

Institut für Physik und Astronomie
Arbeitsgruppe Statistische Physik und Chaostheorie

Die Rekonstruktion invarianter Phasenmodelle aus Daten

Dissertation zur Erlangung des akademischen Grades
'doctor rerum naturalis'
(Dr. rer. nat.)
in der Wissenschaftsdisziplin „Theoretische Physik“

eingereicht an der
Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Universität Potsdam

von
Dr. phil. Björn Christian Kralemann

Potsdam, Februar 2010

Dieses Werk ist unter einem Creative Commons Lizenzvertrag lizenziert:
Namensnennung - Keine kommerzielle Nutzung - Weitergabe unter gleichen
Bedingungen 3.0 Deutschland

Um die Bedingungen der Lizenz einzusehen, folgen Sie bitte dem Hyperlink:
<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/de/>

Online veröffentlicht auf dem

Publikationsserver der Universität Potsdam:

URL <http://opus.kobv.de/ubp/volltexte/2010/4505/>

URN [urn:nbn:de:kobv:517-opus-45057](http://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:kobv:517-opus-45057)

<http://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:kobv:517-opus-45057>

Abstract

The aim of this work is to bridge the gap between the theoretical description of the phase dynamics of coupled oscillators and the application of the theory to model reconstruction from time series analysis. In the theory, the phase of a self-sustained oscillator is defined in an unambiguous way, whereas the standard techniques used to estimate phases from given time series provide observable-dependent results, so that generally these estimates deviate from the true phase. To stress this crucial issue, we term the observable-dependent phase-like variables as *protophases*. The main goal of this work is to develop a deterministic transformation from arbitrary protophases to the true, unique phase of the self-sustained oscillator. This approach allows us to obtain an invariant description of coupled oscillators and of their interaction. The application of the transformation and its efficiency are illustrated by means of numerical examples, as well as by the reconstruction of phase models of the cardiorespiratory interaction from multivariate time series of ECG, pulse and respiration. Next, the transformation from protophases to phases is extended for the case of three coupled oscillators. Finally, we go beyond the phase approximation and extend the phase transformation for autonomous oscillators to the case when the amplitude dynamics cannot be neglected. This technique for example allows us to compute numerically the isochrones of the chaotic Roessler system.

Zusammenfassung

Ziel dieser Arbeit ist die Überwindung einer Differenz, die zwischen der Theorie der Phase bzw. der Phasendynamik und ihrer Anwendung in der Zeitreihenanalyse besteht: Während die theoretische Phase eindeutig bestimmt und invariant unter Koordinatentransformationen bzw. gegenüber der jeweils gewählten Observable ist, führen die Standardmethoden zur Abschätzung der Phase aus gegebenen Zeitreihen zu Resultaten, die einerseits von den gewählten Observablen abhängen und so andererseits das jeweilige System keineswegs in eindeutiger und invarianter Weise beschreiben. Um diese Differenz deutlich zu machen, wird die terminologische Unterscheidung von Phase und Protophase eingeführt: Der Terminus *Phase* wird nur für Variablen verwendet, die dem theoretischen Konzept der Phase entsprechen und daher das jeweilige System in invarianter Weise charakterisieren, während die observablen-abhängigen Abschätzungen der Phase aus Zeitreihen als *Protophasen* bezeichnet werden. Der zentrale Gegenstand dieser Arbeit ist die Entwicklung einer deterministischen Transformation, die von jeder Protophase eines selbsterhaltenden Oszillators zur eindeutig bestimmten Phase führt. Dies ermöglicht dann die invariante Beschreibung gekoppelter Oszillatoren und ihrer Wechselwirkung. Die Anwendung der Transformation bzw. ihr Effekt wird sowohl an numerischen Beispielen demonstriert - insbesondere wird die Phasentransformation in einem Beispiel auf den Fall von drei gekoppelten Oszillatoren erweitert - als auch an multivariaten Messungen des EKGs, des Pulses und der Atmung, aus denen Phasenmodelle der kardiorespiratorischen Wechselwirkung rekonstruiert werden. Abschließend wird die Phasentransformation für autonome Oszillatoren auf den Fall einer nicht vernachlässigbaren Amplitudenabhängigkeit der Protophase erweitert, was beispielsweise die numerische Bestimmung der Isochronen des chaotischen Rössler Systems ermöglicht.

Inhaltsverzeichnis

1	Übersicht	3
2	Einführung	5
2.1	Das Konzept der Phase	5
2.2	Die Bestimmung der Phase aus Daten	8
2.3	Das Invarianzproblem: Phase vs. Protophase	10
3	Phasentransformation: autonome Oszillatoren	16
3.1	Theorie	16
3.2	Anwendung	18
3.2.1	Van-der-Pol Oszillator mit Rauschen	19
3.2.2	Optimierung des Synchronisations-Index	22
4	Phasentransformation: gekoppelte Oszillatoren	24
4.1	Theorie	24
4.1.1	Die Phasentransformation	24
4.1.2	Die Invarianz der Phase	27
4.1.3	Die Rekonstruktion der Phasendynamik	28
4.2	Anwendung	30
4.2.1	Phasenmodell	30
4.2.2	Gekoppelte Van-der-Pol Oszillatoren	33
4.2.3	Gekoppelte Neuronen	35
4.2.4	Rekonstruktion der autonomen Frequenz	39
4.2.5	Drei gekoppelte Oszillatoren	44
5	Anwendung auf komplexe Systeme: Phasenmodelle der kardio-respiratorischen Kopplung	50
5.1	Protophasen komplexer Signale	50
5.1.1	Theorie	52
5.1.2	Numerischer Test: synthetisches EKG	55
5.2	Phasenmodelle der kardiorespiratorischen Wechselwirkung	58
6	Phasen abseits des Grenzyklus	64
6.1	Theorie	64
6.2	Anwendung	66
6.2.1	Landau-Stuart-Oszillator	66
6.2.2	Rössler-System	68
7	Zusammenfassung	71

Literatur	74
Appendix	80
A Sample Theorem für interpolierte Phasen	80
B Berechnung der Koeffizienten der Fourierreihen	83
C Lösung des Gleichungssystems der Phasentransformation	86
C.1 Iteration	86
C.2 Analytische Berechnung der Koeffizienten	87
D Phasentransformation für drei Oszillatoren	88

Kapitel 1

Übersicht

Die Ableitung der Gesetze der Wechselwirkung von Systemen aus ihrer beobachteten Dynamik ist eine grundlegende Aufgabe der Physik. Während für fundamentale, universelle Wechselwirkungen - wie z.B. die Gravitation - eine große Menge unterschiedlicher, speziell entwickelter Experimente zur Verfügung stehen, basiert die Analyse der je spezifischen Dynamik spezieller Systeme - die Rekonstruktion ihrer jeweils eigenen „Systemgesetze“ [1] - wesentlich auf der Auswertung reiner Beobachtungsdaten. Dies gilt in besonderem Maße, wenn es sich um Systeme handelt, in denen sich experimentelle Eingriffe aus ethischen oder ökologischen Gründen verbieten, wie z.B. im Fall von Organismen oder Ökosystemen, aber auch, wenn experimentelle Eingriffe problematisch sind, weil das System bereits sensibel gegenüber kleinsten Veränderungen der Randbedingungen ist. Die Analyse einzelner komplexer, rückgekoppelter und nicht-linearer Systeme hat sich zu einem hochgradig interdisziplinär verflochtenen Forschungsfeld entwickelt, der nicht-linearen Zeitreihenanalyse. Sie umfasst die Analyse so unterschiedlicher Systeme wie von Molekülen, Zellen, Organen, neuronalen Netzwerken, Schwingkreisen, Lasern, kognitiven Systemen, Ökosystemen, Städten und sozialen Gemeinschaften [2], durch die universelle, übergeordnete Theorie nicht-linearer dynamischer Systeme, auf deren Grundlage eine Reihe von Techniken zur Analyse und zur Rekonstruktion der zu Grunde liegenden dynamischen Gesetze gegebener Daten [3, 4] entwickelt wurden.

Ein Teilbereich dieser nicht-linearen Methoden befasst sich mit der Analyse und Modellierung der Daten dissipativer, periodischer Systeme - so genannter selbsterhaltender Oszillatoren - und basiert auf dem theoretischen Konzept der Phase. In diesem Bereich sind zwei Richtungen zu unterscheiden: Zum einen lässt sich die Dynamik der Oszillatoren über ihr Synchronisation bzw. über ihre Tendenz zur Synchronisation analysieren [5, 6], zum anderen lässt sich die Dynamik der Oszillatoren in eine Näherung erster Ordnung durch Phasenmodelle beschreiben [7]. Beide Richtungen basieren einerseits auf dem theoretischen Konzept der Phase und sind andererseits darauf angewiesen, dass in ihrer Anwendung die Phase aus skalaren Zeitreihen bestimmt wird. Leider genügen die Standardmethoden zur Bestimmung der Phase aus skalaren Zeitreihen nicht dem theoretischen Konzept der Phase und führen insbesondere nicht zu invarianten Resultaten - es besteht eine Lücke zwischen der Theorie der Phase und ihrer Anwendung in der Datenanalyse. Um die fundamentale Eigenschaft der Invarianz zu betonen, wird daher die Unterscheidung von *Phase* und *Protophase*

eingeführt: Protophasen sind 2π -periodische Variablen, die von der Observablen abhängen, aus der sie berechnet wurden, während *die* Phase eines Systems eine 2π -periodische Variable ist, die gegenüber den zur Berechnung verwendeten Observablen unabhängig ist und sich daher aus allen Observablen eines Systems ergibt.¹ In der vorliegenden Arbeit wird eine Methode entwickelt, um aus beobachteten bzw. gemessenen Zeitreihen Gleichungen der Phasendynamik zu rekonstruieren, die *invariant* gegenüber der jeweils gewählten Observablen des Systems sind. Die Grundlage dieser Methode zur Berechnung der Phase und so der Phasenmodelle ist eine Transformation, die von allen beliebigen Protophasen eines System zu *der einzigen* Phase dieses Systems führt und so die Lücke zwischen Theorie und Anwendung schließt.

Diese Arbeit beschäftigt sich demnach mit dem Rekonstruktion dynamischer Gesetzmäßigkeiten schwach wechselwirkender oszillierender Systeme aus beobachteten Daten und ist daher relevant für viele Forschungsgebiete, wie etwa die Modellierung gekoppelter Laser [8], elektronischer Systeme [9], chemischer Reaktionen [10, 11, 12], der kardiorespiratorischen Wechselwirkung [13, 14], neuronaler Systeme [15] oder der funktionalen Konnektivität des Gehirns [16]. Die Arbeit gliedert sich wie folgt:

Im zweiten Kapitel werden das theoretische Konzept der Phase sowie Standardmethoden der Bestimmung von Protophasen aus skalaren Zeitreihen dargestellt, um dann an einem Beispiel das Invarianzproblem der Protophasenmodelle zu illustrieren, die Differenzierung zwischen Protophase und Phase einzuführen, sowie den der Phasentransformation zu Grunde liegenden konzeptionellen Ansatz zu skizzieren.

Im dritten Kapitel wird die Phasentransformation für autonome Oszillatoren entwickelt sowie an einigen Beispielen in ihrem Effekt studiert.

Im vierten Kapitel wird die Phasentransformation zur Anwendung auf gekoppelte Systeme erweitert und gleichermaßen durch Anwendungsbeispiele illustriert.

Das fünften Kapitel widmet sich der Anwendung der Methode auf empirische Messdaten des menschlichen Herzkreislaufsystems: Aus multivariaten Messungen des EKGs, des Pulses und der Atmung werden Phasenmodelle berechnet, die einerseits eine physiologisch plausible Wechselwirkung von Atmungs- und Herzdynamik offenlegen und andererseits zeigen, dass die hier entwickelte Methode auch bei derart unterschiedlichen und komplexen Observablen wie Puls und EKG zu näherungsweise invarianten Ergebnissen führt.

Das sechste Kapitel gibt einen Ausblick auf eine mögliche Weiterentwicklung des Ansatzes: Die Methode geht davon aus, dass die Trajektorie näherungsweise eindimensional ist, also sich in der Umgebung eines Grenzyklus bewegt, so dass Abhängigkeiten der Phase von der Amplitude vernachlässigt werden können. In diesem Abschnitt wird knapp skizziert, wie das Konzept der Phasentransformation zumindest für autonome Systeme so erweitert werden kann, dass auch für komplexere periodische Trajektorien eine Phase aus den Observablen eines Systems bestimmt werden kann.

¹Es sei darauf hingewiesen, dass in diesem Sinne viele der in der letzten Zeit veröffentlichten Modelle oder Studien, Modelle von Protophasen, aber nicht von Phasen sind bzw. auf ihnen beruhen. Vgl. z.B. [12, 17, 18, 24].

Kapitel 2

Einführung

In diesem Kapitel geht es darum, in die theoretischen Grundlagen der Arbeit - das Konzept der Phase - einzuführen, die mit der Anwendung dieses Konzepts in der Zeitreihenanalyse verbundene Problematik - das Invarianzproblem - zu verdeutlichen, und abschließend den hier eingeschlagenen Lösungsweg zu skizzieren. Diesen thematischen Aspekten entsprechend gliedert sich das Kapitel in drei Abschnitte.

2.1 Das Konzept der Phase

Das zentrale, dieser Arbeit zu Grunde liegende Konzept ist das der *Phase* eines periodisch oszillierenden Systems. Die Phase eines ungestörten, strikt periodischen Oszillators ist als eine Größe definiert, die innerhalb eines Zyklus eines periodischen Prozesses proportional zum Bruchteil der Periode um 2π zunimmt. Da der Zustandsraum eines solchen Oszillators 1-dimensional ist, bestimmt die Phase den Zustand des Oszillators eindeutig - sie parametrisiert das periodisch auftretende Muster der Dynamik [5]. Selbst wenn die Geschwindigkeit der Trajektorie variiert, die der Phase ist konstant - sie entwickelt sich gemäß der Frequenz $\omega_0 = 2\pi T_0^{-1}$ linear in der Zeit:

$$\dot{\phi} = \omega_0. \quad (2.1)$$

Die Theorie der Phasendynamik bzw. ihre Anwendung zur Zeitreihenanalyse beruht auf der Erweiterung dieser für den Idealfall eines strikt periodisch oszillierenden, ungestörten Oszillators definierten Konzeption auf Fälle, in denen die Trajektorie des Systems nicht mehr 1-dimensional ist, sondern auf Grund von Störungen - wie z.B. durch Rauschen oder durch die Kopplung von Oszillatoren - oder auf Grund von chaotischen Dynamiken von einer 1-dimensionalen Struktur abweicht.

Da es die 1-dimensionale Struktur der Trajektorie ist, die die eindeutige Beschreibung des Systemzustands durch die Phase ermöglicht, lässt sich die Konzeption in guter Näherung auf Systeme übertragen [5, 7], die sich trotz externer Einflüsse immer in der unmittelbaren Umgebung einer solchen 1-dimensionalen Trajektorie aufhalten, weil die Abweichungen orthogonal zur Trajektorie klein bzw. begrenzt sind. Diese Systeme werden als *selbsterhaltende Oszillatoren* bezeichnet: Es handelt sich um dissipative Systeme, in denen der Energieverbrauch

und die Energieaufnahme nicht-linear von der Amplitude abhängen, so dass diejenigen Werte der Amplitude, für die sich Energieverbrauch und Energieaufnahme kompensieren, einen Gleichgewichtszustand definieren, der vom System immer wieder selbstständig eingenommen wird. Dieser Gleichgewichtszustand wird als *Grenzzzyklus* bezeichnet und als Attraktor der Systemdynamik nach jeder Störung des Systems wieder erreicht, so dass man auch im Fall von schwachen Störungen in guter Näherung davon ausgehen kann, dass sich das System auf dem Grenzzzyklus befindet und somit eine definierte Phase besitzt [5]. Die Verwendung von Phasenmodellen zur Zeitreihenanalyse ist daher an die Bedingung gebunden, dass der externe Einfluss auf die Oszillatoren in diesem Sinne als schwach anzusehen ist.

Da Richtungen orthogonal zum Grenzzzyklus attraktiv sind werden Zustandsdifferenzen entlang dieser Richtungen durch die Dynamik abgebaut, so dass sie einen negativen Lyapunov-Exponenten aufweisen und stabil sind. Im Gegensatz dazu gibt es auf dem Grenzzzyklus keinen Punkt, der durch eine attraktive Dynamik ausgezeichnet wäre, so dass die Dynamik entlang des Grenzzzyklus weder stabil noch instabil, sondern neutral ist und Zustandsdifferenzen erhalten bleiben: Der Lyapunov-Exponent entlang des Grenzzzyklus ist Null. Die Phase eines Oszillators ist die Variable, die den Zustand des Systems entlang der Koordinate mit dem Lyapunov-Exponenten Null beschreibt [5]. Das bedeutet, dass eine Störung im Sinne einer kleinen Verschiebung im Zustandsraum völlig unterschiedliche Auswirkungen auf die Phase und die Koordinaten orthogonal zum Grenzzzyklus hat: Während die Komponente der Störung orthogonal zum Grenzzzyklus durch die attraktive Dynamik wieder kompensiert wird, bleibt die Störung der Phase erhalten. Die Phase erhält und enthält daher alle Informationen über die Geschichte eines gestörten selbsterhaltenden Oszillators, während die Richtungen orthogonal zum Grenzzzyklus gegenüber der Störung robust sind: Eine schwache Störung beeinflusst nur die Phase, nicht aber die Koordinaten orthogonal zum Grenzzzyklus, so dass die Dynamik eines gestörten Oszillators allein durch die Phasengleichung beschrieben werden kann. Diese für die Datenanalyse durch Phasenmodelle grundlegende These wird im Folgenden durch eine störungstheoretische Näherung begründet [7, 5].

Sei ein Oszillator mit einem stabilen Grenzzzyklus durch das dynamische System

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{F}(\vec{x}) + \epsilon\vec{p}(t) \quad (2.2)$$

gegeben, wobei $\vec{p}(t)$ eine externe Störung der autonomen Dynamik und ϵ ein kleiner Parameter ist, der die Stärke der Störung beschreibt. Die Annahme, dass die Störung klein ist, wird im Folgenden für eine störungstheoretische Näherung verwendet, indem nur Effekte erster Ordnung in ϵ betrachtet werden. Die Phase des ungestörten Oszillators sei auf dem Grenzzzyklus und in seiner unmittelbarer Umgebung¹ durch die Gleichung

$$\omega_0 = \frac{d\phi(\vec{x})}{dt} = \sum_k \frac{\partial\phi(\vec{x})}{\partial x_k} \frac{dx_k}{dt} \quad (2.3)$$

¹Die Erweiterung der Phasendefinition auf die Umgebung ist für stabile Grenzzyklen stets möglich [5].

gegeben, was mit der autonomen Dynamik des Oszillators $\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{F}(\vec{x})$

$$\omega_0 = \frac{d\phi(\vec{x})}{dt} = \sum_k \frac{\partial\phi(\vec{x})}{\partial x_k} F_k(\vec{x}) \quad (2.4)$$

ergibt. In Gl. (2.4) wird nun die autonome Dynamik durch die gestörte Dynamik ersetzt

$$\frac{d\phi(\vec{x})}{dt} = \sum_k \frac{\partial\phi(\vec{x})}{\partial x_k} (F_k(\vec{x}) + \epsilon p_k(t)), \quad (2.5)$$

was mit einer störungstheoretischen Näherung erster Ordnung in ϵ und Gl. (2.4)

$$\frac{d\phi(\vec{x})}{dt} = \omega_0 + \epsilon \sum_k \frac{\partial\phi(\vec{x})}{\partial x_k} p_k(t) \quad (2.6)$$

ergibt. Da sowohl der Parameter ϵ als auch die Abweichung der Trajektorie \vec{x} vom Grenzyklus \vec{x}_0 als klein angenommen werden, kann die Summe in erster Näherung auf dem Grenzyklus ausgewertet werden:

$$\frac{d\phi(\vec{x})}{dt} = \omega_0 + \epsilon \sum_k \frac{\partial\phi(\vec{x}_0)}{\partial x_k} p_k(t). \quad (2.7)$$

Da der Grenzyklus $\vec{x}_0(\phi)$ ein-eindeutig durch die Phase parametrisiert ist, definiert die Summe eine Funktion

$$q(\phi, t) = \sum_k \frac{\partial\phi(\phi)}{\partial x_k} p_k(t), \quad (2.8)$$

die allein von der Phase ϕ und der zeitabhängigen externen Störung $\vec{p}(t)$ abhängt, so dass sich die Dynamik eines gestörten selbsterhaltenden Oszillators in einer Näherung erster Ordnung allein durch seine Phasendynamik

$$\frac{d\phi}{dt} = \omega_0 + q(\phi, t) \quad (2.9)$$

beschreiben lässt.

Da das zentrale Interesse die Beschreibung der Wechselwirkung von Oszillatoren ist, muss das Konzept der Phase auf die Beschreibung gekoppelter Systeme übertragen werden. Diese Übertragung ergibt sich unmittelbar aus dem Ergebnis für gestörte Oszillatoren, Gl. (2.9), wenn man die Kopplung als eine Störung auffasst, die eine deterministische Funktion der Zustände der gekoppelten Oszillatoren ist. Die Dynamik der gekoppelten Oszillatoren ist dann durch

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{x}_1}{dt} &= \vec{F}_1(\vec{x}_1) + \epsilon_1 \vec{p}_1(\vec{x}_1, \vec{x}_2), \\ \frac{d\vec{x}_2}{dt} &= \vec{F}_2(\vec{x}_2) + \epsilon_2 \vec{p}_2(\vec{x}_2, \vec{x}_1) \end{aligned} \quad (2.10)$$

bestimmt. Aus analogen störungstheoretischen Überlegungen bzw. aus einer direkten Übertragung der Ergebnisse folgt dann unmittelbar die allgemeine Form der Phasendynamik gekoppelter Oszillatoren:

$$\begin{aligned} \dot{\phi}_1 &= \omega_1 + q^{(1)}(\phi_1, \phi_2), \\ \dot{\phi}_2 &= \omega_2 + q^{(2)}(\phi_2, \phi_1), \end{aligned} \quad (2.11)$$

wobei $q^{(1,2)}$ die in Bezug auf ihre Argumente 2π -periodischen *Kopplungsfunktionen* und ω_1, ω_2 die autonomen oder natürlichen Frequenzen der ungekoppelten Oszillatoren sind. Es sei darauf hingewiesen, dass auf Grund der Kopplung die beobachtete Frequenzen,

$$\Omega_{1,2} = \left\langle \frac{d\phi_{1,2}}{dt}(t) \right\rangle_t, \quad (2.12)$$

im Allgemeinen nicht mit den natürlichen oder autonomen Frequenzen $\omega_{1,2}$ übereinstimmen.

Die Phasendynamik gekoppelter Oszillatoren weist demnach zwei unterschiedliche Komponenten auf: Die konstanten Terme $\omega_{1,2}$, die *ausschließlich* die autonome Dynamik beschreiben, und die Kopplungsfunktionen $q^{(1,2)}$, die *ausschließlich* den jeweils externen Einfluss durch die Kopplung der Oszillatoren charakterisieren und daher immer auch von der jeweils externen Phase abhängen müssen.

Reale Systeme weisen grundsätzlich Rauschen auf, das, wenn es schwach ist, genauso wie Störungen oder die Kopplung durch die Phasendynamik beschrieben werden kann, indem Zufallsprozesse, ξ_1, ξ_2 , in die Gl. (2.11) aufgenommen werden:

$$\begin{aligned} \dot{\phi}_1 &= \omega_1 + q^{(1)}(\phi_1, \phi_2) + \xi_1(t), \\ \dot{\phi}_2 &= \omega_2 + q^{(2)}(\phi_2, \phi_1) + \xi_2(t). \end{aligned} \quad (2.13)$$

Das zentrale Ergebnis der skizzierten störungstheoretischen Erwägungen ist, dass diese Phasengleichungen im Bereich schwacher Kopplung eine im Sinne der durchgeführten Näherung erster Ordnung vollständige Beschreibung der Dynamik der gekoppelten Oszillatoren liefern. In allen weiteren Überlegungen und Anwendungen der Methode wird vorausgesetzt, dass die Kopplung so schwach ist, dass diese Phasennäherung der Systemdynamik gilt.

2.2 Die Bestimmung der Phase aus Daten

Während der Gegenstand des letzten Abschnitts die theoretischen Grundlagen des Konzepts der Phase waren, geht es in diesem Abschnitt um die Anwendung dieses Konzepts zur Datenanalyse - um die Bestimmung der Phase bzw. der Gleichungen der Phasendynamik aus gemessenen Zeitreihen² $X(t)$ von Oszillatoren. Das Resultat des nächsten Abschnitts vorwegnehmend ist anzumerken, dass die mit den bekannten Methoden aus Daten abgeschätzten Phasen i.A. nicht die im letzten Abschnitt dargestellten Eigenschaften aufweisen und des Weiteren ebenfalls im Gegensatz zum theoretischen Konzept der Phase keine Invarianten der Systeme sind. Aus diesem Grund werden sie bereits hier als *Protophasen* θ bezeichnet, während Phasen durch ϕ symbolisiert werden.

Die theoretisch einfachste und intuitivste Methode, um aus einer gemessenen Zeitreihe $X(t)$ eine Protophase $\Theta(t)$ zu bestimmen, basiert darauf, den Beginn einer Periode durch das Auftreten charakteristischer Muster, wie etwa die R-Zacke eines EKGs, oder durch den Schnitt der Trajektorie mit einer Poincaré Ebene zu markieren [30, 5]. Wenn die Zeitpunkte des Auftretens der markierten Ereignisse mit T_n bezeichnet werden, dann ist die Protophase durch die lineare

²Im Folgenden werden Zeitreihen durch große Buchstaben symbolisiert.

Interpolation

$$\Theta(t) = 2\pi \frac{t - T_n}{T_{n+1} - T_n} + 2\pi n, \quad T_n < t < T_{n+1} \quad (2.14)$$

bestimmt.

Diese Methode kann in einem sehr weiten Bereich periodischer Prozesse angewendet werden, da ihre einzige Voraussetzung die Existenz eines periodisch auftretenden Musters oder die Existenz eines abgrenzbaren Unterraums des Zustandsraums ist, der periodisch von der Trajektorie aufgesucht wird, und es zweifelhaft erscheint, ob eine Zeitreihe, die diese Eigenschaften nicht aufweist, überhaupt als periodisch bezeichnet werden kann. Auf der anderen Seite gehen durch diese Methode viele Informationen über die Phasendynamik verloren, da die Zeitreihe zur Bestimmung der Protophase nur einmal pro Periode gesampelt wird: Dem Nyquist-Shannon Theorem [31, 32] zu Folge gehen dadurch die Frequenzanteile mit $f > \frac{\omega_0}{2}$ in den Kopplungsfunktionen $q^{1,2}$ der Gl. (2.11) verloren und es kommt zu Artefakten durch Aliasing Effekte, siehe Appendix A. Diese Methode zur Bestimmung von Protophasen ist daher dann ungeeignet, wenn es - wie im Fall der Beschreibung der Wechselwirkung von Oszillatoren durch Phasenmodelle - um die möglichst präzise Erfassung der Details der Phasendynamik geht.

Dieses Schwäche der Markierungsmethode lässt sich durch eine Koordinatentransformation auf der Grundlage der Hilbert-Transformation umgehen, die im Gegensatz zur Markierungsmethode jeden Punkt der Zeitreihe $X(t)$ verwendet, um den zugehörigen Wert von $\Theta(t)$ zu bestimmen. Für eine gegebene Zeitreihe $X(t)$ ist die Hilbert-Transformation $\hat{X}(t)$ über die Faltung von $X(t)$ mit dem Kernel $K(x) = \frac{1}{x}$ definiert [33, 34, 5].³

$$\hat{X}(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{X(\tau)}{t - \tau} d\tau. \quad (2.15)$$

Die 2-dimensionale Einbettung des Signals $X(t)$ ist dann durch das komplexe Signal $X(t) + i\hat{X}(t)$ gegeben, aus dem dann die Protophase $\Theta(t)$ als Winkel der Trajektorie relativ zu einem frei wählbaren Ursprung O_0 bestimmt werden kann:

$$\Theta(t) = \arctan \left(\frac{\hat{X}(t) - \Im(O_0)}{X(t) - \Re(O_0)} \right). \quad (2.16)$$

Dieser Definition zu Folge wächst die Protophase $\Theta(t)$ in jeder Rotation der Trajektorie um den Ursprung O_0 um 2π an. Sie ist aber nur dann monoton, wenn überhaupt ein Ursprung O_0 existiert, bezüglich dessen die Dynamik eine Rotation um dieses Zentrum ist. Wenn die Trajektorie beispielsweise Schleifen aufweist, kann es unmöglich sein, O_0 so zu definieren, dass die Trajektorie immer O_0 umkreist und $\Theta(t)$ daher monoton ist. Dies ist normalerweise für Signale mit breitbandigem Spektrum und ohne deutlich herausstechende Spitzen der Fall

³Da die Hilbert-Transformation eine Faltung ist, lässt sie sich leicht über die Multiplikation der Fourier-Transformierten $F(X(t))$ und $F\left\{\frac{1}{x}\right\} = -i \cdot \pi \operatorname{sign}(\omega)$ berechnen. Die Hilbert-Transformation lässt sich daher in dem Sinne als optimale 2-dimensionale Einbettung auffassen, dass *jede* Frequenzkomponente des Signals $X(t)$ um $\frac{\pi}{2}$ verschoben wird, während Einbettungen durch verzögerte Koordinaten lediglich *eine* Frequenzkomponente und ihre Harmonischen auf diese Weise verschieben.

[35]. In solchen Fällen ist diese Methode nicht verwendbar, weil Phasen und Protophasen dann nicht monoton wachsen.

Wenn die Protophasen $\theta_1(t)$ und $\theta_2(t)$ gekoppelter Oszillatoren durch eine der beschriebenen Methoden aus den gemessenen Zeitreihen bestimmt sind, müssen aus ihnen die Gleichungen ihrer Dynamik,

$$\begin{aligned}\frac{d\theta_1}{dt} &= f^{(1)}(\theta_1, \theta_2), \\ \frac{d\theta_2}{dt} &= f^{(2)}(\theta_2, \theta_1),\end{aligned}\tag{2.17}$$

ermittelt werden, wobei $f^{(1),(2)}$ eine in beiden Argumenten 2π -periodische Funktion ist. Es ist daher naheliegend die Funktionen $f^{(1),(2)}$ als Fourierreihe ⁴

$$\frac{d\theta_1}{dt} = f^{(1)}(\theta_1, \theta_2) = \sum_{n,m} F_{n,m}^{(1)} e^{i(n\theta_1 + m\theta_2)}\tag{2.18}$$

darzustellen.⁵ Die Rekonstruktion der Koeffizienten $F_{n,m}^{(1),(2)}$ aus gegebenen Zeitreihen $\Theta_1(t)$ und $\Theta_2(t)$ ist nur dann möglich, wenn die Oszillatoren nicht synchronisiert sind, d.h. wenn die Protophasen nicht jeweils eine Funktion der anderen sind und die Verteilung der Daten daher den gesamten Zustandsraum, in diesem Fall den Torus $0 \leq \theta_{1,2} \leq 2\pi$, abdeckt, da im Fall der Synchronisation die Daten lediglich in einem 1-dimensionalen Unterraum lägen und daher eine Funktion zweier Variablen durch diese Daten unterbestimmt wäre. Offensichtlich lassen sich die Koeffizienten $F_{n,m}^{(1),(2)}$ desto besser bestimmen, je unabhängiger $\Theta_1(t)$ und $\Theta_2(t)$ sind, während die Qualität der Rekonstruktion mit ihrer Korrelation abnimmt.

Da die Basisfunktionen als Funktionen der Zeitreihen i.A. nicht orthogonal sind, können die Koeffizienten $F_{n,m}$ nicht unmittelbar und unabhängig voneinander bestimmt werden: In Appendix B finden sich zwei Methoden, um die Koeffizienten zu bestimmen.

2.3 Das Invarianzproblem: Phase vs. Protophase

Nachdem nun einerseits das theoretische Konzept der Phase bzw. der Phasendynamik und andererseits die Standardmethoden ihrer Abschätzung aus Daten dargestellt wurden, geht es in diesem Abschnitt darum, zu zeigen, dass diese beiden Aspekte nicht miteinander harmonieren, und daher die bereits im

⁴Obwohl das Konzept, die Dynamik von Oszillatoren durch ihre Phasendynamik zu beschreiben, nicht neu und inzwischen weit verbreitet ist - es geht zurück auf [7] -, ist die Verwendung eines solchen universellen Ansatzes einer Fourierreihenentwicklung zur Modellierung der Dynamik nicht unbedingt als Standardverfahren anzusehen. Häufig wird die Modellierung statt dessen apriori auf Funktionen der Phasendifferenz $\psi = \theta_1 - \theta_2$ eingeschränkt, was der häufig falschen apriori Annahme entspricht, dass die Phasendynamik keine Terme $e^{i(n\theta_1 - m\theta_2)}$ mit $n \neq m$ oder keine additiven Terme enthält. Vgl z.B. [17, 12]. Dieses Vorgehen entspricht der Verwendung einer gemittelten Dynamik, in der alle schnell variierenden Terme wegfallen und lediglich die resonanten, langsam variierenden Terme $\psi = \theta_1 - \theta_2$ erhalten bleiben.

⁵Hier ist aus Gründen der Übersichtlichkeit nur die erste Funktion dargestellt. Die zweite ist der Form nach identisch.

Vorgriff auf diesen Abschnitt verwendete Unterscheidung von Phase und Protophase einzuführen. Abschließend wird der konzeptuellen Ansatz skizziert, um die Theorie und ihre Anwendung in der Datenanalyse wieder in Einklang zu bringen.

Die Problemstellung soll am Beispiel zweier bidirektional gekoppelter Van-der-Pol Oszillatoren mit $\omega_1 = 1.11$, $\omega_2 = 0.89$, $\mu = 0.5$ und einer Kopplungsstärke von $\epsilon = 0.1$

$$\begin{aligned}\ddot{x}_1 &= -\omega_1^2 x_1 + \mu \dot{x}_1 (1 - x_1^2) + \epsilon (\dot{x}_2 - \dot{x}_1), \\ \ddot{x}_2 &= -\omega_2^2 x_2 + \mu \dot{x}_2 (1 - x_2^2) + \epsilon (\dot{x}_1 - \dot{x}_2)\end{aligned}\quad (2.19)$$

illustriert werden. Dieses System von Differentialgleichungen, Gl. (2.19), wird numerisch unter Verwendung des Euler-Verfahrens mit einem Zeitschritt von $\Delta t = 0.01s$ gelöst, was zu den Lösungen $X_1(t)$ und $X_2(t)$ führt, die jeweils 80.000 Daten mit ca. 120 Daten pro Periode besitzen. Da anhand dieses Beispiels gezeigt werden soll, dass die Verwendung *unterschiedlicher Observablen desselben Systems* und *unterschiedlicher Einbettungen derselben Zeitreihen* zu deutlich *unterschiedlichen Modellen* der Dynamik ihrer Protophasen führt, die des Weiteren nicht die in der Theorie der Phasendynamik abgeleitete Struktur besitzen, wird neben den Lösungen $X_1(t)$ und $X_2(t)$ eine zweite Observable der Systeme über die nicht-lineare Funktion

$$Y_{1,2}(t) = 2e^{0.5X_{1,2}(t)}.\quad (2.20)$$

eingeführt. Ausgehend von den beiden Paaren von Observablen $X_{1,2}(t)$ und $Y_{1,2}(t)$ werden dann die Trajektorien in einem 2-dimensionalen Zustandsraum durch zwei unterschiedliche Methoden der Einbettung rekonstruiert, um die Protophasen über den Winkel des Zustandsvektors, Gl. (2.16), zu bestimmen. Im ersten Fall wird die zweite Dimension des Zustandsraums durch die Hilbert-Transformation, Gl. (2.15), definiert, was zu den vier Protophasen

$$\Theta_{Hx1}(t), \quad \Theta_{Hx2}(t), \quad \Theta_{Hy1}(t), \quad \Theta_{Hy2}(t)$$

führt; im zweiten Fall durch die zeitliche Ableitung der Observablen

$$\Theta_{Ax1,2}(t) = \arctan\left(-\frac{\frac{dX_{1,2}}{dt}(t)}{\omega_{1,2} \cdot X_{1,2}(t)}\right),$$

was die vier Protophasen

$$\Theta_{Ax1}(t), \quad \Theta_{Ax2}(t), \quad \Theta_{Ay1}(t), \quad \Theta_{Ay2}(t)$$

ergibt. Aus diesen Protophasen werden dann die Gleichungen der Dynamik des ersten Oszillators ⁶

$$\begin{aligned}f^{(Hx1)}(\theta_{Hx1}, \theta_{Hx2}), \quad & f^{(Ax1)}(\theta_{Ax1}, \theta_{Ax2}), \\ f^{(Hy1)}(\theta_{Hy1}, \theta_{Hy2}), \quad & f^{(Ay1)}(\theta_{Ay1}, \theta_{Ay2})\end{aligned}$$

in Form von Gl. (2.18) bestimmt, indem die entsprechenden Koeffizienten

$$F_{n,m}^{(Hx1)}, \quad F_{n,m}^{(Ax1)}, \quad F_{n,m}^{(Hy1)}, \quad F_{n,m}^{(Ay1)}$$

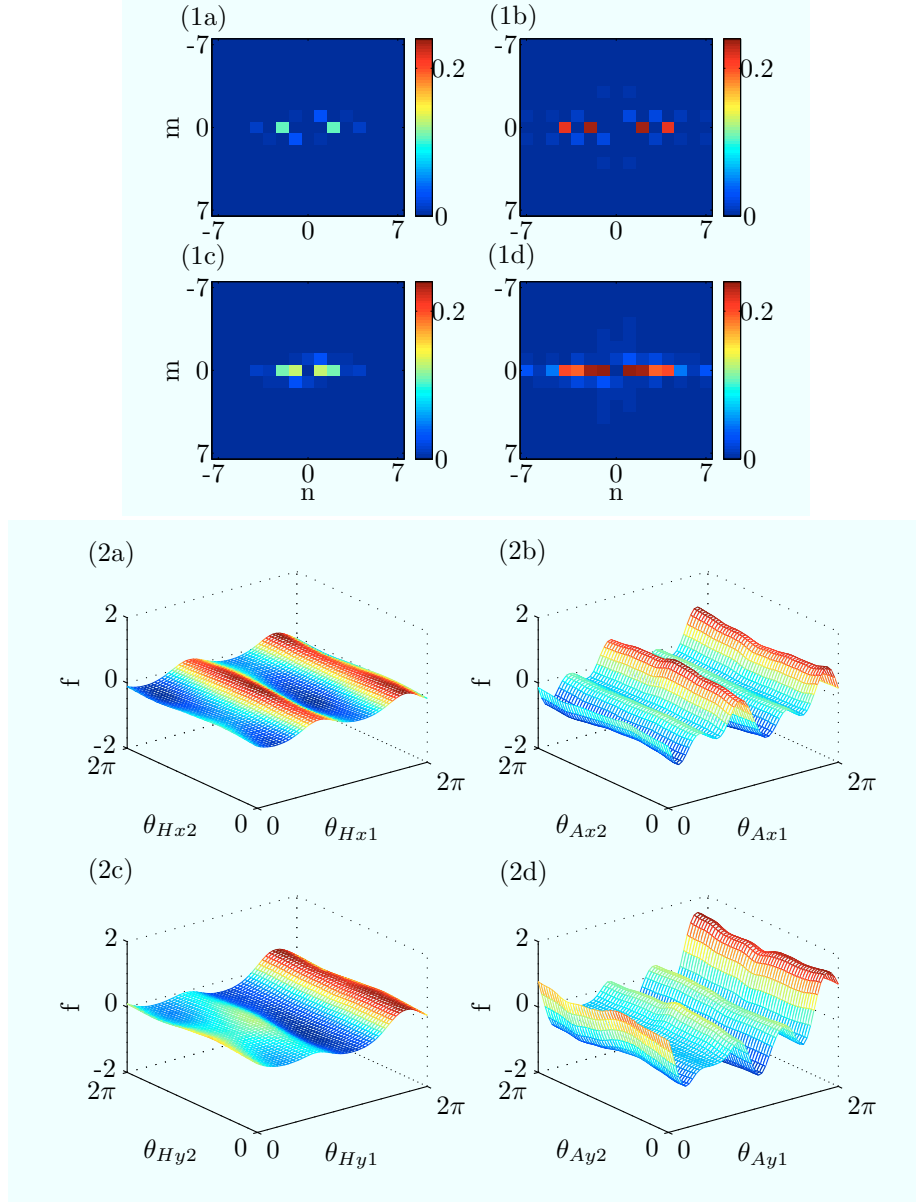


Abbildung 2.1: (1) Die Koeffizienten der Protphasendynamik: (a) $F_{n,m}^{(Hx1)}$, (b) $F_{n,m}^{(Hy1)}$, (c) $F_{n,m}^{(Ax1)}$, (d) $F_{n,m}^{(Ay1)}$. (2) Die entsprechenden Funktionen der Protphasendynamik: (a) $f^{(Hx1)}(\theta_{Hx1}, \theta_{Hx2})$, (b) $f^{(Ax1)}(\theta_{Ax1}, \theta_{Ax2})$, (c) $f^{(Hy1)}(\theta_{Hy1}, \theta_{Hy2})$, (d) $f^{(Ay1)}(\theta_{Ay1}, \theta_{Ay2})$.

durch die Minimierung des RMS-Fehlers, Appendix B, mit einer Ordnung der Fourierreihe von $N = 7$ berechnet werden. Die Absolutwerte der Koeffizienten $F_{n,m}^{(i)}$ sind in Abb. 2.1-1 ⁷ zu sehen - die entsprechenden Funktionen $f^{(i)}(\theta_{i1}, \theta_{i2})$ in Abb. 2.1-2 ⁸.

Für den Vergleich mit der theoretischen Konzeption der Phase sind die folgenden Aspekte dieser Ergebnisse von zentraler Bedeutung:

1. Die vier Koeffizientenmatrizen und die vier Funktionen der Dynamik der Protophasen sind *nicht identisch*, sondern weisen viel mehr kaum eine systematische Ähnlichkeit auf, obwohl sie die Dynamik *desselben Systems* beschreiben. Protophasen und die Modelle ihrer Dynamik sind demnach *keine Invarianten* von Oszillatoren, sondern reflektieren in erster Linie die in dieser Hinsicht zufällige Wahl der verwendeten Observablen und Methoden der Einbettung.
2. Die ausgeprägtesten Koeffizienten, Abb. 2.1-1, aller vier Protophasendynamiken finden sich für $m = 0$. D.h. die dominanten Komponenten der Dynamik hängen nicht von der externen Phase ab und sind daher nicht als Effekte der Wechselwirkung der Oszillatoren zu verstehen: Die Dynamik der Protophasen weist ausgeprägte *eigenperiodische* Komponenten der Form $\hat{f}^{(i)}(\theta_i)$ auf, so dass die die Dynamik der Protophasen gekoppelter Systeme durch ein Gleichungssystem der Form

$$\begin{aligned}\dot{\theta}_1 &= \hat{\omega}_1 + \hat{f}^{(1)}(\theta_1) + f^{(1)}(\theta_1, \theta_2), \\ \dot{\theta}_2 &= \hat{\omega}_2 + \hat{f}^{(2)}(\theta_2) + f^{(2)}(\theta_2, \theta_1)\end{aligned}\tag{2.21}$$

beschrieben werden muss und die eines autonomen Oszillators durch das Gleichungssystem

$$\dot{\theta} = \hat{\omega}_0 + \hat{f}(\theta).\tag{2.22}$$

3. Da alle Protophasen dasselbe periodische Verhalten beschreiben und 2π -periodisch sind, sind ihre beobachteten Frequenzen, Gl. (2.12), identisch.
4. Da Protophasen unterschiedliche eigenperiodische Terme aufweisen, aber dieselbe beobachtete Frequenz besitzen, sind die konstanten Terme ihrer Dynamik $\hat{\omega}_1^i$ i.A. weder untereinander noch mit der autonomen Frequenz ω_1 des Oszillators identisch: $\hat{\omega}_1^i \neq \hat{\omega}_1^j \neq \omega_1$.

Damit unterscheiden sich die aus den Zeitreihen der Oszillatoren bestimmten Protophasen fundamental vom theoretischen Konzept der Phase, das in Abschnitt 2.1 skizziert wurde, weil Phasen einerseits eindeutig bestimmte Invarianten von Oszillatoren sind, die andererseits nur durch externe Einflüsse - wie Koppelung - von einem linearen Wachstum abweichen, so dass die Funktion

⁶Die Ergebnisse des zweiten Oszillators sind strukturell identisch und werden daher im Folgenden nicht weiter diskutiert.

⁷Der konstante Term $F_{0,0}$ wurde auf Null gesetzt, um die übrigen Koeffizienten sichtbar zu machen.

⁸Auch hier wurde in der Berechnung der konstante Term $F_{0,0}$ auf Null gesetzt, so dass die dargestellten Funktionen nur noch die Abweichung vom linearen Wachstum der Protophasen beschreiben.

$q(\phi_1, \phi_2)$, die diese Abweichung beschreibt, *ausschließlich* Komponenten besitzen kann, die auch von der jeweils externen Phase abhängen. Die Koeffizienten einer Fourierentwicklung von $q(\phi_1, \phi_2)$,

$$q(\phi_1, \phi_2) = \sum_{n,m} Q_{n,m} e^{i(n\phi_1 + m\phi_2)},$$

müssen für $m = 0$ verschwinden: $Q_{n,0} = 0$! Tabelle 2.1 fasst die für die weitere Argumentation zentralen Unterschiede von Protophase und Phase zusammen:

<i>Phase</i>	<i>Protophase</i>
eindeutig bestimmt	es existieren beliebig viele
invariant	hängt von Observablen und Einbettung ab
$\dot{\phi} = \omega_0$	$\dot{\theta} = \hat{\omega}_0 + \hat{f}(\theta)$
$\dot{\phi}_1 = \omega_1 + q^{(1)}(\phi_1, \phi_2)$	$\dot{\theta}_1 = \hat{\omega}_1 + \hat{f}^{(1)}(\theta_1) + f^{(1)}(\theta_1, \theta_2)$
ω_1 : eindeutig, autonome Frequenz	$\hat{\omega}_1$: beliebig viele, keine physikalische Bedeutung

Tabelle 2.1: Die Unterschiede von Phase und Protophase

Der zentrale Unterschied zwischen Phase und Protophasen und die Ursache des Invarianzproblems sind demnach die autonomen Terme $\hat{f}^{(i)}(\theta_i)$ der Protophasendynamik. Aus diesem Zusammenhang ergibt sich der allen folgenden theoretischen Ausführungen zu Grunde liegende Lösungsansatz:

1. Um das Invarianzproblem zu lösen und damit die Lücke zwischen Theorie und Anwendung der Phasendynamik zu schließen, wird einer Transformation von Protophasen zur Phase $\theta_i \rightarrow \phi$ definiert, die alle eigenperiodischen Terme der Form $\hat{f}^{(i)}(\theta_i)$ eliminiert und so variante Protophasen in die eindeutig bestimmte Phase⁹ überführt. Diese Transformation von Protophasen zu Phasen beruht auf der Elimination aller dynamischen Komponenten, die sich als deterministische und daher periodische Funktionen der jeweiligen Protophase darstellen lassen, während alle dynamischen Komponenten, die eine externe Ursache haben - wie Rauschen oder Kopplungseffekte - und die sich daher nicht als eigenperiodische Terme darstellen lassen, erhalten bleiben.

⁹Da die Eindeutigkeit im Fall gekoppelter Systeme nicht unmittelbar einsichtig ist, wird dort ein theoretischer Beweis geführt, der die Eindeutigkeit sicherstellt, vgl. Abschnitt 4.1.2.

2. Um ausschließlich die eigenperiodischen Terme $\hat{f}^{(i)}(\theta_i)$ zu beseitigen und alle übrigen Informationen zu erhalten, wird die Transformation als eine deterministische und invertierbare¹⁰ Koordinatentransformation $\phi(\theta_i)$ konzipiert.
3. Da es sich bei allen dynamischen Komponenten um Abweichungen vom linearen Wachstum der Phase bzw. Protophase, handelt, kann die Transformation $\phi(\theta)$ als Lösung des Minimierungsproblems

$$\left\langle \left(\dot{\phi}(\theta) - \omega_0 \right)^2 \right\rangle_t \equiv \min \quad (2.23)$$

aufgefasst werden.¹¹

¹⁰Die Invertierbarkeit folgt aus der Monotonie von Phase und Protophase und der deterministischen Abbildung.

¹¹Die Durchschnittsbildung $\langle \dots \rangle_t$ ist als Durchschnitt über die gegebene Zeitreihe aufzufassen.

Kapitel 3

Phasentransformation: autonome Oszillatoren

In diesem Kapitel wird dargelegt, wie die Transformation von den Protophasen zur Phase eines *autonomen Oszillators* bestimmt werden kann. Dieses Kapitel gliedert sich in zwei Abschnitte: Im ersten, theoretischen Abschnitt wird die Transformation von Protophasen zur Phase autonomer Oszillatoren entwickelt, die im zweiten Abschnitt an einigen Beispielen illustriert wird.

3.1 Theorie

Gesucht wird eine Transformation von Protophase zu Phase:

$$\theta \rightarrow \phi.$$

Die geforderten Eigenschaften dieser Transformation sind:

1. Die Phase ϕ muss 2π -periodisch in der Protophase θ sein, um die durchschnittliche Frequenz zu erhalten.
2. Die Transformation muss eine deterministische Funktion der Protophase $\phi(\theta)$ sein, damit sie als Koordinatentransformation alle Informationen erhält. Mit der Monotonie der Phase folgt aus dieser Bedingung die Invertierbarkeit der Transformation.
3. Die Transformation muss die Abweichungen von ϕ von einem linearen Wachstum minimieren bzw. zu einer möglichst gleichmäßigen instantanen Frequenz $\dot{\phi}$ führen.

Dies bedeutet, dass die Transformation alle als deterministische Funktionen von θ darstellbaren Abweichungen von θ von einem linearen Verlauf eliminieren soll, so dass die sich so ergebende Phase ϕ lediglich Abweichungen von einem linearen Wachstum aufweisen kann, die keine deterministische Funktion von ϕ sind und daher nicht als Resultat einer Koordinatentransformation - also nicht als Resultat der beliebigen Wahl einer Observablen - angesehen werden können.

Zuerst sei angenommen, dass es sich um einen strikt periodischen Oszillator ohne Rauschen handelt. Aus der Ableitung der Phase $\phi(\theta)$ ergibt sich dann

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{d\phi}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \omega_0 .$$

Aus der Annahme folgt, dass $\frac{d\theta}{dt}(\theta)$ eine deterministische Funktion von θ ist und dass die mittlere Frequenz ω_0 eindeutig durch θ bestimmt ist, so dass

$$d\phi = \frac{\omega_0}{\frac{d\theta}{dt}(\theta)} d\theta \quad (3.1)$$

gilt und die gesuchte Transformation durch

$$\phi = \omega_0 \int_0^\theta \frac{dt}{d\theta}(\theta') d\theta' \quad (3.2)$$

gegeben ist [5].

Im Fall von Rauschen oder schwachem Chaos wiederholt sich die Trajektorie nicht exakt, so dass die zeitliche Ableitung von θ keine deterministische Funktion von θ mehr ist. Die Transformation $\theta \rightarrow \phi$ kann daher nur durch eine Mittelwertbildung bestimmt werden, die auf hinreichend langen Beobachtungen des Oszillators beruht [28, 29]. Die Frequenz des Oszillators wird durch

$$\omega_0 = \frac{\Theta(T) - \Theta(0)}{T} . \quad (3.3)$$

aus der gegebenen Zeitreihe $\Theta(t)$ abgeschätzt. Um die gewünschte Transformation zu erhalten, wird dann die rechte Seite von Gl. (3.1) gemittelt,

$$d\phi = \omega_0 \left\langle \frac{dt}{d\theta}(\theta) \right\rangle d\theta = \sigma(\theta) d\theta, \quad (3.4)$$

wobei $\langle \rangle$ die Mittelung über Zyklen der Oszillation bedeutet, die hier durch Integration über die Zeit,

$$\langle (\dots) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T (\dots) dt, \quad (3.5)$$

ausgeführt wird. Die Funktion

$$\frac{\sigma(\theta)}{2\pi}$$

in Gl. (3.4) ist die Wahrscheinlichkeitsdichte der Variable θ , da sie reziprok proportional zur Geschwindigkeit der Bewegung auf der Trajektorie ist. Diese Wahrscheinlichkeitsdichte kann als

$$\frac{\sigma(\theta)}{2\pi} = \langle \delta(\Theta(t) - \theta) \rangle \quad (3.6)$$

geschrieben werden, wobei $\delta(x)$ die Diracsche Delta-Funktion ist und die Durchschnittsbildung im Sinne von Gl. (3.5) durchgeführt wird. Wird die Wahrscheinlichkeitsdichte $\sigma(\theta)$ als Fourierreihe,

$$\sigma(\theta) = \sum_n S_n e^{in\theta}, \quad (3.7)$$

mit den Entwicklungskoeffizienten

$$S_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sigma(\theta) e^{-in\theta} d\theta \quad (3.8)$$

geschrieben und Gl. (3.6) substituiert, erhält man

$$S_n = \frac{1}{T} \int_0^T dt \int_0^{2\pi} d\theta e^{-in\theta} \delta(\Theta(t) - \theta) = \frac{1}{T} \int_0^T e^{-in\Theta(t)} dt, \quad (3.9)$$

was $S_0 = 1$ impliziert.¹ Aus Gl. (3.4) ergibt sich unter Einsetzen von Gl. (3.7)

$$d\phi = \sigma(\theta) d\theta = \left(\sum_n S_n e^{in\theta} \right) d\theta$$

und hieraus durch Integration beider Seiten mit $S_0 = 1$ die gesuchte Transformation:

$$\begin{aligned} \phi(\theta) &= \int_0^\theta \sigma(\theta') d\theta' = \sum_n S_n \int_0^\theta e^{in\theta'} d\theta' \\ &= \theta + \sum_{n \neq 0} \frac{S_n}{in} (e^{in\theta} - 1). \end{aligned} \quad (3.11)$$

Gl. (3.9) und Gl. (3.11) sind das wesentliche theoretische Resultat dieses Abschnitts. Sie definieren eine Transformation von beliebigen Protophasen zu der Phase eines Systems. Transformation (3.11) ergibt eine strikt linear wachsende Phase für strikt periodische Oszillatoren ohne Rauschen. Für Zeitreihen mit Rauschen ergibt sie die bestmögliche Näherung an eine linear wachsende Phase, in der alle 2π -periodischen Abweichung von einem linearen Verlauf eliminiert sind, so dass alle noch verbleibenden Abweichungen nicht periodisch und somit durch externe Einflüsse wie Rauschen bedingt sind.

3.2 Anwendung

Inhalt dieses Abschnitts ist es, den Effekt der Phasentransformation für autonome Oszillatoren an zwei Beispielen zu illustrieren. Hierauf soll im Folgenden aber nur kurz eingegangen werden, da der eigentliche Fokus der Arbeit auf der Analyse der Dynamik gekoppelter Oszillatoren und insbesondere auf der Anwendung zur Rekonstruktion von Phasenmodellen der kardiorespiratorischen Wechselwirkung aus physiologischen Messdaten liegt.

¹In Anwendung auf eine gesampelte Zeitreihe, die aus N_p Werten $\Theta(t_j)$ mit dem Zeitunterschied $\Delta t = \frac{T}{N_p}$ besteht, so dass $t_j = j\Delta t$ gilt, kann die Integration durch eine Summation ersetzt werden:

$$S_n = \frac{1}{N_p} \sum_{j=1}^{N_p} e^{-in\Theta(t_j)}. \quad (3.10)$$

3.2.1 Van-der-Pol Oszillator mit Rauschen

Um den Effekt der Anwendung der Phasentransformation Gl. (3.9), Gl. (3.10), Gl. (3.11) zu demonstrieren, wird ein Van-der-Pol Oszillator,

$$\ddot{x} - \mu(1 - x^2)\dot{x} + \omega^2 x = \xi(t), \quad (3.12)$$

verwendet, wobei $\mu = 0.5$, $\omega = 1.11$ und $\xi(t)$ weißes Rauschen mit einem Mittelwert von $\langle \xi(t) \rangle = 0$ und einer Korrelation $\langle \xi(t)\xi(t') \rangle = \sigma^2 \delta(t - t')$ mit einer Intensität von $\sigma = 0.05$ ist. Das Gleichungssystem Gl. (3.12) wird mit dem Euler-Verfahren numerisch gelöst, was zu der Zeitreihe $X(t)$ mit einer Länge von 40.000 Datenpunkten und einem Zeitabstand von $\Delta t = 0.01s$ führt. Aus der ersten Observablen $X(t)$ wird eine zweite Observable

$$Y(t) = e^{X(t)}$$

definiert. Die beiden Observablen $X(t)$ und $Y(t)$ werden über die Hilbert-Transformation, Gl. (2.15), 2-dimensional eingebettet, Abb. 3.1 (a), (b). Aus diesen beiden Trajektorien werden drei Protophasen berechnet. Die erste Protophase $\Theta_{x_1}(t)$ wird aus der Trajektorie $X(t) + i\hat{X}(t)$ mit dem Nullpunkt $\Im(O_0) = 0$, $\Re(O_0) = 0$ über den Winkel der Polarkoordinaten, Gl. (2.16), berechnet. Die zweite Protophase $\Theta_{x_2}(t)$ wird aus der Trajektorie $X(t) + i\hat{X}(t)$ mit dem verschobenen Nullpunkt $\Im(O_0) = 0.8$, $\Re(O_0) = 0$ über den Winkel der Polarkoordinaten berechnet. Die dritte Protophase $\Theta_y(t)$ wird aus der Trajektorie der zweiten Observablen $Y(t) + i\hat{Y}(t)$ mit dem Nullpunkt $\Im(O_0) = 0$, $\Re(O_0) = 0$ gleichermaßen über Gl. (2.16) berechnet, nachdem von der Trajektorie $Y(t) + i\hat{Y}(t)$ ihr Durchschnitt abgezogen wurde. Aus den Protophasen $\Theta_{1,2,3}(t)$ werden nach Gl. (3.10) und Gl. (3.11) die Phasen $\Phi_{1,2,3}(t)$ mit einer Ordnung von $N = 48$ berechnet. Um den Effekt der Transformation deutlicher darstellen zu können, werden die Abweichungen der Protophasen

$$\Delta\Theta_{1,2,3}(t) = \Theta_{1,2,3}(t) - \Omega t$$

bzw. der Phasen

$$\Delta\Phi_{1,2,3}(t) = \Phi_{1,2,3}(t) - \Omega t$$

berechnet, wobei Ω die beobachtete Frequenz, Gl. (2.12), ist. Die Zeitreihen $\Delta\Theta_{1,2,3}(t)$ sind in Abb. 3.1 (c) als gestrichelte Linien dargestellt. Alle drei Zeitreihen zeigen einerseits ein deutliches periodisches Verhalten, das für jede der drei Protophasen spezifisch ist und auf die unterschiedliche Berechnung der Protophasen zurückzuführen ist, und andererseits die durch das Rauschen induzierte Phasen-Diffusion [5] in Form eines langsamen Trends. Die jeweils entsprechenden Phasen $\Delta\Phi_{1,2,3}(t)$ sind in Abb. 3.1 (c) als durchgezogene Linien geplottet: Die durch die Wahl der Observablen bedingten periodischen Schwankungen wurden in allen drei Fällen vollständig eliminiert, während die sowohl Phasen-Diffusion als auch die unmittelbaren Effekte des Rauschens auf die Phase erhalten bleiben und in der Abbildung klar sichtbar sind. Alle drei Phasen weisen eine sehr ähnliche Dynamik auf - $\Delta\Phi_1(t)$ und $\Delta\Phi_2(t)$ sind sogar deckungsgleich.

Ein zweite Möglichkeit, den Effekte der Phasentransformation zu verdeutlichen, besteht darin, die Verteilung der Protophasen und Phasen *mod* 2π in Form eines Histogramms zu vergleichen. Die Verteilung der Protophasen ist

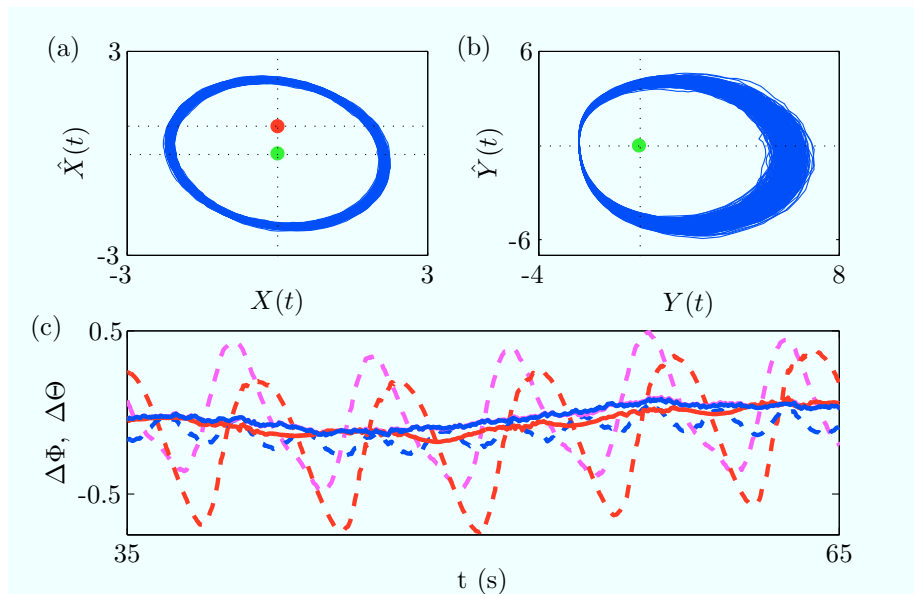


Abbildung 3.1: (a) Die Trajektorie der ersten Observablen $X(t) + i\hat{X}(t)$ des Van-der-Pol Oszillators. Der Nullpunkt bzw. das Rotationszentrum zur Bestimmung der Protophase $\Theta_{x_1}(t)$ ist als grüner Punkt dargestellt, der Nullpunkt zur Bestimmung der Protophase $\Theta_{x_2}(t)$ als roter Punkt. (b) Die Trajektorie der zweiten Observablen $Y(t) + i\hat{Y}(t)$. Der Nullpunkt ist als grüner Punkt dargestellt. (c) Die Abweichungen vom linearen Wachstum der Protophasen $\Delta\Theta$ sind gestrichelt, die der Phasen $\Delta\Phi$ als durchgezogene Linien dargestellt: Die Abweichungen der ersten Protophase $\Theta_{x_1}(t)$ und Phase $\Phi_{x_1}(t)$ sind blau, die von $\Theta_{x_2}(t)$ und $\Phi_{x_2}(t)$ magenta und die von $\Theta_y(t)$ und $\Phi_y(t)$ rot.

in der oberen Reihe von Abb. 3.2 zu sehen: Jede der drei Protophasen weist eine je spezifische Form der Verteilung auf. Da die Verteilungsdichte einer dynamischen Größe umgekehrt proportional zur zeitlichen Ableitung ist, ist diese Abweichung von der Gleichverteilung äquivalent mit dem Sachverhalt, dass die zeitliche Ableitung einer Protophase Variationen unterliegt, die 2π -periodisch in den Protophasen selbst sind - nicht periodische Variationen mitteln sich hingegen bei hinreichend langen Zeitreihen aus. Die Histogramme der oberen Reihe veranschaulichen demnach das in Abschnitt 2.3 herausgestellte Charakteristikum von Protophasen, je nach gewählter Observable eine charakteristische, eigenperiodische Dynamik aufzuweisen, auf Grund derer die Protophasen erstens voneinander und zweitens vom theoretischen Konzept der Phase abweichen. In der unteren Reihe von Abb. 3.2 sind die Verteilungen der jeweils entsprechenden Phasen zu sehen: Diese sind gleich verteilt, was dem Sachverhalt entspricht, dass ihre Dynamik - dem theoretischen Konzept der Phase entsprechend - keine 2π -periodischen Komponenten mehr aufweist. Die Ergebnisse zeigen demnach, dass die Phasentransformation die eigenperiodischen Komponenten der Protophasen eliminiert bzw. nicht homogene Verteilungen der Protophasen nivelliert.

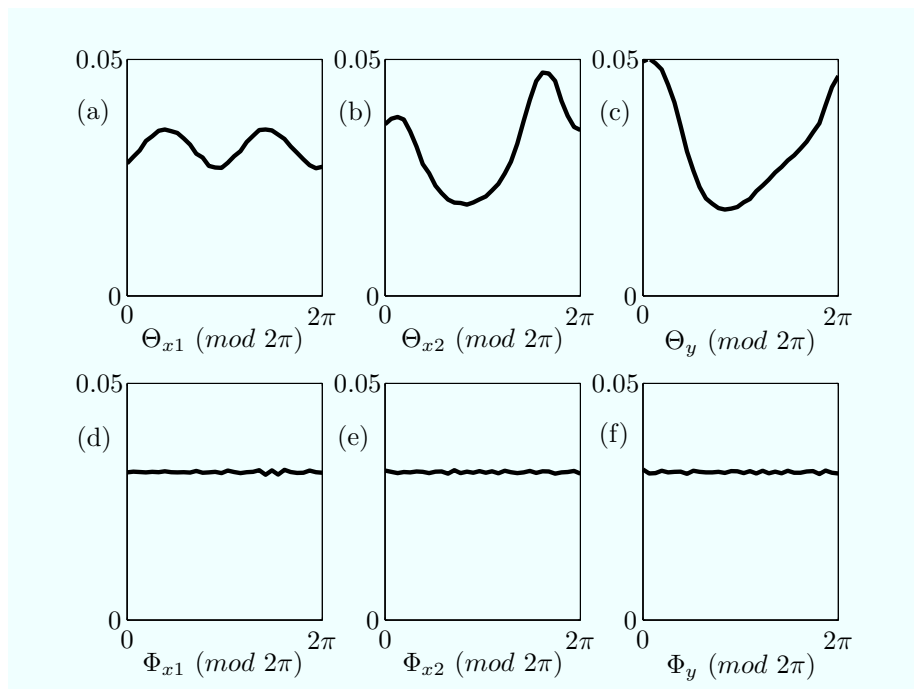


Abbildung 3.2: Die Verteilung der Protophasen und der Phasen $\text{mod } 2\pi$. Es wurden 32 Segmente verwendet. Die Anzahl der Daten in den Segmenten wurde durch die Anzahl der Daten geteilt. (a) Θ_{x1} , (b) Θ_{x2} , (c) Θ_y , (d) Φ_{x1} , (e) Φ_{x2} , (f) Φ_y .

3.2.2 Optimierung des Synchronisations-Index

Um zu zeigen, dass die Phasentransformation auch als Preprocessing für die Anwendung von Standardverfahren zur Charakterisierung der Wechselwirkung von Oszillatoren nützlich ist, soll in diesem Abschnitt gezeigt werden, dass sich die Bestimmung des Synchronisations-Index [19, 42] durch die vorherige Anwendung der Phasentransformation optimieren lässt.² Der Synchronisations-Index zweier Oszillatoren wird aus ihren Protophasen θ_1, θ_2 über

$$\gamma_{n,m} = \left| \frac{1}{T} \int_0^T e^{i(n\theta_1(t) - m\theta_2(t))} dt \right| \quad (3.13)$$

berechnet, wobei über eine hinreichend lange Zeitreihe integriert werden muss. Gl. (3.13) kann für ungekoppelte Oszillatoren analytisch gelöst werden, da im Fall unabhängiger Systeme der Mittelwert des Produkts gleich dem Produkt der Mittelwerte,

$$\gamma_{n,m}^{unab} = \left| \frac{1}{T} \int_0^T e^{in\theta_1(t)} dt \right| \cdot \left| \frac{1}{T} \int_0^T e^{-im\theta_2(t)} dt \right|,$$

ist, was sich mit der Definition der Koeffizienten der Phasentransformation, $S_n^{(1)}$, $S_m^{(2)}$, der beiden Oszillatoren nach Gl. (3.9) als

$$\gamma_{n,m}^{unab} = \left| S_n^{(1)} \right| \cdot \left| S_m^{(2)} \right| \quad (3.14)$$

schreiben lässt. Da im Fall von ungekoppelten Systemen der Synchronisations-Index $\gamma_{n,m}^{unab} = 0$ sein sollte, zeigt der Vergleich mit Gl. (3.14), dass der Synchronisations-Index für ungekoppelte Systeme nur dann den korrekten Wert ergibt, wenn $S_n^{(1)} = 0$ und $S_m^{(2)} = 0$ gilt. Andernfalls ergibt sich eben fälschlicher Weise eine Synchronisations-Index der Stärke Gl. (3.14).

Da andererseits die Koeffizienten S_n nur für Phasen, nicht aber für Protophasen, Null sind, bzw. in der Phasentransformation dazu dienen, die Komponenten der Protophasendynamik zu eliminieren, die sie erzeugen, folgt, dass nur Phasen, nicht aber Protophasen den korrekten Wert des Synchronisations-Index $\gamma_{n,m}^{unab}$ ergeben: Die durch die jeweilige Observable bedingten eigenperiodischen Terme der Protophasendynamik erzeugen Artefakte in der Charakterisierung der Wechselwirkung von Oszillatoren durch den Synchronisations-Index. Diese Artefakte sind in den meisten Fällen allerdings so klein, dass sie vernachlässigt werden können - im Fall von zwei gekoppelten Van-der-Pol Oszillatoren mit den Observablen $X_{1,2}(t)$ liegt der Fehler beispielsweise bei $\Delta\gamma = 0.04$. Andererseits gibt es auch Fälle extremer Variationen der Protophasendynamik, in denen so drastische Fehler auftreten, dass sich ohne eine vorherige Phasentransformation überhaupt keine sinnvollen Ergebnisse erzielen lassen.

²Dass die Differenz von Protophase und Phase einen relevanten Effekt auf die Bestimmung des Synchronisations-Index hat, wurde von Izhikevich und Chen [22] herausgestellt. Ein Ansatz, um die durch die Verwendung von Protophasen erzeugten Artefakte zu eliminieren gibt Daido [23] an: Hier werden die beiden Faktoren in Gl. (3.13) um ihren jeweiligen Mittelwert korrigiert.

Um einen solchen Fall zu illustrieren, werden die Zeitreihen $X_{1,2}(t)$ der Länge 980.000 eines Hindmarsh-Rose Neurons [45],

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y - x^3 + 3x^2 - z + I, \\ \dot{y} &= 1 - 5x^2 - y, \\ \dot{z} &= 0.006(4(x + 1.6) - z),\end{aligned}\tag{3.15}$$

für unterschiedliche Werte der Parameter $I_1 = 1.32$ und $I_2 = 1.48$ numerisch mit dem Euler-Verfahren bei einem Zeitschritt von $\Delta t = 0.01s$ berechnet. Für die beiden Werte zeigt das Modell dasselbe qualitative Verhalten, aber mit einer unterschiedlichen Frequenz, so dass die so generierten Zeitreihen $X_{1,2}(t)$ als Modell zweier ungekoppelter Neuronen mit unterschiedlichen Frequenzen angesehen werden können, für die der Synchronisations-Index $\gamma_{n,m} = 0$ sein sollte. Aus den Zeitreihen $X_{1,2}(t)$ werden die Protophasen $\Theta_{1,2}(t)$ über eine Einbettung mit Hilfe der Hilbert-Transformation, Gl. (2.15), durch den Winkel der Polarkoordinaten, Gl. (2.16), und aus diesen Protophasen über die Phasentransformation, Gl. (3.9) und Gl. (3.11), mit einer Ordnung von $N = 48$ die Phasen $\Phi_{1,2}(t)$ berechnet.

Die erste Tabelle zeigt die sich aus den Protophasen ergebenden Synchronisations-Indices,

$\gamma_{n,m}^{proto}$	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$
$m = 1$	0.88	0.78	0.64	0.48
$m = 2$	0.80	0.70	0.58	0.44
$m = 3$	0.69	0.61	0.50	0.38
$m = 4$	0.60	0.52	0.43	0.32

während die sich aus den Phasen ergebenden Synchronisations-Indices in der zweiten Tabelle dargestellt sind.

$\gamma_{n,m}^{phase}$	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$
$m = 1$	0.01	0.00	0.00	0.00
$m = 2$	0.00	0.00	0.01	0.01
$m = 3$	0.00	0.00	0.00	0.01
$m = 4$	0.00	0.00	0.01	0.01

Offensichtlich können nur die aus den Phasen bestimmten Synchronisations-Indices als sinnvolle Ergebnisse angesehen werden, während die aus den Protophasen bestimmten Indices nahezu vollständige Synchronisation für ungekoppelte Neuronen unterschiedlicher Frequenz anzeigen. Es sei darauf hingewiesen, dass die aus den Protophasen berechneten Ergebnisse nahezu perfekt den theoretischen Vorhersagen nach Gl. (3.14) entsprechen. Die Ergebnisse zeigen demnach, dass die Phasentransformation im Fall extremer Protophasendynamiken - wie der von Neuronen - nicht nur die Berechnung von Synchronisations-Indices verbessert, sondern überhaupt erst sinnvolle Ergebnisse ermöglicht. Da die Phasentransformation als deterministische, invertierbare Transformation keinerlei Informationen eliminiert, empfiehlt es sich daher, sie bei der Bestimmung von Synchronisations-Indices grundsätzlich als Preprocessing zu verwenden.

Kapitel 4

Phasentransformation: gekoppelte Oszillatoren

Inhalt dieses Kapitels ist die Transformation von Protophasen zu Phasen *gekoppelter Oszillatoren*. Dieses Kapitel gliedert sich in drei Abschnitte: Im ersten theoretischen Abschnitt wird die Transformation von Protophasen zur Phase gekoppelter Oszillatoren entwickelt, im zweiten theoretischen Abschnitt wird ein Beweis der Invarianz der so bestimmten Phasen geführt, während im dritten Abschnitt die Transformation an einigen Beispielen in ihrer Anwendung illustriert wird.

4.1 Theorie

In diesem Abschnitt wird beschrieben, wie die Phasen $\phi_{1,2}$ und so die Gleichungen ihrer Dynamik, Gl. (2.11), aus zwei skalaren Observablen $x_{1,2}$ gekoppelter Oszillatoren rekonstruiert werden können.¹ Es wird wieder angenommen, dass die Zeitreihen der Protophasen, $\Theta_1(t), \Theta_2(t)$, bereits aus den gegebenen Zeitreihen $X_{1,2}(t)$ bestimmt wurden, so dass die Rekonstruktion der Phasen wieder die Form einer Transformation von Protophasen zu Phasen annimmt.

4.1.1 Die Phasentransformation

Als erster Schritt werden die Koeffizienten $F_{n,m}^{(1,2)}$ in Gl. (2.18) mit einer der Methoden in Appendix B bestimmt, so dass die Dynamik der Protophasen in der Form

$$\dot{\theta}_1(\theta_1, \theta_2) = f^{(1)}(\theta_1, \theta_2) = \sum_{n,m} F_{n,m}^{(1)} e^{in\theta_1 + im\theta_2} \quad (4.1)$$

vorliegt - aus Gründen der Übersichtlichkeit wird hier nur die Gleichung der ersten Protophase dargestellt. Dieser erste Schritt führt zu einer expliziten Darstellung der Protophasendynamik: $\dot{\theta}_1(\theta_1, \theta_2) = f^{(1)}(\theta_1, \theta_2)$ und $\dot{\theta}_2(\theta_2, \theta_1) = f^{(2)}(\theta_2, \theta_1)$.

¹Diese Methode lässt sich theoretisch unmittelbar für mehr als zwei gekoppelte Oszillatoren erweitern, wird hier aber der Übersichtlichkeit der Darstellung halber für zwei Oszillatoren diskutiert. Ein Beispiel mit drei gekoppelten Oszillatoren findet sich in Abschnitt 4.2.5.

Im zweiten Schritt soll eine Transformation bestimmt werden, die von den durch Gl. (2.18) beschriebenen Protophasen zu Phasen $\phi_{1,2}$ führt, die Gl. (2.11),

$$\dot{\phi}_1 = \omega_1 + q^{(1)}(\phi_1, \phi_2),$$

erfüllen. Diese Transformation soll den Überlegungen in Abschnitt 2.3 folgend, die eigenperiodischen Terme $F_{n,0}^{(i)}$ in der Protophasendynamik eliminieren, so dass die dann verbleibenden Terme immer *auch von der jeweils externen Phase* abhängen, und daher als Effekte der Kopplung aufzufassen sind. Die Phasentransformation - die Separation genuiner Kopplungseffekte von Effekten der Wahl der Observablen und somit des Koordinatensystems - beruht demnach auf der Annahme, dass die Komponenten der Kopplungsfunktionen $q^{(1,2)}$ der Phasendynamik immer von der jeweils externen Phase abhängen, während die Effekte der Wahl des Koordinatensystems ausschließlich von der jeweils eigenen Protophase abhängen [28, 29].

Dies bedeutet, dass die folgenden Bedingungen,

$$\int_0^{2\pi} q^{(1)}(\phi_1, \phi_2) d\phi_2 = \int_0^{2\pi} q^{(2)}(\phi_1, \phi_2) d\phi_1 = 0, \quad (4.2)$$

gelten, was eben impliziert, dass die Kopplung von Oszillatoren nicht zu einer Veränderung der Dynamik führt, die von der jeweils externen Phase unabhängig ist.² Wird die gewünschte Transformation $\theta_{1,2} \rightarrow \phi_{1,2}$, ähnlich wie im Fall autonomer Oszillatoren, Gl. (3.4), in der Form

$$\frac{d\phi_1}{d\theta_1} = \sigma^{(1)}(\theta_1), \quad \frac{d\phi_2}{d\theta_2} = \sigma^{(2)}(\theta_2) \quad (4.3)$$

geschrieben, wobei die Normalisierungsbedingungen

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sigma^{(1)}(\theta_1) d\theta_1 = 1, \quad \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sigma^{(2)}(\theta_2) d\theta_2 = 1 \quad (4.4)$$

gelten müssen, die sich aus der Bedingung ergeben, dass $\phi_{1,2}$ jeweils 2π -periodisch in $\theta_{1,2}$ sein müssen, um dieselbe beobachtete Frequenz $\Omega_{1,2}$ zu besitzen, dann führt das Einsetzen der Gleichungen der Protophasendynamik

$$\frac{d\theta_i}{dt} = f^{(i)}(\theta_i, \theta_j),$$

²Diese Bedingungen sind äquivalent, weil die Funktionen $q^{(1,2)}$ 2π -periodisch in ihren Argumenten sind, so dass die Integration über eine Periode Null ergibt. Werden die $q^{(1,2)}$ in der Form

$$q^{(1)}(\phi_1, \phi_2) = \sum_{n,m} Q_{n,m} e^{i(n\phi_1 + m\phi_2)}$$

dargestellt, dann führt die Integrationsbedingung zu

$$\int_0^{2\pi} q^{(1)}(\phi_1, \phi_2) d\phi_2 = 2\pi \sum_{n,0} Q_{n,0} e^{in\phi_1} + \sum_{n,m \neq 0} Q_{n,m} e^{in\phi_1} \int_0^{2\pi} e^{im\phi_2} d\phi_2 = 0,$$

so dass wegen der Periodizität der Exponentialfunktion

$$2\pi \sum_{n,0} Q_{n,0} e^{in\phi_1} = 0$$

gelten muss, was eben nichts anderes besagt, als dass die Kopplungsfunktionen keine Terme beinhalten dürfen, die nur von der jeweils eigenen Phase abhängen.

Gl. (2.18), in Gl. (4.3) zu:

$$\frac{d\phi_1}{dt} = \sigma^{(1)}(\theta_1)f^{(1)}(\theta_1, \theta_2), \quad \frac{d\phi_2}{dt} = \sigma^{(2)}(\theta_2)f^{(2)}(\theta_1, \theta_2). \quad (4.5)$$

Mit der formalen Definition der Phasendynamik $\dot{\phi}_i = \omega_i + q^{(i)}(\phi_i, \phi_j)$, Gl. (2.11), ergibt sich dann

$$\omega_1 + q^{(1)}(\phi_1, \phi_2) = \sigma^{(1)}(\theta_1)f^{(1)}(\theta_1, \theta_2), \quad \omega_2 + q^{(2)}(\phi_2, \phi_1) = \sigma^{(2)}(\theta_2)f^{(2)}(\theta_1, \theta_2)$$

was sich mit der Bedingung Gl. (4.2) als

$$\omega_1 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\phi_2 \sigma^{(1)}(\theta_1)f^{(1)}(\theta_1, \theta_2), \quad (4.6)$$

$$\omega_2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\phi_1 \sigma^{(2)}(\theta_2)f^{(2)}(\theta_1, \theta_2) \quad (4.7)$$

schreiben lässt. Durch eine Substitution der Integrationsvariablen von $\phi_{1,2}$ zu $\theta_{1,2}$ unter Verwendung von Gl. (4.3) erhält man

$$\omega_1 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta_2 \sigma^{(1)}(\theta_1)\sigma^{(2)}(\theta_2)f^{(1)}(\theta_1, \theta_2), \quad (4.8)$$

$$\omega_2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta_1 \sigma^{(1)}(\theta_1)\sigma^{(2)}(\theta_2)f^{(2)}(\theta_1, \theta_2). \quad (4.9)$$

Dies führt zu einem System von Gleichungen,

$$\frac{2\pi\omega_1}{\int_0^{2\pi} d\theta_2 \sigma^{(2)}(\theta_2)f^{(1)}(\theta_1, \theta_2)} = \sigma^{(1)}(\theta_1), \quad (4.10)$$

$$\frac{2\pi\omega_2}{\int_0^{2\pi} d\theta_1 \sigma^{(1)}(\theta_1)f^{(2)}(\theta_1, \theta_2)} = \sigma^{(2)}(\theta_2), \quad (4.11)$$

das die beiden Transformationen $\sigma^{(1,2)}(\theta_{1,2})$ definiert. Die in diesem System noch unbestimmten autonomen Frequenzen, $\omega_{1,2}$, lassen sich unter Verwendung der Normierungsbedingung, Gl. (4.4), durch die Ausdrücke

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta_1}{\int_0^{2\pi} d\theta_2 \sigma^{(2)}(\theta_2)f^{(1)}(\theta_1, \theta_2)} = \frac{1}{\omega_1}, \quad (4.12)$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta_2}{\int_0^{2\pi} d\theta_1 \sigma^{(1)}(\theta_1)f^{(2)}(\theta_1, \theta_2)} = \frac{1}{\omega_2} \quad (4.13)$$

gleichermaßen bestimmen, so dass Gl. (4.10), Gl. (4.11), Gl. (4.12), Gl. (4.13) ein geschlossenes System von Gleichungen für die Unbekannten $\sigma^{(1,2)}$ und $\omega_{1,2}$ unter Voraussetzung der im ersten Schritt erworbenen expliziten Kenntnis der Protophasendynamik $f^{(i)}(\theta_i, \theta_j)$ bilden, das durch die im Appendix C beschriebenen Methoden numerisch gelöst werden kann. Nachdem das System gelöst wurde und ω_i sowie die Transformationen $\sigma^{(i)}(\theta_i)$ explizit als Fourierreihen,

$$\sigma^{(1)}(\theta_1) = \sum_n S_n^{(1)} e^{in\theta_1}, \quad \sigma^{(2)}(\theta_2) = \sum_n S_n^{(2)} e^{in\theta_2}, \quad (4.14)$$

bekannt sind, können die Phasen ϕ_1, ϕ_2 aus den Protophasen θ_1, θ_2 auf der Basis von Gl. (4.3) durch Integration über

$$\phi_1(\theta_1) = \theta_1 + \sum_{n \neq 0} \frac{S_n^{(1)}}{in} (e^{in\theta_1} - 1), \quad \phi_2(\theta_2) = \theta_2 + \sum_{n \neq 0} \frac{S_n^{(2)}}{in} (e^{in\theta_2} - 1) \quad (4.15)$$

gewonnen werden.

4.1.2 Die Invarianz der Phase

Einer der zentralen Gründe, die Phasentransformation einzuführen, war der Wunsch nach einer *invarianten* Beschreibung der Systemdynamik. In diesem Abschnitt soll dargelegt werden, dass die Phasentransformation zu einem gegenüber der Wahl einer Observablen oder einer Einbettungsmethode invariantem Resultat - der Phase - führt. Die zentrale Annahme, dass sich die gekoppelten Systeme in der Umgebung eines Grenzzykus befindet, impliziert, dass sie sich in sehr guter Näherung jeweils durch eine periodische Variable, θ_1 und θ_2 , beschreiben lassen: $\vec{x}_1(\theta_1), \vec{x}_2(\theta_2)$. Die Wahl anderer Observablen oder Einbettungsmethoden lässt sich dann als deterministische Transformation $\vec{y}_i(\vec{x}_i)$ in ein anderes Koordinatensystem

$$\vec{y}_1(\vec{x}_1(\theta_1)), \quad \vec{y}_2(\vec{x}_2(\theta_2))$$

auffassen, so dass neue, durch diese Koordinatentransformation gewonnene Observablen y_1 und y_2 gleichermaßen eine Funktion der Protophasen θ_1 und θ_2 sein müssen. Werden auf der Basis der Observablen Protophasen $\psi_{1,2}$ bestimmt, stehen diese wegen der 1-dimensionalen Struktur der Trajektorien wiederum in einer ein-eindeutigen Abbildungsbeziehung zu den Observablen y_1 und y_2 , so dass die Beziehungen der neuen Protophasen zu den alten Protophasen durch einen Zusammenhang der Form

$$\frac{d\theta_1}{d\psi_1} = \gamma^{(1)}(\psi_1), \quad \frac{d\theta_2}{d\psi_2} = \gamma^{(2)}(\psi_2) \quad (4.16)$$

bestimmt sind. Werden nun die Phasen ϕ_1 und ϕ_2 eingeführt, die nach Gl. (4.3) durch die Form

$$\frac{d\phi_i}{d\theta_1} = \sigma^{(i)}(\theta_i)$$

bestimmt sind, dann folgt aus der Beziehung der Protophasen, Gl. (4.16),

$$\begin{aligned} \frac{d\phi_1}{d\psi_1} &= \frac{d\phi_1}{d\theta_1} \frac{d\theta_1}{d\psi_1} = \sigma^{(1)} \gamma^{(1)} = \beta^{(1)}, \\ \frac{d\phi_2}{d\psi_2} &= \frac{d\phi_2}{d\theta_2} \frac{d\theta_2}{d\psi_2} = \sigma^{(2)} \gamma^{(2)} = \beta^{(2)}. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Aus der formalen Definition der alten Protophasendynamik, Gl. (2.18),

$$\dot{\theta}_1(\theta_1, \theta_2) = f^{(1)}(\theta_1, \theta_2)$$

folgt mit der Beziehung zwischen den alten und den neuen Protophasen, Gl. (4.16):

$$\begin{aligned}\dot{\psi}_1 &= \frac{d\psi_1}{d\theta_1} \dot{\theta}_1 = \frac{f^{(1)}}{\gamma^{(1)}} = g^{(1)}, \\ \dot{\psi}_2 &= \frac{d\psi_2}{d\theta_2} \dot{\theta}_2 = \frac{f^{(2)}}{\gamma^{(2)}} = g^{(2)}.\end{aligned}\tag{4.18}$$

Wird nun die im letzten Abschnitt entwickelte Phasentransformation, Gl. (4.10), Gl. (4.11) auf die neuen Protophasen angewendet, $\psi_{1,2} \rightarrow \phi_{1,2}$, führt dies zum Gleichungssystem³

$$\begin{aligned}\frac{2\pi\omega_1}{\int_0^{2\pi} d\psi_2 \beta^{(2)}(\psi_2) g^{(1)}(\psi_1, \psi_2)} &= \beta^{(1)}(\psi_1), \\ \int_0^{2\pi} \frac{d\psi_1}{\int_0^{2\pi} d\psi_2 \beta^{(2)}(\psi_2) g^{(1)}(\psi_1, \psi_2)} &= \frac{1}{\omega_1},\end{aligned}$$

dessen Lösung die Phasentransformation bestimmt. Wird in diesem Gleichungssystem $\beta^{(1,2)}$ aus Gl. (4.17), $g^{(1,2)}$ aus Gl. (4.18) und $d\psi_{1,2}$ Gl. (4.16) substituiert, folgt

$$\begin{aligned}\frac{2\pi\omega_1}{\int_0^{2\pi} \frac{d\theta_2}{\gamma_2} \sigma^{(2)} \gamma^{(2)} \frac{f^{(1)}}{\gamma^{(1)}}} &= \sigma^{(1)} \gamma^{(1)}, \\ \int_0^{2\pi} \frac{\frac{d\theta_1}{\gamma_1}}{\int_0^{2\pi} \frac{d\theta_2}{\gamma_2} \sigma^{(2)} \gamma^{(2)} \frac{f^{(1)}}{\gamma^{(1)}}} &= \frac{1}{\omega_1},\end{aligned}$$

was äquivalent zum Gleichungssystem, Gl. (4.10), Gl. (4.11),

$$\begin{aligned}\frac{2\pi\omega_1}{\int_0^{2\pi} d\theta_2 \sigma^{(2)} f^{(1)}} &= \sigma^{(1)}, \\ \int_0^{2\pi} \frac{d\theta_1}{\int_0^{2\pi} d\theta_2 \sigma^{(2)} f^{(1)}} &= \frac{1}{\omega_1}\end{aligned}$$

ist, das die Phasentransformation der alten Protophase beschreibt. Es wurde demnach gezeigt, dass für jeden Wechsel der Observablen, der Gl. (4.16) erfüllt, die Gleichungssysteme ihrer Phasentransformationen äquivalent sind, und die Phasen daher invariant gegenüber dem Wechsel der Protophasen - d.h. für alle Fälle in denen Protophasen unterschiedlicher Observablen oder Einbettungsmethoden deterministische Funktionen voneinander sind, $\psi_1(\theta_1)$ und $\psi_2(\theta_2)$.

4.1.3 Die Rekonstruktion der Phasendynamik

Aus den Phasen ϕ_1 , ϕ_2 und ihren Ableitungen, die bereits in Gl. (4.5) gegeben sind, erhält man eine explizite Darstellung der Phasendynamik,

$$\begin{aligned}\frac{d\phi_1}{dt}(\phi_1, \phi_2) &= \sum_{n,m} Q_{n,m}^{(1)} e^{i(n\phi_1+m\phi_2)}, \\ \frac{d\phi_2}{dt}(\phi_2, \phi_1) &= \sum_{n,m} Q_{n,m}^{(2)} e^{i(n\phi_2+m\phi_1)},\end{aligned}\tag{4.19}$$

³Es wird im Folgenden der Übersichtlichkeit halber nur der Fall des ersten Oszillators betrachtet.

wobei die Koeffizienten $Q_{n,m}^{(1,2)}$ mit denselben Methoden bestimmt werden wie die Koeffizienten $F_{n,m}^{(1,2)}$ der Protodynamik in Gl. (2.18), siehe Appendix B. Es sei darauf hingewiesen, dass alle Koeffizienten $Q_{n,0}^{(1,2)}$, die den autonomen Termen entsprechen, auf Grund der Phasentransformation Null sein müssen, so dass in Gl. (4.19) ausschließlich die konstanten Terme $Q_{0,0}^{(1,2)}$ und Terme auftreten, die auch von der jeweils externen Phase abhängen und somit als Kopplungseffekte aufgefasst werden können.

Um diese Gleichungen zur formalen Definition der Phasendynamik, Gl. (2.11),

$$\dot{\phi}_1 = \omega_1 + q^{(1)}(\phi_1, \phi_2), \quad \dot{\phi}_2 = \omega_2 + q^{(2)}(\phi_2, \phi_1),$$

in Beziehung zu setzen, muss bedacht werden, dass nicht ausgeschlossen werden kann, dass die Kopplungsfunktionen $q^{(1)}, q^{(2)}$ neben den periodischen Termen in Gl. (4.19) auch konstante Terme $q_0^{(1,2)}$ enthalten, so dass die Beziehung zwischen Gl. (4.19) und Gl. (2.11),

$$\begin{aligned} \omega_1 &= Q_{0,0}^{(1)} - q_0^{(1)}, & q^{(1)}(\phi_1, \phi_2) &= q_0^{(1)} + \sum_{n \neq 0 \vee m \neq 0} Q_{n,m}^{(1)} e^{i(n\phi_1 + m\phi_2)}, \\ \omega_2 &= Q_{0,0}^{(2)} - q_0^{(2)}, & q^{(2)}(\phi_2, \phi_1) &= q_0^{(2)} + \sum_{n \neq 0 \vee m \neq 0} Q_{n,m}^{(2)} e^{i(n\phi_2 + m\phi_1)}, \end{aligned} \quad (4.20)$$

nur bis auf die unbekanntenen Konstanten $q_0^{(1,2)}$ bestimmt ist. Die Rekonstruktion der autonomen Frequenzen $\omega_{1,2}$ kann daher nur näherungsweise unter der Annahme $q_0^{(1,2)} = 0$ durchgeführt werden, wenn lediglich ein Datensatz der gekoppelten Oszillatoren gegeben ist.

Stehen hingegen *mindestens zwei* Datensätze derselben Oszillatoren mit unterschiedlicher, aber unbekannter Kopplungsstärke zur Verfügung, können unter der Annahme eines linearen Zusammenhangs von Kopplungsstärke und der Norm der Kopplungsfunktion der Phasendynamik die konstanten Terme $q_0^{(1,2)}$ bestimmt werden, so dass die autonomen Frequenzen $\omega_{1,2}$ exakt rekonstruiert werden können. Dieser Punkt wird im Folgenden nur für den ersten Oszillator diskutiert - die Argumentation gilt analog für den zweiten Oszillator. Wenn die Annahme korrekt ist, dass die Kopplungsfunktion $q^{(1)}$ linear mit der Stärke der Kopplung ϵ zunimmt, dann müssen sowohl die Norm der oszillierenden Terme in Gl. (4.20)

$$N_{q1} = \sqrt{\sum_{n \neq 0 \vee m \neq 0} |Q_{n,m}^{(1)}|^2} \quad (4.21)$$

als auch der möglicherweise vorhandene konstante Term der Kopplungsfunktion $q_0^{(1)}$ linear mit ϵ zunehmen:

$$q_0^{(1)} \propto \epsilon, \quad N_{q1} \propto \epsilon.$$

Werden die aus zwei unterschiedlichen Datensätzen gewonnenen Ergebnisse mit (a) und (b) bezeichnet, erhält man

$$q_0^{(1a)} = q_0^{(1b)} \frac{\epsilon^{(a)}}{\epsilon^{(b)}}, \quad \frac{N_{q1}^{(a)}}{N_{q1}^{(b)}} = \frac{\epsilon^{(a)}}{\epsilon^{(b)}}.$$

Aus Gl. (4.20) folgt dann

$$Q_{0,0}^{(1a)} - Q_{0,0}^{(1b)} = q_0^{(1a)} - q_0^{(1b)} = q_0^{(1b)} \left(\frac{\epsilon^{(a)}}{\epsilon^{(b)}} - 1 \right),$$

was zu folgendem Zusammenhang führt, um die autonomen Frequenzen der Oszillatoren ω_1 und ω_2 aus wenigsten zwei unterschiedlichen Datensätzen (a) , (b) mit unterschiedlicher aber unbekannter Kopplungsstärke exakt zu bestimmen:

$$\omega_1 = Q_{0,0}^{(1b)} - \frac{Q_{0,0}^{(1a)} - Q_{0,0}^{(1b)}}{N_{q_1}^{(a)} - N_{q_1}^{(b)}} N_{q_1}^{(b)}, \quad \omega_2 = Q_{0,0}^{(2b)} - \frac{Q_{0,0}^{(2a)} - Q_{0,0}^{(2b)}}{N_{q_2}^{(a)} - N_{q_2}^{(b)}} N_{q_2}^{(b)}. \quad (4.22)$$

Sind die autonomen Frequenzen ω_1 , ω_2 bekannt, dann sind die Kopplungsfunktionen in Gl. (4.20) durch

$$\begin{aligned} q^{(1)}(\phi_1, \phi_2) &= (Q_{0,0}^{(1)} - \omega_1) + \sum_{n \neq 0 \vee m \neq 0} Q_{n,m}^{(1)} e^{i(n\phi_1 + m\phi_2)}, \\ q^{(2)}(\phi_2, \phi_1) &= (Q_{0,0}^{(2)} - \omega_2) + \sum_{n \neq 0 \vee m \neq 0} Q_{n,m}^{(2)} e^{i(n\phi_2 + m\phi_1)} \end{aligned} \quad (4.23)$$

gegeben.

Die zentralen Ergebnisse der letzten theoretischen Abschnitte sind die Transformation von Protophasen zu Phasen gekoppelter Oszillatoren, Gl. (4.14), Gl. (4.15), der Nachweis der Invarianz der Phasen sowie die Rekonstruktion der invarianten Phasendynamik. Die Rekonstruktion kann (a) aus einem Datensatz näherungsweise, Gl. (4.20), und (b) aus zwei Datensätzen mit verschiedener aber unbekannter Kopplung exakt durchgeführt werden, Gl. (4.22), Gl. (4.23). Des Weiteren sei darauf hingewiesen, dass sich die Ergebnisse dieses Abschnitts auf drei oder mehr Oszillatoren übertragen lassen, siehe Appendix D.

4.2 Anwendung

4.2.1 Phasenmodell

Die einfachste Möglichkeit, die im letzten Abschnitt dargestellte Methode in ihrer Anwendung zu testen, besteht darin, über ein Phasenmodell eine Phase zu definieren, aus der Phase Observablen zu generieren, um dann aus diesen Observablen das ursprüngliche Phasenmodell zu rekonstruieren. Dazu werden aus dem Phasenmodell

$$\begin{aligned} \dot{\phi}_1 &= \omega_1 + \epsilon 2 \sin(\phi_1 - \phi_2) = \omega_1 + i\epsilon(e^{i(\phi_1 - \phi_2)} - e^{-i(\phi_1 - \phi_2)}), \\ \dot{\phi}_2 &= \omega_2 + \epsilon 2 \sin(\phi_2 - \phi_1) = \omega_2 + i\epsilon(e^{i(\phi_2 - \phi_1)} - e^{-i(\phi_2 - \phi_1)}) \end{aligned} \quad (4.24)$$

mit den autonomen Frequenzen $\omega_1 = 1.11$ und $\omega_2 = 0.89$ und der Kopplungsstärke $\epsilon = 0.04$ mit dem Euler-Verfahren, Zeitschritt $\Delta t = 0.01s$, die beiden Phasen $\Phi_1(t)$ und $\Phi_2(t)$ mit einer Länge von 111.000 Datenpunkten und ca. 120 Daten pro Periode bestimmt. Aus den Phasen $\Phi_1(t)$ und $\Phi_2(t)$ werden die beiden Observablen

$$X_{1,2}(t) = \cos(\Phi_{1,2}(t)) \quad (4.25)$$

und

$$Y_{1,2}(t) = e^{X_{1,2}(t)} \quad (4.26)$$

generiert, die einerseits durch die Hilbert-Transformation $\hat{X}(t)$ bzw. $\hat{Y}(t)$, Gl. (2.15), und andererseits durch die zeitliche Ableitung $\dot{X}(t)$ bzw. $\dot{Y}(t)$ 2-dimensional eingebettet werden. Die Trajektorien des ersten Oszillators sind in Abb. 4.1 (a), (b) dargestellt:⁴ Hier ist anzumerken, dass die Einbettung durch die Ableitung (rot) sowohl im Fall der Observablen $X(t)$ (links) als auch im Fall der Observablen $Y(t)$ (rechts) zu einer deutlichen Amplitudendynamik führt - im Gegensatz zur Einbettung durch die Hilbert Transformation (blau), die in beiden Fällen nahezu keine Amplitudendynamik aufweist. Aus den Trajektorien wurden über den Winkel der Polarkoordinaten, Gl. (2.16), 4 Paare von Protophasen

$$\begin{aligned} \text{Hilbert - Transformation} &: \Theta_1^{(Hx)}(t), \quad \Theta_2^{(Hx)}(t), \\ \text{Hilbert - Transformation} &: \Theta_1^{(Hy)}(t), \quad \Theta_2^{(Hy)}(t), \\ \text{Ableitung} &: \Theta_1^{(Ax)}(t), \quad \Theta_2^{(Ax)}(t), \\ \text{Ableitung} &: \Theta_1^{(Ay)}(t), \quad \Theta_2^{(Ay)}(t), \end{aligned}$$

berechnet. Diese Protophasen werden dann der Theorie folgend über Gl. (4.14) und Gl. (4.15) mit einer Ordnung von $N = 6$ in Phasen

$$\begin{aligned} \Phi_1^{(Hx)}(t), \quad \Phi_2^{(Hx)}(t), \\ \Phi_1^{(Hy)}(t), \quad \Phi_2^{(Hy)}(t), \\ \Phi_1^{(Ax)}(t), \quad \Phi_2^{(Ax)}(t), \\ \Phi_1^{(Ay)}(t), \quad \Phi_2^{(Ay)}(t), \end{aligned}$$

transformiert, aus denen dann nach Gl. (4.19) und Gl. (4.20) die Phasenmodelle mit einer Ordnung von $N = 5$ rekonstruiert werden.

Die aus den Phasenmodellen bestimmten autonomen Frequenzen

$\omega_1^{(Hx)}$	$\omega_2^{(Hx)}$	$\omega_1^{(Hy)}$	$\omega_2^{(Hy)}$	$\omega_1^{(Ax)}$	$\omega_2^{(Ax)}$	$\omega_1^{(Ay)}$	$\omega_2^{(Ay)}$
1.1100	0.8900	1.1100	0.8900	1.1119	0.8921	1.1117	0.8919
7.8 ⁻⁴ %	1.5 ⁻¹ %	2.7 ⁻⁴ %	5.2 ⁻⁴ %	0.17%	0.23%	0.16%	0.21%

weichen um weniger als 0.25 % von den autonomen Frequenzen der Phasenmodelle, Gl. (4.24), $\omega_1 = 1.11$ und $\omega_2 = 0.89$ ab, wobei hier bereits deutlich wird, dass die aus der Einbettung über die Ableitung berechneten Frequenzen einen deutlich höheren Fehler aufweisen - mit der ausgeprägteren Amplitudendynamik ist der Näherungsmethode entsprechend ein größerer Fehler verbunden. Die Koeffizienten der rekonstruierten Kopplungsfunktionen des ersten Oszillators

$$Q_{n,m}^{(Hx1)}, \quad Q_{n,m}^{(Hy1)}, \quad Q_{n,m}^{(Ax1)}, \quad Q_{n,m}^{(Ay1)}$$

sind in Abb. 4.1 (c), (d), (e), (f) dargestellt:⁵ Offensichtlich rekonstruieren die aus den Observablen $X(t)$ und $Y(t)$ über die Hilbert-Transformation bestimmten Phasenmodellen (Mitte: links und rechts) perfekt die Koeffizienten des ursprünglichen Phasenmodells, Gl. (4.24), für $\epsilon = 0.04$, während die über die

⁴Von den Trajektorien wurde der Durchschnitt abgezogen, um sie um den Ursprung zu zentrieren.

⁵Die Koeffizienten des zweiten Oszillators besitzen dieselbe Qualität.

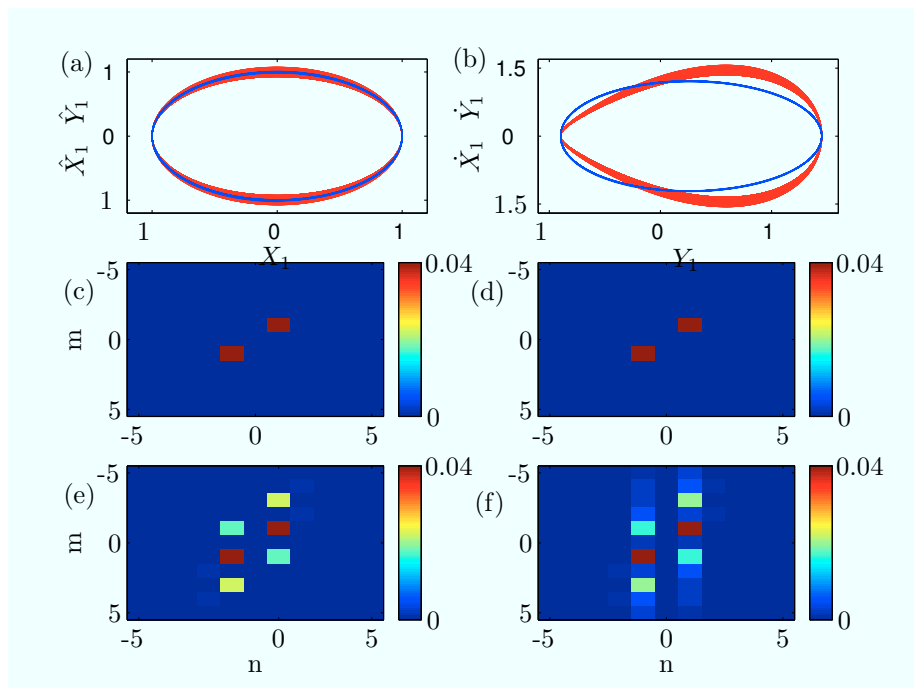


Abbildung 4.1: (a) Die Trajektorien der Observablen $X_1(t)$ (blau), $Y_1(t)$ (rot) eingebettet über die Hilbert-Transformation. (b) Die Trajektorien der Observablen $X_1(t)$ (blau), $Y_1(t)$ (rot) eingebettet über ihre Ableitung. Die Absolutwerte der Koeffizienten (c) $Q_{n,m}^{(Hx1)}$, (d) $Q_{n,m}^{(Hy1)}$, (e) $Q_{n,m}^{(Ax1)}$, (f) $Q_{n,m}^{(Ay1)}$.

Ableitung berechneten Phasenmodelle zwar immer noch die Komponenten des Modells korrekt erfassen, aber ebenfalls deutliche Artefakte aufweisen. Für beide Methoden der Einbettung gibt es jeweils nur geringe Variationen bezüglich der verwendeten Observablen, während die deutlichen Unterschiede der Phasenmodelle durch die verwendeten Einbettungsmethoden selbst bedingt sind. Wie sich bereits andeutete, ist diese Diskrepanz der Einbettungsmethoden als Effekt ihrer unterschiedlich stark ausgeprägten Amplitudendynamiken zu interpretieren. In diesem Sinne erweist sich die Hilbert-Transformation als optimale 2-dimensionale Einbettung [5, 35]: Ihre Verwendung führt in diesem Fall zu nahezu linienartigen Trajektorien, aus denen sich aus zwei unterschiedlichen Observablen invariante Phasenmodelle ergeben, die exakt das ursprüngliche Phasenmodell, Gl. (4.24), rekonstruieren.

4.2.2 Gekoppelte Van-der-Pol Oszillatoren

Im letzten Abschnitt wurde die Phasentransformation an einem idealen System erfolgreich getestet, das erstens im Fall der Einbettung durch die Hilbert Transformation nahezu keine Amplitudendynamik aufweist, und dessen Phasendynamik zweitens per Definitionem bekannt ist. In diesem Abschnitt soll die Phasentransformation an den zwei gekoppelten Van-der-Pol Oszillatoren aus Abschnitt 2.3 studiert werden, die eine deutliche Amplitudendynamik auf Grund der Kopplung aufweisen. Ziel dieses Abschnitts ist es zu zeigen, dass die Phasentransformation zu Kopplungsfunktionen führt - die im Gegensatz zu denen der Protophase aus Abschnitt 2.3 - trotz unterschiedlicher Observablen und Methoden der Einbettung eine deutliche Ähnlichkeit aufweisen und in diesem Sinne, besonders im Gegensatz zur Protophasendynamik, als invariant betrachtet werden können.

In Abschnitt 2.3 wurden aus zwei unterschiedlichen Observablen der Oszillatoren - den numerischen Lösungen des Gleichungssystems $X_{1,2}(t)$ und deren Funktionen $Y_{1,2}(t) = 2e^{0.5X_{1,2}(t)}$ - sowie durch die Einbettung dieser Zeitreihen über die Hilbert Transformation und über die Ableitung vier Protophasen

$$\begin{aligned} \Theta_{Hx1,2}(t), & X(t), & \text{Hilbert Transformation} \\ \Theta_{Hy1,2}(t), & Y(t), & \text{Hilbert Transformation} \\ \Theta_{Ax1,2}(t), & X(t), & \text{Ableitung} \\ \Theta_{Ay1,2}(t), & Y(t), & \text{Ableitung} \end{aligned}$$

bestimmt. Auf die jeweils zusammengehörigen Paare dieser Protophasen wurde die Phasentransformation, Gl. (4.14) und Gl. (4.15), mit einer Ordnung von $N = 8$ angewandt, um die Phasen

$$\begin{aligned} \Phi_{Hx1,2}(t), & X(t), & \text{Hilbert Transformation} \\ \Phi_{Hy1,2}(t), & Y(t), & \text{Hilbert Transformation} \\ \Phi_{Ax1,2}(t), & X(t), & \text{Ableitung} \\ \Phi_{Ay1,2}(t), & Y(t), & \text{Ableitung} \end{aligned}$$

zu berechnen. Aus den Phasen wurden die Phasenmodelle nach Gl. (4.19) und Gl. (4.20) mit einer Ordnung von $N = 7$ rekonstruiert. Die daraus resultierenden

Kopplungsfunktionen

$$\begin{aligned}
 q^{(Hx1)}(\phi_{Hx1}, \phi_{Hx2}), & \quad X(t), & \text{Hilbert Transformation} \\
 q^{(Hy1)}(\phi_{Hy1}, \phi_{Hy2}), & \quad Y(t), & \text{Hilbert Transformation} \\
 q^{(Ax1)}(\phi_{Ax1}, \phi_{Ax2}), & \quad X(t), & \text{Ableitung} \\
 q^{(Ay1)}(\phi_{Ay1}, \phi_{Ay2}), & \quad Y(t), & \text{Ableitung}
 \end{aligned}$$

sind in Abb. 4.2 dargestellt.

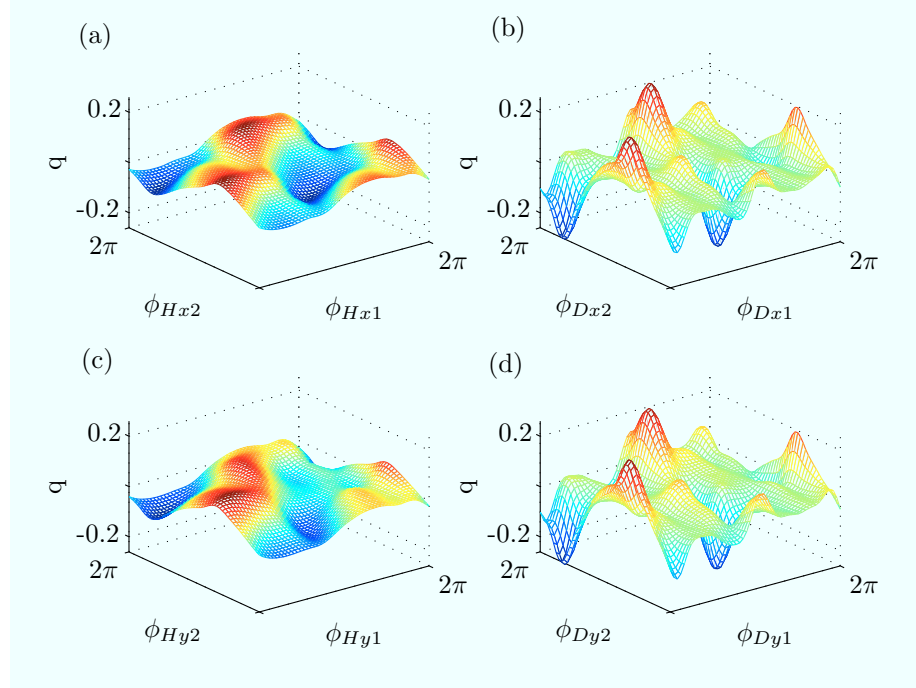


Abbildung 4.2: Die Kopplungsfunktionen der Phasendynamik: (a) $q^{(Hx1)}(\phi_{Hx1}, \phi_{Hx2})$, (b) $q^{(Ax1)}(\phi_{Ax1}, \phi_{Ax2})$, (c) $q^{(Hy1)}(\phi_{Hy1}, \phi_{Hy2})$, (d) $q^{(Ay1)}(\phi_{Ay1}, \phi_{Ay2})$.

Der Vergleich dieser Kopplungsfunktionen mit denen der Protophasen in Abb. 2.1 zeigt eine deutliche Verbesserung der Ähnlichkeit und somit der Invarianz der Ergebnisse. Die Kopplungsfunktionen sind alle in derselben Größenordnung, die um den Faktor 10 unter der der Protophasen liegt. Sie weisen im Gegensatz zu den Funktionen in Abb. 2.1 eine ähnliche Struktur auf, in der eine funktionale Abhängigkeit von *beiden* Phasen deutlich zu erkennen ist. Dieser visuelle Eindruck der Ähnlichkeit kann durch die Verwendung der Korrelation der Kopplungsfunktionen

$$\rho(q^1, q^2) = \max_{\Delta\phi_1, \Delta\phi_2} \left(\frac{\sum_{n,m} Q_{n,m}^1 Q_{-n,-m}^2 e^{-i(n\Delta\phi_1 + m\Delta\phi_2)}}{\sqrt{\sum_{n,m} |Q_{n,m}^1|^2 \sum_{n,m} |Q_{n,m}^2|^2}} \right) \quad (4.27)$$

quantifiziert werden. Da unterschiedliche Observablen zu jeweils verschiedenen, physikalisch aber bedeutungslosen konstanten Phasenverschiebungen führen kön-

nen, von denen die Korrelation abhängt, wird $\rho(q^1, q^2)$ als das Maximum systematisch variierender Phasenverschiebungen $\Delta\phi_1, \Delta\phi_2$ definiert.

Die Korrelationen der 6 möglichen Kombinationen der Kopplungsfunktionen sind in der folgenden Tabelle dargestellt.

$\rho(q^{(i)}, q^{(j)})$	$q^{(Hx1)}$	$q^{(Ax1)}$	$q^{(Hy1)}$	$q^{(Ay1)}$
$q^{(Hx1)}$	1	0.71	0.91	0.71
$q^{(Ax1)}$	–	1	0.61	0.98
$q^{(Hy1)}$	–	–	1	0.63

Diese Ergebnisse zeigen, dass die Phasentransformation von Protophasen unterschiedlicher Observablen und Einbettungsmethoden - im Gegensatz zur Protophasendynamik - zu deutlich korrelierten Kopplungsfunktionen mit $\rho(q^{(i)}, q^{(j)}) > 0.6$ führt. Andererseits sind die unterschiedlichen Kopplungsfunktionen aber nicht perfekt korreliert, was insbesondere Kopplungsfunktionen, die mit unterschiedlichen Einbettungsmethoden rekonstruiert wurden, betrifft. In diesem Fall ist $\rho(q^{(i)}, q^{(j)}) < 0.7$, während für den Fall gleicher Einbettungsmethoden aber unterschiedlicher Observablen $\rho(q^{(i)}, q^{(j)}) > 0.9$ gilt, was auch in Abb. 2.1 unmittelbar sichtbar ist. In Bezug auf dieselbe Einbettungsmethode kann hier also durchaus von der Rekonstruktion invarianter Phasenmodellen aus unterschiedlichen Observablen gesprochen werden, während dies für die Phasenmodelle der beiden Einbettungsmethoden nur in einem qualitativen Sinn gilt. Wie die Rekonstruktion der Phasenmodell im letzten Abschnitt gezeigt hat, ist dieser Unterschied darauf zurückzuführen, dass die Einbettung über die Ableitung zu einer deutlich ausgeprägteren Amplitudendynamik führt, die sich in Artefakten in der rekonstruierten Phasendynamik niederschlägt. Die Einbettung über die Hilbert Transformation ist daher als optimale Einbettung zur Bestimmung der Phasen anzusehen.

4.2.3 Gekoppelte Neuronen

Ziel dieses Abschnitts ist es zu demonstrieren, dass die Phasentransformation in der Lage ist, Standardverfahren zur Beschreibung der Kopplung von Oszillatoren⁶ - den Synchronisations-Index [19, 42] und den Richtungs-Index [43, 13, 44, 21] - deutlich zu verbessern, bzw. dass sie in dem hier gewählten Fall der sehr extremen Protophasendynamik von gekoppelten Neuronen überhaupt erst sinnvolle Ergebnisse ermöglicht.

Als Modellsystem werden zwei unidirektional gekoppelte Hindmarsh-Rose Neuronen [45],

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= y_1 - x_1^3 + 3x_1^2 - z_1 + I_1, \\
\dot{y}_1 &= 1 - 5x_1^2 - y_1, \\
\dot{z}_1 &= 0.006(4(x_1 + 1.6) - z_1), \\
\dot{x}_2 &= y_2 - x_2^3 + 3x_2^2 - z_2 + I_2 + \epsilon x_1, \\
\dot{y}_2 &= 1 - 5x_2^2 - y_2, \\
\dot{z}_2 &= 0.006(4(x_2 + 1.6) - z_2),
\end{aligned} \tag{4.28}$$

⁶Diese Verfahren können beispielsweise zur Analyse der Dynamik elektronischer Schaltungen [24], der kardiorespiratorischen Wechselwirkung [14] oder der Dynamik gekoppelter Neuronen [16, 20] verwendet werden. Dass die Quantifizierung von kausalen Abhängigkeiten von Zeitreihen im Allgemeinen keine triviale Aufgabe ist, und insbesondere die Bestimmung der Richtung einer Kopplung mit Standardverfahren wie der Korrelation oder der Transinformation auf Grund ihrer Symmetrie nicht möglich ist, wird in [25] diskutiert.

mit $I_1 = 1.32$, $I_2 = 1.36$ und dem Kopplungsparameter ϵ , der im Bereich von $\epsilon = [0, \dots, 0.0144]$ variiert wird, verwendet. Das Gleichungssystem wird numerisch mit dem MATLAB Algorithmus *ode45* gelöst und für jeden Wert des Parameters ϵ werden die Zeitreihen $X_{1,2}^{(\epsilon)}(t)$ als Observablen der beiden Oszillatoren verwendet, die jeweils 210.000 Datenpunkte besitzen. Die Protophasen $\Theta_{1,2}^{(\epsilon)}(t)$ werden mit Hilfe der Hilbert-Transformation, Gl. (2.15), über den Winkel der Polarkoordinaten, Gl. (2.16), berechnet. Aus den Protophasen werden durch die Phasentransformation, Gl. (4.14) und Gl. (4.15), die Phasen $\Phi_{1,2}^{(\epsilon)}(t)$ mit einer Ordnung von $N = 10$ rekonstruiert, wobei die Phasentransformation für autonome Oszillatoren, Gl. (3.9), Gl. (3.11), mit einer Ordnung von $N = 400$ als Preprocessing verwendet wurde.

Dann wird nach Gl. (3.13) sowohl aus den Protophasen $\Theta_{1,2}^{(\epsilon)}(t)$ der Synchronisations-Index

$$\gamma_{1,2}(\epsilon) = \left| \frac{1}{T} \int_0^T e^{i(\Theta_{1,2}^{(\epsilon)}(t) - \Theta_{2,1}^{(\epsilon)}(t))} dt \right| \quad (4.29)$$

als auch aus den entsprechenden Phasen $\Phi_{1,2}^{(\epsilon)}(t)$ der Synchronisations-Index

$$\eta_{1,2}(\epsilon) = \left| \frac{1}{T} \int_0^T e^{i(\Phi_{1,2}^{(\epsilon)}(t) - \Phi_{2,1}^{(\epsilon)}(t))} dt \right| \quad (4.30)$$

bestimmt.

Um den Richtungs-Index zu bestimmen, wurden aus den Protophasen $\Theta_{1,2}^{(\epsilon)}(t)$ durch die Minimierung des RMS-Fehlers, Appendix B, Modelle der Protophasendynamik⁷, Gl. (2.18),

$$\dot{\theta}_{1,2} = f^{(1,2)}(\theta_{1,2}, \theta_{2,1}) = \sum_{n,m} F_{n,m}^{(1,2)} e^{i(n\theta_{1,2} + m\theta_{2,1})}$$

mit einer Ordnung von $N = 3$ berechnet. Es sei hier betont, dass es für die Protophasen - im Gegensatz zu den Phasen - wegen der starken Korrelation der Basisfunktionen auf Grund der extremen eigenperiodischen Terme $F_{n,0}^{(1,2)}$ numerisch instabil ist, eine höhere Ordnung als $N = 3$ zu verwenden. Entsprechend werden aus den Phasen Modelle der Phasendynamik mit einer Ordnung von $N = 9$, Gl. (4.19) und Gl. (4.20),

$$\dot{\phi}_{1,2} = \omega_{1,2} + q^{(1,2)}(\phi_{1,2}, \phi_{2,1}) = Q_{0,0}^{(1,2)} + \sum_{n,m \neq 0,0} Q_{n,m}^{(1,2)} e^{i(n\phi_{1,2} + m\phi_{2,1})}$$

berechnet.

Zur Charakterisierung der gegenseitigen Abhängigkeit der Oszillatoren [43] wird die Größe

$$c_{1,2}^2 = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial f^{(1,2)}}{\partial \theta_{2,1}} \right) d\theta_1 d\theta_2 \quad (4.31)$$

definiert, die sich im Fall der rekonstruierten Protophasendynamik, Gl. (2.18),

$$c_{1,2}^{proto} = \sqrt{\sum_{n,m} |m F_{n,m}^{(1,2)}|^2} \quad (4.32)$$

⁷Aus Gründen der Übersichtlichkeit wird der Index ϵ hier weggelassen.

schreiben lässt. Da es im Modell der Protophasendynamik, Gl. (2.18), keine klar definierte Trennung zwischen autonomen Komponenten und externen Einflüssen auf die Dynamik gibt, die aber für die Charakterisierung der gegenseitigen Abhängigkeit der Oszillatoren notwendig ist, wird diese Trennung durch die partielle Ableitung in Gl. (4.31) implementiert. Da andererseits die Trennung von autonomen und externen Komponenten die Grundlage der Konzeption der Phasentransformation ist, muss sie im Fall der Phasendynamik nicht zusätzlich erzeugt werden: Die konstanten Terme $Q_{0,0}^{(1,2)} \approx \omega_{1,2}$ beschreiben ausschließlich die autonomen Komponenten der Phasendynamik, während alle externen Einflüsse ausschließlich durch die Kopplungsfunktionen $q^{(1,2)}(\phi_{1,2}, \phi_{2,1})$ erfasst werden. Daher lässt sich auf der Basis der Phasendynamik die gegenseitige Abhängigkeit der Oszillatoren durch⁸

$$c_{1,2}^{phase} = \frac{\langle |q^{(1,2)}(\phi_{1,2}, \phi_{2,1})|^2 \rangle_{\phi_{1,2}}}{\omega_{1,2}} = \frac{\sqrt{\sum_{\neq 0,0} |Q_{n,m}^{(1,2)}|^2}}{Q_{0,0}^{1,2}} \quad (4.33)$$

charakterisieren. Auf der Basis der Größen $c_{1,2}$, die die gegenseitige Abhängigkeit der Oszillatoren ausdrücken, kann ein Richtungs-Index

$$d = \frac{c_2 - c_1}{c_1 + c_2} \quad (4.34)$$

definiert werden.⁹

In Abb. 4.3-1 (a) ist der Synchronisations-Index als Funktion der Kopplungsstärke ϵ dargestellt. Die rote Linie mit Rauten repräsentiert $\gamma_{1,2}(\epsilon)$ auf der Basis der Protophasen $\Theta_{1,2}^{(\epsilon)}(t)$: Offensichtlich sind die Ergebnisse bedeutungslos, da sie deutlich zu groß und konstant sind und so in keiner Beziehung zur Veränderung der Kopplungsstärke ϵ stehen. Im Gegensatz dazu zeigt $\eta_{1,2}(\epsilon)$ auf der Basis der Phasen $\Phi_{1,2}^{(\epsilon)}(t)$ (blaue Linie mit Sternen) die zu erwartende Beziehung zwischen Kopplungsstärke ϵ und Synchronisations-Index: $\eta_{1,2}(\epsilon)$ beginnt mit Null und steigt dann monoton mit ϵ an. Im Fall der Wechselwirkung von Neuronen verbessert die Phasentransformation also nicht nur die Bestimmung des Synchronisations-Index, sondern ermöglicht überhaupt erst bedeutungsvolle Ergebnisse.

In Abb. 4.3-1 (b) ist der Richtungs-Index $d(\epsilon)$ als Funktion der Kopplungsstärke ϵ dargestellt: Die rote Linie mit Rauten zeigt $d(\epsilon)$ auf der Basis der Protophasen $\Theta_{1,2}^{(\epsilon)}(t)$: Obwohl die Tendenz der Richtung korrekt ist, sind die meisten der stark variierenden Ergebnisse weit von dem für eine unidirektionale Kopplung zu erwartenden Wert, $d = 1$, entfernt. Des Weiteren lassen die deutlichen Variationen den Schluss zu, dass die Ergebnisse stark von Komponenten abhängen, die nicht mit der Wechselwirkung der Neuronen zusammenhängen. Im Gegensatz dazu weist der Richtungs-Index $d(\epsilon)$ auf der Basis der Phasen $\Phi_{1,2}^{(\epsilon)}(t)$ (blaue Linie mit Sternen) Werte von $d > 0.8$ auf, sobald die Kopplung eine detektierbare Stärke besitzt, und liegt damit zufriedenstellend nahe

⁸ $\neq 0,0$ bedeutet die Summation über alle Kombinationen n, m außer über den konstanten Term mit $n = 0, m = 0$.

⁹Eine auf der bedingten Transinformation beruhende Methode um einen Richtungs-Index aus den Phasen gekoppelter Systeme zu bestimmen, ohne die Modelle der Phasendynamik explizit zu bestimmen, findet sich in [26, 27].

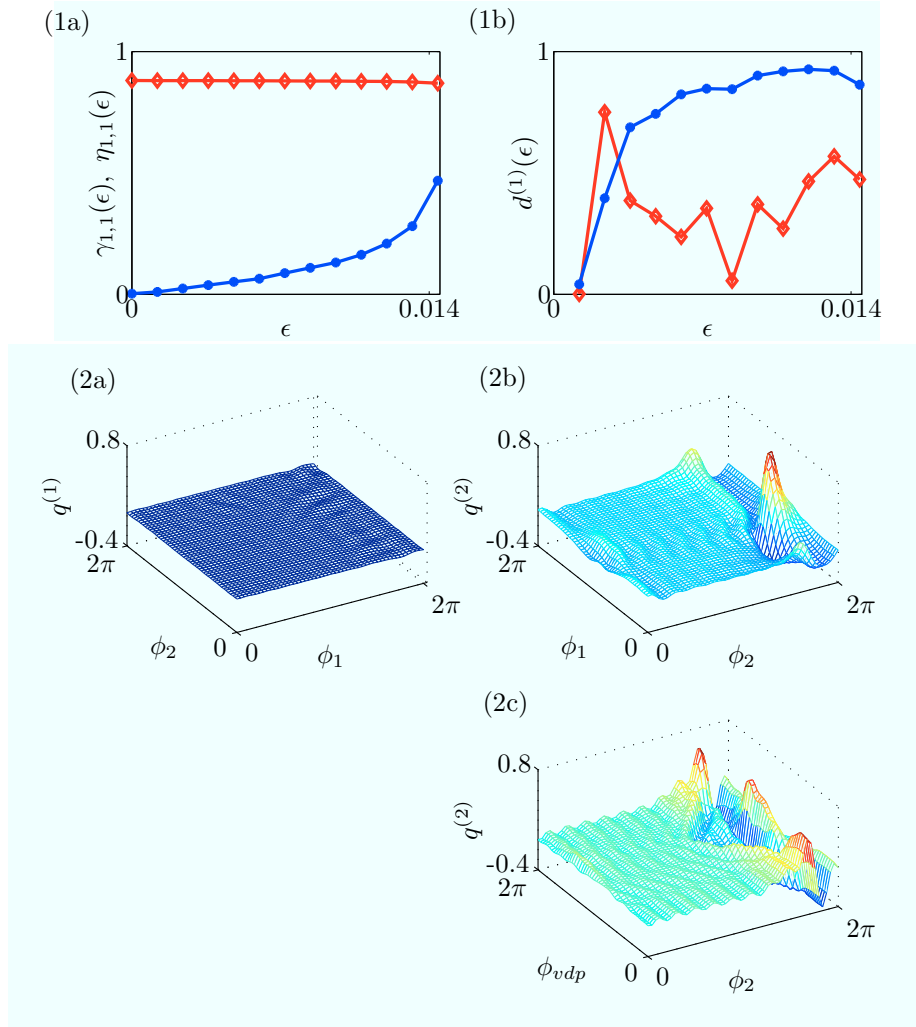


Abbildung 4.3: (1) (a) Der Synchronisations-Index als Funktion der Kopplungsstärke ϵ auf der Basis der Protophasen, $\gamma_{1,2}(\epsilon)$, (rote Linie mit Rauten) und auf der Basis der Phasen, $\eta_{1,2}(\epsilon)$, (blaue Linie mit Sternen). (b) Der Richtungs-Index $d(\epsilon)$ als Funktion der Kopplungsstärke ϵ auf der Basis der Protophasen (rote Linie mit Rauten) und auf der Basis der Phasen (blaue Linien mit Sternen). (2) Die Kopplungsfunktionen (a) $q^{(1)}(\phi_1, \phi_2)$ des ersten Neurons, (b) $q^{(2)}(\phi_2, \phi_1)$ des zweiten Neurons und (c) die Kopplungsfunktion des zweiten Neurons $q^{(2)}(\phi_2, \phi_{vdp})$, wenn es durch einen Van-der-Pol Oszillator an Stelle des ersten Neurons getrieben wird.

am idealen Wert von $d(\epsilon) = 1$. Auch zeigt $d(\epsilon)$ ein monotoneres Verhalten in Bezug auf das Ansteigen der Kopplungsstärke, was den Rückschluss zulässt, dass $d(\epsilon)$ von dynamischen Komponenten abhängt, deren Ausprägung von der zunehmenden Kopplungsstärke bestimmt wird.

Um zu illustrieren, dass die Phasentransformation nicht nur die Berechnung bedeutungsvoller Ergebnisse des Richtungs-Index ermöglicht, sondern dass die Ergebnisse auch auf plausiblen Modellen der Phasendynamik beruhen, sind in Abb. 4.3-2 die Kopplungsfunktionen $q^{(1)}(\phi_1, \phi_2)$ und $q^{(2)}(\phi_2, \phi_1)$ der beiden Neuronen für $\epsilon = 0.01$ dargestellt: Abb. 4.3-2 (a) zeigt die zu erwartende - vollständig flache - Kopplungsfunktion $q^{(1)}(\phi_1, \phi_2)$ des ersten Neurons, das das zweite Neuron beeinflusst, aber selbst nicht beeinflusst wird, Gl. (4.28). Abb. 4.3-2 (b) zeigt die Kopplungsfunktion des zweiten Neurons $q^{(2)}(\phi_2, \phi_1)$, das vom ersten beeinflusst wird. Die dort sichtbare Funktion spiegelt typische Eigenschaften gekoppelter Neuronen wieder: Die Abhängigkeit der Funktion von der eigenen Phase des Neuron ϕ_2 zeigt, dass die Dynamik nur in einem kleinen Bereich kurz vor dem Spike bei $\phi_2 = 0$ überhaupt für externe Einflüsse sensitiv ist, und in einem großen Bereich nach dem Spike überhaupt nicht vom ersten Neuron beeinflusst wird, was von Neuronen als so genannte Refraktärphase bekannt ist [49]. Die Abhängigkeit der Funktion von der Phase des externen Neurons ϕ_1 folgt hingegen der Dynamik des ersten Neurons und ist kurz nach dessen Spike $\phi_1 = 0$ am deutlichsten ausgeprägt. Zum Vergleich ist in Abb. 4.3-2 (c) die Kopplungsfunktion des zweiten Neurons $q^{(2)}(\phi_2, \phi_{vdP})$ dargestellt, wenn es an Stelle des ersten Neurons durch einen Van-der-Pol-Oszillator getrieben wird.¹⁰ Der Übergang von einer plötzlichen Relaxations-Dynamik hin zu einer regelmäßigen Oszillation des treibenden Oszillators ist in der Kopplungsfunktion deutlich in der Veränderung der Abhängigkeit von der jeweils externen Phase zu sehen, während die Art der Abhängigkeit von der eigenen Phase unverändert bleibt.

4.2.4 Rekonstruktion der autonomen Frequenz

Ziel dieses Abschnitts ist es zu demonstrieren, dass es die Phasentransformation ermöglicht, aus Zeitreihen *gekoppelter* Oszillatoren die *autonomen* Frequenzen der *ungekoppelten* Dynamik zu rekonstruieren, wenn mehrere Datensätze mit unterschiedlichen, aber unbekanntem Kopplungsstärken gegeben sind. Zu diesem Zweck werden Zeitreihen $X_{1,2}^{(\epsilon)}(t)$ von zwei gekoppelten Van-der-Pol-Oszillatoren,

$$\begin{aligned}\ddot{x}_1 &= -\omega_1^2 x_1 + \mu \dot{x}_1 (1 - x_1^2) + \epsilon (\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + \xi(t), \\ \ddot{x}_2 &= -\omega_2^2 x_2 + \mu \dot{x}_2 (1 - x_2^2) + \epsilon (\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + \xi(t),\end{aligned}\quad (4.35)$$

durch die numerische Lösung von Gl. (4.35) mit dem Euler-Verfahren, Zeitschritt $\Delta t = 0.01s$, unter der Variation der Kopplungsstärke¹¹ im Bereich von $\epsilon =$

¹⁰Gl. (4.28) wird dadurch zum Gleichungssystem

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= y_2, \\ \dot{y}_1 &= -\omega_1^2 y_1 + \mu(1 - y_1^2)y_2, \\ \dot{x}_2 &= y_2 - x_2^3 + 3x_2^2 - z_2 + I_2 + \epsilon x_1, \\ \dot{y}_2 &= 1 - 5x_2^2 - y_2, \\ \dot{z} &= 0.006(4(x_2 + 1.6) - z_2),\end{aligned}$$

wobei die Zeitskala des Van-der-Pol-Oszillators an die des Neurons angepasst wird, indem die Parameter mit $\omega_1 = 0.012$ und $\mu = 0.005$ entsprechend klein gewählt werden.

¹¹Es sei darauf hingewiesen, dass dieser Bereich auch sehr starke Kopplungen der Oszillatoren umfasst, da diese sich bei $\epsilon > 0.22$ bereits synchronisieren.

$[0, \dots, 0.2]$ berechnet. Die Parameter des Gleichungssystems sind $\omega_1 = 1.11$, $\omega_2 = 0.89$, $\mu = 0.5$ und $\xi(t)$ ist δ -korreliertes Rauschen mit einer Intensität von $\sigma = 0.05$. Aus den Zeitreihen $X_{1,2}^{(\epsilon)}(t)$ wird eine zweite Observable über

$$Y_{1,2}^{(\epsilon)}(t) = 2e^{0.5X_{1,2}^{(\epsilon)}(t)}$$

definiert. Aus den Zeitreihen $X_{1,2}^{(\epsilon)}(t)$ und $Y_{1,2}^{(\epsilon)}(t)$ werden Protophasen,

$$\begin{aligned} \Theta_{x_{1,2}}^{(\epsilon)}(t), \quad X_{1,2}^{(\epsilon)}(t), \quad & \text{Hilbert - Transformation} \\ \Theta_{y_{1,2}}^{(\epsilon)}(t), \quad Y_{1,2}^{(\epsilon)}(t), \quad & \text{Hilbert - Transformation} \end{aligned}$$

für die unterschiedlichen Werte der Kopplungsstärke im Bereich von $\epsilon = [0, \dots, 0.2]$ über die Hilbert-Transformation, Gl. (2.15), durch den Winkel der Polarkoordinaten, Gl. (2.16), definiert. Aus diesen Protophasen werden die entsprechenden Phasen,

$$\Phi_{x_{1,2}}^{(\epsilon)}(t), \quad \Phi_{y_{1,2}}^{(\epsilon)}(t),$$

nach Gl. (4.14) und Gl. (4.15) mit einer Ordnung von $N = 6$ berechnet. Für jeden Wert des Parameters ϵ ergeben sich so zwei Paare von Phasen, aus denen nach Gl. (4.19) und Gl. (4.20) mit einer Ordnung von $N = 5$ die Kopplungsfunktionen $q^{(i,\epsilon)}(\phi_{i,1}, \phi_{i,2})$ durch die Bestimmung der Koeffizienten $Q_{n,m}^{(i,\epsilon)}$ über die Minimierung des *RMS*-Fehlers, Appendix B, bestimmt werden.

<i>Dynamik von</i>	<i>Kopplungsfunktion</i>	<i>Koeffizienten</i>
$\dot{\Phi}_{x_1}^{(\epsilon)}(t)$	$q^{(x_1,\epsilon)}(\phi_{x_1}^{(\epsilon)}, \phi_{x_2}^{(\epsilon)})$	$Q_{n,m}^{(x_1,\epsilon)}$
$\dot{\Phi}_{x_2}^{(\epsilon)}(t)$	$q^{(x_2,\epsilon)}(\phi_{x_2}^{(\epsilon)}, \phi_{x_1}^{(\epsilon)})$	$Q_{n,m}^{(x_2,\epsilon)}$
$\dot{\Phi}_{y_1}^{(\epsilon)}(t)$	$q^{(y_1,\epsilon)}(\phi_{y_1}^{(\epsilon)}, \phi_{y_2}^{(\epsilon)})$	$Q_{n,m}^{(y_1,\epsilon)}$
$\dot{\Phi}_{y_2}^{(\epsilon)}(t)$	$q^{(y_2,\epsilon)}(\phi_{y_2}^{(\epsilon)}, \phi_{y_1}^{(\epsilon)})$	$Q_{n,m}^{(y_1,\epsilon)}$

Wie bereits in Abschnitt 4.1.3 angesprochen, basiert die exakte Rekonstruktion der autonomen Frequenzen gekoppelter Oszillatoren auf der Annahme, dass die Veränderung der Kopplungsstärke nicht die Struktur der Kopplungsfunktion verändert, sondern nur ihre Amplitude, so dass sich die Veränderung der Kopplungsstärke im Phasenmodell nur als Multiplikation mit einem konstanten Faktor niederschlägt. Um zu demonstrieren, dass es sich hierbei um eine vernünftige Annahme handelt, wird die Korrelation der Kopplungsfunktionen für die unterschiedlichen Werte der Kopplungsstärke $\rho(q^{(\epsilon_1)}, q^{(\epsilon_2)})$ nach Gl. (4.27) berechnet. Da die Korrelation nur von der Form nicht aber von der Amplitude der Kopplungsfunktionen abhängt, sollte im Idealfall die Korrelation der Kopplungsfunktionen nicht von der Kopplungsstärke abhängen und $\rho(q^{(\epsilon_1)}, q^{(\epsilon_2)}) \approx 1$ gelten, wenn die Annahme korrekt ist. Diese Korrelationen sind für beide Observablen beider Oszillatoren in Abb. 4.4-1 dargestellt: Außer in der ersten Reihe sind alle Korrelationen sehr dicht an $\rho \approx 1$, was zeigt, dass die zur Diskussion stehende Annahme erfüllt ist. Die erste Reihe enthält die Kopplungsfunktionen der Kopplungsstärke $\epsilon = 0$, die demnach ausschließlich durch Rauschen

bestimmt sind, so dass die niedrigen Korrelationen hier zu erwarten sind. Wie Abb. 4.4-2 zeigt, sind auch Kopplungsfunktionen, die aus den *unterschiedlichen* Observablen $X_{1,2}(t)$ und $Y_{1,2}(t)$ gewonnen wurden, für alle Kopplungsstärken $\epsilon > 0$ stark korreliert, was des Weiteren die erwünschte Invarianz der Ergebnisse unterschiedlicher Observablen belegt. Nachdem gezeigt wurde, dass die grundlegende Annahme des Ansatzes zutreffend ist, werden für beide Oszillatoren und beide Observablen die konstanten Terme $Q_{0,0}^{(i,\epsilon)}$ der Phasenmodelle als Funktionen der Norm der Kopplungsfunktionen $N_{q_i,\epsilon}$, Gl. (4.21) (in Abb. 4.5 als blaue Linien mit Rauten) dargestellt. Die Ergebnisse im Bereich $\epsilon = [0.02, \dots, 0.16]$, also der Punkt 2–8 in jeder Figur, weisen ein näherungsweise lineares Verhalten auf. Aus allen paarweisen Kombinationen dieser Werte werden die autonomen Frequenzen $\omega_{1,2}$ nach Gl. (4.22) bestimmt. Diese Berechnung entspricht in der Abbildung dem Ziehen einer Geraden durch die jeweiligen Punkte-Paare, wobei der Schnitt mit der vertikalen Achse, auf der die $Q_{0,0}^{(i,\epsilon)}$ aufgetragen sind, der jeweiligen autonomen Frequenz $\omega_{1,2}$ entspricht: Diese Geraden sind in Abb. 4.5 als dünne gepunktete Linien zu sehen. Die Durchschnittswerte $\bar{\omega}_{1,2}$ sind in jedem Plot als fette rote Linie dargestellt, während die Standardabweichungen σ als gestrichelte rote Linien zu sehen sind. Die aus einer numerischen Simulation der autonomen Oszillatoren ohne Rauschen bestimmten Werte¹² der autonomen Frequenzen $\omega_{1,2}^{real}$ sind als gepunktete-gestrichelte schwarze Linien repräsentiert. In allen vier Grafiken, d.h. für beide Oszillatoren und für die beide Observablen der Oszillatoren, liegt das durchschnittlich rekonstruierte Ergebnis $\bar{\omega}_{1,2}$ sehr dicht am korrekten Wert $\omega_{1,2}^{real}$ der autonomen Frequenz und innerhalb der Standardabweichung, was zeigt, dass die autonomen Frequenzen in sehr guter Näherung in invarianter Weise aus Zeitreihen gekoppelter Oszillatoren rekonstruiert werden können. Die exakten Werte der rekonstruierten autonomen Frequenzen $\bar{\omega}_{1,2}$, die Standardabweichungen, die korrekten autonomen Frequenzen $\omega_{1,2}^{real}$ sowie die relativen Fehler sind in der folgenden Tabelle aufgelistet.

<i>Oszillator</i>	<i>Observable</i>	$\bar{\omega}_i$	σ	ω_{real}	<i>relativer Fehler</i>
1	$X(t)$	1.0767	0.0013	1.0762	0.05%
1	$Y(t)$	1.0765	0.0013	1.0762	0.04%
2	$X(t)$	0.8581	0.0018	0.8572	0.10%
2	$Y(t)$	0.8562	0.0009	0.8572	-0.12%

¹²Es wurde Gl. (4.35) ohne Kopplungs- und Rauschterme numerisch gelöst.

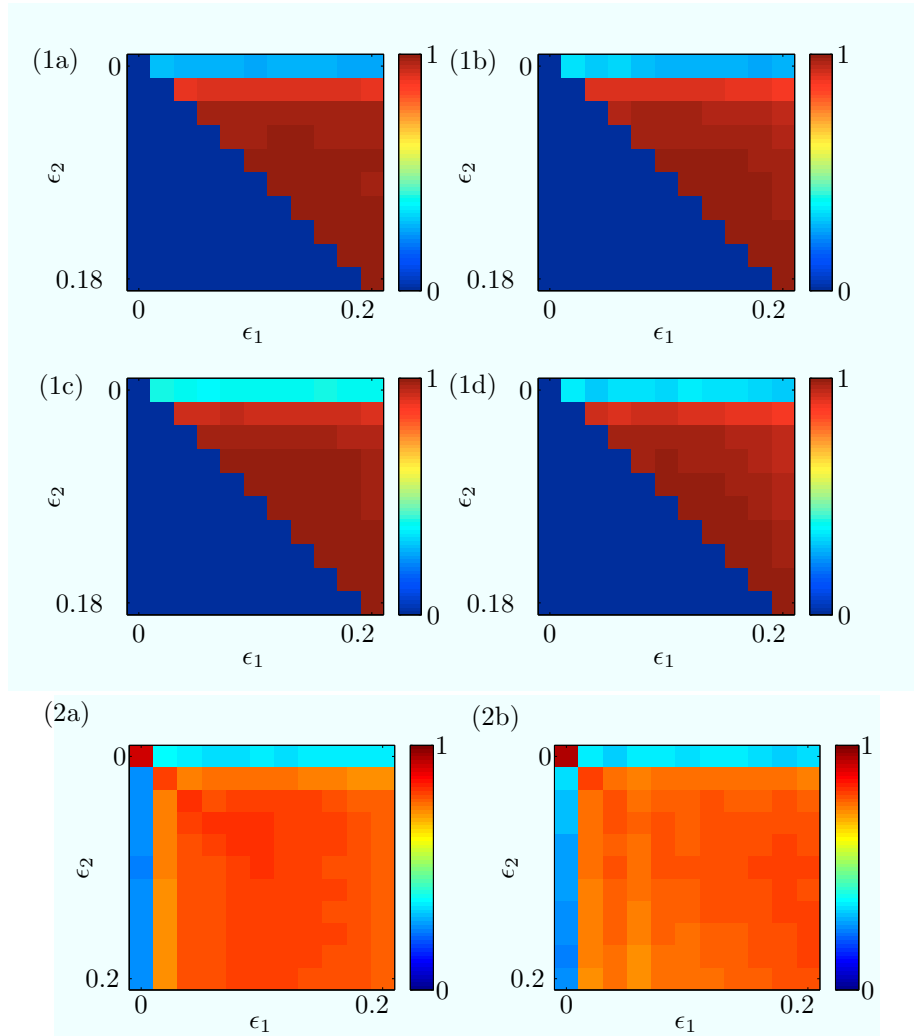


Abbildung 4.4: (1) Die Korrelation der Kopplungsfunktionen unterschiedlicher Kopplungsstärken ϵ_1 und ϵ_2 : (a) $\rho(q^{(x_1, \epsilon_1)}, q^{(x_1, \epsilon_2)})$, (b) $\rho(q^{(x_2, \epsilon_1)}, q^{(x_2, \epsilon_2)})$, (c) $\rho(q^{(y_1, \epsilon_1)}, q^{(y_1, \epsilon_2)})$, (d) $\rho(q^{(y_2, \epsilon_1)}, q^{(y_2, \epsilon_2)})$. Da die Resultate symmetrisch sind, ist nur die Hälfte oberhalb der Diagonalen dargestellt. (2) Die Korrelation der Kopplungsfunktionen der beiden Observablen für unterschiedliche Kopplungsstärken ϵ_1, ϵ_2 : (a) $\rho(q^{(x_1, \epsilon_1)}, q^{(y_1, \epsilon_2)})$, (b) $\rho(q^{(x_2, \epsilon_1)}, q^{(y_2, \epsilon_2)})$.

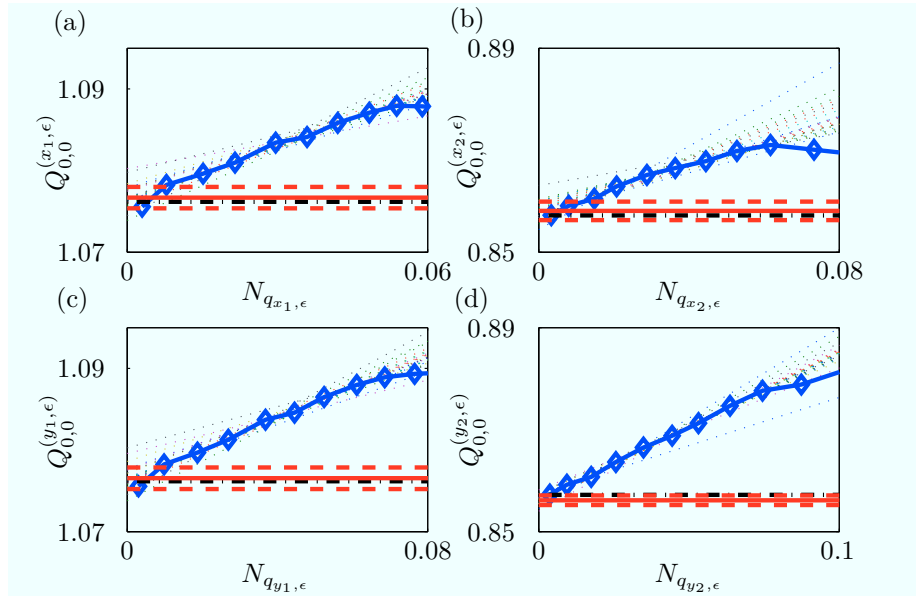


Abbildung 4.5: Die konstanten Terme der Phasenmodelle $Q_{0,0}^{(i,\epsilon)}$ als Funktion der Norm der entsprechenden Kopplungsfunktionen $N_{q_{i,\epsilon}}$ (blaue Linie mit Rauten): (a) $Q_{0,0}^{(x_1,\epsilon)}$, (b) $Q_{0,0}^{(x_2,\epsilon)}$, (c) $Q_{0,0}^{(y_1,\epsilon)}$, (d) $Q_{0,0}^{(y_2,\epsilon)}$. Die Geraden durch alle paarweisen Kombinationen der Punkte im näherungsweise linearen Bereich sind als dünne gepunktete Linien unterschiedlicher Farbe zu sehen. Der Durchschnittswert der rekonstruierten autonomen Frequenzen $\bar{\omega}_i$ ist als fette rote Linie geplottet, die dazu gehörigen Standardabweichungen als gestrichelte rote Linien, während die korrekten autonomen Frequenzen ω_{real} als gepunktet-gestrichelte schwarze Linien dargestellt sind.

4.2.5 Drei gekoppelte Oszillatoren

Das Ziel dieses Abschnitts ist es, zu zeigen, dass die Phasentransformation auf mehr als 2 - in diesem Fall auf 3 - gekoppelte Oszillatoren angewendet werden kann. Als Modellsystem werden drei gekoppelte Van-der-Pol Oszillatoren,

$$\begin{aligned}
 \ddot{x}_1 - \mu(1 - x_1^2)\dot{x}_1 + \omega_1^2 x_1 &= \epsilon \cdot 0.92 \cdot (\dot{x}_3 - \dot{x}_1), \\
 \ddot{x}_2 - \mu(1 - x_2^2)\dot{x}_2 + \omega_2^2 x_2 &= \epsilon \cdot 0.8 \cdot (\dot{x}_3 - \dot{x}_2), \\
 \ddot{x}_3 - \mu(1 - x_3^2)\dot{x}_3 + \omega_3^2 x_3 &= \epsilon(0.8 \cdot (\dot{x}_1 - \dot{x}_3) \\
 &\quad + 0.4 \cdot (\dot{x}_2 - \dot{x}_3)),
 \end{aligned}
 \tag{4.36}$$

mit $\mu = 0.5$, $\omega_1 = 1.09$, $\omega_2 = 0.89$ und $\omega_3 = 0.65$ verwendet. Die Struktur der Kopplung ist in Abb.4.6 schematisch dargestellt.

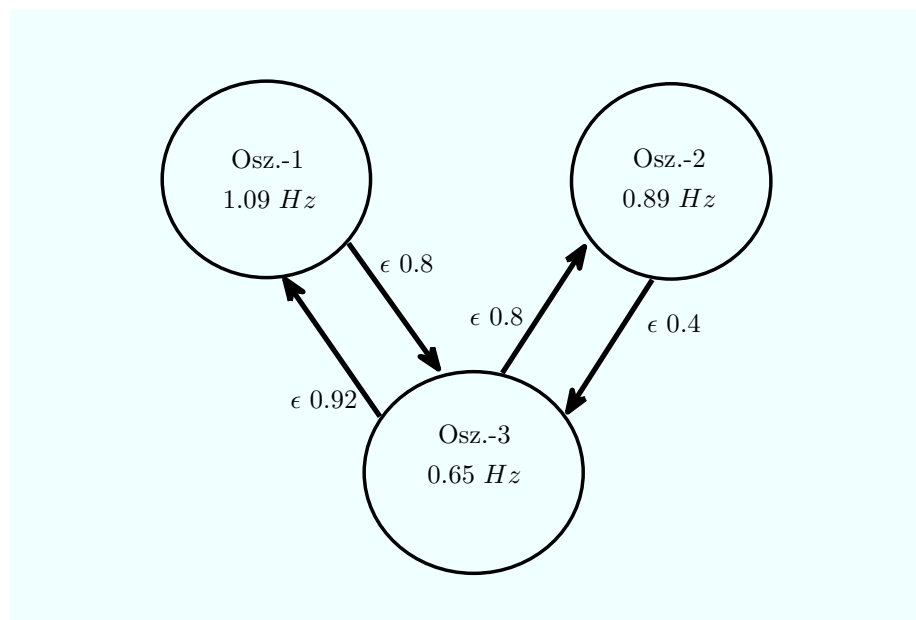


Abbildung 4.6: Eine schematische Darstellung der Kopplungsstruktur der drei Oszillatoren. Zwischen dem ersten und dem zweiten Oszillator besteht keine direkte Wechselwirkung.

Die Protophasen $\Theta_{1,2,3}(t)$ werden unmittelbar aus den numerischen Lösungen¹³ $X_{1,2,3}(t)$ des Gleichungssystems Gl. (4.36) unter Verwendung der Hilbert-Transformation, Gl. (2.15), über den Winkel der Polarkoordinaten, Gl. (2.16), für 30 verschiedene Werte des Kopplungs-Parameters, $\epsilon = [0, \dots, 0.34]$, bestimmt. Anschließend werden die Protophasen $\Theta_{1,2,3}(t)$ in Analogie zu Gl. (4.15) in Phasen $\Phi_{1,2,3}(t)$ transformiert, wobei die Koeffizienten der Transformation nach Gl. (D.6) und Gl. (D.7) in Appendix D mit einer Ordnung von $N = 4$ berechnet werden. Aus den Phasen $\Phi_{1,2,3}(t)$ werden in Analogie mit Gl. (4.19) und

¹³Das System wurde mit dem MATLAB Algorithmus *ode45* gelöst. Eine Zeitreihe umfasst ca. 700 Zyklen mit jeweils etwa 110 Datenpunkten.

Gl. (4.20) Phasenmodelle der Ordnung $N = 3$,

$$\begin{aligned} q^{(1)}(\phi_1, \phi_2, \phi_3) &= \sum_{n \neq 0 \vee m \neq 0 \vee k \neq 0} Q_{n,m,k}^{(1)} e^{i(n\phi_1 + m\phi_2 + k\phi_3)}, \\ q^{(2)}(\phi_2, \phi_3, \phi_1) &= \sum_{n \neq 0 \vee m \neq 0 \vee k \neq 0} Q_{n,m,k}^{(2)} e^{i(n\phi_2 + m\phi_3 + k\phi_1)}, \\ q^{(3)}(\phi_3, \phi_1, \phi_2) &= \sum_{n \neq 0 \vee m \neq 0 \vee k \neq 0} Q_{n,m,k}^{(1)} e^{i(n\phi_3 + m\phi_1 + k\phi_2)}, \end{aligned} \quad (4.37)$$

mit den Koeffizienten der Kopplungsfunktionen $Q_{n,m,k}^{(i)}$ berechnet.

Um die Ergebnisse vergleichen und darstellen zu können, werden auf den Phasenmodellen basierende Größen eingeführt, die die Wechselwirkung zwischen den Oszillatoren quantifizieren. Zweck dieser Größen ist es, die Kopplung unterschiedlicher Systeme vergleichen zu können, ohne Unterschiede in der Form der Kopplungsfunktion oder der jeweiligen autonomen Frequenzen in Gl. (4.20) berücksichtigen zu müssen. Diese Größen $C_{i \leftarrow j}$ werden im Folgenden als Wechselwirkungs-Indices bezeichnet, weil sie den Einfluss von System (j) auf die Dynamik von System (i) abschätzt. Die Intensität eines solchen externen Einflusses auf die Dynamik einer Variable x kann als durchschnittliches Verhältnis der Komponenten ihrer zeitlichen Ableitung \dot{x} auf Grund der externen Einflüsse zu den Komponenten der autonomen Dynamik ausgedrückt werden:

$$C = \frac{\langle \dot{x}_{ex} \rangle}{\langle \dot{x}_{aut} \rangle}.$$

Im Fall der Phasendynamik ist die autonome Komponente von $\dot{\phi}_i$ in Gl. (2.11) durch

$$\dot{\phi}_{i,aut} = \omega_i$$

und der externe Einfluss durch die Kopplungsfunktion

$$\dot{\phi}_{i,ex} = q^{(i)}(\phi_1, \dots, \phi_3)$$

gegeben. Die durchschnittliche Intensität des externen Einflusses, $\langle \dot{\phi}_{i,ex} \rangle$, wird analog zu Gl.(4.33) durch die Norm der Kopplungsfunktion, Gl. (4.21), abgeschätzt:¹⁴

$$N_i = \sqrt{\sum_{\neq 0,0,0} |Q_{n,m,k}^{(i)}|^2}. \quad (4.38)$$

Der Wechselwirkungs-Index, der die durchschnittliche Intensität des externen Einflusses auf den i -ten Oszillator ausdrückt, ergibt sich dann aus den Koeffizienten in Gl. (4.37) zu:

$$C_i = \frac{N_i}{\omega_i} = \frac{\sqrt{\sum_{\neq 0,0,0} |Q_{n,m,k}^{(i)}|^2}}{Q_{0,0,0}^{(i)}}. \quad (4.39)$$

Um den Einfluss der unterschiedlicher Oszillatoren in der Funktion $q^{(i)}(\phi_1, \dots, \phi_3)$ unterscheiden zu können, wird die Norm N_i nach Abhängigkeit von den einzelnen Oszillatoren aufgeteilt. Diese Unterteilung wird im Folgenden für den ersten

¹⁴ $\neq 0,0,0$ bedeutet die Summation über alle Kombinationen n, m, k außer über den konstanten Term mit $n = 0, m = 0, k = 0$.

Oszillator dargestellt, für die anderen beiden Oszillatoren ist das Verfahren analog. Aus der Aufteilung ergeben sich die partiellen Normen,

$$\begin{aligned} N_{1\leftarrow 2} &= \sqrt{\sum_{n,m \neq 0,0} |Q_{n,m,0}^{(1)}|^2}, \\ N_{1\leftarrow 3} &= \sqrt{\sum_{n,k \neq 0,0} |Q_{n,0,k}^{(1)}|^2}. \end{aligned} \quad (4.40)$$

$N_{1\leftarrow 2}$ enthält nur Terme, die die Abhängigkeit von den Phasen ϕ_1, ϕ_2 ausdrücken¹⁵ und somit vom dritten Oszillator unabhängig sind, so dass $N_{1\leftarrow 2}$ als Maß des Einflusses des zweiten Oszillators auf den ersten angesehen werden kann. Gleichermäßen ist $N_{1\leftarrow 3}$ ein Indikator für den Einfluss des dritten Oszillators auf die Dynamik des ersten. Über diese partiellen Normen ist eine weitere partielle Norm

$$N_{1\leftarrow 2,3}^2 = N_1^2 - N_{1\leftarrow 2}^2 - N_{1\leftarrow 3}^2 \quad (4.41)$$

definiert, die alle Koeffizienten zusammenfasst, die die Abhängigkeit von allen drei Phasen ausdrücken - also alle diejenigen Komponenten, in denen sich die Effekte des zweiten und des dritten Oszillators nicht trennen lassen. Wenn die Kopplung der Oszillatoren wie in diesem Beispiel, Gl. (4.36), additiv ist, dann sind diese Terme Effekte höherer Ordnung, die sich proportional zu ϵ^2 verhalten und daher im Vergleich zu den Effekten erster Ordnung, $N_{i\leftarrow j}$, die sich proportional zu $\propto \epsilon$ verhalten, klein sind. Mit diesen Differenzierungen ergeben sich folgende Wechselwirkungs-Indices:

$$\begin{aligned} C_{i\leftarrow j} &= \frac{N_{i\leftarrow j}}{\omega_i}, \\ C_{i\leftarrow j,k} &= \frac{N_{i\leftarrow j,k}}{\omega_i}. \end{aligned} \quad (4.42)$$

Die Größen $C_{i\leftarrow j}(\epsilon), C_{i\leftarrow j,k}(\epsilon)$ werden nun nach Gl. (4.40), Gl. (4.41), Gl. (4.42) für jeden der unterschiedlichen Werte des Kopplungsparameters ϵ aus den rekonstruierten Kopplungsfunktionen, Gl. (4.37),

$$q^{(1)}(\phi_1, \phi_2, \phi_3), \quad q^{(2)}(\phi_2, \phi_3, \phi_1), \quad q^{(3)}(\phi_3, \phi_1, \phi_2),$$

berechnet.

Wenn die rekonstruierten Phasenmodelle adäquate Modelle der Systemdynamik sind, dann ist zu erwarten, dass die aus ihnen berechneten Abschätzungen der Stärke der Wechselwirkung der Oszillatoren, $C_{i\leftarrow j}(\epsilon)$, im selben Verhältnis ansteigen, wie die effektive Kopplung, $E_{i\leftarrow j}(\epsilon)$, der Oszillatoren in Gl. (4.36) - dass sich also die Indizes $C_{i\leftarrow j}(\epsilon)$ näherungsweise proportional zu den entsprechenden effektiven Kopplungen, $E_{i\leftarrow j}(\epsilon)$, entwickeln. Mit effektiver Kopplung $E_{i\leftarrow j}(\epsilon)$ ist hier das Produkt des Kopplungsparameters ϵ mit den unterschiedlichen konstanten Faktoren in Gl. (4.36) gemeint, die die Wechselwirkung der Oszillatoren festlegen, siehe auch Abb. 4.6. Durch diesen zu erwarteten Zusammenhang lässt sich demnach testen, ob die rekonstruierten Phasenmodelle und

¹⁵Es sei darauf hingewiesen, dass die Kopplungsfunktionen der Phasendynamik, Gl. (4.37), auf Grund der Phasendefinition keine Terme enthalten können, die ausschließlich vom ersten Oszillator bzw. seiner Phase abhängen. Genau diese Terme werden in der Phasentransformation eliminiert.

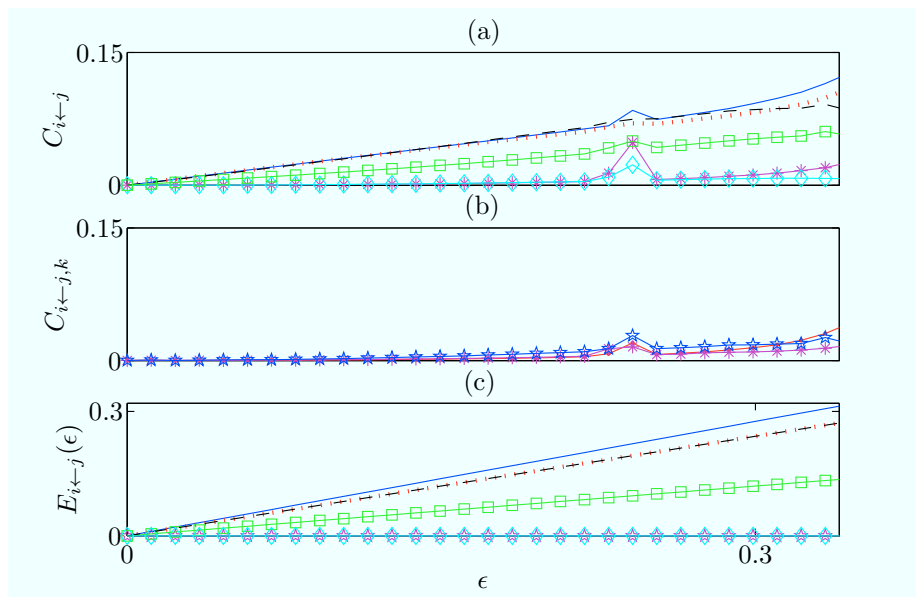


Abbildung 4.7: (a) Die Wechselwirkungs-Indices als Funktion des Kopplungsparameters: $C_{1 \leftarrow 2}(\epsilon)$ violette Sterne, $C_{1 \leftarrow 3}(\epsilon)$ blaue Linie, $C_{2 \leftarrow 1}(\epsilon)$ hellblaue Rauten, $C_{2 \leftarrow 3}(\epsilon)$ rote gepunktete Linie, $C_{3 \leftarrow 1}(\epsilon)$ schwarze gestrichelte Linie, $C_{3 \leftarrow 2}(\epsilon)$ grüne Quadrate. (b) Die Indices $C_{i \leftarrow j, k}$ als Funktion des Kopplungsparameters: $C_{1 \leftarrow 2, 3}(\epsilon)$ rot gepunktet, $C_{2 \leftarrow 3, 1}(\epsilon)$ violette Sterne, $C_{3 \leftarrow 1, 2}(\epsilon)$ blaue Sterne. (c) Die effektive Kopplung $E_{i \leftarrow j}(\epsilon)$ in Gl. (4.36) als Funktion von ϵ . Die Symbole sind dieselben wie in (a).

die definierten Größen zur Quantifizierung der Wechselwirkung von Oszillatoren zu plausiblen Ergebnissen führen.

Die Wechselwirkungs-Indices $C_{i \leftarrow j}(\epsilon)$ sind in Abb. 4.7 (a) als Funktion des Kopplungsparameters ϵ dargestellt, $C_{i \leftarrow j, k}(\epsilon)$ in Abb. 4.7 (b), während die Entwicklung der effektiven Kopplung, $E_{i \leftarrow j}(\epsilon)$, als Funktion von ϵ in Abb. 4.7 (c) zu sehen ist. Im Vergleich der Grafiken ist ersichtlich, dass im Bereich $\epsilon = [0, 0.27]$ das Verhältnis und die Entwicklung der effektiven Kopplungen, $E_{i \leftarrow j}(\epsilon)$, durch die Wechselwirkungs-Indices, $C_{i \leftarrow j}(\epsilon)$, in guter Näherung reproduziert wird - nur für $\epsilon \approx 0.24$ gibt es eine deutliche Abweichung, die später diskutiert werden wird. Des Weiteren ist anzumerken, dass $C_{1 \leftarrow 2}$ und $C_{2 \leftarrow 1}$, die einer effektiven Kopplung von $E_{1 \leftarrow 2} = E_{2 \leftarrow 1} = 0$ entsprechen, in diesem Bereich in der Tat näherungsweise Null sind. Aus Abb. 4.7 (b) wird deutlich, dass die Indices $C_{i \leftarrow j, k}(\epsilon)$ der theoretischen Erwartung entsprechend gegenüber den dominanten $C_{i \leftarrow j}(\epsilon)$ klein ausfallen. Im Bereich $\epsilon > 0.27$ wird diese Übereinstimmung zunehmend schlechter: Die Entwicklung der $C_{i \leftarrow j}(\epsilon)$ und der $E_{i \leftarrow j}(\epsilon)$ weichen für starke Wechselwirkungen der Oszillatoren voneinander ab. Mit der Stärke der Kopplung nimmt die Amplitudendynamik der Oszillatoren zu, so dass die Annahme, dass sich das System in der Nähe des Grenzzyklus befindet, zunehmend unzutreffender ist. Die Abweichung kann demnach darauf zurückgeführt werden, dass die Größen $C_{i \leftarrow j}(\epsilon)$ auf Phasenmodellen beruhen, die nur noch grobe Näherungen der eigentlichen Dynamik sind: So ist in Gl. (4.36) ersichtlich, dass die Stärke des Einflusses der Oszillatoren nicht nur von der effektiven Kopplung abhängt, sondern ebenfalls vom Verhältnis der Amplituden oder den autonomen Frequenzen. Des Weiteren sind mit zunehmender Kopplung und somit zunehmender Synchronisation bzw. Korrelation der drei Oszillatoren die gegebenen Daten im 3-dimensionalen Zustandsraum der drei Phasen weniger homogen verteilt, was auch zu Fehlern in der Bestimmung der über diesem Zustandsraum definierten Funktionen führen kann.

Für $\epsilon \approx 0.24$ gibt es eine lokale Abweichung des Verlaufs von $C_{i \leftarrow j}(\epsilon)$ in Abb. 4.7 (a). Um dieses Phänomen zu analysieren, wird der Synchronisations-Index für drei gekoppelte Oszillatoren erweitert,

$$\gamma_{n, m, k} = \left| \frac{1}{T} \int_0^T e^{i(n\phi_1(t) + m\phi_2(t) + k\phi_3(t))} dt \right|, \quad (4.43)$$

und aus den Phasen mit $n = [1, 2, \dots, 4]$, $m, k = [-4, \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots, 4]$ für jeden Wert des Kopplungsparameters ϵ berechnet. Aus diesen Ergebnissen wird für jeden Wert von ϵ der maximale Synchronisations-Index

$$\gamma_{max} = \max(\gamma_{n, m, k}) \quad (4.44)$$

bestimmt. In Abb. 4.8 ist $\gamma_{max}(\epsilon)$ als Funktion des Kopplungsparameters ϵ dargestellt: Im Bereich von $\epsilon = [0.22, 0.25]$, also genau in dem Bereich der lokalen Abweichung in Abb. 4.7 (a), ist ein plötzlicher Sprung auf einen Wert von $\gamma_{max}(\epsilon) \approx 0.75$ zu finden, der anzeigt, dass die drei Oszillatoren synchronisiert sind. Dieser maximale Synchronisations-Index ist $\gamma_{1, -2, 1}(\epsilon) \approx 0.75$. In der Tat ist für $\epsilon = [0.22, 0.25]$ die generalisierte Phasendifferenz [5]

$$|\Phi_1(t) - 2\Phi_2(t) + \Phi_3(t)| < \frac{\pi}{2} \quad \forall t \quad (4.45)$$

strikt begrenzt, während alle paarweisen generalisierten Phasendifferenzen unbegrenzt wachsen, was dem Sachverhalt entspricht, dass auch alle drei nach

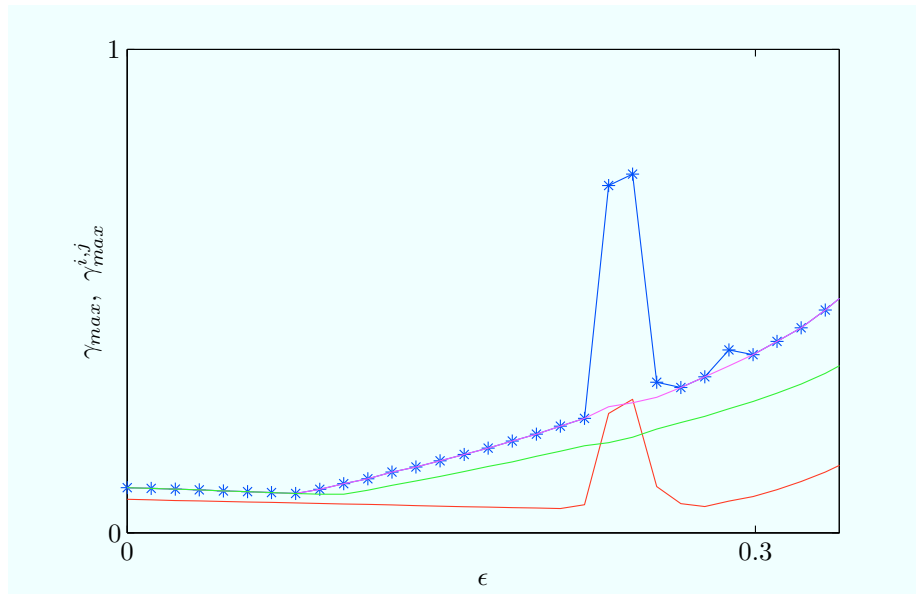


Abbildung 4.8: Der maximale Synchronisations-Index $\gamma_{max}(\epsilon)$ der drei Oszillatoren, blaue Sterne, sowie die drei paarweisen maximalen Synchronisations-Indices der drei Oszillatoren, $\gamma_{max}^{1,2}(\epsilon)$ rot, $\gamma_{max}^{2,3}(\epsilon)$ violett, $\gamma_{max}^{1,3}(\epsilon)$ grün, als Funktion des Kopplungsparameters ϵ .

Gl. (3.13) berechneten paarweisen Synchronisation-Indices, $\gamma_{max}^{i,j}$ (Abb. 4.8), in diesem Bereich nicht auf eine paarweise Synchronisation der Oszillatoren hindeuten. D.h. das System befindet sich in einem Zustand, in dem alle drei Oszillatoren synchronisiert sind, aber keines der drei möglichen Paare von Oszillatoren. Diese Synchronisation bzw. die strikte Beschränkung der generalisierten Phasendifferenz bedeutet, dass die drei Oszillatoren im Zustandsraum nur diejenigen Zustände einnehmen, die der Bedingung in Gl. (4.45) genügen, was einem 2-dimensionalen Unterraum entspricht: Einer der drei Freiheitsgrade ist in diesem Bereich der Kopplungsstärke „versklavt“. In diesem Bereich wird demnach eine Funktion von drei Variablen auf der Basis einer 2-dimensionalen Datenverteilung bestimmt, was zu einer schlechten Qualität der Phasenmodelle führt, so dass die Wechselwirkungs-Indices in diesem Bereich nicht als adäquate Repräsentation der Systemdynamik angesehen werden können.

Kapitel 5

Anwendung auf komplexe Systeme: Phasenmodelle der kardiorespiratorischen Kopplung

In diesem Abschnitt geht es darum, die im letzten Kapitel entwickelte Phasentransformation gekoppelter Oszillatoren zur Analyse der kardiorespiratorischen Wechselwirkung zu verwenden und gleichzeitig zu demonstrieren, dass die Phasentransformation auch im Fall komplexer empirischer Daten bei unterschiedlichen Observablen desselben Systems - nämlich EKG und Puls - eine in guter Näherung invariante Beschreibung der Dynamik ermöglicht. Da einerseits für eine möglichst präzise Rekonstruktion der Wechselwirkung die Verwendung von zwischen markierten Ereignissen interpolierten Protophasen, Gl. (2.14), ungeeignet ist, siehe Appendix A, andererseits aber insbesondere die Trajektorie des EKG Signals zu komplex ist, um eine monotone Protophase durch den Winkel des Zustandsvektors, Gl. (2.16), zu definieren, ergibt sich als Voraussetzung dieser Anwendung die zusätzliche theoretische Problemstellung, eine kontinuierliche Protophase für periodische Trajektorie ohne definiertes Rotationszentrum zu bestimmen. Dieses Kapitel gliedert sich daher in zwei Teile: Im ersten, theoretischen Teil wird eine Methode entwickelt, die eine kontinuierliche Bestimmung einer Protophase für komplexe Trajektorien ermöglicht, und an einem numerischen Modellsystem getestet. Im zweiten Teil wird diese Methode mit der Phasentransformation auf die physiologischen Zeitreihen von EKG, Puls und Atmung angewendet, um Phasenmodelle der kardiorespiratorischen Wechselwirkung zu rekonstruieren.

5.1 Protophasen komplexer Signale

Die Bestimmung der Phase bzw. der Protophase für komplexe Signale, deren Trajektorien kein definiertes Rotationszentrum aufweisen, ist ein bislang nicht zufriedenstellend gelöstes Problem. Ein erster Ansatz, um dieses Problem zu umgehen, besteht darin, nach alternativen Observablen des Systems zu suchen,

für die ein solches Rotationszentrum existiert, was beispielsweise durch Koordinatentransformationen oder durch andersartige Messungen realisiert werden kann. So ist es z.B. unter Ausnutzung der Symmetrie des Lorenz-Attraktors möglich, eine Protophase zu bestimmen [5, 36], oder durch die Verwendung der Ableitung \dot{x} an Stelle der Observablen x den Bereich des kritischen Parameters des Rössler Systems, in dem noch eine monotone Protophase bestimmt werden kann, weiter hin zum „Funnel Regime“ zu verschieben [37]. Obwohl diese Möglichkeit zwar in einzelnen Fällen besteht, ist sie keine universelle, systematische Lösung des Problems, so dass sie in den meisten Fällen nicht zum Erfolg führen wird.

Ein weitere Möglichkeit, um Protophasen für komplexe Signale zu bestimmen, ist durch die Verwendung von Filtern gegeben: Die jeweils gegebenen Zeitreihe $X(t)$ wird gefiltert bis Gl. (2.16) eine monotone Protophase ergibt. So lassen sich z.B. langsame Trends der Baseline oder höhere, verrauschte Frequenzanteile des Signals herausfiltern, um eine monotone Protophase zu erzeugen.¹ Alternativ kann ein komplexes Morlet Wavelet verwendet werden, um jeder Zeitskala τ eine Protophase über die Größe θ der zeitabhängigen Koeffizienten $W_x^{(\tau)}(t) = A_x(t)e^{i\theta^{(\tau)}(t)}$ zuzuordnen. Dieses Vorgehen ist äquivalent mit der Verwendung der Hilbert-Transformation, Gl. (2.15), nach Anwendung eines Bandpass-Filters für die jeweilige Zeitskala τ [39, 40, 41]. Solange sich dieses Vorgehen im moderaten Bereich eines gewöhnlichen Preprocessing ansiedeln lässt, besitzt zwar das Resultat weiterhin eine klar definierte physikalische Bedeutung, der Effekt ist aber nicht ausreichend, um monotone Protophasen für komplexe Signale zu bestimmen, während andererseits ein ausreichend starkes Filtern als eine Zerlegung des Signals in einzelne Moden anzusehen ist, die jeweils ein engbandiges Spektrum aufweisen und daher eine monotone Protophase besitzen [46]. Eine solche Zerlegung ermöglicht zwar einerseits die Bestimmung einer monotonen Protophase für die einzelnen Moden, andererseits ist deren physikalische Bedeutung alles andere als klar, weil nicht geklärt ist, in welchem Verhältnis die Phasen der einzelnen Moden eines Signals zur Phase des gesamten Signals stehen.

Im Gegensatz zu den skizzierten Ansätzen, die aus genannten Gründen eben keine adäquate Lösung der Problemstellung sind, soll im Folgenden eine Methode zur Bestimmung von Protophasen entwickelt werden, die nicht auf der Bearbeitung oder Zerlegung der Signale basiert, sondern als Koordinatentransformation zu verstehen ist. Diese Methode geht davon aus, dass sich die Trajektorie in unmittelbarer Nähe eines Grenzyklus befindet, der unabhängig von der Komplexität seiner Form als eindimensionale Struktur durch eine monoton wachsende Variable parametrisiert werden kann. Diese Variable lässt sich dann als Protophase auffassen, während die geringfügigen Abweichungen orthogonal zum Grenzyklus eine zweite Koordinate² definieren, die im Folgenden als Amplitude bezeichnet wird.

¹So wurde z.B. ein spezielles Filter entwickelt, um die Phase verrauschter Signale zu bestimmen, [38]. Dieser Ansatz setzt aber bereits eine näherungsweise kreisförmige Trajektorie voraus, und kann daher nicht zur Bestimmung der Phasen komplexer Signale verwendet werden.

²In n -dimensionalen Systemen gibt es $n - 1$ Richtungen orthogonal zum Grenzyklus. Der im Folgenden diskutierte Ansatz basiert auf einer 2-dimensionalen Einbettung, so dass es hier nur eine Richtung orthogonal zum Grenzyklus - also eine Amplitude - gibt.

5.1.1 Theorie

Der Ansatz geht in zwei Schritten vor: Im ersten Schritt wird aus den Daten $x(t)$, die sich in der Umgebung eines Grenzyklus befinden, der Grenzyklus als durchschnittliche Datenverteilung rekonstruiert - im Folgenden als *Average Cycle* bezeichnet. Die Daten $x(t)$ werden dann im zweiten Schritt auf den als Funktion einer Variablen ψ repräsentierten Average Cycle $Z_{ac}(\psi)$ projiziert, um die Protophase θ zu bestimmen.

Wenn ein Signal $x(t)$ mit einem näherungsweise periodisch wiederkehrenden Muster gegeben ist, dann besteht der erste Schritt darin, das durchschnittliche Muster als Funktion einer Variablen abzuschätzen. Dazu werden zunächst die Zeitpunkte T_n des Auftretens wiederkehrender Ereignisse oder Schnitte mit einer Poincaré-Ebene markiert, deren Abstand die Dauer der jeweiligen Periode angibt. Aus T_n wird dann durch Interpolation, Gl. (2.14), eine erste Schätzung $\Psi(t)$ der Protophase bestimmt. Wenn $\psi(t)$ gegeben ist, kann das durchschnittli-

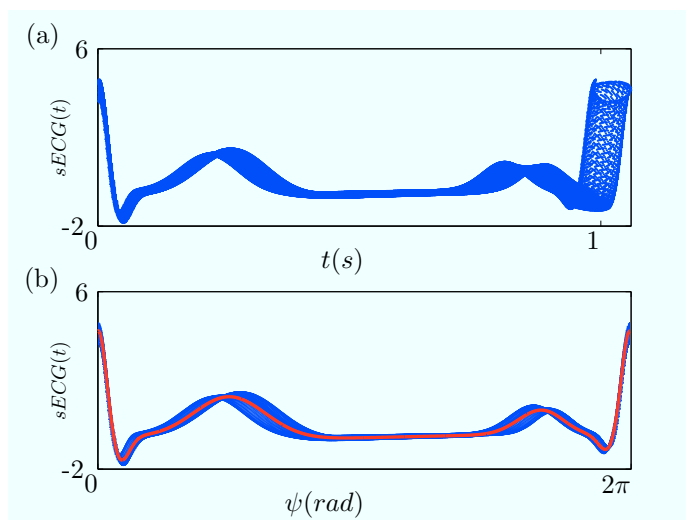


Abbildung 5.1: Die Zyklen eines synthetischen EKGs, Abschnitt 5.1.2, (a) als Funktion der Zeit und (b) als Funktion der ersten Schätzung der Protophase ψ . Das durchschnittliche Muster ist als dicke rote Linie dargestellt.

che Muster berechnet werden, indem die Zeitreihe $x(t)$ durch $\psi(t)$ parametrisiert wird,

$$x(t) \Rightarrow x(\psi), \quad (5.1)$$

und $x(\psi)$ als diskrete Fourierreihe,

$$x(\psi) \approx \sum_{n=-N}^N G_n e^{in\psi}, \quad (5.2)$$

dargestellt wird, wobei N die maximale Ordnung der Exponentialfunktionen ist. Der Theorie der Fourierreihenentwicklung folgend können die Koeffizienten G_n aus der parametrisierten Zeitreihe $X(\psi)$ durch

$$G_n = \frac{1}{\psi_{max}} \int_0^{\psi_{max}} X(\psi) e^{-in\psi} d\psi \quad (5.3)$$

bestimmt werden, oder aber mit der Substitution von $\psi(t)$ durch t direkt aus der Zeitreihe $x(t)$ berechnet werden:

$$G_n = \frac{1}{\psi(T)} \int_0^T x(t) e^{-in\psi(t)} \frac{d\psi}{dt}(t) dt. \quad (5.4)$$

In Abb. 5.1 ist der Effekt der Parametrisierung und das aus der parametrisierten Zeitreihe berechnete durchschnittliche Muster am Beispiel eines synthetischen EKGs verdeutlicht, siehe Abschnitt 5.1.2.

Nun lässt sich die Zeitreihe $x(t)$ so auffassen, also ob sie durch kleine Abweichungen in der Umgebung des durchschnittlichen Musters generiert wurde, die durch eine Amplitudendynamik $r(t)$ bedingt sind, während die jeweils aktuelle Position auf dem durchschnittlichen Muster durch die Protophase θ bestimmt ist:

$$X(t) = r(t) \cdot \sum_{n=-N}^N G_n e^{in\theta(t)}. \quad (5.5)$$

Man kann den Kern dieser Methode als Umkehrung dieses Zusammenhangs auffassen: über Gl. (5.5) werden aus der gegebenen Zeitreihe $x(t)$ die Protophase $\theta(t)$ und die Amplitude $r(t)$ bestimmt, indem diejenigen Werte bestimmt werden, für die die Gleichung (5.5) gilt. Leider handelt es sich in dieser Form um ein unterbestimmtes Problem, da es beliebig viele Möglichkeiten gibt, die zwei Variablen der Funktion Gl. (5.5) so zu wählen, dass die Funktion einen vorgegebenen Wert annimmt. Da die Ursache dieses Problems darin besteht, dass zwei Variablen über eine skalare Funktion bestimmt werden sollen, lässt sich dieses Problem durch den Übergang zu einer zweidimensionalen Darstellung der Zeitreihe $x(t)$ lösen, die sich durch das analytische Signal $x(t) + i\hat{x}(t)$ realisieren lässt, das sich aus der Hilbert-Transformation $\hat{x}(t)$, Gl (2.15), aus $x(t)$ ergibt. Das durchschnittliche Muster in der komplexen Ebene, der *Average Cycle*, ist eine geschlossene Kurve und daher eine periodische Funktion der Variablen ψ . Der Average Cycle bzw. die Koeffizienten seiner Reihenentwicklung lassen sich auf der Basis allgemeiner Eigenschaften der Hilbert-Transformation leicht analytisch aus den Koeffizienten G_n über

$$H_n = \begin{cases} 2G_n & n > 0 \\ G_n & n = 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases} \quad (5.6)$$

bestimmen, oder direkt aus dem analytischen Signal durch den Zusammenhang

$$H_n = \frac{1}{\psi(T)} \int_0^T (x(t) + i\hat{x}(t)) e^{-in\psi(t)} \frac{d\psi}{dt}(t) dt \quad (5.7)$$

berechnen, so dass in Analogie zu Gl. (5.2)

$$x(t) + i\hat{x}(t) \approx \sum_{n=0}^N H_n e^{in\psi(t)} \quad (5.8)$$

gilt. Mit den Koeffizienten H_n ist der Average Cycle dann durch

$$Z_{ac}(\psi) = \sum_{n=0}^N H_n e^{in\psi} \quad (5.9)$$

gegeben. $Z_{ac}(\psi)$ ist eine in ψ 2π -periodische, 1-dimensionale Struktur in einem 2-dimensionalen Zustandsraum.³

Um eine Parametrisierung des gesamten 2-dimensionalen Zustandsraums zu definieren, die es gestattet, die Protophase θ auf und in der Umgebung des Average Cycles zu bestimmen, muss eine Amplitude r hinzugefügt werden. Es sei darauf hingewiesen, dass dies grundsätzlich auf beliebig viele unterschiedliche Weisen möglich ist, die alle mit unterschiedlichen Abbildungen der Zustände $x + i\hat{x}$ auf die neuen Koordinaten θ und r verbunden sind.⁴ Wenn die Trajektorie sich aber in hinreichend geringer Entfernung vom Grenzyklus befindet, können diese Effekte vernachlässigt werden. Die Methode geht demnach von der Annahme aus, dass sich die Trajektorie hinreichend nah am Grenzyklus befindet.

Die gewählte Projektion ist dadurch motiviert, dass die Amplitude r Abweichungen orthogonal zum Grenzyklus beschreibt, wobei $r = 0$ auf dem Grenzyklus gilt. Mit der Definition des Average Cycles $Z_{ac}(\psi)$, Gl. (5.9), sind dann die neuen Koordinaten des Zustandsraums in der Umgebung des Grenzyklus durch

$$Z_{ac}(r, \theta) = r \frac{-i\partial Z_{ac}(\theta)}{\partial\theta} + Z_{ac}(\theta) = H_0 + \sum_{n=1}^N (1 + nr) H_n e^{in\theta} \quad (5.10)$$

definiert. Um eine gegebene Zeitreihe $x(t)$ auf die neuen Koordinaten abzubilden, also ihre Dynamik durch eine Protophase θ und eine Amplitude r zu beschreiben, muss die nicht lineare Gleichung

$$x(t) + i\hat{x}(t) = Z_{ac}(r(t), \theta(t)) \quad (5.11)$$

in jedem Punkt der Trajektorie $x(t) + i\hat{x}(t)$ für $\theta(t)$ und $r(t)$ gelöst werden. Hier ist zu beachten, dass es häufig mehr als eine Möglichkeit gibt, einen Punkt im Zustandsraum durch eine Wahl von r, θ darzustellen - die Lösung von Gl. (5.11) ist also nicht eindeutig. Um dieses Problem zu lösen, müssen zusätzliche Informationen herangezogen werden: Wenn das Signal $x(t)$ strikt periodisch wäre, dann wären alle Zyklen untereinander und mit dem Average Cycle identisch. In diesem Fall ist klar, dass die korrekten Werte der Amplitude $r(t) = 0$ sind und die Protophase mit der ersten Schätzung der Protophase $\theta(t) = \psi(t)$ übereinstimmen muss. Wird von der Annahme Gebrauch gemacht, dass es sich im Fall nicht strikt periodischer Prozesse lediglich um kleine Abweichungen vom strikt periodischen Verhalten handelt, folgt, dass die korrekte Projektion auf r und θ zu Werten führen sollte, die möglichst wenig von $r = 0$ und $\theta = \psi$ abweichen. Die Lösung der Gl. (5.11) kann demnach dadurch eindeutig gemacht werden, dass als Nebenbedingung gefordert wird, dass $r(t)$ minimal von 0 und $\theta(t)$ minimal

³Es sei darauf hingewiesen, dass der Average Cycle leicht verwendet werden kann, um künstliche Daten eines periodischen Musters zu generieren, indem die Koeffizienten des Average Cycles aus der entsprechenden Zeitreihe bestimmt werden und dann eine beliebige Phase ϕ generiert und in Gl. (5.9) eingesetzt wird.

⁴Die korrekte Projektion auf den Average Cycle entspricht der Projektion entlang von Isophasen [5] - in der Literatur werden sie als Isochronen bezeichnet, was aber nur im Fall strikt linear wachsender Phasen, also autonomer Systeme, eine korrekte Bezeichnung ist. Hierbei handelt es sich um $n - 1$ -dimensionale Unterräume in n -dimensionalen Zustandsräumen, die denselben Werte der Phase ϕ besitzen. Da die Phase ϕ auch dadurch bestimmt ist, dass sie keine dynamischen Komponenten besitzt, die eine Funktion der Amplitude sind, siehe Abschnitt 6, führen von den Isophasen abweichende Projektionen zu Protophasen θ , die Abhängigkeiten von der jeweils zugehörigen Amplitude r besitzen.

von $\psi(t)$ abweicht. Eine schlichte, häufig bereits aber ausreichende Möglichkeit, diese Nebenbedingung zu implementieren, besteht darin, $r_0(t) = 0, \theta_0(t) = \psi(t)$ als Startwerte des Iterationsschemas zur Lösung von Gl. (5.11) zu verwenden, so dass die Iteration i.A. gegen Werte konvergieren wird, die auch der Minimalbedingung genügen. Als weitere Nebenbedingung wird verlangt, dass die Protophase $\theta(t)$ monoton zu sein hat, so dass für jeden Zeitpunkt $\theta(t-1) < \theta(t) < \theta(t+1)$ gilt. Diese weitere Nebenbedingung wird implementiert, indem in jedem Schritt k des iterativen Lösungsverfahrens für Gl. (5.11) die jeweils berechnete Veränderung der Protophase $\Delta\theta_k$ so limitiert wird, dass die Monotoniebedingung erfüllt ist. Gl. (5.11) lässt sich dann für jeden Zeitpunkt t unter Erfüllung der Nebenbedingungen durch das folgende Iterationsschema lösen - auf die Zeit wurde der Übersichtlichkeit der Darstellung halber hier verzichtet:

$$\begin{aligned}
r_0 &= 0, \\
\theta_0 &= \psi, \\
r_{k+1} &= \Re \left((x + i\hat{x} - Z_{ac}(0, \theta_k)) \cdot \left(\frac{\partial Z_{ac}(0, \theta_k)}{\partial r} \right)^{-1} \right), \\
\Delta\theta_k &= \Re \left((x + i\hat{x} - Z_{ac}(r_{k+1}, \theta_k)) \cdot \left(\frac{\partial Z_{ac}(0, \theta_k)}{\partial \theta} \right)^{-1} \right), \\
\theta_{k+1} &= \theta_k + \Delta\theta_k \quad \text{mit} \quad \frac{\theta_{k+1}}{dt} > 0.
\end{aligned} \tag{5.12}$$

Dieser Algorithmus berechnet in jedem Schritt der Iteration den Fehlervektor, $x + i\hat{x} - Z_{ac}(0, \theta_k)$, als Differenzvektor zwischen dem vorgegebenen Punkt $x + i\hat{x}$ und dem durch die jeweils aktuellen Werte von θ_k bestimmten Punkt auf dem Average Cycle. Die Projektion dieses Fehlervektors auf die Amplituden-Richtung $\frac{\partial Z(0, \theta_k)}{\partial r}$ bestimmt dann den jeweils neuen Wert der Amplitude r_{k+1} , während die Veränderung der Protophase $\Delta\theta_k$ durch die Projektion des Fehlervektors auf die Richtung entlang des Average Cycles $\frac{\partial Z(0, \theta_k)}{\partial \theta}$ ermittelt wird. Die Iteration konvergiert daher gegen einen Zustand, in dem der Fehlervektor Null ist, bzw. im Fall von verrauschten Daten, gegen einen Zustand, in dem eine weitere Minimierung des Fehlers durch die Monotoniebedingung ausgeschlossen wird.

5.1.2 Numerischer Test: synthetisches EKG

Um zu demonstrieren, dass die Projektion auf den Average Cycle zu korrekten Ergebnissen führt, wird numerisch ein synthetisches EKG Signal mit einer zumindest näherungsweise bekannten Phasendynamik generiert, die es dann durch die Projektion auf den Average Cycle zu rekonstruieren gilt. Das synthetische EKG wird in zwei Schritten generiert. Zuerst werden die Phasen $\Phi_{mod1}(t), \Phi_{mod2}(t)$ durch die numerische Lösung des Phasenmodells, Gl. (5.13), berechnet, das die unidirektionale Kopplung des ersten Oszillators an einen zweiten Oszillator mit strikt linear wachsender Phase simuliert:

$$\begin{aligned}
\dot{\phi}_{mod1} &= \omega_1 + c_1 \cos(\phi_{mod1} - \phi_{mod2}) + c_2 \cos(2\phi_{mod1} - 2\phi_{mod2}), \\
\dot{\phi}_{mod2} &= \omega_2.
\end{aligned} \tag{5.13}$$

Die verwendeten Parameter des Modells sind: $\omega_1 = 2\pi, \omega_2 = 2, c_1 = 0.6$ und $c_2 = 0.4$. Im zweiten Schritt wird aus der Zeitreihe $\Phi_{mod1}(t)$ die instantane

Frequenz $\Omega_{mod1}(t) = \dot{\Phi}_{mod1}$ bestimmt, die als zeitabhängiger Parameter in ein System von Differentialgleichungen,

$$\begin{aligned} \alpha &= 1 - \sqrt{x^2(t) + y^2(t)}, \\ \frac{dx}{dt} &= \alpha x(t) - \Omega_{mod1}(t)y(t), \\ \frac{dy}{dt} &= \alpha y(t) + \Omega_{mod1}(t)x(t), \\ \frac{dz}{dt} &= -B(x(t), y(t)) - z(t), \end{aligned} \quad (5.14)$$

eingesetzt wird, das den zeitlichen Verlauf eines EKG Signals simuliert [47], wobei es sich bei $B(x(t), y(t))$ um eine Funktion handelt, die die Form des EKGs definiert - sie ist in [47] ausführlich erklärt. Die numerischen Lösung der Differentialgleichung mit dem Euler-Verfahren, Zeitschritt $\Delta t = 0.002s$, ergibt das synthetische EKG, $sECG(t) = z(t)$, mit einer Länge von 93.000 Daten und ca. 180 Perioden. Da die instantane Frequenz $\Omega_{mod1}(t)$ durch das Phasenmodell, Gl. (5.13), berechnet wurde, ist zu erwarten, dass die Phase von $sECG(t)$ zumindest näherungsweise der des Phasenmodells entspricht - eine exakte Übereinstimmung ist aber nicht zu erwarten, da $\Omega_{mod1}(t)$ lediglich als zeitabhängiger Parameter in einer nicht-linearen Gleichung auftritt.

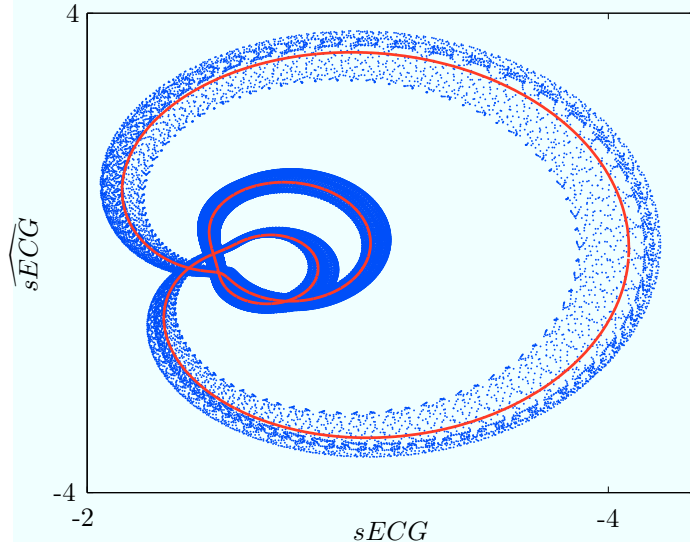


Abbildung 5.2: Die 2-dimensionale Einbettung des synthetischen EKGs, $sECG(t)$, mit Hilfe der Hilbert-Transformation, \widehat{sECG} , (gepunktete blaue Linie). Der zugehörige Average Cycle $Z_{ac}(\psi)$ ist als durchgezogene rote Linie dargestellt.

Das unter Verwendung der Hilbert-Transformation 2-dimensional eingebettete synthetische EKG, $sECG(t)$, ist in Abb. 5.2 dargestellt. Die erste Schätzung der Protophase $\Psi(t)$ wurde unter Verwendung eines markierten Ereignisses pro Periode - der R-Zacke - durch Interpolation, Gl. (2.14), berechnet. Unter Verwendung von $\Psi(t)$ wurde dann der Average Cycle nach Gl. (5.7) mit einer Ordnung von $N = 60$ bestimmt - er ist in Abb. 5.2 als durchgezogene rote Linie

zu sehen. Auf der Basis des Average Cycles wurden die Protophase $\Theta_{ac}(t)$ und die Amplitude $R_{ac}(t)$ nach Gl. (5.10), Gl. (5.11) berechnet, indem das iterative Lösungsverfahren, Gl. (5.12), mit 20 Iterationen verwendet wurde. Aus der Protophase $\Theta_{ac}(t)$ wurden nach Gl. (4.14) und Gl. (4.15) die Phase $\Phi_{ac}(t)$ und das entsprechende Modell der Phasendynamik mit einer Ordnung von $N = 6$ berechnet, wobei die Phase des zweiten Oszillators des Phasenmodells, $\Phi_{mod2}(t)$, in der Phasentransformation als zweite, externe Protophase verwendet wurde.

Die Kopplungsfunktion $q_{ac}(\phi_{ac}, \phi_{mod2})$ des so rekonstruierten Phasenmodells ist dann in der Form

$$q_{ac}(\phi_{ac}, \phi_{mod2}) = \sum_{n,m} Q_{n,m}^{ac} e^{i(n\phi_{ac} + m\phi_{mod2})}$$

gegeben. Die Koeffizienten $Q_{n,m}^{ac}$ können dann mit denen der Referenzfunktion $q_{mod}(\phi_{mod1}, \phi_{mod2})$ verglichen werden, die sich unmittelbar aus den Parametern des ursprünglichen Phasenmodells, Gl. (5.13), $c_1 = 0.6$ und $c_2 = 0.4$ ergeben.⁵

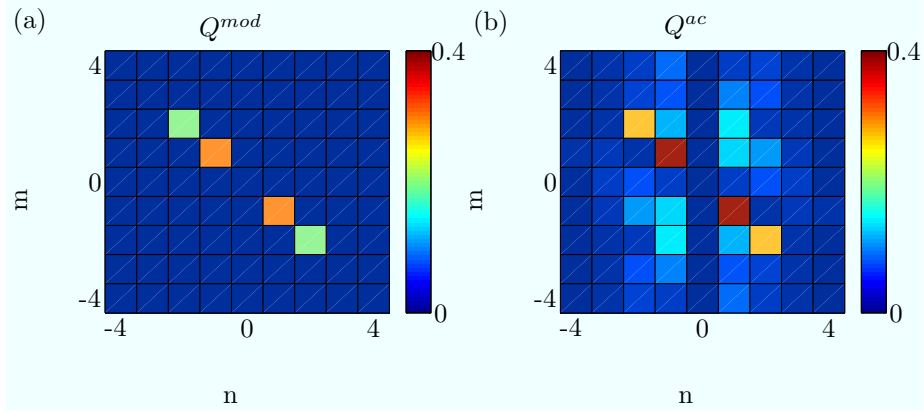


Abbildung 5.3: Die absoluten Werte der Koeffizienten $Q_{n,m}^{ac}$ der Kopplungsfunktionen des synthetischen EKGs: (a) Die Koeffizienten des Referenzmodells $Q_{n,m}^{mod}$. (b) Die Koeffizienten des über den Average Cycle rekonstruierten Modells $Q_{n,m}^{ac}$.

Zu diesem Zweck sind die Koeffizienten der Kopplungsfunktionen in Abb. 5.3 in Form einer Matrix bis zur Ordnung $N = 4$ dargestellt. Wenn die diskutierte Methode zu sinnvollen Ergebnissen führt, dann sollte das rekonstruierte Ergebnis $Q_{n,m}^{ac}$ näherungsweise mit den Vorgaben $Q_{n,m}^{mod}$ des Referenzmodells, Gl. (5.13), übereinstimmen. Wie bereits angemerkt, ist eine perfekte Übereinstimmung nicht zu erwarten, da das Phasenmodell zur Generierung des synthetischen EKGs nur als zeitabhängiger Parameter in ein nicht-lineares Gleichungssystem eingesetzt wurde. In der Tat sind die rekonstruierten Ergebnisse ca. 30% größer als die des Phasenmodells, weisen aber in guter Näherung dieselbe Struktur auf. Vor dem Hintergrund der angeführten Überlegungen zeigt demnach das unter Verwendung des Average Cycles rekonstruierte Phasenmodell eine zufriedenstellende Übereinstimmung mit dem Referenzmodell, wobei zu

⁵Es ist hier zu beachten, dass im Phasenmodell, Gl.(5.13), die Funktion $\cos()$ auftritt, während im rekonstruierten Phasenmodell Exponentialfunktionen verwendet werden, was im Vergleich der Koeffizienten einen Faktor von 0.5 mit sich bringt.

betonen ist, dass das Phasenmodell eines so komplexen Signals weder wegen der Nyquist Limitierung durch den Interpolations-Ansatz, Gl. (2.14), noch wegen der Überschneidungen bzw. der Schleifen der Trajektorie über den Winkel der Poloarkoordinaten, Gl. (2.16) bestimmt werden kann.

5.2 Phasenmodelle der kardiorespiratorischen Wechselwirkung

Die in den vorangehenden Abschnitten entwickelte Methode wird nun verwendet, um Phasenmodelle der kardiorespiratorischen Wechselwirkung zu bestimmen. Einerseits soll so demonstriert werden, dass es unter Verwendung der Phasentransformation möglich ist, in guter Näherung invariante Phasenmodelle aus derartig unterschiedlichen Observablen wie Puls und EKG zu gewinnen, andererseits können diese Modelle aber auch selbst von Relevanz für die physiologische Forschung sein, weil sie möglicherweise Rückschlüsse über die Wechselwirkung von Atmung und Herz zulassen.

Die Rekonstruktion der kardiorespiratorischen Phasendynamik basiert auf Messungen des EKGs, des Pulses und der Atmung in Form des Luftstroms durch die Nase an einer männlichen, gesunden Versuchsperson im Alter von 35 Jahren. Es wurden Aufnahmen unter drei unterschiedlichen Bedingungen gemacht: (a) freie Atmung, (b) Atmung nach einem Metronom alle 5s und (c) Atmung nach einem Metronom alle 2s. Die Daten wurden mit 1kHz gesampelt und mit einem Savitzky-Golay-Filter der Ordnung 3 und einer Fenstergröße von 53 bearbeitet - bei den Puls Daten wurden zusätzlich langsame Trends entfernt. Aus der Aufnahme (a) werden zwei Zeitreihen unterschiedlicher Observablen des ersten Oszillators, Puls und EKG, sowie eine Zeitreihe der Atmung verwendet, um zu demonstrieren, dass unterschiedliche Observablen zu ähnlichen Phasenmodellen führen. Von Aufnahme (b) werden die Zeitreihen von EKG und Atmung jeweils in zwei Teile geteilt, um zu zeigen, dass die Phasenmodelle von zwei Teilen derselben Zeitreihe zu konsistenten Ergebnissen führen. Des Weiteren werden gleichermaßen zwei Teile von EKG und Atmung von Aufnahme (c) verwendet, um zu belegen, dass die Ergebnisse qualitativ invariant gegenüber einer Variation der Messbedingungen sind. Demzufolge werden die folgenden 6 Paare von Zeitreihen verwendet, um aus ihnen Modelle der Phasendynamik zu rekonstruieren.

<i>Aufnahme</i>	<i>Herz</i>	<i>Atmung</i>	<i>Größe</i>
<i>freie Atmung</i>	$EKG_{frei}(t)$	$ATM_{frei}(t)$	400.000
<i>freie Atmung</i>	$PLS_{frei}(t)$	$ATM_{frei}(t)$	400.000
<i>getriggerte Atmung 5s</i>	$EKG_{5s,1}(t)$	$ATM_{5s,1}(t)$	300.000
<i>getriggerte Atmung 5s</i>	$EKG_{5s,2}(t)$	$ATM_{5s,2}(t)$	300.000
<i>getriggerte Atmung 2s</i>	$EKG_{2s,1}(t)$	$ATM_{2s,1}(t)$	400.000
<i>getriggerte Atmung 2s</i>	$EKG_{2s,2}(t)$	$ATM_{2s,2}(t)$	400.000

Diese Zeitreihen wurden unter Verwendung der Hilbert-Transformation, Gl. (2.15), 2-dimensional eingebettet. Die Protophasen der Atmung wurden über den Winkel der Polarkoordinaten, Gl. (2.16), die Protophasen von EKG und Puls unter Verwendung der Projektion auf den Average Cycle bestimmt, wobei jeweils 32 Iterationen in Gl. (5.12) verwendet wurden. Der Average Cycle,

Gl. (5.7), der EKG Daten wurde mit einer Ordnung von $N = 80$ der Exponentialfunktionen berechnet, der der Puls Daten mit einer Ordnung von $N = 24$, wobei die jeweils verwendete erste Schätzung der Protophase durch Interpolation zwischen markierten Ereignissen, Gl. (2.14), berechnet wurde - der R-Zacken im Fall der EKG Daten und der Maxima im Fall der Puls Daten. Diese Protphasen wurden unter Verwendung von Gl. (4.14) und Gl. (4.15) mit einer Ordnung von $N = 11$ in Phasen transformiert, um schließlich die folgenden Kopplungsfunktionen, Gl. (4.20), zu berechnen, die die Einwirkung der Atmung auf die Phasendynamik des Herzens beschreiben.

<i>Aufnahme</i>	<i>Kopplungsfunktion</i>
<i>freie Atmung</i>	$q_{frei}^{ekg}(\phi_{ekg}, \phi_{atm})$
<i>freie Atmung</i>	$q_{frei}^{pls}(\phi_{pls}, \phi_{atm})$
<i>getriggerte Atmung 5s</i>	$q_{5s,1}^{ekg}(\phi_{ekg}, \phi_{atm})$
<i>getriggerte Atmung 5s</i>	$q_{5s,2}^{ekg}(\phi_{ekg}, \phi_{atm})$
<i>getriggerte Atmung 2s</i>	$q_{2s,1}^{ekg}(\phi_{ekg}, \phi_{atm})$
<i>getriggerte Atmung 2s</i>	$q_{2s,2}^{ekg}(\phi_{ekg}, \phi_{atm})$

Die Kopplungsfunktionen sind in Abb. 5.4 dargestellt: Offensichtlich weisen alle Kopplungsfunktionen unabhängig von den Messbedingungen und den verwendeten Observablen ein gemeinsames typisches Muster auf, während andererseits auch Differenzen zu erkennen sind, die die Unterschiede der Messbedingungen reflektieren: Kopplungsfunktionen, die unterschiedlichen Teilen derselben Messung entsprechen, Abb. 5.4 (c), (d) und Abb. 5.4 (e), (f), sind jeweils deutlich ähnlicher als Kopplungsfunktionen, die zu unterschiedlichen Messbedingungen gehören. Dieser visuelle Eindruck lässt sich auch quantitativ durch die Norm, Gl. (4.21),

$$N(q) = \sqrt{\sum_{n,m} |Q_{n,m}|^2}$$

und die Korrelation, Gl. (4.27),

$$\rho(q^1, q^2) = \max_{\Delta\phi_1, \Delta\phi_2} \left(\frac{\sum_{n,m} Q_{n,m}^1 Q_{-n,-m}^2 e^{-i(n\Delta\phi_1 + m\Delta\phi_2)}}{\sqrt{\sum_{n,m} |Q_{n,m}^1|^2 \sum_{n,m} |Q_{n,m}^2|^2}} \right)$$

der Kopplungsfunktionen erfassen. Die Norm ist Ausdruck der Amplitude der Kopplungsfunktionen bzw. der Kopplungsstärke, die Korrelation repräsentiert die Übereinstimmung der Form der Kopplungsfunktionen ist aber gegenüber Variationen der Amplitude invariant, so dass man zur Beurteilung der Ähnlichkeit von Kopplungsfunktionen beide Größen heranziehen sollte. In der folgenden Tabelle sind Normen und Korrelation der sechs Kopplungsfunktionen aufgeführt:

$\rho(q^1, q^2)$	q_{frei}^{ekg}	q_{frei}^{pls}	$q_{5s,1}^{ekg}$	$q_{5s,2}^{ekg}$	$q_{2s,1}^{ekg}$	$q_{2s,2}^{ekg}$	$N(q)$
q_{frei}^{ekg}	1	0.68	0.81	0.81	0.72	0.76	1.39
q_{frei}^{pls}	0.68	1	0.60	0.62	0.43	0.49	1.10
$q_{5s,1}^{ekg}$	0.81	0.60	1	0.86	0.71	0.80	1.45
$q_{5s,2}^{ekg}$	0.81	0.62	0.86	1	0.70	0.78	1.43
$q_{2s,1}^{ekg}$	0.72	0.43	0.71	0.70	1	0.80	1.20
$q_{2s,2}^{ekg}$	0.76	0.49	0.80	0.78	0.80	1	1.18

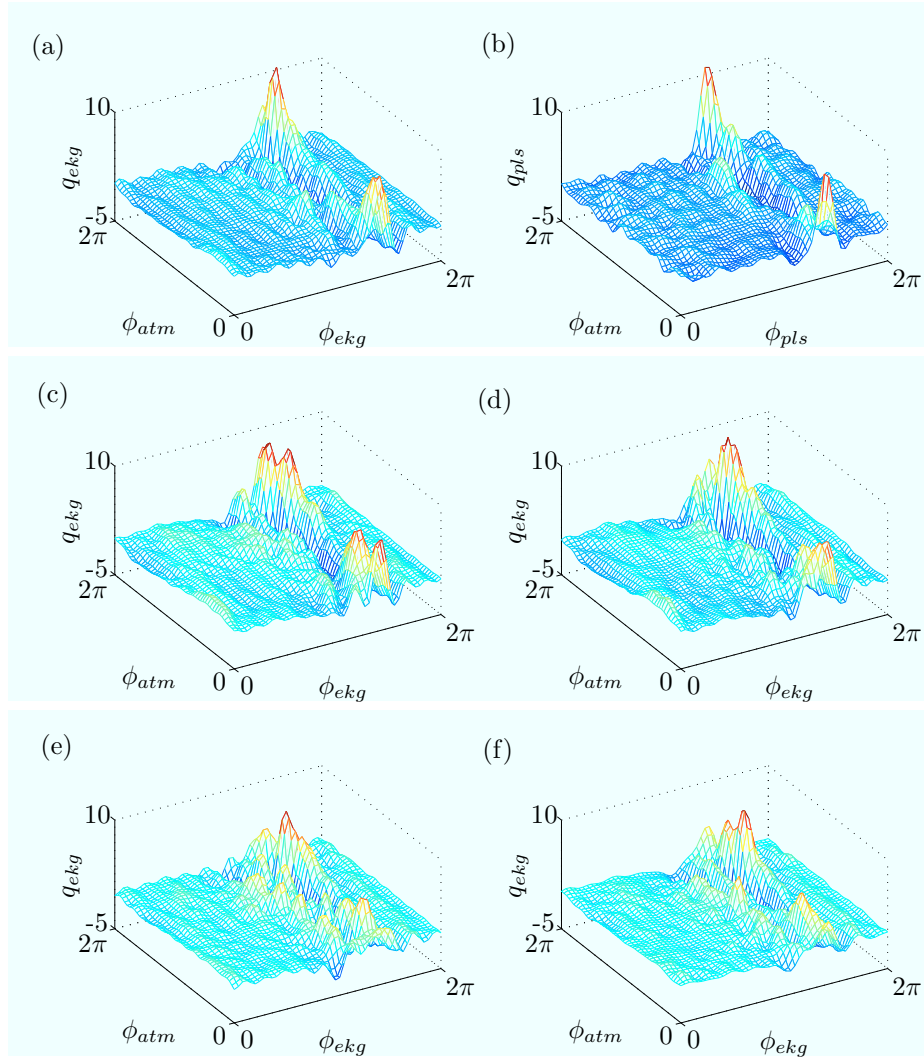


Abbildung 5.4: Die Kopplungsfunktionen der kardiorespiratorischen Wechselwirkung, berechnet aus: (a) EKG unter freier Atmung $q_{frei}^{ekg}(\phi_{ekg}, \phi_{atm})$, (b) Puls unter freier Atmung $q_{frei}^{pls}(\phi_{pls}, \phi_{atm})$, (c) erster Teil der EKG Daten unter alle 5s getriggelter Atmung $q_{5s,1}^{ekg}(\phi_{ekg}, \phi_{atm})$, (d) zweiter Teil der EKG Daten unter alle 5s getriggelter Atmung $q_{5s,2}^{ekg}(\phi_{ekg}, \phi_{atm})$, (e) erster Teil der EKG Daten unter alle 2s getriggelter Atmung $q_{2s,1}^{ekg}(\phi_{ekg}, \phi_{atm})$, (f) zweiter Teil der EKG Daten unter alle 2s getriggelter Atmung $q_{2s,2}^{ekg}(\phi_{ekg}, \phi_{atm})$.

Diese quantitativen Resultate reproduzieren den visuellen Eindruck: Die große Ähnlichkeit aller Kopplungsfunktionen, das Vorliegen einer gemeinsamen, typischen Form, wird durch die hohe Korrelation der Kopplungsfunktionen wieder gespiegelt, für die $\rho(q^1, q^2) > 0.6$ mit einer Schwankung von weniger als 20% gilt. Des Weiteren zeigt sich, dass Kopplungsfunktionen unterschiedlicher Teile derselben Zeitreihe eine höhere Ähnlichkeit aufweisen, darin, dass diese Paare erstens eine nahezu identische Norm besitzen, während die der Kopplungsfunktionen unterschiedlicher Messungen klar erkennbar voneinander abweichen. Auch die Korrelationen der Kopplungsfunktionen von Teilen derselben Messung sind typischerweise höher als die unterschiedlicher Zeitreihen. Des Weiteren zeigt sich auch hier, dass es die Phasentransformation ermöglicht, in einem qualitativen Sinn invariante Phasenmodelle aus so unterschiedlichen Observablen wie EKG und Puls zu bestimmen, deren Kopplungsfunktionen mit $\rho(q^1, q^2) = 0.68$ korreliert sind, was in der Größenordnung der Korrelation der Kopplungsfunktionen liegt, die vom selben Signal unter unterschiedlichen Messbedingungen gewonnen wurden.

Die Ergebnisse sind aber nicht nur selbstkonsistent in dem Sinne, dass die Resultate unterschiedlicher Abschnitte derselben Zeitreihen, die Resultate unterschiedlicher Messungen und die Resultate unterschiedlicher Observablen sehr ähnlich bzw. stark korreliert sind, sondern sie sind des Weiteren auch physiologisch plausibel, wie abschließend diskutiert werden soll. Das für alle Grafiken in Abb. 5.4 charakteristische Muster ist durch einen große Fläche konstanter Werte in der Umgebung von Null charakterisiert - also durch einen Bereich, in dem die Herz-Dynamik überhaupt nicht durch die Atmung beeinflusst wird - und (2) durch einen Bereich kurz vor Beginn der Depolarisation (die R-Zacken entsprechen Werten der Phase von $\phi_{Herz} = 2\pi n$, $n = 0, 1, \dots$), innerhalb dessen es eine typische Form der Abhängigkeit der Herzdynamik vom Zustand der Atmung gibt. Dieser Bereich der Phasen entspricht im EKG dem Bereich vom Ausklingen der T-Welle bis zum Einsetzen der P-Welle, so dass die Phasendynamik des Herzens im Bereich des P-T-Intervalls als autonom angesehen werden kann, und nur im T-P-Intervall extern beeinflusst ist, was sich mit dem Sachverhalt deckt, dass das EKG Signal im Bereich des P-T-Intervalls bis auf Amplitudenschwankungen invariant ist und nur im T-P-Intervall eine Variabilität in Form einer zeitlichen Stauchung und Dehnung aufweist und sich dementsprechend nur gut vorhersagen lässt, wenn die zur Vorhersage verwendeten Daten aus dem P-T-Intervall stammen [48]. Solche Bereiche der Autonomie gegenüber externen Einflüssen sind vom Verhalten von Neuronen als *Refraktärphase* bekannt - dies ist die Zeitspanne nach der Depolarisation, in der keine erneute Depolarisation erfolgen kann [49] -, was die Vermutung nahelegt, dass das beobachtete Muster durch Einwirkungen auf Neuronen oder den Sinusknoten verursacht sein könnte. Ein Vergleich mit den aus numerischen Simulationen in Abschnitt 4.2.3 gewonnenen Kopplungsfunktionen eines Hindmarsh-Rose Neurons, das (a) von einem zweiten Neuron oder (b) von einem regelmäßigen Van-der-Pol Oszillator beeinflusst wird, Abb. 4.3-2 (b),(c) zeigt, dass die aus den physiologischen Daten gewonnenen Kopplungsfunktionen in Abb. 5.4 eine verblüffende Ähnlichkeit mit der Kopplungsfunktion des durch den Van-der-Pol-Oszillator getriebenen Hindmarsh-Rose Neurons, Abb. 4.3-2 (c), aufweisen, während die Ähnlichkeit mit der Neuron-Neuron-Kopplung geringer ist. Dies legt den Schluss nahe, dass der der kardiorespiratorischen Kopplung zu Grunde liegende Mechanismus, weniger eine direkte neuronale Wechselwirkung ist, als vielmehr der

unmittelbare Einfluss eines regelmäßigen Oszillators auf die Herzzellen - wie etwa der mechanische Druck der respiratorischen Dynamik auf den Sinusknoten. Des Weiteren weist die Abhängigkeit der Herzdynamik von der Phase der Atmung ein Maximum - also eine Beschleunigung des Herzschlages - kurz vor $\phi_{atm} = 2\pi n$, $n = 0, 1, \dots$ auf, und ein Minimum - also eine Abnahme der Herzfrequenz - in der Nähe von $\phi_{atm} = \pi n$, $n = 0, 1, \dots$. Da Werte der Phase der Atmung von $\phi_{atm} = 2\pi n$, $n = 0, 1, \dots$ dem Maximum der Geschwindigkeit des Luftstroms durch die Nase entsprechen, nimmt die Herzfrequenz beim Einatmen zu und beim Ausatmen ab: Das für alle ermittelten Kopplungsfunktionen typische Muster zeigt den bekannten Effekt der *Respiratorischen Sinus Arrhythmie* [51].

Die aus den physiologischen Daten gewonnenen Ergebnisse reproduzieren demnach die bekannten physiologischen Sachverhalte der neuronalen Refraktärphase sowie der Respiratorischen Sinus Arrhythmie und legen im Vergleich mit Kopplungsfunktionen numerischer Modelle nahe, dass der zu Grund liegende Mechanismus mit der unmittelbaren, mechanischen Einwirkung der regelmäßigen Dynamik der Atmung auf die Herzzellen, wie etwa die des Sinusknoten, zusammen hängt. Dieser Zusammenhang entspricht der Erklärung der Respiratorischen Sinus Arrhythmie durch das Phänomen des *mechano-elektrischen Feedbacks*⁶, das die Rückwirkung des mechanischen Einflusses auf die Herzzellen - wie etwa durch die Verformung der Zellen oder ihre Volumenänderung - auf ihre elektrophysiologischen Eigenschaften und so letztlich auf die Dynamik des Membranpotentials beschreibt: Die Respiratorische Sinus Arrhythmie wird dieser Theorie nach zumindest teilweise nicht durch neuronale Wechselwirkungen [53] verursacht,⁷ sondern durch die unmittelbare physische Einwirkung der Atmung auf das Herz, was dadurch belegt ist, dass sie sich auch nach Herz-Transplantationen nachweisen lässt [54]. Vermutlich wird sie durch die Einwirkung des respiratorisch modulierten venösen Rückstroms des Blutes auf den Sinusknoten, den Schrittmacher des Herzens, verursacht. So bewirkt die Zunahme des venösen Rückstroms eine Zunahme der Herzfrequenz [55], was auch bei der Dehnung isolierter Sinusknoten [56] und bei der Dehnung isolierter Sinusknotenzellen [57] zu beobachten ist.

Die in diesem Abschnitt aus physiologischen Zeitreihen rekonstruierten Phasenmodelle sind demnach wegen ihrer Selbstkonsistenz und zweitens wegen der Reproduktion zentraler Aspekte gegenwärtiger physiologischer Theorien als sinnvolle Ergebnisse anzusehen, was die verwendeten Verfahren der Datenanalyse - die Projektion auf den Average-Cycle zur Bestimmung der Protophase, die Phasentransformation und die Rekonstruktion der Phasenmodelle - als „funktionstüchtige Werkzeuge“ zur Analyse der Wechselwirkung gekoppelter Oszillatoren ausweist. Insbesondere ist hier zu betonen, dass die Phasentransformation auch im Fall so unterschiedlicher Observablen wie EKG und Puls zu einer in guter Näherung invarianten Darstellung der Systemdynamik führt. Andererseits ist abschließend anzumerken, dass in diesem Fall der Anwendung der Projektion auf den Average Cycle auch zwei Probleme nicht gelöst werden konnten, die aus der spezifischen Form der gegebenen Daten resultieren: (1) Das EKG weist im Bereich zwischen T-Welle und P-Welle kaum eine Veränderung des Signals

⁶Eine Übersicht findet sich in [52]

⁷Ein alternativer Erklärungsansatz [58] kommt gleichermaßen zu dem Ergebnis, dass die RSA nicht durch zentralnervöse Wechselwirkungen verursacht wird, führt die RSA aber auf die direkte Rückkopplung der Barorezeptoren auf die Herzdynamik zurück.

auf, was im Zustandsraum zu einer nahezu punktförmigen Konzentration dieser Zustände führt, die auch noch durch ein, verglichen mit dem Dynamikumfang dieser Zustände, relativ starkes Rauschen überlagert sind. In diesem Bereich ist die Phase durch die Daten daher nur sehr schlecht definiert, was sich in Extremfällen sogar in Sprüngen oder kleineren Plateaus der Phase niederschlägt. (2) Die verwendete Amplitude des Average Cycles ist nur unter der Bedingung, dass die Abweichungen vom Average Cycle klein im Vergleich mit seinem Durchmesser sind, eine gute Näherung, die nicht zu amplitudenabhängigen Variationen der Phase führt. Sowohl in den EKG als auch in den Puls Daten gibt es aber im Average Cycle eine kleine Schleifen, deren Durchmesser in der Größenordnung der Amplitudendynamik liegt. Hier kommt es zu Verzerrungen der Phase und in Extremfällen ebenfalls zu Sprüngen und kleineren Plateaus. Aus diesen beiden Gründen sind die Ergebnisse trotz der dargelegten Konsistenz erst einmal nur als vorläufiger, erster Schritt der Verwendung von Phasenmodellen zur Analyse der kardiorespiratorischen Wechselwirkung zu verstehen.

Kapitel 6

Phasen abseits des Grenzyklus

Wie in der Einleitung diskutiert, basiert der gesamte Ansatz auf der Annahme, dass sich die jeweilige Trajektorie in der unmittelbaren Umgebung eines Grenzyklus befindet, so dass die gesamte Dynamik des Systems in einer Näherung erster Ordnung auf die Phasendynamik reduziert werden kann. Ziel dieses Kapitels ist es, erste Überlegungen zu skizzieren, wie das Konzept der Phase bzw. ihre Rekonstruktion aus Daten auf oszillierende Trajektorien übertragen werden kann, die eine höhere Dimension als ein Grenzyklus besitzen - wie etwa seltsame Attraktoren oszillierender chaotischer Systeme. Die folgenden Ausführungen sind auf den Fall von näherungsweise 2-dimensionalen Attraktoren beschränkt, können aber theoretisch unmittelbar auf beliebig viele Dimensionen übertragen werden. Des Weiteren wird hier lediglich der Fall autonomer Oszillatoren diskutiert - die Generalisierung auf gekoppelte Oszillatoren mit mehr als 1-dimensionalen Trajektorien bleibt weiterhin eine offene Frage. Das Kapitel gliedert sich in einen theoretischen Teil, der von einem Abschnitt gefolgt wird, in dem die Theorie an zwei Beispielen in ihrer Anwendung demonstriert wird.

6.1 Theorie

Es wird demnach im Folgenden davon ausgegangen, dass die 2-dimensional eingebettete Trajektorie durch eine Protophase θ und eine Amplitude r beschrieben wird. Eine solche Repräsentation kann mit demselben Verfahren wie im Fall von Grenzyklen erreicht werden: Eine gegebene skalare Zeitreihe $X(t)$ wird über die Hilbert-Transformation, Gl. (2.15), in der 2-dimensionalen komplexen Ebene eingebettet, $X(t) + i\hat{X}(t)$, die Protophase $\Theta(t)$ wird über den Winkel, Gl. (2.16), und die Amplitude über den Absolutwert,

$$R(t) = \left| X(t) + i\hat{X}(t) \right|,$$

definiert. In diesem Fall kann die Protophase

$$\frac{d\theta}{dt} = \tilde{\omega}_0 + f(\theta, r) \tag{6.1}$$

aber als Funktion beider Koordinaten θ und r von der Definition der Phase ϕ autonomer Systeme, Gl. (2.1),

$$\frac{d\phi}{dt} = \omega_0,$$

abweichen, so dass die Phasentransformation über die Bedingung der Minimierung der Abweichung von einer linearen Entwicklung, Gl. (2.23),

$$\left\langle \left(\frac{d\phi}{dt} - \omega_0 \right)^2 \right\rangle = \min,$$

hier durch eine deterministische Koordinatentransformation beider Koordinaten θ und r ,

$$\phi(\theta, r) = \theta + G(\theta, r), \quad (6.2)$$

realisiert werden muss. Wird Gl. (6.2) in die Minimierungsbedingung, Gl. (2.23), eingesetzt, ergibt sich

$$\int_0^T \left(\dot{\theta} - \omega_0 + \frac{\partial G}{\partial \theta} \dot{\theta} + \frac{\partial G}{\partial r} \dot{r} \right)^2 dt = \min. \quad (6.3)$$

Da Phase und Protophase wieder dieselbe beobachtete Frequenz, Gl. (2.12), besitzen müssen, ist ω_0 durch

$$\omega_0 = \left\langle \frac{d\theta}{dt}(t) \right\rangle_t \quad (6.4)$$

bestimmt. Um die Minimierung, Gl. (6.3), numerisch auszuführen, wird für die Transformation

$$G(\theta, r) = \sum_{n,m} S_{n,m} e^{in\theta} L_m(r) \quad (6.5)$$

als Ansatz gewählt, wobei die $L_m(r)$ Legendre-Polynome¹ der Ordnung m sind. Wird Gl. (6.5) in Gl. (6.3) eingesetzt, folgt

$$\int_0^T \left(\dot{\theta} - \omega_0 + \sum_{n,m} S_{n,m} \left[in e^{in\theta} L_m(r) \dot{\theta} + e^{in\theta} \frac{dL_m}{dr}(r) \dot{r} \right] \right)^2 dt = \min. \quad (6.6)$$

Aus der Minimierungsbedingung, dass die partiellen Ableitungen nach allen Koeffizienten $\frac{\partial}{\partial S_{n,m}}$ Null sein müssen, ergibt sich das lineare Gleichungssystem

$$\alpha_{n,m} + \sum_{p,q} S_{p,q} \beta_{n,m,p,q} = 0 \quad \forall n, m, \quad (6.7)$$

wobei die Koeffizienten durch

$$\alpha_{n,m} = \int_0^T (\dot{\theta} - \omega_0) e^{-in\theta} \left(\frac{dL_m}{dr}(r) \dot{r} - in L_m(r) \dot{\theta} \right) dt \quad (6.8)$$

und

$$\beta_{n,m,p,q} = \int_0^T e^{i(p-n)\theta} \left(\frac{dL_q}{dr}(r) \dot{r} + ip L_q(r) \dot{\theta} \right) \left(\frac{dL_m}{dr}(r) \dot{r} - in L_m(r) \dot{\theta} \right) dt \quad (6.9)$$

¹Da Legendre-Polynome nur im Definitionsbereich von $[-1, 1]$ orthogonal sind, wird die Amplitude $r(t)$ auf diesen Bereich reskaliert.

gegeben sind. Sind $\theta(t)$ und $r(t)$ und somit ihre Ableitungen sowie ω_0 durch Gl. (6.4) gegeben, lassen sich die Koeffizienten $\alpha_{n,m}$ durch Gl. (6.8) und $\beta_{n,m,p,q}$ durch Gl. (6.9) numerisch durch Integration über die Zeitreihen berechnen. Das Gleichungssystem Gl.(6.7) lässt sich dann lösen, um die Koeffizienten $S_{n,m}$ zu bestimmen. Mit den Koeffizienten $S_{n,m}$ ergibt sich dann aus

$$\phi(\theta, r) = \theta + \sum_{n,m} S_{n,m} e^{in\theta} L_m(r) \quad (6.10)$$

die gesuchte Transformation von Protophase und Amplitude zur Phase.

6.2 Anwendung

Die im letzten Abschnitt dargestellte Theorie wird nun auf zwei Beispielsysteme angewendet. Zuerst wird die Phase eines Landau-Stuart Oszillators aus dessen skalarer Zeitreihe bestimmt. Diese Anwendung ist dadurch motiviert, dass in diesem Fall eine analytisch herleitbare Beziehung zwischen Phase, Protophase und Amplitude existiert, so dass sich feststellen lässt, ob die Phasentransformation das theoretisch korrekte Ergebnis liefert. Als zweites Beispiel wird das schwach chaotische Rössler-System verwendet, um die Anwendbarkeit auf komplexere Trajektorien zu demonstrieren.

6.2.1 Landau-Stuart-Oszillator

Die Dynamik des Landau-Stuart Oszillators ist in Polarkoordinaten θ, r durch das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \dot{r} &= r(1 - r^2) \\ \dot{\theta} &= \eta - \alpha r^2 \end{aligned} \quad (6.11)$$

gegeben [5], wobei α und η frei wählbare Konstanten sind. Der Grenzyklus liegt bei $r = 1$, so dass sich θ auf dem Grenzyklus mit konstanter Frequenz

$$\omega_0 = \eta - \alpha$$

entwickelt. Offensichtlich erfüllt die Protophase θ in Gl. (6.11) jenseits des Grenzyklus $r \neq 1$ nicht die Definition der Phase eines autonomen Systems $\dot{\phi} = \omega_0$, während die durch folgende Transformation definierte Phase

$$\phi(\theta, r) = \theta - \alpha \ln(r) \quad (6.12)$$

mit

$$\frac{d\phi}{dt} = \eta - \alpha \quad (6.13)$$

diese Bedingung im gesamten Zustandsraum erfüllt, wie sich leicht durch Einsetzen überprüfen lässt. Gl. (6.12) ist damit die theoretisch korrekte Phasentransformation des Landau-Stuart-Oszillators.

Um zu überprüfen, ob die im theoretischen Abschnitt entwickelte Phasentransformation das theoretisch korrekte Ergebnis reproduzieren kann, wird das Gleichungssystem Gl. (6.11) mit den Parametern $\eta = 1.3$ und $\alpha = 0.3$ und 1.000 zufällig gewählten Anfangsbedingungen im Bereich $0.5 < r < 1.5$ numerisch

gelöst,² wobei jede der 1.000 Lösungen die Länge einer Periode besitzt. Die sich aus diesen Lösungen ergebenden Zeitreihen $\Theta(t)$ und $R(t)$ werden mit den durch Gl. (6.7), Gl. (6.8) und Gl. (6.9) bestimmten Koeffizienten $S_{n,m}$ - $n = [-3, \dots, 3]$ und $m = [0, \dots, 7]$ - in die Phasentransformation, Gl. (6.10), eingesetzt, um die Phase $\Phi(t)$ zu berechnen. Des Weiteren wird aus $\Theta(t)$ und $R(t)$ über Gl. (6.12) theoretisch die Phase $\Phi_{theo}(t)$ bestimmt, die mit $\Phi(t)$ übereinstimmen sollte.

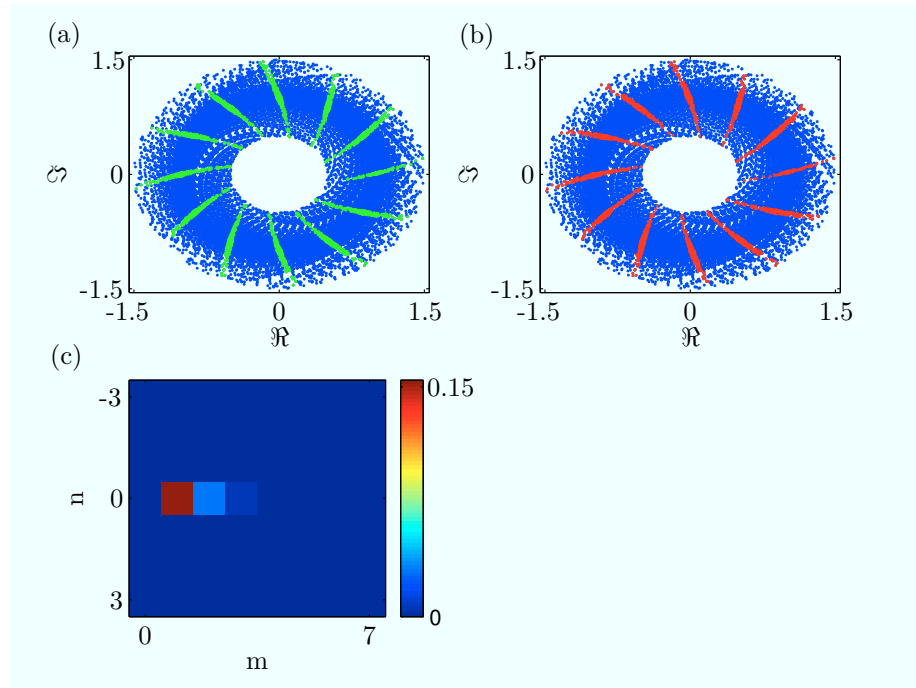


Abbildung 6.1: (a) Die Trajektorien des Landau-Stuart-Oszillators in der komplexen Ebene und die Isophasen auf der Basis der theoretisch abgeleiteten Phase. (b) Die Trajektorien des Landau-Stuart-Oszillators und die Isophasen auf der Basis der durch die Phasentransformation berechneten Phase. (c) Die Absolutwerte der Koeffizienten $S_{n,m}$ der Phasentransformation.

Um die beiden Phasen zu vergleichen, sind in Abb. 6.1 deren Isophasen dargestellt. Isophasen sind $n - 1$ -dimensionale Unterräume in n -dimensionalen Zustandsräumen, deren Zustände denselben Wert der Phase besitzen [50, 5]. In diesem Fall sind sie als farbig markierte Punkte auf der Trajektorie dargestellt, die den gleichen Wert der Phase haben: In Abb. 6.1 (a) sind die Isophasen von $\Phi_{theo}(t)$ als grüne Linien und in Abb. 6.1 (b) die Isophasen von $\Phi(t)$ als rote Linien zu sehen. Offensichtlich sind die theoretisch bestimmten Isophasen und die über die Phasentransformation bestimmten Isophasen identisch.

In Abb. 6.1 (c) sind die Absolutwerte der Koeffizienten $S_{n,m}$ der Phasentransformation dargestellt: Ausschließlich Koeffizienten mit $n = 0$ sind von Null verschieden - d.h. es kommen nur Komponenten in der Phasentransformation vor, die nicht von der Protphase, sondern nur von der Amplitude abhängen,

²Die Gleichung wurde mit dem Euler-Verfahren mit einem Zeitschritt von $\Delta t = 0.01s$ gelöst.

was dem theoretischen Ergebnis, Gl. (6.12), entspricht: In der Tat ist die dargestellte Kombination der Koeffizienten im Bereich von $0.5 < r < 1.5$ eine sehr gute Näherung der Funktion $0.3 \ln(r)$.³ Die Resultate zeigen demnach, dass die Phasentransformation das theoretisch abgeleitete Ergebnis aus gegebenen Zeitreihen zu rekonstruieren gestattet.

6.2.2 Rössler-System

Als zweites Beispiel soll das schwach chaotische Rössler-System verwendet werden, das eine oszillierende Dynamik auf einem näherungsweise 2-dimensionalen Attraktor aufweist. Die Differentialgleichung des Rössler Systems,

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y - z, \\ \dot{y} &= x + \alpha y, \\ \dot{z} &= \beta + z(x - \gamma),\end{aligned}\tag{6.14}$$

wird für $\alpha = 0.18$, $\beta = 0.4$ und $\gamma = 8.5$ mit dem MATLAB Algorithmus `ode45` numerisch gelöst. Die Zeitreihe $X(t)$, $Y(t)$ mit einer Länge von 75.000 Daten und ca. 400 Daten pro Periode werden verwendet, um die Protophase über den Winkel der Trajektorie in der X-Y-Ebene

$$\Theta(t) = \arctan\left(\frac{Y(t)}{X(t)}\right)$$

zu definieren. Da sich die Projektion der Trajektorie in der X-Y-Ebene schneidet, wäre eine allein in der X-Y-Ebene definierte Amplitude nicht in der Lage, Zustände zu unterscheiden, die dieselbe Projektion auf diese Ebene besitzen. Daher wird in diesem Fall die Amplitude als

$$R(t) = \sqrt{X^2(t) + Y^2(t) + Z^2(t)}$$

definiert. Die Protophase $\Theta(t)$ und die Amplitude $R(t)$ werden mit den durch Gl. (6.7), Gl. (6.8) und Gl. (6.9) bestimmten Koeffizienten $S_{n,m}$ mit $n = [-28, \dots, 28]$ und $m = [0, \dots, 7]$ in die Phasentransformation, Gl. (6.10), eingesetzt, um die Phase $\Phi(t)$ zu berechnen. Wegen der Komplexität der Protophasendynamik wurde das Verfahren 4-fach iteriert.

Die Koeffizienten der Transformation $S_{n,m}$ sind in Abb. 6.2 (b) dargestellt: In diesem Fall hängt die Korrektur der Protophase sowohl von der Amplitude $R(t)$ - der ausgeprägteste Term ist hier das Legendre Polynom 2-ter Ordnung, also ein parabolische Abhängigkeit -, als auch von der Protophase $\Theta(t)$ ab. Um die Abhängigkeit von der Phase auflösen zu können, mussten Fourier-Terme bis zur Ordnung von 28 verwendet werden, was bedeutet, dass diese Abhängigkeit innerhalb eines relativ kleinen Bereiches stark variiert. Dies spiegelt den Sachverhalt wider, dass die Ableitung der Protophase $\dot{\theta}(\theta)$ im Bereich $\theta = [0, \dots, \frac{\pi}{2}]$, also im Bereich der sprunghaften Dynamik der Z-Komponente, einer extremen Variation unterliegt, Abb. 6.2 (c) (blau). Die regelmäßige Abweichung der Protophase von einem konstanten Wachstum des restlichen Bereichs ist allein eine Funktion der Protophase selbst und wird durch die Koeffizienten $S_{n,0}$ in Abb. 6.2 (b) widergespiegelt.

³Dass der Absolutwert des Koeffizienten $S_{0,1} \approx 0.15$ ist und nicht 0.3, ist darin begründet, dass für die Verwendung der Legendre Polynome die Amplitude - hier im Bereich $0.5 < r < 1.5$ - auf den Definitionsbereich $[-1, 1]$ der Legendre Polynome abgebildet wird.

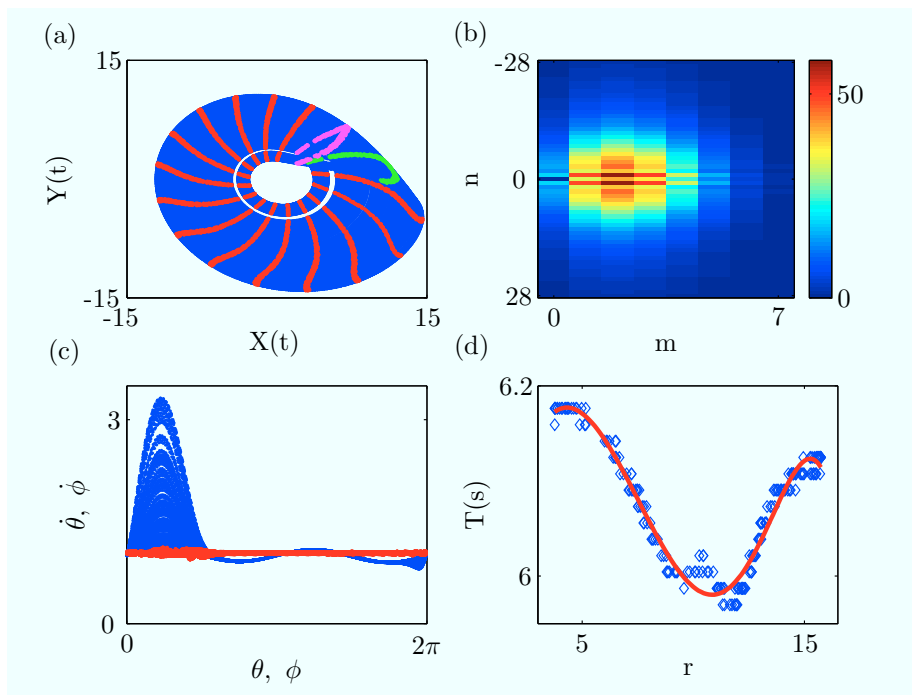


Abbildung 6.2: (a) Die Projektion des Attraktors des Rössler-Systems auf die X-Y-Ebene (blau) mit 16 farbigen Isophasen. (b) Die Koeffizienten $S_{n,m}$ der Phasentransformation der ersten Iteration. (c) Die Ableitung der Protophase als Funktion der Protophase $\dot{\theta}(\theta)$ (blau) und die Ableitung der Phase als Funktion der Phase $\dot{\phi}(\phi)$ (rot). (d) Die Rückkehrzeit T in Bezug auf die Isophase $\phi = 0$ (grün) als Funktion der Amplitude r : Die Werte der Zeitreihe sind als blaue Rauten dargestellt, die rote Funktion ist der Fit der Datenverteilung mit einem Polynom 6-ter Ordnung. Die „Quantelung“ der Werte (blaue Rauten) entspricht dem Zeitschritt der diskreten Zeitreihe der Daten.

Da in diesem Fall keine analytische Lösung der Phasentransformation existiert, können die Resultate nicht unmittelbar überprüft werden. Es lässt sich lediglich feststellen, ob bzw. inwieweit die Phasentransformation die Abweichungen von einem linearen Wachstum eliminiert. In Abb. 6.2 (c) ist die Ableitung der Phase als Funktion der Phase $\dot{\phi}(\phi)$ dargestellt (rot), die der Theorie folgend eine Konstante sein sollte. Einerseits ist zu erkennen, dass die Phasentransformation diesem Ideal bereits sehr nahe kommt, auch wenn noch kleinere Abweichungen erhalten geblieben sind. Insbesondere zeigt der Vergleich mit der Protophase $\dot{\theta}(\theta)$ (blau), dass die Phasentransformation die Abweichung von der konstanten Entwicklung erheblich reduziert hat. Die nicht eliminierten Abweichungen im Bereich von $\phi = [0, \dots, \frac{\pi}{2}]$ sind darauf zurückzuführen, dass eine deterministische Repräsentation der Dynamik 3 Koordinaten verwenden müsste, aber die Zeitreihen dieser 3 Koordinaten auf dem nahezu 2-dimensionalen Attraktor stark korreliert wären, so dass die Verwendung einer weiteren Koordinate in Gl. (6.7), Gl. (6.8) und Gl. (6.9) auf Grund dieser Korrelation nicht möglich ist. Die gewählte Amplitude

$$R(t) = \sqrt{X^2(t) + Y^2(t) + Z^2(t)}$$

ist in diesem Sinne als eine möglichst gute Annäherung aufzufassen, die aber eben nicht perfekt ist.

Des Weiteren ist in Abb. 6.2 (c) festzustellen, dass die Ableitung der Phase (rot) sich einer breiten, „verschmierten“ Linie an Stelle einer klar definierten Konstante annähert: Die Phasentransformation eliminiert zwar alle Komponenten, die sich als Folge der Wahl des Koordinatensystems auffassen lassen, erhält aber dynamische Komponenten, die als *Phasen Diffusion* bezeichnet werden und durch die chaotische Sensitivität der Dynamik gegenüber der Variation der Anfangsbedingungen bedingt sind. Oszillierende chaotische Systeme besitzen keine klar definierte Frequenz, sondern lediglich eine mittlere Frequenz um die herum die „instantane Periodenlänge“ schwankt [5]. Dies ist in Abb. 6.2 (d) dargestellt: Dort ist die Rückkehrzeit $T(r)$, die das System benötigt, um nach dem Verlassen der Isophase $\phi = 0$ (grün) diese wieder zu erreichen, als Funktion der Amplitude, r , aufgetragen, die das System beim Verlassen der Isophase besitzt. Offensichtlich ist die Rückkehrzeit nicht konstant, sondern ändert sich als Funktion der Anfangsbedingung r in einem Bereich von $\Delta T = 0.2$ s.

In Abb. 6.2 (a) ist die Projektion der Trajektorie auf die X-Y-Ebene mit 16 Isophasen dargestellt. Die zurückgekrümmten Isophasen (grün / magenta) sind ein Effekt der Projektion auf die 2-dimensionale Ebene. In einer 3-dimensionalen Darstellung des Attraktors wären es Linien, die in Z-Richtung den „Trichter“ des Attraktors hinauflaufen, während sie hier durch die Projektion übereinander gefaltet werden. Hier macht sich der Effekt der Berücksichtigung der Z-Komponente in der Definition von $R(t)$ bemerkbar: Wäre die Amplitude nur in der X-Y-Ebene definiert worden, könnten Punkte mit denselben Koordinaten in der X-Y-Ebene nicht auf unterschiedliche Werte der Phase abgebildet werden, so dass die Projektionen dieser beiden Isophasen auf einer Linie lägen.

Kapitel 7

Zusammenfassung

Ausgangspunkt der hier dargestellten Überlegungen ist eine Lücke zwischen der Theorie der Phasendynamik und ihrer Anwendung zur Modellierung und Charakterisierung der Dynamik von Oszillatoren: Während im theoretischen Konzept der Phase die autonome Dynamik eines Oszillators ausschließlich durch seine konstante Frequenz ω_0 und die jeweils externen Einflüsse durch Kopplungsfunktionen bzw. Rauschterme beschrieben werden, was eine eindeutige Definition der Phase impliziert, Abschnitt 2.1, führen die Methoden zur Bestimmung der Phase aus skalaren Zeitreihen, Abschnitt 2.2, neben einem konstanten Term zu eigenperiodischen Termen in der Beschreibung der autonomen Dynamik der Oszillatoren, die je nach verwendeter Observable oder Einbettungsmethode variieren und daher keine invariante Beschreibung der Systeme ermöglichen. Um diese Differenz zu verdeutlichen, wurde die terminologische Distinktion zwischen den eindeutig bestimmten, invarianten *Phasen* und den aus Zeitreihen bestimmten, von Observablen abhängigen *Protophasen* eingeführt, Abschnitt 2.3.

Ziel dieser Arbeit ist es, diese Diskrepanz zwischen Phase und Protophase durch eine Phasentransformation zu überbrücken, die beliebige Protophasen eines Systems zur eindeutig bestimmten, einzigen Phase transformiert, indem die eigenperiodischen Terme der Protophasen eliminiert werden. Diese Phasentransformation ist als deterministische, invertierbare Koordinatentransformation konzipiert, die dadurch definiert wird, dass sie alle Abweichungen der Protophase von einem linearen Wachstum eliminiert, die sich als Funktion der Protophase¹ selbst ausdrücken lassen: Die Phasentransformation minimiert die Abweichungen der Protophasen von einer linearen Entwicklung durch eine deterministische Koordinatentransformation, und erhält daher alle Komponenten der Dynamik, wie etwa Rauschen oder den Einfluss der Kopplung zweier Oszillatoren, die sich nicht als eine deterministische Funktion der Koordinaten ausdrücken lassen. Diese Phasentransformation wurde für autonome Oszillatoren in Abschnitt 3.1 und für gekoppelte Oszillatoren in Abschnitt 4.1 theoretisch abgeleitet. Des Weiteren wurde für gekoppelte Oszillatoren die Invarianz der Resultate theoretisch nachgewiesen, Abschnitt 4.1.2, sowie eine Methode zur Rekonstruktion der autonomen Frequenzen aus Daten gekoppelter Oszillatoren entwickelt, Abschnitt 4.1.3.

Die Funktionsweise und der Effekt der Phasentransformation wurden an-

¹In Abschnitt 6 sind es Protophase und die entsprechende Amplitude.

schließlich durch Anwendungsbeispiele illustriert. Hier wurden einerseits numerisch generierte Datensätze verwendet, die (1) die Funktion haben, an Daten, deren Phasenmodelle bekannt sind, oder an Daten einfacher Systeme zu demonstrieren, dass die Phasentransformation den erwünschten Effekt hat, und die (2) zeigen sollen, dass Standardmethoden der Datenanalyse von Oszillatoren durch die Verwendung der Phasentransformation optimiert werden können. Andererseits wurden empirisch gemessene Datensätze verwendet, deren Funktion es ist, nachzuweisen, dass die Rekonstruktion invarianter Phasenmodelle über die Phasentransformation auch im Fall komplexerer Daten eine sinnvolle Methode der empirischen Forschung sein kann.

Die Illustration des Effekts der Phasentransformation wurde erstens am Beispiel eines autonomen, verrauschten Van-der-Pol Oszillators, Abschnitt 3.2.1, vorgenommen, indem gezeigt wurde, dass zwar die durch die unterschiedlichen Observablen bedingten eigenperiodischen Terme eliminiert, aber die unmittelbaren Effekte des Rauschens sowie die durch das Rauschen erzeugte Phasendiffusion erhalten bleiben. In Abschnitt 4.2.2 wurde des Weiteren demonstriert, dass die Phasentransformation für gekoppelte Oszillatoren im Gegensatz zur Protophasendynamik eine in guter Näherung invariante Rekonstruktion von Kopplungsfunktionen für unterschiedliche Observablen desselben Systems ermöglicht. Im Idealfall eines Phasenmodells ohne explizite Amplitudendynamik konnten die Kopplungsfunktionen sogar völlig exakt rekonstruiert werden, Abschnitt 4.2.1. In diesen beiden Beispielen hat sich erstens aber auch gezeigt, dass sich die Effekte unterschiedlicher Methoden der Einbettung nicht in derselben Qualität wie die Effekte unterschiedlicher Observablen neutralisieren lassen, und zweitens dass die Einbettung durch die Hilbert-Transformation zu den besseren Ergebnissen führt, weswegen sie als optimale Methode der Einbettung in den folgenden Beispielen verwendet wurde. In Abschnitt 4.2.4 wurde belegt, dass sich die autonomen Frequenzen gekoppelter Van-der-Pol Oszillatoren aus mehreren Datensätzen unterschiedlicher, aber unbekannter Kopplung rekonstruieren lassen, während in Abschnitt 4.2.5 die Erweiterung des Konzepts auf drei gekoppelte Van-der-Pol Oszillatoren demonstriert wurde.

In Abschnitt 3.2.2 und Abschnitt 4.2.3 wurde am Beispiel der Phasendynamik von numerisch simulierten Neuronen gezeigt, dass sich die Bestimmung des Synchronisations-Index sowie die Bestimmung des Richtungs-Index durch die Phasentransformation optimieren lassen - in diesen Beispielen waren sogar nur durch die Anwendung der Phasentransformation bedeutungsvolle Resultate zu erzielen.

In Abschnitt 5 wurden erstmalig Phasenmodelle der kardiorespiratorischen Kopplung aus den physiologischen Messdaten des EKGs, des Pulses und der Atmung bestimmt. Zu diesem Zweck musste ein neues Verfahren zur Berechnung kontinuierlicher Protophasen aus sich schneidenden Trajektorien komplexer Signale entwickelt werden, Abschnitt 5.1.1, dass an synthetischen EKG-Daten erfolgreich getestet wurde, Abschnitt 5.1.2. Die dann in Abschnitt 5.2 aus den physiologischen Zeitreihen bestimmten Ergebnisse lassen sich einerseits wegen ihrer Selbstkonsistenz und andererseits wegen ihrer physiologischen Plausibilität als sinnvolle Ergebnisse einstufen: Selbstkonsistent sind sie in dem Sinne, dass die Kopplungsfunktionen unterschiedlicher Abschnitte derselben Zeitreihen, die Kopplungsfunktionen unterschiedlicher Observablen und die unter unterschiedlichen Messbedingungen gewonnenen Kopplungsfunktionen sehr ähnlich sind bzw. starke Korrelationen aufweisen. Physiologisch plausibel sind die Ergebnisse, weil

das charakteristische Muster aller Kopplungsfunktionen die physiologisch bekannten Phänomene der *neuronalen Refraktärphase* und der *Respiratorischen Sinus Arrhythmie* zeigen und sich konsistent vor dem Hintergrund der Theorie des *mechano-elektrischen Feedbacks* als Grundlage der Respiratorischen Sinus Arrhythmie interpretieren lassen. Auch in diesem Fall komplexer empirischer Daten ermöglicht die Phasentransformation die Rekonstruktion von in guter Näherung invarianten Phasenmodellen aus unterschiedlichen Observablen desselben Systems.

Während alle bisherigen Ergebnisse auf der Annahme beruhen, dass die Trajektorie sich in der Nähe eines Grenzzyklus befindet, so dass der Effekt der Amplitudendynamik in einer Näherung erster Ordnung vernachlässigt werden kann, ist Abschnitt 6 als ein erster Schritt zu verstehen, das Konzept der Phase auch jenseits dieser Annahme - also auch auf oszillierende Systeme mit einer ausgeprägten Amplitudendynamik - anwenden zu können. In diesem Abschnitt wurde eine Phasentransformation für autonome Oszillatoren entwickelt, die sowohl die Protophase als auch die Amplitude verwendet, Abschnitt 6.1, die dann auf zwei numerische Beispiele angewandt wurde. Im ersten Beispiel gelang es, die analytisch bekannte Phasentransformation und somit die Isophasen aus der Zeitreihe eines Landau-Stewart Oszillators exakt zu rekonstruieren, Abschnitt 6.2.1. Im zweiten Beispiel wurde über die Phasentransformation die Phase des Rössler-Systems bestimmt, Abschnitt 6.2.2. Im Vergleich zur Protophase ist diese Phase durch eine drastischen Reduktion der Abweichung vom linearen Wachstum ausgezeichnet, während andererseits die durch die chaotische Dynamik bedingte Phasen-Diffusion erhalten geblieben ist.

Als weitere Problemfelder der zukünftige Forschung sind abschließend die Erweiterung der Methode für eine große Anzahl gekoppelter Oszillatoren und die Entwicklung einer Theorie sowie einer Phasentransformation für gekoppelte Oszillatoren mit ausgeprägter Amplitudendynamik zu nennen: (1) Obwohl es theoretisch möglich ist, mit den dargestellten Methoden Phasenmodelle beliebig vieler gekoppelter Oszillatoren zu bestimmen, stößt diese Möglichkeit doch sehr schnell an numerische Grenzen, da die Anzahl der aus den Daten zu berechnenden Koeffizienten mit der Ordnung der Modelle N und mit der Anzahl der Oszillatoren m durch $(2N + 1)^m$ gegeben ist. (2) Während im Fall der Gültigkeit der Annahme, dass sich das System in der Umgebung eines Grenzzyklus befindet, durch ein störungstheoretisches Näherungsverfahren geklärt ist, dass und in welchem Sinne die Phasenmodelle als Modelle der gesamten Systemdynamik aufgefasst werden können, fehlt eine solche theoretische Grundlage für Systeme mit ausgeprägter Amplitudendynamik. Des Weiteren ist in diesem Fall auch noch unklar, wie die Phasentransformation im Fall gekoppelter System zu definieren ist.

Literaturverzeichnis

- [1] W. Deppert, *Zeit - Die Begründung des Zeitbegriffs, seine notwendige Spaltung und der ganzheitliche Charakter seiner Teile*, Franz Steiner Verlag: Stuttgart (1989).
- [2] D. Helbing, J. Jost, H. Kantz, *Nonlinear Physics Everywhere: From Molecules to Cities*, in: European Physical Journal B, Vol. 63 (Juni 2008), S. 283-285.
- [3] U. Parlitz, *Nonlinear Time Series Analysis*, in: Nonlinear Modeling - Advanced Black-Box Techniques Eds. J.A.K. Suykens and J. Vandewalle, Kluwer Academic Publishers, Boston (1998), S. 209-239.
- [4] H. Kantz, T. Schreiber, *Nonlinear Time Series Analysis*, Cambridge University Press: Cambridge (2004).
- [5] A. Pikovsky, M. Rosenblum, J. Kurths, *Synchronization. A Universal Concept in Nonlinear Sciences*. Cambridge University Press, Cambridge (2001).
- [6] U. Parlitz, A. Pikovsky, M. Rosenblum, J. Kurths, *Schwingungen im Gleichtakt*, in: Physik Journal, Vol. 5 (2006), Bd. 10, S. 33-40.
- [7] Y. Kuramoto, *Chemical Oscillations, Waves and Turbulence*, Springer, Berlin (1984).
- [8] A. M. Yacomotti, G. B. Mindlin, M. Giudici, S. Balle, S. Barland, J. Tredicce, *Coupled Optical Excitable Cells*, in: Phys. Rev. E, Vol. 66(3) (2002), S. 036227.
- [9] M. Prokhorov, V. Ponomarenko, *Estimation of Coupling Between Time-Delay Systems from Time Series*, in: Phys. Rev. E, Vol. 72 (2005), S. 016210.
- [10] I. Z. Kiss, Y. Zhai, J. L. Hudson, *Predicting Mutual Entrainment of Oscillators with Experiment-Based Phase Models*, in: Phys. Rev. Lett., Vol. 94 (2005), S. 248301
- [11] J. Miyazaki, S. Kinoshita, *Determination of a Coupling Function in Multicoupled Oscillators*, in: Phys. Rev. Lett., Vol. 96 (2006), S. 194101.

- [12] J. Miyazaki, S. Kinoshita, *Method for Determining a Coupling Function in Coupled Oscillators with Application to Belousov-Zhabotinsky Oscillators*, in: Physical Review E, Vol. 74 (2006), S. 056209.
- [13] M. G. Rosenblum, L. Cimponeriu, A. Bezerianos, A. Patzak, R. Mrowka, *Identification of Coupling Direction: Application to Cardiorespiratory Interaction*, in: Phys. Rev. E, Vol 65 (2002), S. 041909.
- [14] R. Mrowka, L. Cimponeriu, A. Patzak, and M. Rosenblum, *Directionality of Coupling of Physiological Subsystems - Age Related Changes of Cardiorespiratory Interaction During Different Sleep Stages in Babies*, in: Am. J. Physiol. Regul. Integr. Comp. Physiol., Vol. 285 (2003), S. R1395-R1401.
- [15] R. F. Galán, G. B. Ermentrout, N. N. Urban, *Efficient Estimation of Phase-Resetting Curves in Real Neurons and its Significance for Neural-Network Modeling*, in: Phys. Rev. Lett., Vol. 94 (15) (2005), S. 158101.
- [16] L. Cimponeriu, M. Rosenblum, T. Fieseler, J. Dammers, M. Schiek, M. Majtanik, P. Morosan, A. Bezerianos, P. Tass, *Inferring Asymmetric Relations Between Interacting Neuronal Oscillators*, in: Prog. Theor. Phys. Suppl., Vol. 150 (2003), S. 22-36.
- [17] I.T. Tokuda, S. Jain, I.Z. Kiss, J.L. Hudson, *Inferring Phase Equations from Multivariate Time Series*, in: Physical Review Letters, Vol. 99, p. 064101 (2007).
- [18] D.-U. Hwang, S.-G. Lee, S.K. Han, H. Kook, *Phase-Model Analysis of Coupled Neuronal Oscillators with multiple Connections*, in: Physical Review E, Vol. 74 (2006), S. 031911.
- [19] F. Mormann, K. Lehnertz, P. David, C. Elger, *Mean phase coherence as a measure for phase synchronization and its application to the EEG of epilepsy patients*, Physica D, Vol. 144 (2000), S.358-369.
- [20] A. Schnitzler, J. Gross, *Normal and Pathological Oscillatory Communication in the Brain*, in: Nature Neuroscience Reviews, Vol. 6 (2005), S. 285.
- [21] M. Rosenblum, L. Cimponeriu, A. Pikovsky, *Coupled Oscillators Approach in Analysis of Bivariate Data*, in: M. Schelter, M. Winterhalder, J. Timmer (Hrsg.) *Handbook of Time Series Analysis*, Wiley-VCH: Weinheim (2006), Kapitel 7, S 159-180.
- [22] E. Izhikevich, Y. Chen, unveröffentlicht.
- [23] H. Daido, unveröffentlicht.

- [24] B. Bezruchko, V. Ponomarenko, M. Rosenblum, A. Pikovsky, *Characterizing Direction of Coupling from Experimental Observations*, in: *Chaos*, Vol. 13(1) (2003), S. 179-184.
- [25] U. Parlitz, M. Wiesenfeldt, C. Merkwirth, *Analysis and Modeling of Multivariate Time Series*, in: *Proceedings of the 3rd International Symposium 'Investigations of Nonlinear Dynamic Effects in Production Systems'*, Cottbus, Sept. 26-27, 2000.
- [26] A. Bahraminasab, F. Ghasemi, A. Stefanovska, P. McClintock, H. Kantz, *Direction of Coupling from Phases of Interacting Oscillators*, in: *Physical Review Letters*, Vol. 100 (2008), S. 084101.
- [27] M. Vejmelka, M. Paluš, *Inferring the Directionality of Coupling with Conditional Mutual Information*, in: *Phys Rev. E*, Vol. 77 (2008), S. 026214.
- [28] B. Kralemann, L. Cimponeriu, M. Rosenblum, A. Pikovsky, R. Mrowka, *Uncovering Interaction of Coupled Oscillators from Data*, *Physical Review E*, Vol. 76 (2007), S. 055201.
- [29] B. Kralemann, L. Cimponeriu, M. Rosenblum, A. Pikovsky, R. Mrowka, *Phase Dynamics of Coupled Oscillators Reconstructed from Data*, *Physical Review E*, Vol. 77 (2008), S. 066205.
- [30] A. Pikovsky, R. Rosenblum, *Phase Synchronization of Regular and Chaotic Self-Sustained Oscillators*, in: A. Pikovsky, Y. Maistrenko (Hrsg.), *Synchronization: Theory and Application*, Kluwer: Dordrecht (2003), S. 187-219.
- [31] H. Nyquist, *Certain Topics in Telegraph Transmission Theory*, in: *Trans. Amer. Inst. Elect. Eng.*, Vol. 47 (1928), S. 617-644.
- [32] C.E. Shannon, *Communication in the Presence of Noise*, in: *Proc. IRE*, Vol. 37, Bd. 1 (1949).
- [33] D. Gabor, *Theory of Communication*, in: *J. IEE (London)*, Vol. 93, Bd. 3 (1946), S. 429-457.
- [34] M. Rosenblum, J. Kurths, *Analysing Synchronization Phenomena from Bivariate Data by Means of the Hilbert Transform*, in: H. Kantz, J. Kurths, G. Mayer-Kress (Hrsg.), *Nonlinear Analysis of Physiological Data*, Springer: Berlin (1998), S. 91-99.
- [35] B. Boashash, *Estimating and Interpreting the Instantaneous Frequency of a Signal*, in: *Proc. IEEE*, Vol. 80, Bd. 4 (1992), S. 520-568.
- [36] A. Pikovsky, M. Rosenblum, G. Osipov, J. Kurths, *Phase Synchronization of Chaotic Oscillators by External Driving*, in: *Physica D*, Vol. 104 (1997), S. 219-238.

- [37] G.V. Osipov, B. Hu, C. Zhou, M. Ivanchenko, J. Kurths, *Three Types of Transitions to Phase Synchronization in Coupled Chaotic Oscillators*, in: Physical Review Letters, Vol. 91, Bd. 2 (2003), S. 024101(4).
- [38] A.G. Rossberg, K. Bartholomé, J. Timmer, *Data-Driven Filtering for Phase and Frequency of Noisy Oscillations: Application to Vortex Flow Metering*, in: Physical Review E, Vol. 69 (2004), S. 016216.
- [39] Quian Quiroga, R. Kraskov, T. Kreuz, P. Grassberger, *Performance of Different Synchronization Measures in Real Data: A case Study on Electroencephalographic Signals*, in: Phys. Rev. E, Vol. 65 (2002), S. 041903.
- [40] A.E. Hramov, A.A. Korovskii, V.I. Ponomarenko, M.D. Prokhorov, *Detecting Synchronization of Self-Sustained Oscillators by External Driving with Varying Frequency*, in: Phys. Rev. E, Vol. 73 (2006), S. 026208.
- [41] E. Rodriguez, N. George, J.-P. Lachaux, J. Martinerie, B. Renault, F.J. Varela, *Perception's Shadow: Long Distance Synchronization of Human Brain Activity*, in: Nature, Vol. 397(4) (1999), S. 430-433.
- [42] M. Rosenblum, A. Pikovsky, J. Kurths, C. Schaefer, P. Tass, *Phase Synchronization: From Theory to Data Analysis*, in: F. Moss, S. Gielen (Hrsg.), *Handbook of Biological Physics - Vol. 4 Neuro-Informatics and Neuronal Modeling*, Elsevier Sciences: Amsterdam (2001), Kapitel 9, S. 279-321.
- [43] M. Rosenblum, A. Pikovsky, *Detecting Direction of Coupling in Interacting Oscillators*, Physical Review E, Vol. 64 (2001), S. 045202.
- [44] L. Cimponeriu, M. Rosenblum, A. Pikovsky, *Estimation of Delay in Coupling from Time Series*, in: Physical Review E, Vol. 70 (2004), S. 046213.
- [45] J. Hindmarsh, R. Rose, *A Model of Neuronal Bursting Using Three Coupled First-Order Differential Equations*, in: Proc. Roy. Soc. London B, Vol. 221 (1984), S. 87-102.
- [46] N. Huang, Z. Shen, S. Long, M. Wu, H. Shin, Q. Zeng, N.-C. Yen, C. Tung, H. Liu *The Empirical Mode Decomposition and the Hilbert Spectrum for Nonlinear and Non-Stationary Time Series analysis*, in: Proceedings of the Royal Society Lond. A, Vol. 454 (1998), S. 903-995.
- [47] P. McSharry, G. Clifford, L. Tarassenko, L. Smith, *A Dynamical Model for Generating Synthetic Electrocardiogram Signals*, in: IEEE Transactions on biomedical engineering, Vol. 50, Bd. 3 (2003), S. 289-294.

- [48] H. Kantz, T. Schreiber, *Human ECG: Nonlinear Deterministic Versus Stochastic Aspects*, in: IEE Proc.Sci. Meas.Technol., Vol. 145, Bd. 6 (1998), S. 279-284.
- [49] R. Schmidt, *Neuro- und Sinnesphysiologie*, Springer Verlag: Berlin, 2. Auflage (1995).
- [50] A. Winfree, *Biological Rhythms and the Behavior of Populations of Coupled Oscillators*. J. Theor. Biol., Vol. 16 (1967), S. 15-42.
- [51] G. Ludwig, *Beiträge zur Kenntnis des Einflusses der Respirationsbewegung auf den Blutlauf im Aortensystem*, Arch. Anat. Physiol., Vol. 13 (1847), S.242-302.
- [52] P. Kohl, U. Ravens, *Cardiac Mechano-Electric Feedback: Past, Present, and Prospect*, in: Progress in Biophysics & Molecular Biology, Vol. 82 (2003), S. 3-9.
- [53] B. Cassadei, J. Moon, J. Johnston, A. Caiazza, P. Sleight, *Is Respiratory Sinus Arrhythmia a Good Index of Cardiac Vagal Tone in Exercise?*, in: J. Appl. Physiol., Vol. 81 (1996), S. 556-564.
- [54] D. Slovut, J. Wenstrom, R. Moeckel, R. Wilson, J. Osborn, J. Abrams, *Respiratory Sinus Dysrhythmia Persists in Transplanted Human Hearts Following Autonomic Blockade*, in: Clin. Exp. Pharmacol. Physiol., Vol. 25 (1998), S. 322-330.
- [55] F. Bainbridge, *The Influence of Venous Filling Upon the Rate of the Heart*, in: J. Physiol., Vol. 50 (1915), S. 65-84.
- [56] K. Deck, *Dehnungseffekte am spontan schlagenden, isolierten Sinusknoten*, in: Pflügers Arch., Vol. 280 (1964), S. 120-130.
- [57] P. Cooper, M. Lei, L.-X. Cheng, P. Kohl, *Axial Stretch Increases Spontaneous Pacemaker Activity in Rabbit Isolated Sinonatrial Node Cells.*, in: J. Appl. Physiol., Vol. 89 (2000), S. 2099-2104.
- [58] M. Piepoli, P. Sleight, S. Leuzzi, F. Valle, G. Spadacini, C. Passino, J. Johnston, L. Bernardi, *Origin of Respiratory Sinus Arrhythmia in Conscious Humans An Important Role for Arterial Carotid Baroreceptors*, in: Circulation, Vol. 95 (1997), S.1813-1821.
- [59] I. Bronstein, K. Semendjajew, G. Musiol, H. Muehlig, *Taschenbuch der Mathematik*, Verlag Harry Deutsch, 5. Auflage (2001).
- [60] P. Panter, *Modulation, Noise, and Spectral Analysis*, New York, McGraw-Hill Book Company: San Francisco, Toronto (1965).

- [61] R. Beerends, H. Morsche, J. van den Berg, E. van de Vrie, *Fourier and Laplace Transform*, Cambridge University Press (2003).

Anhang A

Sample Theorem für interpolierte Phasen

Eine monotone Protophase kann immer als Summe eines strikt linearen Terms und einer Funktion $f(t)$, die die Abweichung von der linearen Entwicklung beschreibt, dargestellt werden:

$$\theta(t) = \omega_0 t + f(t).$$

Der Definition der Phase nach ist sämtliche Information über die Kopplung von Oszillatoren in der Funktion $f(t)$ enthalten - d.h. die Qualität der Phasenmodelle hängt unmittelbar von der Qualität der Rekonstruktion der Funktion $f(t)$ aus den Daten ab. Während die Bestimmung des linearen Terms unproblematisch ist, hängt die Rekonstruktion von $f(t)$ von der Samplerate ab, mit der θ aus den Daten bestimmt wird. Um diesen Effekt zu analysieren, wird das Sampeln als Multiplikation des originalen Signals $f(t)$ mit einem Zug von gleichmäßig verteilten Pulsen,

$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n\tau),$$

die im Zeitabstand τ auftreten, aufgefasst [60]. Im Fall der linearen Interpolation von Protophasen auf der Grundlage markierter Ereignisse entspricht τ dem durchschnittlichen Abstand zwischen diesen Ereignissen - also der Periodenlänge T . Das gesampelte Signal ist dann

$$f_s(n) = f(n\tau).$$

Der Prozess der Interpolation, der von den diskreten Samplen $f_s(n)$ zurück zu einer kontinuierlichen Funktion führt, kann als Faltung von $f_s(n)$ mit einem Low-Pass Filter

$$l(t) = \frac{\tau \sin(\pi \frac{t}{\tau})}{\pi t},$$

mit der Bandweite $B = \frac{1}{2\tau}$ aufgefasst werden [60], so dass die interpolierte Funktion durch

$$f_i(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n\tau) \frac{\tau \sin(\pi \frac{t-n\tau}{\tau})}{\pi(t-n\tau)}$$

gegeben ist. Die interpolierte Funktion ist daher die Faltung einer Funktion mit dem Produkt zweier Funktionen:

$$f_i(t) = l(t) * (f(t) \cdot p(t)). \quad (\text{A.1})$$

Die Fouriertransformierte von $f(t)$ wird als $F(\omega)$ bezeichnet und für die Frequenz des Oszillators gilt $\omega_0 = \frac{2\pi}{\tau} = \frac{2\pi}{T}$, während die Fouriertransformierte der Pulse durch

$$P(\omega) = \omega_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_0)$$

gegeben ist [60] und die des Low-Pass Filters durch eine spektrale Fensterfunktion

$$L(\omega) = \begin{cases} \tau \Leftrightarrow |\omega| \leq \frac{\omega_0}{2} \\ 0 \Leftrightarrow |\omega| > \frac{\omega_0}{2}. \end{cases}$$

Die Fouriertransformierte der gesampelten Funktion kann dann durch die Vertauschung von Faltung und Multiplikation der Fouriertransformierten in Gl. (A.1) berechnet werden:

$$F_s(\omega) = \frac{1}{2\pi} F(\omega) * P(\omega) = \frac{1}{\tau} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(\omega - n\omega_0). \quad (\text{A.2})$$

Diese Funktion ist eine Superposition von Replikationen von $F(\omega)$, die ihren Mittelpunkt jeweils bei $\omega = n\omega_0$ haben. Aufeinanderfolgende Replikationen können nur getrennt werden bzw. überschneiden sich nur dann nicht, wenn $F(\omega > \frac{\omega_0}{2}) = 0$ gilt. Die Fouriertransformierte der interpolierten Funktion $f_i(t)$ kann aus Gl. (A.2) durch Multiplikation mit $L(\omega)$ bestimmt werden:

$$F_i(\omega) = \begin{cases} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(\omega - n\omega_0) \Leftrightarrow |\omega| \leq \frac{\omega_0}{2} \\ 0 \Leftrightarrow |\omega| > \frac{\omega_0}{2}. \end{cases} \quad (\text{A.3})$$

Auf der Grundlage dieses Ergebnisses kann der Effekt der Berechnung der Protophase aus der Interpolation diskutiert werden. Aus Gl. (A.2) ist klar, dass unterschiedliche Replikationen sich nur für $F(\omega > \frac{\omega_0}{2}) = 0$ nicht überschneiden, während Gl. (A.3) zeigt, dass im Fall trennbarer Replikationen die Fouriertransformierte des ursprünglichen Signals $F(\omega)$ exakt rekonstruiert werden kann, weil alle Replikationen außer derjenigen bei $n = 0$ durch die Multiplikation mit der Fensterfunktion eliminiert werden. Daraus ergibt sich eine Version des Nyquist-Shannon Theorems für die Rekonstruktion von Protophasen durch die Interpolation zwischen markierten Ereignissen: Wenn die Protophasen Abweichungen vom linearen Wachstum,

$$\theta(t) = \omega_0 \cdot t + f(t),$$

aufweisen, können die Abweichungen $f(t)$ nur dann exakt rekonstruiert werden, wenn $f(t)$ keine Frequenzanteile aufweist, die größer als die halbe durchschnittliche Frequenz der Protophase sind:

$$F(|\omega| > \frac{\omega_0}{2}) = 0. \quad (\text{A.4})$$

Des Weiteren tritt für den Fall, dass diese Bedingung verletzt wird, der Effekt des *Aliasing* [61] auf, weil Anteile der zweiten Replikation in das Fenster hineinreichen und dort die zentrale Replikation überlagern und so Frequenzkomponenten erzeugen, die im Originalsignal nicht vorhanden sind. Diese Methode schneidet demnach Frequenzanteile, die größer als $\frac{\omega_0}{2}$ sind, ab und erzeugt Artefakte.

Ein einfacher und intuitiver Weg, um diese Einschränkungen zu umgehen oder den Effekt zu reduzieren, besteht darin, mehr als ein markiertes Ereignis pro Periode für die Interpolation zu verwenden. Wird mit N_E die Anzahl der markierten Ereignisse pro Periode und mit T_n wieder die Zeitpunkte der Ereignisse bezeichnet, dann ist die Protophase durch

$$\Theta(t) = \left(2\pi \frac{t - T_n}{T_{n+1} - T_n} + 2\pi n \right) \frac{1}{N_E} \quad T_n < t < T_{n+1}, \quad (\text{A.5})$$

gegeben. Es sei darauf hingewiesen, dass im Fall, dass die markierten Ereignisse nicht äquidistant sind, $\Theta(t)$ auch auf Grund dieser Definition von einem linearen Verlauf abweicht. Dieses Problem wird durch die Phasentransformation, Abschnitt 3, gelöst.

Anhang B

Berechnung der Koeffizienten der Fourierreihen

In diesem Abschnitt werden zwei Möglichkeiten beschrieben, um die Dynamik der Phasen bzw. der Protophasen explizit als Funktionen der Phase bzw. Protophase in Form von Summen von Exponentialfunktionen darzustellen. Wenn die Zeitreihen $\Theta_1(t), \Theta_2(t)$ gegeben sind, besteht die erste Möglichkeit in der Minimierung des RMS-Fehlers, also der Differenz zwischen der Ableitung der $\dot{\Theta}_1(t)$ und ihrer Darstellung als Summe von Exponentialfunktionen:

$$ER = \int_0^T \left(\dot{\Theta}_1(t) - \sum_{n,m} F_{n,m} e^{i(n\Theta_1(t)+m\Theta_2(t))} \right)^2 dt = \min . \quad (\text{B.1})$$

Um das Minimierungsproblem zu lösen, müssen die $F_{n,m}$ so bestimmt werden, dass alle partiellen Ableitungen des Fehlers nach den Koeffizienten $F_{n,m}$ Null sind,

$$\frac{\partial ER}{\partial F_{rs}} = -2 \int_0^T \left(\dot{\Theta}_1(t) - \sum_{n,m} F_{nm} e^{i(n\Theta_1(t)+m\Theta_2(t))} \right) e^{-i(r\Theta_1(t)+s\Theta_2(t))} dt \equiv 0 ,$$

was zu den Relationen

$$\frac{\int_0^T \dot{\Theta}_1(t) e^{-i(r\Theta_1(t)+s\Theta_2(t))} dt}{T} = \sum_{n,m} F_{nm} \frac{\int_0^T e^{i((n-r)\Theta_1(t)+(m-s)\Theta_2(t))} dt}{T} \quad (\text{B.2})$$

führt. Das Integral auf der linken Seite sei als

$$\beta_{r,s} = \frac{\int_0^T \dot{\Theta}_1(t) e^{-i(r\Theta_1(t)+s\Theta_2(t))} dt}{T} \quad (\text{B.3})$$

bezeichnet - hier gilt $\beta_{r,s} = \beta_{-r,-s}^*$; dasjenige auf der rechten Seite als

$$\gamma_{(n-r),(m-s)} = \frac{\int_0^T e^{i((n-r)\Theta_1(t)+(m-s)\Theta_2(t))} dt}{T} . \quad (\text{B.4})$$

Der absolute Wert von $\gamma_{(n-r),(m-s)}$ ist als Synchronisationsindex [42] bekannt, und es gilt $\gamma_{(n-r),(m-s)} = \gamma_{(r-n),(s-m)}^*$. Mit Gl. (B.3) und Gl. (B.4) lässt sich Gl. (B.2) als lineares Gleichungssystem

$$\beta_{r,s} = \sum_{n,m} F_{nm} \gamma_{(n-r),(m-s)} \quad (\text{B.5})$$

schreiben und leicht lösen, um die Koeffizienten $F_{n,m}$ zu erhalten, so dass dann die Protodynamik bzw. Phasendynamik explizit durch

$$\dot{\theta}(\theta_1, \theta_2) = \sum_{n,m} F_{n,m} e^{i(n\theta_1 + m\theta_2)} \quad (\text{B.6})$$

gegeben ist.

Als zweite Möglichkeit geht man von der Wahrscheinlichkeitsverteilung

$$\rho(\theta_1, \theta_2) = \frac{1}{T} \int_0^T \delta(\Theta_1(t) - \theta_1) \delta(\Theta_2(t) - \theta_2) dt \quad (\text{B.7})$$

aus, die gleichermaßen als Summe von Exponentialfunktionen repräsentiert wird:

$$\rho(\theta_1, \theta_2) = \sum_{n,m} R_{nm} e^{in\theta_1 + im\theta_2}, \quad (\text{B.8})$$

$$R_{nm} = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \rho(\theta_1, \theta_2) e^{-in\theta_1 - im\theta_2} d\theta_1 d\theta_2. \quad (\text{B.9})$$

Die Koeffizienten $R_{n,m}$ können nach dem Einsetzen von Gl. (B.7) durch

$$R_{n,m} = \frac{1}{T(2\pi)^2} \int_0^T dt e^{-in\Theta_1(t) - im\Theta_2(t)} \quad (\text{B.10})$$

bestimmt werden. Der Vergleich mit Gl. (B.4) zeigt, dass die Wahrscheinlichkeitsverteilung $\rho(\theta_1, \theta_2)$ ebenfalls durch die Synchronisationsindices $\gamma_{n,m}$ bestimmt ist und

$$R_{n,m} = \frac{1}{4\pi^2} \gamma_{-n,-m} \quad (\text{B.11})$$

gilt. Gl. (B.5) ist eine Faltung der Koeffizienten, was einer Multiplikation der entsprechenden Funktionen,

$$\sum_{r,s} \beta_{r,s} e^{i(r\theta_1 + s\theta_2)} = \left(\sum_{n,m} F_{n,m} e^{i(n\theta_1 + m\theta_2)} \right) \left(\sum_{k,l} \gamma_{-k,-l} e^{i(k\theta_1 + l\theta_2)} \right), \quad (\text{B.12})$$

entspricht und sich durch Ausführen der Multiplikation und das Zuordnen gleicher Exponentialfunktionen auf beiden Seiten nachprüfen lässt. Mit Gl. (B.9) folgt dann

$$\sum_{n,m} F_{n,m} e^{i(n\theta_1 + m\theta_2)} = \frac{\sum_{r,s} \beta_{r,s} e^{i(r\theta_1 + s\theta_2)}}{\sum_{k,l} \gamma_{-k,-l} e^{i(k\theta_1 + l\theta_2)}}. \quad (\text{B.13})$$

Alternativ lässt sich also die Phasendynamik bzw. die Protodynamik durch

$$\dot{\theta}(\theta_1, \theta_2) = \frac{\sum_{r,s} \beta_{r,s} e^{i(r\theta_1 + s\theta_2)}}{4\pi^2 \rho(\theta_1, \theta_2)} \quad (\text{B.14})$$

ausdrücken, ohne die Koeffizienten $F_{n,m}$ explizit zu berechnen, indem die Wahrscheinlichkeitsverteilung, Gl. (B.9), mit den Koeffizienten $R_{n,m}$, Gl. (B.10), und die Koeffizienten $\beta_{r,s}$ über Gl.(B.3) bestimmt werden. Wenn die Phasen linear in der Zeit sind, sind die Synchronisationsindices $\gamma_{n,m} = 0$ und die Wahrscheinlichkeitsverteilung ist konstant. In diesem Fall wird Gl. (B.14) zu einer gewöhnlichen Fourierreihe und Gl. (B.5) führt zu $F_{n,m} = \beta_{n,m}$, so dass mit Gl. (B.3) die Koeffizienten $F_{n,m}$ gleichermaßen als die einer Fourierreihe bestimmt werden.

Anhang C

Lösung des Gleichungssystems der Phasentransformation

Das Gleichungssystem Gl. (4.10), Gl. (4.11), Gl. (4.12), Gl. (4.13) kann auf zwei Weisen gelöst werden: Erstens durch eine Iteration, die eine explizit auf einem Gitter gegebene Protophasendynamik verwendet, und zweitens durch eine Berechnung auf der Basis der in Gl. (B.6) explizit gegebenen Koeffizienten $F_{n,m}$.

C.1 Iteration

Die erste Methode löst das Gleichungssystem Gl. (4.10), Gl. (4.11), Gl. (4.12), Gl. (4.13) iterativ, um ω_1 , ω_2 , $\sigma^{(1)}(\theta_1)$, $\sigma^{(2)}(\theta_2)$ zu bestimmen, und setzt lediglich voraus, dass die Protophasendynamiken $f^{(1,2)}$ explizit als Funktionen auf einem 2-dimensionalen Gitter gegeben sind. Wenn die Iteration mit dem oberen Index $\sigma^{(k)}$ und der Index des Oszillators mit einem unteren Index $\sigma_{(1)}(\theta_1)$, $\sigma_{(2)}(\theta_2)$ bezeichnet wird, ergibt sich das Iterationsschema

$$\begin{aligned}\frac{1}{\omega_1^{(k+1)}} &= \int_0^{2\pi} \frac{2\pi}{\int_0^{2\pi} f^{(1)}(\theta_1, \theta_2) \sigma_{(2)}^{(k)}(\theta_2) d\theta_2} d\theta_1, \\ \frac{1}{\omega_2^{(k+1)}} &= \int_0^{2\pi} \frac{2\pi}{\int_0^{2\pi} f^{(2)}(\theta_2, \theta_1) \sigma_{(1)}^{(k)}(\theta_1) d\theta_1} d\theta_2, \\ \sigma_{(1)}^{(k+1)}(\theta_1) &= \frac{4\pi^2 \omega_1^{(k+1)}}{\int_0^{2\pi} f^{(1)}(\theta_1, \theta_2) \sigma_{(2)}^{(k)}(\theta_2) d\theta_2}, \\ \sigma_{(2)}^{(k+1)}(\theta_2) &= \frac{4\pi^2 \omega_2^{(k+1)}}{\int_0^{2\pi} f^{(2)}(\theta_2, \theta_1) \sigma_{(1)}^{(k)}(\theta_1) d\theta_1},\end{aligned}\tag{C.1}$$

das gegen die gesuchte Lösung konvergiert, wenn man mit der Identitäts-Transformation

$$\sigma_{(1)}^0(\theta_1) = \sigma_{(2)}^0(\theta_2) = 1$$

beginnt.

C.2 Analytische Berechnung der Koeffizienten

In der zweiten Variante werden die Transformationen $\sigma^{(i)}(\theta_i)$ explizit als Fourierreihen,

$$\sigma^{(1)}(\theta_1) = \sum_n S_n^{(1)} e^{in\theta_1}, \quad \sigma^{(2)}(\theta_2) = \sum_m S_m^{(2)} e^{im\theta_2}, \quad (\text{C.2})$$

geschrieben und die explizite Darstellung der Protophasendynamik,

$$f^{(1,2)}(\theta_1, \theta_2) = \sum_{lk} F_{lk}^{(1,2)} e^{il\theta_1 + ik\theta_2}, \quad (\text{C.3})$$

nach Gl. (B.6) verwendet. Diese expliziten Darstellungen der Funktionen werden in Gl. (4.10) und G. (4.11) eingesetzt und man erhält nach der Integration

$$\begin{aligned} \sum_{n,m} S_n^{(1)} S_m^{(2)} F_{j-n,-m}^{(1)} &= \omega_1 \delta_{j,0}, \\ \sum_{n,m} S_n^{(1)} S_m^{(2)} F_{-n,j-m}^{(2)} &= \omega_2 \delta_{j,0}. \end{aligned} \quad (\text{C.4})$$

An Stelle der Normalisierungsbedingung wird hier der äquivalente Zusammenhang $S_0^{(1)} = S_0^{(2)} = 1$ verwendet, so dass sich das Gleichungssystem Gl. (C.4) z.B. durch den MATLAB Algorithmus *fsolve* numerisch lösen lässt.

Anhang D

Phasentransformation für drei Oszillatoren

Wenn die Protophasen $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ von drei wechselwirkenden Oszillatoren gegeben sind, die jeweils durch die Protophasendynamik

$$\dot{\theta}_1 = f^{(1)}(\theta_1, \theta_2, \theta_3), \quad \dot{\theta}_2 = f^{(2)}(\theta_2, \theta_3, \theta_1), \quad \dot{\theta}_3 = f^{(3)}(\theta_3, \theta_2, \theta_1) \quad (\text{D.1})$$

beschrieben werden, können diese zu Phasen transformiert werden, die der Phasendynamik

$$\begin{aligned} \dot{\phi}_1 &= \omega_1 + q^{(1)}(\phi_1, \phi_2, \phi_3), \\ \dot{\phi}_2 &= \omega_2 + q^{(2)}(\phi_2, \phi_3, \phi_1), \\ \dot{\phi}_3 &= \omega_3 + q^{(3)}(\phi_3, \phi_2, \phi_1) \end{aligned} \quad (\text{D.2})$$

gehorschen. Wie im Fall zweier gekoppelter Oszillatoren, wird als definierende Bedingung der Phasendynamik angenommen, dass ihre Kopplungsterme immer auch von wenigstens einer der externen Phasen periodisch abhängen müssen, so dass das Integral über die externen Phasen Null ergibt:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} q^{(1)}(\phi_1, \phi_2, \phi_3) d\phi_2 d\phi_3 &= 0, \\ \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} q^{(2)}(\phi_2, \phi_3, \phi_1) d\phi_3 d\phi_1 &= 0, \\ \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} q^{(3)}(\phi_3, \phi_2, \phi_1) d\phi_1 d\phi_2 &= 0. \end{aligned} \quad (\text{D.3})$$

Mit dieser Annahme führt die Integration über Gl. (D.2) zu

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \dot{\phi}_1 d\phi_2 d\phi_3 &= \omega_1, \\ \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \dot{\phi}_2 d\phi_3 d\phi_1 &= \omega_2, \\ \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \dot{\phi}_3 d\phi_1 d\phi_2 &= \omega_3. \end{aligned} \quad (\text{D.4})$$

Analog dem Fall zweier Oszillatoren werden drei Transformationen $\sigma^{(i)}$ definiert:

$$\begin{aligned} d\phi_1 &= \sigma^{(1)}(\theta_1)d\theta_1 & \int_0^{2\pi} \sigma^{(1)}(\theta_1)d\theta_1 &= 2\pi, \\ d\phi_2 &= \sigma^{(2)}(\theta_2)d\theta_2 & \int_0^{2\pi} \sigma^{(2)}(\theta_2)d\theta_2 &= 2\pi, \\ d\phi_3 &= \sigma^{(3)}(\theta_3)d\theta_3 & \int_0^{2\pi} \sigma^{(3)}(\theta_3)d\theta_3 &= 2\pi, \end{aligned} \quad (\text{D.5})$$

für die die angegebenen Normierungen gelten müssen, um die beobachteten Frequenzen Ω_i zu erhalten. Mit Gl.(D.1) führt die Division durch dt zu

$$\dot{\phi}_i = \sigma^{(i)}(\theta_i)\dot{\theta}_i = \sigma^{(i)}(\theta_i)f^{(i)},$$

woraus sich durch Einsetzen in Gl. (D.4) und durch Austausch der Integrationsvariablen mit Gl. (D.5)

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \sigma^{(1)}(\theta_1)f^{(1)}(\theta_1, \theta_2, \theta_3)\sigma^{(2)}(\theta_2)\sigma^{(3)}(\theta_3)d\theta_2d\theta_3 &= \omega_1, \\ \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \sigma^{(2)}(\theta_2)f^{(2)}(\theta_2, \theta_3, \theta_1)\sigma^{(3)}(\theta_3)\sigma^{(1)}(\theta_1)d\theta_3d\theta_1 &= \omega_2, \\ \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \sigma^{(3)}(\theta_3)f^{(3)}(\theta_3, \theta_1, \theta_2)\sigma^{(1)}(\theta_1)\sigma^{(2)}(\theta_2)d\theta_1d\theta_2 &= \omega_3 \end{aligned}$$

ergibt. Dieses Gleichungssystem kann in der Form

$$\begin{aligned} \sigma^{(1)}(\theta_1) &= \frac{4\pi^2\omega_1}{\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f^{(1)}(\theta_1, \theta_2, \theta_3)\sigma^{(2)}(\theta_2)\sigma^{(3)}(\theta_3)d\theta_2d\theta_3}, \\ \sigma^{(2)}(\theta_2) &= \frac{4\pi^2\omega_2}{\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f^{(2)}(\theta_2, \theta_3, \theta_1)\sigma^{(3)}(\theta_3)\sigma^{(1)}(\theta_1)d\theta_3d\theta_1}, \\ \sigma^{(3)}(\theta_3) &= \frac{4\pi^2\omega_3}{\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f^{(3)}(\theta_3, \theta_1, \theta_2)\sigma^{(1)}(\theta_1)\sigma^{(2)}(\theta_2)d\theta_1d\theta_2} \end{aligned} \quad (\text{D.6})$$

geschrieben werden, während die Konstanten ω_i durch die Normalisierungsbedingung in Gl. (D.5) bestimmt werden:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\omega_1} &= \int_0^{2\pi} \frac{2\pi}{\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f^{(1)}(\theta_1, \theta_2, \theta_3)\sigma^{(2)}(\theta_2)\sigma^{(3)}(\theta_3)d\theta_2d\theta_3} d\theta_1, \\ \frac{1}{\omega_2} &= \int_0^{2\pi} \frac{2\pi}{\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f^{(2)}(\theta_2, \theta_3, \theta_1)\sigma^{(3)}(\theta_3)\sigma^{(1)}(\theta_1)d\theta_3d\theta_1} d\theta_2, \\ \frac{1}{\omega_3} &= \int_0^{2\pi} \frac{2\pi}{\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f^{(3)}(\theta_3, \theta_1, \theta_2)\sigma^{(1)}(\theta_1)\sigma^{(2)}(\theta_2)d\theta_1d\theta_2} d\theta_3. \end{aligned} \quad (\text{D.7})$$

Wie in Appendix C kann das geschlossene Gleichungssystem, Gl. (D.6), Gl. (D.7), auf zwei Weisen gelöst werden, wenn die Protphasendynamiken $f^{(1)}$, $f^{(2)}$, $f^{(3)}$ gegeben sind, um die unbekanntes ω_1 , ω_2 , ω_3 und die Transformationen $\sigma^{(1)}$, $\sigma^{(2)}$, $\sigma^{(3)}$ zu erhalten.