Construction de Triplets Spectraux à Partir de Modules de Fredholm

Elmar SCHROHE, Markus WALZE[1] et Jan-Martin WARZECHA

Institut für Mathematik, Universität Potsdam, 14415 Potsdam, Allemagne
IHES, 35, route de Chartres, 91440 Bures-sur-Yvette, France
Institut für Physik, Johannes Gutenberg-Universität Mainz, 55099 Mainz, Allemagne

Résumé – Soit $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, F)$ un module de Fredholm p-sommable, où l'algèbre $\mathcal{A} = \mathbb{C}\Gamma$ est engendrée par un groupe discret Γ d'éléments unitaires de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ qui est de croissance polynomiale r. On construit alors un triplet spectral $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, D)$ de sommabilité q pour tout $q > p + r + 1$ avec $F = \text{sign}\, D$. Dans le cas où $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, F)$ est (p, ∞)-sommable on obtient la (q, ∞)-sommabilité de $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, D)$ pour tout $q > p + r + 1$.

Abstract – Let $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, F)$ be a p-summable Fredholm module where the algebra $\mathcal{A} = \mathbb{C}\Gamma$ is generated by a discrete group of unitaries in $\mathcal{L}(H)$ which is of polynomial growth r. Then we construct a spectral triple $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, D)$ with $F = \text{sign}\, D$ which is q-summable for each $q > p+r+1$. In case $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, F)$ is (p, ∞)-summable we obtain (q, ∞)-summability of $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, D)$ for each $q > p + r + 1$.

Abridged English Version

In [2, Théorème 3] A. Connes showed the following theorem which we quote as stated in [3, IV. Theorem 4]:

Theorem. *Let A be a C^*-algebra, $(\mathcal{H}, F)$ a Fredholm module over A and $\mathcal{A} \subseteq A$ a countably generated subalgebra such that, for each $a \in \mathcal{A}$,*

$$[F, a] \in \mathrm{Li}^{1/2}(\mathcal{H}). \tag{1}$$

Then there exists a self-adjoint unbounded operator D in $\mathcal{H}$ such that

(D1) $\mathrm{Sign}\, D = F$,

(D2) $[D, a]$ *is bounded for any* $a \in \mathcal{A}$,

(D3) $\mathrm{Trace}\,(e^{-D^2}) < \infty$.

Here, $\mathrm{Li}^{1/2}(\mathcal{H})$ is the ideal of all compact operators on $\mathcal{H}$ whose singular values $\{\mu_n\}_{n=0}^{\infty}$ satisfy $\mu_n = O((\log n)^{-1/2})$ as $n \to \infty$. Similarly $\mathrm{Li}(\mathcal{H})$ is characterized by the property $\mu_n = O((\log n)^{-1})$. The algebra $B = \{T \in A : [F, T] \in \mathrm{Li}^{1/2}(\mathcal{H})\}$ is symmetric and stable under holomorphic functional calculus so that one can enlarge $\mathcal{A}$ and assume that it is generated by a countable discrete group of unitaries, Γ.

[1] supporté par la bourse 'TMR Marie Curie Research Training Grants' contract No. ERBFMBICT961518

For simplicity we shall start from this point of view. We suppose that $\mathcal{A} = \mathbb{C}\Gamma$, where Γ is a discrete group of unitaries in $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ which is of polynomial growth r. Moreover, we assume that $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, F)$ is a p-summable (respectively (p, ∞)-summable) Fredholm module over $\mathcal{A}$, i. e.,

$$[F, a] \in \mathcal{L}^p(\mathcal{H}) \qquad (\text{respectively } \mathcal{L}^{(p,\infty)}(\mathcal{H})) \quad \text{for all } a \in \mathcal{A}. \tag{2}$$

We show that we can find an unbounded self-adjoint operator D satisfying (D1), (D2), and, for each $q > p + r + 1$,

(D3') $(1 + D^2)^{-q/2} \in \mathcal{L}^1(\mathcal{H})$ or

(D3") $(1 + D^2)^{-q/2} \in \mathcal{L}^{(1,\infty)}(\mathcal{H})$, respectively.

The triple $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, D)$ is called a q-summable spectral triple (and (q, ∞)-summable in case (D3")). Spectral triples are sometimes called *unbounded Fredholm modules*.

Our proof essentially follows the original idea of Connes; additional ingredients are

- a characterization of those selfadjoint operators $|D|$ for which which both $[|D|, a]$ and $[F, a]|D|$ are bounded (Proposition 3),
- a different function for the nonlinear transformation (see below), and
- a theorem of Rotfel'd to estimate the singular values of D.

If Γ is finitely generated then boundedness of $[D, a]$ will even hold for all $a \in C_1(\Gamma)$, cf. [2, Définition 5].

Nous rappelons qu'une fonction longueur L sur un groupe discret Γ est une application $L : \Gamma \to [0, \infty)$ qui vérifie, pour tous $g, h \in \Gamma$,

$$L(gh) \leq L(g) + L(h), \quad L(g^{-1}) = L(g), \quad L(1) = 0.$$

Si, de plus, le cardinal de l'ensemble $B_k = \{g \in \Gamma : L(g) \leq k\}, k \in \mathbb{N}_0$, est $O((1 + k)^r)$, alors Γ est dit de croissance polynomiale d'ordre r.

Soit $p > 1$ un nombre réel. Un module de Fredholm p-sommable (respectivement (p, ∞)-sommable), est un triplet $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, F)$ où $\mathcal{A}$ est une algèbre unifère, $\mathcal{H}$ est un espace de Hilbert avec une représentation $\pi : \mathcal{A} \to \mathcal{L}(\mathcal{H})$, et $F = F^* \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ est un opérateur satisfaisant $F^2 = I$ et, pour tout $a \in \mathcal{A}$,

$$[F, a] \in \mathcal{L}^p(\mathcal{H}) \quad (\text{resp. } \; [F, a] \in \mathcal{L}^{(p,\infty)}(\mathcal{H})). \tag{3}$$

On parle d'un module de Fredholm θ-sommable, si (3) est remplacé par (1).

Un triplet spectral p-sommable (respectivement (p, ∞)-sommable) $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, D)$ est constitué d'une algèbre unifère $\mathcal{A}$, représenté sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$, et d'un opérateur autoadjoint D à résolvante compacte tel que, pour tout $a \in \mathcal{A}$,

$$[D, a] \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$$

et

$$(1 + D^2)^{-p/2} \in \mathcal{L}^1(\mathcal{H}) \quad (\text{resp. } (1 + D^2)^{-p/2} \in \mathcal{L}^{(1,\infty)}(\mathcal{H})). \tag{4}$$

Si la condition (4) est remplacée par

$$e^{-D^2} \in \mathcal{L}^1(\mathcal{H})$$

on parle de θ-sommabilité.

1. Proposition. *Soit $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, D)$ un triplet spectral et $F = \operatorname{sign} D$. Alors $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, F)$ est un module de Fredholm. Si $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, D)$ est p-sommable (resp. (p, ∞)-sommable, resp. θ-sommable) alors $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, F)$ est p-sommable (resp. (p, ∞)-sommable, resp. θ-sommable).*

Démonstration. Sans restreindre le cas général on peut supposer que D est inversible. En utilisant la formule $T^{-1/2} = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \lambda^{-1/2}(\lambda + T)^{-1}\, d\lambda$ on montre que

$$
\begin{aligned}
[F, a] &= \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \lambda^{-1/2} D[(\lambda + D^2)^{-1}, a]\, d\lambda + [D, a]|D|^{-1} \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \left(\lambda^{1/2}(\lambda + D^2)^{-1}[D, a](\lambda + D^2)^{-1} - \lambda^{-1/2} D(\lambda + D^2)^{-1}[D, a](\lambda + D^2)^{-1} D\right) d\lambda.
\end{aligned}
$$

Puisque tout élément de l'algèbre symétrique $\mathcal{A}$ est la somme d'un élément autoadjoint et d'un élément anti-autoadjoint on peut supposer que $[D, a]$ est autoadjoint.

En utilisant les inégalités $-||[D, a]|| \le [D, a] \le ||[D, a]||$ et la formule pour l'inverse de la racine, on obtient

$$
-||[D, a]|||D|^{-1} \le [F, a] \le ||[D, a]|||D|^{-1}.
$$

De là découle la proposition. □

Réciproquement, Connes [1] et Voiculescu [7] ont montré qu'il existe des obstructions à l'existence de triplets spectraux $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, D)$ de sommabilité finie associés à une algèbre donnée, $\mathcal{A}$. En particulier, si Γ est un groupe discret non-moyennable, alors il n'existe pas de triplet spectral de sommabilité finie associé à une sous-algèbre dense de $C^*_{\mathrm{red}}(\Gamma)$. Il y a même des obstructions pour un groupe resoluble de croissance exponentielle (donc moyennable). D'autre part, si Γ est de type fini et de croissance polynomiale r alors on peut trouver un triplet $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, D)$ pour $\mathcal{A} = \mathbb{C}\Gamma, \mathcal{H} = l^2(\Gamma)$. En effet D est l'opérateur positif agissant par multiplication par la fonction longueur L, et l'on a $(1 + D^2)^{-p/2} \in \mathcal{L}^1(\mathcal{H})$ pour tout $p > r + 1$.

Le résultat principal de cette Note est le théorème suivant.

2. Théorème. *Soit Γ un groupe discret de croissance polynomiale r, représenté par des éléments unitaires sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$. Si $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, F)$ est un module de Fredholm p-sommable (resp. (p, ∞)-sommable) avec $\mathcal{A} = \mathbb{C}\Gamma$, alors il existe un triplet spectral $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, D)$ de sommabilité q (resp. (q, ∞)) pour tout $q > p + r + 1$ tel que $D = F|D|$.*

Pour le cas où Γ est le groupe abelien libre engendré par r éléments il est possible d'obtenir la sommabilité q resp. (q, ∞) pour tout $q > p + r$.

Il est essentiel, ici, que D soit lié à F par $D = F|D|$, sinon on pourrait obtenir une meilleure sommabilité selon les résultats mentionnés ci-dessus.

La démonstration suit l'idée de Connes. On choisit des générateurs $u^1, u^2, \ldots$ de Γ et l'on introduit la “métrique quantique”

$$
G = \sum_k c_k [F, u^k]^* [F, u^k] \tag{5}
$$

avec $c_k \in \mathbb{R}_+$ et $c_k \le 2^{-k}||[F, u^k]||^{-2}$ avec la norme dans $\mathcal{L}^p(\mathcal{H})$ (resp. dans $\mathcal{L}^{(p,\infty)}(\mathcal{H})$).

On construira $|D|$ a partir de G. En effet, on utilisera l'opérateur

$$
\Theta(G) = f^{-1}\mathcal{M} f(G)
$$

avec une moyennisation $\mathcal{M}$ et une transformation non linéaire f; ensuite on posera $D = F|D|$. Pour vérifier que le commutateur $[D, a]$ est borné pour tout $a \in \mathbb{C}\Gamma$, il est donc suffisant que $[|D|, a]$ et $[F, a]|D|$ soient bornés. Nous effectuons une observation importante :

3. Proposition. *Soit T un opérateur autoadjoint inversible (éventuellement non-borné). Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) $[T, a]$ *et* $[F, a]T$ *sont bornés pour tout* $a \in \mathbb{C}\Gamma$.

(ii) *Pour chaque opérateur unitaire* $u \in \Gamma$ *il existe une constante* $C_u > 0$ *telle que*

$$T^{-1}(I - C_u T^{-1}) \leq u T^{-1} u^* \leq T^{-1}(I + C_u T^{-1}).$$

De plus il existe $\lambda > 0$ *tel que* $T^{-2} \geq \lambda G$.

Dans un premier temps, on choisit une fonction $f \in C^\infty[0, \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, avec $f(0) = 0$, f strictement croissante et telle que l'inverse f^{-1} soit une fonction concave et croissante d'opérateurs.

Fixons aussi la fonction de poids $\rho : \Gamma \to (0, 1)$ donnée par $\rho(u) = \exp(-(1 + L(u)))$ et l'opérateur de moyennisation, $\mathcal{M}$, defini par $\mathcal{M}(T) = \sum_{u \in \Gamma} \rho(u) u T u^*$ pour $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. A l'aide de f et $\mathcal{M}$ nous introduisons l'opérateur $\Theta(G) = f^{-1}\mathcal{M}f(G)$.

Il est clair que $\Theta(G)$ est compact et positif. Supposons de plus que $\Theta(G)$ est injectif. Cela nous permet de poser

$$|D| = \Theta(G)^{-1/2} + F\Theta(G)^{-1/2}F$$

et $D = F|D|$ (notons que $[F, |D|] = 0$).

En utilisant la proposition 3 on peut montrer que D a les propriétés désirées pourvu que les trois conditions suivantes soient vérifiées:

(T1) $\Theta(G) \geq \lambda G$ pour un $\lambda > 0$;

(T2) $\Theta(G)^{1/2}(I - C_u\Theta(G)^{1/2}) \leq u\Theta(G)^{1/2}u^* \leq \Theta(G)^{1/2}(I + C_u\Theta(G)^{1/2})$;

(T3) $\Theta(G) \in \mathcal{L}^{q/2}(\mathcal{H})$ (resp. $\Theta(G) \in \mathcal{L}^{(q/2,\infty)}(\mathcal{H})$), $q > p + r + 1$.

La propriété (T1) est aisément démontrée. En revanche, le choix de f est essentiel pour montrer que (T2) et (T3) sont verifiées. Naturellement on essaiera d'atteindre une valeur de q proche de p dans la relation (T3). D'après la proposition 1 on aura $q \geq p$. Cependant, il n'est pas évident de déterminer la valeur minimale de q, et il faut bien choisir f pour obtenir $q > p + r + 1$. Nous utilisons la fonction dont l'inverse est donné par

$$f^{-1}(t) = \left(\operatorname{arcosh}\frac{1}{t}\right)^{-2} = \left(\log\left(\frac{1}{t}\left(1 - \sqrt{1 - t^2}\right)\right)\right)^{-2}.$$

On remarque que

$$f^{-1} \sim (\log t)^{-2}, \qquad t > 0 \quad \text{petit}, \tag{6}$$

par conséquent, les fonctions f^{-1} et f sont croissantes près de zero. Ensuite on utilise la caractérisation de Löwner [4] pour verifier que f^{-1} est une fonction croissante d'opérateurs, c'est-à-dire qu'on démontre que $f^{-1} : [0, \varepsilon) \to \mathbb{R}$ s'étend à une fonction analytique dans le demi-plan $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$. La relation (6) et le fait que f^{-1} est une fonction croissante d'opérateurs entraînent (T2).

Finalement, on designe par $\{\mu_0(T), \mu_1(T), \ldots\}$ les valeurs singulières d'un opérateur compact, T.

Selon un théorème de Rotfel'd [5], la concavité de f^{-1} implique l'inégalité

$$\sum_{m=0}^{N} \mu_m(\Theta(G))^q \leq \sum_{m=0}^{N} \sum_{u\in\Gamma} f^{-1}(\mu_m(\rho(u)uf(G)u^{-1}))^q = \sum_{m=0}^{N} \sum_{u\in\Gamma} f^{-1}(\rho(u)f(\mu_m(G)))^q$$

pour tout $N \in \mathbb{N}$. En utilisant la relation $\rho(u) = \exp(-(1 + L(u)))$, la croissance polynomiale de Γ et le fait que $f^{-1}(t) \sim (\log t)^{-2}$, on en déduit que

$$\sum_m \mu_m(\Theta(G))^q \leq C \sum_m \mu_m(G)^{q-\frac{1}{2}(r+1)}.$$

De cette estimation découle (T3) et donc l'énoncé du théorème.

Il reste à considérer le cas où $\Theta(G)$ a un noyau non trivial dû à $\ker G$. On pose

$$\mathcal{H}_0 = \ker \Theta(G) = \bigcap_{u,v\in\Gamma} \ker([F,u]v) = \bigcap_{u\in\Gamma} \ker([F,u]).$$

Alors on peut écrire $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1$ où $\mathcal{H}_0$ est invariant par $\mathcal{A}$ et F, où $F|_{\mathcal{H}_0}$ commute avec tout $a \in \mathcal{A}$ et où $\Theta(G)$ est injectif sur $\mathcal{H}_1$. La construction de D sur $\mathcal{H}_0$ sera facile: au lieu de G on choisira un élément arbitraire $G_0 \in \mathcal{L}^{p/2}(\mathcal{H}_0)$ (resp. $\mathcal{L}^{(p/2,\infty)}$) qui est strictement positif, ensuite on appliquera la même considération que sur $\mathcal{H}_1$.

4. Remarque. Une construction similaire peut être utilisée dans le cas θ-sommable.

5. Remarque. Il est évident que $[D,a]$ sera borné pour tout a dans la complétion de $\mathbb{C}\Gamma$ pour la norme

$$||a||^{\sim} = ||a||_{\mathcal{L}(H)} + ||[D,a]||_{\mathcal{L}(H)}.$$

Pour Γ de type fini, $[D,b]$ sera borné pour tout $b \in C_1(\Gamma)$, cf. [2, Définition 5], puisque, pour tout $a \in \mathbb{C}\Gamma$, la norme $||[D,a]||$ peut être estimée par $c||a||'$, où $||\cdot||'$ est la norme utilisée dans la construction de $C_1(\Gamma)$ et c est une constante universelle.

Références bibliographiques

[1] A. Connes. Compact metric spaces, Fredholm modules, and hyperfiniteness. *Ergod. Th. & Dynam. Sys.* **9**, 207–220 (1989).

[2] A. Connes. Caractères de représentations θ-sommables des groupes discrets. *C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I Math.* **312**, 661–666 (1991).

[3] A. Connes. *Noncommutative Geometry.* Academic Press, New York, London, Tokyo 1994.

[4] K. Löwner. Über monotone Matrixfunktionen. *Math. Z.* **38**, 177–216 (1934).

[5] S. Yu. Rotfel'd. The singular values of the sum of completely continuous operators. In Sh. Birman, editor, *Spectral Theory. Topics in Mathematical Physics*, vol. 3, pages 73 – 78. Consultants Bureau, New York, London 1963.

[6] E. Schrohe, M. Walze, and J.-M. Warzecha. Lifting bounded Fredholm modules to spectral triples. En préparation.

[7] D. Voiculescu. On the existence of quasicentral approximate units relative to normed ideals. Part I. *J. Funct. Anal.* **91**, 1–36 (1990).

schrohe@mpg-ana.uni-potsdam.de
walze@ihes.fr
warzecha@thep.physik.uni-mainz.de