



Universität Potsdam

Sebastian Reich

Algebrodifferentialgleichungen und Vektorfelder auf Mannigfaltigkeiten

first published in:

Wissenschaftliche Zeitschrift der Technische Universität Dresden /
Separatreihe. 4, Elektrotechnik, Elektronik 38 (1989) 1, S. 217-220

Postprint published at the Institutional Repository of the Potsdam University:

In: Postprints der Universität Potsdam

Mathematisch-Naturwissenschaftliche Reihe ; 160

<http://opus.kobv.de/ubp/volltexte/2010/4729/>

<http://nbn-resolving.de/urn:nbn:de:kobv:517-opus-47290>

Postprints der Universität Potsdam

Mathematisch-Naturwissenschaftliche Reihe ; 160

Algebrodifferentialgleichungen und Vektorfelder auf Mannigfaltigkeiten

In diesem Beitrag wird der Zusammenhang zwischen Algebrodifferentialgleichungen (ADGL) und Vektorfeldern auf Mannigfaltigkeiten untersucht. Dazu wird zunächst der Begriff der regulären ADGL eingeführt, wobei unter einer regulären ADGL eine ADGL verstanden wird, deren Lösungsmenge identisch mit der Lösungsmenge eines Vektorfeldes ist. Ausgehend von bekannten Aussagen über die Lösungsmenge eines Vektorfeldes werden analoge Aussagen für die Lösungsmenge einer regulären ADGL abgeleitet. Es wird eine Reduktionsmethode angegeben, die auf ein Kriterium für die Regularität einer ADGL und auf die Definition des Index einer nichtlinearen ADGL führt. Außerdem wird gezeigt, daß beliebige Vektorfelder durch reguläre ADGL so realisiert werden können, daß die Lösungsmenge des Vektorfeldes mit der realisierenden ADGL identisch ist. Abschließend werden die für autonome ADGL gewonnenen Aussagen auf den Fall der nichtautonomen ADGL übertragen.

1. Einleitung

Gegenwärtig werden zur mathematischen Modellierung des Zeitverhaltens elektrischer Netzwerke und mechanischer Systeme bevorzugt Algebrodifferentialgleichungen (ADGL) oder Vektorfelder auf Mannigfaltigkeiten gewählt. Dabei wurde die Modellierung des Zeitverhaltens elektrischer Netzwerke durch Vektorfelder erstmals in einer Arbeit von Smale [6] 1972 beschrieben, während ADGL schon lange davor zur mathematischen Beschreibung des Zeitverhaltens elektrischer Netzwerke benutzt wurden. Durch die Entwicklung numerischer Integrationsverfahren für ADGL in den siebziger Jahren haben ADGL große Bedeutung für die numerische Analyse des Zeitverhaltens erlangt. Andererseits konnten durch die Modellierung des Zeitverhaltens durch Vektorfelder wichtige Aussagen zur qualitativen Analyse des Zeitverhaltens gewonnen werden.

In der Vergangenheit wurden beide mathematischen Modelle im wesentlichen unabhängig voneinander verwendet und der Zusammenhang zwischen beiden Modellen nur in geringem Maße untersucht (z. B. in [10]). Der Autor ist der Ansicht, daß weitere Fortschritte bei der quantitativen und qualitativen Analyse elektrischer Netzwerke und mechanischer Systeme durch die Verknüpfung beider Zugänge zur Modellierung des Zeitverhaltens erreicht werden können. Deshalb soll in diesem Artikel der Zusammenhang zwischen ADGL und Vektorfeldern diskutiert werden, wobei nichtüberführbare ADGL bzw. ADGL mit einem globalen Index größer eins, die gegenwärtig in der Literatur [1 bis 4] verstärkt behandelt werden, einen Schwerpunkt dieser Arbeit bilden.

2. Grundlegende Definitionen und Aussagen

Definition: Ein Tripel (E, A, f) heißt (autonome) ADGL, wenn E ein reeller Vektorraum der Dimension n ist und $A : E \rightarrow L(E, E)$, $f : E \rightarrow E$ glatte Abbildungen sind.

Eine glatte Abbildung $c : I \rightarrow E$, wobei I ein Intervall der reellen Achse ist, wird Lösung der ADGL (E, A, f) genannt, wenn $A(c(t)) \cdot \dot{c}(t) = f(c(t))$ für alle $t \in I$ gilt. \square

Der Vektorraum E einer ADGL (E, A, f) wird im weiteren als Konfigurationsraum bezeichnet. Die Forderung nach Glattheit der Abbildungen in obiger Definition sowie in allen weiteren Definitionen wurde zur Vereinfachung der Darstellung gewählt. Wobei der Begriff der Glattheit im Sinne

von C^∞ verwendet wird. $Df : TM \rightarrow E$ bezeichne die Ableitung einer differenzierbaren Abbildung $f : M \rightarrow E$, wobei M eine Mannigfaltigkeit, TM das zu M gehörige Tangentialbündel und E ein reeller Vektorraum ist. Eine glatte, bijektive Abbildung $f : E \rightarrow E$ ist ein Diffeomorphismus, wenn auch die inverse Abbildung $f^{-1} : E \rightarrow E$ eine glatte Abbildung ist. (Für eine Einführung in die Theorie der Mannigfaltigkeiten sei auf [7] und [12] verwiesen.)

Definition: (E, A, f) und (E, A', f') seien ADGL über dem gleichen Konfigurationsraum E . (E, A, f) ist isomorph zu (E, A', f') , wenn es einen glatten Diffeomorphismus $u : E \rightarrow E$ und eine glatte Abbildung $S : E \rightarrow L(E, E)$ gibt, für die $S(e)$ für alle $e \in E$ nichtsingulär ist und $f(e) = S(e) \cdot f'(u(e))$, $A(e) = S(e) \cdot A'(u(e)) \cdot Du(e)$ für alle $e \in E$ gilt. \square

Aussage: Die ADGL (E, A, f) sei isomorph zur ADGL (E, A', f') . Dann ist die Abbildung $c : I \rightarrow E$ genau dann Lösung der ADGL (E, A, f) , wenn $c' := u \circ c : I \rightarrow E$ Lösung der ADGL (E, A', f') ist. \square

Aus Platzgründen muß auf den Beweis dieser Aussage, wie auch aller weiteren, verzichtet werden. Die in der folgenden Definition vereinbarte Menge ist für die weitere Diskussion von zentraler Bedeutung.

Definition: (E, A, f) sei eine ADGL. Die Menge Σ^c aller der Punkte des Konfigurationsraumes E , durch die eine Lösung der ADGL verläuft, wird Menge der konsistenten Anfangswerte genannt. \square

Im folgenden wird der Begriff des Vektorfeldes auf einer Mannigfaltigkeit als Verallgemeinerung des Begriffs der gewöhnlichen Differentialgleichung eingeführt, der vor allem in der Theorie der dynamischen Systeme [11] starke Anwendung gefunden hat. (Für eine Einführung in die Grundbegriffe sei auf [7] verwiesen.)

Definition: Eine glatte Abbildung $v : M \rightarrow TM$ heißt Vektorfeld, wenn $x = p(v(x))$ für alle $x \in M$ gilt, wobei M eine glatte Mannigfaltigkeit ist und TM das zugehörige Tangentialbündel mit der Bündelprojektion $p : TM \rightarrow M$ bezeichnet.

Eine glatte Abbildung $w : I \rightarrow M$, wobei I ein Intervall der reellen Achse bezeichnet, ist genau dann Lösung des Vektorfeldes, wenn $\dot{w}(t) = v(w(t))$ für alle $t \in I$ gilt, wobei $\dot{w} : I \rightarrow TM$ die kanonische Hebung (siehe [12]) von $w : I \rightarrow M$ ist. \square

Es wird nun der Begriff der regulären ADGL eingeführt, als einer ADGL, der auf eindeutige Weise ein Vektorfeld auf der Menge der konsistenten Anfangswerte Σ^c zugeordnet werden kann.

Definition: Eine ADGL (E, A, f) wird reguläre ADGL genannt, wenn die Menge Σ^c eine glatte Mannigfaltigkeit ist und genau ein glattes Vektorfeld $v: \Sigma^c \rightarrow T\Sigma^c$ existiert, so daß $A(j(s)) \cdot Dj(v(s)) = f(j(s))$ für alle $s \in \Sigma^c$ gilt, wobei $j: \Sigma^c \rightarrow E$ die natürliche Einbettung von Σ^c in E ist. \square

Satz: (E, A, f) sei eine reguläre ADGL, dann gilt, daß $w: I \rightarrow \Sigma^c$ dann und nur dann Lösung des Vektorfeldes $v: \Sigma^c \rightarrow T\Sigma^c$ ist, wenn $c := j \circ w: I \rightarrow E$ Lösung der ADGL (E, A, f) ist. \square

Dieser Satz zeigt, daß physikalische und technische Systeme, deren Zeitverhalten durch eine reguläre ADGL modelliert werden kann, auch durch ein Vektorfeld auf einer Mannigfaltigkeit beschrieben werden kann. Außerdem lassen sich damit alle bekannten Aussagen über Existenz, Eindeutigkeit, Fortsetzbarkeit und Abhängigkeit von den Anfangswerten der Lösungen von Vektorfeldern auf die Lösungen regulärer ADGL übertragen.

Aussage: (E, A, f) sei eine reguläre ADGL. Dann gilt:

- (i) Für jeden Punkt $s \in \Sigma^c$ existiert genau eine maximale Lösung $c: I \rightarrow E$ der ADGL, so daß $s = c(t_0)$ für ein gegebenes $t_0 \in I$ gilt.
- (ii) Jede Lösung $c: I \rightarrow E$ hängt zu allen Zeitpunkten $t \in I$ glatt von dem Wert $s = c(t) \in \Sigma^c$ der Lösung zu diesem Zeitpunkt ab. \square

Beispiel 1: Gegeben sei eine eindimensionale Mannigfaltigkeit M . Für diese Mannigfaltigkeit läßt sich ein Kurvenverfolgungsalgorithmus wie folgt angeben:

Auf der Mannigfaltigkeit M wird ein Vektorfeld $v: M \rightarrow TM$ durch die Zuordnung $x \rightarrow 1$ definiert, wobei $1 \in T_x M$ das Einselement von $T_x M \simeq R$ entsprechend einer gewählten Orientierung von M ist (Bild 1).

Für den Fall, daß M in den R^2 eingebettet ist (Bild 2) und mit einer Abbildung $g: R^2 \rightarrow R$ durch $M := \{(x_1, x_2) \in R^2: g(x_1, x_2) = 0\}$ dargestellt werden kann, hat Haase [8] folgende ADGL zur Kurvenverfolgung vorgeschlagen:

(i) $E := R^4, \quad e = (x_1, x_2, y_1, y_2) \in E,$

(ii) $A(e) := \begin{pmatrix} 1 & 0 & | & 0 & 0 \\ 0 & 1 & | & 0 & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 & 0 \end{pmatrix},$

(iii) $f(e) := \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_1^2 + y_2^2 - 1 \\ g(x_1, x_2) \end{pmatrix},$

(iv) für alle $(y_1, y_2) \in R^2$ gilt entweder

$$(D_1 g(x_1, x_2) \cdot y_2 + D_2 g(x_1, x_2) \cdot y_1) > 0$$

oder

$$(D_1 g(x_1, x_2) \cdot y_2 + D_2 g(x_1, x_2) \cdot y_1) < 0.$$

Die Festlegungen (i)...(iii) definieren eine ADGL (E, A, f) , und (iv) legt eine Orientierung auf M fest. In Abschnitt 3 wird gezeigt, daß diese ADGL regulär ist und daß das der ADGL zugeordnete Vektorfeld dem oben angegebenen Vektorfeld entspricht.

3. Reguläre ADGL und ADGL mit dem Index i

Definition: Eine ADGL (E, A, f) heißt normale ADGL, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

- (i) Für alle $e \in E$ gilt $\text{rank}(A(e)) = r$ ($0 < r < n$).
- (ii) Die Menge $\Sigma := \{e \in E: f(e) \in \text{im}(A(e))\}$ ist eine glatte Mannigfaltigkeit der Dimension r . \square

Die Mannigfaltigkeit Σ aus obiger Definition wird im weiteren als Zwangsmannigfaltigkeit bezeichnet. Für zwei Abbildungen $R: E \rightarrow L(E, E)$ und $Q: E \rightarrow L(E, E)$ bzw. $g: E \rightarrow E$ sei die Verknüpfung $*$ durch $R * Q(e) = R(e) \cdot Q(e)$ bzw. $R * g(e) = R(e) \cdot g(e)$ definiert. In der folgenden Aussage wird gezeigt, wann für eine ADGL, für die die Forderung (i) aus obiger Definition erfüllt ist, auch (ii) gilt.

Aussage: (E, A, f) sei eine ADGL, für die $\text{rank}(A(e)) = r$ für alle $e \in E$ ist, dann gilt:

- (i) Es existiert eine glatte Abbildung $R: E \rightarrow L(E, E)$, so daß $R(e)$ für alle $e \in E$ eine Projektion entlang von $\text{im}(A(e))$ ist.
- (ii) $e \in \Sigma$ genau dann, wenn $R * f(e) = 0$.
- (iii) Σ ist glatte Mannigfaltigkeit der Dimension r , wenn $\text{rank}(D(R * f)(s)) = n - r$ für alle $s \in \Sigma$ ist.
- (iv) Wenn Σ glatte Mannigfaltigkeit ist, so ist $T_s \Sigma = \ker \times (D(R * f)(s))$ für alle $s \in \Sigma$. \square

Definition: Ein ADGL (E, A, f) heißt ADGL mit dem Index 1, wenn (E, A, f) eine normale ADGL ist und $A(s)(T_s \Sigma) = \text{im}(A(s))$ für alle $s \in \Sigma$ gilt. \square

Die ADGL mit dem Index 1 (in [9] auch als überführbare ADGL bezeichnet) sind die bisher am intensivsten untersuchten ADGL. Für diese Klasse von ADGL sind vielfältige Aussagen über die Lösungsmenge und über die numerische Behandlung bekannt [9]. Auch gibt es für ADGL mit dem Index 1 einige Arbeiten über die Beziehung von Vektorfeldern zu ADGL (z. B. [10]). Gegenwärtig spielen aber reguläre ADGL, die keine ADGL mit dem Index 1 sind und die z. B. bei der Analyse von mechanischen Systemen mit Zwangsbedingungen, bei der Analyse elektrischer Netzwerke oder bei der Diskretisierung der Navier-Stokes-Gleichung auftreten können [4], eine immer größere Rolle.

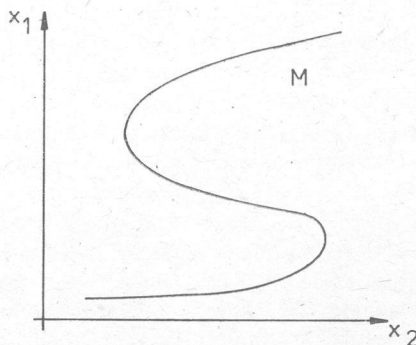
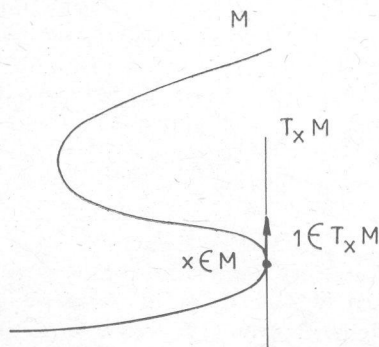


Bild 1 (links)

Bild 2 (rechts)

Deshalb wird im folgenden über eine Reduktionsmethode ein Kriterium angegeben, durch das für eine erweiterte Menge von ADGL deren Regularität nachgewiesen werden kann.

Definition: Eine ADGL (E, A, f) heißt *reduzierbar*, wenn (E, A, f) eine normale ADGL und keine ADGL mit dem Index 1 ist, wenn weiterhin eine glatte Abbildung $Q: E \rightarrow L(E, E)$ existiert, für die $Q(s)$ für alle $s \in \Sigma$ eine Projektion auf $T_s \Sigma$ ist und für die $Q(e)$ für alle $e \in E$ konstanten Rang hat und wenn schließlich die ADGL (E, A', f) eine normale ADGL mit $A' = A * Q$ ist. Der Übergang von der ADGL (E, A, f) zur ADGL (E, A', f) wird als *Reduktion* bezeichnet. \square

Aussage: (E, A, f) sei eine reduzierbare ADGL. (E, A', f) die durch Reduktion von (E, A, f) erhaltene ADGL. Dann ist die Abbildung $c: I \rightarrow E$ genau dann Lösung der ADGL (E, A, f) , wenn $c: I \rightarrow E$ auch Lösung der ADGL (E, A', f) ist. \square

Diese Aussage besagt, daß die hier vorgeschlagene Methode zur Reduktion einer ADGL, im Gegensatz zu anderen Reduktionsmethoden (z. B. in [3, 4]), die Lösungsmenge nicht verändert.

Definition: Eine normale ADGL (E, A, f) heißt ADGL mit dem Index i , wenn die ADGL $(i-1)$ mal reduzierbar ist und wenn die nach $(i-1)$ maliger Reduktion erhaltene ADGL $(E, A^{(i-1)}, f)$ eine ADGL mit dem Index 1 ist. \square

Aussage: Wenn die ADGL (E, A, f) eine ADGL mit dem Index i ist, dann sind alle ADGL, die isomorph zur ADGL (E, A, f) sind, ebenfalls ADGL mit dem Index i . \square

Satz: Eine ADGL (E, A, f) ist reguläre ADGL, wenn (E, A, f) eine ADGL mit dem Index i ($i > 0$) ist. Insbesondere sei $(E, A^{(i-1)}, f)$ die nach $(i-1)$ maliger Reduktion entstandene ADGL, dann gilt:

$$\Sigma^c = \Sigma^{(i-1)} := \{e \in E: f(e) \in \text{im}(A^{(i-1)}(e))\}. \quad \square$$

Die hier vorgeschlagene Definition des Index einer ADGL ist für die in diesem Beitrag betrachteten ADGL identisch mit der Definition des Index einer nichtlinearen ADGL von März in [2] und mit der von Gear, Lötstedt und Petzold in [3, 4] ebenfalls mittels einer Reduktionsmethode angegebenen Definition.

Beispiel 2: Die ADGL aus Beispiel 1 besitzt folgende Zwangsmannigfaltigkeit:

$$\Sigma := \{(x_1, x_2, y_1, y_2) \in R^4: g(x_1, x_2) = 0, y_1^2 + y_2^2 = 1\}.$$

Sie ist *reduzierbar*. Mit

$$Q(e) := \left(\begin{array}{cc|cc} a & -a & 0 & 0 \\ -b & b & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & c & -c \\ 0 & 0 & -d & d \end{array} \right),$$

$$a = D_2g(x_1, x_2) / (D_1g(x_1, x_2) + D_2g(x_1, x_2)),$$

$$b = D_1g(x_1, x_2) / (D_1g(x_1, x_2) + D_2g(x_1, x_2)),$$

$$c = y_2 / (y_1 + y_2),$$

$$d = y_1 / (y_1 + y_2)$$

und

$$A'(e) := A * Q(e) = \left(\begin{array}{cc|ccc} a & -a & 0 & 0 & 0 \\ -b & b & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right),$$

erhält man die *reduzierte ADGL* (E, A', f) .

Die neue Zwangsmannigfaltigkeit ist:

$$\Sigma' := \{(x_1, x_2, y_1, y_2) \in R^4: g(x_1, x_2) = 0, y_1^2 + y_2^2 = 1, D_1g(x_1, x_2) \cdot y_1 + D_2g(x_1, x_2) \cdot y_2 = 0\}.$$

Die ADGL (E, A', f) ist ADGL mit dem Index 1, und damit gilt $\Sigma^c = \Sigma'$. Die ursprüngliche ADGL (E, A, f) ist somit ADGL mit dem Index 2.

Bemerkung: Die Mannigfaltigkeit Σ' besteht aus zwei nichtzusammenhängenden Mannigfaltigkeiten Σ'_1 und Σ'_2 . Durch Einführung einer Orientierung auf der Mannigfaltigkeit M , d. h. durch die Forderung, daß die Lösungen nicht nur der ADGL genügen, sondern auch (iv) in Beispiel 1 erfüllen, wird Σ^c eingeschränkt auf $\Sigma^c = \Sigma'_1$ bzw. auf $\Sigma^c = \Sigma'_2$. Die Mannigfaltigkeiten Σ'_1 und Σ'_2 sind diffeomorph zur Mannigfaltigkeit M . $u_i: M \rightarrow \Sigma'_i$ ($i = 1, 2$) bezeichne die entsprechenden Diffeomorphismen, für die $x = p(u_i(x))$ für alle $x \in M$ gelten soll, wobei die Projektion $p: R^4 \rightarrow R^2$ durch die Zuordnung $(x_1, x_2, y_1, y_2) \mapsto (x_1, x_2)$ gegeben ist. Es sei $v: M \rightarrow TM$ das in Beispiel 1 definierte Vektorfeld. Die Orientierung auf M sei so gewählt, daß $\Sigma^c = \Sigma'_1$ gilt. Weiterhin sei $v': \Sigma^c \rightarrow T\Sigma^c$ das der ADGL (E, A, f) eindeutig zugeordnete Vektorfeld. Für alle $x \in M$ gilt dann $v'(u_1(x)) = Du_1(x) \cdot v(x)$. Daraus läßt sich schlußfolgern, daß die von Haase vorgeschlagene ADGL unter Einbeziehung der Forderung (iv) von Beispiel 1 tatsächlich dem in Beispiel 1 vorgeschlagenen Vektorfeld zur Kurvenverfolgung entspricht.

4. Realisierung von Vektorfeldern durch ADGL

Definition: Eine ADGL mit dem Index- i wird *Realisierung* des Vektorfeldes $v: M \rightarrow TM$ genannt, wenn $\Sigma^c = M \subset E$ ist und wenn $A(j(s)) \cdot Dj(v(s)) = f(j(s))$ für alle $s \in M$ gilt. Wobei $j: M \rightarrow E$ die natürliche Einbettung von M in E ist. \square

Der nun folgende Satz zeigt, daß jedes physikalische oder technische System, dessen Zeitverhalten durch ein glattes Vektorfeld modelliert werden kann, auch durch eine ADGL mit dem Index i modelliert werden kann.

Satz: Jedes glatte Vektorfeld $v: M \rightarrow TM$ ist durch eine ADGL mit dem Index i ($i > 0$) realisierbar. \square

Eine für die Anwendung sehr wichtige Klasse von ADGL bilden die *semiexpliziten ADGL*. So kann z. B. die Analyse elektrischer Netzwerke als auch mechanischer Systeme auf ADGL diesen Typs führen.

Definition: Eine ADGL (E, A, f) heißt *semiexplizite ADGL*, wenn $A(e) = A_0$ mit $A_0 \in L(E, E)$ für alle $e \in E$ gilt. \square

Es zeigt sich nun, daß die Einschränkung auf semiexplizite ADGL Konsequenzen auf die Realisierbarkeit von Vektorfeldern durch semiexplizite ADGL mit dem Index 1 hat.

Aussage: Ein Vektorfeld $v: M \rightarrow TM$ kann dann und nur dann durch eine semiexplizite ADGL mit dem Index 1 realisiert werden, wenn eine Projektion $p: E \rightarrow E_1$ mit entsprechend gewähltem $E = E_1 \times E_2$ existiert, so daß die Einschränkung der Projektion auf M ein Diffeomorphismus ist. Jedes Vektorfeld $v: M \rightarrow TM$ kann durch eine semiexplizite ADGL mit dem Index i ($i > 1$) realisiert werden. \square

Beispiel 3: Wenn die zu verfolgende Kurve aus Beispiel 1 im R^2 wie folgt beschrieben werden kann: $M := \{(x_1, x_2) \in R^2: x_1 = g(x_2)\}$, so existiert eine semiexplizite ADGL mit dem Index 1 zur Kurvenverfolgung, wie z. B.: $\dot{x}_2 = 1$, $0 = x_1 - g(x_2)$. Im allgemeinen läßt sich aber die Mannigfaltigkeit M nur durch eine implizite Funktion beschreiben, die nicht in eine explizite Form überführbar ist [8]. Dann

gibt es keine semiexplizite ADGL mit dem Index 1 zur Kurvenverfolgung, sondern nur semiexplizite ADGL mit dem Index i ($i > 1$), wie z. B. die ADGL von Haase aus dem Beispiel 1.

5. Nichtautonome ADGL

Die nichtautonome ADGL $B(c(t), t) \dot{c}(t) = g(c(t), t)$ mit $c(t) \in R^k$ kann wie folgt in eine autonome ADGL umgewandelt werden:

$$B(c(t), d(t)) \cdot \dot{c}(t) = g(c(t), d(t)) \\ \dot{d}(t) = 1.$$

Damit erhält man die folgende ADGL (E, A, f) :

(i) $E := R^{k+1}, \quad (x, s) = e \in E,$

(ii) $A(x, s) := \begin{pmatrix} B(x, s) & | & 0 \\ 0 & & | & 1 \end{pmatrix},$

(iii) $f(x, s) := \begin{pmatrix} g(x, s) \\ 1 \end{pmatrix}.$

Somit lassen sich alle Aussagen aus Abschnitt 2...4 auch auf den nichtautonomen Fall übertragen. Für die oben erhaltene ADGL soll noch eine spezielle Reduktion, die der besonderen Struktur dieser ADGL entspricht, eingeführt werden. Zunächst wird die ADGL (E, A, f) , wenn sie reduzierbar ist, normal reduziert. (E, H, f) sei die reduzierte ADGL mit

$$H(x, s) := A * Q(x, s) = \begin{pmatrix} H_1(x, s) & | & H_2(x, s) \\ H_3(x, s) & & | & H_4(x, s) \end{pmatrix}.$$

Es existiert dann eine glatte Abbildung $S: E \rightarrow L(E, E)$, die durch

$$S(x, s) := \begin{pmatrix} I & | & H_4^{-1}(x, s) \cdot H_2(x, s) \\ 0 & & | & 1 \end{pmatrix}$$

definiert wird und die für alle $e \in E$ nichtsingulär ist. $S * H$ werde wie folgt geschrieben:

$$S * H(x, s) := \begin{pmatrix} B'(x, s) & | & 0 \\ C(x, s) & & | & D(x, s) \end{pmatrix}.$$

Man erhält dann als reduzierte ADGL die ADGL (E, A', f') mit

$$A'(x, s) := \begin{pmatrix} B'(x, s) & | & 0 \\ 0 & & | & 1 \end{pmatrix}$$

und

$$f'(x, s) := S * f(x, s) = \begin{pmatrix} g'(x, s) \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Die reduzierte ADGL (E, A', f') hat wieder die Struktur der ursprünglichen ADGL und kann als nichtautonome ADGL $B'(c(t), t) \cdot \dot{c}(t) = g'(c(t), t)$ geschrieben werden.

7. Zusammenfassung und Ausblick

In diesem Beitrag wurden nichtlineare ADGL untersucht, wobei besonders deren Verhältnis zu Vektorfeldern auf Mannigfaltigkeiten im Vordergrund stand. Es zeigte sich, daß das Zeitverhalten von physikalischen und technischen Systemen in vielen Fällen entweder durch reguläre ADGL oder durch Vektorfelder modelliert werden kann. Der Autor ist der Ansicht, daß beide Darstellungsformen gleichermaßen wichtig sind. Während Vektorfelder vorwiegend für eine qualitative Analyse [11] des Zeitverhaltens geeignet sind, werden ADGL bevorzugt zur quantitativen Analyse mittels numerischer Methoden benutzt. Dabei hat sich in letzter Zeit gezeigt, daß die Aussagen über die Stabilität und Konvergenz der bisher verwendeten numerischen Integrationsverfahren vom Index der betreffenden ADGL abhängen [3, 4, 5, 9]. So können z. B. numerische Integrationsverfahren, deren Konvergenz und Stabilität für ADGL mit dem Index 1 nachgewiesen ist, zu großen numerischen Fehlern führen, wenn sie auf ADGL mit dem Index i ($i > 1$) angewendet werden.

Gegenwärtig arbeitet der Autor an einer Verallgemeinerung der in diesen Beitrag vorgestellten Theorie im Sinne schwächerer Differenzierbarkeitsforderungen und an der Formulierung einer Bifurkationstheorie für ADGL. Des weiteren sollen die hier vorgestellten Aussagen zu einem besseren Verständnis der numerischen Integrationsverfahren für ADGL führen.

Literatur

- [1] Campbell, S. L.: Singular systems of differential equations. — 1. Aufl. — San Francisco/London/Melbourne: Pitman, 1980. — 145 S.
- [2] März, R.: Some new results concerning index-3 differential-algebraic equations. — Humboldt-Univ. zu Berlin, Sektion Math., Preprint Nr. 141, 1987. — 27 S.
- [3] Gear, C. W.; Petzold, L. R.: ODE methods for the solution of differential/algebraic systems. — In: SIAM J. NUMER. ANAL. 21 (1984) 6. — S. 716 to 728
- [4] Lötstedt, P.; Petzold, L. R.: Numerical solution of nonlinear differential equations with algebraic constraints I. — In: Mathematics of Computation 46 (1986) 174. — S. 491–516
- [5] Petzold, L. R.; Lötstedt, P.: Numerical solution of nonlinear differential equations with algebraic constraints II. — In: SIAM J. SCI. STAT. COMPUT. 7 (1986) 3. — S. 720–733
- [6] Smale, S.: On the mathematical foundation of electrical circuit theory. — In: J. Diff. Geom. 7 (1972). — S. 193–210
- [7] Arnold, V. I.: Gewöhnliche Differentialgleichungen. — 1. Aufl. — Berlin: Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1979. — 275 S.
- [8] Haase, J.: Verfahren zur Beschreibung und Berechnung des Klemmverhaltens resistiver Netzwerke. — 1981. — 165 S. — Dresden, Techn. Univ., Fak. Elektrotechnik/Elektronik, Diss. A
- [9] Griepentrog, E.; März, R.: Differential-algebraic equations and their numerical treatment. — 1. Aufl. — Leipzig: BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, 1986. — 220 S.
- [10] Rheinboldt, W. C.: Differential-algebraic systems as differential-equations on manifolds. — Univ. of Pittsburgh, Inst. for Comp. Math. and Applications, Technical Report ICMA-83-55, 1983. — 15 S.
- [11] Guckenheimer, J.; Holmes, P.: Nonlinear oscillations, dynamical systems, and bifurcation of vector fields. — 1. Aufl. — New York/Berlin (West)/Heidelberg/Tokyo: Springer-Verlag, 1983. — 254 S.
- [12] Dieudonné, J.: Grundzüge der modernen Analysis 3. — 1. Aufl. — Berlin: Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1976. — 396 S.

Verfasser:

Dipl.-Ing. Sebastian Reich
Sektion Informationstechnik der TU Dresden

Schlüsselwörter: Algebrodifferentialgleichung — Vektorfeld auf einer Mannigfaltigkeit — Index und Reduktion einer Algebrodifferentialgleichung

Ключевые слова: дифференциально-алгебраическое уравнение — векторное поле на многообразии — индекс и приведение дифференциально-алгебраического уравнения

Key terms: differential-algebraic equation — vector field on a manifold — index and reduction of a differential-algebraic equation