w|^2_{g_t} + \frac{1}{2}w^2 - \frac{1}{24}S_{\bar{g}}w^4 \, dA_t \tag{4.22}$$

definiert ist und sei

$$e_1(t,x) = \frac{1}{2}\dot{w}^2 + \frac{1}{2}|\overline{\nabla} w|^2_{g_t} + \frac{1}{2}w^2 - \frac{1}{24}S_{\bar{g}}w^4.$$

Für $t \in I$ sei $C_1(t) := \min\big\{B(t) \geq 0 \,|\, \big(\dot{g}_t^{-1} - B(t)g_t^{-1}\big) \text{ ist negativ semidefinit}\big\}$. Dann gilt für alle $t \in I$ unter Verwendung von (4.21)

$$\begin{aligned}
\dot{\mathcal{E}}_1(w,t) &= \int\limits_{\Sigma_t} \dot{w}\ddot{w} + \left\langle \overline{\nabla} w, \overline{\nabla} \dot{w} \right\rangle_{g_t} + \dot{w}w - \frac{1}{6} S_{\bar{g}} w^3 \dot{w} + \sum_{i,j=1}^{3} \frac{1}{2} \dot{g}_t{}^{ij} \frac{\partial w}{\partial x^i} \frac{\partial w}{\partial x^j} + \alpha e_1(t,x)\, dA_t \\
&\le \int\limits_{\Sigma_t} \dot{w} \left(\ddot{w} + \Delta_{g_t} w - \frac{1}{6} S_{\bar{g}} w^3 \right) + \frac{1}{2} \left(w^2 + \dot{w}^2 \right) + \frac{1}{2} C_1(t) |\overline{\nabla} w|^2 + \alpha e_1(t,x)\, dA_t \\
&= \int\limits_{\Sigma_t} \dot{w} \left(-\alpha \dot{w} + \frac{1}{2} S_{\bar{g}} A w^2 + \frac{1}{2} S_{\bar{g}} A^2 w - \frac{1}{6} S_g w + \frac{1}{6} S_{\bar{g}} A^3 - \frac{1}{6} S_g A \right) \\
&\quad + \frac{1}{2} \left(w^2 + \dot{w}^2 \right) + \frac{1}{2} C_1(t) |\overline{\nabla} w|^2 + \alpha e_1(t,x)\, dA_t.
\end{aligned}$$

Nun werden die einzelnen Summanden abgeschätzt. Im Unterschied zum Beweis von Theorem 4.16 werden die Konstanten aus den Abschätzungen möglichst klein gewählt. Es gilt

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\Sigma_t} -\alpha \dot{w}^2 + \alpha \cdot e_1(t,x)\, dA_t &= \int\limits_{\Sigma_t} \alpha \left(-\frac{1}{2} \dot{w}^2 + \frac{1}{2} |\overline{\nabla} w|^2_{g_t} + \frac{1}{2} w^2 - \frac{1}{24} S_{\bar{g}} w^4 \right) dA_t \\
&\le \|\alpha\|_{L^\infty(\Sigma_t)} \mathcal{E}_1(w,t)
\end{aligned}$$

und

$$\int\limits_{\Sigma_t} \frac{1}{6} S_g w \dot{w}\, dA_t \le \int\limits_{\Sigma_t} \frac{1}{12} \|S_g\|_{L^\infty(\Sigma_t)} \left(\dot{w}^2 + w^2 \right) dA_t \le \frac{1}{6} \|S_g\|_{L^\infty(\Sigma_t)} \mathcal{E}_1(w,t). \tag{4.23}$$

Sei $\tilde{C}_t > 0$ eine nur von t abhängige Funktion, die später genauer bestimmt wird und seien $\varepsilon_1, ..., \varepsilon_5 \in (0,1)$ Konstanten mit $\sum_{i=1}^{5} \varepsilon_i < 1$. Sei A so gewählt, dass

$$A^2 \le \frac{\tilde{C}_t^2 \varepsilon_1^2}{3|S_{\bar{g}}|}.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\Sigma_t} \frac{1}{2} S_{\bar{g}} A w^2 \cdot \dot{w}\, dA_t &\le \int\limits_{\Sigma_t} \frac{1}{4} \left(2\varepsilon_1 \tilde{C}_t \dot{w}^2 + \frac{1}{2\varepsilon_1 \tilde{C}_t} S_{\bar{g}}^2 A^2 w^4 \right) dA_t \\
&\le \int\limits_{\Sigma_t} \frac{1}{2} \varepsilon_1 \tilde{C}_t \dot{w}^2 + \frac{1}{24} \varepsilon_1 \tilde{C}_t |S_{\bar{g}}| w^4\, dA_t \\
&\le \varepsilon_1 \tilde{C}_t \mathcal{E}_1(w,t).
\end{aligned}$$

Wählt man nun A so, dass zusätzlich

$$A^2 \leq \frac{2\varepsilon_2 \tilde{C}_t}{|S_{\bar{g}}|}$$

gilt, dann folgt

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\Sigma_t} \frac{1}{2} S_{\bar{g}} A^2 w \cdot \dot{w} \, dA_t &\leq \int\limits_{\Sigma_t} \frac{1}{4} \left(2\varepsilon_2 \tilde{C}_t \dot{w}^2 + \frac{1}{2\varepsilon_2 \tilde{C}_t} S_{\bar{g}}^2 A^4 w^2 \right) dA_t \\
&\leq \varepsilon_2 \tilde{C}_t \mathcal{E}_1(w,t).
\end{aligned}$$

Des Weiteren gilt

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\Sigma_t} \frac{1}{6} S_{\bar{g}} A^3 \cdot \dot{w} \, dA_t &\leq \frac{1}{2} \int\limits_{\Sigma_t} \frac{S_{\bar{g}}^2}{36\varepsilon_3 \tilde{C}_t} A^6 + \tilde{C}_t \varepsilon_3 \dot{w}^2 \, dA_t \\
&\leq \varepsilon_3 \tilde{C}_t \mathcal{E}_1(t) + \frac{S_{\bar{g}}^2}{72\varepsilon_3 \tilde{C}_t} A^6 \mathrm{vol}(\Sigma_t) \qquad (4.24)
\end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\Sigma_t} \frac{1}{6} S_g A \cdot \dot{w} \, dA_t &\leq \frac{1}{2} \int\limits_{\Sigma_t} \frac{S_g^2}{36\varepsilon_4 \tilde{C}_t} A^2 + \tilde{C}_t \varepsilon_4 \dot{w}^2 \, dA_t \\
&\leq \varepsilon_4 \tilde{C}_t \mathcal{E}_1(t) + \int\limits_{\Sigma_t} \frac{S_g^2}{72\varepsilon_4 \tilde{C}_t} A^2 \, dA_t.
\end{aligned}$$

Dies impliziert

$$\begin{aligned}
\dot{\mathcal{E}}_1(w,t) \leq &\left(\|\alpha\|_{L^\infty(\Sigma_t)} + \frac{1}{6} \|S_g\|_{L^\infty(\Sigma_t)} + C_1(t) + 1 + \tilde{C}_t \sum_{i=1}^{4} \varepsilon_i \right) \mathcal{E}_1(w,t) \\
&+ \frac{S_{\bar{g}}^2}{72\varepsilon_3 \tilde{C}_t} A^6 \mathrm{vol}(\Sigma_t) + \frac{1}{72\varepsilon_4 \tilde{C}_t} A^2 \left\| S_g \right\|_{L^2(\Sigma_t)}^2 .
\end{aligned}$$

Sei $\varepsilon := \sum_{i=1}^{5} \varepsilon_i < 1$. Wählt man nun $\tilde{C}_t$, so dass

$$\tilde{C}_t \geq \frac{1}{\varepsilon_5} \left(\|\alpha\|_{L^\infty(\Sigma_t)} + \frac{1}{6} \|S_g\|_{L^\infty(\Sigma_t)} + C_1(t) + 1 \right) \qquad (4.25)$$

gilt, dann folgt

$$\dot{\mathcal{E}}_1(w,t) \leq \varepsilon \tilde{C}_t \mathcal{E}_1(w,t) + \frac{S_{\bar{g}}^2}{72\varepsilon_3 \tilde{C}_t} A^6 \mathrm{vol}(\Sigma_t) + \frac{1}{72\varepsilon_4 \tilde{C}_t} A^2 \left\| S_g \right\|^2_{L^2(\Sigma_t)} . \tag{4.26}$$

Da dies für alle t in einem kompakten Intervall t gilt, ist $\tilde{C}_t$ für alle $t \in I$ beschränkt. Für spätere Rechnungen ist eine Abschätzung der Form $\mathcal{E}_1(w,t) \leq CA$ für eine Konstante $C > 0$ erforderlich. Aus der Gronwallschen Ungleichung folgt

$$\mathcal{E}_1(w,t) \leq e^{\varepsilon \int_{t_0}^{t} \tilde{C}_r dr} \left(\mathcal{E}_1(w,t_0) + \int_{t_0}^{t} \frac{S_{\bar{g}}^2}{72\varepsilon_3 \tilde{C}_s} A^6 \mathrm{vol}(\Sigma_s) + \frac{1}{72\varepsilon_4 \tilde{C}_s} A^2 \|S_g(s)\|^2_{L^2(\Sigma_s)} \, ds \right) .$$

Folglich existiert eine hinreichend große Konstante $C > 0$, so dass $\mathcal{E}_1(w,t) \leq CA$ für alle $t \in I$ erfüllt ist.

Da die Sobolev-Ungleichung (4.20) benutzt werden soll, wird noch die H^2-Energie benötigt. Wendet man den Gradienten auf die Gleichung aus (4.21) an und bildet anschließend das Skalarprodukt bezüglich g_t dieses Gradienten mit $\overline{\nabla} \dot{w}$, dann ergibt sich nach Integration über Σ_t die Gleichung

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma_t} & \langle \overline{\nabla} \ddot{w}, \overline{\nabla} \dot{w} \rangle_{g_t} + \Delta_{g_t} w \cdot \Delta_{g_t} \dot{w} + \dot{w} \langle \overline{\nabla} \alpha, \overline{\nabla} \dot{w} \rangle_{g_t} + \alpha |\overline{\nabla} \dot{w}|^2_{g_t} + \frac{1}{6} w \langle \overline{\nabla} S_g, \overline{\nabla} \dot{w} \rangle_{g_t} \\ & + \frac{1}{6} A \langle \overline{\nabla} S_g, \overline{\nabla} \dot{w} \rangle_{g_t} + \left(-\frac{1}{2} S_{\bar{g}} w^2 - S_{\bar{g}} A w - \frac{1}{2} A^2 S_{\bar{g}} + \frac{1}{6} S_g \right) \langle \overline{\nabla} w, \overline{\nabla} \dot{w} \rangle_{g_t} \, dA_t = 0. \end{aligned} \tag{4.27}$$

Die H^2-Energie ist definiert durch

$$\mathcal{E}_2(w,t) := \int_{\Sigma_t} \frac{1}{2} \left(\Delta_{g_t} w \right)^2 + \frac{1}{2} |\overline{\nabla} \dot{w}|^2_{g_t} - \frac{1}{4} S_{\bar{g}} w^2 |\overline{\nabla} w|^2_{g_t} \, dA_t + \mathcal{E}_1(w,t) \tag{4.28}$$

und $e_2(t,x)$ ist gegeben durch

$$e_2(t,x) := \frac{1}{2} \left(\Delta_{g_t} w \right)^2 + \frac{1}{2} |\overline{\nabla} \dot{w}|^2_{g_t} - \frac{1}{4} S_{\bar{g}} w^2 |\overline{\nabla} w|^2_{g_t} + e_1(t,x).$$

Seien $\varepsilon_6, ..., \varepsilon_{10} \in (0,1)$, so dass $\sum_{i=6}^{10} \varepsilon_i + \varepsilon_4 + 3\varepsilon_5 + \varepsilon = 1$. Bevor die Energie nach t abgeleitet wird, berechnet man zuerst ähnlich wie im Beweis von Theorem 4.16

$$\frac{1}{2} \int_{\Sigma_t} \frac{\partial}{\partial t} \left(\Delta_{g_t} w \right)^2 \, dA_t = \int_{\Sigma_t} \Delta_{g_t} w \cdot \frac{\partial}{\partial t} \Delta_{g_t} w \, dA_t$$

$$
\begin{aligned}
&= \int\limits_{\Sigma_t} \Delta_{g_t} w \cdot \left[-\sum_{i,j=1}^{3} \dot{g}_t^{ij} \frac{\partial^2 w}{\partial x^i \partial x^j} + \frac{\partial}{\partial t} \left(\sum_{i,j,k=1}^{3} g_t^{ij} \Gamma_{ij}^k \right) \frac{\partial w}{\partial x^k} + \Delta_{g_t} \dot{w} \right] dA_t \\
&\leq \int\limits_{\Sigma_t} \Delta_{g_t} w \cdot \Delta_{g_t} \dot{w} + \frac{1}{2} \left(\frac{\varepsilon_6 \tilde{C}_t}{4} \left(\Delta_{g_t} w\right)^2 + \frac{4}{\varepsilon_6 \tilde{C}_t} \left(\sum_{i,j=1}^{3} \dot{g}_t{}^{ij} \frac{\partial^2 w}{\partial x^i \partial x^j} \right)^2 \right) \\
&\quad + \frac{1}{2} \left(\frac{\varepsilon_6 \tilde{C}_t}{4} \left(\Delta_{g_t} w\right)^2 + \frac{4}{\varepsilon_6 \tilde{C}_t} \left(\sum_{i,j,k=1}^{3} \frac{\partial}{\partial t} \left(g_t^{ij} \Gamma_{ij}^k \right) \frac{\partial w}{\partial x^k} \right)^2 \right) dA_t \\
&\leq \int\limits_{\Sigma_t} \Delta_{g_t} w \cdot \Delta_{g_t} \dot{w} + \frac{1}{2} \varepsilon_6 \tilde{C}_t \mathcal{E}_2(w,t) + \frac{2}{\varepsilon_6 \tilde{C}_t} \left(\sum_{i,j=1}^{3} \dot{g}_t{}^{ij} \frac{\partial^2 w}{\partial x^i \partial x^j} \right)^2 \\
&\quad + \frac{2}{\varepsilon_6 \tilde{C}_t} \left(\sum_{i,j,k=1}^{3} \frac{\partial}{\partial t} \left(g_t^{ij} \Gamma_{ij}^k \right) \frac{\partial w}{\partial x^k} \right)^2 dA_t.
\end{aligned}
$$

Sei F_t die Matrix mit den Einträgen $F_{kl}(t) = f_k(t) \cdot f_l(t)$ mit $f_k(t) := \sum_{i,j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial t} \left(g_t^{ij} \Gamma_{ij}^k \right)$ und sei

$$
C_2(t) := \min \left\{ B(t) \geq 0 \,\middle|\, \left(F_t - B(t) g_t^{-1} \right) \text{ ist negativ semidefinit} \right\}.
$$

Sei $C_3(t) := B_1(t) \cdot B_2(t)$ die kleinste von t abhängige Funktion, für die

$$
\int\limits_{\Sigma_t} |\overline{\nabla}^2 w|_{g_{\text{eukl}}}^2 \, dA_t \leq B_1(t) \|\varphi\|_{H^2(\Sigma_t)}^2 \leq B_1(t) \cdot B_2(t) \left(\|\Delta_{g_t} w\|_{L^2(\Sigma_t)}^2 + \|w\|_{L^2(\Sigma_t)}^2 \right)
$$

gilt. Dann folgt für $C_4(t) = \|(\sum_{i,j=1}^{3} \dot{g}_t^{ij})^2\|_{L^\infty(\Sigma_t)}$

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2} \int\limits_{\Sigma_t} \frac{\partial}{\partial t} \left(\Delta_{g_t} w\right)^2 dA_t &\leq \int\limits_{\Sigma_t} \Delta_{g_t} w \cdot \Delta_{g_t} \dot{w} \, dA_t + \frac{1}{2} \varepsilon_6 \tilde{C}_t \mathcal{E}_2(w,t) \\
&\quad + \frac{2}{\varepsilon_6 \tilde{C}_t} \int\limits_{\Sigma_t} C_4(t) \cdot C_3(t) \left(\left(\Delta_{g_t} w\right)^2 + w^2 \right) + C_2(t) |\overline{\nabla} w|_{g_t}^2 \, dA_t.
\end{aligned}
$$

Wählt man $\tilde{C}_t$, so dass

$$
\tilde{C}_t \geq \frac{2\sqrt{2}}{\varepsilon_6} \sqrt{\max\left(C_2(t), C_3(t) \cdot C_4(t)\right)}
$$

erfüllt ist, dann folgt

$$\frac{1}{2}\int_{\Sigma_t} \frac{\partial}{\partial t} (\Delta_{g_t} w)^2 \, dA_t \leq \int_{\Sigma_t} \Delta_{g_t} w \cdot \Delta_{g_t} \dot{w} \, dA_t + \varepsilon_6 \tilde{C}_t \mathcal{E}_2(w,t).$$

Unter Verwendung der Gleichung (4.27) folgt

$$\begin{aligned}
\dot{\mathcal{E}}_2(w,t) \leq & \int_{\Sigma_t} \Delta_{g_t} w \cdot \Delta_{g_t} \dot{w} + \langle \overline{\nabla} \dot{w}, \overline{\nabla} \ddot{w} \rangle_{g_t} + \frac{1}{2} C_1(t) |\overline{\nabla} \dot{w}|^2_{g_t} - \frac{1}{2} S_{\bar{g}} w \dot{w} |\overline{\nabla} w|^2_{g_t} \\
& - \frac{1}{2} S_{\bar{g}} w^2 \left(\langle \overline{\nabla} w, \overline{\nabla} \dot{w} \rangle_{g_t} + \frac{1}{2} C_1(t) |\overline{\nabla} w|^2_{g_t} \right) + \alpha e_2 \, dA_t + \varepsilon_6 \tilde{C}_t \mathcal{E}_2(w,t) + \dot{\mathcal{E}}_1(w,t) \\
= & \int_{\Sigma_t} S_{\bar{g}} A w \langle \overline{\nabla} w, \overline{\nabla} \dot{w} \rangle_{g_t} + \left(\frac{1}{2} A^2 S_{\bar{g}} - \frac{1}{6} S_g \right) \langle \overline{\nabla} w, \overline{\nabla} \dot{w} \rangle_{g_t} - \frac{1}{6} A \langle \overline{\nabla} S_g, \overline{\nabla} \dot{w} \rangle_{g_t} \\
& - \frac{1}{6} w \langle \overline{\nabla} S_g, \overline{\nabla} \dot{w} \rangle_{g_t} - \dot{w} \langle \overline{\nabla} \alpha, \overline{\nabla} \dot{w} \rangle_{g_t} - \alpha |\overline{\nabla} \dot{w}|^2_{g_t} - \frac{1}{2} S_{\bar{g}} w \dot{w} |\overline{\nabla} w|^2_{g_t} \\
& + \frac{1}{2} C_1(t) |\overline{\nabla} \dot{w}|^2_{g_t} - \frac{1}{4} S_{\bar{g}} w^2 C_1(t) |\overline{\nabla} w|^2_{g_t} + \alpha e_2 \, dA_t + \varepsilon_6 \tilde{C}_t \mathcal{E}_2(w,t) + \dot{\mathcal{E}}_1(w,t).
\end{aligned}$$

Im Folgenden werden einige der einzelnen Summanden abgeschätzt. Wählt man A, so dass

$$A \leq \frac{\varepsilon_7 \tilde{C}_t}{\sqrt{2|S_{\bar{g}}|}}$$

gilt, dann folgt

$$\begin{aligned}
\int_{\Sigma_t} |S_{\bar{g}}| A w \langle \overline{\nabla} w, \overline{\nabla} \dot{w} \rangle_{g_t} \, dA_t &\leq \frac{1}{2} \int_{\Sigma_t} \varepsilon_7 \tilde{C}_t |\overline{\nabla} \dot{w}|^2_{g_t} + \frac{1}{\varepsilon_7 \tilde{C}_t} A^2 S_{\bar{g}}^2 w^2 |\overline{\nabla} w|^2_{g_t} \, dA_t \\
&\leq \varepsilon_7 \tilde{C}_t \int_{\Sigma_t} \frac{1}{2} |\overline{\nabla} \dot{w}|^2_{g_t} + \frac{1}{4} |S_{\bar{g}}| w^2 |\overline{\nabla} w|^2_{g_t} \, dA_t. \\
&\leq \varepsilon_7 \tilde{C}_t \mathcal{E}_2(w,t).
\end{aligned}$$

Des Weiteren gilt für $A \leq \sqrt{\frac{2}{|S_{\bar{g}}|}}$

$$\begin{aligned}
\int_{\Sigma_t} \left(\frac{1}{2} A^2 S_{\bar{g}} - \frac{1}{6} S_g \right) \langle \overline{\nabla} w, \overline{\nabla} \dot{w} \rangle_{g_t} dA_t &\leq \left(1 + \frac{1}{6} \|S_g\|_{L^\infty(\Sigma_t)} \right) \int_{\Sigma_t} \frac{1}{2} \left(|\overline{\nabla} w|^2_{g_t} + |\overline{\nabla} \dot{w}|^2_{g_t} \right) dA_t \\
&\leq \varepsilon_5 \tilde{C}_t \mathcal{E}_2(w,t),
\end{aligned}$$

wobei in der letzten Ungleichung (4.25) benutzt wurde. Für den nächsten Summanden gilt

$$\begin{aligned}\int\limits_{\Sigma_t} \frac{1}{6} A\langle \overline{\nabla} S_g, \overline{\nabla}\dot{w}\rangle \, dA_t &\leq \frac{1}{2}\int\limits_{\Sigma_t} \frac{A^2}{36\varepsilon_4 \tilde{C}_t} |\overline{\nabla} S_g|^2_{g_t} + \varepsilon_4 \tilde{C}_t |\overline{\nabla}\dot{w}|^2_{g_t} \, dA_t \\ &\leq \int\limits_{\Sigma_t} \frac{A^2}{72\varepsilon_4 \tilde{C}_t} |\overline{\nabla} S_g|^2_{g_t} \, dA_t + \varepsilon_4 \tilde{C}_t \mathcal{E}_2(w,t).\end{aligned}$$

Wählt man $\tilde{C}_t$ so, dass

$$\tilde{C}_t \geq \frac{1}{6\varepsilon_8}\sqrt{\| |\overline{\nabla} S_g|^2_{g_t} \|_{L^\infty(\Sigma_t)}}$$

erfüllt ist, dann folgt

$$\begin{aligned}\int\limits_{\Sigma_t} \frac{1}{6} w\langle \overline{\nabla} S_g, \overline{\nabla}\dot{w}\rangle_{g_t} \, dA_t &\leq \frac{1}{2}\int\limits_{\Sigma_t} \varepsilon_8 \tilde{C}_t |\overline{\nabla}\dot{w}|^2_{g_t} + \frac{1}{36\varepsilon_8 \tilde{C}_t} |\overline{\nabla} S_g|^2_{g_t} w^2 \, dA_t \\ &\leq \varepsilon_8 \tilde{C}_t \int\limits_{\Sigma_t} \frac{1}{2}|\overline{\nabla}\dot{w}|^2_{g_t} + \frac{1}{2} w^2 \, dA_t \leq \varepsilon_8 \tilde{C}_t \mathcal{E}_2(w,t).\end{aligned}$$

Weiterhin gilt für

$$\tilde{C}_t \geq \frac{1}{\varepsilon_9}\sqrt{\| |\overline{\nabla}\alpha|^2_{g_t} \|_{L^\infty(\Sigma_t)}}$$

unter Verwendung von (4.25) die Abschätzung

$$\begin{aligned}\int\limits_{\Sigma_t} -\dot{w}\langle \overline{\nabla}\alpha, \overline{\nabla}\dot{w}\rangle_{g_t} - \alpha|\overline{\nabla}\dot{w}|^2_{g_t} + \alpha e_2(t,x) \, dA_t &\leq \frac{1}{2}\int\limits_{\Sigma_t} \frac{1}{\varepsilon_9 \tilde{C}_t} |\overline{\nabla}\alpha|^2_{g_t} \dot{w}^2 + \varepsilon_9 \tilde{C}_t |\overline{\nabla}\dot{w}|^2_{g_t} \, dA_t \\ &\quad + \|\alpha\|_{L^\infty(\Sigma_t)} \mathcal{E}_2(w,t) \\ &\leq (\varepsilon_9 + \varepsilon_5)\tilde{C}_t \mathcal{E}_2(t).\end{aligned}$$

Zudem gilt wegen (4.25)

$$\int\limits_{\Sigma_t} \frac{1}{2} C_1(t)|\overline{\nabla}\dot{w}|^2_{g_t} - \frac{1}{4} S_{\bar{g}} w^2 C_1(t)|\overline{\nabla} w|^2_{g_t} \, dA_t \leq C_1(t)\mathcal{E}_2(w,t) \leq \varepsilon_5 \tilde{C}_t \mathcal{E}_2(t).$$

Sei $C_5(t) > 0$ eine von t abhängige Funktion, für die

$$\|w\|_{L^6(\Sigma_t)} \leq C_5(t)\|w\|_{H^1(\Sigma_t)} \tag{4.29}$$

gilt. Dann folgt

$$\begin{aligned}\int\limits_{\Sigma_t} \frac{1}{2}|S_{\bar g}|w\dot w|\overline{\nabla}w|^2_{g_t}\,dA_t &\le \frac{1}{2}|S_{\bar g}|\|w\|_{L^6(\Sigma_t)}\|\dot w\|_{L^2(\Sigma_t)}\||\overline{\nabla}w|^2\|_{L^3(\Sigma_t)}\\ &\le \frac{1}{2}|S_{\bar g}|C_5(t)\|w\|_{H^1(\Sigma_t)}\|\dot w\|_{L^2(\Sigma_t)}\|\overline{\nabla}w\|^2_{L^6(\Sigma_t)}\\ &\le |S_{\bar g}|C_5(t)^2\mathcal{E}_1(w,t)\|\overline{\nabla}w\|^2_{H^1(\Sigma_t)}\\ &\le 2|S_{\bar g}|C_5(t)^2B_2(t)\mathcal{E}_1(w,t)\mathcal{E}_2(w,t).\end{aligned}$$

Da bereits gezeigt wurde, dass eine hinreichend große Konstante $C > 0$ existiert, so dass $\mathcal{E}_1(w,t) \le CA$ gilt, folgt für $A \le \frac{\varepsilon_{10}\tilde C_t}{2C|S_{\bar g}|C_5(t)^2B_2(t)}$

$$\int\limits_{\Sigma_t} \frac{1}{2}|S_{\bar g}|w\dot w|\overline{\nabla}w|^2\,dA_t \le \varepsilon_{10}\tilde C_t\mathcal{E}_2(w,t).$$

Folglich ergibt sich insgesamt unter Verwendung von (4.26) für $h(t) := \frac{S^2_{\bar g}\mathrm{vol}(\Sigma_t)}{72\varepsilon_3\tilde C_t}$, dass

$$\begin{aligned}\dot{\mathcal{E}}_2(w,t) &\le \left(\varepsilon_4 + 3\varepsilon_5 + \sum_{i=6}^{10}\varepsilon_i\right)\tilde C_t\mathcal{E}_2(w,t) + \int\limits_{\Sigma_t}\frac{A^2}{72\varepsilon_4\tilde C_t}|\overline{\nabla}S_g|^2_{g_t}\,dA_t + \dot{\mathcal{E}}_1(w,t)\\ &\le \left(\varepsilon_4 + 3\varepsilon_5 + \sum_{i=6}^{10}\varepsilon_i + \varepsilon\right)\tilde C_t\mathcal{E}_2(w,t) + \frac{S^2_{\bar g}\mathrm{vol}(\Sigma_t)}{72\varepsilon_3\tilde C_t}A^6 + \frac{A^2}{72\varepsilon_4\tilde C_t}\|S_g(t)\|^2_{H^1(\Sigma_t)}\\ &\le \tilde C_t\mathcal{E}_2(w,t) + h(t)A^6 + \frac{A^2}{72\varepsilon_4\tilde C_t}\|S_g(t)\|^2_{H^1(\Sigma_t)} \qquad (4.30)\end{aligned}$$

gilt, wobei in der letzten Ungleichung $\sum_{i=6}^{10}\varepsilon_i + \varepsilon_4 + 3\varepsilon_5 + \varepsilon = 1$ benutzt wurde. Die Gronwallsche Ungleichung liefert für $\tilde C = \max_{t\in I}\tilde C_t$

$$\mathcal{E}_2(w,t) \le e^{\tilde C|I|}\left(\mathcal{E}_2(w,t_0) + \int\limits_{t_0}^{t} h(s)A^6\,ds\right) + A^2\int\limits_{t_0}^{t}\frac{1}{72\varepsilon_4\tilde C_s}e^{\int_s^t \tilde C_r\,dr}\|S_g(s)\|^2_{H^1(\Sigma_s)}\,ds.$$

Seien $\tilde\varepsilon_1, \tilde\varepsilon_2, \tilde\varepsilon_3 \in (0, \frac{1}{2})$ mit $\sum_{i=1}^{3}\tilde\varepsilon_i = \frac{1}{2}$. Dann wählt man w_0, w_1 hinreichend klein, so dass die Abschätzung

$$\mathcal{E}_2(w,t_0) < e^{-\tilde C|I|}\tilde\varepsilon_1\frac{A^2}{C_S^2}$$

erfüllt ist. Wegen $w_0 = \varphi_0 - A$ und $w_1 = \varphi_1$ und weil A genügend klein gewählt wird, ist dies nur möglich, wenn die Anfangsdaten des Cauchy-Problems (4.18), φ_0 und φ_1, hinreichend klein sind. Des Weiteren muss $\varphi_0 > 0$ gelten, da andernfalls $w_0(x) \leq -A$ für ein $x \in \Sigma_{t_0}$ ein Widerspruch zu

$$\|w_0\|_{C^0(\Sigma_{t_0})} \leq C_S \|w_0\|_{\tilde{H}^2(\Sigma_{t_0})} \leq C_S \sqrt{2\mathcal{E}_2(w, t_0)} < A$$

ergeben würde. Sei zudem A so gewählt, dass

$$A^4 \int_{t_0}^{t} h(s)\, ds < e^{-\tilde{C}|I|} \frac{\tilde{\varepsilon}_2}{C_S^2} \tag{4.31}$$

gilt. Da S_g nach Annahme für alle $t \in I$ die Abschätzung

$$\int_{t_0}^{t} \frac{1}{\tilde{C}_s} e^{\int_s^t \tilde{C}_r dr} \|S_g(s)\|^2_{H^1(\Sigma_s)}\, ds \leq \frac{72 \varepsilon_4 \tilde{\varepsilon}_3}{C_S^2}$$

für ein $\varepsilon_4 \tilde{\varepsilon}_3 \in (0, \frac{1}{2})$ erfüllt, folgt

$$\mathcal{E}_2(w, t) < (\tilde{\varepsilon}_1 + \tilde{\varepsilon}_2 + \tilde{\varepsilon}_3) \frac{A^2}{C_S^2} = \frac{A^2}{2C_S^2}.$$

Dies impliziert

$$\|w\|_{C^0(\Sigma_t)} \leq C_S \|w\|_{\tilde{H}^2(\Sigma_t)} \leq C_S \sqrt{2\mathcal{E}_2(w, t)} < A,$$

womit $w = \varphi - A > -A$ und dementsprechend die Positivität von φ für alle $t \in I$ folgt. □

Aus dem Beweis ergibt sich der genaue Wert für die Konstante $\tilde{C}_t$ aus Theorem 4.17.

Bemerkung 4.18. *Für $t \in I$ sei F_t die Matrix mit den Einträgen $F_{kl}(t) = f_k(t) \cdot f_l(t)$ mit $f_k(t) := \sum_{i,j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial t} \left(g_t^{ij} \Gamma_{ij}^k \right)$ und seien*

$$\begin{aligned} C_1(t) &:= \min \left\{ B(t) \geq 0 \,|\, \left(\dot{g_t}^{-1} - B(t) g_t^{-1} \right) \textit{ ist negativ semidefinit} \right\}, \\ C_2(t) &:= \min \left\{ B(t) \geq 0 \,|\, \left(F_t - B(t) g_t^{-1} \right) \textit{ ist negativ semidefinit} \right\}. \end{aligned}$$

Sei $C_3(t) := B_1(t) \cdot B_2(t)$ die kleinste von t abhängige Funktion, für die aufgrund elliptischer Regularität und der Äquivalenz von H^2-Normen bezüglich unterschiedlicher

Metriken auf Σ_t

$$\int_{\Sigma_t} |\overline{\nabla}^2 w|^2_{g_{\text{eukl}}}\, dA_t \leq B_1(t)\|\varphi\|^2_{H^2(\Sigma_t)} \leq B_1(t)\cdot B_2(t)\left(\|\Delta_{g_t} w\|^2_{L^2(\Sigma_t)} + \|w\|^2_{L^2(\Sigma_t)}\right)$$

gilt. Sei des Weiteren $C_4(t) = \|(\sum\limits_{i,j=1}^{3} \dot{g}_t^{ij})^2\|_{L^\infty(\Sigma_t)}$. *Seien zudem* $A_1(t)$ *und* $A_2(t)$ *gegeben durch*

$$\begin{aligned} A_1(t) &:= \|\alpha\|_{L^\infty(\Sigma_t)} + \frac{1}{6}\|S_g\|_{L^\infty(\Sigma_t)} + C_1(t) + 1,\\ A_2(t) &:= 2\sqrt{2}\sqrt{\max\left(C_2(t), C_3(t)\cdot C_4(t)\right)}. \end{aligned}$$

Dann gilt für die Konstante $\tilde{C}_t$ *aus Theorem 4.17 und* $\varepsilon_1, ..., \varepsilon_4 \in (0,1)$ *mit* $\sum\limits_{i=1}^{4} \varepsilon_i < 1$

$$\tilde{C}_t = \max\left(\frac{A_1(t)}{\varepsilon_1}, \frac{A_2(t)}{\varepsilon_2}, \frac{1}{6\varepsilon_3}\sqrt{\||\overline{\nabla} S_g|^2\|_{L^\infty(\Sigma_t)}}, \frac{1}{\varepsilon_4}\sqrt{\||\overline{\nabla}\alpha|^2\|_{L^\infty(\Sigma_t)}}\right) \tag{4.32}$$

Aus dem Beweis von Theorem 4.17 folgt direkt

Korollar 4.19. *Sei* $\tilde{I} \subset \mathbb{R}$ *ein beschränktes offenes Intervall mit* $t_0 \in \tilde{I}$ *und sei* $(M,g) = (\tilde{I}\times\Sigma, -dt^2 \oplus g_t)$ *eine global-hyperbolische Lorentz-Mannigfaltigkeit mit* $\dim(\Sigma) = 3$ *und* $S_{\bar{g}} \leq 0$, *wobei* Σ *geschlossen sei. Angenommen für alle* $t \in \tilde{I}$ *sind* $\tilde{C}_t$ *aus der Bemerkung 4.18,* $C_5(t)$ *aus* (4.29) *und* C_S *aus* (4.20) *beschränkt. Es gelte des Weiteren für alle* $t \in \tilde{I}$

$$\int_{\tilde{I}} \frac{1}{\tilde{C}_s} e^{\int_s^t \tilde{C}_r dr} \|S_g(s)\|^2_{H^1(\Sigma_s)}\, ds \leq \frac{72\varepsilon}{C_S^2}$$

für ein $\varepsilon \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$.
Dann existiert für kleine Anfangsdaten $\varphi_0 \in C^\infty(\Sigma_{t_0}, \mathbb{R}_+)$, $\varphi_1 \in C^\infty(\Sigma_{t_0}, \mathbb{R})$ *eine positive glatte Lösung* $\varphi \in C^\infty(\tilde{I}\times\Sigma, \mathbb{R}_+)$ *des Cauchy-Problems* (4.18).

Im weiteren Verlauf wird folgende Bemerkung benötigt werden.

Bemerkung 4.20. *Im Beweis von Theorem 4.17 wird deutlich, dass die Einschränkungen an die Skalarkrümmung in* (4.19) *nur durch den Term* $\frac{1}{6}S_g A$ *in* (4.21) *entstehen. Ohne diesen Term erhält man folglich eine positive Lösung für alle* $t \in I$, *ohne Annahmen an die Skalarkrümmung machen zu müssen. Des Weiteren sind im Beweis von Theorem 4.17 alle Bedingungen an* A, *bis auf* (4.31), *von der Form* $A \leq h_i(t)\frac{\tilde{C}_t^{a_i}}{|S_{\bar{g}}|^{b_i}}$ *für* $a_i, b_i \in \mathbb{Q}_+$ *und positive, beschränkte Funktionen* $h_i(t)$. *Diese Bedingungen an* A

sind auch dann erfüllt, wenn A beliebig beschränkt ist, aber $|S_{\bar{g}}|$ hinreichend klein gewählt wird. Die Bedingung an A aus (4.31) *entsteht durch den Term $\frac{S_{\bar{g}}^2 \mathrm{vol}(\Sigma_t)}{72\varepsilon_3 \tilde{C}_t} A^6$ in* (4.30)*, der, wie man in* (4.24) *erkennt, nur durch den Term $\frac{1}{6} S_{\bar{g}} A^3$ in* (4.21) *verursacht wird. Fehlt dieser Term, so muss A nicht mehr hinreichend klein gewählt werden, wenn stattdessen $|S_{\bar{g}}|$ genügend klein gewählt wird. Fehlen sowohl der Term $\frac{1}{6} S_g A$ als auch $\frac{1}{6} S_{\bar{g}} A^3$ in* (4.21)*, dann gilt: Sei w eine Lösung des Cauchy-Problems*

$$\left.\begin{aligned} \mathcal{L}w := \Box w - \tfrac{1}{6} S_{\bar{g}} w^3 - \tfrac{1}{2} S_{\bar{g}} A w^2 - \tfrac{1}{2} S_{\bar{g}} A^2 w + \tfrac{1}{6} S_g w &= 0, \\ w|_{t=t_0} &= w_0 := \varphi_0 - A, \\ \dot{w}|_{t=t_0} &= w_1 := \varphi_1. \end{aligned}\right\}$$

Dann existiert ein $S_{\bar{g}} \leq 0$, so dass für $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon \in (0,1)$ mit $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$ und $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \varepsilon$

$$\dot{\mathcal{E}}_1(\tilde{w}, t) \leq \varepsilon_1 \tilde{C}_t \mathcal{E}_1(\tilde{w}, t)$$

sowie

$$\dot{\mathcal{E}}_2(\tilde{w}, t) \leq \varepsilon_2 \tilde{C}_t \mathcal{E}_2(\tilde{w}, t) + \dot{\mathcal{E}}_1(\tilde{w}, t) \leq \varepsilon \tilde{C}_t \mathcal{E}_2(\tilde{w}, t),$$

gelten, wobei $\tilde{C}_t$ die Funktion aus Bemerkung 4.18 ist. Demzufolge gilt

$$\mathcal{E}_2(\tilde{w}, t) \leq e^{\varepsilon \int_{t_0}^{t} \tilde{C}_r \, dr} \mathcal{E}_2(\tilde{w}, t_0).$$

Dann können die Anfangsdaten φ_0, φ_1 so gewählt werden, dass w_0, w_1 hinreichend klein sind und

$$\mathcal{E}_2(\tilde{w}, t_0) < \left(e^{\int_{t_0}^{t} \varepsilon \tilde{C}_r \, dr} \right)^{-1} \frac{A^2}{2C_S^2}$$

erfüllt ist. Dies impliziert wegen

$$\|w\|_{C^0(\Sigma_t)} \leq C_S \|w\|_{\tilde{H}^2(\Sigma_t)} \leq C_S \sqrt{2\mathcal{E}_2(w,t)} < A,$$

die Positivität von $\tilde{w}$ für $t \in I$.

Theorem 4.17 zeigt die Existenz einer positiven glatten Lösung des Cauchy-Problems (4.18) auf einem Zeitintervall I, wenn die H^1-Norm der Skalarkrümmung auf eine bestimmte Weise beschränkt ist. Im Beweis wurde eine Konstante $A > 0$ gesucht, für die $\|\varphi - A\|_{L^\infty(I \times \Sigma)} < A$ gilt. Im Folgenden wird statt einer Konstanten A eine Funktion $\mathcal{A}(t)$ gesucht, für die $\|\varphi - \mathcal{A}(t)\|_{L^\infty(\Sigma_t)} < \mathcal{A}(t)$ gilt. Dadurch erhält man eine positive Lösung, wenn $\overline{\nabla}\alpha$ und $\overline{\nabla} S_g$ auf eine bestimmte Weise beschränkt sind und

S_g negativ ist. Hierzu wird zuerst eine gewöhnliche Differentialgleichung untersucht. Dafür wird folgendes Lemma nützlich sein.

Lemma 4.21 ([8], Lemma 3.8.). *Seien $a, b : I \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen und sei $t_0 \in I$*

1. *Wenn $\dot{y} + a(t)y \leq 0$ ist, dann gilt*
$$y(t) \leq y(t_0)e^{-\int_{t_0}^{t} a(s)\,ds}$$
für alle $t \geq t_0$.

2. *Wenn $\ddot{y} + a(t)\dot{y} + b(t)y \leq 0$, dann gilt $y(t) \leq y(t_0)v + \dot{y}(t_0)w$ für alle $t \in I$, wobei v, w die Lösungen zur Differentialgleichung $\ddot{u} + a(t)\dot{u} + b(t)u = 0$ mit den Anfangsbedingungen $v(t_0) = 1 = \dot{w}(t_0)$ und $\dot{v}(t_0) = 0 = w(t_0)$ sind.*

Von nun an sei zusätzlich angenommen, dass die Skalarkrümmung S_g negativ ist. Sei $A_x(t)$ für ein festes $x \in \Sigma$ mit $\dim(\Sigma) = n$ die Lösung des Cauchy-Problems

$$\left.\begin{aligned} \ddot{A}_x(t) + \alpha(t,x)\dot{A}_x(t) + a_n S_g(t,x)A_x(t) &= a_n S_{\bar{g}} A_x(t)|A_x(t)|^{p_n - 1}, \\ A_x|_{t=t_0} &= A_{x,0}, \\ \dot{A}_x|_{t=t_0} &= A_{x,1}, \end{aligned}\right\} \tag{4.33}$$

wobei $A_{x,0} \in \mathbb{R}_+$, $A_{x,1} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, $a_n = \frac{n-1}{4n}$ sowie $p_n = \frac{n+3}{n-1}$ gelten. Für die Lösung des Cauchy-Problems (4.33) gilt folgendes Lemma.

Lemma 4.22. *Für $\tilde{I} = (T_0, T_1)$ mit $-\infty \leq T_0 < T_1 \leq \infty$ sei $(M, g) = (\tilde{I} \times \Sigma, -dt^2 \oplus g_t)$ eine global-hyperbolische Lorentz-Mannigfaltigkeit mit $S_g < 0$, wobei Σ geschlossen sei. Seien $S_{\bar{g}} \leq 0$, $x \in \Sigma$ und $t_0 \in \tilde{I}$ gegeben. Des Weiteren seien $|\alpha(t,x)|$ und $|S_g(t,x)|$ für alle $t \in \tilde{I}$ beschränkt.*
Dann existieren Anfangsdaten $A_{x,0} \in \mathbb{R}_+$, $A_{x,1} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, so dass das Anfangswertproblem (4.33) eine positive, glatte Lösung $A_x(t)$ für alle $t \in \tilde{I}$ besitzt. Für die Lösung gilt zusätzlich $\dot{A}_x(t) \geq 0$ für alle $t \in \tilde{I}$.

Beweis. Da die Abbildung

$$\begin{aligned} g_x : \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\to \mathbb{R}, \\ (v, w) &\mapsto -\alpha v - a_n S_g w + a_n S_{\bar{g}} w|w|^{p_n - 1}, \end{aligned}$$

lokal Lipschitz-stetig ist, existiert eine zeitlokale, glatte Lösung $A_x \in C^\infty([t_0, t_1))$ von (4.33) für ein $t_1 \in \tilde{I}$. Wegen $A_{x,0} > 0$, existiert ein $T^* \in (t_0, t_1]$, so dass $I^* := [t_0, T^*)$ das maximale Intervall ist, für das die Lösung $A_x(t)$ positiv ist. Das Ziel ist es zunächst zu zeigen, dass $T^* = t_1$ gelten muss, d.h. dass die Lösung auf dem ganzen Existenzintervall

$[t_0, t_1)$ positiv ist.

Angenommen $T^* < t_1$. Für $t \in I^*$ und ein festes $x \in \Sigma$ gilt wegen $S_{\bar{g}} \leq 0$ und $A_x(t) > 0$

$$\ddot{A}_x + \alpha \dot{A}_x + a_n S_g A_x = a_n S_{\bar{g}} A_x |A_x|^{p_n - 1} \leq 0.$$

Nach Lemma 4.21 impliziert dies $A_x(t) \leq A_{x,0} v + A_{x,1} w$, wobei v, w Lösungen der Gleichung $\ddot{u} + \alpha \dot{u} + a_n S_g u = 0$ mit den Anfangsbedingungen $v(t_0) = 1 = \dot{w}(t_0)$ und $\dot{v}(t_0) = 0 = w(t_0)$ sind. Da v, w Lösungen einer linearen gewöhnlichen Differentialgleichung, existieren aufgrund der Annahmen an α und S_g die glatten Lösungen v, w für alle $t \in \tilde{I}$. Folglich existiert für alle $t \in I^*$ eine Konstante $C > 0$, so dass $A_x(t) \leq C(A_{x,0} + A_{x,1})$ gilt. Falls $S_{\bar{g}} \neq 0$ wählt man $A_{x,0}, A_{x,1}$ so klein, dass $|A_x|^{p_n - 1} \leq \frac{S_g}{S_{\bar{g}}}$ gilt. Dann folgt

$$\ddot{A}_x + \alpha \dot{A}_x = a_n S_{\bar{g}} A_x |A_x|^{p_n - 1} - a_n S_g A_x \geq 0$$

für alle $t \in I^*$. Falls $S_{\bar{g}} = 0$, gilt wegen $S_g < 0$ ebenfalls $\ddot{A}_x + \alpha \dot{A}_x \geq 0$. Nach Lemma 4.21 gilt für $A_{x,1} \geq 0$

$$\dot{A}_x(t) \geq A_{x,1} e^{-\int\limits_{t_0}^{t} \alpha(s,x)\, ds} \geq 0$$

für alle $t \in I^*$. Demzufolge ist A_x monoton steigend auf I^* und folglich ist $A_x(t) \geq A_{x,0} > 0$ für alle $t \in I^*$. Da A_x auf dem Existenzintervall $[t_0, t_1)$ stetig ist, existiert ein $\varepsilon > 0$ so, dass $A_x(t) > 0$ für $t \geq T^* + \varepsilon$, was einen Widerspruch zur Maximalität von T^* bedeutet. Demzufolge ist A_x auf dem ganzen Existenzintervall $[t_0, t_1)$ positiv.

Dies impliziert in folgender Weise die Existenz der Lösung für alle $t \geq t_0$. Angenommen es existiert ein $t_* < T_1$, so dass das Intervall $I_* := [t_0, t_*)$ das maximale Intervall ist, für das das Anfangswertproblem (4.33) eine Lösung besitzt. Da die Lösung A_x, wie bereits gezeigt wurde, für alle $t \in I_*$ positiv ist, gilt $A_x(t) \leq A_{x,0} v + A_{x,1} w$, wobei v, w Lösungen der linearen Gleichung $\ddot{u} + \alpha \dot{u} + a_n S_g u = 0$ sind. Aufgrund der Bedingungen an α und S_g existieren die Lösungen v und w für alle $t \in \tilde{I}$. Infolgedessen sind v, w und damit auch $A_x(t)$ für alle $t \in I_*$ beschränkt. Aufgrund dessen lässt sich durch die Energie $E_{A_x}(t) = \dot{A}_x(t)^2$ leicht zeigen, dass es eine Konstante $C > 0$ gibt, so dass $\max_{t \in I_*} \dot{A}_x(t) \leq C$ gilt. Somit kann die Lösung $A_x(t)$ über t_* hinaus erweitert werden, was einen Widerspruch zur Maximalität von t_* darstellt. Die Lösung existiert somit für alle $t \geq t_0$. Durch Rückwärtslösen der Gleichung existiert dann eine Lösung für alle $t \in \tilde{I}$.

□

Anstatt im Beweis von Lemma 4.22 die Anfangsbedingungen $A_{x,0}$, $A_{x,1}$ hinreichend klein zu wählen, damit die Lösung A_x die Bedingung $|A_x|^{p_n-1} \leq \frac{S_g}{S_{\bar{g}}}$ erfüllt, kann auch $|S_{\bar{g}}|$ hinreichend klein gewählt werden, wodurch dann die Anfangsbedingungen $A_{x,0}$, $A_{x,1}$ nicht klein gewählt werden müssen. Somit ergibt sich

Lemma 4.23. *Für $\tilde{I} = (T_0, T_1)$ mit $-\infty \leq T_0 < T_1 \leq \infty$ sei $(M, g) = (\tilde{I} \times \Sigma, -dt^2 \oplus g_t)$ eine global-hyperbolische Lorentz-Mannigfaltigkeit mit $S_g < 0$, wobei Σ geschlossen sei. Seien $x \in \Sigma$ und $t_0 \in \tilde{I}$ gegeben. Des Weiteren seien $|\alpha(t,x)|$ und $|S_g(t,x)|$ für alle $t \in \tilde{I}$ beschränkt.*
Dann existiert für alle Anfangsdaten $A_{x,0} \in \mathbb{R}_+$, $A_{x,1} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ eine Konstante $S_{\bar{g}} \leq 0$, so dass das Anfangswertproblem (4.33) *eine positive, glatte Lösung $A_x(t)$ für alle $t \in \tilde{I}$ besitzt. Für die Lösung gilt zusätzlich $\dot{A}_x(t) \geq 0$ für alle $t \in \tilde{I}$.*

Falls α und S_g nur von t abhängen, lässt sich mithilfe des Lemmas 4.22 zeigen, dass das folgende Cauchy-Problem eine globale positive Lösung besitzt.

Korollar 4.24. *Für $-\infty \leq T_0 < T_1 \leq \infty$ sei $(M, g) = ((T_0, T_1) \times \Sigma, -dt^2 \oplus g_t)$ eine global-hyperbolische Lorentz-Mannigfaltigkeit mit $S_g < 0$, wobei Σ geschlossen sei. Sei $t_0 \in (T_0, T_1)$. Angenommen die Skalarkrümmung S_g und $\alpha = \frac{1}{2} tr_{g_t}\left(\frac{\partial g_t}{\partial t}\right)$ hängen nur von t ab und $|\alpha|$ und $|S_g|$ seien für alle $t \in (T_0, T_1)$ beschränkt. Dann*

1) gibt es für alle $S_{\bar{g}} \leq 0$ Anfangsdaten $\varphi_0 \in \mathbb{R}_+$, $\varphi_1 \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, so dass eine zeitglobale positive Lösung $\varphi \in C^\infty(M, \mathbb{R}_+)$ des Cauchy-Problems

$$\left.\begin{aligned} \ddot{\varphi} + \Delta_{g_t}\varphi + \alpha\dot{\varphi} + a_n S_g \varphi &= a_n S_{\bar{g}} \varphi |\varphi|^{p_n - 1}, \\ \varphi|_{t=t_0} &= \varphi_0, \\ \dot{\varphi}|_{t=t_0} &= \varphi_1 \end{aligned}\right\} \tag{4.34}$$

existiert.

2) existiert für alle Anfangsdaten $\varphi_0 \in \mathbb{R}_+$, $\varphi_1 \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, ein $S_{\bar{g}} \leq 0$, so dass das Cauchy-Problem (4.34) *eine zeitglobale positive Lösung $\varphi \in C^\infty(M, \mathbb{R}_+)$ besitzt.*

Folglich existiert dann insbesondere für $n = 3$ eine zeitglobale positive glatte Lösung des Cauchy-Problems (4.18).

Beweis. Nach Lemma 4.22 und Lemma 4.23 existiert in beiden Fällen eine glatte positive Lösung $\mathcal{A}(t)$ des Anfangswertproblems (4.33) für alle $t \in \mathbb{R}$. Da diese Lösung nur von t abhängt, ist A auch eine Lösung von (4.34). □

Mithilfe des Lemmas 4.22 lässt sich nun folgendes Theorem beweisen.

Theorem 4.25. *Sei* $(M,g) = (\mathbb{R}\times\Sigma, -dt^2 \oplus g_t)$ *eine global-hyperbolische Lorentz-Mannigfaltigkeit mit* $\dim(\Sigma) = 3$ *und* $S_g < 0$, *wobei* Σ *geschlossen sei. Sei* $t_0 \in \mathbb{R}$. *Für jedes Zeitintervall* $I := [t_0, t_1]$ *mit* $-\infty < t_0 < t_1 < \infty$, *auf der die Skalarkrümmung* S_g *und* $\alpha = \frac{1}{2} tr_{g_t}\left(\frac{\partial g_t}{\partial t}\right)$ *der Abschätzung*

$$\int_{t_0}^{t} \frac{B_1(s)}{\tilde{C}_s} e^{\int_s^t \tilde{C}_r dr} \left(B_2(s) \| |\overline{\nabla}\alpha|^2_{g_s} \|_{L^\infty(\Sigma_s)} + \frac{1}{36} \| |\overline{\nabla} S_g|^2_{g_s} \|_{L^\infty(\Sigma_s)} \right) ds \leq \frac{\varepsilon}{C_S^2} \tag{4.35}$$

für ein beliebiges $\varepsilon \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ *für alle* $t \in I$ *genügen, existieren Anfangsdaten* $\varphi_0 \in C^\infty(\Sigma_{t_0}, \mathbb{R}_+)$, $\varphi_1 \in C^\infty(\Sigma_{t_0}, \mathbb{R})$ *und eine Konstante* $S_{\bar{g}} \leq 0$, *so dass die Lösung des Cauchy-Problems* (4.18) *positiv auf* $I \times \Sigma$ *ist. Die Konstante* $\tilde{C}_t$ *ist die Konstante aus Bemerkung 4.18,* $B_2(t)$ *wird in* (4.37) *definiert,* C_S *bezeichnet die Sobolev-Konstante aus* (4.20) *und für* $B_1(t)$ *gilt* $B_1(t) = \mathrm{vol}(\Sigma_t)^{\frac{4\mathrm{diam}(\Sigma_t)^2+1}{2}}$.

Beweis. Sei $I = [t_0, t_1]$ ein beliebiges kompaktes Zeitintervall. Das Ziel ist es, ähnlich wie im Beweis von Theorem 4.17, eine positive Funktion $A_*(t)$ zu finden, so dass $\|\varphi - A_*(t)\|_{L^\infty(\Sigma_t)} < A_*(t)$ für alle $t \in I$ gilt.

Für $x, y \in \Sigma$ sei

$$L_x A_y(t) := -\ddot{A}_y(t) - \alpha(t,x)\dot{A}_y(t) - \frac{1}{6} S_g(t,x) A_y(t)$$

und für ein beliebiges $y^* \in \Sigma$ und beliebige $A_0 \in \mathbb{R}_+$, $A_1 \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ sei $A_*(t)$ die Lösung von

$$\left.\begin{array}{rl} L_{y^*} A_*(t) & = -\frac{1}{6} S_{\bar{g}} A_*^3(t), \\ A_{y^*}|_{t=t_0} & = A_0, \\ \dot{A}_{y^*}|_{t=t_0} & = A_1. \end{array}\right\} \tag{4.36}$$

Sei $S_{\bar{g}} \leq 0$ so gewählt, dass nach Lemma 4.23 die Lösung A_* für alle $t \in I$ existiert und $\dot{A}_*$ nichtnegativ ist, so dass $A_*(t) \geq A_0 > 0$ gilt. Dann sei $B_2(t)$ eine nur von t abhängige beschränkte Funktion, für die für alle $t \in I$

$$\frac{\dot{A}_*^2(t)}{A_*^2(t)} \leq B_2(t) \tag{4.37}$$

gilt.

Sei φ die Lösung des Cauchy-Problems (4.18) und sei $w := \varphi - A_*(t)$. Dann gilt für alle $(t,x) \in I \times \Sigma$

$$\begin{aligned}
&\Box w(t,x) - \frac{1}{6} S_{\bar{g}} w^3(t,x) - \frac{1}{2} S_{\bar{g}} A_*(t) w^2(t,x) - \frac{1}{2} S_{\bar{g}} A_*^2(t) w(t,x) + \frac{1}{6} S_g(t,x) w(t,x) \\
&= -\ddot{A}_*(t) - \alpha(t,x)\dot{A}_*(t) - \frac{1}{6} S_g(t,x) A_*(t) + \frac{1}{6} S_{\bar{g}} A_*^3(t) \\
&= L_x A_*(t) - L_{y^*} A_*(t).
\end{aligned} \tag{4.38}$$

Folglich ist w die Lösung des Cauchy-Problems

$$\left.\begin{aligned}
\mathcal{L}w := \Box w - \tfrac{1}{6} S_{\bar{g}} w^3 - \tfrac{1}{2} S_{\bar{g}} A_* w^2 - \tfrac{1}{2} S_{\bar{g}} A_*^2 w + \tfrac{1}{6} S_g w &= L_x A_* - L_{y^*} A_*, \\
w|_{t=t_0} &= w_0 := \varphi_0 - A_0, \\
\dot{w}|_{t=t_0} &= w_1 := \varphi_1 - A_1.
\end{aligned}\right\} \tag{4.39}$$

Im Unterschied zu (4.21) aus dem Beweis von Theorem 4.17, erscheint in (4.39) der neue Term $L_x A_* - L_{y^*} A_*$, während der Term $\frac{1}{6} S_{\bar{g}} A_*^3(t) - \frac{1}{6} S_g A_*(t)$ nicht mehr auftaucht. Nach Bemerkung 4.20 existiert, da A_* für alle $t \in I$ beschränkt ist, ein $S_{\bar{g}} \leq 0$, so dass für die Lösung $\tilde{w}$ von $\mathcal{L}\tilde{w} = 0$

$$\dot{\mathcal{E}}_1(\tilde{w}, t) \leq \varepsilon_1 \tilde{C}_t \mathcal{E}_1(\tilde{w}, t) \tag{4.40}$$

sowie

$$\dot{\mathcal{E}}_2(\tilde{w}, t) \leq \varepsilon_2 \tilde{C}_t \mathcal{E}_2(\tilde{w}, t) + \dot{\mathcal{E}}_1(\tilde{w}, t) \tag{4.41}$$

für $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in (0,1)$ mit $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$ gelten, wobei $\tilde{C}_t$ die Funktion aus Bemerkung 4.18 ist und die Energiefunktionale wie in (4.22) bzw. (4.28) definiert sind. Somit sind nur die durch $L_x A_* - L_{y^*} A_*$ neu entstandenen Terme in $\mathcal{E}_1(w,t)$ und $\mathcal{E}_2(w,t)$ zu betrachten. Durch Ableiten des Energiefunktionals $\mathcal{E}_1(w,t)$ nach t und Einsetzen von (4.38) folgt für ein $\varepsilon_1, \varepsilon_3 \in (0,1)$

$$\begin{aligned}
\dot{\mathcal{E}}_1(w,t) &\leq \varepsilon_1 \tilde{C}_t \mathcal{E}_1(w,t) + \int_{\Sigma_t} \dot{w}(L_x A_* - L_{y^*} A_*)\, dA_t \\
&\leq \varepsilon_1 \tilde{C}_t \mathcal{E}_1(w,t) + \frac{1}{2} \int_{\Sigma_t} \varepsilon_3 \tilde{C}_t \dot{w}^2 + \frac{1}{\varepsilon_3 \tilde{C}_t} |L_x A_* - L_{y^*} A_*|^2 \, dA_t.
\end{aligned}$$

Der letzte Summand lässt sich folgendermaßen abschätzen

$$
\begin{aligned}
&\int\limits_{\Sigma_t} |L_x A_*(t) - L_{y^*} A_*(t)|^2 \, dA_t \\
&= \int\limits_{\Sigma_t} | - \ddot{A}_*(t) - \alpha(t,x)\dot{A}_*(t) - \frac{1}{6} S_g(t,x) A_*(t) + \ddot{A}_*(t) + \alpha(t,y^*)\dot{A}_*(t) \\
&\qquad + \frac{1}{6} S_g(t,y^*) A_*(t)|^2 \, dA_t \\
&\le 2 \int\limits_{\Sigma_t} \dot{A}_*^2(t) \left(\alpha(t,y^*) - \alpha(t,x)\right)^2 + \frac{1}{36} A_*^2(t) \left(S_g(t,y^*) - S_g(t,x)\right)^2 \, dA_t \\
&\le 2 \int\limits_{\Sigma_t} \mathrm{diam}(\Sigma_t)^2 \left(\dot{A}_*^2(t) \| |\overline{\nabla}\alpha|_{g_t}^2 \|_{L^\infty(\Sigma_t)} + \frac{1}{36} A_*^2(t) \| |\overline{\nabla} S_g|_{g_t}^2 \|_{L^\infty(\Sigma_t)} \right) dA_t \\
&\le 2 A_*^2(t) \mathrm{vol}(\Sigma_t) \cdot \mathrm{diam}(\Sigma_t)^2 \left(B_2(t) \| |\overline{\nabla}\alpha|_{g_t}^2 \|_{L^\infty(\Sigma_t)} + \frac{1}{36} \| |\overline{\nabla} S_g|_{g_t}^2 \|_{L^\infty(\Sigma_t)} \right),
\end{aligned}
$$

wobei in der letzten Ungleichung (4.37) benutzt wurde. Sei

$$
f(t) := B_2(t) \| |\overline{\nabla}\alpha|_{g_t}^2 \|_{L^\infty(\Sigma_t)} + \frac{1}{36} \| |\overline{\nabla} S_g|_{g_t}^2 \|_{L^\infty(\Sigma_t)}.
$$

Demzufolge gilt

$$
\dot{\mathcal{E}}_1(w,t) \le (\varepsilon_1 + \varepsilon_3) \tilde{C}_t \mathcal{E}_1(w,t) + \frac{2A_*^2(t) \mathrm{diam}(\Sigma_t)^2 \mathrm{vol}(\Sigma_t)}{\varepsilon_3 \tilde{C}_t} f(t). \tag{4.42}
$$

Durch Anwendung der Gronwallschen Ungleichung folgt für $\tilde{C} := \max_{t \in I} \tilde{C}_t$

$$
\mathcal{E}_1(w,t) \le e^{(\varepsilon_1 + \varepsilon_3)\tilde{C}|I|} \left(\mathcal{E}_1(w,t_0) + \int\limits_{t_0}^{t} \frac{2A_*^2(s) \mathrm{diam}(\Sigma_s)^2 \mathrm{vol}(\Sigma_s)}{\varepsilon_3 \tilde{C}_s} f(s) \, ds \right).
$$

Insbesondere existiert eine hinreichend große Konstante $C > 0$, so dass

$$
\mathcal{E}_1(w,t) \le C A_0 \le C A_*(t)
$$

erfüllt ist. Dies ist, wie im Beweis von Theorem 4.17 gezeigt wurde, erforderlich um eine Abschätzung der Form 4.41 zu erhalten.

Um die H^2-Energie abzuschätzen, wird die Gleichung betrachtet, die sich durch das Skalarprodukt des Gradienten der Gleichung (4.38) mit dem Gradienten von $\dot{w}$ ergibt.

Im Unterschied zur Gleichung (4.27) wird der Term $\frac{1}{6}\langle\overline{\nabla}S_g, \overline{\nabla}\dot{w}\rangle A$ durch

$$\langle\overline{\nabla}L_x A_*, \overline{\nabla}\dot{w}\rangle_{g_t} = -\dot{A}_*\langle\overline{\nabla}\alpha, \overline{\nabla}\dot{w}\rangle_{g_t} - \frac{1}{6}A_*\langle\overline{\nabla}S_g, \overline{\nabla}\dot{w}\rangle_{g_t}$$

ersetzt. Dieser Term lässt sich abschätzen durch

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{\Sigma_t} |\dot{A}_*(t)\langle\overline{\nabla}\alpha, \overline{\nabla}\dot{w}\rangle_{g_t} + \frac{1}{6}A_*(t)\langle\overline{\nabla}S_g, \overline{\nabla}\dot{w}\rangle_{g_t}|\,dA_t \\
&\leq \frac{1}{2}\int\limits_{\Sigma_t} \frac{1}{\varepsilon_3\tilde{C}_t}\left(|\overline{\nabla}\alpha|^2_{g_t}\dot{A}^2_*(t) + \frac{1}{36}|\overline{\nabla}S_g|^2_{g_t}A^2_*(t)\right) + 2\varepsilon_3\tilde{C}_t|\overline{\nabla}\dot{w}|^2_{g_t}\,dA_t \\
&\leq \frac{A^2_*(t)}{2\varepsilon_3\tilde{C}_t}\int\limits_{\Sigma_t} B_2(t)|\overline{\nabla}\alpha|^2_{g_t} + \frac{1}{36}|\overline{\nabla}S_g|^2_{g_t}\,dA_t + 2\varepsilon_3\tilde{C}_t\mathcal{E}_2(w,t) \\
&\leq \frac{A^2_*(t)\mathrm{vol}(\Sigma_t)}{2\varepsilon_3\tilde{C}_t}f(t) + 2\varepsilon_3\tilde{C}_t\mathcal{E}_2(w,t).
\end{aligned}$$

Damit ergibt sich unter Verwendung von (4.41) und (4.42)

$$\begin{aligned}
\dot{\mathcal{E}}_2(w,t) &\leq \varepsilon_2\tilde{C}_t\mathcal{E}_2(w,t) + \frac{A_*(t)^2\mathrm{vol}(\Sigma_t)}{2\varepsilon_2\tilde{C}_t}f(t) + 2\varepsilon_3\tilde{C}_t\mathcal{E}_2(w,t) + \dot{\mathcal{E}}_1(w,t) \\
&\leq (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + 3\varepsilon_3)\,\tilde{C}_t\mathcal{E}_2(w,t) + \frac{A_*(t)^2}{\varepsilon_2\tilde{C}_t}f(t)\cdot\mathrm{Vol}(\Sigma_t)\frac{4\mathrm{diam}(\Sigma_t)^2+1}{2}.
\end{aligned}$$

Seien $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ so gewählt, dass $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + 3\varepsilon_3 = 1$ gilt. Für $B_1(t) := \mathrm{vol}(\Sigma_t)\frac{4\mathrm{diam}(\Sigma_t)^2+1}{2}$ und $\tilde{C} := \max_{t\in I}\tilde{C}_t$ folgt

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_2(w,t) &\leq e^{\tilde{C}(t-t_0)}\mathcal{E}_2(w,t_0) + \int\limits_{t_0}^{t} \frac{B_1(s)}{\varepsilon_2\tilde{C}_s}A^2_*(s)e^{\int_s^t \tilde{C}_r dr} f(s)\,ds \\
&\leq e^{\tilde{C}(t-t_0)}\mathcal{E}_2(w,t_0) + A^2_*(t)\int\limits_{t_0}^{t} \frac{B_1(s)}{\varepsilon_2\tilde{C}_s}e^{\int_s^t \tilde{C}_r dr} f(s)\,ds,
\end{aligned}$$

wobei in der letzten Ungleichung die Monotonie von A_* benutzt wurde, was $\max_{s\in[t_0,t]} A_*(s) = A_*(t)$ impliziert. Nun können die Anfangsdaten φ_0, φ_1 so gewählt werden, dass $\mathcal{E}_2(w,t_0)$ hinreichend klein ist, so dass

$$e^{\tilde{C}(t-t_0)}\mathcal{E}_2(w,t_0) \leq \tilde{\varepsilon}_1\frac{A^2_*(t)}{C^2_S}$$

für ein $\tilde{\varepsilon}_1 \in (0, \frac{1}{2})$ erfüllt ist. Nach Voraussetzung existiert ein $\tilde{\varepsilon}_2 > 0$ mit $\tilde{\varepsilon}_1 + \tilde{\varepsilon}_2 = \frac{1}{2}$, so dass

$$\int_{t_0}^{t} \frac{B_1(s)}{\varepsilon_2 \tilde{C}_s} e^{\int_s^t \tilde{C}_r dr} f(s)\, ds \leq \frac{\tilde{\varepsilon}_2}{C_S^2}$$

für alle $t \in I$ gilt. Dies impliziert

$$\|\varphi - A_*\|_{C^0(\Sigma_t)} = \|w\|_{C^0(\Sigma_t)} \leq C_S \|w\|_{\tilde{H}^2(\Sigma_t)} \leq C_S \sqrt{2\mathcal{E}_2(w,t)} \leq A_*(t).$$

Da dies für alle t gilt, ist φ für alle $t \in I$ positiv. □

Aus dem Beweis von Theorem 4.25 und Bemerkung 4.20 folgt

Korollar 4.26. *Für ein beschränktes Intervall $\tilde{I} \subset \mathbb{R}$ sei $(M,g) = (\tilde{I} \times \Sigma, -dt^2 \oplus g_t)$ eine global-hyperbolische Lorentz-Mannigfaltigkeit mit $\dim(\Sigma) = 3$ und $S_g < 0$, wobei Σ geschlossen sei. Sei $t_0 \in \tilde{I}$. Angenommen es existiert ein $y^* \in \Sigma$, so dass für die Lösung A_* von (4.36) positive Konstanten C_1, $C_2 > 0$ mit $0 < C_1 \leq A_*(t) \leq C_2 < \infty$ für alle $t \in \tilde{I}$ existieren. Sei $B_2(t) \geq \frac{\dot{A}_*^2(t)}{A_*^2(t)}$. Für alle $t \in \tilde{I}$ seien $\tilde{C}_t$ aus der Bemerkung 4.18, $C_5(t)$ aus (4.29), C_S aus (4.20) und $B_1(t) = \mathrm{vol}(\Sigma_t)^{\frac{4\mathrm{diam}(\Sigma_t)^2+1}{2}}$ beschränkt. Es gelte des Weiteren*

$$\int_{\tilde{I}} \frac{B_1(s)}{\tilde{C}_s} e^{\int_s^t \tilde{C}_r dr} \frac{C_2^2}{C_1^2} \left(B_2(s) \| |\overline{\nabla}\alpha|^2_{g_s} \|_{L^\infty(\Sigma_s)} + \frac{1}{36} \| |\overline{\nabla} S_g|^2_{g_s} \|_{L^\infty(\Sigma_s)} \right) ds \leq \frac{\varepsilon}{C_S^2} \tag{4.43}$$

für ein beliebiges $\varepsilon \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ und für alle $t \in \tilde{I}$.
Dann existieren Anfangsdaten $\varphi_0 \in C^\infty(\Sigma_{t_0}, \mathbb{R}_+)$, $\varphi_1 \in C^\infty(\Sigma_{t_0}, \mathbb{R})$ und eine Konstante $S_{\bar{g}} \leq 0$, so dass die Lösung des Cauchy-Problems (4.18) positiv auf $\tilde{I} \times \Sigma$ ist.

Beweis. Sei φ die Lösung des Cauchy-Problems (4.18) und $w(t,x) := \varphi(t,x) - A_*(t)$. Analog zum Beweis von Theorem 4.25 existiert wegen $A_*(t) \leq C_1$ ein $S_{\bar{g}} \leq 0$, so dass für $f(t) := B_2(t) \| |\overline{\nabla}\alpha|^2_{g_t} \|_{L^\infty(\Sigma_t)} + \frac{1}{36} \| |\overline{\nabla} S_g|^2_{g_t} \|_{L^\infty(\Sigma_t)}$ und $\tilde{C} = \max_{s \in \tilde{I}} \tilde{C}_s$

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_2(w,t) &\leq e^{\tilde{C}(t-t_0)} \mathcal{E}_2(w,t_0) + \int_I \frac{B_1(s)}{\varepsilon_2 \tilde{C}_s} A_*^2(s) e^{\int_s^t \tilde{C}_r dr} f(s)\, ds \\
&\leq e^{\tilde{C}(t-t_0)} \mathcal{E}_2(w,t_0) + \max_{s \in \tilde{I}} A_*^2(s) \int_{\tilde{I}} \frac{B_1(s)}{\varepsilon_2 \tilde{C}_s} e^{\int_s^{t_1} \tilde{C}_r dr} f(s)\, ds \\
&\leq e^{\tilde{C}(t-t_0)} \mathcal{E}_2(w,t_0) + A_*^2(t) \frac{C_2^2}{C_1^2} \int_{\tilde{I}} \frac{B_1(s)}{\varepsilon_2 \tilde{C}_s} e^{\int_s^t \tilde{C}_r dr} f(s)\, ds
\end{aligned}$$

gilt, wobei in der letzten Ungleichung benutzt wurde, dass

$$\max_{s\in\tilde{I}} A_*^2(s) \leq C_2^2 = \frac{C_2^2}{C_1^2} C_1^2 \leq \frac{C_2^2}{C_1^2} A_*^2(t)$$

für alle $t \in \tilde{I}$ gilt. Da (4.43) erfüllt ist, folgt analog zum Beweis von Theorem 4.17, dass Anfangsdaten φ_0, φ_1 existieren, so dass $\mathcal{E}_2(w,t) < \frac{A_*(t)^2}{2C_S^2}$ für alle $t \in \tilde{I}$ gilt. Infolgedessen ist φ für alle $t \in \tilde{I}$ positiv.

$\square$

4.7 Beispiel für Nichtexistenz

In dieser Arbeit wurde gezeigt, dass es drei unterschiedliche Bedingungen gibt, für die die Lösung der Yamabe-Gleichung

$$\ddot{\varphi} + \Delta_{g_t}\varphi + \alpha\dot{\varphi} + a_n S_g \varphi = a_n S_{\bar{g}} \varphi^{p_n}$$

auf einem fest vorgegebenem kompakten Zeitintervall I positiv ist. In Theorem 4.12 wurde gezeigt, dass für Skalarkrümmungen S_g, die in einer kleinen Umgebung um die Konstante $S_{\bar{g}}$ liegen, eine positive Lösung für alle $t \in I$ existiert. In Theorem 4.17 wurde für $n = 3$ die Existenz einer positiven Lösung der Yamabe-Gleichung für alle $t \in I$ bewiesen, falls die H^1-Norm der Skalarkrümmung S_g auf eine bestimmte Weise beschränkt ist und $S_{\bar{g}} \leq 0$ gilt. In Theorem 4.25 wurde gezeigt, dass es, falls $S_{\bar{g}} \leq 0$, $S_g < 0$ und $n = 3$ gilt, für die Positivität der Lösung genügt, wenn die Gradienten von S_g und α auf eine bestimmte Weise beschränkt sind. Hängen α und S_g nur von t ab, dann existiert, wie in Korollar 4.24 gezeigt wurde, eine positive zeitglobale Lösung der Yamabe-Gleichung für alle $t \in \mathbb{R}$.

In diesem Abschnitt wird ein Beispiel vorgestellt, bei dem keine globale positive Lösung des Cauchy-Problems (4.15) existiert, wenn $S_{\bar{g}} \leq 0$ und $S_g \geq 0$ gilt.

Theorem 4.27. *Sei $(M,g) = (\mathbb{R} \times \Sigma, -dt^2 \oplus g_t)$ eine global-hyperbolische Lorentz-Mannigfaltigkeit mit $S_g \geq 0$, $S_g \not\equiv 0$, wobei Σ geschlossen ist. Seien $S_{\bar{g}} \leq 0$ und $t_0 \in \mathbb{R}$. Es sei angenommen, dass $\alpha(t)$ nur von t abhängt, so dass für alle $t_0, t_1 \in \mathbb{R}$*

$$\lim_{t\to\infty} \int_{t_0}^{t} \alpha(s)ds = C_1 < \infty$$

und

$$\lim_{t \to -\infty} \int_t^{t_1} \alpha(s)ds = C_2 > -\infty$$

erfüllt ist. Dann existiert keine positive globale Lösung $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}\times\Sigma, \mathbb{R}_+)$ *des Cauchy-Problems* (4.15)*.*

Beweis. Sei φ eine glatte, positive, globale Lösung von (4.15). Dann gilt für $y(t) := \int_{\Sigma_t} \varphi(t,x) dA_t > 0$

$$\begin{aligned} \ddot{y} + \alpha(t)\dot{y} &= \int_\Sigma \ddot{\varphi} + \alpha(t)\dot{\varphi}\, dA_t \\ &= \int_{\Sigma_t} -\Delta_{g_t}\varphi - a_n S_g \varphi + a_n S_{\bar{g}} \varphi^{p-1} dA_t \\ &= a_n \int_{\Sigma_t} -S_g\varphi + S_{\bar{g}}\varphi^{p-1}\, dA_t, \end{aligned}$$

wobei benutzt wurde, dass Σ nach Annahme geschlossen ist. Wegen $S_{\bar{g}} \leq 0, S_g \geq 0$ gilt

$$\ddot{y} + \alpha\dot{y} < 0.$$

Folglich kann y keine konstante Funktion sein. Angenommen es existiert ein $t_0 \in \mathbb{R}$, so dass $\dot{y}(t_0) < 0$ gilt. Aufgrund der Annahmen an α folgt unter Verwendung der Gronwallschen Ungleichung

$$\dot{y}(t) \leq \dot{y}(t_0) e^{-\int_{t_0}^t \alpha(s)ds} < -C < 0$$

für alle $t \geq t_0$. Dies ist ein Widerspruch zu der Annahme, dass $y(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ positiv ist. Demzufolge gilt $\dot{y}(t) \geq 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Angenommen es existiert ein $t_1 \in \mathbb{R}$ mit $\dot{y}(t_1) > 0$. Dann folgt für alle $t \leq t_1$

$$\dot{y}(t) \geq \dot{y}(t_1) e^{\int_t^{t_1} \alpha(s)ds} > C > 0.$$

Dies ist erneut ein Widerspruch zur Positivität von y. Da y, wie bereits erwähnt, nicht konstant sein kann, existiert unter diesen Annahmen keine glatte, globale, positive Lösung auf $\mathbb{R} \times \Sigma$.

$\square$

Literaturverzeichnis

[1] R. Abraham, J. E. Marsden, T. Ratiu, *Manifolds, Tensor Analysis and Applications*, Springer, 1988

[2] T. Aubin, Équations différentielles non linéaires et problème de Yamabe concernant la courbure scalaire, *J. Math. Pures Appl. 55*, 269-296, 1976

[3] T. Aubin, *Nonlinear analysis on Manifolds - Monge Ampère Equations*, Springer, 1982

[4] A. N. Bernal, M. Sánchez (2005), Smoothness of time functions and the metric splitting of globally hyperbolic spacetimes, Comm. Math, Phys. 257, 43-50

[5] C. Bär, R. T. Wafo. Initial value problems for wave equations on manifolds. *Math. Phys. Anal. Geom.*, 18:7, 2015.

[6] C. Bär, N. Ginoux, F. Pfäffle, *Wave equations on Lorentzian Manifolds and Quantization*, Springer, 2006

[7] A. L. Besse, *Einstein Manifolds.* Springer, Berlin Heidelberg, 2008

[8] N. Ginoux, About the Lorentzian Yamabe problem, *Geometriae Dedicata 174*, 287-309, 2015

[9] R. Schoen, Conformal deformation of a Riemannian metric to constant scalar curvature, *J. Differential Geom., Volume 20, Number 2*, 479-495, 1984

[10] M. E. Taylor. *Partial Differential Equations III.* Springer, New York, 1996.

[11] N. Trudinger, Remarks concerning the conformal deformation of Riemannian structures on compact manifolds, *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa - Classe di Scienze, Serie 3, Volume 22, no. 2*, 265-274, 1968

[12] K. Uhlenbeck, Bounded sets and Finsler structures for manifolds of maps, *J. Differential Geom., Volume 7, Number 3-4*, 585-595, 1972

[13] H. Yamabe, On a deformation of Riemannian structures on compact manifolds, *Osaka Math. J., Volume 12, Number 1*, 21-37, 1960