Produktion unter Risiko

Ein agentenbasiertes, sektorales Partialmodell zur Anwendung in der Nachhaltigkeitsforschung

DISSERTATION

zur Erlangung des akademischen Grades
Doktor der Wirtschafts- und Sozialwissenschaften
(Dr. rer. pol.)
in der Wissenschaftsdisziplin
Volkswirtschaftslehre

Erstgutachter: Prof. Dr. Carlo Jaeger
Zweitgutachter: Prof. Dr. Wilfried Fuhrmann

eingereicht an der
Fakultät für Wirtschafts- und Sozialwissenschaften
der Universität Potsdam
von

Frank Meißner

Potsdam, 20. September 2007

Dieses Werk ist unter einem Creative Commons Lizenzvertrag lizenziert:
Namensnennung - Keine kommerzielle Nutzung - Weitergabe unter gleichen Bedingungen 2.0 Deutschland
Um die Lizenz anzusehen, gehen Sie bitte zu:
http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/2.0/de/

Elektronisch veröffentlicht auf dem
Publikationsserver der Universität Potsdam:
http://opus.kobv.de/ubp/volltexte/2008/1881/
urn:nbn:de:kobv:517-opus-18810
[http://nbn-resolving.de/urn:nbn:de:kobv:517-opus-18810]

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis

Tabellenverzeichnis

Notation

Symbole

$\hat{x}$	Erwartungswert von x
$\tilde{x}$	Schwellenwert von x
$\breve{x}$	Bestand von x
$\breve{x}_{in}$	Anfangsbestand einer Bestandsgröße x
$\mathbf{x}, \bar{\alpha}$	Vektor
$x \sim \mathcal{F}(..)$	x folgt der Verteilung $\mathcal{F}$
ln(x)	Logarithmus zur Basis e

Allgemeine Bezeichnungen

α , β , γ	freie Parameter
f , g , h	Funktionen
i, j	Mengenindizes
m, n, M, N	Mengen
t, $\hat{t}$	Zeitindizes (Optimierungsperioden, Modellperioden)
x, y	freie Variablen

Hochgestellte Indizes

a	Kapitalgut
b	Bond
d	Nachfrage
e	Vorprodukt
s	Angebot

Ökonomische Bezeichnungen

äquivalent zu Kleinbuchstaben, die Mikrogrößen bezeichnen, stehen Großbuchstaben für Makrogrößen bzw. aggregierte Größen

a^{d}	Kapitalgüternachfrage
$\breve{a}$	Kapitalgüterbestand
b^{d}	Bondnachfrage
$\breve{b}$	Bondbestand
e^{d}	Vorproduktnachfrage
$\breve{k}$	Kapitalbestand
l^{d}	Arbeitsnachfrage
m^{q}	Anzahl Konsumgüterproduzenten
m	Anzahl Konkurrenzunternehmen
o	Kosten
p^{a}	Preis einer Kapitalgütereinheit
$p^{\mathrm{e},(j)}$	Preis einer Einheit des Vorproduktes des Vorproduktproduzenten j
p^{q}	Preis einer Einheit generischen Gutes
q^{d}	Konsumgüternachfrage
q^{s}	Konsumgüterangebot
r	Gewinn
u	Umsatz
v	Cash Flow
w	Lohnsatz

ι^{b}	Zins
κ	notwendiger Anteil an Vorprodukten für Herstellung einer Konsumgütereinheit
λ	Parameter der Arbeitsnachfragefunktion
ω	Kostensatz
ψ	Abschreibungssatz
Ψ	Abschreibungen
ζ	Gewinnausschüttung
ρ	Produktivität eines Faktors
τ	Gewinnsteuer

Statistische Bezeichnungen

$\mathbb{P}(y < \tilde{y})$	Wahrscheinlichkeit
$\mathcal{F}(\mu, \sigma^2)$	Verteilungsfunktion mit den ersten zwei Momenten
$\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$	Normalverteilung
$\sigma^2, \mathbb{V}$	Varianz
$\mathbb{E}(x)$	Erwartungswert von x

Abstract

Mit der hier vorliegenden Arbeit wird ein mikroökonomisches Multiagentenmodell eines Produktionssektors vorgeschlagen. Das Modell folgt einem post-walrasianischem Ungleichgewichtsansatz und beschreibt optimierende Agenten der Produktionsseite. Diese berücksichtigen in probabilistischen Nebenbedingungen Risiken des Cash Flow, die sich aus unsicheren Absatzmengen ergeben. Produzenten stehen in monopolistischer Konkurrenz und lernen durch Beobachten.

Wird vorliegendes Modell in ein Totalmodell integriert, so wird es möglich, die sich aus der Klimadebatte ergebenden, notwendigen Veränderungen im Investitions- und Produktionsverhalten zu diskutieren und darzustellen.

Kapitel 1

Ziel der Arbeit

1.1 Motivation

Die Zivilisation steht vor einer globalen Herausforderung. Sie sieht sich objektiv der Gefahr gegenüber – durch ihr Handeln hervorgerufen – die natürlichen Grundlagen ihrer Existenz irreversibel zu gefährden. Das Wissen darum tritt, gestützt von wissenschaftlichen Erkenntnissen insbesondere der Klima- und Klimafolgenforschung, zunehmend in das Blickfeld politischer Argumentation sowie in das breite politische Bewußtsein.

Seit den späten sechziger Jahren des zurückliegenden Jahrhunderts erlangte die Frage nach einer globalen Verantwortung für den Erhalt der Zivilisation ranghohe Bedeutung. Damals waren es die abschätzbaren Folgen einer mit Massenvernichtungsmitteln geführten Auseinandersetzung zwischen den antagonistischen gesellschaftspolitischen Systemen, die Fragen nach Alternativen zwingend machten. Wenn nicht endgültig überwunden, so ist das Problem einer allesvernichtenden atomaren Auseindersetzung schließlich mit dem Systemverfall eines der Antagonisten in den Hintergrund getreten.

Die heute in das Bewußtsein tretenden existentiellen Gefahren, seit längerem wirkend, sind anthropogen verursacht. Damit können sie nur durch menschliches Handeln gemindert und schließlich unwirksam gemacht werden. Dies wird mit Prozessen verbunden sein, die tiefgreifend in gewohnte Zivilisationsstrukturen eingreifen. Für diese ‚Eingriffe‘ liegen keinerlei historische Erfahrungen vor. Die Zivilisation muss demzufolge ‚lernen‘, der als neu empfundenen Bedrohung zu begegnen. Dies setzt voraus, die Ursachen der Bedrohung zu benennen. Nachfolgend soll hierauf nicht eingegangen werden.

Ich setze voraus, dass die hierzu erbrachten Forschungsergebnisse, auch jene aus unserem Institut, bekannt sind.

Sozialwissenschaftliche und volkswirtschaftliche Forschung, die immer nur Teil der unverzichtbaren interdisziplinären wissenschaftlichen Arbeit im Sinne des benannten globalen Problems sein kann, muss sich gegenstandsspezifisch in das Bemühen einordnen, Lösungswege aufzuzeichnen.

Die nachfolgend zur Diskussion gestellte Arbeit basiert in ihrem ordnungspolitischen Ansatz auf den weithin anerkannten Grundsätzen der sozialen Marktwirtschaft. Die soziale Marktwirtschaft hat als gesellschaftliches Ordnungssystem zum Ziel, die Entfaltung individueller Freiheiten mit der Wahrnehmung sozialer Verantwortung der Akteure zu verbinden. Dem Staat fällt die Aufgabe zu, wirksame Regularien in diesem Prozess zu definieren und durchzusetzen.

Das marktwirtschaftliche System erfordert nach innewohnender Logik stetiges Wachstum, steigenden Konsum und weitgehend uneingeschränkte Mobilität. Nur durch Wachstum kann dieses System auf Dauer seine Existenz bewahren. Denn nur durch Wachstum kann Arbeitslosigkeit verhindert und damit ökonomische Partizipation gewährleistet werden.

Es zeigt sich jedoch, dass eben dieses Wachstum die Lebensgrundlage unserer Zivilisation gefährdet. Grund hierfür sind die aus Produktion und Konsum erwachsenden, nicht internalisierten externen Effekte, die Emission von Schadstoffen und Ressourcenverbauch für den Einzelnen ohne Kosten ermöglicht. Der marktwirtschaftlichen Logik folgend wird diese Möglichkeit durch die unterschiedlichen Akteure des Wirtschaftssystems weitreichend genutzt, solange es für diese Nutzeneffekte hat. Nur langsam erfolgt hier ein Umdenken im globalen Maßstab.
Noch birgt es für den, der seine Produktion bzw. seinen Konsum an den beschriebenen Gefahren ausrichtet, ökonomische Risiken und Einschränkungen. Ressourcenschonende Produktion ist im Verhältnis zur Konkurrenz teurer und ökologischer Konsum ist mit Verzicht verbunden.

Für wissenschaftliche Forschung wird es Aufgabe, das Problem eines möglichen Klimawandels in unterschiedlichen Forschungsfeldern zu behandeln. Dies betrifft sowohl natur- und ingenieurwissenschaftliche als auch sozialwissenschaftliche Fachrichtungen. In naturwissenschaftlichen Fachrichtungen ist es Aufgabe, Abschätzungen möglicher klimatischer Veränderungen zu geben und die hieraus resultierenden Gefahren für den Menschen zu ermitteln. Die Entwicklung von Techniken, die in der Lage sind Energieverbrauch und Schadstoffemission zu reduzieren, muss durch ingenieurwissenschaftliche Forschung erbracht werden.

Für die sozialwissenschaftliche Forschung, zu der die Volkswirtschaftslehre zählt, wird es zur Aufgabe, soziales Verhalten deskriptiv und normativ zu behandeln. Hierzu ist es notwendig, das ökonomische Verhalten von Akteuren, Personen und Institutionen besser verstehen zu können. Nur so können normative Empfehlungen für politisches Handeln gegeben werden.

Wirtschaftspolitisches Handeln in unserer Zeit findet sich in einem Spannungsverhältnis von sozialpolitischer Notwendigkeit und umweltpolitischer Herausforderung. War Wirtschaftspolitik in den europäischen Marktwirtschaften bisher darauf ausgerichtet, Wachstum zu generieren und dabei soziale und verteilungspolitische Mindeststandards zu gewährleisten, so muss sie heute in weit größerem Umfang als bisher umweltpolitische Aspekte einbeziehen. Volkswirtschaftliche Theorie ist hier gefordert. Sie muss politische Ansätze aufzeigen können, die weiterhin ökonomisches Wachstum ermöglichen, den Umwelt- und Klimabezug dabei jedoch nicht vernachlässigen.

Wenn sich die globale Gesellschaft den anstehenden Herausforderungen stellt und eine Trendwende in ihrer Daseinsweise vollziehen kann, so werden sich die nationalen Ökonomien und die globalisierte Ökonomie verändern. Dies umfasst Fragen um Investition, Allokation, Wachstum, Verteilung, Preisrelationen und Konsumgüterbündel. Jede Veränderung in einem dieser Punkte verursacht Risiken für einzelne Akteure des Wirtschaftsprozesses und Gruppen dieser. Volkswirtschaftliche Forschung muss dies berücksichtigen.
Die vorgelegte Arbeit entstand im Rahmen meiner Forschungstätigkeit am Potsdam Institut für Klimafolgenforschung (PIK) in der Forschungsgruppe Global Financial Transition (GFT). Ein erklärtes Ziel der Forschung im Rahmen der Gruppe ist es, in einem agentenbasierten Totalmodell ausgewählter Bereiche der deutschen Wirtschaft Fragen um Auswirkungen klimarelevanter Politiken auf Subjekte der Wirtschaft zu analysieren und zu diskutieren.

Die Forschungsgruppe lässt sich von der Auffassung leiten, dass die Vielzahl der zur Analyse genutzten Modelle nicht zwingend in der Lage ist, relevante Aussagen zum Verhältnis von Klima- und Wirtschaftspolitik zu treffen. In unserem Verständnis sind hierfür eine Reihe von im ökonomischen mainstream gebräuchlichen Annahmen verantwortlich. Solche sind die Frage um Aggregation von Akteuren und Produktionsfaktoren, die Behandlung von Risiken im Entscheidungsprozess, die Form unterstellter Marktstrukturen, die Frage um Marktgleichgewichte und die Behandlung von Erwartungsbildungsprozessen.

Die Volkswirtschaftslehre liefert zu genannten Fragen diverse Antworten, die sich z.T. zu unterschiedlichen volkswirtschaftlichen Theorien konstituieren und sich in Methodik und Erklärungsapparat unterscheiden. Es erscheint jedoch legitim, alternative theoretische Ansätze und Herangehensweisen zur

Diskussion zu stellen. Diese sind in meinem Verständnis durchaus geeignet, auf ökonomische Fragen Antworten zu geben.

In der Forschungsgruppe Global Financial Transition sind drei Bereiche mit der Modellierung eines agentenbasierten Totalmodells befasst. Ein erster befasst sich mit der Modellierung heterogener Haushalte. In einem zweiten erfolgt die Modellierung von Marktkoordinationsmechanismen. Meine vorliegende Arbeit resultiert aus den Forschungsschwerpunkten des dritten Bereichs. Diese umfassen die Modellierung produktionsseitig handelnder Agenten und die Modellierung eines Versicherungsmarktes. Zum Zeitpunkt der Fertigstellung dieser Arbeit befanden sich diese Teilbereiche auf unterschiedlichen Fertigstellungsstufen, so dass eine Verbindung der Modellteile noch nicht Aufgabe sein konnte.

1.2 Modellkriterien

Erklärtes Ziel aktueller Klimapolitik ist es, den Ausstoß von Treibhausgasen nachhaltig zu reduzieren. Solch eine Reduktion erzwingt, soll nicht auf Konsum und Mobilität verzichtet werden, Produkte und Produktionen, deren CO_2-Ausstoß unter dem heutiger liegt. CO_2 ärmere Produkte und Produktion verlangen Innovationen und Investitionen. Diese sind mit Risiken verbunden. Für (den überwiegenden Anteil) CO_2 arme(r) Produkte liegen keine Erfahrungen bezüglich möglichen Absatzes vor. Ihre Entwicklung ist jedoch mit hohen Kosten verbunden. Beispiel hierfür ist die Entwicklung alternativer Antriebstechnologien im Fahrzeugbau.

Ein ökonomisches Modell, das geeignet sei soll, nicht-stetige technologische Sprünge und divergierende Entscheidungen von Agenten eines Sektors darstellen zu können, muss m.E. Risiko bezüglich Nachfrage abbilden können.

Als ein Instrument zur Reduktion von CO_2-Emission gilt der Handel mit Emissionszertifikaten. Solche, auf dem Markt frei gehandelte Zertifikate, geben das Recht, definierte Mengen an CO_2 in der Produktion auszustoßen. Erklärtes wirtschaftspolitisches Ziel ist es, Produktionen mit hohen Emissionen zu verteuern, so dass eine Reduktion der Nachfrage erfolgt oder aber durch Prozessinnovationen der CO_2 Ausstoß reduziert werden kann. Dieses Verfahren, in Deutschland seit 2005 in einer Testphase im Einsatz, wird zu Einkommens- und Substitutionseffekten führen.

Um Einkommens- und Substitutionseffekte in einem Modell abbilden zu können, bedarf es aus meiner Sicht Modellen, die nicht-aggregierte, heterogene

Agenten abbilden.

Real operierende Unternehmen sehen sich Preisschwankungen durch sie genutzten Güter und Schwankungen der ihnen entgegengebrachten Nachfrage gegenüber. Solche Schwankungen haben Auswirkungen auf Einzahlungen und Auszahlungen im Unternehmen. Damit resultieren Schwankungen auf den Cash Flow. Diesen begegnen (große) Unternehmen mittels Risikoabwägung über at-Risk-Verfahren.

Sollen in einem Modell Risikoprozesse inner- oder außerbetrieblichen Ursprungs abgebildet werden, so muss m.E. eine Berücksichtigung von Cash Flow Schwankungen erfolgen.

In dem von mir erarbeiteten Modell will ich diese durch mich formulierten Kriterien berücksichtigen. Mein Ziel ist es, einen Modellrahmen zu schaffen, in dem unterschiedliche Fragen klimapolitischen Handelns diskutiert werden können. Konkrete Fragestellungen bedürfen dann einer jeweiligen Konkretisierung des Modells und gegebenenfalls der Anpassung.

1.3 Modellskizze

Vorliegendes Modell ist ein dynamisches, mikroökonomisches, partielles Multiagentenmodell eines Produktionssektors, in dem explizit Handeln unter Risiko abgebildet wird.

Handelnde Agenten sind intertemporal optimierende, heterogene Produktionseinheiten. Mein Modell läuft über mehrere Zeitperioden $\hat{T}$. In jeder dieser findet eine intertemporale Optimierung der Agenten über T Optimierungsperioden und Markthandeln statt. Zielgröße der Optimierung ist der abdiskontierte kumulierte Periodengewinn.
Heterogenität der Agenten besteht hinsichtlich firmenindividueller Kosten- und Produktionsparameter. Die Wahl dieser erfolgt über Verteilungsfunktionen, wobei Korrelation zwischen Größen modelliert ist.

Produzenten interagieren in mehreren Marktbeziehungen. Auf einem Absatzmarkt bieten sie die durch sie produzierte Güter an. Auf einem Arbeitsmarkt, einem Vorproduktmarkt und einem Kapitalmarkt erwerben sie die für ihre Produktion erforderlichen Inputfaktoren. Käufe und Verkäufe von Wertpapieren, hier staatlichen, verzinsten Bonds, werden auf einem Wertpapiermarkt getätigt. Vorliegende partielle Modellversion konkretisiert allein den

Absatz- und den Vorproduktmarkt, wobei die den Produzenten gegenüberliegende Marktseite über eine aggregierte Nachfrage bzw. ein exogen gegebenes Angebot simuliert wird.

Für den Absatzmarkt an produzierten Gütern unterstelle ich die Marktform der monopolistischen Konkurrenz. Die Produktionsagenten produzieren demnach eine Variation q_i^s eines Gutes q. Durch die so gewählte Marktform wird die Nachfrage q_i^d nach einer Variation von q abhängig von allen Preisen der Konkurrenzprodukte $p_j^q,\ \forall j \in (1, m),\ j \neq i$.

Ich unterstelle, dass vor Markthandeln durch jeden Produzenten eine Angebotsmenge q_i^s und ein Angebotspreis p_i^q gewählt werden. Durch Produktion von q_i^s entstehen Kosten durch den Einsatz an Produktionsfaktoren.

Weiterhin unterstelle ich, dass auf dem Gütermarkt kein Markträumungsgleichgewicht zwingend ist, so dass kein Tâtonnement -Prozess erfolgt. Gesetzte Preise (und Mengen) sind demnach für eine Periode bindend. Somit folgt, dass die einem Produzenten entgegengebrachte Nachfrage für diesen eine unsichere Größe ist, da er ex ante keine Kenntnis über die Preiswahl der Konkurrenten besitzt. Jeder Produzent hat Erwartungen bezüglich der Preiswahl der Konkurrenten und kennt die Varianz dieser Preise. Eine Verteilungsfunktion ist ihm ebenfalls bekannt. Somit ist es ihm möglich, Erwartungen bezüglich der ihm entgegengebrachten Nachfrage zu bilden.

Ist die Nachfrage unsicher, so sind auch der zu erzielende Umsatz, Cash Flow und Gewinn unsicher. Dieser Unsicherheit begegnen die Produzenten durch eine risikoreduzierende probabilistische Nebenbedingung. In ihrer Formulierung besagt diese Nebenbedingung, dass die Wahrscheinlichkeit des Unterschreitens eines Mindest Cash Flows nur mit einer maximal akzeptierten Wahrscheinlichkeit erfolgen darf. Ich bin der Überzeugung, dass die durch mich gewählte Form der Modellierung unternehmerischen Handelns gut geeignet ist in der betrieblichen Praxis angewandte at-Risk-Verfahren in einem mikroökonomischen Modellrahmen zu implementieren.

Produktionsagenten sind lernfähig. Durch Beobachtung ihrer Konkurrenten und deren Handeln erfolgt eine adaptive Bestimmung der Erwartungswerte und Varianzen der Konkurrenzpreise. Ich folge in meinem Modell nicht dem Ansatz unbeschränkter rationaler Erwartungen.

Für den Vorproduktmarkt ist ein geordneter Vektor von Angebotsmengen und Preisen eines homogenen Vorprodukts exogen gegeben. Auch für diesen Markt unterstelle ich nicht zwingend ein Markträumungsgleichgewicht. Markthandeln habe ich als Rationierungsgleichgewicht formuliert. Dabei erfolgt eine Rationierung zufällig.

Im Ergebnis ist ein Modell entstanden, das aus meiner Sicht geeignet ist, Anwendung in klima- und umweltwissenschaftlicher Modellierung zu finden. Hierzu wird es jedoch notwendig, das formulierte Partialmodell in den Rahmen eines Totalmodells einzubinden. Ich füge dieser Einleitung eine grafische Beschreibung des von mir entwickelten Modells bei. Abbildung (1.1) zeigt die durch mich formulierten Produzenten in ihren Marktbeziehungen.

Die Produzenten 1 bis m, in der Bildmitte symbolisiert, fragen auf einem Vorproduktmarkt ein homogenes Gut nach. Dieses wird von m^e unterschiedlichen Vorproduktproduzenten angeboten. Diese habe ich nicht modelliert. Die Preise des Vorproduktes p^e als auch die angebotenen Mengen e differieren zwischen Anbietern.

Kapitalgüter a^s und Arbeit l^s werden durch die Produzenten nachgefragt, wobei diese homogen sind und exogen gegeben werden. Die Preise werden mit p^a und w bezeichnet.

Produzenten produzieren Mengen q^s und legen Preise p^q fest. Auf einem Gütermarkt existiert ein aggregierter Haushalt. Für jeden Produzenten ergibt sich eine aggregierte Nachfragefunktion. Ausgehend von dieser bestimmt sich für jeden Produzenten eine Nachfrage nach seinem Produkt in Höhe von q^d. Markthandeln erfolgt in Abhängigkeit der jeweiligen Produktionsmenge und der Nachfrage. Auf eine tiefer gehende Diskussion bzw. Beschreibung verzichte ich an dieser Stelle und verweise auf das sechste Kapitel dieser Arbeit.

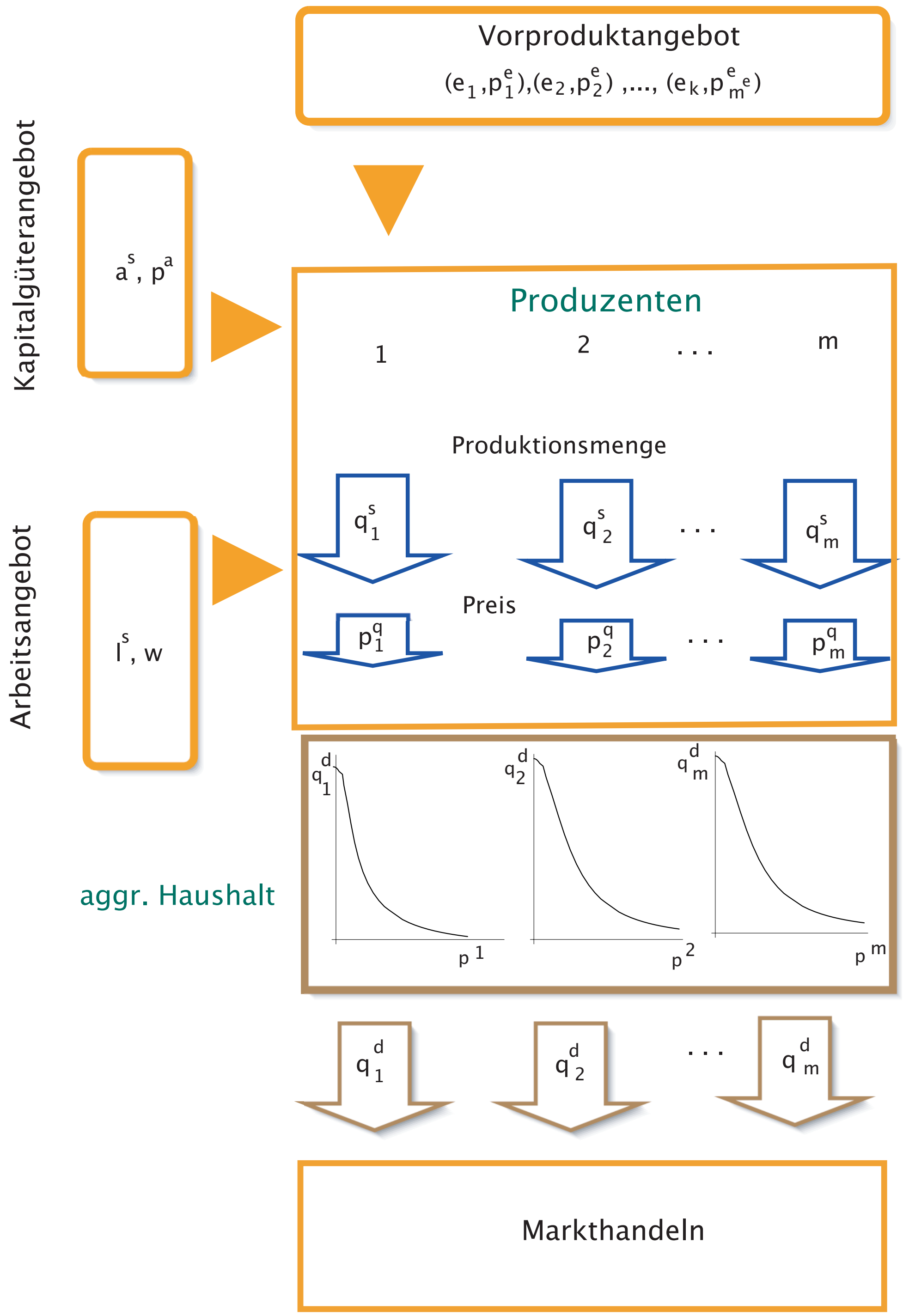


Abbildung 1.1: Schematische Darstellung des Gesamtmodells

1.4 Aufbau

Aus meiner wissenschaftlichen Zielstellung sowie den methodisch zu lösenden Problemen ergab sich die Gliederung vorliegender Arbeit in sieben Kapitel. So ist es mein Ziel, meine Entscheidungen bezüglich Modellstrukturen und -annahmen in den Rahmen wirtschaftswissenschaftlicher Theorie einordnen bzw. abgrenzen zu können.

Zunächst gehe ich im zweiten Kapitel der Arbeit auf die Produktionstheorie ein, um betriebswirtschaftliche, mikroökonomische und makroökonomische Ansätze der Produktionstheorie voneinander abzugrenzen. Der Struktur des modellierten Modells Rechnung tragend, erfolgt eine Vorstellung der mikroökonomischen Produktionstheorie, in die sich mein Modell einfügt. Hierbei beschreibe ich den in der mikroökonomischen Produktionstheorie gebrauchten Apparat, wobei ich auf die Theorie der Firma eingehe. Weiterhin erfolgt ein Überblick über betriebswirtschaftliche, mikroökonomische und makroökonomische Produktionsfunktionen.

Im dritten Kapitel geht es mir um die Fragen der Optimierung ökonomisch handelnder Akteure. Hierbei diskutiere ich sowohl das grundlegende Konzept von Optimierung als auch Probleme, die sich bei der Modellierung von Optimierungsansätzen ergeben. Weiterhin stelle ich informationstechnische, computergestützte Umsetzungen von Optimierungsalgorithmen vor und diskutiere ihre Vor- bzw. Nachteile in der Anwendung für die Modellierung.

Es folgt das vierte Kapitel, in dem ich das Problem von Risiken für Produktionsprozesse und ökonomisch handelnde Produzenten vorstelle. Hauptaugenmerk liegt hierbei in der Nutzung des CashFlow at Risk- Ansatzes für die volkswirtschaftliche Modellierung über probabilistische Nebenbedingungen. Hierzu stelle ich das Konzept des in der Betriebswirtschaft gebrauchten Ansatzes des Cash Flow at Risk und eine mögliche Nutzung für die Modellierung in der Mikroökonomie vor.

Kontroverse Auffassungen unseres Wissenschaftszweiges zu Fragen um Gleichgewicht, Aggregation und Entscheidung bzw. Erwartungsbildung von ökonomisch handelnden Akteuren werden im fünften Kapitel angesprochen. Das soll mir die Möglichkeit einer Positionierung einräumen. Im Abschnitt zu Fragen um Gleichgewichtskonzepte beschränke ich mich auf die Vorstellung der Theorie des Allgemeinen Gleichgewichts und auf die Vorstellung von Nichtmarkträumungsgleichgewichten. Fragen um multiple Gleichgewichte klammere ich aus.

Im Abschnitt zu Anmerkungen zur Aggregation stelle ich neben der Formulierung des allgemeinen Aggregationsproblems exemplarisch die Diskussion um Aggregation von Produktionsfunktionen vor. Auf Fragen um Aggregation von Produktionsfaktoren gehe ich nicht näher ein. Im Rahmen dieser Diskussion zeige ich, dass die Aggregation bei unterstelltem Handeln unter probabilistischen Nebenbedingungen nur schwer gelingen kann. Kapitel Fünf ermöglicht somit eine dogmentheoretische Abgrenzung meines Modells von einigen in der Volkswirtschaftslehre gebräuchlichen Annahmen.

Schließlich wende ich mich im sechsten Kapitel dem von mir modellierten und programmierten Modell eines Produktionssektors in einem Partialansatz zu. Kapitel Sechs beinhaltet eine mathematische und ökonomische Vorstellung der die Agenten beschreibenden Annahmen. Die Ausführungen schließen mit der Erläuterung einiger Simulationsergebnisse des Modells und Anmerkungen zur Empirie.

Im siebenten, abschließenden Kapitel gebe ich eine Zusammenfassung der Ergebnisse. Dies umfasst eine kritische Auseinandersetzung mit dem vorgeschlagenen Modell und den durch mich getroffenen Modellannahmen. Ich schließe dieses Kapitel mit Überlegungen bezüglich weiterer möglicher Forschungsfragen.

Kapitel 2

Produktion

Das von mir im sechsten Kapitel dieser Arbeit vorgestellte Modell beschreibt einen Produktionssektor. Aus diesem Grund ist es erforderlich, dieses Modell in den Rahmen der Produktionstheorie einordnen bzw. abgrenzen zu können. In Kapitel Zwei folgen aus diesem Grund einige Anmerkungen zur mikroökonomischen Produktionstheorie. Ich erhebe dabei nicht den Anspruch auf Vollständigkeit. Ich werde mich, der Struktur meines Modells folgend, nur auf den mikroökonomischen Aspekt der Produktionstheorie beziehen, insbesondere auf den der Theorie der Firma. In Abschnitt Drei dieses Kapitels werde ich weiterhin Produktionsfunktionen vorstellen. Diese stellen eine modelltheoretische Beschreibung von Produktion dar. Ich werde dabei Produktionsfunktionen aus den Bereichen der Betriebswirtschaft, der Mikro- und der Makroökonomie vorstellen.

2.1 Einführung

Ökonomische Systeme lassen sich - vereinfacht - nach Produktions- und Haushaltsseite differenzieren. Deren Grenzen sind fließend. Es wird abstrahiert und unterstellt, dass die Produktionsseite Waren und Dienstleistungen bereitstellt. Diese werden durch die Haushaltsseite konsumiert oder gehen in weitere Produktionsprozesse ein. Der Produktionsseite einer Ökonomie fällt damit eine primäre Rolle zu. Hier werden Einkommen generiert, Waren produziert und Faktoren auf konkurrierende Produktionsprozesse aufgeteilt.

Die wissenschaftliche Auseinandersetzung mit Prozessen innerhalb der Produktionsseite einer Ökonomie, den Fragen um effizienten Faktoreinsatz, möglichen Outputmengen und Verteilungsfragen findet sich in nahezu jeder Theorieschule der Ökonomie und in jeder Epoche, ausgehend vom Beginn des 19. Jahrhunderts. Das Beschäftigen mit dieser Thematik wird in der Literatur als *Produktionstheorie* bezeichnet.

In der wirtschaftswissenschaftlichen Diskussion wird die Bezeichnung Produktionstheorie synonym für die Darstellung *einzelwirtschaftlicher* (betriebswirtschaftlicher und mikroökonomischer) und *gesamtwirtschaftlicher* (makroökonomischer) Fragen der Produktion verwendet.

Beim Studium der Literatur zeigt sich jedoch, dass abhängig von konkreten Fragestellungen und der Art der Betrachtung, mehrere, zwar verwandte, jedoch in Apparat, betrachteten Objekten und Zielsetzung zu unterscheidende Ansätze der Produktionstheorie existieren. Gemein ist ihnen, und hierüber erklärt sich die Verwandtschaft, die Frage um das Verhältnis von Input und Output von Elementen des Produktionsprozesses. Es geht somit um die Frage des möglichen, erreichbaren Produktionsergebnisses bei gegebenen Einsatzfaktoren. An dieser Stelle soll, der weiteren Fragestellung dieser Arbeit Rechnung tragend, eine Einteilung in drei Ansätze der Produktionstheorie erfolgen. Es wären dies der betriebswirtschaftliche Ansatz, der mikroökonomische Ansatz und der makroökonomische Ansatz.

Eine Abgrenzung dieser drei Ansätze kann vielfach nur im Rückblick erfolgen. Grund hierfür ist zum einen, dass eine Zuordnung aufgestellter Ansätze erst mit der Begriffsbestimmung *mikro* und *makro* Anfang des 20. Jahrhunderts erfolgen kann. Zum anderen ist der verwandte Apparat der verschiedenen Ansätze zum Teil ähnlich. Entscheidend ist, dass sich, bezogen auf mikro- und makroökonomische Ansätze der Produktionstheorie, diese in ein Theoriegebäude einordnen lassen, das eine weitgehend klare Abgrenzung im Bezug auf die jeweilige wissenschaftliche Fragestellung und die zugrunde gelegten Annahmen ermöglicht.

Die Behandlung von Produktionsprozessen einer Ökonomie hat deskriptiven und normativen Charakter. Jeder Ansatz der Produktionstheorie ist im Konnex der Zeit, in der er formuliert wurde, zu beurteilen. Quesnay (1694-1774) formulierte mit seinem *Tableau Economique* eine erste gesamtwirtschaftliche Betrachtung von Produktionsprozessen. Den vorherrschenden agrarisch und handwerklich geprägten Produktionsbedingungen seiner Zeit geschuldet, teilt Quesnay die Produktionsphäre in Landbesitzer (landlords), freie Bauern (farmer) und Handwerker (manufacturers) und versucht eine Erklärung des Flusses von Input- und Outputfaktoren in diesem Dreieck. Klassische Ansätze von Smith, Ricardo und Marx bedienen sich dieser Einteilung in gesellschaftliche Klassen und übernehmen die Vorstellung eines surplus der Produktion. Mit Einzug der Marginalanalyse in die Wirtschaftswissenschaft Ende des 19. Jahrhunderts und einer vorgenommenen inhaltlichen Abgrenzung zum Untersuchungsobjekt der Klassik rückten der einzelne Akteur im Wirtschaftsprozess, der Konsument und der Produzent, in den Mittelpunkt der Analyse. Der durch die Neoklassik formulierte wissenschaftliche Apparat wurde und wird zur Erklärung produktionstheoretischer Fragen herangezogen (für eine dogmentheoretische Einordnung der Produktionstheorie vergleiche Krelle (1969) und Pasinetti (1977)).

Betriebswirtschaftliche Ansätze der Produktionstheorie sind Teil der Betriebswirtschaftslehre. Es steht eine einzelne Unternehmung im Mittelpunkt der Betrachtung. Die Ansätze können einem einzelnen, technisch abgrenzbaren Produktionsvorgang zugerechnet werden.

Mikroökonomische Ansätze beschränken sich auf die Formulierung allgemeiner, einzelwirtschaftliche Einheiten betreffende Fragestellungen. Betrachtet wird nicht allein der Prozess der Produktion und seine Steuerung, sondern die Frage um ökonomische Auswirkung, Interdependenz zu weiteren Akteuren und sich hieraus ergebende Strukturen einer Ökonomie.

Makroökonomische Ansätze suchen Aussagen, die auf der einzelwirtschaftlichen Ebene getroffen werden können, auf das Aggregat der Produktion, also den gesamtökonomischen Produktionsprozess, zu beziehen. Nicht die einzelne Unternehmung, sondern die gesamte Ökonomie steht im Fokus der Analyse.

2.2 Mikroökonomischer Ansatz

Mikroökonomische Theorie

Der mikroökonomische Ansatz der Wirtschaftswissenschaft untersucht Fragen um Entscheidungen, Beziehungen und Verhaltensmuster ökonomischer Akteure. Diese sind Haushalte, Firmen und Organisationseinheiten wie der Staat. Von entscheidender Bedeutung ist die Frage um die Beziehung zwischen individuell entscheidenden und damit handelnden Akteuren des Wirtschaftsprozesses und sich hieraus ergebender Muster. Beziehungen zwischen ökonomischen Akteuren werden über Märkte hergestellt. Über Märkte und Marktbeziehungen erfolgt die Koordination individueller Handlungen.

In strenger Abgrenzung zur makroökonomischen Theorie sind nicht allein aggregierte Ergebnisse des Marktprozesses von Interesse, vielmehr ist die sich daraus ergebende Struktur von Bedeutung.

Die Behandlung mikroökonomischer Produktionsmodelle kann Bestandteil unterschiedlicher mikroökonomischer Fragestellungen sein. Folgende, nicht vollständige Aufzählung zeigt die Breite möglicher Fragestellungen.

- Theorie der Firma,
- Verteilungstheorie,
- Allgemeine Gleichgewichtstheorie,
- Markttheorie

Untersuchungsgegenstand

Der mikroökonomische Ansatz der Produktionstheorie stellt ähnlich dem betriebswirtschaftlichen die Organisationseinheit Unternehmung in den Mittelpunkt. Die Produktionsplanung eines Unternehmens wird im Rahmen von Optimierungsansätzen diskutiert. Der Unternehmer wird zum Akteur, der einem individuell erklärbaren Optimierungskalkül folgt. Der mikroökonomische Ansatz versucht, dieses Kalkül zu begründen und zu erklären. Die Produktion ist somit nicht ein rein technischer Prozess, sondern auch unternehmerisches, zielgerichtetes Entscheiden.

Entgegen dem betriebswirtschaftlichem Ansatz diskutiert der mikroökonomische keine konkrete Produktion eines spezifischen Gutes oder einer spezifischen Dienstleistung. Vielmehr versucht er, mit z.T. unterschiedlichen Methoden, allgemeine Aussagen zum Verhalten produzierender Akteure zu formulieren. Technische Analysen, wie sie der betriebswirtschaftliche Ansatz hervorbringt, fehlen somit. Sie werden nicht explizit diskutiert, sondern finden sich in der funktionalen Gestalt des Erklärungsapparates wieder.

Produktion und Produktionsfaktoren

Die mikroökonomische Theorie der Produktion gibt eine Erklärung für das Angebot von Gütern (vergleiche Zamagni (1987, S.191)). Das Angebot an Gütern und Dienstleistungen wird dabei mittels Kombination von Inputfaktoren realisiert. Somit kann neben der Erklärung des Angebotes auch eine Erklärung der Faktornachfrage erfolgen.

Ein einzelner Produzent wird als ökonomisch handelnder Akteur beschrieben, der einen Produktionsplan wählt (vergleiche Debreu (1959a, S.37)). Produktion in der mikroökonomischen Analyse ist die Transformation eines *Inputgütervektors* in einen *Outputvektor*. Solche Inputgüter (Produktionsfaktoren) können dabei sein

1. natürliche Ressourcen,
2. Arbeit,
3. Kapitalgüter,
4. Verbrauchsfaktoren und
5. Boden.

(vergleiche von Böventer und Illing (1995, S.144))

Natürliche Ressourcen bezeichnen Land und Bodenschätze, Wasser und Luft. Arbeit ist menschliche Tätigkeit. Produktion findet an oder mit im Produktionsprozess eingesetzten Maschinen und Anlagen statt oder bezeichnet die Verrichtung von Dienstleistungen. Eine Differenzierung der Faktoren nach Bildungsniveaus und Fertigkeiten kann in Abhängigkeit von der wissenschaftlichen Fragestellung erfolgen. Unter Kapitalgütern werden alle im

Produktionsprozess eingesetzten Anlagen und Maschinen subsumiert. Verbrauchsfaktoren sind solche Inputfaktoren, die nicht in das Endprodukt eingehen, sondern zur Aufrechterhaltung des Produktionsprozesses eingesetzt werden. Boden bezeichnet sowohl Anbaufläche landwirtschaftlicher Produkte, Bauflächen für Maschinen und Gebäude als auch Abbaugebiet für Bodenschätze. Der Faktor Boden wird in mikroökonomischen Modellbeschreibungen relativ selten verwendet, wenn nicht explizit landwirtschaftliche Produktion diskutiert wird.

Produktionsfaktoren werden nach fixen und variablen Faktoren unterschieden (vergleiche Schumann (1992, S. 138)). Die Einsatzmenge eines fixen Faktors ist von der Produktionsmenge unabhängig. Der Umfang variabler Faktoren ist hingegen veränderlich. Seine Veränderung hat Einfluss auf die Ausbringungsmenge des Produktionsprozesses. Faktoren werden immer dann als fix angenommen, wenn davon ausgegangen wird, dass eine Veränderung ihrer Quantität in der betrachteten Periode der Produktion nicht möglich ist. Die Betrachtung erfolgt somit in der kurzen Frist. Dem gegenüber behandelt die lange Frist Produktionsprozesse über mehrere Perioden. Hier werden mehrere Faktoren zu variablen Einsatzfaktoren. Illustrieren lässt sich diese Unterscheidung an Hand technischer Anlagen. Für deren Erstellung ist Zeit notwendig. In der kurzfristigen Produktionsplanung, und somit im kurzfristigen Optimierungskalkül des Unternehmers, sind diese nicht veränderbar, sieht man von Zerstörung ab. Hingegen wird der Faktor menschliche Arbeit auch in der kurzen Frist als variabel angenommen.

Theorie der Firma

Mikroökonomische Erklärungen des Verhaltens einer Unternehmung entstanden mit der Ausarbeitung neoklassischer Erklärungsmuster Ende des 19. Jahrhunderts. Die Marginalanalyse wurde zum zentralen mathematischen Apparat ihrer Beschreibung.

Untersuchungsgegenstand der Theorie der Firma ist eine einzelwirtschaftlich handelnde Unternehmung. Ziel ist die Beschreibung optimalen Handelns. Optimal wird hierbei in einem mathematischen Sinne als Maximierung einer Zielfunktion verstanden. Zielfunktion ist die Gewinnfunktion, wobei als Gewinn die Differenz von Einnahmen und Ausgaben bezeichnet wird. Einnahmen erfolgen durch Verkauf mit Preisen bewerteter Outputquantitäten. Ausgaben sind Kosten der Produktion, wobei diese sich durch mit Preisen bewertete Inputmengen ergeben.

Profitmaximierung besteht dann in der Wahl der Handlungen der Unternehmung. Dies beinhaltet die Bestimmung einer Produktionsmenge und die Wahl der Inputfaktoren. Dabei wird das Handeln der Unternehmung durch technologische und Marktbedingungen mitbestimmt. Technologische Nebenbedingungen schränken die Möglichkeiten der Produktion ein und sind quantitative Restriktionen. Marktnebenbedingungen entstehen durch das Handeln anderer Akteure. Solche Akteure sind Konkurrenzfirmen und Nachfrager. Deren Handeln ist mitbestimmend für die sich im Gleichgewicht einstellenden Preise und die Konkurrenzstruktur. Restriktionen dieser Form sind somit qualitativer Natur.

Jede Kombination von Inputfaktoren und Outputmengen wird als *Produktionsplan* bezeichnet. *„ ... a production plan, or most briefly a production, is represented by a point q of R^N, the commodity space.“* (Debreu 1959a, S. 38)[1] Produktionspläne können realisierbar oder nicht-realisierbar sein. Die Menge aller realisierbaren Produktionspläne wird als Produktionsmöglichkeitenmenge bezeichnet und *„ gives us a complete description of the technological possibilities facing the firm.“* (Varian 1992, S. 8).

Varian (1992) unterscheidet *immediately feasible* und *eventually feasible* Produktionsmöglichkeitenmengen. Abhängig ist dies von der Möglichkeit zur tatsächlichen quantitativen Veränderung von Faktoren bzw. einer kurz- oder langfristigen Betrachtung.

Ein Produktionsplan aus der Produktionsmöglichkeitenmenge wird als effizient bezeichnet, wenn *„there is no way to produce more output with the same inputs or to produce the same output with less inputs.“* (Varian 1992, S. 9).

Die Menge effizienter Produktionspläne kann dann durch eine implizite mikroökonomische Produktionsfunktion beschrieben werden (vergleiche hierzu Abschnitt (2.3.2)).

Die Wahl des Produktionsplanes bestimmt über den Einsatz der Inputfaktoren bei gegebenen Preisen die Kosten der Produktion. Bei gegebenen Preisen der Inputfaktoren kann somit eine Kostenfunktion bestimmt werden.

Produktionsfunktion und Kostenfunktion ermöglichen die Maximierung des Gewinns.

[1] Die Notation wurde durch mich angepasst und entspricht nicht dem Original.

2.3 Produktionsfunktionen

Produktionsfunktionen sind ökonomische Modelle. Sie finden sowohl in der einzelwirtschaftlichen Betrachtung (Mikroökonomie und Betriebswirtschaft) Anwendung als auch in der gesamtwirtschaftlichen (Makroökonomie).

Produktionsfunktionen stellen eine mengenmäßige Beziehung zwischen Inputfaktoren und Ausbringungsmenge her und ordnen jeder Kombination von Faktoreinsatzmengen die damit maximal herstellbare Ausbringungsmenge zu (vergleiche Steven (1998, S. 6)). Wird mit x_i bei $i \in (1, n)$ der $i - te$ Faktor bezeichnet ergibt sich mit $\mathbf{x}$ der Vektor aller im Produktionsprozess eingesetzter Faktoren.

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n) \in R^n_+ \tag{2.1}$$

Mit y_j bei $j \in (1, m)$ wird die erzielte Ausbringungsmenge für das Produkt j definiert.

$$\mathbf{y} = (y_1, y_2, ..., y_m) \in R^m_+ \tag{2.2}$$

Es lässt sich dann eine Produktionsfunktion $\mathbf{f}$ definieren, die eine zulässige Transformation der Inputfaktoren in Outputgüter beschreibt.

$$\mathbf{f} = (y_1, y_2, ..., y_n; x_1, x_2, ..., x_m) \in R^{n+m}_+ \tag{2.3}$$

Produktionsfunktionen finden Verwendung um normativ und deskriptiv Produktion als technischen und/oder ökonomischen Vorgang erfassen zu können. Die Schwierigkeit ihrer Formulierung besteht darin, weitgehend allgemein gültige und mathematisch handhabbare funktionale Formen zu finden, die Produktion abbilden können. Hinzu kommen die Komplexität des Vorgangs Produktion, Interdependenzen zwischen auf das System wirkende Faktoren und die Schwierigkeit des Erfassens aller dieser Faktoren. Produktionsfunktionen können somit nur mathematische Approximationen sein und nicht wie die funktionale Beschreibung natürlicher, physikalischer Vorgänge axiomatischen Charakter haben.

Die Wahl geeigneter Produktionsfunktionen für die Modellierung ökonomischer Systeme erlangt ranghohe Bedeutung. Dabei sind es u.a. folgende Kriterien die durch den Modellierer berücksichtigt werden müssen.

1. Hat die gewählte Produktionsfunktion anerkannte Eigenschaften bzw. können Abweichungen hinreichend begründet werden?
2. Werden alle relevanten Einsatzfaktoren erfasst?
3. Lässt die empirische Datenlage es zu, eine gewählte funktionale Form zu schätzen?
4. Hat die Funktion die mathematischen Eigenschaften (z.B. Stetigkeit, Differenzierbarkeit) die es ermöglichen, sie in einem Modell zu verwenden?
5. Lässt sich die gewählte Funktion ökonomisch begründen?

Diese Kriterien umfassend befriedigend zu erfüllen kann nur schwer gelingen. Somit ist es erforderlich, Einschränkungen abzuwägen, zu begründen und in der Interpretation von Modellergebnissen zu berücksichtigen.

In der Literatur werden eine Vielzahl von Produktionsfunktionen diskutiert. Diese unterscheiden sich hinsichtlich

1. ihrer Annahmen bezüglich der operativen Verknüpfung der Produktionsfaktoren,
2. der Substitutionsbeziehung der Faktoren,
3. ihrer Dynamik und
4. ihrer funktionalen Gestalt.

Nachfolgend werde ich betriebswirtschaftliche, mikroökonomische und makroökonomische Produktionsfunktionen unterscheiden. Hierbei sollen jeweils Referenzmodelle angegeben werden. Produktionsfunktionen wurden durch die unterschiedlichen Theorieschulen verwendet. Somit wird eine Unterscheidung nach diesen möglich und soll im Folgenden zur Erklärung herangezogen werden.

2.3.1 Betriebswirtschaftliche Produktionsfunktionen

Krelle (1969) bezeichnet einzelwirtschaftliche Produktionsfunktionen als grundlegende, da sie im Gegensatz zu gesamtwirtschaftlichen einen einzelwirtschaftlichen Bezug haben und somit dem realen Produktionsprozess näher sind. Betriebswirtschaftliche Produktionsfunktionen werden zur Erklärung produktionstechnischer Gegebenheiten konkreter Fertigungsverfahren genutzt.

Produktionsfunktion vom Typ B

Eine erste Einführung des Konzepts der Produktionsfunktion in die betriebswirtschaftliche Theorie nimmt Gutenberg (1951) vor und überträgt Konzepte der Mikroökonomie auf die Betriebswirtschaftslehre.

Gutenberg (1951) unternimmt mit seiner Formulierung der Produktionsfunktion vom Typ B den Versuch, eine Produktionsfunktion für den industriellen, einzelwirtschaftlichen Bereich zu erstellen. Grundlage seiner Überlegungen ist die Kritik an der zu dieser Zeit herrschenden Vorstellung über die Anwendbarkeit des Ertragsgesetzes für industrielle Produktionsbeschreibungen. Gutenberg fordert:

> *„Wenn es ein Kombinationsgesetz der industriellen Produktion gibt, dann muss es die betrieblichen Gegebenheiten einfangen."*
>
> Gutenberg (1983) S. 326 ff

Er *„... analysiert die produktionstheoretischen Beziehungen in der Unternehmung nicht global für den gesamten Produktionsprozess, sondern für einzelne Partialprozesse."* (Schweitzer und Küpper 1974, S.107). Dabei gelingt ihm eine technische Fundierung der produktionstheoretischen Aussagen.

In den Mittelpunkt seiner Untersuchungen stellt Gutenberg (1951) mittelbare Input-Output-Beziehungen. Demnach existiert bei jeder technischen Einrichtung, welche ein Aggregat von im Produktionsprozess eingesetzter Maschinen ist, ein bestimmbares, gegebenes Verhältnis von Inputfaktoren und Produktionsergebnis. Veränderungen der Produktionsmenge können allein durch Variation der Produktionszeit oder/und der Produktionsintensität bewirkt werden. Weiterhin befinden sich die zur Produktion an einer technischen Einrichtung verwendeten Inputfaktoren in einem festen Verhältnis zueinander. Dieses wird über die sogenannte *z-Situation* $(z_1, z_2, ..., z_v)$ bestimmt. Mit der z-Situation kennzeichnet Gutenberg ganz bestimmte, für jede technische Produktionseinheit individuelle, technische Eigenschaften. Über eine gegebene z-Situation bestimmt sich das Produktionspotential einer technischen Einheit. Weiterhin ist für jede technische Einheit eine gegebene z-Situation eine Verbrauchsfunktion definiert. Diese gibt an, in welchem Umfang welche Produktionsfaktoren von ihr genutzt werden. Veränderungen der z-Situation sind nach Gutenberg möglich. Eine neue z-Situation $(z_1\prime, z_2\prime, ..., z_v\prime)$ führt zu einer Veränderung der Verbrauchsmengen, also des Faktoreinsatzes, und einem veränderten Leistungspotential. Verbrauchsmenge x_i einer technischen

Anlage i ist eine Funktion der z-Situation und der Intensität (d), mit der diese Anlage betrieben wird,

$$x_i = f_i(z_1, z_2, ..., z_v; d). \tag{2.4}$$

Die Intensität, mit der eine technische Einheit betrieben wird, ist abhängig von der gewünschten Ausbringungsmenge y. Wird mit j, $j = (1, m) \in N$ eine betriebliche technische Teileinheit bezeichnet, so folgt für die Intensität

$$d_j = \phi_j(y). \tag{2.5}$$

„Mit Hilfe der Verbrauchsfunktionen (...) lassen sich die für die Fabrikation erforderlichen Verbrauchsmengen ermitteln. “ (Gutenberg 1983, S.331)

Die Einsatzmengen der Faktoren $x_1, x_2, ..., x_n$, die von der technischen Einheit j benötigt werden, sind mit $x_{1j}, x_{2j}, ..., x_{nj}$ bezeichnet. Es folgt somit für die Verbrauchsfunktion der j -ten Einheit

$$x_{ij} = f_i, j(d_j). \tag{2.6}$$

Wird weiterhin die Intensität x_j durch $\phi_j(y)$ ersetzt und die Verbrauchsmengen für alle technischen Einheiten eines Betriebes in der Produktion des Gutes y gebildet, so folgt

$$\begin{aligned} x_1 &= \sum_{j=1}^{m} x_{1j} = \sum_{j=1}^{m} f_{1j}(\phi_j(y)) \qquad (2.7)\\ x_2 &= \sum_{j=1}^{m} x_{2j} = \sum_{j=1}^{m} f_{2j}(\phi_j(y)) \\ &... \\ x_n &= \sum_{j=1}^{m} x_{nj} = \sum_{j=1}^{m} f_{nj}(\phi_j(y)). \end{aligned}$$

Gutenberg unterscheidet drei Möglichkeiten, die Ausbringungsmenge einer Produktionseinheit zu erhöhen. Diese nennt er Anpassungsformen (vergleiche hierzu auch Sonntag (2004, S.21)). Dies sind die *zeitliche Anpassung*, die *quantitative Anpassung* und die *Intensitätsanpassung*.

Die Anwendbarkeit der Produktionsfunktion vom Typ B in ihrer Formulierung durch Gutenberg bleibt allein auf einzelwirtschaftliche Strukturen beschränkt. Eine Übertragung des Konzeptes der Verbrauchsfunktionen auf eine makroökonomische Ebene muss scheitern. Die Vielzahl der in einer Wirtschaft für produktive Zwecke genutzten technischen Anlagen und Maschinen lassen das Aufstellen von Verbrauchsfunktionen unmöglich werden.

Durch empirische Untersuchungen konnte gezeigt werden, dass für eine Vielzahl von Maschinen deren Verbrauchsfunktion widerspruchsfrei aus dem Ansatz Gutenbergs ermittelt werden kann (vergleiche Schweitzer und Küpper (1974, S.129)). Jedoch bleibt der Geltungsbereich der jeweiligen Verbrauchsfunktion relativ klein. In der industriellen Praxis hat sich Gutenbergs Ansatz nicht durchgesetzt. Ein Grund hierfür ist eine zu geringe Variablenspezifikation. Weiterhin wird kritisiert, dass für jede Maschine ein sehr großer Erhebungsaufwand betrieben werden müsste, um die Verbrauchsfunktionen exakt ermitteln zu können (vergleiche Bloech, Bogaschewsky, Götz und Roland (1992, S.100)). Modifikationen der z-Situation durch Reparatur o.ä. würde eine erneute Analyse der Verbrauchsfunktionen einer technischen Einheit erfordern, eine Allgemeingültigkeit kann daher nicht gegeben sein.

Einzelwirtschaftliche Leontief-Produktionsfunktion

Die einzelwirtschaftliche Leontief-Produktionsfunktion ist eine Ableitung der für die Erklärung gesamtwirtschaftlicher ökonomischer Prozesse entwickelten Input-Output-Tabellen. Leontief-Produktionsfunktionen beschreiben eine proportionale Transformation von Produktionsfaktoren in Output-Produkte. Dies kann sowohl auf Ebene einer Unternehmung als auch auf Ebene einer einzelnen Fertigungsstelle beschrieben werden. Wird mit $\mathbf{x}$ der Vektor der Einsatzgütermengen und mit y das Produktionsergebnis definiert, so hat eine Leontief-Produktionsfunktion die Gestalt

$$y = \min(\bar{\alpha}\ , \mathbf{x}). \tag{2.8}$$

Hierbei bezeichnet $\alpha_i \in \bar{\alpha}$ den konstanten Produktionskoeffizienten des Faktors i. Wird ein Produkt y aus zwei Einsatzgütern x_1 und x_2 hergestellt, so ergibt sich eine limitationale Transformationsfunktion. Die Produktion erfolgt in einem konstanten Einsatzverhältnis der eingesetzten Güter. Daraus folgt, dass zur Erhöhung des Produktionsoutputs der Einsatz aller in die Fertigung eingehender Einsatzgüter proportional erhöht werden muss. Empirische Untersuchungen in 126 großen und mittleren Industrieunternehmen ergaben, dass in ca. 90 % der untersuchten Unternehmen limitationale Produktionsprozesse auftraten (vergleiche Schweitzer und Küpper (1974, S.72)). In der praktischen Umsetzung werden Leontief- Produktionsfunktionen in der Materialbedarfsplanung, der Vorkalkulation, der Planungskostenrechnung, der Kapazitätsplanung, der Produktionsplanung, der Finanzplanung und der Arbeitsplanerstellung genutzt (vergleiche Schweitzer und Küpper (1974, S.73)).

> *„Leontief-Funktionen sind für den Einsatz an Werkstoffen und an maschineller Arbeit mit konstantem Intensitätsgrad in der Praxis gut bestätigt."*
>
> Küpper (1976)

Gründe für die verbreitete Anwendung sind ihre Anwendungsfreundlichkeit und einfache Analyse.

2.3.2 Mikroökonomische Produktionsfunktionen

Mikroökonomische Produktionsfunktionen wurden als theoretisches Konzept zur Beschreibung einzelner Unternehmenseinheiten entwickelt. Ihre Anwendung finden sie in unterschiedlichen Bereichen der mikroökonomischen Theorie.

Implizite Mikroökonomische Produktionsfunktion

Die implizite mikroökonomische Produktionsfunktion wird als theoretisches Konstrukt betrachtet, dessen Ziel nicht eine empirisch fundierte Analyse realer technischer Zusammenhänge auf Unternehmensebene ist, sondern die Abbildung hochaggregierter Produktionsabläufe im Gesamtbetrieb (vergleiche Steven (1998, S.36)). Diese Form der Produktionsfunktion enthält keine Annahmen hinsichtlich der mathematischen Form. Vielmehr beschreibt sie die Anforderungen, die an explizite mikroökonomische Produktionsfunktionen zu stellen sind.

Die implizite mikroökonomische Produktionsfunktion beschreibt, ausgehend von der Produktionsmöglichkeitenmenge, alle technisch effizienten Kombinationen der Inputfaktoren des Vektors $\mathbf{x}$.

Für eine Eingutproduktion folgt

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^n_+ &\rightarrow \mathbb{R}^1_+ \\ y &= f(x_1, x_2, ...x_n). \end{aligned} \tag{2.9}$$

An Hand der funktionalen Gestalt f der Produktionsfunktion lässt sich eine Unterscheidung der impliziten mikroökonomischen Produktionsfunktion in Subtypen vornehmen. Unterscheidungskriterien sind

1. die Substitutionsmöglichkeit der Faktoren,
2. die Substitutionselastizität und
3. der Homogenitätsgrad.

Neoklassische Mikroökonomische Produktionsfunktionen

Voraussetzung für die neoklassische mikroökonomische Produktionsfunktion sind die Inada - Bedingungen:

$$\begin{array}{ll} f(0) = 0 & f(\infty) = \infty \\ f'(x_i) > 0 & f''(x_i) < 0 \\ \lim\limits_{x_i \to 0} f'(x_i) = \infty & \lim\limits_{x_i \to \infty} f'(x_i) = 0 \end{array}$$

Lässt sich die Produktion durch eine zweimal stetig differenzierbare Abbildung f darstellen, so können folgende Eigenschaften für die Produktionsfunktion angenommen werden: (vergleiche hierzu Steven (1998) und Schumann (1992))

1. konstante oder abnehmende Skalenerträge,
2. positive, abnehmende Grenzerträge und
3. abnehmende Grenzrate der Substitution.

Der *Skalenertrag* definiert den *Homogenitätsgrad* einer Produktionsfunktion und gibt an, wie sich die Ausbringungsmenge bei proportionaler Veränderung aller Faktoren verhält;

$$\lambda^\alpha y = f(\lambda \mathbf{x}) \qquad \alpha \geq 1 \quad \lambda > 0 \tag{2.10}$$

Ist $\alpha = 1$, so ist die Produktionsfunktion linear homogen, ist α hingegen kleiner (größer) Eins, so handelt es sich um abnehmende (zunehmende) Skalenerträge der Produktion. Ausgenommen zur Diskussion um monopolistische Marktbeziehungen wird unterstellt, dass die Produktion linear homogen ist. Diese Bedingung der konstanten Skalenerträge ist notwendig, damit das Grenzproduktivitätstheorem nach J.B. Clark (Entlohnung der Faktoren erfolgt zu ihrem Grenzprodukt) Gültigkeit besitzt.

Mit dem *Grenzertrag* eines Einsatzfaktors x_i wird die zusätzlich mögliche Produktionsmenge bei infinitesimaler Variation des einen Einsatzfaktors bei Konstanz aller anderen Faktoren bezeichnet. Gilt

$$f'_{xi} = \frac{\partial y}{\partial x_i} \qquad 0 < f'_{x_i} < 1, \tag{2.11}$$

so spricht man von abnehmenden Grenzerträgen. Dies bedeutet, dass eine Erhöhung eines Faktors zwar zu Steigerungen des Outputs führt, dieser sich jedoch unterproportional bezogen zur Änderung des Einsatzfaktors erhöht.

Die *Grenzrate der Substitution* gibt die mögliche Substitution zwischen Einsatzfaktoren bei konstantem Output an. Ist die Anzahl eingesetzter Faktoren n, so spannt sich im $\mathbb{R}^{n+1}_+$ das Ertragsgebirge des Outputs. Ein Schnitt durch dieses Gebirge erzeugt eine Hyperebene im $\mathbb{R}^n_+$ und definiert eine spezifische Outputmenge. Der Rand der entstehenden konvexen n-dimensionalen Menge definiert technisch effiziente Faktorkombinationen. Er wird als Produktionsmöglichkeitenkurve bezeichnet. Zu jedem Einsatz des Faktors i mit $i \in (1, n)$ existiert genau eine korrespondierende Menge der $n-1$ Faktoren. Die Grenzrate der Substitution wird zwischen zwei Inputfaktoren bei Konstanz aller anderen als

$$GRS = \frac{\partial y / \partial x_i}{\partial y / \partial x_j} \quad i \neq j \tag{2.12}$$

definiert. Bedingung ist die Annahme von Stetigkeit der Produktionsfunktion. Offensichtlich ist dies aus ökonomischer Sicht problematisch. Stetigkeit der Produktionsfunktion setzt voraus, dass die eingesetzten Faktoren beliebig teilbar sind und eine Produktion mit beliebigen Teilen effizient möglich wird. Es soll diese Annahme nicht diskutiert werden. Offensichtlich hat Stetigkeit bzw. angenommene Differenzierbarkeit *„seinen Grund in den ‚schönen' Eigenschaften solcher Funktionen."* (Casella und Berger 2002, S. 20).

2.3.3 Makroökonomische Produktionsfunktionen

Makroökonomische Produktionsfunktionen dienen der Analyse aggregierter ökonomischer Systeme. Sie sind weder geeignet, Aussagen zu einzelwirtschaftlichen Einheiten zu treffen, noch die Struktur mehrerer dieser zu erklären. Makroökonomische Produktionsfunktionen sind Instrument der Makroökonomie.

Produktionsfunktion vom Typ A - Das Ertragsgesetz

Die Produktionsfunktion vom Typ A[2] wird als erste Formulierung einer produktionstheoretischen Betrachtung angesehen. Aufgestellt wurde das „klassische Ertragsgesetz" 1766 von Jacques Turgot, dem Finanzminister Ludwigs XVI (vergleiche Steven (1998, S. 22)). Ich will diese Produktionsfunktion als makroökonomische bezeichnen, da die Landwirtschaft als aggregierter Sektor betrachtet wird. Jedoch muss erwähnt werden, dass die Produktionsfunktion vom Typ A in der betriebswirtschaftlichen und damit einzelwirtschaftlichen Diskussion eine Rolle gespielt hat (vergleiche hierzu Gutenberg (1983)).

Der vorherrschenden Wirtschaftsstruktur des 18. Jahrhunderts geschuldet, werden durch Turgot Abhängigkeiten des Ertrags landwirtschaftlicher Produktion vom Arbeitseinsatz bei Konstanz der Anbaufläche untersucht.

Voraussetzungen für ihre Beschreibung gibt Steven (1998, S.22) an. Es wird gefordert, dass

1. es sich um eine Eingutproduktion handelt,
2. es werden bis auf genau einen Faktor alle Faktoren konstant gehalten,
3. die Einsatzmenge des variablen Faktors ist Element $\mathbb{R}_+$,
4. es liegt keine vollständige Substituierbarkeit zwischen den Faktoren vor,

[2] Eine erste Bezeichnung der Produktionsfunktionen mit 'A', 'B' usw. nahm Gutenberg (1951) vor.

5. die Qualität von Inputfaktoren und Output ist konstant und

6. die Produktionstechnik ist invariabel.

Das Ertragsgesetz formuliert, dass bei Einhaltung oben genannter Bedingungen ein wie folgt zu beschreibender Verlauf der Produktionsfunktion resultiert:

Wird die Einsatzmenge des einen variablen Faktors sukzessiv erhöht, so folgt eine erst überproportionale Steigerung des Gesamtertrages, dann eine proportionale und schließlich eine unterproportionale, um dann in einem Sinken des Gesamtertrages zu enden.

Der empirische Gehalt der ertragsgesetzlichen Produktionsfunktion wird als gering eingestuft.

> *„Ein ertragsgesetzlicher Verlauf von Produktionsfunktionen konnte auch in empirischen Untersuchungen bisher nicht nachgewiesen werden.“*
>
> Steven (1998) S. 105

Gutenberg kommt zu dem Schluss, dass die Produktionsfunktion vom Typ A für die industrielle Produktion nicht als repräsentativ anzusehen ist (vergleiche Gutenberg (1983, S.325)).

Klassische Makroökonomische Produktionsfunktion

Modelle der klassischen Ökonomie beschreiben Produktion als Transformation von Input-Aggregaten in Output-Aggregate. Die Wirtschaft als Ganzes wird als Güterkreislauf betrachtet. Die Produktionsseite stellt dabei den Bereich der Gütererzeugung und Einkommensschaffung dar.

In klassischen makroökonomischen Produktionsfunktionen wird die Transformation durch limitationale Prozesse beschrieben. Hierbei sind diese Ansätze mit Input-Output-Tabellen verwandt. Im Vordergrund steht die Frage, welcher gesamtwirtschaftliche Wareneinsatz erforderlich wird, um einen bestimmten gesamtwirtschaftlichen Warenoutput generieren zu können.

Im Folgenden stelle ich repräsentativ für klassische makroökonomische Produktionsfunktionen die Arbeit von Sraffa (1976) vor. In seiner Arbeit *Warenproduktion mittels Waren* [3] entwickelt Sraffa (1976) ein makroökonomisches System von Gleichungen, das die Warenproduktion einer Ökonomie abbildet. Dabei steht er in Tradition von Ricardo, womit seine Arbeit als der klassischen Theorie zugehörig definiert werden kann. Das durch Sraffa (1976) beschriebene System kann als Gleichgewichtsmodell angesehen werden. Dieses untersucht, welche Faktorentlohnung und welche relativen Preise sich einstellen müssen, um ein makroökonomisches System der Reproduktion zu erhalten. In Abgrenzung zur neoklassischen Theorie werden Preise von Input- und Konsumgütern nicht durch ein System von Angebot und Nachfrage determiniert, sondern sind so definiert, dass Reproduktion möglich wird. Reproduktion heißt hier, dass in einer dynamischen Betrachtung die zur Produktion notwendigen Waren durch Produktion in der Vergangenheit erstellt worden sind.

Sraffa (1976) unterscheidet *Basis* und *Nicht-Basis* Waren. Basis-Waren sind solche, die neben Arbeit direkt oder indirekt in die Produktion anderer Waren eingehen (vergleiche Kurz und Salvadori (1994, S. 96)). Nicht-Basis Waren sind allein für den Konsum bestimmte Waren.

Mit $a, b, ..., k$ werden durch Sraffa (1976) die im System wirkenden Waren benannt. Ihre Produktionsmengen werden mit $A, B, ..., K$ angegeben. Ferner sind $A_a, B_a, ..., K_a$ die Mengen an Waren $a, b, ..., k$, die in die Produktion von A eingehen. Mit $L_a, L_b, ..., L_k$ werden die in der Produktion von $a, b, ..., k$ eingesetzten Arbeitseinheiten bezeichnet. Somit entsteht ein Gleichungssystem, in dem für die Produktion aller Waren eine Gleichung auftritt.

$$\begin{gathered} A_a + B_a + ... + K_a + L_a = A \\ A_b + B_b + ... + K_b + L_b = B \\ .... \\ A_k + B_k + ... + K_k + L_k = K \end{gathered} \tag{2.13}$$

Sraffas System stellt keine Produktionsfunktion im eigentlichen Sinne dar. Vielmehr ist es die Beschreibung der gesamten Produktionsseite einer Ökonomie. Jede einzelne Zeile des gesamtökonomischen Produktionsgleichungssystems kann jedoch als Produktionsfunktion einer einzelnen Ware bzw. eines einzelnen Gutes angesehen werden. Sie kann jedoch nur im Gesamtkontext erklärt werden.

[3] Titel der Originalausgabe von 1960: *Production of Commodities by Means of Comodities*

Neoklassische Makroökonomische Produktionsfunktionen

Die neoklassischen makroökonomischen Produktionsfunktionen unterscheiden sich von den neoklassischen mikroökonomischen im Faktoreinsatz und in der Definition der Produktionsmenge. Hier stellen die Inputfaktoren und die Produktionsmenge makroökonomische Aggregate der im Produktionsprozess verwendeten Faktoren und des Outputs dar. Die Eigenschaften der neoklassischen makroökonomischen Produktionsfunktionen und der mikroökonomischen sind identisch. Es wird also unterstellt, dass (a) die Funktion stetig ist, (b) ihre erste und zweite Ableitung stetig sind und (c) positive, aber abnehmende Grenzproduktivitäten vorherrschen. Die zum Einsatz kommenden Faktoren werden auf Arbeit als Aggregat und Kapital als Aggregat reduziert. Somit folgt

$$Y = F(K, L) \tag{2.14}$$

als implizite Form der neoklassischen makroökonomischen Produktionsfunktionen. Wobei Y der aggregierte Output, L der aggregierte Arbeitseinsatz und K der aggregierte Kapitaleinsatz sind. An die neoklassische makroökonomische Produktionsfunktion werden die selben Inada-Bedingungen gestellt wie an die neoklassische mikroökonomische Produktionsfunktion.

Entgegen der mikroökonomischen Formulierung einer neoklassischen Produktionsfunktion sind Y und K monetäre Größen. Es handelt sich demnach nicht um Mengen produzierter bzw. in der Produktion eingesetzter Güter, sondern um den monetären Wert dieser.

Die Zulässigkeit einer Aggregation der Größen Y, L und K ist umstritten. Nur unter restriktiven Bedingungen an die funktionale Form der Produktionsfunktion ist eine Aggregation des Outputs Y (formal mathematisch) zulässig (jedoch weiterhin ökonomisch umstritten). Hierauf werde ich in Abschnitt (5.2) weiter eingehen.

Die Frage um Zulässigkeit der Aggregation des Faktors Kapital in der neoklassischen Makroökonomie führte in den sechziger Jahren des letzten Jahrhunderts zur sogenannten *Kapitalkontroverse* bzw. *Cambridge-Cambridge-Debatte.* Diese Debatte fusst auf der Arbeit von Sraffa (1976) (geht jedoch auf Wicksell und Joan Robinson zurück) und lässt sich wie folgt skizzieren: Zur Bestimmung der (einheitlichen) Profitrate von Kapital(gütern) in einer Ökonomie muss eine Preisbewertung dieser erfolgen. Der Wert des Kapitalstocks hängt jedoch direkt von der Höhe des Zinssatzes ab, dessen Bestimmung Ziel war. Die Anhänger Sraffas schlussfolgern hieraus die Unzulässigkeit einer Aggregation von Kapitalgütern durch Bewertung dieser durch ihre Preise.

2.3.4 Verallgemeinerung - Die axiomatische Darstellung nach Shephard

Mit der axiomatischen Formulierung von Produktionsfunktionen wird der Versuch unternommen, allgemeingültige Aussagen über eine Klasse von Produktionsfunktionen zu treffen (vergleiche zum gesamten Abschnitt Teusch (1983)). Es werden Produktionssysteme unterstellt, die genau ein Outputprodukt unter Einsatz eines Inputgutvektors produzieren. Von real existierenden Beschränkungen in Produktionsprozessen wird abstrahiert. Das heißt, es wird ein quantitativ unbeschränkter Einsatz von Inputfaktoren unterstellt und die Faktoren sind beliebig teilbar. Spezialfälle der Sherpardschen Produktionsfunktion sind die Leontief-Produktionsfunktion und die CES-Produktionsfunktionen, zu denen die Cobb-Douglas-Produktionsfunktion zählt.

Eine monotone, homogene Funktion $f : \mathbb{R}_+^n \to \mathbb{R}_+$ wird dann als Produktionsfunktion bezeichnet, wenn sie folgende Axiome erfüllt:

Axiom 1

$$f(\bar{0}) = 0$$

Die Funktion f geht durch den Nullpunkt. Eine Produktion ohne Einsatz von Inputfaktoren ist nicht möglich.

Axiom 2

$$\exists \mathbf{x} > \bar{0} : f(\mathbf{x}) > 0$$

Es existiert (mindestens) ein Vektor Inputfaktoren $\mathbf{x}$, für den ein positiver Output erzielt werden kann. Dabei wird nicht vorausgesetzt, dass alle Faktoren an der Produktion beteiligt sind, das heißt, Elemente in $\mathbf{x}$ können Null sein.

Axiom 3

$$f(\mathbf{x}) \leq f(\lambda\mathbf{x}) \quad \forall\lambda \geq 1, \quad \forall\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n_+$$

Eine proportionale Vergrößerung der als unbegrenzt vorhanden angenommenen Inputfaktoren ermöglicht eine Vergrößerung der Outputmenge. Axiom 3 erzwingt einen immer währenden Produktionsanstieg bei zusätzlichem, proportionalen Einsatz von Inputfaktoren. Damit folgt, dass der Output nicht konstant werden kann bzw. ab einem bestimmten Input abnimmt.

Axiom 4

$$f(\mathbf{x}) > 0 \rightarrow \lim_{\lambda\rightarrow\infty} f(\lambda\mathbf{x}) = \infty$$

Unter der Voraussetzung der unbegrenzten Verfügbarkeit von Inputfaktoren ermöglicht der unbegrenzte, proportionale adäquate Einsatz einen unbegrenzten Produktionsoutput.

Axiom 5

$$f \text{ ist halbstetig nach oben auf } \mathbb{R}^n_+$$

Axiom 5 sagt aus, dass die Produktionsfunktion nicht in jedem Punkt zwingend stetig zu sein hat. Ist eine Funktion f halbstetig nach oben und nach unten, so ist sie stetig. Halbstetigkeit nach oben wird gefordert, um Produktionsverfahren als Produktionskorrespondenz beschreiben zu können. Es sind diskrete Sprünge des Funktionswertes $f(x)$ möglich. Produktionskorrespondenzen beschreiben Produktionsverfahren, deren Faktoren nicht vollständig substituierbar sind. Ein Beispiel hierfür wäre eine limitationale Produktionsfunktion.

2.4 Anmerkung

Produktionsfunktionen werden - wie gezeigt - in vielen Bereichen ökonomischer Forschung verwendet. Dabei erfolgt ihre Verwendung häufig unreflektiert und kritiklos. Dies ist m.E. bedenkenswert. Im Folgenden skizziere ich Probleme, die ich im Zusammenhang mit Produktionsfunktionen und ihrer Anwendung erkenne.

I Produktionsfunktionen sind keine naturwissenschaftlichen Axiome. Sie sind auch keine objektiven, gegebenen Zusammenhänge, die nur entdeckt werden müssen. Produktionsfunktionen drücken nicht nur die Beziehung von Input und Output aus sondern reflektieren auch das politisch-ökomoische Denken des Anwenders. Dies zeigt sich gerade in der Kapitalkontoverse oder in der Aggregationsdebatte, auf die ich später eingehen werde. So ist z.B. die Frage um Substitutionsbeziehungen zwischen den Faktoren Arbeit und Kapital nicht allein eine technische. Mit der Festlegung auf eine bestimmte Substitutionsbeziehung in einer Produktionsfunktion und der Nutzung dieser in ökonomischer Modellierung können ganz bestimmte wirtschafts- und verteilungspolitische Aussagen gemacht werden. Die Wahl einer Produktionsfunktion hat somit entscheidenden Einfluss auf das Ergebnis von Modellierung.

II Produktionsfunktionen können nicht wie physikalische oder andere naturwissenschaftliche funktionale Zusammenhänge bestimmt werden. Sie lassen sich nicht (oder nur sehr begrenzt) durch Experimente ermitteln. Produktionsfunktionen können durch Verfahren der Ökonometrie geschätzt werden. Hierzu wird ein Funktionstyp durch den Anwender vorgegeben und im Anschluss werden die Parameter dieser Funktion durch *Regressionsanalyse* geschätzt. Zum Einsatz kommen statistische Verfahren wie z.B. die Maximum-Likelihood-Methode oder die Kleinste-Quadrate-Schätzung. Voraussetzung für diese Verfahren sind Datenreihen der Inputfaktoren und des Outputs. Offensichtlich liegt hier ein Problem. Daten werden nur in einem geringen Intervall vorliegen. Das heißt, die Produktionsfunktion kann auch nur für dieses Intervall sinnvoll geschätzt werden. Interpolation nach unten bzw. nach oben wird somit willkürlich.

III Je höher die Aggregationsebene ist, für die eine Produktionsfunktion bestimmt werden soll, desto weniger Expertise liegt für Einzelprozesse der

Produktion vor. Die Bestimmung der Funktion wird damit zu einem rein ökonometrischen Verfahren, ohne dass technisches Wissen zu den Prozessen vorliegen kann. So bildet die makroökonomische Cobb-Douglas-Funktion keinen technischen Prozess ab sondern ist eine Verknüpfung monetären Größen und Mengengrößen.

IV Werden Produktionsfunktionen auf Grundlage erfolgter Produktion geschätzt, so fließen nur solche Input- und Outputquantitäten ein, die bereits durch einen Entscheidungsprozess bei Produktion bestimmt wurden. Die so ermittelte Produktionsfunktion ist somit eine Teilmenge einer größeren, möglichen.

Kapitel 3

Optimierung

Optimierungsverfahren werden in der betrieblichen Praxis, in der Betriebs- und Volkswirtschaftslehre genutzt. In der volkswirtschaftlichen Theorie werden sie vielfach eingesetzt um Entscheidungen von rational handelnden Akteuren abzubilden. Im folgenden Kapitel gehe ich auf drei Punkte ein. Zum einen werde ich in einem Überblick das mathematische Konzept der Optimierung vorstellen, um genauer auf die Frage lokaler versus globaler Lösungen einer Optimierung eingehen zu können. Letzteres hat gerade für die Beschreibung von Handlungen ökonomischer Agenten Bedeutung. Das Beschreiben solcher Handlungen über Optimierungsprobleme und die Anwendungsmöglichkeiten der Optimierung in der Betriebs- bzw. Volkswirtschaftslehre werde ich im zweiten Abschnitt diskutieren. In einem dritten Punkt stelle ich informationstechnische Lösungen von Optimierungsalgorithmen vor. Die Komplexität des in meinem Modell enthaltenen Optimierungsproblems setzt hohe Anforderungen an informationstechnische Lösungen voraus. Solche Anforderungen werde ich diskutieren, um weiterhin die von mir genutzten informationstechnischen Umsetzungen zur Optimierung (im folgenden - Solver -) daran zu messen.

3.1 Optimierung - Mathematisches Verfahren

Optimierung ist die Suche nach einem Punkt im m-dimensionalen Vektorraum, der den Wert einer Zielfunktion maximiert bzw. minimiert. Eine Zielfunktion ist eine Abbildung des $\mathbb{R}^m$ in den $\mathbb{R}$. Nebenbedingungen beschränken die Menge der zulässigen Punkte des Vektorraums. Nebenbedingungen können Gleichungs- und Ungleichungsform haben. Die Nebenbedingungen erzeugen die zulässige Menge des Optimierungsproblems. Sie bestimmen, ob die zulässige Menge kompakt ist und welche Konvexitätseigenschaften die zulässige Menge besitzt. Beide Merkmale sind entscheidend für die Frage, ob ein Optimierungsproblem Lösungen besitzt.

Es sind lokale und globale Optima zu unterscheiden. Lokale Optima sind solche Maxima oder Minima einer Zielfunktion, für die in ihrer unmittelbaren Umgebung kein Punkt existiert, für den ein höherer bzw. geringerer Zielfunktionswert existiert. Ein globales Optimum eines Optimierungsproblems ist solch ein Punkt, für den es in der gesamten zulässigen Menge des Optimierungsproblems keinen weiteren Punkt gibt, der einen größeren bzw. geringeren Zielfunktionswert aufweist (vergleiche hierzu Intriligator (2002) und Dixit (1990)).

Vorhandensein und Eindeutigkeit einer Optimierungslösung

Optimierungsprobleme können keine, eine, endlich viele und unendlich viele globale Lösungen aufweisen. Neben globalen (einer oder mehreren) Lösungen können lokale Lösungen bestehen. Eine Lösung $f(\mathbf{x}^\star)$ ist lokale Lösung einer Maximierung, wenn

$$f(\mathbf{x}^\star) \geq f(\mathbf{x} + \bar{\epsilon}) \qquad \lim \bar{\epsilon} \rightarrow \bar{0} \tag{3.1}$$

gilt. $\mathbf{x} + \bar{\epsilon}$ definiert eine Umgebung von $\mathbf{x}$.

Für eine globale Lösung eines Maximierungsproblems gilt für den Lösungsvektor der Kontrollvariablen

$$\mathbf{x}^\star \in X \quad \text{und} \quad f(\mathbf{x}^\star) \geq f(\mathbf{x}) \quad \forall\, \mathbf{x} \in X, \tag{3.2}$$

wobei $\mathbf{x}$ Element der zulässigen Menge X ist. Als zulässige Menge wird jene Menge des Definitionsbereichs der Zielfunktion bezeichnet, die durch die Nebenbedingungen des Optimierungsproblems eingeschränkt wird. Gilt für den Lösungsvektor

$$\mathbf{x}^\star \in X \quad \text{und} \quad f(\mathbf{x}^\star) > f(\mathbf{x}) \quad \forall\, \mathbf{x} \in X, \tag{3.3}$$

so ist die Lösung eindeutig.

Das Weierstrass Theorem ermöglicht, Angaben zum Vorhandensein einer Lösung einer Optimierung zu machen (vergleiche Intriligator (2002, S. 13)). Danach besitzt ein Optimierungsproblem der Gestalt

$$\begin{aligned} \max f(x) \\ \text{s.t. } x \in M \end{aligned} \tag{3.4}$$

mit $M \subset \mathbb{R}^n$ ein globales Minimum und ein globales Maximum, wenn f stetig und die durch die Nebenbedingungen definierte Teilmenge M des $\mathbb{R}^n$ kompakt ist.

Weiterhin ist zu prüfen, ob das Optimierungsproblem genau eine (globale) Lösung besitzt oder ob es daneben weitere lokale Lösungen geben kann. Hierzu muss das lokal-global-Theorem angewendet werden (vergleiche hierzu Intriligator (2002)). Notwendige und hinreichende Bedingungen für eine eindeutige globale Lösung des Optimierungsproblems sind die Forderungen, dass die Zielfunktion f (streng) konkav und die zulässige Menge konvex sind. Der Nachweis bezüglich Konkavität bzw. Konvexität einer Funktion erfolgt über die Hesse-Matrix H. Ist die Hesse-Matrix H einer Funktion überall negativ definit, so ist die Funktion konkav. Die Eigenwerte der Hessematrix müssen hierzu alle kleiner Null sein.

3.2 Anwendung von Optimierung in den Disziplinen der Wirtschaftswissenschaft

Anwendung in der betrieblichen Praxis

Ökonomisches Handeln ist Umgang mit knappen Ressourcen und deren Allokation auf konkurrierende Objekte oder Subjekte. In der betriebswirtschaftlichen Praxis ist dies die Allokation von Inputfaktoren auf produzierende Einheiten wie Maschinen und Anlagen. Handeln Unternehmer rational, so werden sie versuchen, die Ressourcenallokation so vorzunehmen, dass das Ergebnis der Produktion das bestmögliche ist.

In Unternehmen werden Optimierungsansätze genutzt, um unternehmerisches Handeln zu bestimmen. Dies umfasst alle Bereiche eines Unternehmens von der Produktionsplanung, Investitionsentscheidungen bis hin zur Steuerung von Prozessen innerhalb des Produktionsvorgangs. Hierzu werden im *Operation Research* betriebliche Prozesse so bestimmt, dass den Zielstellungen der Unternehmung entsprechende optimale Handlungsanweisungen resultieren.

Zielgröße der Optimierung von Unternehmen ist in der Regel der Gewinn. Dieser definiert sich als Differenz von Aufwand und Ertrag einer Periode. Betriebliche Prozesse werden also so bestimmt, dass dieser Gewinn maximiert wird. Real operierende Unternehmen können kurzfristig weitere oder andere ökonomische Größen als zielbestimmend ansehen. Solche Größen sind u.a. die Wettbewerbsfähigkeit, der Marktanteil, der Cash Flow oder weitere ökonomische Größen. Werden mehrere Größen gleichzeitig als relevant erachtet, so können Verfahren der Mehrzieloptimierung angewendet werden.

Das Handeln real operierender Unternehmen erfolgt unter Restriktionen, die durch die ökonomische, natürliche, technologische, soziale und politische Umwelt definiert werden. Handlungen müssen diesen Restriktionen Rechnung tragen.

Anwendung in der Volkswirtschaftslehre

Zielorientiertes Handeln kann als Optimierungsprozess dargestellt werden. Optimierungsverhalten wird dabei zum Modell der Beschreibung des Verhaltens ökonomischer Akteure. Das erfolgt vor dem Hintergrund der Annahme, menschliches ökonomisches Handeln als Maximierung oder Minimierung bestimmter ökonomischer Größen beschreiben zu können (vergleiche hierzu auch die Anmerkungen zur Rationalität des Handelns in Abschnitt (5.3)).

Optimierung wird sowohl in der Mikroökonomie als auch in der Makroökonomie angewendet. In (einzelnen Bereichen) der mikroökonomischen Theorie werden Optimierungsansätze genutzt, um das Verhalten von mikroökonomischen Akteuren wie Haushalten oder Unternehmen zu beschreiben.

In der Makroökonomie wird Optimierung u.a. in Modellen der Wachstumstheorie, in DSGE Modellen und hochaggregierten Totalmodellen angewendet. Hiebei wird unterstellt, dass das Verhalten eines fiktiven, aggregierten oder repräsentativen Akteurs wie z.B. einem aggregierten Haushalt, durch Optimierung beschrieben werden kann. Diese Vorgehensweise ist jedoch problematisch, wie in der Debatte zur Aggregationstheorie diskutiert wird (vergleiche hierzu Abschnitt (5.2)). Die Beschreibung des Handelns von Akteuren durch Optimierungsverfahren stößt auf Probleme in Bezug auf die unterstellte Rationalität der Akteure (vergleiche hierzu Abschnitt (5.3)). Dies betrifft m.E. die Behandlung von Haushalten mehr als die Behandlung von Unternehmen. Unternehmen nutzen für die betriebliche Entscheidung Optimierungsansätze. Die Beschreibung ihres Handelns in der mikroökonomischen Theorie durch Optimierungsansätze ist somit gerechtfertigt. Dies kann jedoch nur für große Unternehmen gelten, da kleine Unternehmen nicht die Kapazitäten für ein eigenes Operation Research haben. Als problematisch erachte ich es jedoch, die Entscheidung von Unternehmen als Ergebnis einer globalen Optimierungslösung zu beschreiben, da diese zu finden schwierig ist.

3.3 Technische Anforderungen an Optimierungssolver

Die Wahl des zur Lösung von Optimierungsproblemen genutzten Algorithmus hängt von der mathematische Struktur des Optimierungsproblems und den zu erfüllenden Anforderungen an die Lösung ab. Solche mathematischen Eigenschaften sind Stetigkeit, Konvexität, Differenzierbarkeit und Linearität bzw. Nichtlinearität der Zielfunktion und die Struktur der Nebenbedingungen.

Mein Modell ist seiner Komplexität wegen nicht geeignet, analytisch gelöst zu werden. Grund hierfür sind seine dynamische Struktur und die Vielzahl simulierter Agenten. Aus diesem Grund war es mir Aufgabe, einen geeigneten Solver zu finden. Diese Aufgabe stellte sich als Herausforderung dar.

Ein *Solver* ist ein Computerprogramm, das es ermöglicht, Optimierungsaufgaben zu lösen. Während meiner Arbeit habe ich mehrere Solver auf ihre Tauglichkeit für das von mir entwickelte Modell geprüft. Dies waren

1. Solver, die im Rahmen der Matlab und Mathematica Software vertrieben werden,

2. eine Pythonversion des SimpleOpt Solvers
   (vergleiche hierzu http://dossv1.ici.ro/simpleopt/simpleopt2.html),

3. GAMS Solver

4. und eine eigene Solverentwicklung. Der entwickelte Solver wurde durch mich in Python formuliert. Es wurde ein Algorithmus implementiert, der durch Professor Rupert Klein, Professor Carlo Jaeger und mich in unserem Institut entwickelt wurde. Der Solver verwendet ein gradientenbasiertes Verfahren. Der Solver befindet sich mit Fertigstellung dieser Arbeit noch nicht in einem Zustand, der es zulässt, komplexe Optimierungsprobleme effizient zu lösen.

Die Wahl geeigneter Solver für die Optimierung in der Modellierung ökonomischer Probleme stellt in sich ein eigenes Optimierungsproblem dar, das durch viele Randbedingungen geprägt ist. Prinzipiell wünscht sich der Modellierer eine Umsetzung, die schnell, genau und allgemein einsetzbar ist. Diese und weitere Anforderungen vollständig zu erfüllen, ist aus meinen Erfahrungen keiner der derzeitig verfügbaren Solver in der Lage.

Im Folgenden beschreibe ich für meine Arbeit relevante Anforderungen, die ich an Solver stelle. Im Anschluss daran werde ich deren Umsetzung an von mir untersuchten Solvern diskutieren.

Präzision

Wann ist die Lösung eines Optimierungsproblems, die durch einen Solver gefunden wird, als genau zu bezeichnen? Diese Frage allgemein gültig zu beantworten kann m.E. nicht gelingen. Prinzipiell wäre eine Lösung nur dann genau, wenn im mathematischen Sinne die analytische Lösung der numerischen Lösung des Solvers entspräche. Solver sind jedoch nur in der Lage, Elemente aus $\mathbb{R}$ durch Ausdrücke mit endlich vielen Dezimalstellen zu behandeln. Somit wird auch die Genauigkeit der Ergebnisse einer Rechnung durch diese Anzahl bestimmt. Festzuhalten ist somit, dass eine durch Computer gefundene Lösung eines Optimierungsproblems nicht notwendig „genau“ ist. Dieses technisch interessante Problem hat aus meiner Sicht jedoch keine Relevanz für Modellierung, wie ich sie betreibe. Für mich ist in erster Linie von Interesse, ob die programmiertechnische Übersetzung eines mathematischen Optimierungsalgorithmus so vorgenommen wurde, dass die Ergebnisse von Berechnungen des Solvers mit akzeptabler Abweichung denen einer analytischen Berechnung entsprechen. Für den Anwender eines Solvers ist es allgemeinen schwierig, dies abzuschätzen, es sei denn, die formulierten Optimierungsprobleme sind trivial. Komplexere Strukturen hinsichtlich der Nebenbedingungen und hochdimensionale Lösungsräume lassen das Treffen von Abschätzungen hinsichtlich Genauigkeit durch den Anwender unmöglich werden. Zu einigen Solvern existieren sogenannte Benchmark-Tests im Internet. Solche Tests werden genutzt, um Angaben zu Ergebnisabweichungen zwischen Solvern und Berechnungszeiten machen zu können.

In einem weiteren Sinne will ich Genauigkeit als „Präzision“ bezeichnen. Hierbei handelt es sich um eine durch den Anwender zu definierende Genauigkeit, die er von den Ergebnissen der Optimierung verlangt. Bei allen von mir untersuchten Solvern ist es möglich, diese anzugeben. Ihre Wahl hat Auswirkungen auf die Berechnungszeit der Optimierung.

Während meiner Arbeit mit den Solvern der Mathematica Global Optimization Software habe ich für GAMS enwickelte Benchmark Probleme genutzt, um die Mathematica Solver auf ihre Genauigkeit hin zu prüfen (vergleiche Benchmark (2005)). Hierbei zeigten sich erhebliche Schwächen der von mir untersuchten Mathematica Solver hinsichtlich ihrer Genauigkeit, wobei ich immer unterstellen musste, dass die durch die GAMS Solver gefundenen

Lösungen richtig sind. Es ergab sich daraufhin ein umfangreicher E-Mail-Kontakt zum Entwickler der Mathematica Solver Craig Loehle, was zu zahlreichen Verbesserungen der Solver und Fehlerbereinigungen geführt hat.

Geschwindigkeit

Die Geschwindigkeit bzw. benötigte Berechnungszeit der Optimierung ist weiteres Kriterium der Wahl eines geeigneten Solvers. Sind ökonomische Modelle komplex, so ist entscheidend, dass die Berechnungszeit einzelner Optimierungsschritte gering bleibt. Gerade für die Berechnung allgemeiner Marktgleichgewichte, wo über viele Iterationsschritte Lösungen gefunden werden müssen, ist kurze Rechenzeit wichtig. Die Geschwindigkeit hängt dabei von mehreren Faktoren ab. Zum einen ist dies die verwendete Programmiersprache, in der der Solver bzw. die Software, in die er eingebettet ist, programmiert wurde und ob es sich hierbei um eine Compiler- oder Interpreter-Sprache handelt.

Weiterhin hängt die Geschwindigkeit der Optimierung von den in den Solvern verwendeten mathematischen Optimierungsverfahren ab. Die durch den Modellierer geforderte Präzision der Ergebnisse hat ebenfalls Auswirkungen auf die Dauer der Berechnung. Je höher die Anforderungen an die Präzision sind, desto länger wird die Berechnungszeit ceteris paribus. Offensichtlich hat die Struktur des Optimierungsproblems eine große Auswirkung auf die Berechnungszeit. Die Dimension des Vektorraums, in dem die Lösung zu finden ist, dessen Ausdehnung und die Struktur der Nebenbedingungen sind hier von zentraler Bedeutung.

Lässt sich durch Wahl der Solver oder die programmtechnische Einbettung der Optimierung in den Modellaufbau keine weitere Verbesserung der Rechenzeit erreichen, so bietet sich Parallelisieren als Lösung an. Hierbei werden simultan Optimierungen auf unterschiedlichen Prozessoren vorgenommen. Dies kann durch die Erstellung eigener Netzwerklösungen im Verbund mehrerer Computer oder, wie am PIK möglich, auf einem Parallelrechner geschehen.

Lokale versus globale Optima

Komplexe ökonomische Modelle werden in der Regel mehrere lokale Optima besitzen. Da es zum Standard der ökonomischen Modellierung geworden ist, Handlungsergebnisse von Akteuren nicht als lokale Optima zu definieren, sondern davon auszugehen, dass es sich um globale handelt, stellt sich an Solver als weitere Anforderung, gegen lokale Lösungen weitestgehend resistent zu sein. Prinzipiell existiert kein mathematisches Optimierungsverfahren, das diesem Anspruch gerecht werden kann. Es hängt somit von der informationstechnischen bzw. programmtechnischen Einbettung mathematischer Optimierungsalgorithmen ab, ob Resistenz gegen lokale Lösungen hergestellt werden kann. Hierbei werden unterschiedliche Verfahren genutzt.

Die wohl einfachste Methode stellt das iterative Suchen mehrerer lokaler Lösungen dar, wobei Startpunkte der Optimierung zufällig gewählt werden. Im Ergebnis wird die Lösung mit dem höchsten bzw. geringsten Zielfunktionswert gewählt. Dieses Verfahren ist aus zweierlei Hinsicht problematisch. Zum einen benötigt es lange Berechnungszeiten und zum anderen könnte nur mit einer unendlichen Anzahl von Berechnungen mit Sicherheit auf eine globale Lösung geschlossen werden.

Ein weitere Möglichkeit besteht in der Nutzung von Trägheit innerhalb des Optimierungsalgorithmus. Hierbei schwingt der sich in einem Berechnungsschritt ergebene Zielfunktionswert über lokale Lösungen hinaus. Somit wird der Algorithmus hinsichtlich kleiner lokaler Lösungen resistent.

Simulated-Annealing-Methoden bieten sich als weitere Problemlösung an. Hierbei handelt es sich um heuristische Optimierungsverfahren. Bei der Lösungssuche im Vektorraum werden nach Finden einer lokalen Lösung mit einer Wahrscheinlichkeit α Verschlechterungen des Zielfunktionswertes zugelassen. α wird dabei über die Anfangskonfiguration des Systems, das Ausmaß einer möglichen Zielfunktionswertverschlechterung und einem sogenannten Abkühlungsparameter bestimmt. Im Ablauf des Verfahrens reduziert sich dann α, bis die Akzeptanz schlechterer Lösungen gegen eine vom Anwender definierte Grenze konvergiert (vergleiche hierzu Cherny (1985)).

Kopplungsmöglichkeit

Werden Optimierungsprobleme im Rahmen komplexer Modellstrukturen genutzt, so ist es von Vorteil, wenn die Optimierung als eigenständige Routine definiert und programmiert werden kann, um diese dann über Kopplungsmodule in die Modellstruktur zu implementieren. Dabei bieten sich u.a. zwei Verfahren an. Zum einen kann, wenn es die Solver ermöglichen, ein Einbinden dieser als Modul in eine beliebige Programmiersprache erfolgen. Dies ist sowohl bei den (mir zur Verfügung stehenden) Mathematica Solvern als auch bei GAMS Solvern nicht möglich.[1] Eine weitere Möglichkeit besteht in der

[1] Einschränkend muss ich erwähnen, dass von Loehle ein Angebot zu seinen Solvern in $C++$ besteht.

Kopplung über File-Transfer. Hierbei werden Parameterdateien durch ein Treibermodul bereitgelegt und vom Optimierungssolver für dessen Berechnung eingelesen. Nach Beendigung der Berechnung wird eine Ergebnisdatei durch den Solver generiert, die durch den Treiber gelesen werden kann. Entscheidend ist es dann, ob es gelingt, die Optimierungssolver aus dem Treiber direkt anzusteuern und zum Beginn einer Berechnung aufzufordern. Ich habe zur Kopplung ein in Python programmiertes Kopplungsmodul genutzt. Dieses ist sowohl in der Lage, Parameter zu generieren, diese in für Mathematica Solver oder GAMS Solver verwendbare Parameterdateien zu hinterlegen, als auch die Optimierungsroutinen zu starten. Nach erfolgter Optimierung kann das Kopplungsmodul die Ergebnisse für weitere Berechnungen oder Parameteränderungen durch Einlesen von Ergebnisdateien nutzen.

Transparenz der Algorithmen

Erstrebenswert wäre, könnte der Anwender die informationstechnische Umsetzung von Optimierungsalgorithmen der von ihm verwendeten Solver kennen und verstehen. Das wäre gerade dann erforderlich, wenn Ergebnisse der Optimierung für den Anwender in technischem oder mathematischem Sinne nicht interpretierbar sind oder konkrete Programmfehler auftreten. Der Transparenzforderung sind offensichtlich inhaltliche und kommerzielle Grenzen gesetzt. Inhaltlich in der Hinsicht, als dass in verfügbaren Solvern mathematisches und informatisches Wissen steckt, das beim Anwender nur begrenzt vorhanden sein wird. Kommerzielle Grenzen bestehen hinsichtlich der rechtlichen Rahmenbedingungen. So sind Entwickler von kommerziell vertriebenen Solvern nur bedingt bereit, die von ihnen entwickelte Struktur der Programme zu dokumentieren und zu veröffentlichen.

Support und Softwarepflege

Eng mit der Frage um Transparenz verbunden sind die Punkte Support und Softwarepflege. Für den Anwender ist es gerade bei Problemen um Interpretierbarkeit von Lösungen oder Fehlermeldungen wichtig, direkten Zugriff auf Fachwissen der Entwickler der Solver zu haben. Dies ist nur durch einen umfangreichen Support durch den Entwickler bzw. den Anbieter kommerzieller Software möglich. Ich habe erfahren, dass bezogen auf den Entwickler der Mathematica Solver Loehle Enterprice, ein großes Interesse an Rückmeldungen bezüglich Fehlermeldungen und Benchmarktests besteht. Bei der Nutzung von GAMS Solvern hingegen besteht das Problem, das Ansprechpartner für Supportanfragen nicht die Entwickler der Solver, sondern Anbieter der GAMS Software sind. Supportanfragen laufen somit jeweils über Dritte. Der Umfang an Softwarepflege ist ein weiteres, wenn auch untergeordnetes Kriterium für die Wahl eines Solvers. Sowohl für die Solver der GAMS Software als auch für die von Loehle Enterprice entwickelten Mathematica Solver stehen in unregelmäßigen Abständen Updates zur Verfügung.

3.4 Solver-Vergleich

Nachfolgend geht es mir um einen Vergleich der von mir genutzten Mathematica Solver und GAMS Solver. Weitere von mir getestete Solver werden vernachlässigt.

Mathematica - Solver

Die von mir genutzten und für die zu lösenden Probleme getesteten Mathematica Solver werden durch die Firma Loehle Enterprice entwickelt und vertrieben. Es handelt sich hierbei um Solver für die Lösung unterschiedlicher linearer und nichtlinearer Probleme mit und ohne Nebenbedingungen sowie Solver zur Regressionsanalyse und zur Maximum-Likelihood-Bestimmung.

Die für die nichtlineare Optimierung unter Nebenbedingungen entwickelten Solver bezeichnen sich als GlobalSearch und GlobalPenaltyFn. Sie nutzen ein generalisiertes Hillclimbing-Verfahren, das auf der Newton-Methode beruht. Dabei werden numerisch ermittelte Gradienten genutzt, so dass eine analytische Bestimmung von Gradienten nicht erforderlich wird (vergleiche hierzu Loehle (2006, S. 13)).

Für den GlobalSearch Solver ist es erforderlich, dass Zielfunktion und Nebenbedingungen analytisch sind. Anders hingegen bei GlobalPenaltyFn. Hier können Funktionen nichtanalytisch sein. Somit können z.B. logische Funktionen Zielfunktion sein und Nebenbedingungen können nicht-stetigen Charakters sein.

GlobalPenaltyFn ist in seinem Lösungsverhalten dahingehend robuster, dass nicht zulässige Startpunkte bzw. Zwischenergebnisse im Hillclimbing Algorithmus zugelassen werden. Unzulässige Startpunkte sind solche, die außerhalb der zulässigen Menge liegen, die durch die Nebenbedingungen definiert wird. Gerade bei komplexen Strukturen von Nebenbedingungen ist GlobalSearch nicht in der Lage, einen Startpunkt oder Zwischenergebnisse in die zulässige Menge zurückzuführen. GlobalPenaltyFn vergibt für solche Punkte Penalty. Die Verletzung einer Nebenbedingung führt demnach zu Strafpunkten im Zielfunktionswert.

Beide Solver erlauben Nebenbedingungen in Gleichungs- als auch in Ungleichungsform. Gleichungen werden durch Addition bzw. Subtraktion eines ϵ in zwei Ungleichungen transformiert. Über einen Toleranzparameter wird das Abbruchverhalten der Algorithmen bestimmt. Lässt ein Schritt im Hillclimbing Verfahren keine Verbesserung zu, die größer als der Toleranzparameter ist, so stoppt das Verfahren.

Beide Solver versuchen, Resistenz gegen lokale Optima zu erzielen, was in Abhängigkeit von der Problemstellung teilweise gelingt. Mittels multipler Startversuche, die entweder durch den Anwender vorgegeben werden oder aber zufällig gewählt sind, lassen sich Lösungen weiterhin verbessern. Die hierdurch bedingten langen Rechenzeiten beschränken die Anwendung multipler Startpunkte für die Modellierung komplexer Systeme.

GAMS Solver Conopt

Für die GAMS-Umgebung existieren eine Reihe unterschiedlicher und für unterschiedliche Anwendungen konzipierte Solver. Dies sind u.a. Baron, Conopt, Minos und weitere (vergleiche hierzu und für den gesamten Abschnitt GAMS (2003)). Für von mir durchgeführte Optimierungen habe ich vorwiegend den Conopt Solver genutzt. Dieser Solver ist konzipiert, um nichtlineare Probleme mit Nebenbedingungen in Gleichungs- und Ungleichungsform zu lösen. Conopt ist kein Solver, der globale Optima zwingend findet. Conopt nutzt den *generalized reduced gradient* (GRG) Algorithmus. Dieser Algorithmus verwendet Gradienteninformationen zur Lösung. Voraussetzung sind differenzierbare, stetige Funktionen. Logische Bedingungen oder Fallunterscheidungen werden damit im Apparat der Zielfunktion oder in den Nebenbedingungen nicht möglich, was den Nutzungsumfang des Solvers einschränkt. Optimierungsprobleme werden in einem für die GAMS Software lesbaren Format als Textdatei formuliert. Dabei ist es erforderlich, dass die Funktionen des Modells analytisch durch GAMS ableitbar sind. Anders als bei den vorgestellten Mathematica Solvern werden Gradienten also nicht allein numerisch ermittelt.

Im Lösungsalgorithmus von Conopt erfolgt nur innerhalb der zulässigen Menge eine Konvergenz zur Lösung des Optimierungsproblems. Liegt der gewählte Startpunkt ausserhalb dieser Menge, so wird im Initialisierungsschritt dieser in die zulässige Menge zurückgeführt. Dieses Zurückführen ist unter Umständen sehr aufwendig, benötigt somit viel Zeit und ist nicht zwingend erfolgreich. Verlässt der Algorithmus während der Suche eines Optimums die zulässige Menge, so wird vor einem weiteren Iterationsschritt der gewählte Punkt in die zulässige Menge zurückgeführt. Conopt ist kein Algorithmus, der lokale Lösungen finden kann. Um die Wahrscheinlichkeit des Findens der globalen Lösung zu erhöhen, bietet es sich an, mit multiplen, stochastisch gewählten Startpunkten die Optimierung wiederholt auszuführen. Gegenüber den Algorithmen von Mathematica ist Conopt sehr schnell. Dies macht den Solver für die Nutzung in komplexen, dynamischen Modellen gut anwendbar.

Test auf globale Optima

Es soll nun an einem Optimierungsproblem mit mehreren lokalen Lösungen exemplarisch gezeigt werden, welche Lösungen die Solver GlobalSearch, GlobalPenaltyFn und Conpot bei unterschiedlich gewählten Startpunkten finden. Dabei wird der Startpunkt x' der Optimierung im Intervall $(0, 10)$ in Schritten von 0.1 verändert.

Als zu lösendes Optimierungsproblem habe ich das folgende gewählt:

$$\min_{x} \quad y = \sin(x)x^2 \tag{3.5}$$
$$s.t. \quad x \geq 0 \tag{3.6}$$
$$x \leq 20 \tag{3.7}$$

Abbildung (3.1) zeigt die gewählte Zielfunktion. Bei gegeben Nebenbedingungen liegt das globale Optimum bei 17.39. Lokale Lösungen liegen bei 5.3 und 11.3. Die Abbildungen (3.2) , (3.3) und (3.4) zeigen, welche Lösungen die Solver GlobalSearch, GlobalPenaltyF und Conopt bei unterschiedlichen Startwerten x' finden.

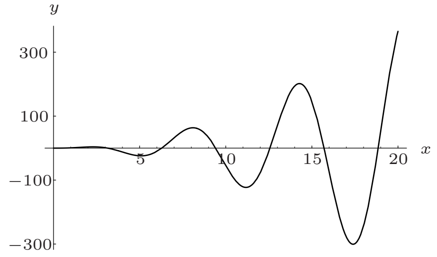


Abbildung 3.1: Zielfunktion f(x)

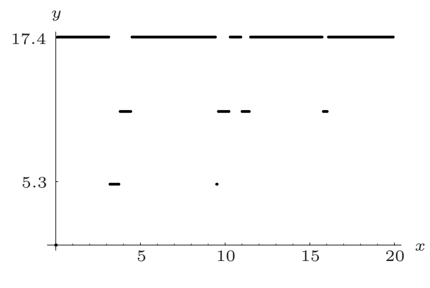


Abbildung 3.2: Lösung durch GlobalSearch

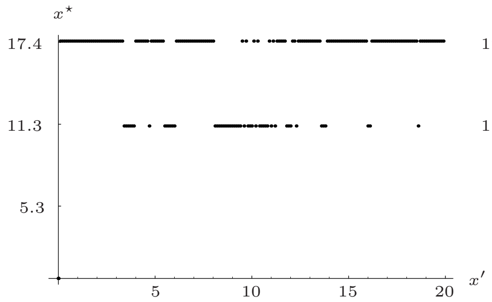


Abbildung 3.3: Lösung durch GlobalPenaltyF

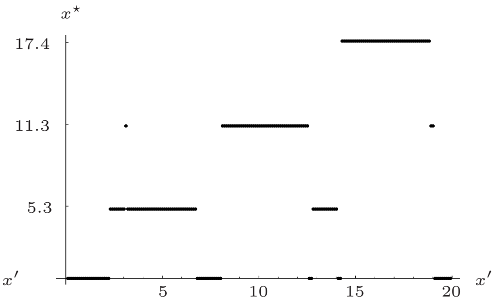


Abbildung 3.4: Lösung durch Conopt

Wie man erkennen kann, ist keiner der Solver in der Lage, bei beliebigem Startpunkt das globale Optimum bei $x = 17.39$ zu ermitteln.

Die besten Ergebnisse im Bezug auf die Häufigkeit des Findens der globalen Lösung erzielt der Solver GlobalSearch. Auch der Solver PenaltyFn ist häufig in der Lage, unabhängig von Startpunkt, die globale Lösung zu finden.

Der GAMS Solver Conopt findet nur dann die Lösung, wenn der Startwert von x in relativer Nähe zu $x^\star$ liegt. Ursache hierfür ist, dass Conopt allein ein lokaler Solver ist.

Um mit hoher Sicherheit die globale Lösung zu finden, wird es somit notwendig, die Optimierung von mehreren zufällig gewählten Startpunkten zu wiederholen.

Einsatzentscheidung für einen Solver

Gemessen an den formulierten Kriterien ist der Conopt Solver von den getesteten Solvern der für meine Modellierung am besten geeignete. Zwar kann er nur globale Lösungen finden, wenn der Startwert in der Nähe dieses Optimums liegt, doch sind folgende Kriterien von Conopt besser erfüllt als von den anderen getesteten Solvern.

(I): GlobalSearch scheitert (häufig) bei komplexen Nebenbedingungensstrukturen. Das Zurückführen des Algorithmus in die zulässige Menge ist zeitaufwendig und nicht immer erfolgreich.

(II): GlobalPenaltyFn endet z.T. im Bereich der unzulässigen Menge. Weiterhin ist der Solver langsam.

(III): Um das globale Optimum mit hoher Wahrscheinlichkeit ermitteln zu können, bedürfen alle Solver wiederholten Aufrufen. Deshalb ist die Solvergeschwindigkeit von extremer Bedeutung. Hier ist Conopt bei komplexeren Problemen am besten geeignet.

(IV): Optimierungsprobleme sind in GAMS übersichtlicher zu formulieren als in Mathematica. Dies ist von Vorteil.

(V): Die Kopplungsmöglichkeit von Mathematica ist beschränkt und weniger allgemein als für GAMS.

In der Summe überwiegen m.E. die Vorteile des Conopt Solver. Aus diesem Grund nutze ich den Gams Solver Conopt zur Lösung der Optimierungsprobleme innerhalb meines Modells.

Anmerkung

Nach Fertigstellung aller Modellsimulationen muss ich im Rückblick einschränkend feststellen, dass auch die Nutzung von Conopt für meine Modellierung häufig mit Problemen verbunden war. So ist es in GAMS notwendig, Skalierungen von Variablen vorzunehmen, damit Lösungen möglich werden. Für das Bilden der Ableitungen von Funktionen ist es für GAMS problematisch sehr große und sehr kleine Werte in einer Optimierung gemeinsam zu verarbeiten. Daher werden diese skaliert. Die Arbeit hieran war zum Teil langwierig.

Kapitel 4

Risiko

> *„It has been suggested that risk is the quintessential characteristic of the modern world, social, ecologically, and institutionally.“*
>
> Jaeger, Renn, Rosa und Webler (2001) S. 7

Risikoforschung hat sich seit den 60 Jahren des letzten Jahrhunderts als Forschungsrichtung in nahezu allen Natur-, Technik- und Sozialwissenschaften etabliert. Dabei finden natürliche, technologische und soziale Risiken Behandlung (vergleiche Buergin (1999, S. 2)). Gerade in Bezug auf bestehende Großrisiken findet die Risikoforschung breite Anwendung. Risiko und Unsicherheit haben Auswirkungen auf den Entscheidungsprozess von Individuen. Das von mir vorgestellte Modell ist in der Lage, Verhalten bei Risiko im Entscheidungsprozess von Produzenten abzubilden. Hierzu wähle ich probabilistische Nebenbedingungen, deren Funktionsweise im Abschnitt (4.5) erläutert werden. Dabei werde ich nicht näher auf die Modellierung von Entscheidung unter Risiko des State-Contingent-Approach eingehen. Ich verweise zum Überblick auf Chambers und Quiggin (2000).

4.1 Einführung

Wie ich bereits in der Einleitung zu dieser Arbeit dargestellt habe, entstand diese im Umfeld der Klimafolgenforschung. Wirtschaftliches Handeln, Produktion und Konsum finden sich in zweierlei Hinsicht in einem Risikobezug zum Klima. Zum einen, so zeigen es Forschungsergebnisse der Naturwissenschaften, ist ökonomisches Handeln Hauptverursacher des Klimaproblems, dem wir uns gegenübersehen. Aus ökonomischem Handeln erwachsen somit klimatische Risiken. Zum anderen wirken Risiken einer eintretenden Klimaveränderung auf Produktion und Konsum. Dies sowohl dann, wenn klimatische Veränderungen zu Beeinträchtigungen von Produktions- und Konsummöglichkeiten durch Zerstörung führen. Es entsteht für ökonomisches Handeln auch dadurch Risiko, dass im Angesicht der Gefahr klimatischer Veränderungen Handlungsstrategien notwendig werden, die unbekannte ökonomische Strukturen erwachsen lassen.

In meiner Arbeit beschränke ich mich auf die Darstellung eines definierten Risikos. Dies ist das Risiko eines Produzenten bezüglich zu geringer Cash Flows. Hierzu erfolgt in Abschnitt (4.3) eine Begründung und in Abschnitt (4.4) eine Erläuterung hinsichtlich der Bestimmung des Cash Flow at Risk. In der Zusammenfassung dieser Arbeit werde ich zeigen, welche Relevanz dieses Cash Flow- Risiko auch im Umfeld von Klimafolgenforschung haben kann.

4.2 Risiko und Wahrscheinlichkeit - Anmerkungen zur Definition

Risiko

Der Begriff *Risiko* wird umgangssprachlich für unterschiedliche Situationen verwandt; so z.B. für eine Situation, in der eine Person Angst vor dem Eintritt eines Ereignisses hat oder Unsicherheit bezüglich Gewinn und Verlust besteht (vergleiche Jaeger, Renn, Rosa und Webler (2001, S. 16)).

Entscheidungen von Individuen können sowohl auf die Gegenwart als auch auf die Zukunft gerichtet sein. Handlungen haben Auswirkungen auf den momentanen Zustand der Welt und /oder auf zukünftige. Gleichzeitig können Handlungen die Zukunft beeinflussen. Zukünftige Zustände der Welt werden durch abzählbar viele Faktoren bzw. Prozesse beeinflusst. Diese Faktoren bzw. Prozesse können für das entscheidende Individuum erkennbar oder nicht erkennbar sein: erkennbar sowohl in dem Sinne, dass ein Faktor oder Prozess wirkt, aber auch in dem Sinne, wie und in welchem Ausmaß er wirkt. Ist das Ausmaß der Wirkung von Faktoren und Prozesse einem handelnden Individuum bekannt, so erfolgt sein Handeln unter Sicherheit. Ist dies nicht gegeben, so sind zwei Fälle denkbar:

Knight (1921) unterscheidet Handeln unter Risiko und Handeln unter Unsicherheit. Lässt sich für den Eintritt eines Ereignisses eine Wahrscheinlichkeit angeben, so findet Handeln unter Risiko statt. Ist solch eine Wahrscheinlichkeit nicht anzugeben, so findet Handeln in einer Situation von Unsicherheit statt. Knight (1921) stellt fest, dass für die Entwicklung der meisten ökonomischen Prozesse keine Wahrscheinlichkeit angebbar ist und somit Handeln unter Unsicherheit stattfindet (vergleiche hierzu Buergin (1999, S. 3)).

Wahrscheinlichkeit

Umgangssprachlich wird unter einer *Wahrscheinlichkeit* ein Maß dafür verstanden, wie sicher oder unsicher der Eintritt eines Ereignisses ist. Allgemein ist festzustellen, dass es unterschiedliche Interpretationen des Begriffs gibt. Dabei ist die Interpretation der Frage „Was ist Wahrscheinlichkeit?“ weitgehend philosophischer Natur. Mathematisch ist eine Wahrscheinlichkeit eine Abbildung, die Ereignissen eine Zahl im Intervall $(0, 1)$ zuordnet und den *Kolmogorow-Axiomen* genügt. Zu unterscheiden ist die *frequentistische Interpretation* des Wahrscheinlichkeitsbegriffs und die *subjektivistische*

Interpretation. Die frequentistische Interpretation des Wahrscheinlichkeitsbegriffs nach Mises (1951) definiert die Wahrscheinlichkeit für den Eintritt eines Ereignisses über den Grenzwert der relativen Häufigkeit des Ergebnisses bei einer Folge unendlicher Wiederholung. Wahrscheinlichkeit wird damit zu einer physikalischen Eigenschaft eines Systems (vergleiche (Hennig 1999)). Offensichtlich sind Folgen unendlicher Wiederholung nicht beobachtbar und, so bemerkt Hennig (1999), lässt sich auch die von Mises (1951) geforderte Austauschbarkeit von Teilfolgen ohne Auswirkungen auf den Grenzwert nicht erzielen.

Somit wird die frequentistische Interpretation des Wahrscheinlichkeitsbegriffs, anders als sie es anstrebt, keine Beschreibung eines objektiven Systemzustandes, sondern enthält subjektive, willkürliche Elemente. Der frequentistische Wahrscheinlichkeitsbegriff wird somit zu einem Modell.

Dem gegenüber steht die subjektivistische Interpretation des Wahrscheinlichkeitsbegriffs. De Finetti kritisiert an der frequentistischen Interpretation von Mises den Objektivitätsanspruch (vergleiche Hennig (1999, S. 10)). In der Interpretation von de Finetti wird Wahrscheinlichkeit über subjektive Einschätzungen einer Person gebildet. Wahrscheinlichkeiten, aus seiner Sicht, stellen allein ein Maß für den Grad von rationalen beliefs einer Person dar (vergleiche Williamson und Cornfield (2001, S. 1)). Hierzu ist es nicht erforderlich, dass es ein wirkliches, objektives Maß für den Eintritt eines Ereignisses gibt. Entgegen der frequentistischen Interpretation wird somit keine Objektivität vorausgesetzt.

Kann eine frequentistische Interpretation von Wahrscheinlichkeit nicht objektiv sein, so folgt, dass Wahrscheinlichkeit letztendlich subjektivistisch ist.

> *„All statistical methods that use probability are subjective in the sense of relying on mathematical idealizations of the world."*
>
> Gellma, Carlin, Stern und Rubin (1995) S. 14

Die von Knight (1921) angeregte Unterscheidung in Risiko und Unsicherheit würde damit jedoch belanglos. Vielmehr ist von Interesse, über welche Verfahren handelnde oder zum Handeln gezwungene Individuen Modelle hinsichtlich Wahrscheinlichkeiten und Wahrscheinlichkeitsverteilungen aufbauen. Im Folgenden werden die Begrifflichkeiten Risiko und Unsicherheit von mir synonym gebraucht.

4.3 Risiken im Produktionsprozess

4.3.1 Einzelwirtschaftliche Ebene

Bei der Analyse von Risiken auf einzelwirtschaftlicher Ebene steht die Einheit Unternehmung im Zentrum. Dies kann im Rahmen theoretischer Überlegungen deskriptiv innerhalb der mikroökonomischen Wirtschaftstheorie erfolgen. In der betriebswirtschaftlichen Praxis von entscheidender Bedeutung ist die Frage: „Wie und welche Risiken wirken auf den Prozess des Wirtschaftens einer ganz konkreten Unternehmung?“ . Dabei sind eine Reihe von Risikoprozessen zu analysieren. Sie beeinflussen eine Unternehmung in Abhängigkeit von deren Größe, Rechtsform, Unternehmensgegenstand und regionaler Ansiedlung. Risikoprozesse haben Einfluss auf reale Größen und / oder auf finanzielle Größen. Weiteres Unterscheidungsmerkmal beeinflussender Prozesse ist, neben dem Objekt ihrer Wirkung, der Bereich ihrer Auslösung. Zu unterscheiden sind Prozesse, die ihren Ursprung innerhalb der Unternehmung haben von solchen, die durch die ökonomische, politische bzw. soziale Umwelt hervorgerufen werden.

	Einfluss auf finanzielle Größen	Einfluss auf reale Größen
außer-betrieblichen Ursprungs	Wechselkursrisiken Zinsrisiken Steuerrisiken Inflationsrisiko Anlagerisiken	Absatzrisiken Schäden aus Naturkatastrophen Ausfallrisiken
inner-betrieblichen Ursprungs	Kalkulationsrisiken	Produktionsrisiken EDV-Risiken Personalrisiken Beschaffungsrisiken

Tabelle 4.1: Risiken nach dem Bereich der Auslösung und ihrer Wirkung

Unternehmen können sich gegen eine Reihe genannter Risiken (vergleiche Tabelle (4.3.1)) absichern. Das erfolgt z.B. über Versicherungen oder über Selbstabsicherung auf Finanzmärkten. Jedoch stehen Sicherungsmethoden nur einem Unternehmen zur Verfügung, das auf Grund seiner inneren Organisation und der Unternehmensgröße Kapazitäten zur Analyse der Risiken und ihrer Sicherung bereitstellen kann.

Ein weiteres Unterscheidungsmerkmal betrifft die Reichweite eines Risikos. So haben Wechselkursänderungen und Zinsänderungen, wenn auch in unterschiedlichem Ausmaß, auf alle Unternehmen Einfluss. Hingegen sind Absatzrisiken in ihrer Wirkung weitgehend unternehmensspezifischer Natur.

Risiken haben neben ihrer direkten Wirkung auf finanzielle und/oder reale Größen indirekte Wirkungen auf bilanztechnisch- und gewinnrechnungsrelevante Größen. Das heißt, dass alle Risiken, wirken sie nun in direkter Weise auf reale oder finanzielle Mittel, in ihrer Konsequenz immer eine Wirkung auf finanzielle Kenngrößen wie Umsatz, Cash Flow und den Gewinn und damit auf Werte wie Umsatzrendite, Kapitalrendite, Verschuldungsquote u.a. haben.

Ziel eines Unternehmens ist, neben strategischen und kurzfristigen Zielen, immer die Maximierung eines Gewinns oder eine der Kennzahlen, die durch Umsatz und Gewinn ermittelt werden. Die Bewertung von Risiken, ihre Qualifizierung und Quantifizierung, wird für die Unternehmensplanung somit zum Instrument der Sicherung angestrebter, selbstgesteckter Ziele.

4.3.2 Aggregatebene

Als Aggregat wird eine nach wissenschaftlicher Fragestellung differenzierte Zusammenfassung einzelwirtschaftlicher Unternehmenseinheiten zu einem Objekt verstanden.

In der Betrachtung der Wirkungen von Risiken auf das Aggregat von Unternehmen stehen zwei Fragen im Vordergrund. Zum einen interessiert, wie die Realisationen von Risikoprozessen ökonomisch wirken. Diese Realisationen können positive und/oder negative Wirkungen zeigen.

Zum anderen, und dies ist für die Prognose konjunktureller Entwicklungen unverzichtbar, interessiert, wie Handlungen zur Risikovermeidung oder Risikoreduktion der einzelnen Unternehmenseinheit Auswirkungen auf makroökonomische Größen wie Sozialprodukt, Investitionsvolumen, Arbeitsvolumen und Steueraufkommen haben.

Sehen sich Unternehmen (gleiches gilt für Haushalte, die nicht Gegenstand meiner Betrachtung sind) Unsicherheiten gegenüber, die die Realisierung angestrebter Ziele beeinflussen, so reagieren sie darauf mit Verhaltensanpassungen. Diese Verhaltensanpassungen haben ihrerseits Auswirkungen auf makroökonomische Größen. Unsicherheiten und Risiken wirken somit bereits auf eine Wirtschaft, ohne dass es zu einer Realisierung eines Risikoprozesses kommt. Dies ist m.E. entscheidend für die Behandlung von Risiko und Unsicherheit im Produktionsprozess.

Bei der Wirkung der Realisation von Risikoprozessen auf das Aggregat von Unternehmungen ist nach der Art des Risikoprozesses zu fragen. Liegt für die Risikoprozesse eine identische, unkorrelierte Verteilung zugrunde, so wird, kann man von identischen Mikroagenten im Aggregat ausgehen, die Wirkung im Aggregat gleich dem Erwartungswert der Verteilung sein. Negative und positive Abweichungen vom Erwartungswert heben sich in der Summe für das Aggregat auf.

Wirkt ein Risiko jedoch gleichermaßen in seiner Ausprägung auf alle Mikroagenten eines Aggregats, so ist dies nicht der Fall. Alle werden gleichermaßen durch ein unsicheres Ereignis getroffen, ob positiv oder negativ.

4.3.3 Angebotsrisiken

Als Angebotsrisiken will ich solche Risiken verstehen, die das Angebot und damit die Produktionsmenge einer Unternehmung betreffen. Solche Risiken ergeben sich in erster Linie im Produktionsprozess. Sie können dabei auf Grund risikobehafteter Produktionsfaktoren, technischer Risiken oder Risiken der natürlichen Umwelt entstehen. Produktionsfaktoren, also eingesetzte Arbeit, Maschinen, Vorprodukte und Hilfs- bzw. Betriebsstoffe, sind in ihrer Qualität risikobehaftet. So ist die Produktivität eingesetzter Arbeit nicht konstant, Maschinen können defekt sein oder Umwelteinflüsse die Produktion negativ beeinflussen.

Risiken, die auf Grund natürlicher Faktoren auftreten, werden in erste Linie in der landwirtschaftlichen Produktion diskutiert. Im Folgenden sollen Angebotsrisiken nicht weiter behandelt werden, da sie keine Rolle in meiner Modellierung spielen.

4.3.4 Nachfragerisiko

Ich beschränke mich in meiner Arbeit auf die Modellierung des Nachfragerisikos und klammere Risiken, die durch makroökonomische Gegebenheiten oder innerhalb des Produktionsvorgangs entstehen, aus. Nachfragerisiko spielt für ein Unternehmen eine entscheidende Rolle. Der Absatz ist maßgebliche Größe für den Cash Flow und Gewinn eines Unternehmens. Die Höhe des Absatzes eines Produktes oder einer Dienstleistung wird durch die Nachfrage nach diesen bestimmt.

Der Umfang der Nachfrage hängt von einer Reihe von Faktoren ab. Sind Nachfrager Haushalte, so sind dies u.a. der Preis des angebotenen Gutes, das Einkommen bzw. Vermögen der Nachfrager, Preise der Konkurrenten und die Präferenzordnung der Haushalte. Beschriebene Faktoren sind einem Produzenten nur bedingt bekannt. Aus Erfahrungen vergangener Perioden hat er hierzu Erwartungen. Veränderungen in den Faktoren verursachen Veränderungen in der Nachfrage und bewirken somit Risiken bezüglich der Nachfrage.

Unternehmen bilden Erwartungen bezüglich der ihnen entgegengebrachten Nachfrage. Diese Erwartungsbildung erfolgt durch Beobachtung, Lernen und das Abschätzen von zukünftigen Ausprägungen die Nachfrage beeinflussender Faktoren. Nachfragerisiken stellen für ein Unternehmen Risiko bezüglich finanzieller Größen dar. Liegt die Nachfragerealisation unter der angebotenen und damit produzierten Menge, so bleiben Einzahlungen aus und es entstehen Kosten und damit Auszahlungen durch den Aufbau von Lagern. Somit wird Nachfragerisiko zu einem Risiko, das den Cash Flow und gegebenenfalls den Gewinn einer Unternehmung beeinflusst.

4.4 Anmerkungen zum Cash Flow at Risk-Ansatz

4.4.1 At Risk-Ansätze in der betrieblichen Anwendung

At Risk-Ansätze werden in der betriebswirtschaftlichen Praxis eingesetzt, um mittels leicht überschaubarer Kennzahlen Entscheidungen treffen zu können. Dabei können verschiedene at Risk-Ansätze unterschieden werden.

Der *Value at Risk* gibt den mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit anfallenden Verlust eines Portfolios an Wertpapieren für einen kurzen Zeitraum an. Dieses Verfahren, hauptsächlich von Finanzintermediären eingesetzt, wurde durch Markowitz vorgestellt. Mit der Anwendung durch die J.P. Morgan Bank entwickelte es sich dann in den 90er Jahren zu einem weit verbreiteten Analyseverfahren.

Der *Cash Flow at Risk* und der *Revenue at Risk* eignen sich in der Anwendung für Nicht-Finanzunternehmen. Im Vordergrund steht bei beiden die Frage um Sicherung gegen als zu gering erachtete Cash Flow bzw. Gewinne.

Im Folgenden soll die Anwendung des Cash Flow at Risk-Ansatzes in der betrieblichen Praxis vorgestellt werden. Es wird dabei nicht der Anspruch auf Vollständigkeit erhoben. Vielmehr geht es darum, das Grundkonzept vorzustellen, um Möglichkeiten der Anwendbarkeit in der Modellierung von Produktionsagenten aufzuzeigen. Hierzu wird als erstes die Bedeutung des Cash Flow für eine Unternehmung angesprochen.

4.4.2 Bedeutung des Cash Flow auf der einzelwirtschaftlichen Ebene

Als *Cash Flow* wird in der betriebswirtschaftlichen Analyse der sich nach Abgrenzung unterscheidende Saldo von Zahlungsmittelzu- und Zahlungsmittelabflüssen verstanden.

Somit stellt der Cash Flow dem Analysten eines Unternehmens eine von bilanzbuchhalterischen Buchungen bereinigte Kenngröße zur Unternehmensbewertung zur Verfügung. Der Cash Flow aus *direkter* Berechnungsmethode ergibt sich als Differenz einzahlungswirksamer Erträge und Aufwendungen. Bei der verbreiteteren Berechnung des Cash Flow mittels *indirekter* Berechnungsmethode werden vom Periodenergebnis (Jahresüberschuss oder -verlust) all jene in der Erfolgsrechnung enthaltene Buchungen neutralisiert, die nicht zahlungswirksame Erträge und Aufwendungen darstellen.

Der Netto Cash Flow, in dem Finanztätigkeiten des Unternehmens wie Eigen- und Fremdkapitalveränderungen nicht berücksichtigt werden, kann weiterhin in einen Cash Flow aus dem betrieblichen und dem außerordentlichen Bereich aufgeteilt werden. Ersterer ermöglicht es, allein aus dem betrieblichen Zweck erwachsende Mittelzu- und -abflüsse zu erfassen.

Der Netto Cash Flow beschreibt die Innenfinanzierungskraft eines Unternehmens. Er gibt an, wie aus eigenen, selbsterwirtschafteten, liquiden Mitteln in einer Periode Investitionen getätigt, Verbindlichkeiten getilgt oder Gewinne ausgeschüttet werden konnten.

Ist der zu erwartende Cash Flow einer Periode unsicher, so folgt für das Unternehmen Unsicherheit hinsichtlich seiner Fähigkeit der Kreditrückzahlung, der Eigenkapitalverzinsung, Investitionstätigkeit und der Steuerzahlung.

Die Höhe des Cash Flow einer Unternehmung bestimmt die Möglichkeit der Eigenfinanzierung. Diggelmann (1999) stellt fest, dass der Cash Flow einer Unternehmung aus einer kurzfristigen aber auch aus einer langfristigen Perspektive betrachtet werden kann. So stehen in der kurzen Frist Liquiditätssicherung, Gewinnsteuerung und kurzfristiges Kosten- und Erlöslenken im Vordergrund. Mittelfristig sind die Finanzbedarfsplanung, die optimale Geld- und Kapitalbeschaffung und die Renditesteuerung von Interesse. In der langfristigen Perspektive erfolgt die Abstimmung der Investitions- und Finanzierungsseite und die Unternehmenswertsteuerung.

Die Höhe des Perioden-Cash Flow zeigt also an, wie und in welchem Umfang das Unternehmen Kredite zurückzahlen kann, wie Ausschüttungen an Anteilseigner vorgenommen werden können und in welchem Umfang Investitionen aus eigenen finanziellen Mitteln möglich sind. Weiterhin machen Banken und andere Kreditgeber ihre Entscheidung über eine Kreditvergabe an ein einzelnes Unternehmen neben vielen anderen Kennzahlen auch von der Höhe erzielter und erwarteter Cash Flow abhängig. Ein hoher erwarteter Cash Flow garantiert die Zahlungsfähigkeit des Unternehmens.

4.4.3 Die Cash Flow at Risk-Berechnung

Ziel des Cash Flow at Risk-Ansatzes ist es, aus dem Einfluss von Risikofaktoren resultierende Schwankungen des kurzfristigen Cash Flow zu ermitteln, um somit das Risikopotential der Unternehmung zu erfassen. Der Zeithorizont der Cash Flow at Risk-Berechnung entspricht dem Planungszyklus der Zielgrößen und umfasst in der Regel ein Kalenderjahr.

Der Cash Flow at Risk-Ansatz ist ein dynamisches Konzept. Das Risiko erwächst nicht aus der Unsicherheit bezüglich der Wertveränderung risikobehafteter Vermögenspositionen, die als Bestand zum Zeitpunkt der Analyse bereits bekannt sind. Vielmehr ist der Ertrag, der sich aus Vermögenspositionen ableitet oder durch unternehmerisches Handeln erzielt wird, in seiner Höhe unsicher (vergleiche hierzu Hager (2004)).

In der Literatur werden mehrere Konzepte der Cash Flow at Risk-Berechnung diskutiert. Diese unterscheiden sich in Methodik und Anforderungen. Ich verweise hier exemplarisch auf die von Diggelmann (1999) vorgestellten Ansätze. Dies sind

1. der Dekomposite des Cash Flow-Ansatz,
2. der Ansatz der Replikation des Cash Flow über Finanzmarktinstrumente und
3. die Multifaktoranalysemethode.

Allen diesen Ansätzen ist gemein, dass sie über unterschiedliche Verfahren in Abhängigkeit der zur Verfügung stehenden Daten Aussagen über die Verteilung des Cash Flow erarbeiten. Diese sich ergebenden Verteilungen werden dann jeweils genutzt, um mittels Quantilanalyse die Höhe des erwarteten Cahs Flow zu bestimmen.

Dekomposit des Cash Flow

Ausgehend von den Risikofaktoren des Cash Flow wird unter *Dekomposition* die Zerlegung des Cash Flow in die einzelnen, ihn bestimmenden risikobehafteten Faktoren verstanden. Wie bereits erläutert, sind solche Faktoren je nach Abgrenzung der Cash Flow-Definition erfolgswirksame Zahlungsein- und Zahlungsausgänge, weiterhin solche Faktoren die Einfluss auf die Höhe solcher Zahlungen ausüben wie z.B. Wechselkursänderungen. Zu diesen Faktoren wird eine Verteilungsannahme getroffen. In der Aggregation der einzelnen, unterschiedlich verteilten Faktoren entsteht eine Verteilung des Cash Flow.

In einem ersten Schritt werden für alle für die Berechnung des Cash Flow zu berücksichtigenden Faktoren Annahmen zu den Momenten ihrer Verteilung erarbeitet. Dies kann in einem frequentistischen Statistikkonzept aus historischen Daten erfolgen oder in einem bayesianischen Konzept über subjektive Wahrscheinlichkeiten. Weiterhin wird eine Korrelationsmatrix oder Varianz-Kovarianz-Matrix der betrachteten Faktoren erstellt, die Aussagen bezüglich der statistischen Abhängigkeiten der Faktoren voneinander enthält. Die dann erfolgende Berechnung des Cash Flow at Risk kann über eine Monte-Carlo-Simulation (vergleiche hierzu Abschnitt (4.4.3)), den Varianz-Kovarianz-Ansatz oder eine historische Simulation erfolgen.

Replikation des Cash Flow

Wird im Dekompositionsansatz durch Zeitreihenanalyse der den Cash Flow beeinflussenden Faktoren Erwartungswert und Volatilität bestimmt, so wird im *Replikationsansatz* diese Bestimmung an Hand gewählter Finanzmarktinstrumente gemacht. Hierbei wird versucht, alle den Cash Flow beeinflussenden Faktoren durch geeignete Finanzmarktinstrumente zu replizieren. Durch Ermittlung von Erwartungswert und Volatilität der Finanzmarktinstrumente wird ein Rückschluss auf mögliche Verteilungsmomente der Cash Flow-Faktoren gezogen. Ausgehend von den ermittelten Momenten wird wiederum die Cash Flow at Risk-Berechnung durch eine Monte-Carlo-Simulation, den Varianz-Kovarianz-Ansatz oder eine historische Simulation erfolgen. Problematisch am Replikationsansatz, so Diggelmann (1999), ist es, dass nur schwer plausible Finanzmarktinstrumente zur Replikation gefunden werden können. Hier ergibt sich Willkür. Auch ist fraglich, inwieweit das Verhalten dieser Finanzmarktinstrumente auf das Verhalten von Cash Flow-Faktoren einer ganz bestimmten Unternehmung übertragen werden können

Ansatz der Multifaktoranalyse

Mittels der Multifaktoranalyse wird versucht, solche den Cash Flow bestimmende Faktoren zu ermitteln, die signifikante Auswirkungen auf diesen haben. Dies müssen Faktoren sein, die durch Finanzmärkte abgebildet werden, somit in irgendeiner Form bewertet werden können. Es wird hierzu, nach Bestimmung relevanter Faktoren (dies ist unternehmensabhängig) eine Regressionsgleichung der Form $\text{CashFlow} = \alpha_1 F_1 + \alpha_2 F_2 + ... + \alpha_n F_n$ aufgestellt. Da die Faktoren F Marktwerte darstellen, kann nun die Abhängigkeit des Cash Flow von den einzelnen Faktoren bestimmt werden, was im Ergebnis Werte für den Vektor $\bar{\alpha}$ ergibt. Nach Eliminierung der als nicht relevant befundenen Faktoren ergibt sich nun eine Liste der den Cash Flow beeinflussenden Faktoren, die wiederum in der Bestimmung des Cash Flow at Risk mittels Monte-Carlo-Simulation, dem Varianz-Kovarianz-Ansatz oder einer historischen Simulation herangezogen werden.

Monte-Carlo-Simulation

Die Monte-Carlo-Methode (vergleiche Hager (2004), Down (1998) und Diggelmann (1999)) zur Bestimmung des Value at Risk oder des Cash Flow at Risk, so die einhellige Meinung in der Literatur, sollte nur dann angewandt werden, wenn andere Verfahren keine ausreichend genauen Ergebnisse erzielen können. Grund hierfür ist der hohe Aufwand an Rechenkapazitäten (vergleiche (Down 1998, S. 109)). Durch die Monte-Carlo-Simulation wird das Verhalten zukünftiger, risikobehafteter Größen, die Einfluss auf den Cash Flow ausüben, simuliert. Jeder Simulationslauf repräsentiert ein mögliches Marktszenario. Werden viele solcher Szenarien simuliert, gespeichert und der Größe des sich ergebenden Cash Flow nach geordnet, so entsteht eine mögliche Verteilung über den zu erwartenden Cash Flow.

In einem ersten Schritt werden Zufallszahlen einer den jeweiligen Annahmen und Anforderungen entsprechenden Verteilung erzeugt. Hierzu wird eine Sequenz von gleichverteilten Zufallszahlen simuliert und diese auf die unterstellte Verteilungsfunktion projiziert. Im Ergebnis entsteht eine Sequenz von unkorrelierten Zufallszahlen, deren Verteilung den zu Grunde gelegten Verteilungsannahmen entspricht.

Anstelle der Simulation durch eine Erzeugung gleichverteilter Zufallszahlen ist auch ein Bootstrap-Verfahren möglich. Hierzu werden Realisationen der Vergangenheit genutzt, um eine Sequenz von Zufallszahlen mit gewünschten Verteilungsannahmen zu erzeugen (vergleiche hierzu Davison und D.V. (1997)).

In einem nächsten Schritt werden die unkorrelierten Zufallszahlen in korrelierte überführt. Hierzu ist eine Korrelationsmatrix vorzugeben oder eine Varianz-Kovarianz-Matrix. Wurde bei Erstellung der Sequenz der Zufallszahlen bereits deren gewünschte Varianz berücksichtigt, so wird die Korrelationsmatrix verwendet, anderenfalls die Varianz-Kovarianz-Matrix
(vergleiche Hager (2004, S.154)).

Ausgehend von der Korrelationsmatrix K wird eine untere Dreiecksmatrix C gesucht, deren obere Elemente Null sind, so dass $K = CC^T$ gilt. Als Verfahren wird die Cholesky-Zerlegung verwendet (vergleiche hierzu Davison und

D.V. (1997, S. 111-112) und Hager (2004, S. 149 ff.)). Ist C gefunden, werden nun die Einzelelemente der simulierten, unkorrelierten Zufallszahlen der betrachteten Faktoren als Zeilenvektoren betrachtet und mit der transponierten Matrix C^T multipliziert. Im Ergebnis entstehen Sequenzen von korrelierten Zufallszahlen für alle Faktoren.

Im nächsten Schritt werden die so erhaltenen Zufallszahlen in den Definitionsbereich der ihnen zu Grunde liegenden Faktoren überführt. Wurden gleichverteilte Zufallszahlen auf eine Standardnormalverteilung abgebildet und wurde eine Korrelationsmatrix verwendet, so müssen Erwartungswert und Varianz des betrachteten Faktors berücksichtigt werden. Hierzu wird eine Umkehrung der Standardisierung vorgenommen.

Es gilt: Y ist eine beliebige normalverteilte Zufallsvariable mit dem Erwartungswert $E(Y) = \mu_y$ und der Standardabweichung σ_y. Durch Standardisierung wird diese in eine standardnormalverteilte Zufallsvariable überführt $X = \frac{Y-\mu_y}{\sigma_y}$ (vergleiche Batra und Ullah (1974, S.335)). In der Umkehrung folgt: $Y = X\sigma_y + \mu_y$. Aus der standardnormalverteilten Zufallsvariable X, die durch Simulation erzeugt wurde, kann eine normalverteilte Zufallsvariable mit den Momenten μ und σ^2 erzeugt werden.

Wurden simulierte Zufallszahlen bereits auf eine Verteilung abgebildet, deren erste beiden Momente den erwarteten Realisationen und der Volatilität des risikobehafteten Faktors entsprechen, so ist keine weitere Transformation notwendig. Bei zugrunde liegenden Zufallszahlen mit $\mu = 0$ und $\sigma^2 = 1$ und der Verwendung einer Varianz-Kovarianz-Matrix muss nur die Addition des Erwartungswertes des risikobehafteten Faktors erfolgen, da in der Varianz-Kovarianz-Matrix die Varianz und damit die Standardabweichung eines jeden Faktors enthalten ist.

Wurden n Zufallszahlen je risikobehafteten Faktor erstellt, so liegen im Ergebnis n Vektoren vor, in denen mögliche Realisierungen dieser Faktoren simuliert wurden. Dabei sind Korrelationswirkungen zwischen den Faktoren berücksichtigt. Je nach Einfluss auf den Cash Flow der Unternehmung werden diese n Vektoren genutzt, um n Cash Flow-Ergebnisse zu errechnen. Diese Ergebnisse werden genutzt, um eine Verteilung möglicher Cash Flow zu ermittelt. An Hand dieser Verteilung kann nun der Cash Flow at Risk zu gegebenem Quantil der Verteilung berechnet werden.

4.5 Probabilistische Nebenbedingungen

Das Wissen um die Höhe von at Risk-Kennzahlen ermöglicht es einem Unternehmen, Entscheidungen so zu treffen, dass Risiken reduziert werden. So werden alternative Handlungen gesucht, wenn das Risiko für eine geplante Handlung zu hoch ist. Risiko und dessen mögliche Auswirkungen auf das Ergebnis einer Unternehmung sind somit subjektiv bestimmt und hängen von der Risikopräferenz des Entscheiders ab.

Im Folgenden werde ich, motiviert durch at Risk-Ansätze, eine mögliche Beschreibung von *Handeln unter Risiko* vorstellen, die geeignet ist, in ökonomischen Modellen angewendet zu werden. Es handelt sich dabei um einen allgemein üblichen Optimierungsansatz, wobei Handeln bezüglich Risikokonsequenzen mittels *probabilistischer Nebenbedingungen* formuliert wird.

Die Zielfunktion in solch einem Ansatz ist deterministisch. Risikoprozesse werden allein in einer oder mehreren der Nebenbedingungen abgebildet. Grundgedanke probabilistischer Nebenbedingungen ist es, Kontrollvariablen so zu wählen, dass die Wahrscheinlichkeit für das Unter- oder Überschreiten einer Größe kleiner einem definierten Wert ist.

Probabilistische Nebenbedingungen oder auch *Chance Constraints* gehören zum Standardrepertoire der stochastischen Optimierung. Hierbei erfolgt eine Optimierung einer Zielgröße unter Nebenbedingungen, die Zufallsgrößen als Argumente enthalten. Ein Optimierungsproblem mit probabilitischen Nebenbedingungen hat die Form

$$\max \{f(x)|\text{prob}(h(x,\zeta) \geq 0) \geq \gamma\} \ , \ \gamma \in (0,1) \,. \tag{4.1}$$

x ist Entscheidungs- bzw. Kontrollvariable, ζ ist eine Zufallsvariable für die eine Verteilung bekannt ist. Die Zufallsvariable und die Kontrollvariable gehen in die Nebenbedingungsfunktion h ein. γ bezeichnet ein Wahrscheinlichkeitslevel, zu dem die Nebenbedingung erfüllt ist (vergleiche hierzu u.a. Henrion (2004), Henrion (2005), Liu (2002), Thah (1992) und Kirby (1967)). Das Optimierungsproblem lautet: „Wähle x, so dass der Zielfunktionswert $f(x)$ maximiert ist, die Wahrscheinlichkeit, dass der Wert $h(x,\zeta)$ größer Null ist, jedoch kleiner als γ bleibt!“.

Anwendung findet das Verfahren der Optimierung unter probabilistischen Nebenbedingungen u.a. in der Finanzmathematik, der Kraftwerkstechnik, dem Wassermanagement, der Telekommunikation und der Chemischen Industrie.

Zwei Arten probabilistischer Nebenbedingungen sind zu unterscheiden: zum einen die *individuellen* probabilistischen Nebenbedingungen und zum anderen *verbundene* probabilistische Nebenbedingungen.

Bei Optimierung mit individuellen probabilistischen Nebenbedingung sind m probabilistische Nebenbedingungen unabhängig voneinander zu erfüllen. Sie haben die Form

$$\text{prob}(h_j(\mathbf{x}, \bar{\zeta}) \geq 0) \geq \gamma \; (j = 1, ..., m). \tag{4.2}$$

$\mathbf{x}$ ist der Vektor der Kontrollvariablen und $\bar{\zeta}$ ein Vektor von Zufallszahlen. Es handelt sich somit um m Nebenbedingungen h_j, für die jeweils eine akzeptierte Eintrittswahrscheinlichkeit von γ besteht. Jede dieser Nebenbedingungen wird durch eine Zufallszahl ζ beeinflusst. Hierbei ist es prinzipiell möglich, dass γ ebenfalls ein Vektor ist, so dass die akzeptierten Wahrscheinlichkeiten für die m Nebenbedingungen unterschiedlich sind.

Verbundene probabilistische Nebenbedingungen hingegen haben die Form

$$\text{prob}(h_j(\mathbf{x}, \bar{\zeta}) \geq 0 \; (j = 1, ..., m)) \geq \gamma. \tag{4.3}$$

Hierbei ist gefordert, dass die Verbundwahrscheinlichkeit für die Nebenbedingungen h_j einen Wert γ nicht überschreitet. Das bedeutet z.B., dass die Wahrscheinlichkeit des gleichzeitigen Eintretens zweier Ereignisse nicht größer als γ sein darf. Offensichtlich kann γ hier kein Verktor sein.

Die Verbundwahrscheinlichkeit wird über eine multivariate Verteilungsfunktion ermittelt, wenn Korrelation zwischen den Zufallszahlen ζ besteht. Sind diese nicht korreliert, kann die Randverteilung als Produkt der Einzelverteilungen genutzt werden.

4.6 Modellierung des Cash Flow at Risk als probabilistische Nebenbedingung

Mein Ziel ist es, den in der Betriebswirtschaft und in technischen Disziplinen verwendeten Ansatz probabilistischer Nebenbedingungen für volkswirtschaftliche Ansätze und Modelle zu nutzen. Da der Cash Flow für real operierende Unternehmen eine hohe Relevanz hat und der Cash Flow at Risk-Ansatz verbreitetes Analyseinstrument in der Unternehmensplanung ist, will ich das Konzept des Cash Flow at Risk über eine probabilistische Nebenbedingung in die Modellierung des Entscheidens unter Unsicherheit einführen. Hierzu stelle ich im Folgenden eine mögliche Anwendung vor.

Mit dem Wissen um die zu gegebenen Wahrscheinlichkeiten eintretende Höhe des Cash Flow wird es einem Unternehmen möglich, seine Unternehmensplanung zu optimieren. Wird unterstellt, dass zu gegebener Wahrscheinlichkeit der Cash Flow einen Betrag $\tilde{v}$ nicht unterschreiten soll und ist dies zu geplanten Unternehmenshandlungen nicht erreichbar, so kann durch Wahl alternativer Handlungen das Unternehmen selbstgestellte Restriktionen versuchen zu erfüllen. Solche Handlungen können Reduktion oder Ausweitung der Produktion, veränderte Preiswahl oder verändertes Investitionsverhalten sein.

In dem von mir vorgestellten Modell behandle ich den Cash Flow at Risk in einer probabilistischen Nebenbedingung der Gestalt, dass der optimierende Produzent einen zu erreichenden Mindest-Cash Flow nur mit einer gegebenen Wahrscheinlichkeit $\tilde{\gamma}$ unterschreiten darf. Die Höhe des Mindest Cash Flow hängt dabei von aus dem Cash Flow zu tätigenden Zahlungen ab (vergleiche hierzu Abschnitt (6.6)).

Im Folgenden werde ich vorstellen, welche möglichen Formen einer probabilistischen Nebenbedingung sich für die Behandlung des Cash Flow ergeben. Eine allgemeine Form hierfür ist

$$\text{prob}(v \leq \tilde{v}) \leq \tilde{\gamma}. \tag{4.4}$$

v bezeichnet die unsichere Größe des Cash Flow, $\tilde{v}$ den Mindest Cash Flow, den der Produzent wünscht zu erzielen und $\tilde{\gamma}$ die maximal akzeptierte Wahrscheinlichkeit der Unterschreitung von $\tilde{\gamma}$. v ist Funktionswert einer den Cash Flow bestimmenden Funktion. Dabei ist v von der Realisierung sicherer und unsicherer Größen abhängig. Solche Größen sind inner- und außerbetrieblichen Ursprungs (vergleiche hierzu Abschnitt (4.3)). Exemplarisch stelle ich hier eine Cash Flow Funktion f vor, die folgende unsichere Größen enthält:

1. die Güternachfrage bzw. Realisierung getätigter Verkäufe q^d,
2. die notwendigen Aufwendungen o der Produktion und
3. unsichere Zinseinnahmen $\iota^b\check{b}$.

q^s - das Güterangebot - und p - der Güterpreis - sind Kontrollvariablen und $\check{b}$ - der Bestand an gehaltenen Wertpapieren - stellt eine Bestandsgröße dar. o sind Kosten und ι ist ein Zins. Für f folgt

$$f: \quad v = q^d p - o + \iota\check{b}. \tag{4.5}$$

Es muss unterstellt werden, dass der optimierende Produzent Informationen zu den Verteilungen der einzelnen unsicheren Größen besitzt. Dies bezieht sich sowohl auf die funktionale Gestalt der Verteilungen als auch auf deren Momente. Ich unterstelle, dass alle Größen normalverteilt sind und keine Korrelation zwischen ihnen besteht. Diese Annahmen sind restriktiv, vereinfachen jedoch die Behandlung der Nebenbedingung, was in der Modellierung und programmtechnischen Umsetzung von Bedeutung ist.

Zur Bestimmung der Wahrscheinlichkeit von $v \leq \tilde{v}$ werden zunächst Erwartungswert und Varianz von v gebildet. Hierzu soll o als $o = \omega q^s$ ausgeschrieben werden. q^s ist dabei Produktionsmenge, die in einem Ungleichgewichtsansatz nicht zwangsläufig q^d entspricht und ω ist unsicherer variabler Kostenparameter. Für den Erwartungswert des Cash Flow folgt

$$\mathrm{E}(v) = \hat{q}^d p - \hat{\omega} q^s + \hat{\iota}\check{b} \tag{4.6}$$

Die Varianz einer Funktion f wird über die Delta-Methode bestimmt. Hierzu wird nach jeder unsicheren Größe x_i abgeleitet, quadriert und mit der zugehörigen Varianz $\mathrm{Var}(x_i)$ multipliziert. Entstehende Größen werden summiert,

$$\mathrm{Var}(f) = \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 \mathrm{Var}(x_i). \tag{4.7}$$

Für obiges Beispiel folgt für die Varianz

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}(v) &= \left(\frac{\partial f}{\partial q^d}\right)^2 \mathrm{Var}(q^d) + \left(\frac{\partial f}{\partial \omega}\right)^2 \mathrm{Var}(\omega) + \left(\frac{\partial f}{\partial \iota}\right)^2 \mathrm{Var}(\iota) \qquad (4.8)\\ &= p^2 \mathrm{Var}(q^d) + (-q^s)^2 \mathrm{Var}(\omega) + \check{b}^2 \mathrm{Var}(\iota). \end{aligned}$$

Bei bekannten Verteilungen mit ihren Parametern E und Var kann damit die Wahrscheinlichkeit γ bestimmt werden. Ist diese größer der maximal akzeptierten Wahrscheinlichkeit $\tilde{\gamma}$, so werden andere Werte für die Kontrollvariablen p und q^s zu wählen sein.

Im vorgestellten Beispiel wird die Höhe des Mindest Cash Flow $\tilde{v}$ als fix und deterministisch unterstellt. In der betrieblichen Praxis wird der Cash Flow jedoch für die Durchführung von Zahlungen verwendet, die in ihrer Gestalt selbst unsicher sind oder von unsicheren Größen abhängen. Solche Zahlungen sind u.a. Investitionszahlungen, Ausschüttungen oder Zinszahlungen auf Kredite. Um der Unsicherheit hinsichtlich der Realisierung dieser Größen in der probabilistischen Nebenbedingung gerecht zu werden, wird diese so umgeformt, dass sie sich als

$$\text{prob}(q^d p - o + \iota\check{b} - p^a a^d \leq 0) \leq \tilde{\gamma} \tag{4.9}$$

liest.

a^d ist die Nachfrage nach Kapitalgütern und damit Kontrollvariable, p^a ist der unsichere Kapitalgüterpreis. Erwartungswert und Varianz werden dann gebildet, wie in den Gleichungen (4.6) und (4.7) beschrieben.

Kapitel 5

Streitfragen

In der ökonomischen Theorie werden mit den in der vorliegenden Arbeit angesprochenen Forschungsergebnissen eine Reihe von Problemen zum Teil kontrovers diskutiert. Das sind z.B. Fragen um Gleichgewichtskonzepte, Fragen um Aggregation und Fragen um die Art der Erwartungsbildung. In folgendem Abschnitt werde ich dazu einen kurzen Überblick geben. Ich erhebe keinen Anspruch auf Vollständigkeit der Ausführungen. Mein Ziel ist es, das von mir in Kapitel sechs vorgestellte Modell in die ökonomische Literatur einzuordnen. In einem weiteren Abschnitt dieses Kapitels gehe ich kurz auf die agentenbasierte Modellierung ein. Dieses Vorgehen findet seine Begründung in der von mir gewählten Modellstruktur. Ich wähle in der Modellierung einen agentenbasierten Ansatz zur Beschreibung eines Produktionssektors. Um diese Herangehensweise zu begründen, stelle ich den Ansatz der ACE Modellierung vor.

5.1 Ansätze der Gleichgewichtstheorie

Rothschild (1981) stellt fest, dass es in der ökonomischen Theorie drei Bedeutungen des Gleichgewichtsbegriffes gibt.

- Zum einen ist dies die *„unscharfe Anwendung (...) zur Kennzeichnung verschiedener möglicher ‚ausgewogener' Konstellationen in komplexen Systemen"* (Rothschild 1981, S. 3). Demnach ist ein System im Gleichgewicht, wenn dessen Elemente (Akteure) in einer konsistenten Beziehung zueinander stehen. Ist das System nicht im Gleichgewicht, so bestehen Spannungen, die eine Änderung hin zu konsistenten Beziehungen erzwingen. In dieser Formulierung existieren viele unterschiedliche Gleichgewichtszustände und der Begriff Gleichgewicht hat keinen normativen Charakter, so Rothschild (1981).

- Als zweite Bedeutung des Gleichgewichtsbegriffs kennzeichnet Rothschild (1981) eine Situation, die eine Beharrungstendenz aufweist. Hier sind Zustände von Nichtmarkträumung wie z.B. Unterbeschäftigung möglich.

- Der dritte Gleichgewichtsbegriff ist der in der ökonomischen Theorie am weitesten gebräuchliche. Er lehnt sich an eine mechanische Vorstellung an und kennzeichnet eine Situation, in der *„... sich bestimmte Kräfte gerade die Balance halten"* (Rothschild 1981, S. 4). Die Ansätze der allgemeinen Gleichgewichtstheorie bedienen sich dieser Vorstellung vom Gleichgewicht.

Allgemeine Gleichgewichtstheorie

Das Konzept der *Allgemeinen Gleichgewichtstheorie* ist ein mikroökonomisches. Die allgemeine Gleichgewichtstheorie geht auf Walras zurück. Er postulierte, dass ein gleichgewichtiger ökonomischer Zustand mit vollständiger Räumung aller Märkte zu genau einem Preisvektor existiert. Den mathematischen Beweis der Existenz eines allgemeinen Gleichgewichts mit integrierter Produktion, Handel und Konsum führten Arrow und Debreu (1954). Grundlage ist der Fixpunktsatz von Brower (vergleiche hierzu Border (1985)). Das ökonomische System besteht aus einer Vielzahl von handelnden Akteuren. Diese sind Anbieter und Nachfrager von Gütern. Es werden Konsumenten und Produzenten unterschieden. Güter sind sowohl zur Verfügung stehende Ressourcen als auch Konsumgüter (vergleiche hierzu Debreu (1959b)). Arbeit und Kapitalgüter sind nach diesem Verständnis Ressourcen.

Durch einen fiktiven Auktionator wird ein Preisvektor ausgerufen. Zu diesem bestimmen alle Akteure ihre Nachfrage- und Angebotsmengen. Hierzu optimieren sie ihren Nutzen bzw. Gewinn. Das *Preissystem* ist notwendiges und hinreichendes Signalsystem. In einem *Tâtonnement-Prozess* erfolgt durch den Auktionator ein Ausrufen von Preisvektoren, bis die Überschussnachfrage auf allen Märkten Null ist. Es existieren dann auf keinem Markt unfreiwillige Angebots- oder Nachfrageüberschüsse. Kauf und Nachfrage bzw. Verkauf und Angebot decken sich im walrasianischen Gleichgewichtskonzept (vergleiche Rothschild (1981, S. 74)). Käufer und Verkäufer können alle aus ihrem individuellen Optimierungskalkül resultierenden Wünsche verwirklichen. Bei gegebenen Preisen können alle Akteure ihre auf Grund ihrer Präferenzen oder Produktionsbedingungen getroffenen optimalen Entscheidungen simultan verwirklichen. Eine Beeinflussung eines Preises durch handelnde Akteure wird ausgeschlossen. Jeder Akteur überblickt die relevanten Preise und Marktbeziehungen, was Transparenz, vollständige Information und rationales Verhalten voraussetzt.

Der Markt muss als vollkommen angenommen werden. Das heißt, es herrscht vollständige Konkurrenz. Monopole oder Oligopole dürfen demnach nicht existieren, da diese über die Möglichkeit der Preissetzung verfügen. Das Marktergebnis kennzeichnet eine pareto-optimale Situation (vergleiche Debreu (1954)). Kein Marktteilnehmer könnte sich besser stellen, ohne eine Verschlechterung der Situation eines anderen zu bewirken (vergleiche Rothschild (1981, S. 13)).

Durch Arrow (1953)[1] bzw. Debreu (1959b) wird der Begriff der Unsicherheit in die allgemeine Gleichgewichtstheorie eingeführt. Es wird im Arrow-Debreu-Modell unterstellt, dass die Zukunft durch verschiedene, unbekannte zukünftige Zustände der Welt definiert ist. Damit werden Güter nicht allein durch physikalische Charakteristika, den Ort und die Zeit, sondern auch durch den Umweltzustand bestimmt, in dem sie genutzt werden (vergleiche Radner (1982)).

[1] englischsprachige Version Arrow (1964)

> *„Uncertainty has been introduced formally into the model of Theory of Value by recognizing that the primitive data or environment - in particular resources, tastes and technology - are not known and given, but part of the unfolding history of the world.“*
>
> Dreze (1985) S. 2

Akteure können sich gegen Unsicherheiten absichern. Eine Sicherung ist über Zukunftsmärkte möglich. Ein Arrow-Debreu-Gleichgewicht existiert bei Erfüllung aller Bedingungen eines walrasianischen Gleichgewichts dann, wenn für alle möglichen Güter-Zustands-Kombinationen (contingent commodities) Märkte und somit Preise existieren. Im Zeitpunkt $t = 0$ werden für alle möglichen zukünftigen Zustände Transaktionen geschlossen und über den Tâtonnement-Prozess Preise bestimmt. *„These markets open before the resolution of uncertainty...“* (Mas Collel, Whinston und Green 1995, S. 691) Die Realisierung des Handels wird in der Zukunft durch den sich einstellenden Zustand der Welt bestimmt. Ist die Existenz solcher Märkte gegeben und sind diese Märkte komplett, so folgt

> *„... as a consequence of this assumption, the Arrow-Debreu model of markets with uncertainty becomes formally equivalent to a model with certainty.“*
>
> Radner (1982) S. 939.

Jedoch existieren solche Zukunftsmärkte nur in begrenztem Umfang. Dies bezieht sich sowohl auf die Fristigkeit als auch auf die gehandelten Güter. Die Existenz von vollkommenen Zukunftsmärkten wird durch Transaktionskosten, Moral Hazard Verhalten und Adverse Selektion verhindert (vergleiche Dreze (1985, S. 3)). In der ökonomischen Praxis existieren Assets bzw. Securities, um eine Risikotransformation zu bewirken (vergleiche Mas Collel, Whinston und Green (1995, S. 699)). Solche Assets bewirken definierte zukünftige Auszahlungen für jeden möglichen Zustand der Welt und können somit als Sicherungsinstrument dienen (vergleiche Arrow (1953)). Werden vollständige Kapitalmärkte unterstellt, so lässt sich ein allgemeines Gleichgewicht mit Produktion und Konsum nachweisen (vergleiche Dreze (1985, S. 5)). Dieses ist wiederum Pareto-optimal.

Non-Clearing Markets

In realen Volkswirtschaften befinden sich nicht alle Märkte zwingend in einem Gleichgewicht. Offensichtliches Beispiel ist der Arbeitsmarkt. Weitere Beispiele sind der Kreditmarkt und temporäre Märkte für Luxusgüter oder technische Innovationen. Ursache hierfür sind *Preis-* oder *Mengenrigiditäten*. Diese verhindern kurzfristig eine Preis- bzw. Mengenanpassung. Preisrigiditäten können unterschiedliche Ursachen haben. Auf dem Arbeitsmarkt bestehen langfristige Tarifvereinbarungen oder längerfristige Arbeitsverträge. Güterpreise werden kurzfristig nicht geändert, da dies Kosten verursacht und die Gefahr von Preiskämpfen für den Produzenten besteht. Mengenanpassungen nach unten sind schneller möglich als nach oben. Produktionsmengenausweitungen erfordern bei ausgelasteten Kapazitäten den Aufbau neuer Kapazitäten, was mit Kosten verbunden ist und Risiken birgt.

Rigiditäten sind in der walrasianischen Gleichgewichtsanalyse nicht bekannt. In der Modellierung und ökonomischen Theorie vernachlässigte strukturelle Ungleichgewichte auf Teilmärkten führen zu verzerrten Ergebnissen und Interpretationen. Diese in der Politikberatung zu nutzen, halte ich für bedenklich.

Non-Clearing Markets sind Märkte, auf denen zu gegebenen Preisen eine Überschussnachfrage bzw. ein Überschussangebot herrscht (vergleiche hierzu Bénassy (1982), (2002) und Felderer und Homburger (2005)). Gehandelte Mengen sind somit nicht die sich aus dem Optimierungskalkül und dem walrasianischen Preismechanismus ergebenden Mengen.

Bénassy (1982) unterscheidet drei Begrifflichkeiten bezüglich Angebot und Nachfrage. Er bezeichnet als Angebot bzw. Nachfrage jene Größen, die sich äquivalent zum walrasianischen Fall aus dem Optimierungskalkül der Akteure ergeben. Als effektives Angebot bzw. effektive Nachfrage werden jene Größen bezeichnet, die Ergebnis einer Optimierung unter Mengensignal-Nebenbedingung sind. Solche Mengensignale erfolgen durch die jeweils andere Marktseite und geben maximal nachgefragte bzw. angebotene Mengen an. Diese Mengensignale gehen in die Optimierung der Akteure ein und reduzieren gegebenenfalls das eigene Angebot bzw. die Nachfrage.

Bénassy (1982) unterscheidet deterministische und stochastische Nebenbedingungen. In einer deterministischen Situation „weiss“ der optimierende Akteur um die Höhe der Realisierung des Mengensignals und berücksichtigt diese Menge in seinen Nebenbedingungen. Bei stochastischen Nebenbedingungen ist allein eine Verteilung der Höhe des Mengensignals bekannt. Der

Akteur optimiert bezüglich des Erwartungswertes der Realisierung des Mengensignals. Besteht eine Ökonomie aus je $n > 1$ Akteuren, deren Angebots bzw. Nachfragemenge durch Nebenbedingungen eingeschränkt ist, erfolgt eine *Rationierung*. Rationierung ist die Zuteilung von Angebot bzw. Nachfrage nach einem bestimmten Zuteilungsschema. Solche Zuteilungsschema können unterschiedlicher Art sein. Exemplarisch sei *uniform* und *random* Rationierung genannt. Bei der ersten erfolgt eine mengenmäßig gleiche Zuteilung auf alle Akteure und bei der zweiten eine zufällige Zuteilung (vergleiche zu weiteren Schemata, speziell auch den manipulierbaren Bénassy (2002)).

5.2 Anmerkungen zur Aggregation

5.2.1 Einführung

„A method of aggregation should provide us with a way of studying the effect on a macroeconomic model of changes in a micromodel with which it is connected.“

Kenneth May, 1947

Die Beziehung zwischen dem mikroökonomischen Ansatz und dem makroökonomischen einer Theorie ist eine in vielen Wissenschaftszweigen diskutierte Fragestellung. Dies gilt neben weiteren natur- und sozialwissenschaftlichen Disziplinen auch für die Ökonomie.

Darauf einzugehen gestaltet sich insofern schwierig, als dass Mikroökonomie und Makroökonomie als Theorieschulen weitgehend unabhängig voneinander entwickelt wurden und bei ihrer Entstehung die Frage um gegenseitige Beeinflussung keine Berücksichtigung fand. Und so ist bis heute unklar, ob die eine die andere zu erklären im Stande zu sein hat oder ob sie unterschiedliche singuläre Theorien zur Behandlung ökonomischer Fragestellungen sein sollen.

May (1947) zeigt folgende Metapher

> *„The theory of gasses offers a suggestive from physics. The laws of behavior of a gaseous mass were formulated in terms of observed relations among aggregates such as temperatue, pressure, and volume.“*
>
> May (1947) S. 59

Nach May (1947) zeigen sich Analogien zwischen dieser Metapher und der ökonomischen Mikro-Makro-Beziehung. Danach wird die Makrotheorie von der Mikrotheorie abgeleitet.

> *„Finally, the macrolaws followed from microlaws, but they were not the same. Because of the interrelations of the particles and the averageing of random movements, the macrolaws had a distinct character.“*
>
> May (1947) S. 59

Es bleibt die Frage, ob eine Notwendigkeit besteht, Makrogesetzmäßigkeiten auf einer technischen Ebene als Ergebnis der Mikrogesetze darzustellen. So weisen van Daal und Merkies (1987) auf zwei Aspekte hin, die bezüglich der Ableitung einer Makrotheorie aus der Mikrotheorie eine Rolle spielen. Dies sind *Konsistenz* und *Repräsentativität.* Konsistenz bezieht sich auf die mathematischen Voraussetzungen für die Existenz von Aggregationslösungen. Repräsentativität behandelt die Frage, ob die Makrorelation als Beschreibung des Handelns eines *repräsentativen Agenten* genutzt werden kann.

Eine erste Einführung des Konzepts vom repräsentativen Agenten wurde durch Marshall vorgenommen. Er bezeichnete eine repräsentative Firma als solche, die langfristig im Markt bestehen kann, auf Grund vollkommener Konkurrenz einen Gewinn von Null hat und die intern und extern eine normale Verbindung zur Ökonomie aufweist. Nach Marshall, so Hartley (1996), ist eine repräsentative Firma kein Durchschnitt aller Firmen, keine Super-Firma, die die gesamte Ökonomie darstellt und es ist auch keine einzelne, reale Firma.

Erste umfangreiche Kritik an Marshalls Konzept wurde durch Robbins 1928 formuliert. Er formuliert: *„There is no more need for us to assume a representative firm or representative producer, than there is for us to assume a representative piece of land, a representative machine, or a representative worker.“* (Hartley 1996, S. 175). Es ist bemerkenswert, dass die hier angeführte Kritik nicht dazu geführt hat, das Konzept des repräsentativen Agenten zu verwerfen. Im Gegenteil, die von Robbins gebrauchten Vergleiche bezüglich repräsentativem Land, Maschinen bzw. Arbeit haben als Konzepte Einzug in die Ökonomie gefunden und werden nur allzu wenig hinterfragt. Seit den 60er Jahren des letzten Jahrhunderts werden sie weitestgehend unreflektiert in der Haushaltstheorie und in der Produktionstheorie genutzt (vergleiche Felipe und Fisher (2003, S. 28)).

Im Folgenden will ich, die Problematik des repräsentativen Agenten ausklammernd, die Frage um Möglichkeiten von Aggregation in der ökonomischen Modellierung behandeln. Dabei rücke ich die Frage um *Konsistenz* in den Vordergrund.

In Abhängigkeit von der Fragestellung hat der Modellierer ökonomischer Modelle die Aufgabe zu entscheiden, auf welcher Aggregationsebene die Modellierung erfolgen soll. Als die zwei möglichen Extreme lassen sich zum einen hochaggregierte Makromodelle und zum anderen Mikromodelle mit Modellierung ‚aller' Akteure identifizieren. Entscheidungskriterien für die Wahl der Aggregationsebene lassen sich m.E. wie folgt angeben:

1. Ist die gewählte Aggregationsebene in der Lage, die zu untersuchenden ökonomischen Größen anzugeben?
   - So wird es nicht gelingen, in einem Makromodell bei Nutzung hochaggregierter Modellparameter Aussagen zu Einkommensverteilungen treffen zu können.
2. Welchen Informationsverlust bzw. -gewinn erzeugt eine gewählte Aggregationsebene?
   - Hochaggregierte Modelle sind nicht in der Lage, Interdependenzen der Mikroebene abzubilden. In Abhängigkeit vom Untersuchungsgegenstand muss somit eine Abwägung hinsichtlich der Bedeutung dieses Informationsverlustes auf die Modellergebnisse erfolgen.
3. Wird es möglich, auf der gewählten Aggregationsebene empirische Daten zu erheben oder zu nutzen?
   - Eine Modellierung kann immer nur auf der Aggregationsebene stattfinden, für die Daten in hinreichender Qualität und Quantität vorliegen.
4. Impliziert die Wahl einer bestimmten Aggregationsebene Annahmen hinsichtlich darunter liegender Ebenen, die nicht begründbar sind?
   - Diese Frage wird umfänglich in der Aggregationsdebatte behandelt, auf die ich auf den folgenden Seiten eingehen werde. In dieser Debatte wird untersucht, unter welchen Bedingungen an einer Mikrostruktur Aggregation zulässig ist.

Für meine Modelliertätigkeit sind alle hier aufgeführten Punkte von Bedeutung, womit für mich die Frage nach der Wahl einer geeigneten Aggregationsebene eine entscheidende wurde. Um eine hinreichend begründbare Entscheidung treffen zu können, bedarf es aus meiner Sicht, grundlegende Ergebnisse der Aggregationsdebatte zu berücksichtigen. Aus diesem Grund werde ich auf den folgenden Seiten einen kurzen Abriss der Aggregationsdebatte geben. Dabei beziehe ich mich weitgehend auf die produktionsseitige Behandlung der Thematik. Anspruch auf Vollständigkeit erhebe ich nicht.

5.2.2 Allgemeine Formulierung des Aggregationsproblems

Die Frage, unter welchen Bedingungen sich eine Vielzahl mikroökonomischer Strukturen durch eine einzige, aggregierte makroökonomische beschreiben lässt, wird sowohl in der Produktionstheorie als auch in der Haushaltstheorie diskutiert. In der Literatur wird die Aggregation von Produktionsfunktionen und Angebotsfunktionen und die Aggregation von Nutzenfunktionen bzw. Nachfragefunktionen diskutiert. Beiden Anwendungsgebieten gemein ist die Notwendigkeit, mathematische Anforderungen an die Struktur der Mikroebene zu stellen.

Auf der Mikroebene sei mit y_i der Funktionswert einer Mikrofunktion f_i , $i \in (1, n)$ bezeichnet. x_i^j mit $j \in (1, m)$ sind dabei Argumente der Mikrofunktion und können in Abhängigkeit vom Kontext Konsumgütermengen oder Inputgütermengen sein. Die f_i wären dementsprechend Nutzenfunktionen oder Produktionsfunktionen.

$$y_i = f_i(x_i^1, ..., x_i^m) \quad \forall i \in \{1, n\} \tag{5.1}$$

Auf der Makroebene sei Y das aggregierte Äquivalent zu den y_i. Funktion G wird als *atomisierte Makrofunktion* bezeichnet. Ihre Elemente sind alle Mikroelemente x_i^j. Die Funktion H ist dann Index- bzw. Aggregatorfunktion aller y_i. Y wäre z.B. der totale Output oder der totale Nutzen eines Aggregates.

$$\begin{aligned} Y &= G(x_1^1, ..., ...x_n^m) \\ &= H(y_1, ...y_n) \\ &= H(f_1(x_1^1, ..., x_1^m), ..., f_n(x_n^1, ..., x_n^m)) \end{aligned} \tag{5.2}$$

Mit h^j seien *Indexfunktionen* bezeichnet, die Aggregate X^j der x_i^j bilden.

$$X^j = h^j(x_1^j, ..., x_n^j) \qquad \text{und} \tag{5.3}$$

F ist eine Makrofunktion. Argumente von F sind die über die Indexfunktionen h^j gebildeten Aggregate. F ist z.B. globale Produktionsfunktion bzw.

die gesellschaftliche Nutzenfunktion (Pokropp 1972b, S.221).

$$H(y_1, ...y_n) = F\big(h^1(x_1^1, ..., x_n^1), ..., h^m(x_1^m, ..., x_n^m)\big) \tag{5.4}$$

Der Darstellung von Pokropp (1972b) folgend soll Gleichung (5.4) in folgendem Schema dargestellt werden. Hierzu wird mit $\mathbf{X}_i^j$ die Gesamtheit der möglichen Kombinationen von der j-ten Menge x_i^j in der i-ten Mikrofunktion bezeichnet.

Wird die Aggregation von Produktionsfunktionen untersucht, so ist $\mathbf{X}_i^j$ die *„Gesamtheit der technologisch möglichen Einsatzmengen des j-ten Faktors im i-ten Unternehmen.“* (Pokropp 1972a, S.31).

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\mathbf{X}_1^1 & \times & ... & \times & \mathbf{X}_1^j & \times & ... & \times & \mathbf{X}_1^m & \xrightarrow{f_1} & y_1 \\
\times & & & & \times & & & & \times & & \times \\
\cdot & & & & \cdot & & & & \cdot & & \cdot \\
\cdot & & & & \cdot & & & & \cdot & & \cdot \\
\cdot & & & & \cdot & & & & \cdot & & \cdot \\
\times & & & & \times & & & & \times & & \times \\
\mathbf{X}_i^1 & \times & ... & \times & \mathbf{X}_i^j & \times & ... & \times & \mathbf{X}_i^m & \xrightarrow{f_i} & y_i \\
\times & & & & \times & & & & \times & & \times \\
\cdot & & & & \cdot & & & & \cdot & & \cdot \\
\cdot & & & & \cdot & & & & \cdot & & \cdot \\
\cdot & & & & \cdot & & & & \cdot & & \cdot \\
\times & & & & \times & & & & \times & & \times \\
\mathbf{X}_n^1 & \times & ... & \times & \mathbf{X}_n^j & \times & ... & \times & \mathbf{X}_n^m & \xrightarrow{f_n} & y_n \\
 & & & & & & & & & & \\
h^1 \downarrow & & & & h^j \downarrow & & & & h^m \downarrow & & H \downarrow \\
 & & & & & & & & & & \\
X^1 & \times & ... & \times & X^j & \times & ... & \times & X^m & \xrightarrow{F} & Y
\end{array} \tag{5.5}$$

Aggregation wird dann möglich, wenn es gelingt

1. eine Indexfunktion H für den Gesamtertrag (totaler Output oder totaler Nutzen eines Aggregates) anzugeben,

2. Indexfunktionen h^j für alle Mikrogrößen x_i^j anzugeben und

3. eine Makrofunktion F zu finden,

so dass Schema (5.5) Gültigkeit besitzt. Die hierfür in der Literatur formulierten Lösungen lassen sich weitgehend auf die Forderung nach *Separabilität* der Mikrofunktionen reduzieren. Der Begriff der Separablität im Bezug auf die Aggregationsdebatte, so Pokropp (1972a), geht auf Leontief zurück, wobei Morishima (1961) darauf hinweist, dass bereits 1943 durch Sono hierzu Arbeiten entstanden.

> *„... Sono's work on the seperability of goods ... published in Japanese in the midst of World War II has remained unknown for a long time without attracting attention from English-speaking economists."*
>
> Morishima (1961) S.272

An dieser Stelle soll keine Diskussion hinsichtlich funktionaler Bedingungen wie Stetigkeit, Differenzierbarkeit u.ä. erfolgen. Ich verweise auf Nataf (1948) und Pokropp (1972a).

5.2.3 Aggregation von Produktionsfunktionen

Klein-Nataf-Aggregation

> *„The central question asked is whether and under what circumstances the technological relationship of a diverse economy (or even of an industry or a firm) can be summarized in a fairly simple manner. When is it appropriate to speak of such aggregates as „capital" „investment" „labor" or even „output" in the context of production theory (...) ."*
>
> Fisher (1992) S. ix

Erste Vorschläge zur Aggregation von Produktionsfunktionen wurden durch Klein (1946a) vorgestellt (vergleiche Felipe und Fisher (2003, S. 9)). Er fragte, ob sich bei gegebenen Mikroproduktionsfunktionen f_i und bekannten Aggregaten bzw. Indizes für den Makrooutput Q und die Makroproduktionsfaktoren K und L eine Makroproduktionsfunktion F entwickeln lässt, so dass $Q = F(K, L)$ gilt (vergleiche Pokropp (1972a, S. 2)). Es geht somit um die Frage, unter welchen Bedingungen die technische Beziehung einer gesamten Ökonomie durch ein Aggregat hinreichend beschrieben werden kann (vergleiche Fisher (1969, S.554)).

Mit f_i wird durch Klein (1946b) die Produktionsfunktion der i-ten Unternehmung bezeichnet. Diese produziert einen Gütervektor $\mathbf{q_i} = (q_i^1, ..., q_i^m)$ mittels verschiedener Arten Arbeit $\mathbf{l_i} = (l_i^1, ..., l_i^{m'})$ und Kapital $\mathbf{k_i} = (k_i^1, ..., k_i^{m'})$.

$$f_i = (q_i^1, ..., q_i^m; l_i^1, ..., l_i^{m'}; k_i^1, ..., k_i^{m''}) = 0 \quad , \quad i = 1, 2, ...n \tag{5.6}$$

Aggregation, so Klein (1946a), muss dabei folgende Kriterien erfüllen:

> *„(1) (...) if there exist functional relations that connect output and input (production functions) for individual firms, there should also exist functional relations that connect aggregate output and aggregate input for the economy as a whole (...)*
> *(2)(...) If profits are maximized by the individual firms so that the marginal-productivity equation (...) holds under perfect competition, the aggregate marginal-productivity equation (...) must also hold (...)"*
>
> Klein (1946a) S.94-95

Es geht, so van Daal und Merkies (1987), um Forderungen nach Konsistenz und Repräsentativität bzw. nach Analogie. Konsistenz bezieht sich dabei auf die mathematische Beschreibung. Repräsentativität behandelt die Frage, ob eine Makrorelation repräsentative Beschreibung der Handlungen einer Vielzahl einzeln handelnder Akteure ist (vergleiche van Daal und Merkies (1987, S.608)).

Klein (1946b) fordert weiterhin, dass eine aggregierte Makroproduktionsfunktion allein von technologischen Faktoren abhängig und von einer Gewinnmaximierung unabhängig ist (vergleiche Klein (1946b, S.303)).

Nataf (1948) zeigt, dass Kleins Aggregationsproblem aus zwei Elementen besteht.

> *„The first one is an aggregation over goods and factors within each firm's production function ... The second element* [output] *is the aggregation over individual resulting (...)"*
>
> van Daal und Merkies (1987) S.623

Solange alle Mikrofunktionen f_i und alle Indexfunktionen h^j differenzierbar sind, erfolgt, so Nataf (1948), die Lösung von Gleichung (5.4) über ein System von Differentialgleichungen (vergleiche Pokropp (1972a, S. 33)). Mit $\mathbf{q_i}$ sei der Vektor des Outputs des Unternehmens i bezeichnet, mit f_i dessen Mikroproduktionsfunktion und mit $\mathbf{k_i}$ bzw. $\mathbf{l_i}$ Vektoren, der durch ihn in der Produktion eingesetzten Faktoren.

$$\mathbf{q_i} = f_i(\mathbf{k_i}, \mathbf{l_i}) \quad , \forall i \in \{1, n\} \tag{5.7}$$

Nataf (1948) wies nach, dass das Klein-Aggregat nur dann existiert, wenn für die firmenindividuelle Produktionsfunktion

$$Q_i = f_i(K_i, L_i) \quad , \forall i \in \{1, n\} \tag{5.8}$$

gilt, wobei Q_i, K_i und L_i firmenspezifische Subaggregate des Outputvektors bzw. der Inputvektoren sind.

$$Q_i = \mathcal{Q}_i(Q_i) \tag{5.9}$$
$$K_i = \mathcal{K}_i(k_i) \tag{5.10}$$
$$L_i = \mathcal{L}_i(l_i) \tag{5.11}$$

Lassen sich die Makrogrößen des Outputs Y und der Faktoren K und L in der Form

$$Q = \sum_i^n Q_i \tag{5.12}$$
$$K = \sum_i^n K_i \tag{5.13}$$
$$L = \sum_i^n L_i \tag{5.14}$$

angeben, so gilt für die Makroproduktionsfunktion, wie gefordert

$$Q = F(K, L) = F((\mathbf{k^1}, ..., \mathbf{k^n}), (\mathbf{l^1}, ..., \mathbf{l^n})). \tag{5.15}$$

Nataf (1948) weist nach, dass Aggregation dann und nur dann möglich ist, wenn die Mikrofunktionen *additiv separabel* in den eingesetzten Produktionsfaktoren sind, sich somit als

$$f_i(\mathbf{k_i}, \mathbf{l_i}) = g_i^k(K_i) + g_i^l(L_i) \tag{5.16}$$

formulieren lassen. Zu Anmerkungen bezüglich des Beweises des Nataf-Theorems verweise ich auf Felipe und Fisher (2003) und van Daal und Merkies (1981). Auch wird in van Daal und Merkies (1981) eine Beweisführung des Nataf Theorems von den Autoren angegeben.

Lässt sich eine stetige Funktion ϕ mit den Variablen $x_1, ..., x_m$ als

$$\phi(x_1, x_2, ..., x_m) = F(f(x_1, ..., x_k), x_{k+1}, ..., x_m) \tag{5.17}$$

formulieren, wobei F und f stetige Funktionen sind, dann ist ϕ separabel in der Teilmenge $x_1, ..., x_k$. f ist dann Aggregatorfunktion für die Teilmenge $x_1, ..., x_k$ (vergleiche Mak (1987, S. 651)).

Eine Funktion ist additiv-separabel, wenn sie sich als

$$\begin{aligned} \phi(x_1, x_2, ..., x_m) &= f_1(x_1) + ... + f_n(x_m) \\ &= \sum_{i=1}^{m} f_i(x_i) \end{aligned} \tag{5.18}$$

formulieren lässt. Separabilität bezeichnet demnach die Möglichkeit, eine Funktion ϕ durch Funktionen von Teilmengen ihrer Argumente formulieren zu können (vergleiche Felipe und Fisher (2003, S. 12)). In der Literatur werden verschiedene Konzepte der Separabilität diskutiert. So u.a. die schwache und die latente Separabilität. Bei der schwachen Separabilität bestehen Teilmengen von $x_1, ..., x_m$ aus jeweils genau einem x_i, so dass

$$\phi(x_1, ..., x_m) = F(f_1(x_1), ..., f_n(x_m)) \tag{5.19}$$

gilt. Bei der latenten Separabilität wird diese Annahme gelockert und ein x_1 darf innerhalb unterschiedlicher Teilmengen vorhanden sein (vergleiche Blundell und Robin (2000, S. 57)).

Zu Lösungen des von Klein (1946a) gestellten Problems unter schwächeren Anforderungen kommen Gorman (1968) und Pokropp (1972a) (vergleiche Blackorby und Schworm (1988, S. 616)). Durch die Autoren werden Anforderungen an Stetigkeit und Differenzierbarkeit der Mikrofunktionen und Indexfunktionen diskutiert.

Anmerkungen zur historischen Debatte

Im Folgenden sollen - ohne Anspruch auf Vollständigkeit - Punkte, Etappen und Autoren vorgestellt werden, die in der Diskussion um die Möglichkeit der Aggregation von Produktionsfunktionen aus meiner Sicht von Bedeutung sind. Es sind dabei zwei Hauptdiskussionspunkte zu erkennen. Zum einen bezieht sich dies auf die Diskussion um die Verteilung von Faktoren und Output und zum anderen auf die Diskussion um Aggregation physisch nicht homogener Faktoren.

I Die Klein-Nataf-Lösung stellt keine Anforderungen bezüglich Gleichgewichtsbedingungen und somit keine Anforderungen hinsichtlich der Verteilung der Faktoren und des Outputs (vergleiche Blackorby und Shorrbocks (1995, S.257)). Gorman (1953) bemerkte, dass die Klein-Nataf-Lösung somit nicht hilfreich für die empirische Forschung sei, da die Aggregatorfunktionen des Outputs und der Faktoren von der Verteilung der Variablen über die Unternehmen abhängig sind. Auf diesen Sachverhalt wiesen bereits Pu (1946) und May (1946) bzw. (1947) hin. Klein (1946b) forderte, dass die Bildung von Aggregaten frei von Verteilungsannahmen sei und somit frei von Bedingungen an die Marktstruktur. Es wird jedoch in der empirischen Anwendung notwendig, Informationen bezüglich der Verteilung der Variablen zu nutzen, die jedoch im Allgemeinen nicht zur Verfügung stehen werden. Gorman (1953) entwickelte, unter Anerkennung der Existenz der Klein-Aggregate, zusätzliche Anforderungen an die Aggregation, die eine empirische Anwendung in der ökonomischen Analyse handhabbarer machen.

> „*He* [Gorman, Anmerkung des Autors] suggests that, to be useful, these aggregate commodities should depend only on the sum across firms of the component variables...“
>
> Russell, Breunig und Chiu (1998) S. 221

Notwendige und hinreichende Bedingung für eine Aggregatbildung, so Gorman (1953), ist es, dass die Mikroproduktionsfunktionen eine affine Form haben und sich als

$$\mathbf{q_i} = f_i(\mathbf{k}_i, \mathbf{l}_i) = \mathbf{a}\mathbf{k_i} + \mathbf{b}\mathbf{l_i} \tag{5.20}$$

formulieren lassen. $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ sind dabei Vektoren, deren Größen den mit ihnen verknüpften Vektoren $\mathbf{k}_i$ und $\mathbf{l}_i$ entsprechen. Für die Makroproduktionsfunktion folgt dann

$$Q = F\left(\mathbf{a}\sum_i^n \mathbf{k}_i, \mathbf{b}\sum_i^n \mathbf{l}_i\right) \tag{5.21}$$

mit einer linearen Struktur der Aggregate

$$K = \mathbf{a} \sum_{i}^{n} \mathbf{k_i} \quad \text{und} \tag{5.22}$$

$$L = \mathbf{b} \sum_{i}^{n} \mathbf{l_i}. \tag{5.23}$$

Die affine Funktion (5.20) ist eine *homothetische Funktion.* Candeal und Indurain (1993) definieren *„Homithetic in the classical sense of Economics“* (Candeal und Indurain 1993, S. 298) wenn eine Abbildung $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und eine homogene Funktion $h : X \rightarrow \mathbb{R}$ existieren, so dass

$$f(x) = g\big(h(x)\big) \tag{5.24}$$

gilt. Weiterhin gilt, dass jede homogene Funktion auch homothetisch ist. Ist die Mikroproduktionsfunktion also homogen, so erfüllt sie die notwendige Bedingung zur Bildung von Aggregatorfunktionen.

II Eine Produktionsfunktion der Mikroebene gibt jene Produktionsmengen an, die bei effizientem Einsatz von Faktoren möglich werden (vergleiche hierzu Abschnitt (2.2)). Für die Makroproduktionsfunktion F sollte Selbiges zu fordern sein. Das heisst, eine makroökonomische Produktionsfunktion sollte den möglichen Output Q einer Ökonomie angeben, der bei effizientem Einsatz der Faktoren zu erzielen ist.

> *„Nataf's theorem fails to impose an efficiency condition (Fisher 1993, xviii; italics original). Thus efficient allocation requires that* Y [in meiner Notation, Q] *be maximized given* K *and* L*.“*
>
> Felipe und Fisher (2003) S. 16

Solow (1964), Gorman (1953) und Fisher (1969) weisen mit ihren Arbeiten auf dieses Problem hin und formulieren Bedingungen, unter denen Effizienz der Produktion auf der Makroebene unterstellt werden darf (vergleiche zum Überblick hierzu Felipe und Fisher (2003), Blackorby und Schworm (1988) und Fisher (1969)). Blackorby und Schworm (1988) unterscheiden effizient allozierte Güter (EAG) und willkürlich allozierte Güter (AAG). Sie behaupten, dass die Anforderungen zur Bildung von Aggregatoren der Faktoren bzw. des Outputs davon abhängt, ob es sich um EAG oder AAG handelt:

> *„... EAG can be aggregated under broader circumstances than AAG. Furthermore, the conditions for consistent aggregation of goods depend on whether or not goods that are not being aggregated are efficiently allocated."*
>
> Blackorby und Schworm (1988) S. 614

Hier wird der Bezug zur Kritik von Pu (1946) und May (1946) deutlich. Kann eine Marktstruktur unterstellt werden, die ein allgemeines Gleichgewicht unter vollständiger Konkurrenz bei Gewinnmaximierung jeder einzelnen Unternehmung erzeugt, so sind Einsatzfaktoren effizient verteilt. Damit, so Blackorby und Schworm (1988), wird Aggregation unter schwächeren Voraussetzungen möglich.

III Die durch Nataf vorgestellte Lösung des Aggregationsproblems hat nur unter der restriktiven Annahme homogener Inputfaktoren Bestand. Offensichtlich sind Faktoren jedoch nicht homogen. Kapitalgüter liegen in unterschiedlichem Alter vor oder sind unterschiedlich effizient. Arbeit lässt sich nach *qualifizierter* und *unqualifizierter* unterscheiden. Es ergibt sich somit die Frage, welche Bedingungen an die Mikroproduktionsfunktionen zu stellen sind, wenn Faktoren heterogen sind und welche ökonomischen Implikationen sich hieraus ergeben.

> *„The result just given* [Nataf's Lösung, Anmerkung des Autors] *holds therefore, even if all firms have the same technology, the same kind of capital, and constant returns. In this case, however, we should certainly expect an aggregate production function to exist."*
>
> Fisher (1969) S. 556

Im Folgenden werde ich auf Fisher (1965) eingehen. Er gibt Bedingungen für eine Lösung der Aggregation an. Dabei unterstellt er, dass der Output und die Arbeit homogen sind und optimal bzw. effizient verteilt. Kapital wird durch ihn als heterogen angenommen. Eine ausführliche Darstellung und weiterführende Literaturangaben finden sich u.a. bei Fisher (1965), Fisher (1982), Felipe und Fisher (2003), Sato (1975) und Hulten (1990) .

Jede Unternehmung i nutzt genau ein Kapitalgut k_i. Die Mikroproduktionsfunktionen der i Unternehmen seien der Gestalt

$$q_i = f_i(\alpha_i k_i, \beta_i l_i) \quad i = 1, 2, ..., n. \tag{5.25}$$

Für die Makroproduktionsfunktion folgt bei heterogenem Kapital und homogener Arbeit

$$Q = F(k_1, ..., k_n, L). \tag{5.26}$$

Mit K sei das Aggregat der heterogenen k_i bezeichnet, wobei

$$K = \mathcal{K}(k_i, ..., k_n) \tag{5.27}$$

gelte und $\mathcal{K}$ Funktion aller k_i's ist. Solow (1964) zeigt, dass notwendige und hinreichende Bedingung zur Bildung eines Kapitalaggregats aus der Forderung nach Separabilität des Leontief Theorem's als

$$\frac{\partial}{\partial L}\left(\frac{\partial Q/\partial k_i}{\partial Q/\partial k_j}\right) \equiv 0 \quad \alpha, \beta = 1, ..., t, ...T \tag{5.28}$$

folgt. Das bedeutet, dass die Grenzrate der Substitution jedes Paares k_i, k_j unabhängig von L sein muss. Für die Mikroproduktionsfunktionen aller i Unternehmen - die Subscripts habe ich hier vernachlässigt - ist dann notwendige und hinreichende Bedingung, so Fisher (1969), dass die partiale Differentialgleichung

$$\frac{f_{kl}}{f_k f_{ll}} = g(f_l) \tag{5.29}$$

erfüllt ist, wobei die Funktion g für alle i identisch ist.[2] Wird nun unterstellt, dass f_i homogen ist, somit die Produktion in jeder Unternehmung i bei konstanten Skalenerträgen erfolgt, so gilt für das Aggregat

$$Q = F(K, \beta L) \quad \text{mit} \quad K = \mathcal{K}(k_i, ..., k_n) = \sum_i^n \alpha_i k_i. \tag{5.30}$$

Die α's sind Faktoren, die aus heterogenen, auf alle Unternehmen verteilten Kapitalgütern eine homogene Größe machen. *„Thus, J* [in meiner Notation K, Anmerkung des Autors] *is the efficiency-corrected capital stock.“* (Sato 1975, S. 6) Hieraus folgt, dass jedes Kapitalgut k_i einer Unternehmung über den Effizienzparameter α in ein Kapitalgut k_j umgerechnet werden kann. Fisher (1969) fasst zusammen:

> *„So far, so good. The trouble is that the case of capital augmenting technical difference* [sich unterscheidende α_i, Anmerkung des Autors] *turns out to be the only case under constant returns in which a capital aggregate exists. Only a very limited and special kind of technical diversity can be accommodated.“*

[2] Mit $f_{kl} = \frac{\partial f/\partial k}{\partial l}$, $f_k = \frac{\partial f}{\partial k}$ und $f_{ll} = \frac{\partial f/\partial l}{\partial l}$

Fisher (1969) S. 560

Fisher (1982) fasst drei Bedingungen zusammen, unter denen Aggregation möglich ist:

- Eine Aggregation des inhomogenen Faktors auf Unternehmensebene muss möglich sein.
- Wird Kapital aggregiert, so dürfen die Produktionsfunktionen der Mikroebene allein in den α_i's variieren.
- Soll das Aggregat des Outputs gebildet werden, müssen alle Unternehmen einen identischen Vektor an Output produzieren.

Diese Bedingungen sind streng und nicht zu erfüllen (vergleiche Fisher (1982)).

Hulten (1990) gibt ein Beispiel für die Aggregation heterogener Kapitalgüter innerhalb einer Unternehmung, wobei Heterogenität durch eine Altersstruktur definiert wird (vergleiche hierzu Gorman (1965)). Mit k^{t_1} und k^{t_2} seien zwei Kapitalgüter unterschiedlichen Alters definiert. Nach Fisher (1969) muss dann

$$f^{t_1}(l, k^{t_1}) = f(l, \alpha_{t_1 - t_2} k^{t_1}) \tag{5.31}$$

gelten.

> „*That is, the technology must be such that the difference between the productivity of old and new capital is a fixed constant* [α, Anmerkung des Autors] *depending only on vintage.*“

Hulten (1990) S. 123

IV Die Forderung nach Separabilität der Mikroproduktionsfunktionen beschränkt die Klasse der möglichen Produktionsfunktionen. So ist Separabiliät bei limitationalen Produktionsfunktionen nicht gegeben, so dass keine Aggregationslösung exisitiert, wenn eine Mikroproduktionsfunktion $i \in (1, n)$ limitationalen Charakters der Form

$$f_i(x_i^1, ..., x_i^m) = \min(f_i^1(x_i^j), ..., f_i^m(x_i^m)) \tag{5.32}$$

ist (vergleiche Pokropp (1972a, S. 59)). Kann hingegen von voller Substituierbarkeit der Faktoren in jeder Mikroproduktionsfunktion ausgegangen werden, so wird eine Aggregationslösung möglich. Sind die Mikroproduktionsfunktionen vom Cobb-Douglas Typ der Form

$$q_i = f_i(k_i, l_i) = \beta_i k_i^{1-\alpha} l_i^{\alpha} \tag{5.33}$$

und ist Arbeit l_i effizient und Kapital k_i nicht-effizient verteilt, so folgt für die Makroproduktionsfunktion

$$Q = F(K, L) = K^{1-\alpha} L^{\alpha} \quad \text{mit} \quad K = \sum_i^n \beta_i k_i. \tag{5.34}$$

Dies gilt, wenn für alle Mikroproduktionsfunktionen die selben Exponenten unterstellt werden können.

Weiterhin erzwingt die Existenz einer Aggregationslösung Mikroproduktionsfunktionen mit konstanten Skalenerträgen.

> „*... if there are nonconstant returns, no aggregate will exist in general ...* “
>
> Felipe und Fisher (2003) S. 21

Sato (1975) zeigt jedoch einen Fall, basierend auf einem Beispiel von Fisher (1965), für den eine Aggregationslösung möglich wird und keine konstanten Skalenerträge vorausgesetzt werden müssen. Die Mikroproduktionsfunktion, die er angibt, hat die Form[3]

$$q_i = f_i(k_i, l_i) = f_i\Big(\eta_i(\alpha_i k_i) + \beta_i l_i\Big). \tag{5.35}$$

[3] Eine Angabe der Makroproduktionsfunktion erfolgt hier aus notationstechnischen Gründen nicht, ich verweise auf Sato (1975) (S. 47)

5.2.4 Schlussfolgerung für die Modellierung

Die Modellierung ökonomischer, produktionsseitiger Systeme auf einer aggregierten Ebene erzwingt, wie aufgezeigt, eine Reihe restriktiver Unterstellungen hinsichtlich der zu Grunde liegenden Mikroproduktionsfunktionen, die nur unzureichend theoretisch und empirisch begründbar sind. Diese sind im Allgemeinen so weitreichend, dass eine Makroproduktionsfunktion in der ökonomischen Modellierung keine Anwendung finden dürfte.

> *„It must be clear that the fact that macroeconomists use aggregates such as investment, capital, labor, GDP, as well as aggregate production functions, in theoretical and empirical exercises, does not legitimize the existence of such constructs.“*
>
> Felipe und Fisher (2003) S. 27

Die Problematik der Zulässigkeit von Aggregation ist nicht auf die Aggregation von Produktionsfunktionen beschränkt. Sie betrifft ebenso Kostenfunktionen, Gewinnfunktionen und die Aggregation von Nebenbedingungen.

Es muss somit in Abhängigkeit von der Fragestellung durch den Modellierer entschieden werden, ob die Strenge der Annahmen ökonomische Zusammenhänge und Gegebenheiten impliziert, die den Aussagegehalt des Modells negativ beeinflussen. Eine allgemein gültige Aussage ist hier meines Erachtens nicht möglich. Zwar erscheinen viele Annahmen in einem Maße als unrealistisch, dass eine Modellierung über Aggregate als fehlerhaft oder unzureichend einzuschätzen ist. Jedoch ist die tatsächliche Abweichung der Ergebnisse eines Makromodells von der Realität modell- und fragestellungsabhängig.

Allgemein sollte zu fordern sein, dass die Ergebnisse eines aggregierten Modells denen eines äquivalenten Mikromodells entsprechen.

In einer Volkswirtschaft existieren eine Vielzahl unterschiedlichster produktionsseitig handelnder Akteure. Diese unterscheiden sich hinsichtlich der von ihnen produzierten und gehandelten Waren und Dienstleistungen, der Rechtsform, eingesetzter Produktionsmethoden und vieler weiterer Kriterien.

Für die Bewältigung des Klimaproblems durch Reduktion von Emissionen, werden neue Produktionstechnologien und neue Produkte notwendig. Eben solche, die einen geringeren Ausstoß an Treibhausgasen ermöglichen. Solche Veränderungen in Produktionstechnologie und -produkten werden nicht gleichzeitig in allen Sektoren bzw. in allen Unternehmen erfolgen. Aus diesem Grund unterstelle ich, dass der zu erfolgende strukturelle Wandel nicht auf einer hohen, makroökonomischen Aggregationsebene abbildbar ist. Dieser Überlegung folgend, habe ich in meinem Modell heterogene, nicht aggregierte Produzenten modelliert.

5.2.5 Aggregation probabilistischer Nebenbedingungen

Ich werde zeigen, wie die Aggregation probabilistischer Nebenbedingungen zu behandeln ist. Es sei ein Modell unterstellt, das einen aggregierten Produktionssektor abbildet. Dieser optimiert eine Zielfunktion unter Randbedingungen. Eine dieser Randbedingungen sei eine probabilistische Nebenbedingung. Das Makromodell besteht aus durch Kumulation zusammengefasster Mikroproduzenten. Probabilistische Nebenbedingungen können das Angebot eines Produzenten reduzieren. Gilt dies für alle Produzenten, so muss für das Ergebnis eines Modells des Aggregats gefordert werden, dass dieses die Reduktion abbilden kann. Wie ich bereits ausgeführt habe, ist Aggregation dann zulässig, wenn die Funktionen des Modells separabel sind bzw. Indexfunktionen gebildet werden können. Ich unterstelle, dass die Mikroproduzenten identisch sind und Gewinn-, Kosten- und Produktionsfunktion durch Aggregation in Makrofunktionen zu überführen sind. Es bleibt nun zu untersuchen, ob eine Aggregation der probabilistischen Nebenbedingungen ebenfalls durch bloßes Summieren erfolgen kann.

Ich gehe wie folgt vor: In einem ersten Schritt stelle ich zwei identische Mikroproduzenten vor. Ich zeige dabei, wie die individuellen probabilistischen Nebenbedingungen wirken können. Im zweiten Schritt soll das Ergebnis für das Aggregat als Referenz aus den Mikroergebnissen abgeleitet werden. Im dritten Schritt zeige ich, dass die Ergebnisse eines aggregierten Systems bei summierten probabilistischen Nebenbedingungen nicht dem Referenzergebnis entsprechen und welche Ursachen hierfür verantwortlich sind. Im vierten und letzten Schritt wird ein alternatives Lösungsverfahren vorgestellt.

Es werden zwei Mikroproduzenten i mit 1 und 2 bezeichnet. Beide lösen ein statisches Optimierungsproblem der Art

$$\begin{aligned} \max_{x_i} \quad & f(x_i) \\ \text{s.t.} \quad & g(x_i) \leq 0. \end{aligned} \tag{5.36}$$

Die genaue funktionale Form des Optimierungsproblems ist hier nicht relevant und wird daher nicht ausgeführt. Es soll jedoch $\frac{\partial f}{\partial x_i} > 0$ gelten, was als Lösung ein möglichst großes x_i erzwingt. Beide Produzenten lösen ihr Optimierungsproblem unter einer weiteren, probabilistischen Nebenbedingung

$$\text{prob}\,(y_i - x_i \leq \tilde{z}_i) \leq \tilde{\gamma}. \tag{5.37}$$

y_i ist eine unsichere Größe. Für die Größen y_i sei unterstellt, dass sie einer Normalverteilung folgen. $\tilde{z}_i$ bezeichnet den Schwellenwert einer entscheidungsrelevanten Größe beider Produzenten. Die maximal akzeptierte Unterschreitung dieses Schwellenwertes $\tilde{\gamma}$ sei für beide Produzenten identisch. x_1 bzw. x_2 sind die Kontrollvariablen der Produzenten.

$$y_i \longrightarrow \mathcal{N}(\hat{y}_i^d, \sigma_i) \tag{5.38}$$

Für beide Produzenten unterstelle ich identische Parameter hinsichtlich der Verteilung von y. Die Erwartungswerte $\hat{y}_1$ und $\hat{y}_2$ sind mit 10 und die Standardabweichungen σ_1 und σ_2 mit 5 gewählt. Für die maximal akzeptierte Unterschreitung von $\tilde{z}$ gilt $\tilde{\gamma} = 0.1$. Vereinfachend sei unterstellt, dass $\tilde{z}_i = 0$ gilt. Somit können die Nebenbedingungen als

$$\text{prob}\,(y_i \leq x_i) \leq \tilde{\gamma} \tag{5.39}$$

geschrieben werden. Wie groß dürfen x_1 bzw. x_2 sein, damit die Nebenbedingungen erfüllt sind, wenn, wie unterstellt, $\frac{\partial f}{\partial x_i} > 0$ gilt? Für gegebene Parameter der Verteilungen folgt $x_i = 3.6$. In Abbildung (5.1) ist die Verteilungsfunktion der y_i gezeigt.[4]

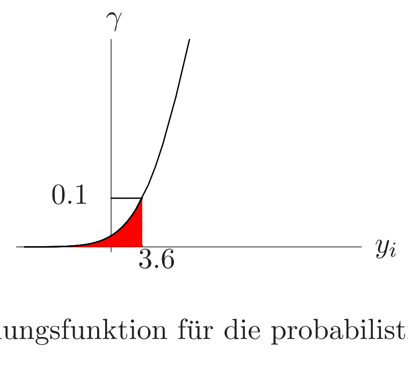


Abbildung 5.1: Verteilungsfunktion für die probabilistische Nebenbedingung

[4] Der farbig hervorgehobene Bereich dient einzig besserer Illustration.

Werden die beiden Produzenten als einzige Akteure eines Aggregats betrachtet, so ergibt sich, durch das mikroökonomische Kalkül bestimmt, dass die Summe $X = x_1 + x_2 = 7.2$ ist.

Ich will nun das Aggregat der beiden Produzenten betrachten. Es müsste zu fordern sein, dass das Ergebnis eines aggregierten Optimierungskalküls mit aggregierter probabilistischer Nebenbedingung zum selben Ergebnis kommt wie die Summe der Ergebnisse der Mikrokalküle.

Das aggregierte Optimierungskalkül hat die Form

$$\begin{aligned} \max_{X} \quad & F(X) \\ \text{s.t.} \quad & G(X) \leq 0. \end{aligned} \tag{5.40}$$

Die probabilistische Nebenbedingung, bei $\tilde{z} = 0$, liest sich als

$$\text{prob}\big(Y \leq X\big) \leq \tilde{\gamma}. \tag{5.41}$$

Es sei unterstellt, dass die y_i unkorreliert sind. Für die Verteilung des kumulierten $Y = y_1 + y_2$ folgt

$$Y \longrightarrow \mathcal{N}\big(\hat{Y}, \sigma^Y\big). \tag{5.42}$$

Der Erwartungswert der kumulierten Verteilung ist die Summe der Einzelerwartungswerte und somit definiert als $\hat{Y} = \hat{y}_1 + \hat{y}_2$. Die Standardabweichung der kumulierten Verteilung ergibt sich für unkorrelierte y_i als Wurzel der Summe der Varianzen der beiden Verteilungen von y_1 und y_2 mit $\sigma^Y = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$.

$$Y \longrightarrow \mathcal{N}(20, 7.07) \tag{5.43}$$

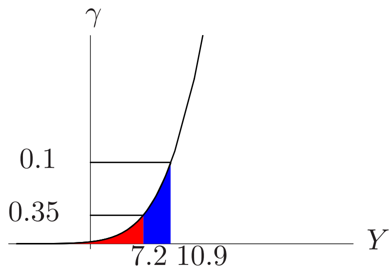


Abbildung 5.2: Verteilungsfunktion für die aggregierte probabilistische Nebenbedingung

In Abbildung (5.2) ist das Ergebnis für die aggregierte Verteilung von Y dargestellt. Der Schwellenwert für Y liegt für $\tilde{\gamma} = 0.1$ bei 10.9. Aus der Summe der Mikrolösungen müsste jedoch $Y = 7.2$ folgen. Die Wahrscheinlichkeit, dass die Realisation von Y unter $Y = 7.2$ liegt beträgt $\gamma = 0.035$. Es kann ein $7.2 < X < 10.9$ gewählt werden, ohne dass die Nebenbedingung verletzt würde.

Das Risiko sinkt also durch die Aggregation beider Produzenten zu einem aggregierten Agenten. Diese Risikoreduktion ergibt sich aus der Zusammenfassung der einzelnen nicht korrelierten Zufallszahlen y_1, y_2 zu einer Zufallszahl Y.

Sinkendes Risiko birgt jedoch die Gefahr, dass handlungsrelevante Größen in der Optimierung über- oder unterschätzt werden. Ich verweise hier auf das von mir vorgestellte Modell. Bei Aggregation würde sich hier ergeben, dass die angebotene Gütermenge über der liegt, die die probabilistische Nebenbedingung der nicht aggregierten Produzenten erfüllt.

Das Ergebnis eines durch Summation gebildeten Aggregats repräsentiert somit nicht das kumulierte Ergebnis von Einzelagenten. Die Forderung, dass ein Makromodell in der Lage ist, die Ergebnisse des zugrunde liegenden Mikromodells zu reproduzieren, kann in der vorgestellten Form nicht erfüllt werden. Die Ursache für die Fehleinschätzung liegt in der Bildung der kumulierten Standardabweichung, die für den aggregierten Fall als Wurzel der summierten Varianzen gebildet wurde.

Die Bedingung $\text{prob}(Y \leq X) = \text{prob}((y_1 + y_2) \leq (x_1 + x_2))$ kann nur dann gelten, wenn die Verteilung $Y \longrightarrow \mathcal{N}((\hat{y}_1 + \hat{y}_2), (\sigma_1 + \sigma_2))$ gilt. Die Standardabweichung der kumulierten Verteilung darf somit nicht als Wurzel der summierten Varianzen sondern als Summe der Standardabweichungen gebildet werden. Werden für die Verteilung von Y die Parameter $\hat{Y} = 20$ und

$\sigma^Y = 10$ gewählt, so beträgt die Wahrscheinlichkeit, dass Y kleiner X ist, bei $X = 7.2$ $\gamma = 0.1$. Dieses Ergebniss entspricht der Summe der nicht aggregierten Fälle.

Was bedeutet die Summation der beiden Standardabweichungen σ_1 und σ_2 für die Varianz der kumulierten Verteilung?

Für die Varianz von Y folgt

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(y_1 + y_2) =& (\sigma_1 + \sigma_2)^2 \\ &= \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\sigma_1\sigma_2.\end{aligned} \tag{5.44}$$

Die durch Summation der Standardabweichungen gebildete Varianz von Y ist um $2\sigma_1\sigma_2$ größer als die statistisch richtig, bei unkorrelierten y_i gebildete. $\sigma_1\sigma_2$ ist die Kovarianz der Größen y_1 und y_1 und entspricht einer Korrelation von Eins. Eine Korrelation zwischen den Verteilungen von y_1 und y_2 hatte ich jedoch ausgeschlossen.

Welche Bedeutung hat dies für die Modellierung aggregierter Systeme? Liegen für die Modellierung aggregierter Systeme nur aggregierte Daten vor, so sind an Hand dieser Erwartungswert und Varianz der unsicheren Größen zu schätzen. Ich unterstelle, dass hier alle notwendigen Bedingungen an Datenumfang und -güte erfüllt sind. In vorliegendem Beispiel wäre die Verteilung der aggregierten Größe Y zu ermitteln. Sind die nicht zu erkennenden Größen y_1 und y_2 wie beschrieben verteilt, so wird die Verteilung von Y; $Y^g \longrightarrow \mathcal{N}(20, 7.07)$ geschätzt. Kann unterstellt werden, dass y_1 und y_2 der selben Verteilungsfunktion mit identischen Parametern folgen, so kann die für die Modellierung korrekt zu verwendende Varianz von Y als $2\mathrm{Var}(Y^g)$ verwendet werden. Muss jedoch davon ausgegangen werden, dass die Parameter der Verteilungen der y_i nicht identisch sind, so müssen geeignete Verfahren gefunden werden, eine Abschätzung bezüglich der zugrunde liegenden Verteilungen aller y_i durchzuführen. So lassen sich Rückschlüsse auf die zu nutzende Verteilung der Y in der aggregierten Optimierung ziehen.

5.3 Entscheidungen und Erwartungsbildung

> *„What kind of information is used and how is put together to frame an estimate of future conditions is important to understand because the character of dynamic processes is typically very sensitive to the way expectations are influenced by the actual course of events.“*
>
> Muth (1961) S.315

Wie kann das Handeln von ökonomischen Akteuren beschrieben werden? Treffen Akteure Entscheidungen unter Verwendung aller (objektiv notwendigen) Informationen, die für die Entscheidung relevant sind oder werden nur solche Informationen genutzt, deren Beschaffung möglich ist? In der ökonomischen Theorie werden zwei Konzepte bezüglich dieser Frage unterschieden. Zum einen ist dies das Konzept der *unbegrenzten Rationaliät* und zum anderen das der *begrenzten Rationalität*.

Rationalität

Unbegrenzte Rationalität unterstellt, dass alle vorhandenen Informationen zur Entscheidungsfindung durch einen Akteur in der Entscheidungsfindung berücksichtigt werden. Zeit und Ressourcen für die Entscheidungsfindung stehen unbegrenzt zur Verfügung. Der entscheidende Akteur kennt alle ihm zur Wahl stehenden Möglichkeiten. Entscheidungsansätze, die das Konzept der Nutzen- bzw. Gewinnmaximierung verfolgen und nach globalen Optima suchen, sind Konzepte unbeschränkter Rationalität. Im Bezug auf die Suche nach globalen Lösungen für die Entscheidungsfindung ist Kritik angebracht. Wie ich in Abschnitt (3.3) beschrieben habe, ist das Finden globaler Lösungen eines komplexen Optimierungsproblems sehr schwierig. Entscheidungsprobleme von Wirtschaftssubjekten sind jedoch in der Regel umfangreich (vergleiche hierzu Conlisk (1996)). Sie sind dynamisch, beinhalten eine Reihe entscheidungsrelevanter Größen und sind restringiert. Hieraus ergibt sich ein Erklärungsproblem.[5]

[5] Man könnte einwenden, dass es bisher auch nicht möglich ist, Emotionen von Menschen technisch zu reproduzieren. Vielleicht kann der Mensch ebenso - intuitiv - Optimierungsprobleme lösen, die technisch nur schwer zu lösen sind.

Begrenzte Rationalität wurde erstmals durch Simon untersucht (vergleiche hierzu Simon (1987) und Aumann (1997)). Begrenzte Rationalität unterstellt, dass ökonomisch handelnde Akteure rational handeln, ihre Entscheidung jedoch durch einen Mangel an notwendigen Informationen hinsichtlich ihrer Wahlmöglichkeiten und notwendiger (Rechen-) Kapazität bestimmt werden (vergleiche hierzu Tesfatsion (2006c)). Entscheidungen und Erwartungsbildung im Rahmen der Hypothese begrenzter Rationalität setzen kein einheitliches Entscheidungsmodell für ökonomische Akteure voraus. Heterogenität realer Wirtschaftssubjekte wird hier abgebildet. Unterschiedliche kognitive Leistungsfähigkeit wird berücksichtigt. Anwendung finden Ansätze der begrenzten Rationalität in der Spieltheorie und in der Evolutionsökonomie. Entscheidungen von Wirtschaftssubjekten werden u.a. durch *Rules of Thumb* abgebildet (vergleiche hierzu u.a. Lettau und Uhlig (1999)). Hiernach treffen Akteure ihre Entscheidungen nicht unter globalen Optimalitätsbedingungen sondern an Hand einfacher Entscheidungsregeln.

Erwartungsbildung

Ökonomisch handelnde Akteure wie Unternehmen und Haushalte treffen ihre Entscheidungen in Bezug auf Ressourceneinsatz, Produktion, Konsum und Bestandsbildung auf Grundlage ihrer Erwartungen bezüglich zukünftiger Zustände ihrer Umwelt. Solche Zustände sind u.a. definiert durch die Ausprägung ökonomischer Parameter. Hinsichtlich dieser Ausprägungen bestehen Risiken. Die Realisierung ist ex post nicht vorhersehbar.

Ansätze der Erwartungsbildung unterscheiden sich in der Art, wie Akteure Hypothesen bezüglich der Realisierung ökonomischer Parameter bilden. Dabei ist der Umfang an Informationen die einem ökonomischen Akteur zugebilligt werden ein Hauptunterscheidungsmerkmale. Ich will im Folgenden exemplarisch die rationalen Erwartungen und die adaptiven Erwartungen vorstellen. Beides sind Konzepte rationalen Handelns, unterscheiden sich jedoch hinsichtlich des Informationsumfangs.

Rationale Erwartungen wurden mit den Arbeiten von Muth (1961) und Lucas Bestandteil der Wirtschaftswissenschaft. *Rationale Erwartungen* werden in den meisten heute genutzten ökonomischen Modellen unterstellt, so z.B. in *Dynamic Stochastic General Equilibrium* (DSGE) Modellen. Erwartungen bezüglich zukünftiger Zustände der Welt beeinflussen die Entscheidungen von Akteuren. Diese Entscheidungen beeinflussen ihrerseits den Zustand der Welt, welcher wiederum Erwartungen beeinflusst. *„Thus, there* *is a mapping from expectations to outcomes and back.“* (Savin 1987, S. 79) Dies gilt im Allgemeinen unabhängig von der Art der Erwartungsbildung. Rationale Erwartungen sind nun solche Erwartungen, die einen Fixpunkt, ein rational expectations equilibrium generieren, in dem Erwartungen einen Zustand der Welt generieren, der die gebildeten (rationalen) Erwartungen bestätigt.

Die (strenge)[6] rationale Erwartungshypothese unterstellt, dass ökonomisch handelnde Akteure das „wirkliche“ Modell der Wirtschaft kennen und wissen, dass es bezüglich bestimmter ökonomischer Parameter Schwankungen gibt. Ökonomisch handelnde Akteure können sich bezüglich der Ausprägung von ökonomischen Größen irren. Ihre individuellen Vorhersagen weichen jedoch nicht systematisch von der Realisierung ab.

Die Unterstellung vollständiger Information bezüglich des wirklichen ökonomischen Modells und damit vollständiger Information bezüglich der Verteilung stochastischer Größen ermöglicht es, Akteure zu modellieren, die für einen unendlichen Zeithorizont für jeden möglichen Zustand der Welt eine Handlungsanweisung generieren. Diese Handlungsanweisung, als Policy Function bezeichnet, ist dem Akteur zum Zeitpunkt $\hat{t} = 0$ seines Planungshorizontes nach Optimierung bekannt. Dieses Konzept findet u.a. im Bereich der DSGE Modellierung Anwendung (vergleiche hierzu u.a. Ljungqvist und Sargent (2004)). Das Generieren von Handlungsanweisungen für beliebige Zustände der Welt erfordert nicht nur vollständige Informationen bezüglich des Modells und der Verteilungen von ökonomischen Größen, sondern auch die Fähigkeit, diese zu nutzen. Der Akteur ist in der Lage, beliebig schwierige Schlussfolgerungen aus seinen Informationen zu ziehen.

Ein wichtiges Argument der Vertreter der Hypothese von den rationalen Erwartungen bezieht sich auf das Verhältnis des Informationsumfangs von Modellierer und modelliertem Akteur. Danach darf der Informationsumfang, den der virtuelle Akteur in einem Modell hat, nicht geringer sein, als der Informationsumfang, über den der Modellierer verfügt.

Aus der Hypothese rationaler Erwartungen leiten sich wichtige Überlegungen bezüglich der Zweckmäßigkeit wirtschaftspolitischer Handlungen ab.

[6] Zur Unterscheidung strenger und schwacher rationaler Erwartungen vergleiche Tesfatsion (2006c)

> *„If people have rational expectations, policies that try to manipulate the economy by inducing people into having false expectations may introduce more „noise“ into the economy but cannot, on average, improve the economy's performance.“*
>
> Sargent (2007)

Die Ergebnisse des Eingreifens des Staates in wirtschaftliche Prozesse werden durch ökonomische Akteure antizipiert. Somit werden Maßnahmen in Geld- und Steuerpolitik unwirksam.

> *„One reason why economists have found the rational expectations assumption appealing as that it imposes powerful discipline on modeling; in contrast, when expectations are not anchored by the logic of model or some other well-defined rule, then it is difficult to empirically falsify a model.“*
>
> Brock und Durlauf (2006) S. 125

Das Konzept der schwachen rationalen Erwartungen schwächt die Anforderungen hinsichtlich genutzter Informationen dahingehend, dass gefordert wird, dass ein Akteur seine Erwartungen optimal und rational hinsichtlich der zur Verfügung stehenden Informationen trifft. Es wird nicht gefordert, dass er alle Informationen bezüglich der Verteilungsfunktionen und möglicher Zustände der Welt besitzt (vergleiche hierzu Tesfatsion (2006c)). Wird diese Einschränkung gemacht, so wird es möglich, Lernkonzepte im Bereich rationaler Erwartungen zu nutzen. Solch ein Lernkonzept kann z.B. *bayesianisches Lernen* sein (vergleiche hierzu Cyert und DeGroot (1974)).

Das Konzept adaptiver Erwartungen ist älter als das der rationalen Erwartungen und geht auf Fisher (1911) zurück (vergleiche Parkin (1987)). Das Bilden von adaptiven Erwartungen ist ein *Fehlerkorrekturverfahren.* In dieses gehen die realisierten Ausprägungen einer Größe und die Erwartungen bezüglich ihrer Realisierung ein. Mittels eines Gewichtungsfaktors wird der in früheren Erwartungsbildungen begangene Fehler berücksichtigt. Handelnde Akteure müssen demnach kein konsistentes Modell bzw. Konzept der Wirtschaft besitzen. Allein die Realisation in der Vergangenheit und ihre eigenen Fehler sind entscheidungsrelevant. Damit fehlt dem Ansatz jedoch die Möglichkeit, Wissen, das Wirtschaftssubjekte von ihrer Umwelt erhalten, in der Erwartungsbildung zu berücksichtigen.

Kritik

Die Kritik an dem Konzept der unbegrenzten Rationalität und dem Konzept rationaler Erwartungen bezieht sich auf die Annahmen vollständiger Information und der unterstellten Fähigkeit von Akteuren, diese in vollem Umfang zu nutzen. Zu unterstellen, dass reale Wirtschaftssubjekte über ein konsistentes, korrektes Modell der ökonomischen Umwelt verfügen, ist als realitätsfern einzustufen. Anzunehmen, dass diese Akteure auch Kenntnisse über Verteilungsfunktionen bezüglich der Ausprägung von unsicheren ökonomischen Größen haben, die korrekt sind, muss ebenfalls angezweifelt werden. Zum einen erscheint es fraglich, ob es solche Verteilungsfunktionen überhaupt gibt. Maximal ein Schätzen von Verteilungen und ihren Parametern aus in der Vergangenheit realisierten Werten scheint realistisch. Zum anderen wird den Wirtschaftssubjekten eine Fähigkeit bezüglich des Lösens mathematischer Probleme zugestanden, die Kapazitäten voraussetzten, die nicht vorhanden sind.

5.4 Agent-based Computable Economics (ACE)

Der *ACE-Ansatz* untersucht komplexe, adaptive ökonomische Systeme, die selbständig handelnde Einheiten (Agenten) enthalten. Diese werden durch Handlungen anderer Agenten beeinflusst und üben selbst Einfluss aus. Dabei ist ein wichtiges Element, dass die Handlungen anderer Agenten und daraus resultierende Auswirkungen von einem Agenten wahrgenommen und in der Planung des eigenen Verhaltens berücksichtigt werden. Agenten in einem ACE-Ansatz können ökonomische, soziale, politische oder natürliche Einheiten sein. Dies sind Haushalte und Unternehmen, der Staat, Organisationen, aber auch Pflanzen oder das Wetter. Einige dieser Agenten agieren zielorientiert und sind demnach mindestens begrenzt rational in ihrem Verhalten (vergleiche hierzu Tesfatsion (2006a)). Agenten haben die Möglichkeit, aus den Beobachtungen ihrer Umwelt zu lernen. Lernprozesse verändern individuelle Einschätzungen bezüglich zu erwartender Realisationen von modellendogenen Parametern. Handlungen von Agenten berücksichtigen diese sich ändernden Erwartungen. Somit folgt, dass durch das Beobachten und Lernen aus den Handlungen anderer Agenten eigene Handlungen angepasst werden, womit ebenfalls ein Lernprozess ausgelöst wird.

Der Fokus des ACE Ansatzes liegt auf der Untersuchung sich selbst organisierender Systeme. Diese Betrachtung leitet sich aus der evolutorischen Ökonomie her. Strukturen von interagierenden Agenten sind nicht komplett durch den Modellrahmen vorgegeben, sondern sind auch Ergebnis des Modells. Die Freiheitsgrade im Bezug auf den Untersuchungsrahmen sind somit größer als in Modellen mit statischen Strukturen.

Der ACE-Ansatz ist ein computergestützter Ansatz der Ökonomie. Seine Anwendung setzt umfangreiche Rechenkapazitäten bei den genutzten Computern voraus. Dies ist ein Grund, warum eine Anwendung erst in den vergangenen Jahren möglich wurde. Agenten in solch einem Ansatz werden i.d.R. objektorientiert programmiert. Damit ist es möglich, in Struktur und Verhalten ähnliche Agenten durch Vererbung von sie beschreibenden Funktionen zu replizieren.

ACE-Modellierung kann für unterschiedliche Bereiche der ökonomischen Theorie angewendet werden. Dies reicht von mikroökonomischen bis makroökonomischen Untersuchungen (vergleiche hierzu Tesfatsion (2006a)). Wichtiges Einsatzgebiet ist die Fundierung makroökonomischer Modelle. Mit dem Einsatz von mikroökonomischen ACE-Modellen zur Fundierung makroökonomischer Modelle wird es möglich, sich von der Abstraktion des repräsentativen Agenten MarshallS in der Modellierung zu lösen (vergleiche hierzu Axtell

(2006) und zur Kritik am Konzept des repräsentativen Agenten Grabner (2002) und Schohl (1998)).

Kapitel 6

Agentenbasiertes Produktionsmodell

Eingebettet in die voranstehenden Ausführungen stelle ich im Folgenden mein Modell eines Produktionssektors zur Diskussion. Beginnend werde ich die Motivation meines Vorgehens darstellen. Im zweiten Abschnitt zeichne ich die Grundstruktur des Gesamtmodells auf. In Abschnitt Drei stelle ich die Zeit- bzw. Handlungsstruktur des Modells vor um im vierten Abschnitt näher auf die Marktkoordination des Vorproduktmarktes eingehen zu können. Abschnitt Fünf zeigt, welche Struktur ich für den Konsumgütermarkt unterstelle, wie Marktkoordination hier erfolgt und wie diese die Handlungen der Produzenten mitbestimmt. Im sechsten Abschnitt erfolgt die mathematische Beschreibung des Modells und seiner Bestandteile. Eine klare Abgrenzung von mathematischer und ökonomischer Formulierung habe ich nicht vorgenommen, da ich meine, dass so ein besseres Verständnis der Gesamtstruktur des Modells hergestellt werden kann. Im siebenten Abschnitt stelle ich die Parameter des Modells vor, welche entscheidend für die heterogene Struktur der Agenten sind. In Abschnitt Acht wird geprüft, ob das von mir formulierte Mikromodell eines Produzenten eine Optimierungslösung besitzt und ob diese eindeutig ist. Diese Frage wird in Bezug auf die zu nutzenden Optimierungssolver entscheidend. Das von mir vorgeschlagene Modell ist in den Programmiersprachen GAMS, Python und R programmiert worden. Im neunten Abschnitt zeige ich wie ich die programmtechnische Umsetzung meines Modells vorgenommen habe. Simulationsergebnisse des Modells werden im zehnten Abschnitt vorgestellt.

6.1 Motivation

In den vorstehenden Kapiteln dieser Arbeit habe ich in einem Überblick wichtige theoretische Konzepte und Kontroversen der ökonomischen Theorie diskutiert. Dies erfolgte, um das von mir im Folgenden vorzustellende Modell in die Volkswirtschaftslehre einordnen zu können.

Mir war es Ziel, ein Modell zu entwickeln, dass in der klimaökonomischen Modellierung Anwendung finden kann. Als wichtig erachtete ich es, dass das Modell in der Lage ist, heterogene, produktionsseitige Agenten abbilden zu können und eine Aggregation von Größen und Parametern weitgehend unterbleiben kann. Als weiteren Punkt erachte ich die Frage um die Annahmen zum allgemeinen Gleichgewicht als bedeutsam. Im vorliegenden Modell habe ich darauf verzichtet, eine Marktkoordination des Allgemeinen Gleichgewichts vorauszusetzen. Weitere zu berücksichtigende Punkte waren die Modellierung von Entscheidungen unter Risiko und die Beschreibung der Agenten als optimierende, beschränkt rational handelnde Agenten.

6.2 Struktur des Modells

Mein Modell definiert sich als mikroökonomisches partielles Multiagentenmodell. Konsumgüterproduzenten eines Produktionssektors treten als handelnde Agenten auf. Sie unterscheiden sich hinsichtlich individueller Produktions- und Kostenparameter. Ihre mathematische, funktionale Beschreibung ist identisch. Konsumgüterproduzenten - so im Modell vorgesehen - stellen Variationen eines Konsumgutes q her (vergleiche hierzu Abschnitt (6.5)). Sie befinden sich in einer monopolistischen Konkurrenzsituation.

Die Nachfrage nach Konsumgütern geht von Haushalten aus. Haushalte werden nicht modelliert. Ich unterstelle, dass den Konsumgüterproduzenten die Struktur einer ihr Produkt betreffenden aggregierten Nachfragefunktion bekannt ist. Die Parameter dieser individuellen Funktion sind ihnen zum Teil nicht bekannt, sie haben hierüber Erwartungen.

Jeder Produzent folgt einem individuellen, intertemporalen Optimierungsansatz. Seine Handlungen erfolgen unter Risiko. Das Risiko erwächst aus Unsicherheit bezüglich der individuellen, möglichen Absatzmenge. Nicht abgesetzte Güter werden in vorliegender Modellversion vernichtet. Ich habe aus vereinfachenden Gründen keine Modellierung von Lagerhaltung vorgenommen.

Unsicherheit bezüglich möglichen Absatzes resultiert aus Unsicherheit bezüglich gesetzter Konkurrenzpreise. Hierzu existieren für jeden Produzenten Erwartungen. Durch gegenseitiges Beobachten und adaptives Lernen erfolgt eine Anpassung dieser Erwartungen intertemporal. Eine probabilistische Nebenbedingung der Optimierung reduziert das Risiko. Hierzu wähle ich den Cash Flow at Risk-Ansatz.

Der Modellrahmen ist dynamisch. Handlungen einer Periode wirken über Bestandsveränderungen und Veränderungen in der Erwartungshaltung in folgenden Perioden.

Jeder Konsumgüterproduzent tritt als Nachfrager nach Vorprodukten, Kapitalgütern, Arbeit und staatlichen Wertpapieren auf. Das Angebot an Vorprodukten, Kapitalgütern und Arbeit wird nicht modelliert. Unterstellt sei, dass der Nachfrage nach Kapitalgütern und Arbeit ein quantitativ gleichwertiges Angebot gegenübersteht. Der Lohn ist als fix gegeben. Der Preis der Kapitalgüter ist den Konsumgüterproduzenten zu Beginn einer Periode nicht bekannt. Ich unterstelle weiter, dass hierüber Erwartungen bezüglich einer Verteilung und ihrer Parameter entwickelt werden.

Vorprodukte werden durch alle Konsumgüterproduzenten in Abhängigkeit der Höhe ihrer Produktionsmenge nachgefragt (vergleiche hierzu Abschnitt (6.4)). Die hier gewählte Form der Marktkoordination folgt einem nicht walrasianischen Rationierungsansatz.

Monetäre Größen habe ich nicht explizit modelliert. Zahlungen, Abschreibungen etc. erfolgen in Geldeinheiten und nicht in realen Größen.

Abbildung (6.1), bereits in der Einleitung zu dieser Arbeit vorgestellt, gibt einen schematischen Überblick über die Grundstruktur des Gesamtmodells.

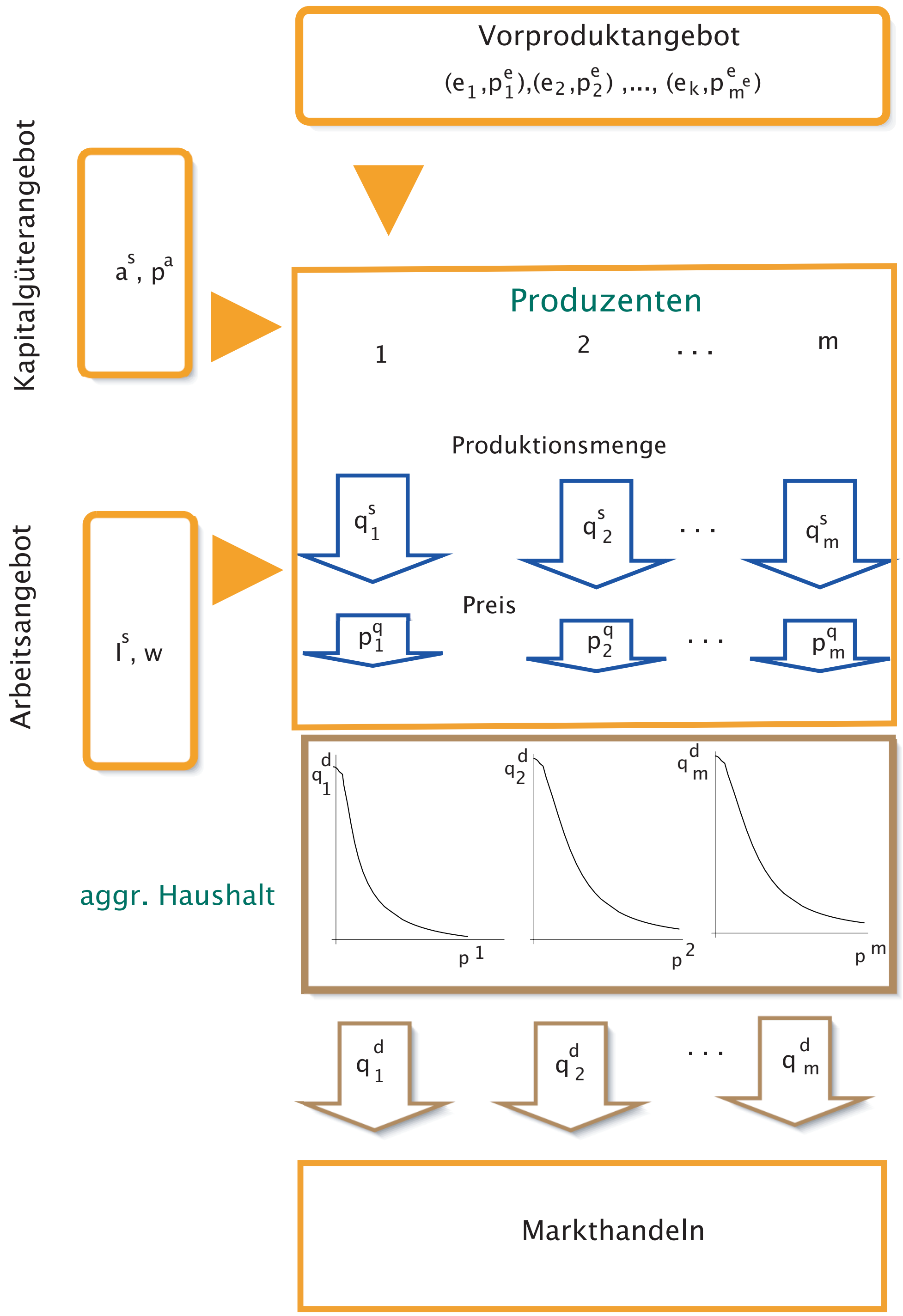


Abbildung 6.1: Schematische Darstellung des Gesamtmodells

6.3 Zeit- und Handlungsstruktur

Das Modell läuft über $\hat{T}$ Perioden. Zu Beginn einer jeden Periode sind firmenindividuelle Bestandsgrößen, Kosten- und Produktionsparameter sowie Erwartungen definiert. Weiterhin ist ein geordneter Vektor an Vorproduktangebot exogen gegeben (vergleiche hierzu Abschnitt (6.4)). Jedes Unternehmen nimmt eine intertemporale Optimierung über T Optimierungsperioden vor. Die hierdurch bestimmte, geplante Produktions- bzw. Angebotsmenge definiert die geplanten Kosten der Produktion und die geplante Nachfrage nach Vorprodukten, Arbeit und Kapitalgütern. Weiterhin bestimmt wird der Preis des angebotenen Konsumgutes. Optimierung erfolgt hinsichtlich einer probabilistischen Nebenbedingung (vergleiche hierzu Abschnitt (4.5)). Diese beinhaltet Erwartungen bezüglich der durch Konkurrenten gewählten Angebotspreise. In Abhängigkeit des realisierten Vorprodukterwerbs bestimmen sich die realisierte Produktions- bzw. Angebotsmenge, die tatsächlichen Kosten der Produktion und der ausgerufenen Angebotspreise. Weiterhin bestimmen sich die geplanten Kapitalgüter- und Bondnachfragen.

In Abhängigkeit von der Preiswahl aller Konkurrenzunternehmen bestimmt sich die firmenindividuelle Nachfrage nach Konsumgütern. Die zum ausgerufenen Preis realisierten Verkäufe, als Minimum von Angebot und Nachfrage, bestimmen den realisierten Umsatz und Cash Flow. Abhängig von dieser Realisierung kann die Nachfrage nach Kapitalgütern und Bonds ermittelt werden.

Nach Markthandeln sind allen Unternehmen die ausgerufenen Konkurrenzpreise bekannt. Mit diesen Informationen erfolgt eine Anpassung der Erwartungen bezüglich der Verteilung der einzelnen Konkurrenzpreise (vergleiche hierzu auch Abschnitt (6.9)).

6.4 Marktkoordination auf dem Vorproduktmarkt

Im Folgenden gehe ich auf den Marktkoordinationsmechanismus auf dem Vorproduktmarkt ein. Hierbei folge ich in meiner Beschreibung Tesfatsion (2006b), die das Handeln auf einen Konsumgütermarkt und beschreibt.

Es gibt genau ein *homogenes Vorprodukt* e, das von m^{e} Vorproduktproduzenten produziert wird. Der Vorproduktproduzent j mit $j = 1, ..., m^{\mathrm{e}}$ produziert das Vorprodukt e der Menge $e^{\mathrm{d},(j)}$ zum Preis $p^{\mathrm{e},(j)}$. Die Paare von Preis und Menge werden nach steigenden Preisen geordnet. Es ergibt sich eine geordnete Liste, deren erstes Element ein Paar von geringstem Preis und dazugehörigem Angebot ist. Die Optimierung der Konsumgüterproduzenten erfolgt zu diesem kleinsten Preis der Vorprodukte. Es ergibt sich eine aggregierte Nachfrage nach Vorprodukten aller Konsumgüterproduzenten als $\sum_{i=1}^{m^{\mathrm{q}}} e^{\mathrm{d},(i)}$. Ist diese aggregierte Nachfrage größer als das Angebot, so erfolgt Rationierung. Für die Rationierung unterstelle ich eine Zufallsrationierung wie von Sprumont (1991) beschrieben. Das heisst, es wird zufällig ein Produzent gewählt und dieser mit Vorprodukten bedient. Besteht ein weiteres Angebot zu diesem Preis, so wird erneut ein Produzent gewählt und dieser bedient. Dies erfolgt, bis kein Angebot oder keine Nachfragen nach Vorprodukten zu diesem Preis mehr bestehen. In einer zweiten Runde erfolgt eine erneute Optimierung der Konsumgüterproduzenten. Hierbei wird für den Preis der Vorprodukte der zweitkleinste gesetzt. Bereits erworbene Vorprodukte werden als Bestandsgrößen behandelt. Ihre Anschaffungskosten gehen in die Kostenfunktion ein. Dieser Algorithmus erfolgt, bis die Nachfrage nach weiteren Vorprodukten für alle Konsumgüterproduzenten oder das Vorproduktangebot Null wird.

In vorliegender Modellversion ist das Angebot durch Vorproduktproduzenten nicht explizit modelliert. Eine geordnete Liste von Preis-Mengen-Paaren wird exogen für jede Periode gegeben.

6.5 Nachfrage nach Konsumgütern

Durch Dixit und Stiglitz (1977) motiviert, wähle ich für die Nachfrage nach Konsumgütern die Marktform der *monopolistischen Konkurrenz*, wobei ich mich auf die Formulierung von Götz (1995) beziehe und die einfachste durch Dixit und Stiglitz (1977) vorgestellte Variante wähle. Es sei unterstellt, dass betrachtete Produzenten jeweils genau eine Variation eines Gutes q produzieren. $m+1$ solcher Produzenten existieren. Die nachgefragte Menge $q_t^d(i)$ nach einer Variation (i) des Gutes q definiert sich als

$$q_t^d(i) = \frac{p_t^q(i)^{\frac{1}{\alpha-1}}}{\sum_{j=1}^{m+1} p_t^q(j)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}} y^q. \tag{6.1}$$

$p_t^q(i)$ ist dabei Preis des betrachteten Gutes. $p_t^q(j)$ sind Preise aller weiteren Variationen und y^q ist der Anteil des Einkommens, der für die Güterart q_t^d aufgewendet wird. Durch Wahl des Preises $p_t^q(i)$ durch den Produzenten i bestimmt sich die ihm entgegengebrachte Nachfrage. Diese ist von der Preiswahl seiner Konkurrenten mitbestimmt. Die Preiselastizität der Nachfrage beträgt $\frac{1}{1-\alpha}$.

Ich will unterstellen, dass betrachteter Produzent Erwartungen bezüglich der Preiswahl seiner Konkurrenten hat. Die genaue Preiswahl kennt er nur ex ante. Dabei sei vereinfachend angenommen, dass die Realisierung jedes Preises $p(j)$ einer Normalverteilung folgt. Weiterhin unterstelle ich, dass die Zufallsgrößen $p(j)$ unabhängig sind. Diese Annahme vernachlässigt den Umstand, dass die Preiswahl jedes Produzenten von der Preiswahl der anderen Produzenten abhängig ist. Bestehende Unsicherheit bezüglich der Preise $p(j)$ lässt die Nachfrage nach i ebenfalls zu einer unsicheren Größe werden. Bei bekannten Verteilungen der $p(j)$ sind die Verteilungsparameter für $q(i)$ gesucht.

Es bieten sich u.a. zwei Möglichkeiten zur Bestimmung der Verteilungsparameter an. Erste Möglichkeit ist eine Simulation über geeignete Verfahren wie z.B. die Monte-Carlo-Simulation. Vorteil hierbei ist es, mögliche Korrelationen der Preise zu berücksichtigen. Nachteilig an dieser Methode ist ihre Rechenintensität. Eine Implementierung in vorliegende Modellarchitektur ist daher zu aufwendig.

Eine zweite Möglichkeit ist eine rechnerische Abschätzung der Verteilungsparameter. Hierzu stelle ich im Folgenden die Herleitungen vor. Der besseren Übersicht wegen vernachlässige ich in der Herleitung alle nicht benötigten Indizes.

Werden die Erwartungswerte der Konkurrenzpreise in die Nachfragefunktion eingesetzt, so folgt für den Erwartungswert $\mathrm{E}(q(i))$ der Nachfrage $q(i)$ in Abhängigkeit des Preises $p(i)$

$$\mathrm{E}(q(i)) \approx \frac{yp(i)^{\frac{1}{\alpha-1}}}{\sum_{j=1}^{m}\mathrm{E}(p(j))^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} + p(i)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}} \tag{6.2}$$

$$= \frac{yp(i)^{\frac{1}{\alpha-1}}}{\sum_{j=1}^{m}\mu_p(j)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} + p(i)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}}. \tag{6.3}$$

Diese Lösung weicht in ihren Ergebnissen von Simulationsergebnissen für die Erwartungsnachfrage ab. Die rechnerisch ermittelte Erwartungsnachfrage ist dabei immer größer als die durch Simulation ermittelte. Grund hierfür ist die Gestalt der Nachfragefunktion. Vernachlässigen wir alle nicht entscheidenden Parameter und setzen $\alpha = 0.5$, so hat die Nachfragefunktion die Gestalt

$$q_t^d(i) = \frac{1}{\sum_{j=1}^{m} p_t^q(j)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}} \tag{6.4}$$

$$= \frac{1}{\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{p_t^q(j)}}. \tag{6.5}$$

Für die Erwartungsnachfrage gilt

$$E(q_t^d(i)) = \frac{1}{\sum_{j=1}^{m}\mu_{p(j)}^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}} \tag{6.6}$$

$$= \frac{1}{\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{\mu_{p(j)}}}. \tag{6.7}$$

Die Werte von $p_t^q(j)$ sind symmetrisch um $\mu_{p(j)}$ verteilt. Wird mit x die positive Abweichung eines $p_t^q(j)$ von seinem Mittelwert $\mu_{p(j)}$ bezeichnet, so folgt

$$|\left(\frac{1}{\mu_{p(j)} + x}\right)| < |\left(\frac{1}{\mu_{p(j)} - x}\right)|. \tag{6.8}$$

Positive und negative Abweichungen vom Mittelwert gleichen sich somit nicht aus. Für die Gesamtfunktion folgt, dass der Erwartungswert überschätzt wird. Dies erfolgt um so stärker, je größer die Varianz der zugrunde liegenden Verteilung ist und je mehr Konkurrenten existieren.

Somit muss eine Korrektur erfolgen. Anwendung findet die Fehlerfortpflanzungsrechnung. Gesucht werden der Erwartungswert und die Varianz der Nachfrage $q_t^d(i)$.

Die stochastischen Größen $p(j)$ sind normalverteilt mit $\mathcal{N}(\mu_{p(j)}, \sigma_{p(j)})$. Sie lassen sich als

$$p(j)^q = \mu_{p(j)} + \sigma_{p(j)}\Delta \tag{6.9}$$

schreiben. Dabei ist $\Delta \longrightarrow \mathcal{N}(0,1)$ verteilt.

Ich will die Herleitung in drei Schritte unterteilen. In einem ersten Schritt sei α mit 0.5 angenommen und unterstellt, dass alle Konkurrenzpreise $p(j)$ einer identischen Verteilung folgen. In einem zweiten Schritt wird diese letzte Annahme aufgehoben, um in einem dritten für beliebige α Erwartungswert und Varianz von $q^d(i)$ anzugeben.

I Schritt 1 $\alpha = 0.5$ **,** $p_t^d(j) \longrightarrow \mathcal{N}(\mu_p, \sigma_p) \quad \forall j \in (1, m)$

Für $\alpha = 0.5$ gilt für $p_t^q(j)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} = \frac{1}{p_t^q(j)}$. Es erfolgt nun eine Taylorentwicklung[1] nach $\sigma_{p(j)}\Delta$.

$$\frac{1}{\mu_p + \sigma_p\Delta} = \frac{1}{\mu_p} - \frac{1}{\mu_p^2}\sigma_p\Delta + \frac{1}{\mu_p^3}\sigma_p^2\Delta^2 \tag{6.10}$$

Für die Summe der (identischen) μ_p folgt

$$\begin{aligned}\sum_j^m \frac{1}{\mu_p + \sigma_p\Delta} &= m\frac{1}{\mu_p + \sigma_p\Delta} \\ &\approx m\frac{1}{\mu_p} - m\frac{1}{\mu_p^2}\sigma\Delta + m\frac{1}{\mu_p^3}\sigma^2\Delta_j^2.\end{aligned} \tag{6.11}$$

[1]

$$\begin{aligned} f &= f(x) \\ f(x+\Delta) &= f(x) + \frac{df}{dx}\Delta + \frac{1}{2!}\frac{d^2 f}{dx^2}\Delta^2 + \frac{1}{3!}\frac{d^3 f}{dx^3}\Delta^3 + ... \end{aligned}$$

Für die standardnormalverteilten Δ folgt $m\Delta_j = 0$ als Erwartungswert. $m\Delta_j^2$ ist χ^2 verteilt mit m Freiheitsgraden. Der Erwartungswert ist hier m. Somit folgt für die Summe

$$m\frac{1}{\mu_p + \Delta} \approx \frac{m}{\mu_p}\left(1 + \frac{1}{\mu_p^2}\sigma^2\right). \tag{6.12}$$

Die Erwartungsnachfrage ist dann definiert als

$$\mathrm{E}(q(i)) \approx \frac{1}{\frac{m}{\mu_p}\left(1 + \frac{1}{\mu^2}\sigma^2\right) + p(i)^{-1}} \frac{p(i)^{-2}}{y}. \tag{6.13}$$

II Schritt 2 $\alpha = 0.5$ **,** $p_t^d(j) \longrightarrow \mathcal{N}(\mu_{p^q(j)}, \sigma_{p(j)}) \quad \forall j \in (1, m)$

Im zweiten Schritt soll nun unterstellt sein, dass die Erwartungswerte $\mu_{p(j)}$ und die Standardabweichungen $\sigma_{p(j)}$ nicht identisch für alle j sind. α beträgt weiterhin 0.5. Gleichung (6.11) ändert sich zu

$$\sum_j^m \frac{1}{\mu_{p(j)} + \Delta_j} \approx \sum_{j=1}^m \left(\frac{1}{\mu_{p(j)}} - \frac{1}{\mu_{p(j)}^2}\sigma_{p(j)}\Delta_j + \frac{1}{\mu_{p(j)}^3}\sigma_{p(j)}^2\Delta_j^2\right). \tag{6.14}$$

Der Erwartungswert von Δ ist Null, $\mathrm{E}(\Delta) = 0$. Für die χ^2 verteilte Größe Δ^2 mit einem Freiheitsgrad ist der Erwartungswert 1, $\mathrm{E}(\Delta^2) = 1$. Es folgt

$$\sum_j^m \frac{1}{\mu_{p(j)} + \Delta_j} \approx \sum_{j=1}^m \frac{1}{\mu_{p(j)}} + \sum_{j=1}^m \frac{\sigma_{p(j)}^2}{\mu_{p(j)}^3}. \tag{6.15}$$

Die Erwartungsnachfrage bestimmt sich dann als

$$\mathrm{E}(q(i)) \approx \frac{1}{\sum_{j=1}^m \frac{1}{\mu_{p(j)}} + \sum_{j=1}^m \frac{\sigma_{p(j)}^2}{\mu_{p(j)}^3} + p(i)^{-1}} \frac{p(i)^{-2}}{y}. \tag{6.16}$$

III Schritt 3 $\alpha \in (0,1)$ **,** $p_t^d(j) \longrightarrow \mathcal{N}(\mu_{p^q(j)}, \sigma_{p(j)}) \quad \forall j \in (1,m)$

Im dritten Schritt wird nun α beliebig gewählt. Es sei $\beta = \frac{\alpha}{\alpha-1}$. Es gilt weiterhin $p(j)^q = \mu_{p(j)} + \sigma_{p(j)}\Delta$. Für die Taylorentwicklung von $p(j)^\beta$ nach $\sigma_{p(j)}\Delta_j$ folgt

$$(\mu_{p(j)} + \sigma_{p(j)}\Delta_j)^\beta = \mu_{p(j)}^\beta - \beta\sigma_{p(j)}\Delta_j\mu^{\beta-1} + \frac{1}{2}(\beta-1)\beta\sigma_{p(j)}^2\Delta^2\mu^{\beta-2}. \quad (6.17)$$

Für die Summe aller m Werte folgt

$$\sum_{j=1}^{m}(\mu_{p(j)} + \sigma_{p(j)}\Delta_j)^\beta = \sum_{j=1}^{m}\left(\mu_{p(j)}^\beta - \beta\sigma_{p(j)}\Delta_j\mu^{\beta-1} + \frac{1}{2}(\beta-1)\beta\sigma_{p(j)}^2\Delta^2\mu^{\beta-2}\right). \quad (6.18)$$

Mit einem Erwartungswert von Null für Δ_j und einem Erwartungswert von Eins für Δ_j^2 folgt

$$\sum_{j=1}^{m}(\mu_{p(j)} + \sigma_{p(j)}\Delta_j)^\beta = \sum_{j=1}^{m}\left(\mu_{p(j)}^\beta + \frac{1}{2}(\beta-1)\beta\sigma_{p(j)}^2\mu^{\beta-2}\right). \quad (6.19)$$

Die Erwartungsnachfrage in Abhängigkeit vom Preis $p_t(i)$ für beliebige α und beliebig normalverteilte Größen $p_t^q(j)$ ist somit definiert als

$$\mathrm{E}(q(i)) \approx \frac{yp(i)^{\frac{1}{\alpha-1}}}{\sum_{j=1}^{m}\left(\mu_{p(j)}^\beta + \frac{1}{2}(\beta-1)\beta\sigma_{p(j)}^2\mu^{\beta-2}\right) + p(i)^\beta}. \quad (6.20)$$

Hieraus ergibt sich eine in Abbildung (6.2) dargestellte Erwartungsnachfragefunktion.

Für die Varianz einer durch mehrere unabhängige Zufallszahlen x_j bestimmten Funktion - hier der Nachfrage $f(q(i))$ - folgt aus der Delta-Methode:

$$\mathrm{Var}(f) \approx \sum_j \left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)^2 \mathrm{Var}(x_j). \quad (6.21)$$

Es folgt somit für die Varianz von $q(i)$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Var}(q(i)) &= \sum_{j=1}^{m} \left(\frac{\partial f}{\partial \Delta_j}\right)^2 \mathrm{Var}(\Delta_j) \\
&= \sum_{j=1}^{m} \left(\frac{\partial f}{\partial \Delta_j}\right)^2 1 \\
&= \sum_{j=1}^{m} \left(\frac{\partial f}{\partial p(j)}\right)^2 \left(\frac{\partial p(j)}{\partial \Delta_j}\right)^2 \\
&= \sum_{j=1}^{m} \left(\frac{\partial f}{\partial p(j)}\right)^2 \sigma^2_{p(j)} \\
&= \sum_{j=1}^{m} \left(-\frac{\mu_{p(j)}^{\frac{1}{\alpha-1}} p(i)^{\frac{1}{\alpha-1}} y\alpha}{\left(\sum_j^m \mu_{p(j)}^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} + p(i)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}\right)^2 (1-\alpha)}\right)^2 \sigma^2_{p_j}.
\end{aligned}
\tag{6.22}
$$

Für die Größe $q(i)$ kann Normalverteilung angenommen werden. Der Shapiro-Wilk Test für mehrere Versuche ergab mit einem π - Value von > 0.1, dass auf dem 5% Niveau die Normalverteilungshypothese nicht abgelehnt werden kann.

$$
q(i) \longrightarrow \mathcal{N}(\mathrm{E}(q(i)), \sqrt{Var(q(i))}) \tag{6.23}
$$

Die Varianz der Verteilungen der $q(i)$ ändert sich c.p. mit dem gewählten Preis $p(i)$. Ein steigender Güterpreis, durch den Produzenten des Gutes i gesetzt, reduziert die Varianz der Verteilung. Die seinem Gut i entgegengebrachte Nachfrage wird somit sicherer (vergleiche Abbildung (6.3)). In Abbildung (6.4) sind die Verteilungen um ihren Erwartungswert bei stetiger Veränderung des Preises $p(i)$ aufgetragen. Ein geringerer Preis $p(i)$ ergibt - c.p. - eine höhere Erwartungsnachfrage $\mathrm{E}(q(i))$. Die Unsicherheit ist ebenfalls höher. Ein höherer Preis lässt Erwartungsnachfrage und Unsicherheit sinken.

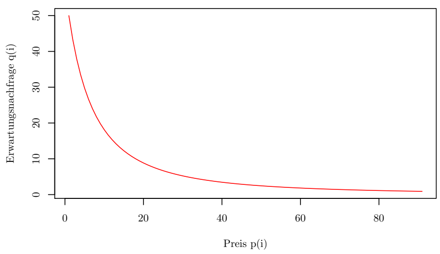


Abbildung 6.2: Erwartungsnachfragefunktion

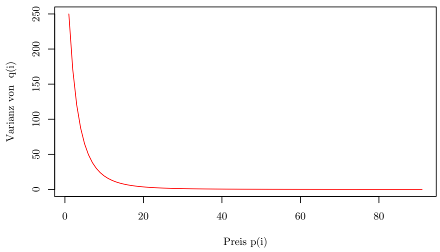


Abbildung 6.3: Varianz der Verteilungen um $q(i)$

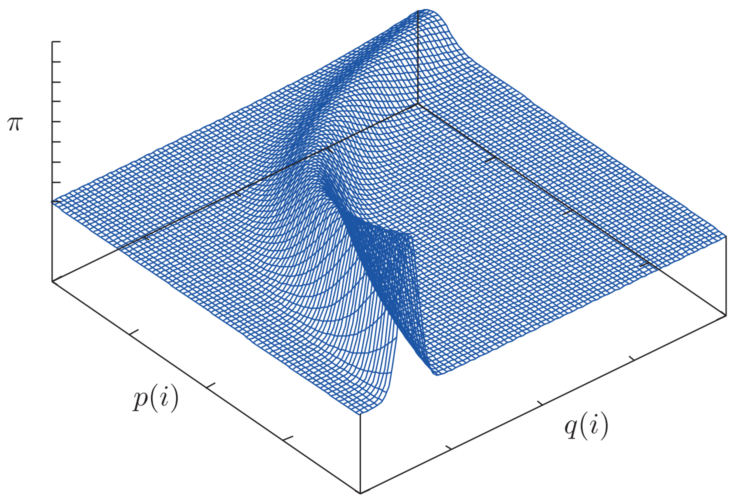


Abbildung 6.4: Nachfragefunktion mit Verteilung im 3D Plot

6.6 Mikromodell der Konsumgüterproduzenten

Einführung

Ich stelle nachfolgend das Modelltemplate für die Konsumgüterproduzenten vor.

Das Modelltemplate beschreibt einen intertemporal optimierenden mikroökonomischen Produzenten des verarbeitenden Gewerbes. Der Produzent produziert ein homogenes Gut. Dieses ist Konsumgut. Konsumgüter werden durch Haushalte nachgefragt.

Bestandsgrößen des Produzenten sind der Kapitalgüter- und der Bondbestand. Kontrollvariablen des Produzenten sind das Güterangebot, die Nachfrage nach staatlichen Wertpapieren (Bonds), die Nachfrage nach Kapitalgütern (Maschinen und Anlagen) und der Preis der angebotenen Güter.

Exogene Größen sind der Lohnsatz, der Zinssatz und firmenindividuelle Kosten- und Produktionsparameter.

Der Produzent maximiert den abdiskontierten, erwarteten kumulierten Gewinn. Der erwartete Gewinn einer Periode errechnet sich aus erwartetem Umsatz, Kosten, Abschreibungen und Zinserträgen (vergleiche hierzu Abbildung (6.6)).

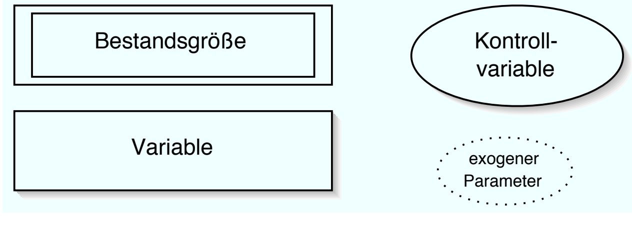


Abbildung 6.5: Zeichenerklärung

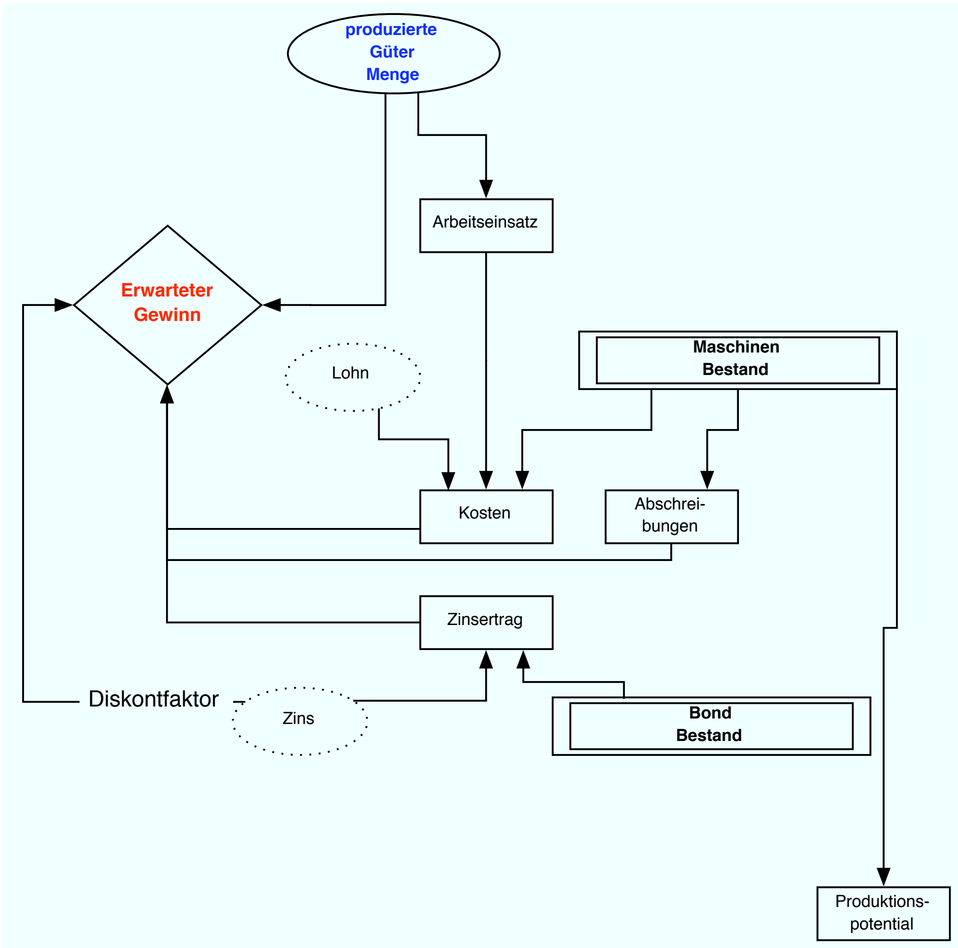


Abbildung 6.6: Bestimmung des erwarteten Gewinns

Für den Produzenten ist der erwartete Cash Flow neben dem Gewinn einer Periode handlungsentscheidende Größe (vergleiche hierzu Abbildung (6.7). Der Cash Flow kann zum Erwerb von Kapitalgütern und Wertpapieren genutzt werden und dient Steuerzahlungen und Gewinnausschüttungen (vergleiche hierzu Abbildung (6.8)).

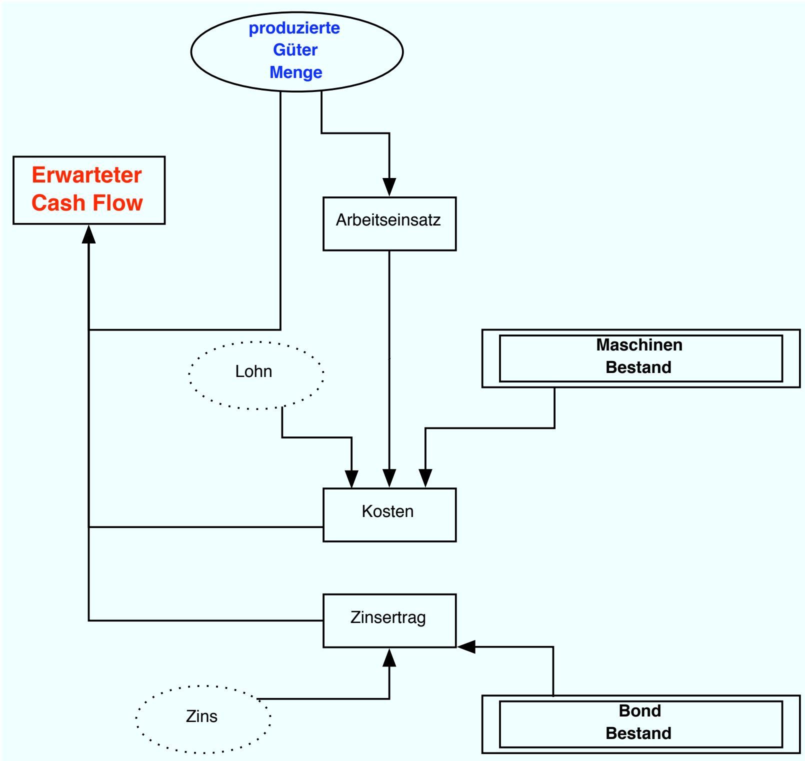


Abbildung 6.7: Bestimmung des erwarteten Cash Flow

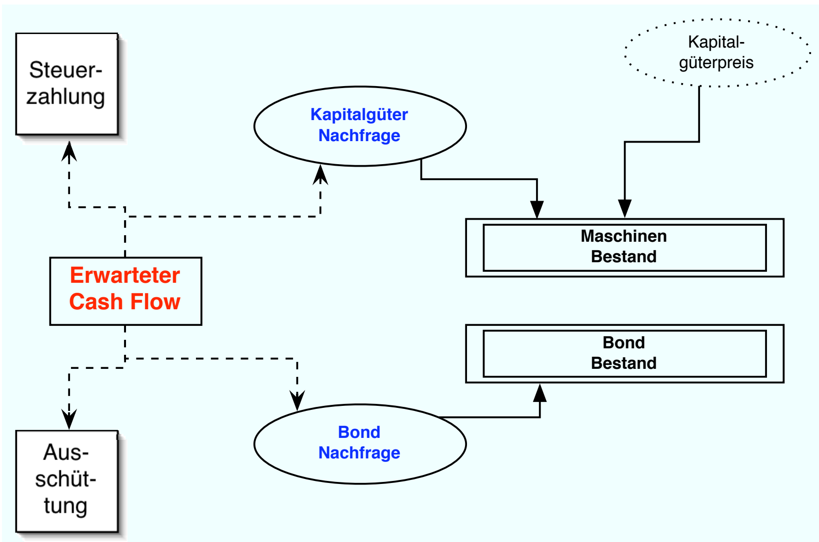


Abbildung 6.8: Verwendung des erwarteten Cash Flow

Produktion erfolgt durch Kapitalgüter und Arbeit. Kapitalgüter sind Maschinen und Anlagen. Ich unterstelle, dass Kapitalgüter und Arbeit homogene Größen sind. Eine maximale Produktionsgrenze wird durch ein Produktionspotential bestimmt. Dieses ergibt sich aus dem Bestand an Kapitalgütern. Konsumgüterproduzenten nutzen für die Produktion Vorprodukte. Deren Umfang ergibt sich aus den geplanten Produktionsmengen.

Die Zeitstruktur ist diskret, wobei ein Zeitschritt einem Jahr entspricht. Der Produzent optimiert über einen Planungshorizont, dessen Länge T fünf Jahre entspricht. Der Produzent legt die Menge der Produktion q_t^s, den Preis p_t^q, die Kapitalgüternachfrage a_t^d und die Bondnachfrage q_t^d fest.

Optimierungsproblem

Im Folgenden gebe ich die mathematische Formulierung eines einzelnen Agenten des Produktionssektors an. Eine detaillierte Beschreibung dessen erfolgt auf den folgenden Seiten. Das vorgestellte Optimierungsproblem beschreibt die Entscheidung zu einem Zeitpunkt $\hat{t}$ der Modelllaufzeit. Somit folgt, dass beschriebenes Problem durch jeden Agenten zu jedem der $\hat{T}$ Zeitpunkte gelöst wird. Unterschiede bestehen hinsichtlich der gegebenen Parameter. Ich verzichte auf eine Unterscheidung der Agenten durch Indizes. Einzig in der Formulierung der erwarteten Nachfrage und der Varianz der Nachfrage soll mit i ein betrachteter Agent konkretisiert werden, wobei seine Konkurrenten mit $j \in (1, m)$ bezeichnet sind.

Jeder Produzent maximiert den intertemporalen, abdiskontierten, erwarteten Gewinn über den Planungszeitraum T. Angegeben sind die Nebenbedingungen der Optimierung und Differenzengleichungen für die Entwicklung der Bestandsgrößen.

$$\max_{q_t^s, p_t^q, a_t^d, b_t^d} \quad \hat{R} = \sum_{t=1}^{T} (1-\iota_t^b)^{t-1} \cdot \Big(q_t^s p_t^q + \iota_t^b \check{b}_t - \omega_t^{fix} \check{a}_t - \sum_{i=1}^{m^e} \Big(p_t^{e,(j)} e_t^{d,(j)} \Big) \\ - w_t(\ln(j_t)^2 + \lambda q_t^s) - \check{k}_t \psi \Big)$$

$$
\begin{aligned}
\text{s.t.}\quad q_t^s, p_t^q, a_t^d &\geq 0\\
q_t^s &\leq \hat{q}_t^d\\
\check{b}_t &\geq 0\\
q_t^s &\geq \rho_t \check{a}_t\\
\kappa q_t^s &= e_t^d\\
\rho_T \check{a}_T &\geq \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} q_t^s\\
\Pi\big\{\hat{v}_t \leq \tilde{v}_t\big\} &\leq \gamma^{\tilde{q}}\\
q_t^s p_t^q - \omega_t^{fix}\check{a}_t - \sum_{i=1}^{m^{\mathrm{e}}}\left(p_t^{\mathrm{e},(j)} e_t^{\mathrm{d},(j)}\right) - w_t(\ln(j_t)^2 + \lambda q_t^s) + \check{b}_t \iota_t^b &\\
&= a_t^d p_t^a + b_t^d + (\zeta_t + \tau_r)\hat{r}_t
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\check{a}_t &= \check{a}_{t-1}(1-\psi) + a_{t-1}^d\\
\check{k}_t &= \check{k}_{t-1}(1-\psi) + a_{t-1}^d p_t^a\\
\check{b}_t &= \check{b}_{t-1} + b_{t-1}^d
\end{aligned}
$$

Erwartete Nachfrage versus Produktionsmenge

Der Konsumgüterproduzent hat Erwartungen bezüglich der ihm entgegengebrachten Nachfrage nach Konsumgütern. Diese leitet sich, wie in Abschnitt (6.5) beschrieben, aus der Erwartungsnachfragefunktion her und ist Funktion des Preises des Gutes und der Erwartungen des Produzenten über die Konkurrenzpreise. Die Realisationen der Nachfrage ist unsichere Größe. Abweichungen zur Produktionsmenge sind möglich. Dabei kann die Nachfrage q^d die Produktionsmenge q^s über- oder unterschreiten oder ihr entsprechen.

Der Produzent legt mit der Wahl seines Angebotspreises p^q bei gegebenen Erwartungen bezüglich der Konkurrenzpreise $p^s(j)$ und des Einkommens y^q die Erwartungsnachfrage $\hat{q}^d$ fest. Markthandeln erfolgt in der Form, dass Umsatzrealisationen aus dem Minimum von Produktions- bzw. Angebotsmenge q^s und realisierter Nachfrage q^d erwachsen. Ich unterstelle, dass der Produzent kein Angebot wählt, das über der erwarteten Nachfrage liegt. Gilt dies, so ist es zulässig, in der Bestimmung von erwarteten Umsatz, Cash Flow bzw. Gewinn q_t^s zu wählen, da dies nicht größer als die erwartete Nachfrage sein wird. Produktion und Angebot unterhalb der erwarteten Nachfrage ergeben sich aus einer probabilistischen Nebenbedingung. Sie sind Resultat von Risikoverringerung. Für die Realisation der Nachfrage gilt

$$\begin{aligned} q^d &\gtreqless \hat{q}^d \\ q^d &\gtreqless q^s. \end{aligned} \tag{6.24}$$

In der Bestimmung von erwarteten monetären Größen wie erwartetem Umsatz und erwartetem Cash Flow errechnet sich diese Größe über das Minimum von Nachfragemenge q^d und Produktions- bzw. Angebotsmenge q^s. Da der Produzent eine definierte erwartete Nachfragemenge kennt und sein Angebot nicht über dieser liegt ($q^s \leq \hat{q}^d$), ergibt sich der Wert für monetäre Erwartungsgrößen unter Verwendung der Produktionsmenge q^s (vergleiche hierzu u.a. die Bestimmung des erwarteten Umsatzes $\hat{u}$ in Gleichung (6.34)).

Kapitalgüterbestand

Kapitalgüter $\breve{a} \in \mathbb{R}^+$ dienen der Produktion des generischen Gutes q_t^s. Sie werden im Produktionsprozess genutzt, gehen jedoch nicht physisch in ihn ein. Kapitalgüter sind Einrichtungen, Maschinen und Anlagen. Der Kapitalgüterbestand ist eine Mengengröße. Er verändert sich durch Investition. Die periodische physische Vernichtung der Kapitalgüter erfolgt proportional zur Abschreibung. Ich unterstelle, dass genau eine Art physischer Kapitalgüter existiert. Investitionen in der Periode t gehen erst in der Folgeperiode physisch in den Produktionsprozess ein.

$$\breve{a}_t = \begin{cases} \breve{a}_{in} & , \quad t = 1 \\ \breve{a}_{t-1}(1-\psi) + a_{t-1}^d & , \quad t > 1 \end{cases} \tag{6.25}$$

Kapitalgüterwert

Der Kapitalgüterwert $k_t \in \mathbb{R}^+$ gibt den monetären Wert des Kapitalgüterbestandes an. Der Kapitalgüterwert einer Periode ist die Summe aus dem Kapitalgüterwert der Vorperiode und dem Wert der Neuinvestitionen der Vorperiode vermindert um Abschreibungen.

Ich folge den im HGB § 253 fixierten Bestimmungen zur Bewertung von Anlagevermögen. Demnach wird Anlagevermögen mit den Anschaffungs- bzw. Herstellungskosten vermindert um planmäßige Abschreibungen bewertet. Unplanmäßige Abschreibungen berücksichtige ich nicht. Fallende Preise zur Wiederbeschaffung, Katastrophenverschleiß u.Ä. vernachlässige ich somit. Als Abschreibungsmethode habe ich die geometrisch-degressive gewählt. Dies hat den Vorteil, dass der kumulierte Wert der Anlagegüter in einer Rechenoperation abgeschrieben werden kann. Eine Altersberücksichtigung muss somit nicht erfolgen. Diese Wahl hat demnach einen allein modelliertechnischen Grund. Weiterhin ist der Abschreibungssatz ψ für alle Anlagegüter identisch.

Der Kapitalgüterwert steigt durch Neuinvestitionen. Der Preis für Kapitalgüter wird für die Handlungsperiode $t = 1$ als exogen gegeben angenommen. Für die folgenden Perioden des Planungshorizontes bis $t = T$ bildet der Produzent Erwartungen.

$$\check{k}_t = \begin{cases} \check{k}_{in} & , \quad t = 1 \\ \check{k}_{t-1}(1-\psi) + a^d_{t-1} p^a_{t-1} & , \quad t > 1 \end{cases} \tag{6.26}$$

Abschreibungen

$$\Psi_t = \check{k}_t \psi \tag{6.27}$$

Bondbestand

Bonds $\check{b}_t \in \mathbb{R}^+$ sind staatlich emittierte, verzinste Wertpapiere. Der Bondpreis ist auf Eins fixiert und wird in der Notation vernachlässigt. Bonds stellen somit ein Instrument des Ansparens dar. Der Zinssatz ι^b ist exogen gegeben und konstant.

$$\check{b}_t = \begin{cases} \check{b}_{in} & , \quad t = 1 \\ \check{b}_{t-1} + b^d_{t-1} & , \quad t > 1 \end{cases} \tag{6.28}$$

Produktionspotential - Produktionsfunktion

Ich wähle für die technische Beschreibung der Produktion in meinem Modell keine Produktionsfunktion, wie sie allgemein üblich ist. Ich unterstelle, dass der Produzent eine Produktionsmenge, mit Einschränkungen, beliebig wählen kann. Restringiert wird diese Wahl durch das Produktionspotential und die Finanzierung der notwendigen weiteren Inputfaktoren Arbeit und Vorprodukt.

Der Begriff *Produktionspotential* findet in der Konjunkturforschung als makroökonomische Größe Anwendung. Ich verwende ihn hier in einem mikroökonomischen Zusammenhang. Das Produktionspotential $j_t \in \mathbb{R}^+$ gibt den maximal möglichen Output der Produktion an. Dabei unterstelle ich, dass der Bestand an Kapitalgütern bei Vollauslastung eine Obergrenze der Produktion definiert. Auf Grund der Homogenitätsannahme der Kapitalgüter vernachlässige ich die Frage um das Zusammenspiel unterschiedlicher Maschinen und Anlagen in der Produktion. Ich abstrahiere demnach soweit, dass jede Teilmenge an Kapitalgütern einen entsprechenden Anteil der maximalen Produktion ermöglicht.

Investitionen lassen das Produktionspotential steigen. Hierbei gehen diese in der Periode nach Anschaffung in die Produktion ein. Mit ρ_t wird die Produktivität einer Einheit Kapitalgut für einen Produzenten bezeichnet. Sie gibt an, wie groß deren maximal möglicher Mengenoutput ist. ρ_t ist firmenindividueller Parameter, daraus folgt, dass die Kapitalproduktivität unternehmensspezifisch ist.

$$j_t = \rho_t \breve{a}_t \tag{6.29}$$

Arbeitsnachfrage

Die Nachfrage nach Arbeit $l_t^d \in \mathbb{R}^+$ setzt sich aus einem fixen und einem variablen Teil zusammen. Der fixe Anteil wird dabei durch den Kapitalgüterbestand bestimmt, wobei ich unterstelle, dass mit zunehmender Unternehmensgröße der Teil fixer Arbeit unterproportional steigt. Ich wähle zur Beschreibung den natürlichen Logarithmus. Der variable Anteil an Arbeit wird durch die Produktionsmenge bestimmt. Hier unterstelle ich einen linearen Zusammenhang zwischen Produktionsmenge und Arbeitsnachfrage.

Ich gehe weiterhin davon aus, dass jede Menge an nachgefragter Arbeit durch Angebot gedeckt ist. Somit ist keine Situation freier Kapazitäten möglich.

Der Lohn sei für die Handlungsperiode $t = 1$ exogen gegeben. Für alle folgenden Perioden bildet der Produzent Erwartungen.

$$l_t^d = \ln(j_t)^2 + \lambda q_t^s \tag{6.30}$$

Vorprodukt

Vorprodukte gehen als Bestandteil des Endproduktes in die Produktion der Konsumgüter ein. Sie werden durch Vorproduktproduzenten hergestellt und angeboten. Ich unterstelle die Existenz eines homogenen Vorproduktes. Dieses kann sowohl als einzelnes Gut oder auch als Güterbündel betrachtet werden. Der Umfang der Nutzung des Vorproduktes ist abhängig von der Produktionsmenge an Konsumgut und dem firmenindividuellen Parameter κ. Ich unterstelle hier einen linearen Zusammenhang zwischen Vorproduktnachfrage und Konsumgüterproduktion.

$$e_t^{\mathrm{d}} = \kappa q_t^s \tag{6.31}$$

Dem in Abschnitt (6.4) vorgestellten Marktmechanismus auf dem Vorproduktmarkt folgend, erwirbt jeder Konsumgüterproduzent ein und das selbe Vorprodukt zu unterschiedlichen Preisen. Es gilt somit

$$e_t^{\mathrm{d}} = \sum_{i=1}^{m^{\mathrm{e}}} e_t^{\mathrm{d},(j)}. \tag{6.32}$$

Kosten

$o_t \in \mathbb{R}^+$ unterteile ich in fixe und variable Kosten. Fixe Kosten entstehen durch das Vorhandensein von Kapitalgütern $\breve{a}_t$. Variable Kosten entstehen durch Produktion und sind direkt abhängig von der Produktionsmenge q_t^p. Solche Kosten sind Lohnzahlungen, Materialaufwendungen, Kosten für Vorprodukte und Kosten der Nutzung von Kapitalgütern im Produktionsprozess. Mit ω^{fix} ist der fixe Kostenparameter definiert. w_t ist der Lohnsatz. Gleichung (6.33) beschreibt die Kostenfunktion für Konsumgüterproduzenten.

$$o_t^{\mathrm{q}} = \omega_t^{fix} \breve{a}_t + \sum_{i=1}^{m^{\mathrm{e}}} \left(p_t^{\mathrm{e},(j)} e_t^{\mathrm{d},(j)} \right) + w_t l_t^d \tag{6.33}$$

Erwarteter Umsatz

Der erwartete Umsatz $\hat{u}_t \in \mathbb{R}^+$ ist Produkt aus Güterpreis und Angebotsmenge. Da die nachgefragte und somit gehandelte Menge von der Angebotsmenge q_t^s abweichen kann, ist die Höhe des Umsatzes unsicher.

$$\hat{u}_t = p_t^q q_t^s \tag{6.34}$$

Erwarteter Periodengewinn

Der erwartete Periodengewinn $\hat{r}_t \in \mathbb{R}$ des Produzenten setzt sich aus den erwarteten Umsätzen, den Kosten für Maschinennutzung, Produktion und Arbeitseinsatz, den Abschreibungen und den Zinserträgen zusammen. Zinserträge erzielt der Produzent durch die Verzinsung seiner gehaltenen staatlichen Wertpapiere.

$$\hat{r}_t = \hat{u}_t - o_t - \Psi_t + \check{b}_t \iota_t^b \tag{6.35}$$

Erwarteter Cash Flow

Ich wähle den Brutto-Cash Flow $\hat{v}_t \in \mathbb{R}$ als Cash Flow-Größe. Es handelt sich somit um den Jahresüberschuss zuzüglich Abschreibungen.

$$\hat{v}_t = \hat{u}_t - o_t + \check{b}_t \iota_t^b \tag{6.36}$$

Zielfunktion

Der Produzent maximiert den abdiskontierten erwarteten Gewinn aller Perioden des Planungszeitraums. Als Diskontfaktor wähle ich den Zinssatz, zu dem die staatlichen Wertpapiere verzinst werden.

$$\max_{q_t^s, p_t^q, b_t^d, a_t^d} \hat{R} = \sum_{t=1}^{T} \hat{r}_t (1 - \iota_1^b)^{t-1} \tag{6.37}$$

Nebenbedingungen

Nichtnegativitätsbedingungen

Nichtnegativitätsbedingungen reduzieren das Intervall der Kontrollvariablen auf den $\mathbb{R}^+$.

$$q_t^s \geq 0 \tag{6.38}$$

$$p_t^q \geq 0 \tag{6.39}$$

$$a_t^d \geq 0 \tag{6.40}$$

Finanzrestriktion

Die Finanzrestriktion gewährleistet eine Identität von Einnahmen und Ausgaben in einer Optimierungsperiode. Cash Flow wird wie beschrieben für Steuerzahlungen, Ausschüttungen und den Erwerb von Kapitalgütern und staatlichen Wertpapieren verwendet.

$$\hat{v}_t = a_t^d p_t^a + b_t^d + (\zeta_t + \tau_r)\hat{r}_t \tag{6.41}$$

Probabilistische Nebenbedingung

Der Konsumgüterproduzent ist unsicher hinsichtlich der Realisierung seiner Verkäufe. Ihm ist, wie beschrieben, eine Erwartungsnachfragefunktion bekannt. Eine einmal festgelegte Produktionsmenge kann nicht wie in walrasiansichen Gleichgewichtsansätzen reduziert werden. Die Festlegung der Produktionsmenge q_t^s definiert die Kosten o_t der Produktion. Liegen die realisierten Verkäufe unter der Produktionsmenge, so fällt der Cash Flow (und der Gewinn) geringer aus, als der bei Produktion von q_t^s erwartete. Fällt der Cash Flow geringer aus als erwartet, so sind mögliche Kapitalgüter- und Bondkäufe nicht im Umfang der geplanten Käufe möglich.

Dieser Unsicherheit begegnet der Produzent mittels einer probabilistischen Nebenbedingung. Die probabilistische Nebenbedingung gewährleistet, dass die Wahrscheinlichkeit des Unterschreitens eines Mindest-Cash-Flows $\tilde{v}_t$ nicht größer einem gegebenen $\tilde{\gamma}_t$ ist. Für den Fall, dass die Realisierung der Nachfrage q^d der Produktionsmenge q^s entspricht, ist die Wahrscheinlichkeit des

Unterschreitens des Mindest-Cash-Flow 0.5 Für den Mindest-Cash-Flow wähle ich die Summe aus Investitionen, Steuerzahlungen und prozentualer Ausschüttung. Diese Ausschüttung erfolgt auf den erwarteten Gewinn $\hat{r}_t$. Ich wähle für den Mindest-Cash-Flow $\tilde{v}_t = a_t^d p_t^a + b_t^d + (\zeta_t + \tau_r)\hat{r}_t$. Die probabilistische Nebenbedingung ließt sich als

$$\text{prob}\left\{v_t < \tilde{v}_t\right\} \leq \tilde{\gamma}. \tag{6.42}$$

Mit γ sei die Wahrscheinlichkeit des Unterschreitens des Mindest-Cash-Flows bezeichnet. Somit folgt

$$\text{prob}\left\{q_t^d p_t^q - o_t + \check{b}_t \iota_t^b \leq a_t^d p_t^a + (\tau_t^r + \zeta_t)\hat{r}_t)\right\} = \gamma. \tag{6.43}$$

Nach Ausschreiben des erwarteten Gewinns folgt

$$\text{prob}\left\{q_t^d p_t^q - o_t + \check{b}_t \iota_t^b \leq a_t^d p_t^a + (\tau_t^r + \zeta_t)(q_t^d p_t^q - o_t - \Psi_t + \check{b}_t \iota_t^b)\right\} = \gamma. \tag{6.44}$$

Nach einem weiteren Umformungsschritt folgt

$$\text{prob}\left\{(1 - \tau_t^r - \zeta_t)(q_t^d p_t^q - o_t + \check{b}_t \iota_t^b) - a_t^d p_t^a + (\tau_t^r + \zeta_t)\Psi_t \leq 0\right\} = \gamma. \tag{6.45}$$

Die Güternachfragemenge q_t^d und der Preis der Kapitalgüter p_t^a sind Zufallsvariablen. Der Produzent, so unterstelle ich, hat rationale Erwartungen bezüglich ihrer Verteilungen. Ich unterstelle Normalverteilungen. Erwartungswert und Varianz für die Größe q_t^d leiten sich aus der Erwartungsnachfragefunktion ab (vergleiche hierzu Abschnitt (6.5)). Für den Erwartungswert und die Varianz der Verteilung des Kapitalgüterpreises werden exogene Größen vorgegeben.

Zur Berechnung von Erwartungswert und Varianz des Unterschreitens des Mindest-Cash-Flows sei eine Funktion $f(.)$ als

$$f(.) : (1 - \tau_t^r - \zeta_t)(q_t^d p_t^q - o_t + \check{b}_t \iota_t^b) - a_t^d p_t^a + (\tau_t^r + \zeta_t)\Psi_t \tag{6.46}$$

definiert. Der Erwartungswert für das Unterschreiten des Mindest-Cash-Flows bestimmt sich mit $\gamma = 0.5$ als

$$E(f(.)) = (1 - \tau_t^r - \zeta_t)(\hat{q}_t^d p_t^q - o_t + \check{b}_t \iota_t^b) - a_t^d \hat{p}_t^a + (\tau_t^r + \zeta_t)\Psi_t. \tag{6.47}$$

Bei bekannten Verteilungen der Größen q_t^d und p_t^a und bekannten Parametern der Verteilungen lässt sich über die Delta-Methode die Varianz der Funktion f bestimmen

$$\mathrm{Var}(f) = \frac{\partial f}{\partial q_t^d}\mathrm{Var}(q_t^d) + \frac{\partial f}{\partial p_t^a}\mathrm{Var}(p_t^a). \tag{6.48}$$

Da die Größen q_t^d und p_t^a normalverteilt sind und additiv verknüpft, muss f ebenfalls normalverteilt sein. Eine Kontrolle erfolgte durch Simulation und mit dem Shapiro-Wilk-Test.

Ich unterstelle, dass der Produzent plant, Investitionen nur durch Cash Flows und nicht durch Bondverkäufe zu tätigen. Zwar sind Bondverkäufe möglich um Investitionen in Kapitalgüter zu tätigen, jedoch wird dies vom Produzenten nicht geplant. Dies hat allein vereinfachende Gründe (vergleiche hierzu kritische Anmerkungen in Abschnitt (7.3).)

Weitere Relationen

Ich unterstelle, dass die angebotene Gütermenge q_t^s nicht über der erwarteten Güternachfragemenge liegt.

$$q_t^s \geq \hat{q}_t^d \tag{6.49}$$

Die maximal angebotene Gütermenge kann die durch das Produktionspotential bestimmte maximale Produktionsmenge nicht überschreiten.

$$q_t^s \leq j_t \tag{6.50}$$

Der Bestand an Bonds $\check{b}_t$ kann nicht negativ sein, da Verschuldung ausgeschlossen wird. Somit muss als Nebenbedingung gelten, dass das Angebot an Wertpapieren $-b_t^d$ durch den Produzenten nicht größer sein kann als der Bestand an solchen.

$$\check{b}_t - b_t \leq 0 \tag{6.51}$$

Vererbungsfunktion

Durch die Vererbungsfunktion wird gewährleistet, dass der Kapitalgüterbestand und damit das Produktionspotential am Ende des Planungshorizonts in $t = T+1$ nicht Null wird. Ich wähle hier einen funktionalen Zusammenhang, der sicher stellt, dass das Produktionspotential in Periode $T+1$ ausreicht, den Durchschnitt der Produktion der vergangenen Perioden zu produzieren.

$$j_{T+1} \geq \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} q_t^s \tag{6.52}$$

6.7 Parameterbeschreibung

Produzenten unterscheiden sich hinsichtlich ihrer firmenindividuellen Parameter. Die strukturelle sowie mathematische Form ist hingegen für alle Produzenten identisch. Im Folgenden gebe ich eine Beschreibung aller Modellparameter nach ihrem ökonomischen Gehalt und ihrem zeitlichen Verhalten. Weiterhin stelle ich dar, wie diese Parameter durch die handelnden Produzenten wahrgenommen werden bzw. wie sie in den Erwartungsbildungsprozess eingehen.

Abschreibungssatz ψ

Der Abschreibungssatz ψ gibt die jährliche relative Wert- bzw. Bestandsminderung von Kapital bzw. Kapitalgütern an. Dieser Wert ist für alle Unternehmen identisch. Weiterhin unterstelle ich, dass ψ unabhängig von t ist. Es erfolgt keine Veränderung innerhalb des Optimierungsplanungshorizontes T oder des Modelllaufes $\bar{T}$. ψ wird mit 0.3 gewählt. Dies entspricht einer zehnjährigen Nutzung von Kapitalgütern.

Produktivität ρ

Die Produktivität ρ gibt an, welcher maximal mögliche Output mit einer Einheit Kapitalgut zu produzieren ist. Die Produktivität subsumiert Kapitalproduktivität und einen nicht näher spezifizierten Produktionsmöglichkeitsparameter. ρ ist eine fimenindividuelle Größe. Ich unterstelle, dass ρ normalverteilt für alle Unternehmen ist. Je nach Simmulationsanforderung kann sich die Kapitalproduktivität über den Planungshorizont und (oder) die Modelllaufzeit ändern. Hierzu ist es möglich, einen Trend vorzugeben. Eine Änderung von ρ ist somit nur endogen möglich. ρ ist jedem Produzenten bekannt und somit deterministisch.

Variabler mengenspezifischer Arbeitseinsatz λ

Mit λ definiert sich der je produzierter Gütereinheit notwendige Arbeitseinsatz. λ ist, ebenso wie ρ, firmenindividuell und folgt einer Normalverteilung über die Produzenten. Anders als ρ ist λ eine stochastische Größe in dem Sinne, dass eine Veränderung von λ in der Zeit zufällig erfolgt. Hierzu treffe ich folgende Annahme: In der ersten Modellperiode $\hat{t} = 1$ wird für jeden

Produzenten ein firmenindividuelles $\hat{\lambda}$ aus einer Normalverteilung bestimmt. Dieser Wert ist Erwartungswert für zufällig bestimmte λ der Folgeperioden $\hat{t} \in (2, \hat{T})$ aus der Verteilung $\mathcal{N}(\hat{\lambda}, \frac{\hat{\lambda}}{10})$. Zu Beginn einer jeden Periode $\hat{t}$ wird für jeden Produzenten ein λ bestimmt und ihm „mitgeteilt". Für die Optimierungsperioden $t \in (2, T)$ operiert der Produzent mit dem Erwartungswert $\hat{\lambda}$. Größere λ erhöhen die Kosten der Produktion. Sie haben damit Einfluss auf die optimale Produktionsmenge und den ausgerufenen Preis. Weiterhin sind sie mitbestimmend für den Cash Flow. Hieraus ergibt sich, dass λ direkten Einfluss auf die probabilistische Nebenbedingung hat. Aus Erwägungen, die Komplexität des GAMS Programms betreffend, habe ich mich entschieden, λ keine Auswirkungen auf die Varianz der in (6.45) beschriebenen Funktion einzuräumen.

λ hat durch seine stochastische Natur Auswirkungen auf die Preise p_t^q die durch die Produzenten ausgerufen werden. Der Shapiro-Wilk-Test ergab für Simulationsläufe, dass die Normalverteilungshypothese der p^q nicht abgelehnt werden kann.

Mengenspezifische Vorproduktparameter κ

Für die Produktion des Gutes q werden Vorprodukte eingesetzt. Die notwendige Menge e bestimmt sich als Anteil von der Produktionsmenge q_i^s. κ ist firmenindividuell und verhält sich wie ρ und λ, wird also über die Produzenten aus einer Normalverteilung bestimmt. κ verhält sich in seinem zeitlichen Verlauf sowohl über die Modelllaufzeit als auch über den Optimierungsplanungshorizont wie ρ.

Zins ι^b

Verzinsung erfolgt auf gehaltene staatliche Wertpapiere $\check{b}$. Der Zins ist für alle Produzenten identisch. In vorliegender Modellversion ist der Zins konstant.

Gewinnsteuersatz τ_r

Die Gewinnsteuer ist für alle Unternehmen identisch. Eine zeitliche Variation wird von mir nicht modelliert.

Ausschüttungsparameter ζ

Ausschüttungen erfolgen als Anteil vom realisierten Gewinn r. ζ kann firmenindividuell gewählt werden. In den von mir vorgestellten Modellläufen habe ich ζ jedoch konstant gehalten.

Maximal akzeptierte Mindest-Cash-Flow Unterschreitung $\tilde{\gamma}$

Die maximal akzeptierte Mindest-Cash-Flow Unterschreitung habe ich sowohl über die Produzenten als auch über die Zeit als konstant angenommen. Die Programmstruktur erlaubt jedoch Variationen. Diese werden dann interessant, wenn Untersuchungen hinsichtlich veränderter Risikopräferenzen anzustellen sind. Eine Endogenisierung von $\tilde{\gamma}$ kann m.E. erst in einem Totalmodell erfolgen (vergleiche hierzu Abschnitt (7.1)).

Kapitalgüterpreis p^a

Das Angebot an Kapitalgütern wird von mir nicht modelliert. Der Preis p^a für Kapitalgüter ist eine stochastische Größe. Diese folgt einer Normalverteilung mit einem konstanten Erwartungswert und konstanter Varianz über alle Zeiträume. Die Unsicherheit hinsichtlich der Realisierung von p^a wird in der probabilistischen Nebenbedingung berücksichtigt.

6.8 Lösbarkeit des Modells

Optimierungsprobleme können keine, eine, endlich viele und unendlich viele Lösungen einer Minimierung oder Maximierung aufweisen. Muss man von mehreren Lösungen ausgehen, so ist nicht eindeutig, ob die gefundene Lösung global ist. Im Folgenden will ich für das von mir angegebe Optimierungsproblem des Produzenten dahingehend prüfen, ob es eine Lösung gibt, und wenn, ob sie eindeutig ist.

Prüfung des Vorhandenseins einer Lösung

Zur Prüfung, ob das Optimierungsproblem eine Lösung besitzt, wende ich den Satz von Weierstrass auf das Modell an (vergleiche hierzu Abschnitt (3.1)). Es ist nachzuweisen, dass das von mir beschriebene Modell auf einer kompakten, nichtleeren Menge definiert ist und die Zielfunktion stetig ist.

Kompaktheit

Als erstes ist nachzuweisen, dass die Menge M, auf der das Optimierungsproblem definiert ist, kompakt ist.

Das dynamische Problem ist endlich und die Zeitstruktur ist diskret. Das Problem ist im $\mathbb{R}^n$ und somit in einem endlichen Vektorraum definiert. Kompaktheit kann dann über Abgeschlossenheit und Begrenztheit nachgewiesen werden. Ist die Menge M Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ und ist sie abgeschlossen und beschränkt, so ist M kompakt.

Abgeschlossenheit

Eine Teilmenge M des $\mathbb{R}^n$ gilt als abgeschlossen, wenn für jeden Punkt $x \in \mathbb{R}^n$ außerhalb von M eine positive reelle Zahl ϵ existiert, so dass jeder Punkt $y \in \mathbb{R}^n$, dessen Abstand kleiner zu x kleiner ϵ ist, ebenfalls außerhalb von M liegt. Damit folgt, dass M einen Rand haben muss.

Alle Variablen des Modells sind Elemente des $\mathbb{R}^1$. Somit ist M in $\mathbb{R}^n$ definiert, wobei n das Produkt von Variablenanzahl und Periodenzahl angibt.

Der Definitionsbereich des Optimierungsproblems wird durch Einschränkungen bezüglich des Definitionsbereichs einzelner Variablen und durch Nebenbedingungen bestimmt. Beides definiert eine Menge M als Teilmenge des $\mathbb{R}^n$.

Alle Einschränkungen des Definitionsbereichs von Variablen und alle Nebenbedingungen sind Relationen der Gestalt *größer-gleich* oder *kleiner-gleich.* Diese Form der Relation definiert einen Rand des Definitionsbereichs M, für dessen Punkte keine Umgebung existiert, in der alle Punkte zu M gehören. M ist somit abgeschlossen.

Beschränktheit

ist ebenfalls eine Eigenschaft von Mengen. Es ist nachzuweisen, dass der Definitionsbereich M beschränkt ist.

Eine Teilmenge M eines metrischen Raums, hier des $\mathbb{R}^n$, heißt beschränkt, wenn eine Zahl $R > 0$ existiert, für die gilt $d(x, y) \leq R \, \forall \, x, y \in M$. d ist das Abstandsmaß der Punkte x und y in M. Auf M ist eine Metrik definiert.

M ist dann beschränkt, wenn sie in einem endlichen n-dimensionalen Quader liegt. Daraus folgt, dass keine Variable des Modells einen unendlichen Wert annehmen darf. Dies ist zu prüfen.

Das Modell ist dynamisch. Alle Startwerte des Modells und alle Parameter sind endlich. Bei gegebener endlicher Anfangsausstattung der Kapitalgüter $\breve{a}_t$ ist die maximale Produktionsmenge bzw. Angebotsmenge q_t^s einer Periode ebenfalls endlich.

Der Angebotspreis p_t^q ist endlich, da ein unendlicher Angebotspreis eine Nachfrage von Null erzeugt. Preise über dem Prohibitivpreis führen zu einer erwarteten Nachfrage von Null und somit zu einem Umsatz von Null.

Die Kosten o_t sind endlich. Endliche Umsätze und endliche Kosten führen zu endlichen Gewinnen und endlichem Cash Flow. Endlicher Cash Flow ermöglicht endliche Investitionen a_t^d einer Periode und endliche Wertpapierkäufe b_t.

Somit liegen alle Variablen in einem endlichen Intervall und M ist beschränkt.

Es folgt, dass der Definitionsbereich des Modells kompakt ist.

Stetigkeit

Es ist nachzuweisen, dass f in allen Kontrollvariablen stetig ist. Das intertemporale Optimierungsproblem wird als Summe über T Zeitpunkte beschrieben. Für einen Zeitpunkt t ergibt sich der erwartete Gewinn als

$$f_t : \hat{r}_t = p_1^q q_t^s - \big(\omega_1^{fix} \breve{a}_{in} + p_t^e \kappa q_t^s + w_t \big(\ln(j_{in})^2 + \lambda q_1^s\big)\big) - \breve{k}_{in} \psi + \breve{b}_{in} \iota^b. \quad (6.53)$$

Es ist dann nachzuweisen, dass f in den Kontrollvariablen p_t^q, q_t^s, a_t und b_t stetig ist.

Produkte, Summen und Differenzen stetiger Funktionen sind wiederum stetig.

Die Zielfunktion f_t kann als Summe bzw. Produkt einzelner, von jeweils einer Kontrollvariable abhängigen Funktionen dargestellt werden. Diese sind, ausgenommen des Logarithmus des Produktionspotentials, Polynome.

Polynome sind stetige Funktionen.

Der Logarithmus ist, ausgenommen an der Stelle Null, ebenfalls eine stetige Funktion. Die Null kann als Argument des Logarithmus in der Zielfunktion ausgeschlossen werden. Dies folgt aus der Tatsache, dass das Produktionspotential j_{in} größer Null ist.

Die intertemporale, kumulierte Zielfunktion f setzt sich als Summe aus zeitpunktbezogenen Funktionen f_t zusammen. Da Summen stetiger Funktionen stetig sind, folgt, dass f eine stetige Funktion ist.

Durch den Nachweis der Kompaktheit des Definitionsbereichs und der Stetigkeit der Zielfunktion lässt sich somit feststellen, dass das Optimierungsproblem mindestens ein globales Maximum besitzt.

Eindeutigkeit der Lösung

Die Frage, ob es mehrere lokale Optima gibt oder die Lösung eindeutig ist, ist damit jedoch nicht beantwortet. Hierzu wird das in Abschnitt (3.1) beschriebene Verfahren angewendet.

Im Folgenden sei $T = 2$ gewählt und die Hessematrix für die Zielfunktion f gebildet.

$$H = \begin{pmatrix}
\frac{\partial^2 f}{\partial p_1^q \partial p_1^q} & \frac{\partial^2 f}{\partial p_1^q \partial q_1^s} & \frac{\partial^2 f}{\partial p_1^q \partial a_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial p_1^q \partial b_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial p_1^q \partial p_2^q} & \frac{\partial^2 f}{\partial p_1^q \partial q_2^s} \\
\frac{\partial^2 f}{\partial q_1^s \partial p_1^q} & \frac{\partial^2 f}{\partial q_1^s \partial q_1^s} & \frac{\partial^2 f}{\partial q_1^s \partial a_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial q_1^s \partial b_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial q_1^s \partial p_2^q} & \frac{\partial^2 f}{\partial q_1^s \partial q_2^s} \\
\frac{\partial^2 f}{\partial a_1 \partial p_1^q} & \frac{\partial^2 f}{\partial a_1 \partial q_1^s} & \frac{\partial^2 f}{\partial a_1 \partial a_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial a_1 \partial b_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial a_1 \partial p_2^q} & \frac{\partial^2 f}{\partial a_1 \partial q_2^s} \\
\frac{\partial^2 f}{\partial b_1 \partial p_1^q} & \frac{\partial^2 f}{\partial a_1 \partial q_1^s} & \frac{\partial^2 f}{\partial b_1 \partial a_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial a_1 \partial b_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial b_1 \partial p_2^q} & \frac{\partial^2 f}{\partial a_1 \partial q_2^s} \\
\frac{\partial^2 f}{\partial p_2^q \partial p_1^q} & \frac{\partial^2 f}{\partial p_1^q \partial q_1^s} & \frac{\partial^2 f}{\partial p_2^q \partial a_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial p_1^q \partial b_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial p_2^q \partial p_2^q} & \frac{\partial^2 f}{\partial p_1^q \partial q_2^s} \\
\frac{\partial^2 f}{\partial q_2^s \partial p_1^q} & \frac{\partial^2 f}{\partial q_1^s \partial q_1^s} & \frac{\partial^2 f}{\partial q_2^s \partial a_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial q_1^s \partial b_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial q_2^s \partial p_2^q} & \frac{\partial^2 f}{\partial q_1^s \partial q_2^s}
\end{pmatrix} \quad (6.54)$$

Als Vektor der Eigenwerte ergibt sich für H

$$\lambda = \{-1, -1, 0, 1, 1, \frac{\rho_2^2 w_2}{(j_{in}(1-\psi) + a_1^d \rho_2)^2}\}. \tag{6.55}$$

Der Vektor der Eigenwerte der Hesse-Matrix enthält positive Elemente. Somit ist f nicht streng quasikonkav. Ist die Funktion f für zwei Optimierungsperioden nicht streng quasikonkav, so ist f auch für $T > 2$ Perioden nicht streng quasikonkav. Es ist daher zu vermuten, und Simulationen haben dies bestätigt, dass das Optimierungsproblem in seiner Gesamtheit mehrere lokale Lösungen besitzt.

Schlussfolgerung für die Modellierung

Nicht-Eindeutigkeit der Lösung stellt ein Problem hinsichtlich der Verwendung der Ergebnisse ökonomischer Modelle dar. Eine Möglichkeit, dieses Problem zu umgehen, bestünde darin, die Struktur des Modells so zu ändern, dass allein eine Lösung möglich wird. Diese Vorgehensweise ist üblich, reduziert jedoch den Aussagegehalt von Modellen, da eine Reduktion von Komplexität vorgenommen wird. Eine andere Möglichkeit erfordert die Nutzung von Optimierungsalgorithmen, die in der Lage sind, unempfindlich gegen lokale Lösungen zu sein. Der von mir genutzte GAMS Algorithmus Conopt ist ein Solver für lokale Lösungen. Dieses Problem habe ich in der Programmerstellung dadurch reduziert, dass ich über ein Pythonskript gewählte Startwerte veränderte und die Optimierung mehrmals aufrief. Der beste Zielfunktionswert wird mit zugehörigen Kontrollvariablen als Ergebnis der Optimierung gewählt und zurückgegeben.

6.9 Programmtechnische Umsetzung

In Abschnitt (6.6) wurde das mikroökonomische Modelltemplate für die Konsumgüterproduzenten vorgestellt. Im Gesamtmodell erfolgt eine Kopplung vieler solcher Produzenten. Im Folgenden beschreibe ich die programmtechnische Umsetzung dieses gekoppelten Modells.

Die programmtechnische Umsetzung erfolgte in den Programmiersprachen Python, R und GAMS. GAMS ist eine Programmumgebung, in der Optimierungsprobleme programmiert und mit entsprechenden, zur GAMS Familie gehörenden Solvern gelöst werden können. Soche Solver sind u.a. Conopt, Baron u.a. Ich wählte Conopt als Solver. R ist eine Programmiersprache zur Behandlung statistischer Fragestellungen. Sie bietet die Möglichkeit, eigene Skripte zu schreiben und auf vorhandene Bibliotheken zuzugreifen. Python ist eine plattformunabhängige Interpretersprache. Sie lässt es zu, objektorientiert und funktional zu programmieren. Die komplette Modellsteuerung ist in Python programmiert. Dazu gehören Datenerstellung, -manipulation und -bereitstellung, Ergebnisauswertung, Neuberechnung von Erwartungswerten und graphische Ausgabe.

Die Modellsteuerung besteht aus mehreren Modulen bzw. Skripten. Unter *Skript* verstehe ich einen Programmcode, der in einer Textdatei formuliert ist. Module sind Teile eines solchen Skripts. Skripte können ein oder mehrere Module enthalten. Die Zuordnung einzelner Module zu Skripten und die Aufteilung des gesamten Programms auf unterschiedliche Skripte erfolgte durch mich inhaltlichen Erwägungen folgend und der besseren Übersichtlichkeit wegen. Das Gesamtmodell besteht aus folgenden Skripten:

Skriptname	Sprache	Kurzbeschreibung
bezeichner.py	Python	Definiton aller Parameter und Variablen des Modells
daten_mod.py	Python	Belegen der Parameter mit Werten für die erste Periode $\hat{t}$
erzeugen_korr-_zf.r	R	Skript zum Erzeugen korrelierter Zufallszahlen
datenerstellung.py	Python	Skript zum Generieren der Parameter für alle Perioden $\hat{t} \in (1, \hat{T})$ und Optimierungsperioden $t \in (1, T)$ mit Zufallsmechanismen oder Trendfortschreibung

erzeugen_korr-_verteilungen.py	R	Skript zum Erzeugen korrelierter Zufallszahlen
GAMS-_steuerung.py	Python	Skript, steuert den Datentransfer zu GAMS, erstellt Startwerte der Kontrollvariablen, ruft die Optimierung auf und gibt die Ergebnisse an den Hauptprozess zurück
plt_f_gams.py	Python	Modul, das von GAMS_steuerung.py aufgerufen wird, es schreibt die Parameter für GAMS in entsprechender Syntax aus
konsum-_produzentx1.gms	GAMS	in der GAMS Syntax formuliertes Modell des Mikroproduzenten
r_plot_his.r	R	R Modul zur Ausgabe der Ergebnisse von Histogrammen
mod_run.py	Python	Hauptskript, das die Koordination aller weiteren Skripte steuert und die Periodenabrechnung erstellt
auswertung-_menge.py	Python	Skript, das Plots für die Angebots- und Nachfragemengen für ausgewählte Firmen erstellt.

Tabelle 6.1: Skripte des gekoppelten Modells

Die Abarbeitung des gekoppelten Gesamtmodells erfolgt in einem Hauptalgorithmus, der wiederum in mehrere Subalgorithmen aufgeteilt ist. Im Folgenden gebe ich eine Beschreibung, in welcher Reihenfolge die Abarbeitung erfolgt.

Datenerstellung

Verwendete Module und Skripte: *daten_mod.py* , *bezeichner.py* und *erzeuge_korr_zf.r*

Im Modul *daten_mod.py* (vergleiche Appendix (B.1)) sind die Startwerte der Bestandsgrößen und alle Parameter der Optimierung aller Produzenten für die Periode $\hat{t} = 1$ hinterlegt. Dies erfolgt in Listenform und in Form von

Dictionarys. Eine Liste ist in Python ein $n-$dimensionales Datenformat der Form [a,b,c]. a, b, c können dabei wiederum Listen sein und auch solche enthalten. Ein Dictionary ist ein Datenformat, in dem einem Bezeichner ein Objekt zugeordnet wird. Solche Objekte können Strings, Listen oder wiederum Dictionarys sein. Durch das Modul *bezeichner.py* (vergleiche Appendix (B.2)) wird die Deklaration aller Parameter und Variablen vorgenommen. *GAMS* unterscheidet Sets, skalare Parameter, Listenparameter und Tabels. Letztere werden von mir nicht verwendet. Listenparameter sind eindimensional und laufen über einen Index. Solche Indizes werden in Sets festgelegt und können z.B. Zeitpunkte sein. Das Skript *datenerstellung.py* erstellt nun unter Verwendung der Informationen aus den Modulen *daten_mod.py , bezeichner.py* und dem R Skript *erzeugen_korr_zf.r* Verzeichnisse, in denen für alle Perioden und alle Produzenten die Parameter der Optimierung hinterlegt sind. Die Datenerstellung erfolgt unabhängig vom eigentlichen Modellskript. Dies gibt die Möglichkeit, einzelne Daten manuell zu verändern. Im Einzelnen soll die Datenerstellung nicht näher beschrieben werden. Einzig auf die Erstellung korrelierter Zufallszahlen will ich kurz eingehen.

Generieren korrelierter Zufallszahlen

Unternehmen unterscheiden sich in der von mir gewählten Darstellung und Modellierung durch unternehmensspezifische Parameter. Solche sind die Kapitalproduktivität ρ, der zur Produktion notwendige variable Arbeitseinsatz je Produktionseinheit λ, der Ausschüttungsanteil vom Gewinn ζ, die fixen Kosten ω^{fix} und der notwendige Vorprodukteinsatz in der Produktion κ. Jede dieser Größen folgt einer stetigen Verteilung. Die Art der Verteilung ist empirisch aus geeigneten Daten zu schätzen. In der Simulation müssen, den Verteilungen folgend, Zufallszahlen für jede Größe und alle Unternehmen gezogen werden. Dies wird über Zufallsgeneratoren in Python oder R möglich. Das Ergebnis sind Vektoren von Pseudozufallszahlen. Zwischen den oben genannten Parametern bestehen jedoch Korrelationen. Solche Korrelationen geben die Stärke eines linearen Zusammenhangs zwischen den Parametern an. Bei $n > 2$ Parametern (Zufallszahlen) wird der Zusammenhang über eine Korrelationsmatrix bzw. Kovarianzmatrix dargestellt.

Das Generieren korrelierter Zufallszahlen wurde durch mich in R programmiert. Eingangsgrößen für den Algorithmus sind die Erwartungswerte und Standardabweichungen der Größen, eine Korrelationsmatrix und die Anzahl der zu generierenden Zufallszahlen, also die Anzahl der Unternehmen in der Simulation.

Der Algorithmus sei hier für normalverteilte Größen beschrieben. Im ersten Schritt werden aus den Standardabweichungen und der Korrelationsmatrix eine Kovarianzmatrix gebildet. Mit $\mathrm{Kor}_{i,j}$ sei die Korrelation zwischen den Parametern i und j bezeichnet. Der Eintrag in der Kovarianzmatrix für (i,j) bestimmt sich dann als

$$\mathrm{Cov}_{i,j} = \mathrm{Kor}_{i,j}\sigma_i\sigma_j \quad \forall i,j. \tag{6.56}$$

Im zweiten Schritt werden Sequenzen von standardnormalverteilten Zufallszahlen gezogen. Die Länge der Sequenzen entspricht dabei der Anzahl von Unternehmen und die Anzahl der Sequenzen ist die Anzahl der korrelierten Parameter.

Wie wird aus einer standardnormalverteilten Zufallszahl x eine Zufallszahl $x^\star$ der Verteilung $\mathcal{N}(\mu_x, \sigma_x)$ generiert? Hierzu wird jeder in einer Sequenz gezogene Wert x_k mit der Standardabweichung σ_{x_k} multipliziert und das Ergebnis zum Erwartungswert μ_{x_i} addiert

$$x_i^\star = \mu_{x_i} + \sigma_{x_i} x_i. \tag{6.57}$$

Für mehrere Parameter, hier als Beispiel zwei, wird eine vektorielle Schreibweise gewählt.

$$\begin{pmatrix} x_i^\star \\ y_i^\star \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_{x_i} \\ \mu_{y_i} \end{pmatrix} + A \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix} \tag{6.58}$$

Die Matrix A ist dabei die „Wurzel“ der Kovarianzmatrix. Wird mit C die Kovarianzmatrix bezeichnet, so gilt

$$AA^T = C. \tag{6.59}$$

Die Matrix A wird über die Cholesky-Zerlegung bestimmt (vergleiche Doukham (2003, S. 581)). Nach der Bestimmung von A wird es möglich, korrelierte, normalverteilte Zufallszahlen für alle Parameter zu generieren.

Hauptalgorithmus

Der Hauptalgorithmus wird durch das Skript *mod_run.py* (vergleiche hierzu Appendix (B.5)) gesteuert. Benötigte Skripte und Module sind *GASM_steu-_erung.py, plt_f_gams.py, konsum_produzentx1.gms und r_plot_list.r.*

Das Skript *mod_run.py* durchläuft dabei folgenden skizzierten Algorithmus. Dieser läuft über $\hat{T}$ Perioden, also über die gesamte Länge des Untersuchungszeitraums.

1. Es werden im ersten Schritt die Preise und die Angebotsmengen der Vorproduktmenge für die Periode $\hat{t}$ aus der Textdatei *vorprodukte.py* eingelesen.

2. Der Algorithmus tritt dann in eine Schleife, die solange ausgeführt wird, bis die Menge nachgefragter oder angebotener Vorprodukte Null ist.

   (a) Eine weitere Schleife durchläuft alle Produzenten.

      i. Hierzu wird als erstes der Bestand an Vorprodukten $\breve{e}$ und der Aufwendungen für diese $\breve{ep}$ in eine temporäre Datei *e_vor.txt* ausgeschrieben.

      ii. Danach erfolgt der Aufruf der Optimierung (vergleiche hierzu die separate Beschreibung im folgenden Unterabschnitt).

   (b) Wurde für alle Unternehmen die Optimierung erfolgreich durchgeführt, so wird die kumulierte Vorproduktnachfrage aus den produzentenindividuellen Nachfragen e^d bestimmt.

   (c) Ist die nachgefragte Vorproduktmenge größer dem Angebot, so erfolgt Rationierung des Vorproduktangebotes (vergleiche hierzu (6.4).

   (d) Es bestimmen sich die neuen Werte der Größen $\breve{e}$ und $\breve{ep}$ für jeden Produzenten. Mit diesen beginnt die Schleife erneut und endet erst bei erfülltem Abbruchkriterium.

3. Sind alle Vorproduktnachfragen befriedigt oder besteht kein weiteres Angebot, so ist das letzte ermittelte Optimierungsresultat bestimmend für die weitere Berechung.

4. Es werden nun die Nachfragerealisierungen nach Konsumgütern für alle Produzenten in Abhängigkeit der realisierten Preise bestimmt.

5. Die durch Optimierung bestimmten Konsumgüterpreise werden in einem Lernprozess zur Bildung neuer Erwartungswerte und Varianzen der Konkurrenzpreise herangezogen. Hierzu erfolgt ein Updating und Ausschreiben in die Textdateien *start_Epj.txt* bzw. *start_Vpj.txt* für die folgende Periode (vergleiche hierzu Abschnitt (6.9).

6. Ausgehend von der realisierten Verkaufsmenge als dem Minimum von angebotener und nachgefragter Menge bestimmen sich für jeden Produzenten die Größen des realisierten Umsatzes, Cash Flows, des Gewinns und die Bestandsveränderungen an Kapitalgütern, Kapitalwert und Bondbestand. Diese Größen werden in einer Archivliste gespeichert, um aus ihr heraus Abschlussgrafiken erstellen zu können.

7. Als Abschluss einer Periode werden alle Bestandsveränderungen in die produzentenindividuellen Datendateien ausgeschrieben.

8. Ist das Ende des Untersuchungszeitraums nicht erreicht, so erfolgt ein erneuter Durchgang des Algorithmus. Anderenfalls werden Abschlussgrafiken erstellt.

Aufruf der Optimierung

Mit Aufruf der Optimierung wird das Modul *GAMS_steuerung.py* (vergleiche Appendix (B.6)) aktiviert. Dieses Modul wurde von mir unabhängig vom beschriebenen Modell entwickelt und ermöglicht für beliebige Probleme die Anbindung von GAMS Optimierungen an Python Skripte. Das Modul *GAMS_steuerung.py* liest die produzentenspezifischen Parameter aus den durch das Skript *datenerstellung.py* erstellten Textdateien ein. Hierzu werden die im Modul *bezeichner.py* hinterlegten Informationen zu skalaren Parametern und Set- bzw. Listenparametern verwendet. Das Modul *GAMS_steuerung.py* ruft seinerseits das Modul *plt_f_gams.py* (vergleiche Appendix (B.7)) auf. Dieses schreibt alle Parameter in einem für GAMS interpretierbaren Format in die Textdatei *daten_input.txt.* Ist dies geschehen, werden Startwerte der Kontrollvariablen für die Optimierung erzeugt. Durch die Daten in *bezeichner.py* wurden hierzu die Grenzen festgelegt, in denen nun aus einer Gleichverteilung Startwerte ermittelt werden. Das Ziehen unterschiedlicher Startwerte für die Optimierung ist aus dem Grund wichtig, da der durch GAMS genutzte Optimierungsalgorithmus Conopt auch lokale Lösungen der Optimierung erzielt. Um das Risiko lokaler Lösungen zu minimieren und um gescheiterte Optimierungen abzufangen, wird die Optimierung wiederholt aufgerufen. Die Anzahl der Versuche wird dabei in der aufrufenden Routine des Hauptalgorithmus *mod_run.py* definiert.

Durch das Modul *GAMS_steuerung.py* wird nach Fertigstellung der Datei *daten_input.txt* der GAMS-Solver aufgerufen. Dies erfolgt über einen Aufruf auf Ebene des Betriebssystems. Hierzu wird das durch Python bereitgestellte Modul *os* verwendet. Dem GAMS-Solver wird mitgeteilt, in welcher Datei die

Formulierung der Optimierungsaufgabe hinterlegt ist. In diesem Fall ist dies die Datei *konsum_produzentx1.gms* (vergleiche Appendix (B.8)). Das Skript der Optimierung liest die durch das Modul *plt_f_gams.py* ausgeschriebenen Datendateien ein und startet die Optimierung. Im Ergebnis der Optimierung erstellt das GAMS-Skript Ergebnisdateien, in denen der Zielfunktionswert und die Werte der Kontrollvariablen abgelegt werden. Weiterhin wird der Modellstatus abgespeichert. Der Modellstatus gibt an, ob die durch den Solver gefundene Lösung global ($MS = 1$), lokal ($MS = 2$) oder infeasible (MS = 5) ist. Durch das Modul *GAMS_steuerung.py* werden die Ergebnisse aus den temporären Textdateien eingelesen und in Listen gespeichert. Nach wiederholtem Aufruf der Optimierung mit unterschiedlichen Startwerten der Kontrollvariablen wird jenes Ergebnis gewählt, das mit zulässigem Modellstatus den höchsten Zielfunktionswert aufweist. Dieses Ergebnis wird als Dictionary formuliert und an den Hauptprozess zur Weiterverarbeitung übergeben.

Updating von Erwartungswert und Varianz der Konkurrenzpreise

Konkurrenzpreise sind für Produzenten stochastische Größen, die sie erst nach Realisierung in einer Periode kennen. Sie unterstellen Normalverteilung für die Preise eines jeden Konkurrenten. Als Erwartungswert bestimmen sie den Durchschnitt der Realisierungen für alle Perioden $< \hat{t}$. Die Varianz ermitteln sie als Konvexkombination aus der unterstellten Varianz der Vorperiode $\hat{t} - 1$ und der statistisch ermittelten Varianz. In vorliegender Modellversion habe ich für die Parameter der Konvexkombination 0.5 gewählt. Das beschriebene Verfahren zur Bestimmung der Varianz kann als Erwartungsbildung über adaptive Erwartungen beschrieben werden. Der Agent, hier ein Produzent, berücksichtigt in der Bestimmung der Varianz des Preises für einen Konkurrenten Informationen der vorangegangenen Periode und neue Informationen.

6.10 Modellläufe

6.10.1 Referenzsimulation

Im Folgenden stelle ich nicht kalibrierte Modellläufe meines Modells vor. Es ist Ziel zu zeigen, wie sich das Modell unter verschiedenen Annahmen hinsichtlich maximal akzeptierter Wahrscheinlichkeiten der Mindest-Cash-Flow-Unterschreitung, verschiedenen Vorproduktangeboten und verschiedenen Parameterkonstellationen verhält.

Zunächst beschreibe ich an einer Referenzsimulation den Output des Modells und zeige, wie sich die einzelnen Variablen und Bestandsgrößen im Zeitablauf verhalten (vergleiche hierzu Abbildung (6.9)).

Die Simulation läuft über $\hat{T} = 30$ Perioden. Der Produktionssektor besteht aus $m^q = 7$ Unternehmen. Jedes dieser Unternehmen startet mit identischen Werten der Bestandsgrößen. Unterschiede bestehen hinsichtlich der Produktionsparameter. Diese wurden durch zufällige Wahl bestimmt und sind korreliert. Der geringe Umfang an Produzenten, hier sieben, lässt es nicht zu, die Verteilung dieser Parameter anzugeben. Die maximal akzeptierte Wahrscheinlichkeit des Unterschreitens des Mindest-Cash-Flow beträgt $\tilde{\gamma} = 0.3$. Der Vektor des Vorproduktangebotes ist so gewählt, dass zu einem gegebenen Preis maximal zwei zufällig gewählte Unternehmen zu diesem Preis das Vorprodukt erwerben können. Somit wird eine große Heterogenität bezüglich der Kosten für Vorprodukteinsatz hergestellt. Diese führt zu hoher Heterogenität bezüglich der Güterpreise. Das Vorproduktangebot ist in jeder Periode identisch.

Abbildung (6.9, (a)) zeigt für alle sieben Produzenten die Produktions- bzw. Angebotsmenge $q^s_{\hat{t}}$. Es zeigt sich ein Rauschen dieser Mengen, wobei die Angebotsmenge jedes der sieben Produzenten in einem individuellen Bereich verbleibt. Ursache des Rauschens ist die zufällige Zuteilung von Vorprodukten zu variablem Preis (vergleiche Abbildung (6.9, (a))). Die Bereiche des Angebotes resultieren aus den produzentenspezifischen Produktionsparametern.

Rauschen ist ebenso bei der Preiswahl zu erkennen. (vergleiche Abbildung (6.9, (b)). Abbildung (6.9, (c)) zeigt die Güternachfrage nach den Produkten $q_{\hat{t}}(1)$ bis $q_{\hat{t}}(7)$. Da die Güternachfrage preisabhängig ist, bewirkt das Rauschen der Preise ein Rauschen der Güternachfrage. Im Vergleich der Abbildungen (6.9, (a)) und (6.9, (b)) zeigt sich, dass Angebotsmengen und Preisordnung entgegengesetzt sind. Produzent fünf ruft die geringsten Preise auf und hat die höchste Produktions- bzw. Angebotsmenge. Hingegen gilt für den ersten Produzent, dass seine Preise die höchsten und seine Angebote die geringsten sind. Dies folgt aus der Nachfragefunktion für monopolistische Konkurrenz. Je geringer der Preis, desto größer die erwartete Nachfrage (vergleiche Abbildung (6.9, (c))) und desto höher das individuelle Angebot. In Abbildung (6.9, (d)) ist der Verkauf der Produzenten abgetragen. Der Verkauf eines Produzenten ist das Minimum von Angebotsmenge und Nachfragemenge.

Abbildung (6.9, (e)) zeigt den zeitlichen Verlauf der produzentenindividuellen Kapitalgüternachfragen und Abbildung (6.9, (f)) den Bestand dieser. Auch hier ist Rauschen zu erkennen. Ursache hierfür ist ebenfalls der sich stochastisch ändernde Aufwand für den Vorprodukteinsatz. Kapitalgüternachfrage resultiert aus der Produktionsplanung künftiger Perioden. Für diese Perioden bilden die Produzenten Erwartungen hinsichtlich der Vorproduktpreise. Der erwartete Preis für die Optimierungsperioden $t = 2$ bis $t = 5$ wird als

$$\hat{p}^v_{\hat{t}+1} = .7\hat{p}^v_{\hat{t}-1} + .3p^v_{\hat{t}} \tag{6.60}$$

adaptiv gebildet. Ist der realisierte Preis einer Periode größer als der bisherig erwartete, so werden steigende Produktionskosten erwartet. Die geplante Produktionsmenge wird gegebenenfalls reduziert, womit auch ein geringerer Kapitalgüterbestand und somit geringere Kapitalgüternachfrage nötig werden.

Für den Produzenten $i = 1$ sind in Abbildung (6.9, (i)) Angebot und Nachfrage dargestellt. Es ist zu erkennen, dass die Differenz von Angebot und Nachfrage abnimmt. Dies erfolgt durch das Lernen des Produzenten über die Preiswahl seiner Konkurrenten. Das Angebot liegt unterhalb der Nachfrage. Ursache hierfür ist die bindende probabilistische Nebenbedingung (vergleiche hierzu die folgenden Ausführungen dieses Abschnitts).

Für die Summe der Nachfragen bzw. Angebote (Abbildung (6.9, (j))) ist gleiches zu erkennen. Auch hier konvergiert das Angebot von unten an die aggregierte Nachfrage, ohne diese jedoch zu erreichen.

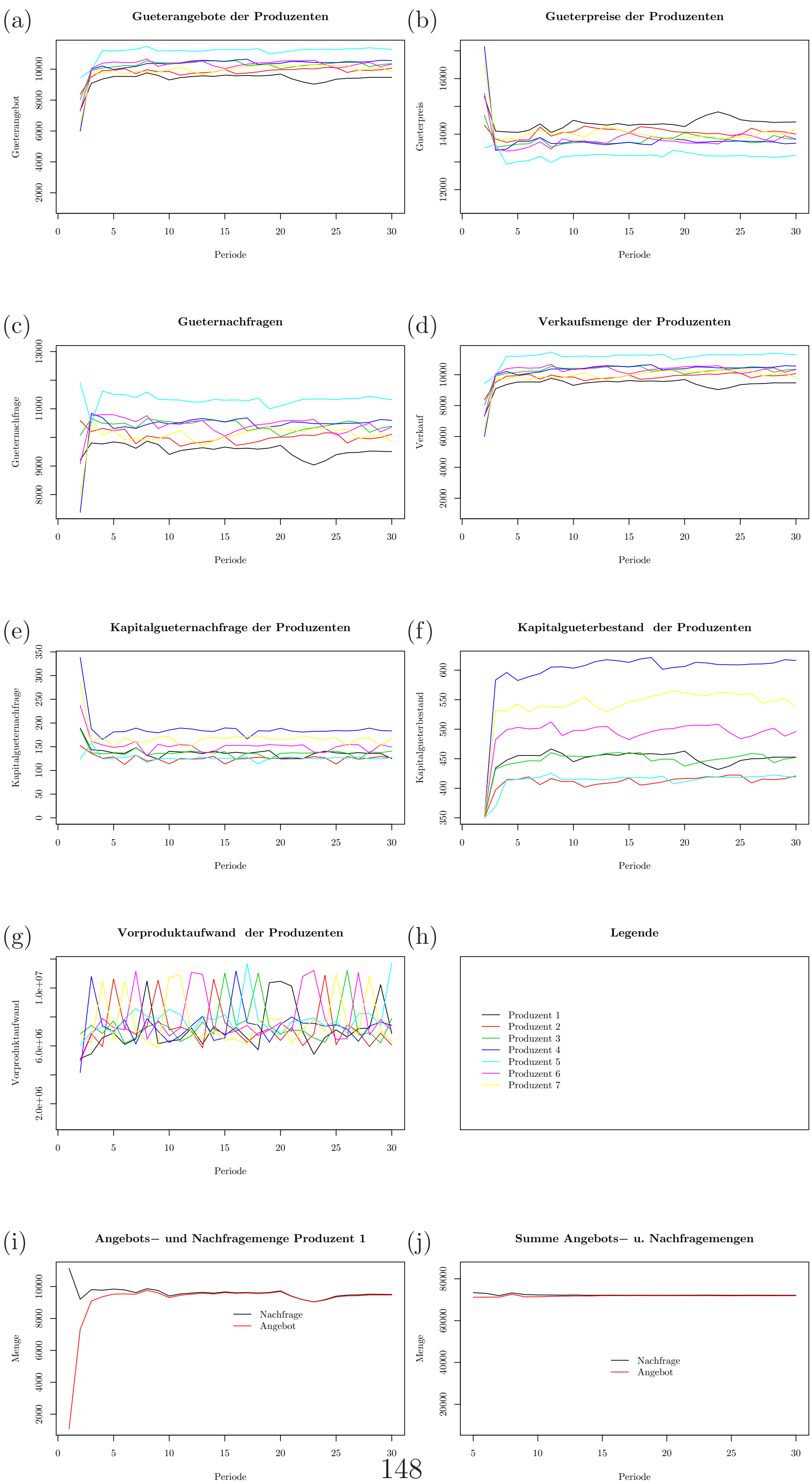


Abbildung 6.9: Modelllauf Nummer 1 mit $\tilde{\gamma} = 0.3$

6.10.2 Parametervariationen

Auswirkung des Parameters $\tilde{\gamma}$

Der Parameter $\tilde{\gamma}$ gibt die durch den Produzenten maximal akzeptierte Wahrscheinlichkeit des Unterschreitens eines Mindest-Cash-Flow an (vergleiche zu den Simulationsergebnissen Abbildung (6.9) und die Abbildungen A.1 bis A.3 im Appendix). Unsicherheit besteht bezüglich der möglichen Absatzmenge, da einem Produzenten die Preise seiner Konkurrenten nicht bekannt sind. Weiterhin ist der Preis für Kapitalgüter nicht bekannt. Zu beiden Größen bestehen Erwartungen und sind Varianzen bekannt. In Abbildung (6.10) sind Simulationsergebnisse für vier Szenarien dargestellt. Sie unterscheiden sich hinsichtlich der $\tilde{\gamma}$ der Produzenten, wobei für jede Simulation die Werte für alle Produzenten identisch bleiben. Die maximal akzeptierten Wahrscheinlichkeiten für eine Mindes Cash Flow Unterschreitung sind mit $\tilde{\gamma} = 0.5$, $\tilde{\gamma} = 0.3$, $\tilde{\gamma} = 0.1$ und $\tilde{\gamma} = 0.01$ gewählt. In Abbildung (6.10,(a)) zeigt sich, dass die kumulierte Produktionsmenge der Produzenten mit kleiner werdendem $\tilde{\gamma}$ sinkt und gegen geringere Werte konvergiert. Für die kumulierte Güternachfrage gilt Entgegengesetztes. Hier sind die Abweichungen der Simulationsergebnisse voneinander jedoch geringer (vergleiche Abbildung (6.10,(b))). In Abbildung (6.10,(c)) ist zu erkennen, dass bei geringerer maximal akzeptierter Mindest-Cash-Flow Unterschreitung die Überschussnachfrage größer ist. Das bedeutet, dass bei größerer Risikoaversion der Produzenten das Angebot geringer und die Überschussnachfrage größer ist.

Welche gesamtwirtschaftlichen Auswirkungen resultieren aus diesem Umstand? Geringere Produktion, ausgelöst durch geringere maximal akzeptierte Mindest-Cash-Flow Unterschreitung, erfordert einen geringeren Arbeitseinsatz. Sind die Löhne exogen gegeben oder temporär nicht verhandelbar, so resultiert eine geringere Lohnauszahlung. Diese führt zu geringerem Einkommen durch die Produktion in diesem Sektor. Gilt dies für signifikant viele Sektoren, so reduzieren sich auf Grund von Risikoaversion Einkommensmöglichkeiten und damit Konsummöglichkeiten. Dies wirkt auf die Gütermärkte zurück, so dass Nachfrage verringert wird. Risikoaversion der beschriebenen Gestalt kann somit zu sich selbst erfüllenden Erwartungen bezüglich geringerer Absatzmöglichkeiten führen. Dieser Zusammenhang sollte nachgewiesen werden. Allerdings bedarf es dazu eines gekoppelten Modells, in dem Haushalte, weitere Sektoren und Finanzintermediäre abgebildet werden.

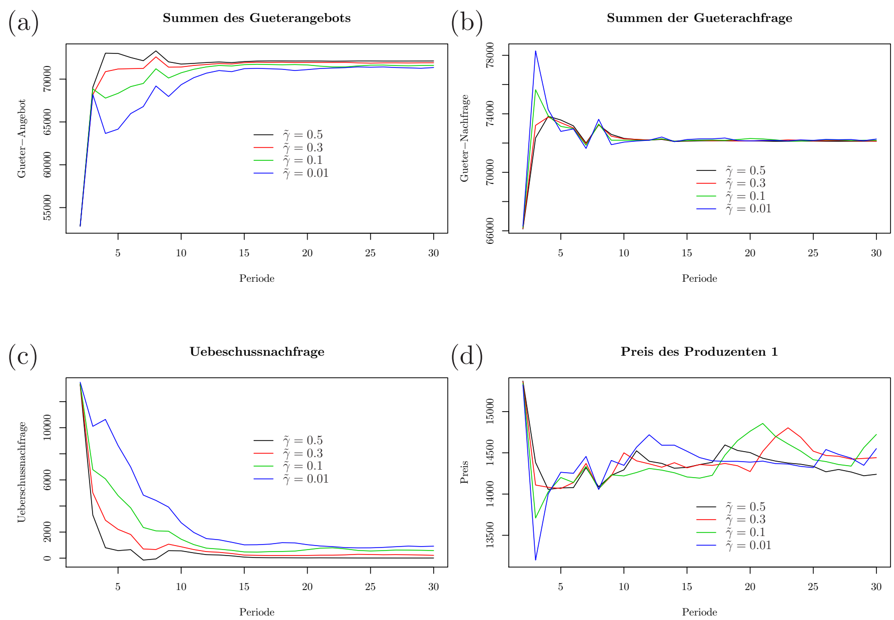


Abbildung 6.10: Vergleich bezüglich unterschiedlicher Werte des Parameter $\tilde{\gamma}$

Steigende Vorproduktpreise

Steigende Vorproduktpreise bewirken eine Reduktion des Angebotes. Ursache hierfür sind steigende Kosten der Produktion (vergleiche Abbildung (A.4) im Appendix (A)). Wirken Preisveränderungen homogen auf alle Produzenten, wie in Modelllauf 5 unterstellt, so sinkt die sektorale Produktionsmenge bei steigenden Güterpreisen. In Modelllauf 5 ist das Vorproduktangebot so groß, dass keine Rationierung notwendig wird. Jeder Produzent erhält die gewünschte Menge an Vorprodukten zum selben Preis. Dies reduziert das Rauschen im Gesamtsystem, was dazu führt, dass die Konvergenz des Güterangebotes schneller erfolgt. Die Phase des Lernens durch Beobachtung verkürzt sich.

Verteilung bei 50 Produzenten

Im Modelllauf 6 habe ich 50 Produzenten im Markt simuliert (vergleiche Abbildung (A.5) im Appendix (A)). Diese unterscheiden sich hinsichtlich individueller Produktions- und Kostenparameter. Dies führt zu unterschiedlichen Angeboten, Preisen und Kapitalgüterbestand. Hierfür ergibt sich für jede dieser Größen eine Verteilung über alle Produzenten zu einem fixen Zeitpunkt. In Abbildung (6.11) sind Histogramme für diese Größen angegeben. Die individuelle Produktions- und Kostenparameter sind jeweils normalverteilt. Jedoch habe ich eine Korrelation unterstellt. So gehe ich z.B. davon aus, dass eine geringe Arbeitsproduktivität mit einem höherem Kapitalgütereinsatz in der Produktion korreliert ist.

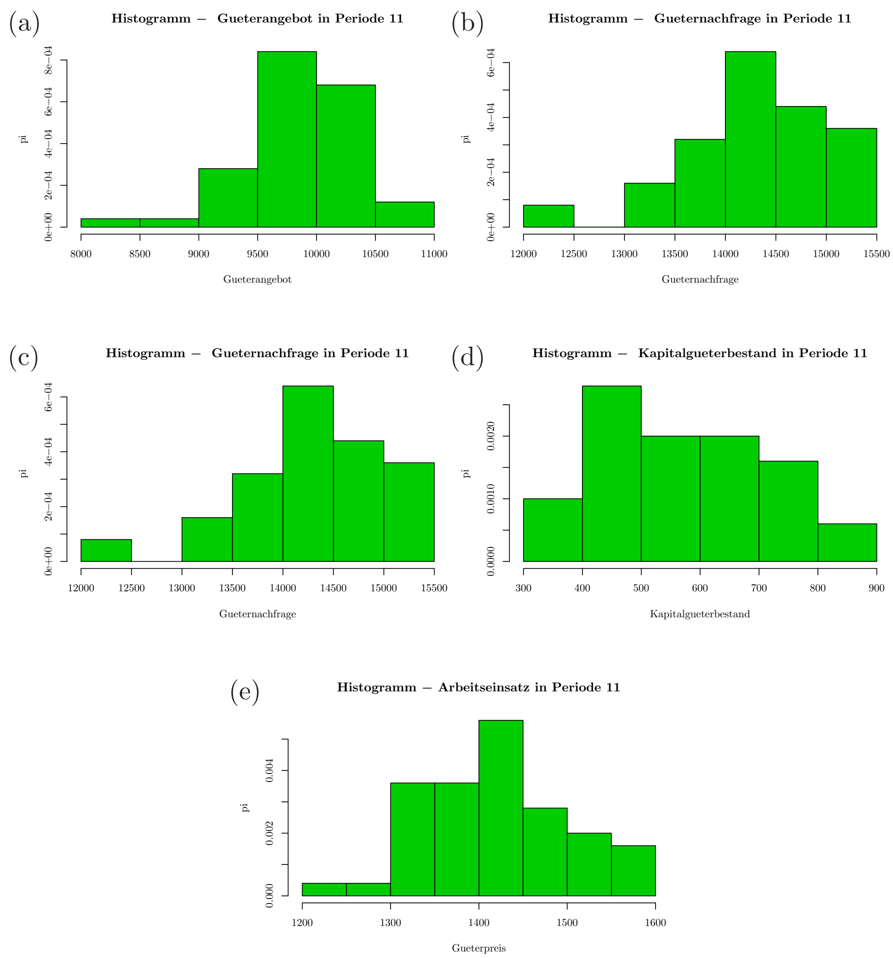


Abbildung 6.11: Histogramme der Größen für 50 Produzenten

Für den Bestand an Kapitalgütern bzw. den Arbeitseinsatz habe ich die Art der Verteilung getestet. Der Shapiro-Wilk-Test auf Normalverteilung ergibt p-Werte die um 0.15 bzw. 0.5 liegen. Auf einem Fünf-Prozent-Niveau könnte die Normalverteilungshypothese somit nicht abgelehnt werden. Werden jedoch die Logarithmen der Werte untersucht und für diese der Test auf Normalverteilung durchgeführt, steigen die p-Werte auf einen Wert um 0.5 bzw. 0.6. Somit scheint die Verteilung der Größen lognormalverteilt zu sein (vergleiche Abbildung (6.12)). Für eine Vielzahl produktionsseitiger ökonomischer Größen kann eine Lognormalverteilung unterstellt werden (vergleiche hierzu Abschnitt (6.10.3). Jedoch lässt sich in der vorliegenden, weitgehend unkalibrierten Modellversion nicht für alle Größen eine hinreichende Annäherung an empirisch zu erkennende Verteilungen erzeugen.

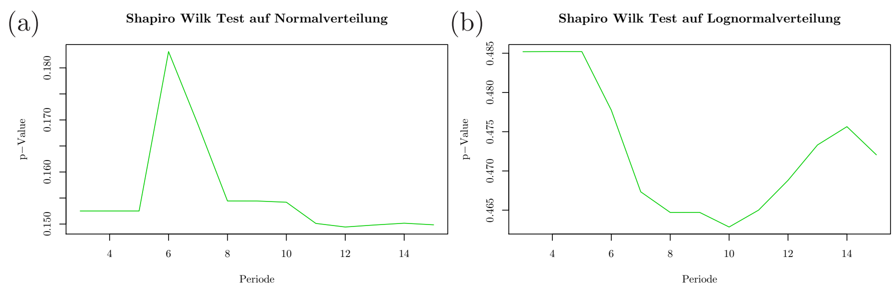


Abbildung 6.12: Shapiro Wilk Test auf Normalverteilung und Lognormalverteilung der Kapitalgüterbestände

Modelllauf Sechs läuft über $\hat{T} = 40$ Perioden. Wie zu erkennen ist, schwingt sich das Gesamtsystem ein, um dann auf einem konstanten Niveau zu verharren. Dieses Einschwingen wird durch die Art des Lernprozesses erzeugt, den die Produzenten hinsichtlich der Bestimmung ihrer Konkurrenzpreise anwenden.

6.10.3 Anmerkungen zur Empirie

Das von mir vorgestellte Modell wurde nicht kalibriert. Ergebnisse sind somit nicht mit realen Daten für einen Produktionssektor zu vergleichen. Parameter wurden von mir so gewählt, dass das Verhältnis von Inputparametern und Ergebniswerten weitgehend realistisch ist.

Allgemein ist zu sagen, dass die Beschaffung von Daten für die Modellierung mikroökonomischer Systeme schwierig ist. Ursachen hierfür finden sich in der Verfügbarkeit und der Datenqualität. So ist es für die Schätzung von Modellparametern notwendig, dass Daten für lange Zeitreihen und in die Verteilung repräsentierender Form vorliegen.

Daten werden durch das Statistische Bundesamt und die Länderämter angeboten. Diese liegen jedoch i.d.R. in aggregierter Form für Sektoren vor. Eine Nutzung für die Simulation mikroökonomischer Produktionsagenten ist somit ausgeschlossen. Bilanzdaten beschränken sich vorwiegend auf große Unternehmen. Die Verteilung der Größen ist dann verzerrt (vergleiche hierzu Stöss (2001)). Durch die statistischen Landesämter werden weiterhin Mikrodaten auf Basis von Unternehmensbefragungen angeboten.

Für meine Arbeit nutzte ich Daten des Verbandes der Vereine Creditreform Neuss. Dieser erhebt Bilanz- und Unternehmensdaten deutscher Produktions- und Dienstleistungsunternehmen. Zur Nutzung bereitgestellt werden diese Daten in den Datenbanken MAKUS und DAFNE. Mit diesen Datenbanken ist es möglich, nach Branchen bzw. Sektoren selektierte Unternehmensdaten zu nutzen. Nachteilig an diesen Daten ist der Umstand, dass die Befragung von Unternehmen nicht repräsentativ ist. Die Daten sind somit verzerrt. Weiterhin erfolgt keine Abgrenzung hinsichtlich der Zugehörigkeit zu mehreren Sektoren. Großunternehmen werden damit in mehreren aktiven Sektoren aufgeführt, ohne dass eine Abgrenzung der jeweiligen für einen Sektor relevanten Werte erfolgt. Hieraus ergibt sich das Problem, dass Daten des Statistischen Bundesamtes, der Finanzbehörden und von Creditreform nicht kongruent sind. Durchschnittswerte, von Größen aus den Daten von Creditreform gebildet, entsprechen nicht den aggregierten Größen des Statistischen Bundesamtes.

Ein weiteres Problem für die Kalibrierung mikroökonomischer Modelle ist das weitgehende Fehlen von Produktionsmengenangaben. So werden durch Creditreform allein Umsatzwerte angegeben. Durch das Statistische Bundesamt liegen für aggregierte Sektoren zum Teil Angaben zu Produktionsmengen in Stück- oder Gewichtseinheiten vor. Es lässt sich aus diesen Daten jedoch nur schwer auf die Produktionsmenge einzelner Produzenten eines Sektors schließen.

Für die Kalibrierung des von mir vorgestellten Modells und eine mögliche Einbindung in ein Totalmodell ist es somit erforderlich, aus den zur Verfügung stehenden Daten Datensätze zu erzeugen, die eine Nutzung innerhalb des Modells zulassen. Hierzu ist es vermutlich erforderlich, die Modellformulierung an die Datenlage anzupassen.

Im Folgenden gebe ich für einige ökonomische Größen Verteilungen an. Hierzu wähle ich den Sektor des Fahrzeugbaus bzw. des Maschinenbaus in Deutschland für das Jahr 2004. Datengrundlage ist die DAFNE Datenbank von Creditreform. Der für meine Zwecke relativ schlechten Datenlage Rechnung tragend, habe ich die Daten um nach oben wirkende Ausreißer bereinigt.

Die Logarithmen der Größen zeigen Normalverteilungsgestalt. Der Shapiro-Wilk-Test für die Logarithmen ergab Ergebnisse von p-Werten zwischen 0.2 und 0.5. Es kann somit geschlussfolgert werden, dass die angegebenen ökonomischen Größen lognormalverteilt sind. Das bedeutet, dass anteilig mehr Unternehmen geringere Produktionsmengen, Umsätze und Kapitalbestände aufweisen.

Im Vergleich zu Abschnitt (6.10.2) zeigt sich, dass die durch Simulation gewonnen Modellergebnisse ähnlich verteilt sind wie die empirisch gewonnene ökonomischen Größen. Beide zeigen lognormalverteilte Größen. Dies ist ein Hinweis darauf, dass das Modell, wird es kalibriert, signifikante Aussagen treffen kann.

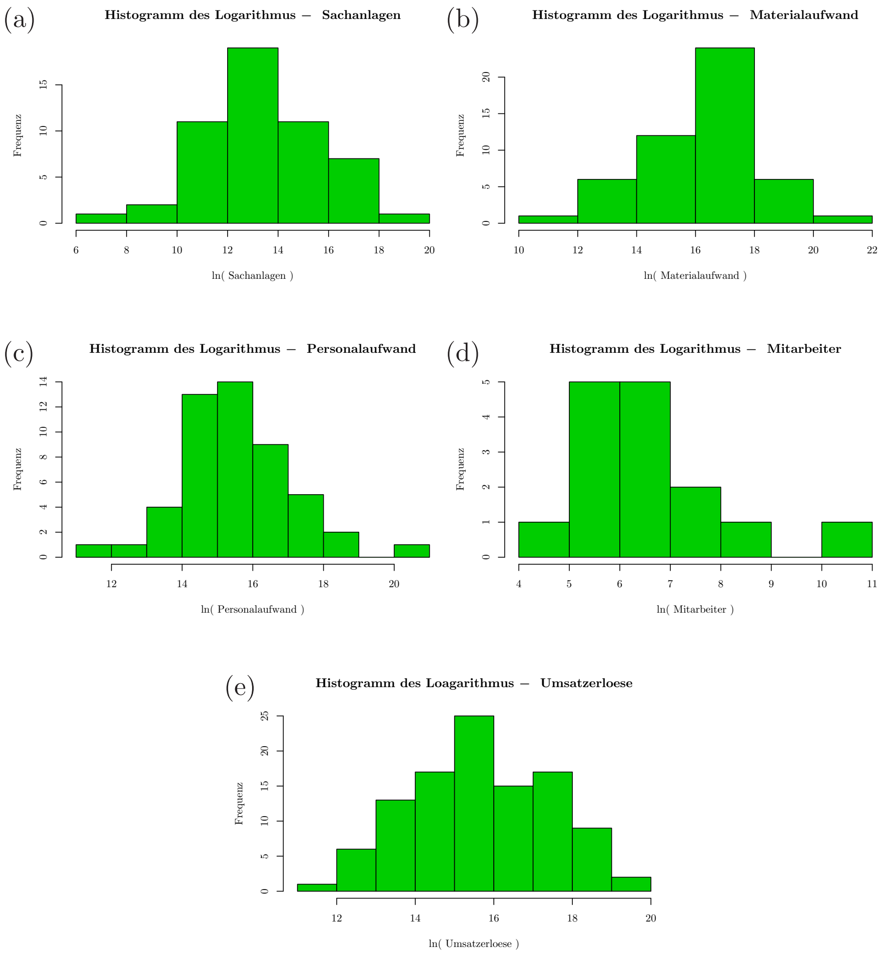


Abbildung 6.13: Histogramm des Logarithmus ökonomischer Größen des Fahrzeugbaus bzw. Maschinenbaus in Deutschland 2004

Kapitel 7

Zusammenfassung

In den Kapiteln Zwei bis Fünf habe ich theoretische Konzepte der ökonomischen Theorie vorgestellt. Im ersten Abschnitt des folgenden Kapitels will ich nun das von mir erstellte Modell zu diesen Konzepten in Beziehung setzen. In einem zweiten Abschnitt dieses Kapitels werde ich zeigen, wie mein Modell in einem Totalmodell genutzt werden kann und welcher Erweiterungen es dafür bedarf. Abschnitt Drei nutze ich, um das von mir vorgestellte Modell kritisch zu betrachten und Schwachstellen herauszustellen. Ich verbinde dies mit dem Aufzeigen von möglichen Modellveränderungen und -erweiterungen. Im abschließenden vierten Abschnitt stelle ich heraus, welchen wissenschaftlichen Neuwert die von mir vorgelegte Arbeit aus meiner Sicht erbringt.

7.1 Einordnung des Modells

Produktionstheorie Die von mir modellierten Agenten sind intertemporal optimierende Produzenten. Sie nehmen durch Produktion eine Transformation von Inputfaktoren in ein Outputgut vor. Agenten sind nichtaggregierte Einheiten und stellen einzelne Unternehmen dar. Die funktionale und inhaltliche Gestalt dieser Agenten rechtfertigt es, das Modell als mikroökonomisches zu bezeichnen und es in die Produktionstheorie einzuordnen. Eine explizite Produktionsfunktion mit in der Produktion genutzten Faktoren als Argument ist nicht formuliert. Stattdessen habe ich eine Kapazitätsfunktion formuliert, die das Maximum der möglichen Produktion angibt. Der Verbrauch an weiteren Faktoren wie Arbeit und Vorprodukt resultiert dann aus der gewünschten Produktionsmenge.

Aggregation In dem von mir vorgestellten Modell werden Akteure nicht aggregiert und es wird nicht das Konzept eines repräsentativen Agenten verwendet. Dem liegt die Überzeugung zu Grunde, dass Heterogenität bezüglich produktionsseitiger Parameter zu abweichendem Risikoverhalten führt, welches Auswirkungen auf die Aggregatebene hat, die durch ein Aggregat von Agenten nicht darstellbar wäre. Wie ich gezeigt habe, ist es nur bedingt und unter restriktiven Annahmen möglich, eine Aggregation von Agenten vorzunehmen, wenn unter probabilistischen Nebenbedingungen optimiert wird (vergleiche hierzu Abschnitt (4.5) und (5.2.5)). Eine Aggregation habe ich hinsichtlich der eingesetzten Produktionsfaktoren vorgenommen, wobei mir die dabei entstehenden Probleme bewusst sind (vergleiche hierzu Abschnitt (5.2.2)). Dies hat allein pragmatische Gründe. So werden Kapitalgüter als Aggregat aller im jeweiligen Produktionsprozess eingesetzter Anlagegüter behandelt. Für den Produktionsfaktor Arbeit unterstelle ich ebenfalls Homogenität. Unterschiedliche Arbeitsproduktivitäten oder Ausbildungsniveaus können somit nicht abgebildet werden.

Agentenbasierte Modellierung Die von mir modellierten Produzenten sind heterogen. Je nach Anforderung und Fragestellung ist es möglich, Heterogenität bezüglich produktionsbezogener Parameter und Kostenparameter in Simulationen herzustellen. Produzenten sind in der Lage, die Entscheidungen ihrer Konkurrenten zu beobachten. Aus diesen Beobachtungen werden Erwartungen bezüglich zukünftiger möglicher Entscheidungen dieser Konkurrenten getroffen. Dieses Wissen wird für die eigene Optimierung verwendet. Agenten in meinem Modell sind somit lernfähig. In der vorliegenden, auf den Produktionssektor beschränkten Version meines Modells sind strukturelle Veränderungen nicht zu erwarten. Erst durch das Erweitern um Vorprodukt-, Kapitalgüter- und Arbeitsmärkte und eine explizite Formulierung individuell handelnder Haushalte würde dies möglich. Einzige zu erwartende Veränderung in der Struktur des Modells kann durch in Konkurs geratende Produzenten erfolgen.

Mit den hier angegebenen Eigenschaften meines Modells rechtfertigt sich m.E. eine Einordnung in den Bereich der agentenbasierten computergestützten Ökonomie (ACE) (vergleiche hierzu Abschnitt (5.4)).

Risiko im Entscheidungsprozess Mit dem von mir modellierten und hier vorgestellten Modell wird es möglich, Risiko bezüglich des Konkurrenzverhaltens von Unternehmen in der Entscheidungsfindung von Produzenten darzustellen. Hierzu wählte ich eine Formulierung über probabilistische Nebenbedingungen als Formulierung eines Cash Flow at Risk-Ansatzes. Dies erschien mir naheliegend, da at Risk-Ansätze in der betriebswirtschaftlichen Praxis umfangreich genutztes Planungsinstrument sind. Mit der Formulierung als probabilistische Nebenbedingung habe ich das Ziel verfolgt, die Formulierung diskreter Kennzahlen, hier des Cash Flow at Risk, durch eine stetige, den Entscheidungsraum einschränkende Funktion darzustellen.

Rationalität und Erwartungsbildung Agenten meines Modells sind rational in ihrem Handeln. Dabei nutze ich das Konzept gewinnmaximierender Firmen. Ihre Erwartungen bezüglich der Entscheidungen ihrer Konkurrenten sind jedoch nur schwach rational (vergleiche Tesfatsion (2006c)). Die Agenten des Modells kennen nicht die Parameter aller zu Grunde liegender Verteilungen. Erwartungen über diese Parameter bilden sie in einem Lernprozess. Eine zweite Stufe von Unsicherheit bezüglich des Lernens über Parameter wurde von mir nicht eingeführt. Erwartungen bezüglich individueller Produktionsparameter sind streng rational. Agenten kennen nicht nur die Art der Verteilung sondern auch die Parameter der Verteilungen. Dies hat allein vereinfachende Gründe.

Gleichgewicht Für die Marktbeziehungen setzte ich nicht voraus, dass ein Markträumungsgleichgewicht besteht. Dies erlaubt es, Marktzustände zu beschreiben, die nicht im Gleichgewicht im Sinne der allgemeinen Gleichgewichtstheorie sind. Für das von mir vorgestellte Partialmodell besteht

Relevanz dieser Annahme bezüglich des Vorproduktmarktes und des Konsumgütermarktes. Rationierungsgleichgewichte auf dem Vorproduktmarkt führen zu Rauschen im Modell. Der Konsumgütermarkt ist nur durch das Güterangebot modelliert. Die Nachfrage wird über eine aggregierte Nachfragefunktion modelliert. Ein Markträumungsgleichgewicht wird auch hier nicht vorausgesetzt. Die Produktionsmenge der einzelnen Produzenten kann von der realisierten Nachfrage abweichen. Grund hierfür sind Fehler, die in Bezug auf die realisierten Konkurrenzpreise entstehen. Überschussnachfrage zu exogen gegebenen Preisen besteht. Werden beide Märkte explizit modelliert, so ist dies jedoch nicht mehr zwingend. Die Annahme, dass keine Markträumungsgleichgewichte zwingend sind, wird für eine Integration meines Modells in ein Totalmodell wichtig.

Werden Kapitalmarkt und Arbeitsmarkt dargestellt, wird es möglich, diese Zustände von Überschussangeboten oder Überschussnachfragen zu erzeugen. Für wirtschaftspolitische Fragestellungen wie z.B. nach Arbeitslosigkeit ist dies von entscheidender Bedeutung.

Optimierung Die Formulierung eines Optimierungsproblems kann statisch oder dynamisch erfolgen, je nachdem, welcher Zeithorizont dem Entscheidungsprozess, der abgebildet wird, zu Grunde liegt. In dem von mir vorgestellten Modellansatz wählte ich eine dynamische Form. Das resultiert aus der Überzeugung, dass unternehmerisches Handeln nicht nur auf die Gegenwart konzentriert ist. Investition und Produktionsplanung erfolgen auf einen längeren Zeithorizont hin. Der gewählte Zeithorizont ist jedoch, anders als bei vielen Modellen der Wachstumstheorie, endlich. Dies begründet sich aus der simplen Einsicht, dass es, außer in der Mathematik, keine Unendlichkeit gibt.

Wie bereits beschrieben, sind lokale und globale Optima zu unterscheiden. Komplexe Strukturen eines Optimierungsproblems weisen in der Regel mehrere lokale Optima auf. Es stellt sich damit die Frage, ob real handelnde Entscheider in der Lage sind, das eine globale Optimum zu ermitteln oder ob suboptimale lokale Lösungen gefunden werden. Dies hängt u.a. von der Wahl des eingesetzten Lösungsalgorithmus der Optimierung ab. Wenn zu bezweifeln ist, dass real handelnde Entscheider in der Lage sind, globale Optima zu ermitteln, dann wäre es prinzipiell nicht notwendig, dass in der Modellierung solchen Entscheidens globale Lösungen gefunden werden. Dies entspricht jedoch nicht der gängigen Praxis. Problematisch wäre es auch, dass bei einer Vielzahl möglicher lokaler Lösungen die Lösungsauswahl vom Startpunkt der Optimierung und vom eingesetzten Optimierungsalgorithmus abhängt. Somit versuche ich, in meinen Modellen globale Lösungen zu finden, so weit dies die Algorithmen zulassen.

7.2 Ausblick - Einbettung des Modells in ein Totalmodell

Das dargestellte Modell beschreibt einen Produktionssektor. Damit ist es ein Partialmodell. Interaktionen mit der Umwelt der Produzenten sind nur rudimentär dargestellt, so dass eine Modelllösung möglich wird. Sollen quantitative Aussagen für eine Volkswirtschaft möglich werden, muss eine Einbettung meines Modells in ein Totalmodell erfolgen. In einem Totalmodell würden weitere Akteure zu beschreiben sein. Dies sind u.a

1. weitere Produktionssektoren,
2. Vorproduktsektoren,
3. Kapitalgütersektor,
4. Haushalte,
5. Finanzintermediäre und
6. ein Staat.

In der vorliegenden Modellversion sind alle Märkte, auf denen Interaktionen zwischen Produzenten und ihrer Umwelt erfolgen, so modelliert, dass die den Produzenten jeweils gegenüberliegende Marktseite vereinfacht dargestellt wird. Dies erfolgte, um in Abhängigkeit der Formulierung eines zu erstellenden Totalmodells variabel zu sein. Soll das vorliegende Partialmodell in ein Totalmodell implementiert werden, so sind weitere Punkte zu beachten. Im Folgenden will ich auf einige eingehen und beschreiben, wie sich eine mögliche Weiterentwicklung darstellen könnte.

Ein Kapitalmarkt ist in der vorliegenden Modellversion nicht modelliert. So ist die Finanzierungsseite der Produzenten ebenso ausgeblendet wie der Handel von Bonds. Produzenten finanzieren ihren Kapitalgüterkauf im Partialmodell durch erzielte Gewinne bzw. Cash Flows. Aktien und Kredite sind nicht modelliert. In einer Einbettung in ein Totalmodell würden hier Haushalte Anteilseigner an den Produzenten werden, so dass die Finanzierungsseite modellierbar würde. Reale Haushalte treffen Konsum- und Sparentscheidungen. Sie würden in einem Totalmodell somit die Finanzierung der Produzenten durch Aktienkauf und Kredite übernehmen. Es würde notwendig, dass neben dem Lohneinkommen Kapitaleinkommen durch die Produzenten ausgezahlt werden. Dies ist in der vorliegenden Version des Modells ausgeklammert.

Da kein Kapitalmarkt modelliert ist, werden Zinsen als exogen gegeben und konstant angenommen. Konkurrierende Kreditnachfrage in einem Totalmodell könnte die Zinshöhe bedingt variabel werden lassen.

Haushalte werden durch mich nicht modelliert. Ich unterstelle ein exogenes Einkommen Y. Weiterhin unterstelle ich, dass ein Anteil in Höhe von Y^q für die Nachfrage nach dem Güterbündel q aufgewendet wird. Die Lohnzahlung des Produktionssektors und die erfolgten Ausschüttungen haben keine Auswirkung auf das Haushaltseinkommen Y und damit ebenfalls nicht auf Y^q. Dies lässt sich mit einem unwirksam geringen Anteil der Lohnzahlungen des modellierten Produktionssektors am gesamten Haushaltseinkommen erklären. In einem Totalmodell würde das Haushaltseinkommen von den Lohn- und Kapitaleinkommen aller Produktionssektoren abhängig werden. Somit wird das Einkommen der Haushalte eine modellendogene Größe. In der Bestimmung von Erwartungswert und Varianz der Güternachfrage nach einem Gut des Güterbündel q müsste die Variabilität von Y^q Berücksichtigung finden. Für die Modellierung von Haushalten bietet es sich an, nach Ausbildung und Vermögen heterogenisierte Agenten zu beschreiben. Somit würde es möglich, differenzierte Arten von Arbeit als Produktionsfaktor darzustellen und die Annahme eines homogenen Faktors Arbeit aufzuheben.

Lohn Die Höhe des Lohns ist exogen gegeben. In einem Totalmodell konkurrieren Produktionen um die angebotene Arbeit der Haushalte. Der Lohn würde somit zu einer endogenen Größe werden. Vorstellbar ist ein Verhandlungsprozess, bei dem die Lohnhöhe festgelegt würde. Dies gibt die Möglichkeit, den Arbeitsmarkt in einem Rationierungsgleichgewicht darzustellen und Arbeitslosigkeit zuzulassen.

Steuerzahlungen In der vorliegenden Modellversion zahlen Unternehmen Gewinnsteuern an einen fiktiven Staat. Dieser ist nicht modelliert. Somit werden auch Staatsausgaben nicht modelliert.

Endogenisierung der maximal akzeptierten Mindest Cash Flow Unterschreitung Eine Endogenisierung von $\tilde{\gamma}$ ist in dem Moment möglich, wenn in einem Totalmodell die Finanzierungsseite der Produzenten modelliert wird. Anteilseigner und Kreditgeber, also Haushalte und Finanzintermediäre, entscheiden über Aktienkauf und Kreditvergabe unter individuellen Risikogesichtspunkten. Werden Kredit- und Aktienmarkt so modelliert, dass eine Überschussnachfrage auf dem Kreditmarkt und ein Überschussangebot auf dem Aktienmarkt herrscht, so konkurrieren Produzenten um Kapital. Es herrscht dann eine Überschussnachfrage nach Kapital. In Abhängigkeit dieser Überschussnachfrage bestimmen Produzenten ihre maximal akzeptierte Cash Flow Unterschreitung. Desto geringer diese ist, desto besser sind ihre Chancen auf dem Kapitalmarkt.

7.3 Kritische Anmerkungen und Modellerweiterungen

Kalibrierung Vorliegende Modellversion ist in der Lage, qualitative Aussagen bezüglich des Verhaltens von Agenten eines Produktionssektors zu treffen. Das Modell ist nicht auf reale Daten kalibriert, so dass quantitative Aussagen nicht möglich werden.

Lager wurden durch mich nicht modelliert. Überproduktionen werden somit in der Periode der Herstellung vernichtet. Diese Herangehensweise macht nur für verderbbare Produkte Sinn. In einer Erweiterung des Modells bietet es sich somit an, Lager einzuführen, so dass Überproduktionen in folgenden Perioden angeboten werden.

Bonds sind homogen und identisch verzinst. Produzenten nutzen sie als Instrument der Ansparung. Reicht der Cash Flow einer Periode nicht aus, gewünschte Investitionen zu tätigen, kommt es zu Verkäufen von Bonds. Ich unterstellte jedoch, dass Produzenten dies nicht einplanen, sondern Investitionen in Kapitalgüter allein aus dem Perioden Cash Flow tätigen und dies in der probabilistischen Nebenbedingung berücksichtigen. In einer Erweiterung des Modells sollte diese Herangehensweise überdacht werden, da sie nicht in der Lage ist, in der betriebswirtschaftlichen Praxis erfolgende Investitionen abzubilden.

Kredite sind in vorliegender Version des Modells nicht berücksichtigt. Das ist eine wesentliche Einschränkung. Einfachste Methode, dies aufzuheben, ist es, den Bestand an Bonds negativ werden zu lassen.

Kapitalgüter sind homogen. Es wird nicht nach Alter, Produktivität oder anderen Kriterien differenziert. Für eine Nutzung des Modells in umweltökonomischen Modellierungen wäre es wichtig, diese Einschränkung aufzuheben, um in energieintensive und -arme Kapitalgüter unterscheiden zu können. Es würde sich dann anbieten, die vorgestellte Produktionspotentialfunktion in eine Gutenbergsche Produktionsfunktion zu überführen. Kapitalgüter werden in vorliegender Modellversion wie Kapital abgeschrieben. Einmalige Abschreibungen durch Vernichtung sind ausgeschlossen. Auch hier wäre es wünschenswert, würde eine vollständige Abschreibung auf einen Wert von Null möglich sein.

Die Erwartungsbildung wurde durch mich nicht einheitlich modelliert. So berücksichtigt ein Produzent Risiko bezüglich des Absatzes und der Kapitalgüterpreise in seiner probabilistischen Nebenbedingung, jedoch nicht Risiko bezüglich zukünftiger Vorproduktpreise. Hier wäre es notwendig, eine Vereinheitlichung vorzunehmen.

Produktionspotential und Produktionsmenge stimmen in vorliegender Modellversion langfristig überein. Empirisch ist für Deutschland zu erkennen, dass die Auslastung des aggregierten Produktionspotentials bei ca. 80% liegt. Dies kann mein Modell nicht abbilden.

Preisfluktuation wird durch Rationierung auf dem Vorproduktmarkt und Lernprozesse bezüglich Konkurrenzpreise ausgelöst. Die in den Modellläufen eins bis sechs vorgestellten Ergebnisse zeigen Fluktuationen, die empirisch nicht zu bestätigen sind. Die gewählten Vorproduktpreisvektoren lassen zu hohes Rauschen bezüglich der Kosten des Vorprodukteinsatzes zu. Dies wäre in einer Einbettung in ein Totalmodell zu ändern. Weiterhin besteht die Möglichkeit des Modellierens sogenannter *sticky-prices.* Empirisch ist zu beobachten, dass Mengenanpassungen in stärkerem Umfang erfolgen als Preisanpassungen. Modelltechnisch sollten Kosten für Preisveränderungen eingeführt werden.

Für die Nachfragefunktion nach Konsumgütern wählte ich eine einfache Formulierung für einen Markt monopolistischer Konkurrenz. In einer Erweiterung des Modells sollte es hier möglich sein, komplexere Strukturen der Nachfrage in einem Rahmen monopolistischer Konkurrenz darzustellen. Die von mir verwendete Nachfragefunktion ist eine aggregierte Funktion. In einem Multiagentenansatz wären Haushalte jedoch Repräsentanten einzelner ökonomischer Agenten. Es müsste somit für die Nachfrage einzelner Haushalte eine funktionale Form gefunden werden, die es zulässt, auf eine aggregierte Nachfragefunktion beschriebener Form zu schließen, es jedoch nicht erzwingt, dass jeder Haushalt jedes Gut nachfragt.

Die programmtechnische Umsetzung meines Modells erfolgt, wie beschrieben, in Python, GAMS und R. Dabei habe ich eine weitgehend funktionale Form der Programmierung gewählt. Es zeigte sich jedoch mit fortlaufender Modellierung, dass ein objektorientierter Ansatz besser gewesen wäre. Für eine Kopplung meines Modells mit weiteren Modulen wäre es aus heutiger Sicht notwendig, die Programmstruktur zu einer objektorientierten Programmierung hin zu verändern. Weiterhin würde eine größere Übersichtlichkeit der Programme geschaffen werden, würden einzelne Module in einzelnen Skripts gespeichert und durch den Hauptprozess aufgerufen werden. Eine Programmierung in einer schnelleren Sprache wie z.B. C++ wäre möglich, würde die Modelllaufzeit jedoch m.E. nicht wesentlich erhöhen, da die Optimierung der restringierende Prozess des Modells ist. Vorteilhaft wäre es, könnte auf den zeitaufwendigen Datentransfer mittels Dateien verzichtet werden. Hierzu wäre eine Datenübergabe über Programmschnittstellen möglich, soweit diese bestehen. Durch eine Parallelisierung der Prozesse wäre eine weitere Beschleunigung denkbar.

Cash Flow-Risiko bestimmt sich für die beschriebenen Produzenten aus nur zwei Prozessen. In der betrieblichen Praxis sind es jedoch eine Vielzahl solcher Prozesse, die die Höhe des Cash Flow bestimmen. In einer Weiterentwicklung des Modells sollten deshalb weitere relevante Risiken Berücksichtigung finden.

Wachstum kann mein Modell nicht abbilden. Hierfür habe ich keine modellendogenen Prozesse beschrieben. Solche Prozesse könnten aus der Produktionsmenge und dem Kapital- bzw. Arbeitseinsatz resultierende Lernprozesse sein. Weitere wachstumauslösende Prozesse durch Innovation würden in einem Totalmodell zu formulieren sein. Hierfür existieren in der Wachstumstheorie formulierte Ansätze.

7.4 Schlussbemerkung

Mit dem von mir vorgelegten Modell ist ein Untersuchungstool entstanden, dass es ermöglicht, in einem agentenbasierten, mikroökonomischen Ansatz Produktion unter Risiko darzustellen. Der von mir gewählte Ansatz Cash Flow at Risk abbildender probabilistischer Nebenbedingungen gehört nicht zu Standardanwendungen ökonomischer Modellierung und stellt somit im vorgestellten Rahmen eine Neuerung dar. Ich entwickelte diesen Ansatz zur Beschreibung von Handeln in einer Situation unter Unsicherheit, weil ich der Überzeugung bin, dass Unsicherheit bezüglich zu geringer Cash Flows für reale Unternehmen entscheidungsrelevante Größe ist.

Anwendung in der Klimafolgenforschung

Wie bereits in der Einleitung zu dieser Arbeit angemerkt, sieht sich die globale Gesellschaft Gefahren gegenüber, die nur durch konsequente Reduktion in Ressourcenverbrauch und -gebrauch begrenzbar bleiben. Seit Beginn der Industrialisierung hat sich durch den massiven Ausstoß von CO_2 als Produkt fossiler Brennstoffe der Anteil dieses Gases um ein Drittel auf 383 ppm in der Atmosphäre erhöht. Im gleichen Zeitraum ist ein Anstieg der globalen Mitteltemperatur von 0.7 Grad Celsius zu verzeichnen. Es ist zu unterstellen, dass der Ausstoß klimaschädlicher Gase in den nächsten Jahrzehnten zunehmen wird, sollte es nicht zu entscheidenden Veränderungen in Produktions- und Konsumverhalten kommen. Länder wie Indien, China und Brasilien, die als Schwellenländer anzusehen sind, werden in den kommenden Jahren durch weiteres Wachstum ihren Anteil am Ausstoß von CO_2 erhöhen.

Notwendige Veränderungen im Produktions- und Konsumverhalten können durch verschiedene Mechanismen erfolgen.

Möglich ist ein Verzicht von Konsum und eine Reduktion von Wachstum. Dies widerspricht jedoch der Logik und Zielstellung des marktwirtschaftlichen Wirtschaftssystems.

Ein weiterer Mechanismus setzt Kapital- und Konsumgüter voraus, deren CO_2 -Ausstoß unterhalb dem heutiger Güter liegt.

Notwendige Veränderungen in der Struktur des Konsums sind mit einem Verlust an Informationen für die Produzenten verbunden. Zu neuen, eben CO_2 armen Konsumgütern, bestehen keine Informationen hinsichtlich möglicher Absatzmengen. Durch höhere, notwendige Preise in der Einführungsphase solcher Produkte wird die Unsicherheit hinsichtlich des möglichen Absatzes weiterhin erhöht.

Für Investitionen in CO_2-ärmere Kapitalgüter gilt Ähnliches. Hier sind mögliche Kapitalgüterpreise unbekannt. Investitionen erfolgen somit in größerer Unsicherheit.

Aus beiden Faktoren resultiert Unsicherheit hinsichtlich möglicher Cash Flow und Gewinne. Eben jene Unsicherheit ist mein Modell in der Lage abzubilden und die daraus resultierenden mikro- und makroökonomischen Konsequenzen zu beschreiben.

Der Einsatz meines Modells in der Nachhaltigkeits- bzw. Klimafolgenforschung ermöglicht es somit, Aussagen hinsichtlich gesamtgesellschaftlicher ökonomischer Auswirkungen, resultierend aus umweltpolitischen Notwendigkeiten, zu treffen. Hierzu bedarf es einer Anpassung der Modellstruktur an die jeweils zu behandelnde Fragestellung. Die Grundstruktur des Modells und die Verwendung probabilistischer, auf die Unsicherheit des Cash Flow abstellender Nebenbedingungen ist nach meiner Auffassung jedoch ein geeignetes Analyseinstrument, um in einem fachübergreifenden wissenschaftlichen Ansatz Anwendung zu finden.

Anhang A

Simulationsergebnisse

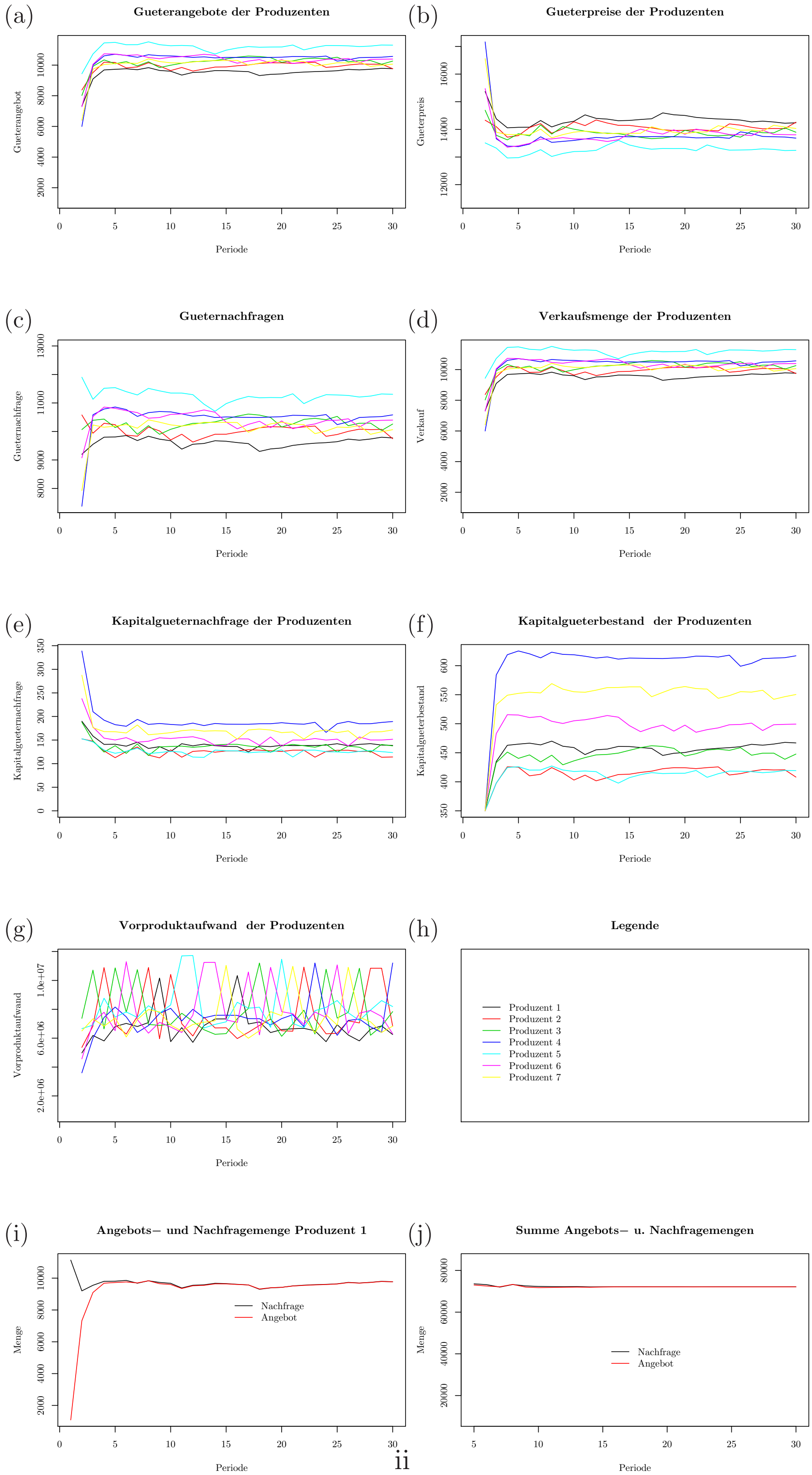


Abbildung A.1: Modelllauf Nummer 2 mit $\tilde{\gamma} = 0.5$

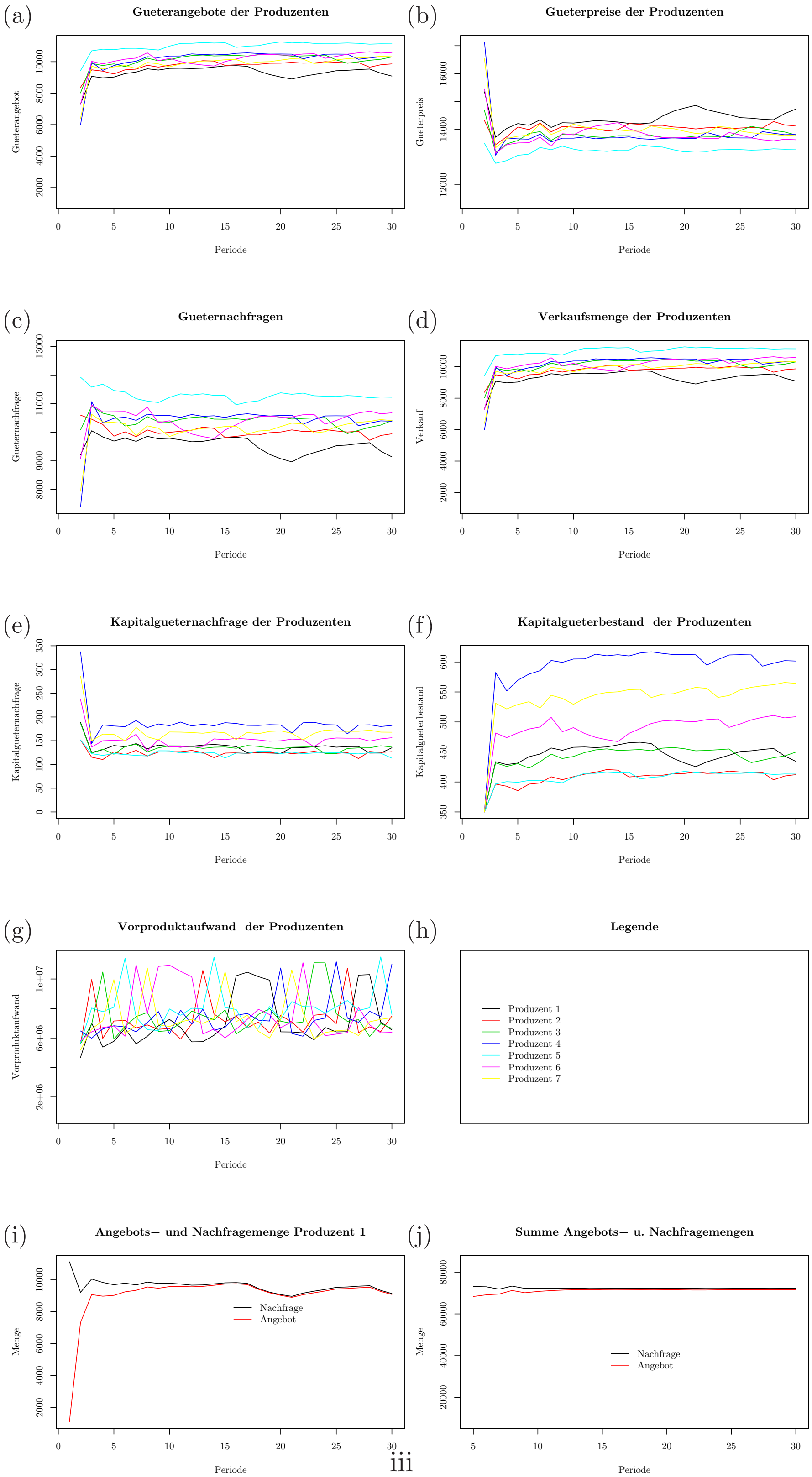


Abbildung A.2: Modelllauf Nummer 3 mit $\tilde{\gamma} = 0.1$

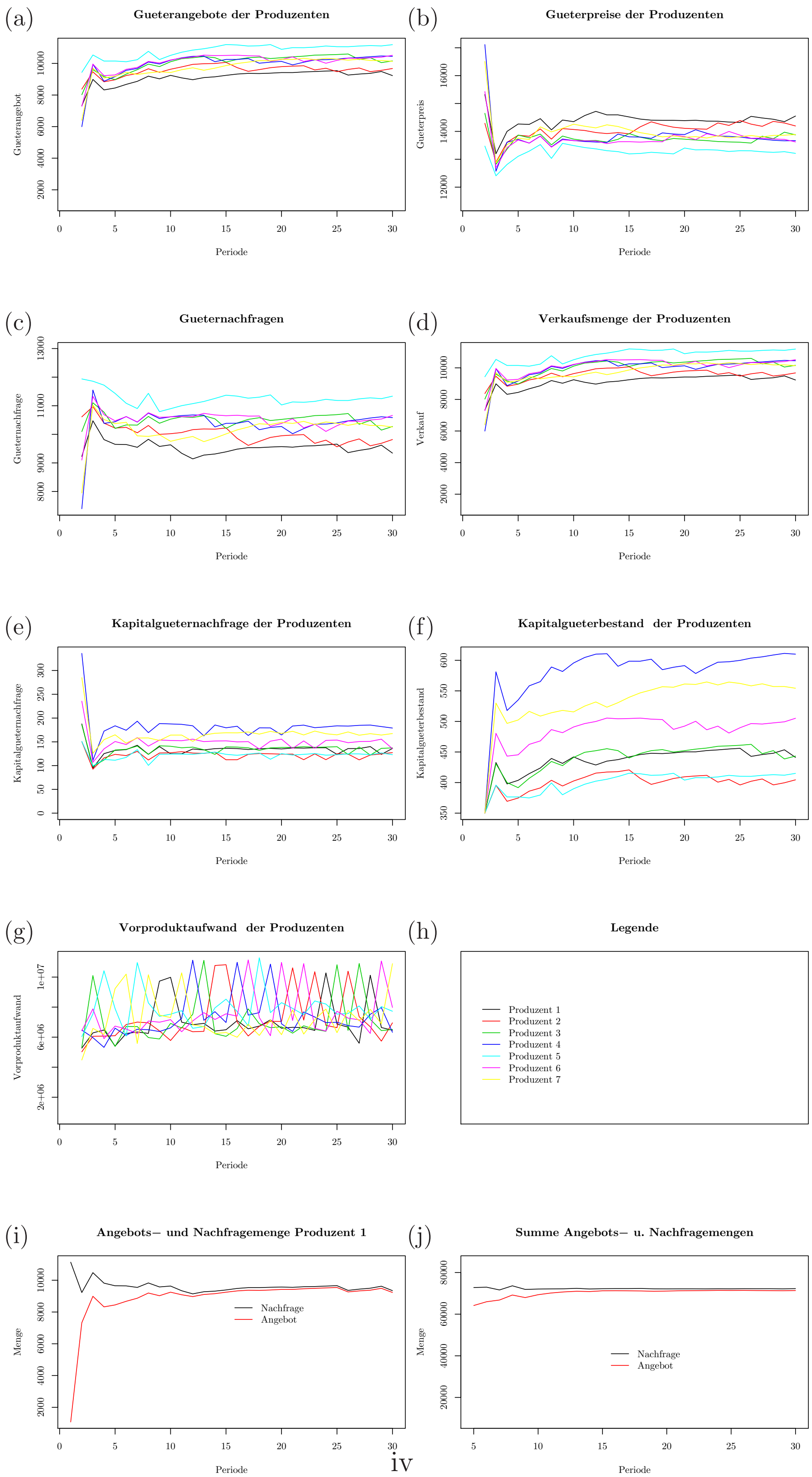
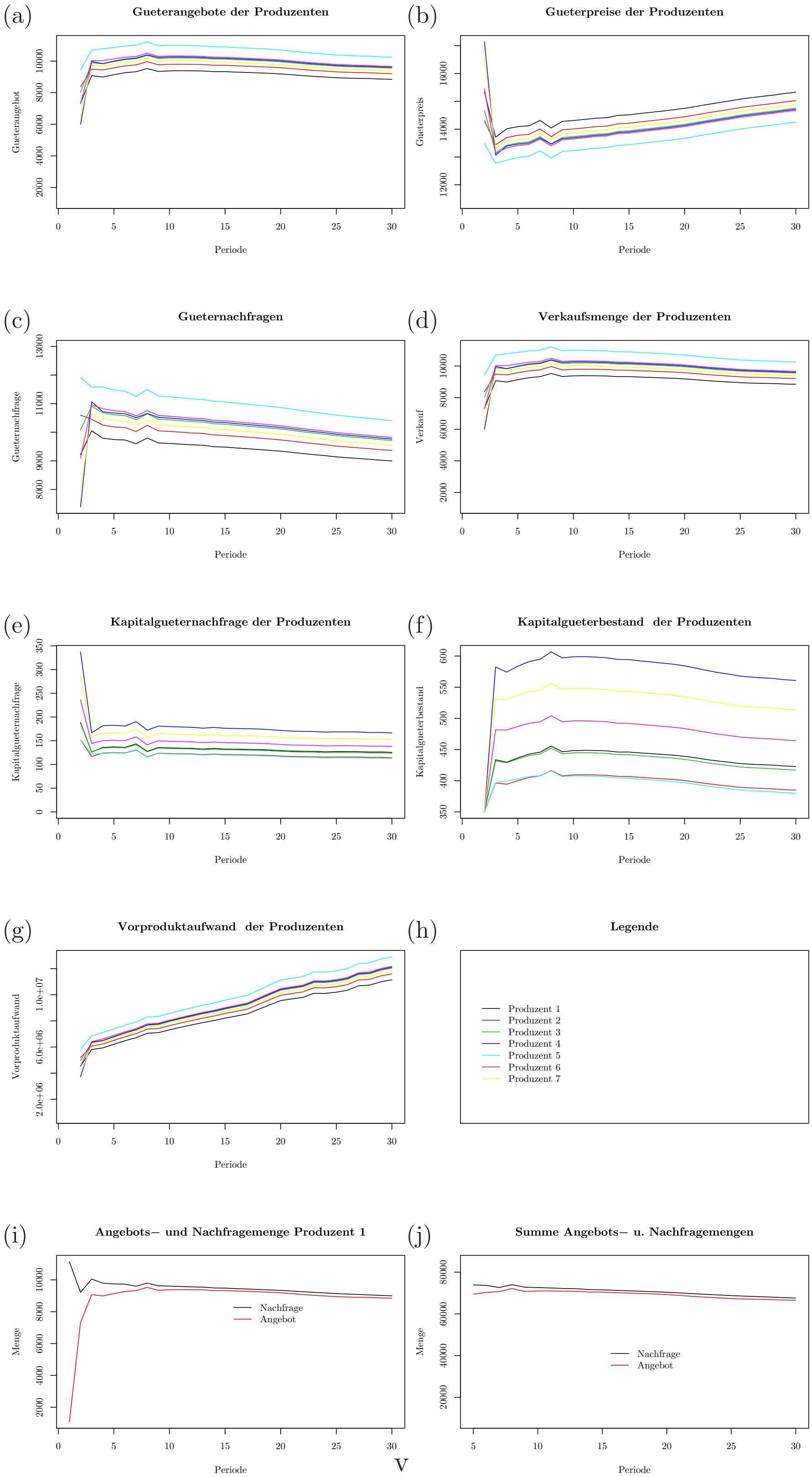


Abbildung A.3: Modelllauf Nummer 4 mit $\tilde{\gamma} = 0.01$



V

Abbildung A.4: Modelllauf Nummer 5

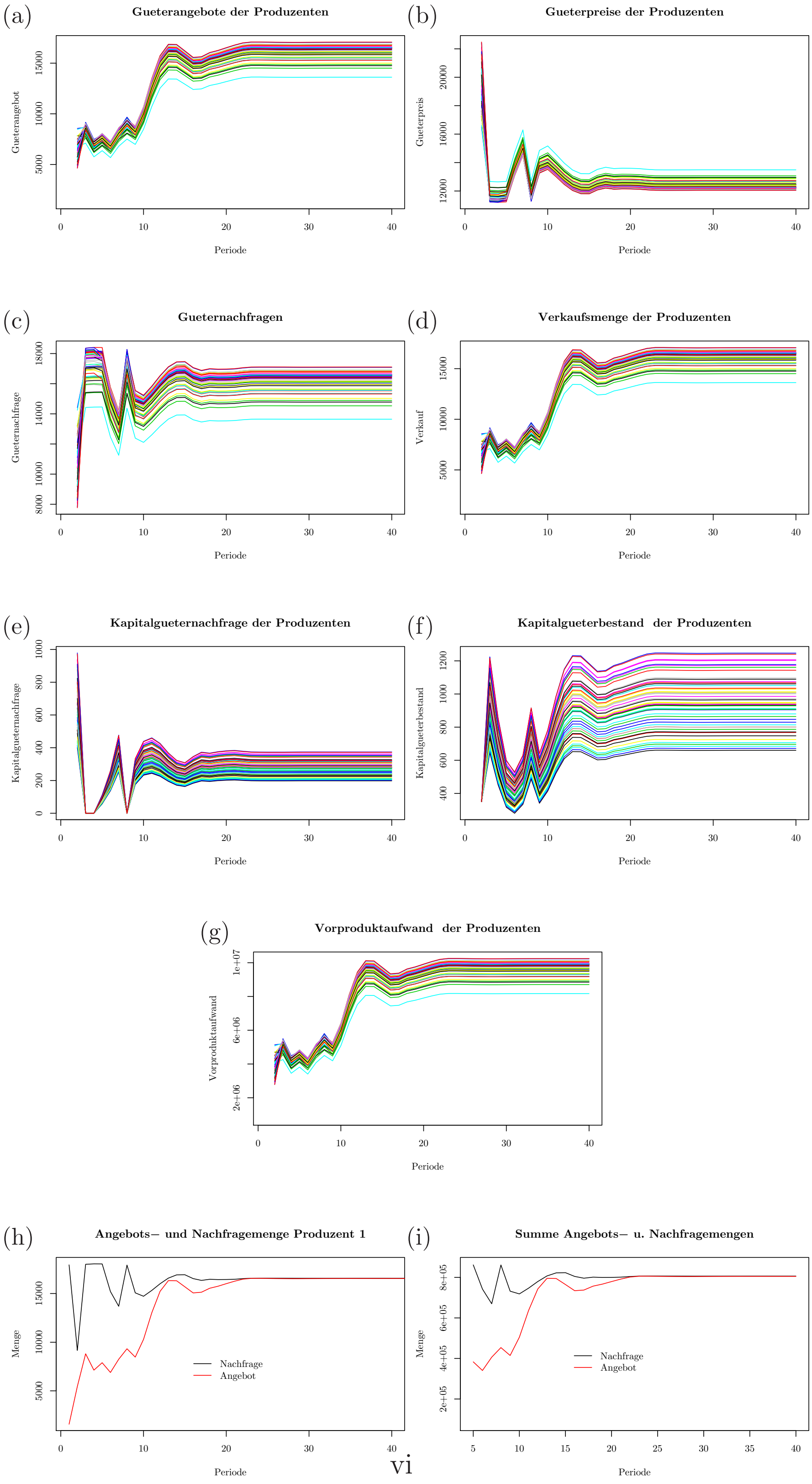


Abbildung A.5: Modelllauf Nummer 6 - 50 Produzenten

Anhang B

Skripte und Module des Modells

B.1 Modul: daten_mod.py

```
def daten():
    unternehmen = 7      # Anzahl der Unternehmen
    perioden =20                 # Anzahl der Perioden \hat{T}
    opt_perioden_p1 = 5 # Anzahl Optimierungsperioden + 1
    eingabe_lists={}
    eingabe_sets={}
    eingabe_skalar={}

    # "trend_t"                    - Trend ueber die 'reale' Zeit  hat{T}
    # "trend_optT"        - Trend innerhalb einer Optimierung ueber die
    #                       Zeit des Planungshorizontes T
    eingabe_lists["p_a"] = \
        {"v":5000        ,"trend_t":"1.0","trend_optT":"10."}
    eingabe_lists["w"] =\
        {"v": 50000,"trend_t":"1.0","trend_optT":"10."}
    eingabe_lists["iota_b"] =\
        {"v":.03         ,"trend_t":"1.00","trend_optT":"10.0"}
    eingabe_lists["tau_r"] =\
        {"v":.25,"trend_t":"1.0","trend_optT":"10."}
    eingabe_lists["tau_q"] = \
        {"v":.19,"trend_t":"1.0","trend_optT":"10."}
    eingabe_lists["Y"] =\
        {"v": 10000000000,"trend_t":"1.0","trend_optT":"10."}
    eingabe_lists["Var_p_a"] =\
        {"v":100,"trend_t":"1.0","trend_optT":"10."}

    # Werte, die ueber die Unternehmen einer Verteilung unterliegen
    # Bei lambda_ ist 'trend_t', 'rand' moeglich
    # ist dieser gesetzt, so aendert sich 'lambda' einer Normalverteilung
    # folgens
    eingabe_lists["lambda"] =\
    {"E":.1,"sigma":.005,"trend_t":"1.0","trend_optT":"10.","vert":"n"}
    eingabe_lists["omegaFix"] =\
    {"E":5000,"sigma":200,"trend_t":"1.0","trend_optT":"10.","vert":"n"}
    eingabe_lists["rho"] = \
    {"E":13,"sigma":7,"trend_t":"1.0","trend_optT":"10.","vert":"n"}

    # Von Interesse sind prinzipiell nur die Verteilungen von lambda,
    # omegaFix  rho ,"kappa" und"Xi"
    cor_zw = ["lambda","omegaFix","rho"]
        # gibt an, zwischen welchen Groessen Korrelation besteht
    correlation= [[1, 0.1 , 0.1],[ 0.1 ,1, .1],[0.1, 0.1 , 1]]
        # Korrelationsmatrix

    if len(correlation) <> len(cor_zw) :
        print "Fehler in Korrelationsmatrix!!"
        exit
    eingabe_lists["Vpj"] ={"v":100,"trend_optT":"10."}
    eingabe_lists["Epj"] = {"v":1000,"trend_optT":"10."}
    eingabe_skalar["nu"] = .05
    eingabe_skalar["psi"] = .3
    eingabe_skalar["Konk"] = unternehmen-1
    eingabe_skalar["T_gross"] = opt_perioden_p1 -1
    eingabe_skalar["eta"] = .5
    eingabe_skalar["gamma_tilde"] = .5
    eingabe_skalar["a_check_in"] ={"v":500}
    eingabe_skalar["b_check_in"] ={"v":1000}
    eingabe_skalar["k_check_in"] ={"v":500000}
    #,"sigma":200,"vert":"o"
    eingabe_skalar["kappa"] =\
        {"E":.4,"sigma":.05,"trend_t":"1.0","vert":"o"}
    eingabe_skalar["Xi"] ={"E":.1,"sigma":.05,"vert":"o"}
        eingabe_sets= \
        {"t":5,"tsub(t)":4,"k":unternehmen ,"ksub(k)":unternehmen-1}

    # Mengen - Preisliste der Vorprodukte       T_ Anzahl der Perioden
    eingabe_vorprodukte={}
    eing = {"Menge":[1000,1000,1000,1000,1000,1000,1000,1000,\
                1000,1000,1000,1000,1000],\
                "Preis"    :[1500,2000,2500,2700,3050,3700,4750,5000,\
                5500,6000,6200,6900,8000]}

    for i in range(perioden):
        eingabe_vorprodukte["T_"+str(i+1)]= eing
    return eingabe_sets,eingabe_skalar,eingabe_lists,\
        eingabe_vorprodukte,unternehmen,\
        perioden,opt_perioden_p1,correlation,cor_zw
```

B.2 Modul: bezeichner.py

```
def bezeichner():

    # Parameter koennen, je nach Dimension in Sets, Skaparel, Listen
    # oder tables abgelegt werden

    #..X.._bezeichnung gibt die Namen der Parameter des Typs X an
    #..X.._text          enthaelt den Text, der in GAMS als Info
    #           verwendet wird
    #..X.._indizes bei Listen und Tabels gibt dies die Sets an, ueber die
    #           die Parameter laufen

    # Deklaration der SETS
    sets_bezeichnung = ['t',"tsub(t)","k","ksub(k)"]
    sets_text =\
        ["Zeitindex","Planungs Horizont","Konkurrenten","subindex"]

    # Deklaration der Tabels - keine Eintraege !
    tables_bezeichnung = []
    tables_indizes = []
    tables_text = []


    # Deklaration der Listen
    lists_bezeichnung =  ["p_a","w","iota_b","tau_r","tau_q","Y",\
        "lambda","omegaFix","rho","Epj","Vpj","Var_p_a"]
    lists_indizes = ["(t)","(t)","(t)","(t)","(t)","(t)","(t)","(t)","(t)",\
        "(k)","(k)","(t)"]
    lists_text = ["Kapitalgueterpreis","Lohnatz",\
        "Zins der Bonds","Gewinn-Steuer","MWST","Einkommen ",\
        "Parameter Arbeits-Nachfrage-FKT",\
        "fixer Kostenparameter",    "Produktionspotential",\
        "Erwartungs-Nachfrage","Varianz Nachfrage-FKT",\
        "Varianz d. Kapitalgueterpreise"]

    parameters_bezeichnung = \
        ["a_check_in","b_check_in","k_check_in","eta","gamma_tilde",\
        "kappa","nu","psi","Konk","xi","T_gross"]

    parameters_text = \
    ["Anfangswert Kapitalgueter","Anfangswert Bondbestand"      ,\
    "Anfangswert Kapitalgueterwert", "Subst_El.- Par. d. Nachfrage-FKT",\
    "max. akzeptierte Cash Flow Unterschreitung",\
    "Anteil Vorprodukte am Konsumgut","Disskontierungssatz",\
    "Abschreibungssatz",\
    "Anzahl der Konkurrenten","Ausschuettung","Planungshorizopnt"]

    # ausgabe_bezeichner: Liste mit den Variablen, die als PLOT ausgegeben werden

    ausgabe_bezeichner = \
    ["opt_v","ms","q_s","p_q","a_d","b_d","a_check","k_check","b_check","j",\
    "u_hat","v","l_d","e_check","ep_check","o","gamma","q_hat_d","e"]

    # kontroll_v : Kontrollvariablen des Modells, fuer die Startwerte simmuliert
    #           werden, in Listenform sind die Grenzen angegeben, aus dennen
    #           zufaellig der Startwert gezogen werden kann

    kontroll_v=[["q_s.l",[1,1000]],["p_q.l",[1,2000]],["a_d.l",[1,100]]]
    return sets_bezeichnung,sets_text,tables_bezeichnung,\
        tables_indizes,tables_text, lists_bezeichnung,\
        lists_indizes,lists_text,parameters_bezeichnung,\
        parameters_text,ausgabe_bezeichner,kontroll_v
```

B.3 Skript: datenerstellung.py

```
# Modul zur Datenerstellung

import random
import math
import os
import time
from random import normalvariate
import shutil
from daten_mod import *

def Verteilung(Unt,E,st,art):
    # Erstellt eine Liste mit normalverteilten Parametern
    #           oder gibt Liste identischer Werte
    # E - Erwartungswert
    # st - Standartabweicung
    # Unt - Anzahl der Unternehmen,
    #           ueber die Werte simuliert werden sollen
    # art -  'n' normalverteilt , 'o' identische Liste
    value = []
    if art == "n":
    # Normalverteilung
        for i in range(Unt):
            value.append(math.sqrt((normalvariate(E,st))**2))
    elif art == "o":
        for i in range(Unt):
            value.append(E)
    return value


def verteilung_ausR(eingabe_lists,cor_zw,correlation,unternehmen):
    # Definition um normalverteilte, korrelierte Parameter zu generieren

    # Ausschreiben der Bezeichnungen der Parameter
    obj = open("TMP.zf_d_v","w")
    for i in range(len(cor_zw)):
        obj.write(cor_zw[i])
        if i < len(cor_zw)-1: obj.write(",")
    obj.close()

    # Umwandeln der Korrelationen in Covarianzen
    # Erstellen eines Vektors der Standartabweichungen

    Sigma_v = []
    for i in range(len(cor_zw)):
        Sigma_v.append(eingabe_lists[cor_zw[i]]["sigma"])

    covarianz_v = []

    for i in range(len(cor_zw)):
        covarianz_v.append([])
        # erzeugt Covarianzliste der selben Groesse wie correlation
        for j in range(len(cor_zw)):
            covarianz_v[i].append([])

    for zeile in range(len(correlation)):
        for spalte in range(len(correlation[1])):
            covarianz_v[spalte][zeile] =\
            correlation[spalte][zeile] * Sigma_v[spalte] * Sigma_v[zeile]

    # Ausschreiben der Varianzen
    obj = open("TMP.cor_m","w")
    for i in range(len(covarianz_v)):
         for j in range(len(covarianz_v[1])):
             obj.write(str(covarianz_v[i][j]) + str(" "))
    obj.close()
    # Ausschreiben Erwartungswerte und Varianzen
    obj = open("TMP.E_var","w")
    for i in range(len(cor_zw)):
        obj.write(str(eingabe_lists[cor_zw[i]]["E"]) +" " +\
                str((eingabe_lists[cor_zw[i]]["sigma"])**2) )
        obj.write("\n")
    # Ausschreiben Anzahl der Zufallszahlen
    obj = open("TMP.zf_werte","w")
    obj.write(str(unternehmen))
    obj.close()
    xs ="R CMD BATCH erzeugen_korr_zf.r"
    f = os.popen(xs)
    f.readlines()
    f.close()
```

```
    res_v = {}
    for i in range(len(cor_zw)):
        # Einlesen der durch R erzeugten Parameter und Rueckgabe an Prozess
        abbruch = 0
        name = str(cor_zw[i]) + ".txt"
        obj = open(name,"r")
        v = []

        for j in range(unternehmen):

            ve = obj.readline()
            ve = float(ve)
            v.append(ve)
        obj.close()
        res_v[cor_zw[i]] = v

    return res_v

def unternehemns_nummer(i_a):
        if i_a >   999: firm_no = str((i_a+1))
        if i_a < 1000: firm_no = "0" + str((i_a+1))
        if i_a <   100: firm_no = "00" + str((i_a+1))
        if i_a <    10: firm_no = "000"+ str((i_a+1))
        return firm_no

def in_opt_periode(v,anzahl,string_trend,f_lambda=0):
    # erstellt vektor ueber die Laenge des Optimierungshorizontes
    # anzahl ist laenge des datenvektors
    trend_art = string_trend[0]

    trend_v = float(string_trend.split(trend_art)[1])
    value = []
    for i in range (anzahl):
        if trend_art == "e":
            v=v * (1 + trend_v)**(anzahl)
        elif trend_art == "l":
            # in jeder Periode kommt das trend * anfangswert-fache hinzu
            v=v + (trend_v*(v*anzahl))
        elif trend_art == "n":
            v = v
        elif trend_art =="s":
            # gilt nur fuer lambda,da dort fuer alle Optperioden ausser '1'
            # Erwartungswert von lambda gesetzt wird
            if i == 0: v = v
            else: v = f_lambda
        value.append(v)
    #print value
    return value

def in_Time(v,string_trend,time):
    # Def. in_Time gibt Trend des Parameters ueber die Perioden zurueck
    trend_art = string_trend[0]

    trend_v = float(string_trend.split(str(trend_art))[1])  #???
    if trend_art == "e":
        v=v * (1 + trend_v)**(time)
    elif trend_art == "l":
        # in jeder Periode kommt das trend * anfangswert-fache hinzu
        v=v + (trend_v*(v*time))
    elif trend_art == "n":
        v = v
    elif trend_art =="r":
        v = math.sqrt((normalvariate(v,v/20))**2)
    return v



lists_bezeichnung =\
        ["p_a","w","iota_b","tau_r","tau_q","Y","lambda",\
        "omegaFix","rho","Epj","Vpj","Var_p_a"]
parameters_bezeichnung =\
["a_check_in","b_check_in","k_check_in","eta","gamma_tilde",\
        "kappa","nu","psi","Konk","Xi","T_gross"]
sets_bezeichnung = ['t',"tsub(t)","k","ksub(k)"]

# 1) einlesen der Werte fuer sets,listen,skalare,vorprodukte,\
#       anzahl unternehmen, anzahl Zeit und Anzahl Optimeirungsperioden
eingabe_sets,eingabe_skalar,eingabe_lists,\
        eingabe_vorprodukte ,unternehmen,\
        perioden,opt_perioden_p1,correlation,cor_zw= daten()
```

```
# 2) Erzeugen korrelierten Zufallszahlen, wenn die Laenge von
#        'cor_zw' groesser Null its

if len(cor_zw) == 0:
    lambda_= \
        Verteilung(unternehmen,eingabe_lists["lambda"]["E"] ,\
        eingabe_lists["lambda"]["sigma"],eingabe_lists["lambda"]["vert"])

    omegaFix =  \
        Verteilung(unternehmen,eingabe_lists["omegaFix"]["E"] ,\
        eingabe_lists["omegaFix"]["sigma"],eingabe_lists["omegaFix"]["vert"])

    rho = \
                Verteilung(unternehmen,eingabe_lists["rho"]["E"] ,\
                eingabe_lists["rho"]["sigma"],eingabe_lists["rho"]["vert"])

    kappa =\
        Verteilung(unternehmen,eingabe_skalar["kappa"]["E"] ,\
        eingabe_skalar["kappa"]["sigma"],eingabe_skalar["kappa"]["vert"])

    Xi = \
        Verteilung(unternehmen,eingabe_skalar["Xi"]["E"] ,\
        eingabe_skalar["Xi"]["sigma"],eingabe_skalar["Xi"]["vert"])
else:
    results = verteilung_ausR(eingabe_lists ,cor_zw ,correlation ,unternehmen)

    if eingabe_lists["lambda"]["vert"] == "o" : lambda_ = \
        Verteilung(unternehmen,eingabe_lists["lambda"]["E"] ,\
        eingabe_lists["lambda"]["sigma"],eingabe_lists["lambda"]["vert"])
    else: lambda_ = results["lambda"]

    if eingabe_lists["omegaFix"]["vert"] == "o" : \
        omegaFix = Verteilung(unternehmen,eingabe_lists["omegaFix"]["E"] ,\
        eingabe_lists["omegaFix"]["sigma"],eingabe_lists["omegaFix"]["vert"])
    else:omegaFix = results["omegaFix"]

    if eingabe_lists["rho"]["vert"] == "o" : \
        rho= Verteilung(unternehmen,eingabe_lists["rho"]["E"] ,\
        eingabe_lists["rho"]["sigma"],eingabe_lists["rho"]["vert"])
    else:rho = results["rho"]

    if eingabe_skalar["kappa"]["vert"] == "o" : \
        kappa = Verteilung(unternehmen,eingabe_skalar["kappa"]["E"] ,\
        eingabe_skalar["kappa"]["sigma"],eingabe_skalar["kappa"]["vert"])
    else: kappa = results["kappa"]

    if eingabe_skalar["Xi"]["vert"] == "o" : \
    Xi =Verteilung(unternehmen,eingabe_skalar["Xi"]["E"] ,\
        eingabe_skalar["Xi"]["sigma"],eingabe_skalar["Xi"]["vert"])
    else:     Xi = results["Xi"]



unternehmens_daten = {}
for i_a in range(unternehmen):

    # Es werden fuer alle Unternehmen und alle Zeitpunkte
    # die oben, fuer die erste Periode angegebene Parameter
    # ausgeschrieben.
    # Hierzu werden Dictionarys erstellt.
    # Diese haben die Form:
    # "K_0001":{"T_1":("skalare":{"xi":0.3,"kappa":2,...},
    #   "Lists":{"p_a":[10,20,10,20],...},"sets":{"t":1,"k":10,...}),"T_2"  ....},
    #                                        "K_0002":{"T_2"{{}}...}  ...
    # periode {}                 - dictionary, in dem alle die Perioden "T_1","T_2"
    #             ... enthalten sind.
    # in_periode{}       - dictionarys, in dem "sets","Lists" und "skalare"
    #             fuer die entsprechende Periode enthalten sind.
    # lists{}                    - dictionary der Listen
    # skalare{}          - dictionary der sklaren Parameter
    # stes{}                     - dictionary der Sets

    periode = {}
    firma = "K_"+unternehemns_nummer(i_a)
    for i_t in range(perioden):
        jahr =str( "T_" +str(i_t +1))
        in_periode = {"skalare":0,"sets":0,"Lists":0}
        lists={}
        skalare = {}
        #
        #auslesen der Werte aus den Eingabe Dictionarys
        #fuer Sets: direkte Uebergabe des "eingabe_stes"
        #        dictionarys
```

```
# fuer Listen:
#    * Listen, die einer Verteilung bezueglich der
#             Unternehmen folgen:
#        der Wert fuer die Periode 1 des ersten Zeitschritts
#             der Optimierung
#        ist durch eine Vertielung gegeben, weitere Werte
#             fuer die Zeitschritte
#        innerhalb der Optimeirung werden durch den
#             Trend_optT Wert gegeben
#        ueber die reale Zeit wird der Trend in Trend_t angegeben


in_periode["sets"] = eingabe_sets

lists["lambda"] =\
in_opt_periode(in_Time(float(lambda_[i_a]),\
eingabe_lists["lambda"]["trend_t"],i_t),opt_perioden_p1,\
eingabe_lists["lambda"]["trend_optT"],float(lambda_[i_a]))

lists["omegaFix"] =\
in_opt_periode(in_Time(float(omegaFix[i_a]),\
eingabe_lists["omegaFix"]["trend_t"],i_t),opt_perioden_p1,\
eingabe_lists["omegaFix"]["trend_optT"])

lists["rho"]=\
in_opt_periode(in_Time(float(rho[i_a]),\
eingabe_lists["rho"]["trend_t"],i_t),opt_perioden_p1,\
eingabe_lists["rho"]["trend_optT"])

lists["p_a"] =\
in_opt_periode(in_Time(eingabe_lists["p_a"]["v"],\
eingabe_lists["p_a"]["trend_t"],i_t),opt_perioden_p1,\
eingabe_lists["p_a"]["trend_optT"])

lists["w"] =\
in_opt_periode(in_Time(eingabe_lists["w"]["v"],\
eingabe_lists["w"]["trend_t"],i_t),opt_perioden_p1,\
eingabe_lists["w"]["trend_optT"])

lists["iota_b"] =\
in_opt_periode(in_Time(eingabe_lists["iota_b"]["v"],\
eingabe_lists["iota_b"]["trend_t"],i_t),opt_perioden_p1,\
eingabe_lists["iota_b"]["trend_optT"])

lists["tau_r"]= \
in_opt_periode(in_Time(eingabe_lists["tau_r"]["v"],\
eingabe_lists["tau_r"]["trend_t"],i_t),opt_perioden_p1,\
eingabe_lists["tau_r"]["trend_optT"])

lists["tau_q"] =\
in_opt_periode(in_Time(eingabe_lists["tau_q"]["v"],\
eingabe_lists["tau_q"]["trend_t"],i_t),opt_perioden_p1,\
eingabe_lists["tau_q"]["trend_optT"])

lists["Y"] =\
in_opt_periode(in_Time(eingabe_lists["Y"]["v"],\
eingabe_lists["Y"]["trend_t"],i_t),opt_perioden_p1,\
eingabe_lists["Y"]["trend_optT"])

lists["Var_p_a"] =  \
in_opt_periode(in_Time(eingabe_lists["Var_p_a"]["v"]\
,eingabe_lists["Var_p_a"]["trend_t"],i_t),opt_perioden_p1,\
eingabe_lists["Var_p_a"]["trend_optT"])

lists["Epj"] =\
in_opt_periode(eingabe_lists["Epj"]["v"],eingabe_sets["k"],"10")

lists["Vpj"] = \
in_opt_periode(eingabe_lists["Vpj"]["v"],eingabe_sets["k"],"10")

skalare["a_check_in"]= eingabe_skalar["a_check_in"]["v"]
skalare["b_check_in"]=eingabe_skalar["k_check_in"]["v"]
skalare["k_check_in"]=eingabe_skalar["k_check_in"]["v"]

skalare["kappa"] =\
in_Time(float(kappa[i_a]),eingabe_skalar["kappa"]["trend_t"],i_t)

skalare["Xi"]=float(Xi[i_a])
skalare["nu"] = eingabe_skalar["nu"]
skalare["psi"] = eingabe_skalar["psi"]
skalare["Konk"] = eingabe_skalar["Konk"]
skalare["T_gross"] = eingabe_skalar["T_gross"]
skalare["eta"] = eingabe_skalar["eta"]
```

```
        skalare["gamma_tilde"] = eingabe_skalar["gamma_tilde"]

        in_periode["skalare"] = skalare
        in_periode["Lists"]= lists

        periode[jahr] = in_periode


    unternehmens_daten[firma] = periode


try:shutil.rmtree("daten_input")
except:pass
os.mkdir("daten_input")
os.chdir("daten_input")

# Ausschreiben der Daten


for i_t in range(perioden):
    jahr =str( "T_" +str(i_t +1))
    os.mkdir(jahr)
    os.chdir(jahr)
    # ertsellt ordner fuer das jahr
    for i_a in range(unternehmen):
        firma = "K_"+unternehemns_nummer(i_a)
        os.mkdir(firma)
        os.chdir(firma)
        obj = open("start_werte_skalare.txt","w")
        for bez in range(len(parameters_bezeichnung)):
            wert =\
            round(unternehmens_daten[firma][jahr]["skalare"]\
                [parameters_bezeichnung[bez]]*10000)/10000
            str_wert = str(wert)
            obj.write(parameters_bezeichnung[bez] + " " +str_wert )
            obj.write("\n")
        for bez in range(len(lists_bezeichnung)):
            obj = open("start_"+lists_bezeichnung[bez] + ".txt","w")
            obj.write("t "+ str(len(unternehmens_daten[firma][jahr]\
                ["Lists"][lists_bezeichnung[bez]])))
            obj.write("\n")
            for v_pos in range(len(unternehmens_daten[firma][jahr]\
                ["Lists"][lists_bezeichnung[bez]])):
                wert = round(unternehmens_daten[firma][jahr]["Lists"]\
                        [lists_bezeichnung[bez]][v_pos]*10000)/10000
                str_wert = str(wert)
                obj.write(str(lists_bezeichnung[bez]) +" " + str_wert)
                obj.write("\n")
        obj.close()
        obj = open("start_werte_sets.txt","w")
        for bez in range(len(sets_bezeichnung)):
            obj.write(sets_bezeichnung[bez] + " 1 " + \
                str(unternehmens_daten[firma][jahr]["sets"]\
                [sets_bezeichnung[bez]]))
            obj.write("\n")
        obj.close()
        os.chdir("..")
    obj = open("vorprodukte.txt","w")
    for i in range(len(eingabe_vorprodukte[jahr]["Menge"])):
        obj.write(str(eingabe_vorprodukte[jahr]["Menge"][i]) +\
                " " + str(eingabe_vorprodukte[jahr]["Preis"][i]))
        obj.write("\n")
    obj.close()
    os.chdir("..")
```

B.4 Skript: erzeugen_korr_zf.r

```
## Erzeugen korrelierter Zufallszahlen
##

# Einlesen der Parameter

obj <- scan("TMP.zf_d_v",sep = ",",what="")

## m Vektor von n Zfz

m <- length(obj)
n <- scan("TMP.zf_werte")

objEV <- scan("TMP.E_var",sep= " ")
objEV<-matrix(objEV, ncol=2,byrow=TRUE)
objEV


# Ziehen der Zufallszahlen
X <- matrix(rnorm(m*n),nrow=m)
X<-sqrt(X**2)
## m x m Kovarianzmatrix
obj2 <- scan("TMP.cor_m",sep="")
C <- matrix(obj2, ncol=m, byrow=TRUE)
C



## cholesky Zerlegung
A <- chol(C)

## neue korrelierte Variablen
Y <- t(t(A)%*%X)

## Ergebnis
cov(Y)

objEV[,1]
# Addieren des Erwartungswertes
Y <- t(objEV[,1] + t(Y))
Y

cov(Y)
postscript(paste("hist_input_Var.eps"))
for (i in 1 : length(obj) ){
    write(paste(Y[,i]," ",sep=""),paste(obj[i],".txt",sep = ""));
hist(Y[,i],xlab=obj[i],freq = NULL,main = paste("Histogramm der '",obj[i],"' "),
col = "red");
}

graphics.off()
```

B.5 Skript: mod_run.py

```
fimport os
from bezeichner import *
from GAMS_steuerung import *
import shutil
from daten_mod import *
import time
import random

try:
    import Gnuplot
except:
    PLOT = 0
    pass

try:
    gn = Gnuplot.Gnuplot(persist = 1)
    PLOT_pos = 1
except:
    PLOT_pos = 0

# bestimmt Verzeichnis, in dem sich das Skript befindet
# ist es kein lokales, so wird GAMS anders aufgerufen
ort = os.getcwd()
ort = ort[0:7]
ordner_daten_input = "daten_input"
datei_ergebnisse_gams = "ergebnisse_gams.txt"

if ort == "/Users/":
    pfad_gams = "/Applications/ANWENDUNGEN/gams/gams"

else: pfad_gams = "/usr/local/gams/gams"

modell_name="konsum_produzentx1.gms"
datei_werte_fuer_gams = "input_daten_gams"
parameters_bezeichnung = bezeichner()[8]

def log_file(text,text1=[],values1=[],values2=[]):
    # Definition zur Informationsausgabe in ein Log-File
    log_obj.write(str(text))
    log_obj.write("\n")
    for i in range(len(values1)):
        try: t1 = str(text1[i])
        except:t1 = "                    "
        try:v1 = str(values1[i])
        except:v1 = "                    "
        try:v2 = str(values2[i])
        except:v2 = "                    "
        log_obj.write(t1+ "          " + v1 + "     "+ v2)
        log_obj.write("\n")
    return

def PLOT(Archiv,anzahl_unternehmen, plot_bezeichner,max_perioden):
    # Erstellen von 'eps' Grafiken fuer die in 'ausgabe_bezeichner'
    # angegebenen Variablen
    #log_file("Erstelle Plots")
    #gn('set term postscript eps color')
    for var in range(len(plot_bezeichner)):
        #gn('set origin 0.0,0.')
        #gn('set data style lp')
        #gn('set style line 3 lt 1 lw 2') # Set a line style for the vectors
        #gn('set style line 5 lt 2 lw 2')
        #gn.ylabel(plot_bezeichner[var])
        #gn.xlabel("Periode")
        unt_v = []
        #gn.plot([0,0])
        obj_f = open( "Archiv/" + plot_bezeichner[var] + ".txt","w")
        for i_a in range(anzahl_unternehmen):
            firma = "K_" + unternehemns_nummer(i_a)
            val_bez = []
            for i in range(max_perioden):
                val_bez.append(float(Archiv["T_" + str(i+1)][firma]\
                        [plot_bezeichner[var]] ))
            unt_v.append(val_bez)
            #gnd = Gnuplot.PlotItems.Data(val_bez, with="lines", \
                #title = "K -" + str(unternehemns_nummer(i_a)))
            #gn.replot(gnd)
            # Speichern der Daten in Text Datei
            for i in range(len(val_bez)):
                obj_f.write(str(val_bez[i]) + ",")
            obj_f.write("\n")
```

```
        obj_f.close()
        #file_eps = "Archiv/" + plot_bezeichner[var] + ".eps"
        #gn.hardcopy(file_eps)


        # Plot der Summen

    return


def PLOTrange(Archiv,anzahl_unternehmen, plot_bezeichner,max_perioden):
    # Erstellen von 'eps' Grafiken fuer die in 'ausgabe_bezeichner'
    # angegebenen Variablen
    log_file("Erstelle Plots")
    gn('set term postscript eps color')
    for var in range(len(plot_bezeichner)):
        gn('set origin 0.0,0.')
        gn('set data style lp')
        gn('set style line 3 lt 1 lw 2') # Set a line style for the vectors
        gn('set style line 5 lt 2 lw 2')
        gn.ylabel(plot_bezeichner[var])
        gn.xlabel("Periode")
        unt_v = []
        gn.plot([0,0])
        for i_a in range(anzahl_unternehmen):
            firma = "K_" + unternehemns_nummer(i_a)
            val_bez = []
            if max_perioden < 5:start_time = 0
            if max_perioden >4 : start_time = 5
            for i in range(start_time,max_perioden):
                val_bez.append(float(Archiv["T_" + str(i+1)][firma]\
                        [plot_bezeichner[var]] ))
            unt_v.append(val_bez)
            gnd = Gnuplot.PlotItems.Data(val_bez, with="lines", \
                title = "K -" + str(unternehemns_nummer(i_a)))
            gn.replot(gnd)

        file_eps = "Archiv/" + plot_bezeichner[var] + "_r.eps"

        gn.hardcopy(file_eps)

        # Plot der Summen

    return

def PLOTSum(Archiv,anzahl_unternehmen, plot_bezeichner,\
        max_perioden):
    # Erstellt Plots fuer die Summe von Groessen
    gn('set term postscript eps color')
    for var in range(len(plot_bezeichner)):
        obj_f = open( "Archiv/sum_" + plot_bezeichner[var] + ".txt","w")
        gn.plot([0,0])
        gn.ylabel(plot_bezeichner[var])
        gn.xlabel("Periode")
        val_bez=[]
        for i in range(max_perioden):
             summe = 0
             for i_a in range(anzahl_unternehmen):
                 firma = "K_" + unternehemns_nummer(i_a)
                 summe = summe + float(Archiv["T_" + str(i+1)][firma]\
                        [plot_bezeichner[var]] )
             val_bez.append(summe)
        gn.ylabel("Summe "+ plot_bezeichner[var])
        gn.xlabel("Periode")
        gnds = Gnuplot.PlotItems.Data(val_bez, with="lines",\
                title = "sum" )
        file_eps = "Archiv/sum_" + plot_bezeichner[var] + ".eps"
        gn.replot(gnds)
        gn.hardcopy(file_eps)
         # Speichern der Daten in Text Datei
        for i in range(len(val_bez)):
            obj_f.write(str(val_bez[i]))
            obj_f.write("\n")
        obj_f.close()
    return


def einlesen_vorprodukte(pfad_jahr):
    #Einlesen des Mengen- und Preisvektors
    #der Vorprodukte

    obj = open(ordner_daten_input + "/" + pfad_jahr +\
        "/vorprodukte.txt","r")          # oeffnen der Datei Vorprodukte
```

```
    e_menge = []                            # Liste der Vorproduktmengen
    e_preis = []                            # Liste der Vorproduktpreise
    a = obj.readlines()             # komlettes Einlesen als LIste
    for i in range(len(a)):         # Zerlegen der Liste
        b = a[i].split(" ")
        e_menge.append(float(b[0]))
        e_preis.append(float(b[1]))
    obj.close()
    return e_menge, e_preis
        # zurueckgeben Mengen und Preisliste


def schreibe_e(ep_check,e_check,p_e,zeit,exp_p=1,\
        optperioden=5):
    # auschreiben des Bestands an Vorprodukten e_check
    # der Aufwendungen fuer Vorprodukte im Bestand ep_check
    # und des Preises

    obj = open("e_Vor.txt","w")
    obj.write("Parameters")
    obj.write("\n")
    obj.write("ep_check(t) / "   )
    obj.write("\n")
    for i in range(optperioden):
        if i == 0:  value =str(round(ep_check,3))
        else: value = "0"
        obj.write(str(i+1) +"    "+ value)
        obj.write(" \n" )
    obj.write("/")
    obj.write(" \n" )
    obj.write("p_e(t) / "   )
    obj.write("\n")
    for i in range(optperioden):
        if i == 0:  value =str(round(p_e,3))
        else: value = str(exp_p)
        obj.write(str(i+1) +"    "+ value)
        obj.write(" \n" )
    obj.write("/ ")
    obj.write(" \n" )
    obj.write("e_check(t) / "   )
    obj.write("\n")
    for i in range(optperioden):
        if i == 0:  value =str(round(e_check,3))
        else: value = "0"
        obj.write(str(i+1) +"    "+ value)
        obj.write(" \n" )
    obj.write("/ ")
    obj.write(" \n" )
    obj.close()
    log_file("schreibe echeck",str(round(e_check,3)))
    return

def schreibe_NB(e_g):
     obj = open("nb_e.txt","w")
     if e_g == ">":
         obj.write("cons_e(t)..  kappa * q_s(t)  -  e_check     =g= 0;")
     if e_g =="=":
         obj.write("cons_e(t)..  kappa * q_s(t)          =l=  e_check;")
     return


def optimierung(firm_no,zeitpunkt):
    ordner_firma = "K_"+ firm_no
    # Festlegen des Dateninput - Ordners
    DAT_INPUTORDNER =ordner_daten_input +"/"+ "T_"+\
        zeitpunkt  + "/"+ ordner_firma
    sets_wert,skalar_wert,lists_wert, ergebnisse= \
        steuerung(log_file,DAT_INPUTORDNER,datei_ergebnisse_gams,\
                pfad_gams,modell_name,datei_werte_fuer_gams,3,0)
        # Aufruf des Moduls Steuerung
        # In diesem werden Daten fuer GAMS ausgeschrieben und die
        # Optimierung aufgerufen
        # zuruckgegeben werden Liste mit den parametern der 'Sets',
        # 'Skalaren' und 'Listen'  weiterhin der Ergebnisvektor
    par = {}                        # Ablage der Werte in Dictionarys
    par["sets"]= sets_wert
    par["skalare"] = skalar_wert
    par["list"] = lists_wert
    return par,ergebnisse


def rationierung(e_dem,a):
    # RationierungsDefinition
```

```
    # Input: Dictionary der Nachfragemengen - 'e_dem'
    # und des Angebotes 'a'
    angebot = float(a)
    abbruch_rat = 0
    get_v = {}    # Liste mit Werten der erhaltenen Mengen
    zget_v = []
    while abbruch_rat == 0:
        zuliste   =[]
        summe_n = 0    # summe der noch vorhandenen Nachfrage
        for i in range(anzahl_unternehmen):
            if e_dem["K_"+ str(unternehemns_nummer(i))] >0: zuliste.append(i)
            summe_n = summe_n + e_dem["K_"+ str(unternehemns_nummer(i))]
        if summe_n == 0 or angebot == 0 : break
        print "summe",summe_n
        firma_get = random.choice(zuliste)
        print "ausgewaehte firm" , firma_get
        zuteilung = min(e_dem["K_"+ str(unternehemns_nummer(firma_get))],angebot)
        print "zuteilung", zuteilung
        get_v["K_"+ str(unternehemns_nummer(firma_get))] = zuteilung
        e_dem["K_"+ str(unternehemns_nummer(firma_get))]  = \
            e_dem["K_"+ str(unternehemns_nummer(firma_get))]  - zuteilung
        angebot = angebot - zuteilung
        if summe_n == 0 or angebot == 0 : abbruch_rat = 1
    print get_v
    for i in range(anzahl_unternehmen):
        try:zget_v.append(get_v["K_"+ str(unternehemns_nummer(i))])
        except: zget_v.append(0)
    return zget_v , summe_n

def rationierung_uniform(e_dem,a):
    # RationierungsDefinition
    # Input: Liste der Nachfragemengen - 'e_dem'
    # und des Angebotes 'a'
    angebot = float(a)
    abbruch_rat = 0
    kum_nachfrage = sum(e_dem)  # Gesamntnachfrage
    get_v = []     # Liste mit Werten der erhaltenen Mengen
    for i in range(len(e_dem)):get_v.append(0)
    # erstellen der Liste mit erhaltenen Mengen - 'get_v'
    # Anfangswert ist '0'
    if sum(e_dem) == 0 or angebot == 0: return get_v
    # wenn Angebot oder Nachfrage == '0' zurueck
    while abbruch_rat == 0:
        S_s = 0
        vert = angebot / len(e_dem)
        # zu verteilende Menge an Vorprodukten
        for i in range(len(e_dem)):
            s1 =  e_dem[i] - get_v[i]
            # Menge die noch nachgefragt wird vom Unternehmen i
            s2 =  min(s1,vert)
            # Minimum aus noch nachgefragter Menge und dem,
            # was zu verteilen ist
            get_v[i] =get_v[i] + s2
            S_s = S_s + s2
            # Summe aller Mengen, die verteilt wurden
        angebot = angebot - S_s
        kum_nachfrage = sum(e_dem)- sum(get_v)
        if angebot < 0.1 or kum_nachfrage < 0.1:abbruch_rat = 1
    return get_v

def preis_Angebot_vektor(erg):
    # Auslesen der Preise und Angebotsmengen fuer alle Unternehmen
    # aus dem Ergebnisvektor und Rueckgabe der Dictionarys 'p' und 'q'
    p = {}       #Preis Dictionary
    q = {} # Mengen Dictionary
    for i_a in range(anzahl_unternehmen):
        firma = "K_" + unternehemns_nummer(i_a)
        q[firma] =float( erg[firma]["res"]["q_s"])
        p[firma] = float(erg[firma]["res"]["p_q"])
        log_file(firma + "preis/angebot",[p[firma]],[q[firma]])
    return p,q

def realisierung(demand,par_erg,firma,zeitpunkt,real_v,ec,epc):
    def ausschreiben_neue_startwerte_(a_check_new,b_check_new,\
        k_check_new):
        # Bei iterativerm Aufruf der Optimierung werden in dieser Definition
        # die dann notwendigen Veraenderungen der skalaren Parameter
        # (Bestandsgroessen) ausgeschrieben

        obj = open(ordner_daten_input+"/"+ "T_"+zeitpunkt  +"/"+\
                firma +"/start_werte_skalare.txt","r")
        bez=[]
        wert=[]
```

```
    par = obj.readlines()
    for i in range(len(par)):
        b = par[i].split(" ")
        bez.append(b[0])
        wert.append(float(b[1]))

    obj = open(ordner_daten_input+"/"+ "T_"+zeitpunkt  +"/"+ \
            firma +"/start_werte_skalare.txt","w")
    wert[0] = a_check_new
    wert[1] = b_check_new
    wert[2] = k_check_new
    for i in range(len(par)):
        ausschreiben = bez[i] + " " +str(wert[i])
        obj.write(ausschreiben)
        obj.write("\n")
    obj.close()
    return

q_d = float(demand[firma])
q_s = float(par_erg[firma]["res"]["q_s"])
p_q = float(par_erg[firma]["res"]["p_q"])
a_d = float(par_erg[firma]["res"]["a_d"])
b_d = float(par_erg[firma]["res"]["b_d"])
l_d = float(par_erg[firma]["res"]["l_d"])
o = float(par_erg[firma]["res"]["o"])
#e_check_ = float(par_erg[firma]["res"]["e_check"])
#ep_check_ = float(par_erg[firma]["res"]["ep_check"])
e_check_ = ec
ep_check_ = epc
j = float(par_erg[firma]["res"]["j"])
gamma= float(par_erg[firma]["res"]["gamma"])



omega_fix = float(par_erg[firma]["par"]["list"]["omegaFix"][0])
rho = float(par_erg[firma]["par"]["list"]["rho"][0])
p_a = float(par_erg[firma]["par"]["list"]["p_a"][0])
Y = float(par_erg[firma]["par"]["list"]["Y"][0])
w = float(par_erg[firma]["par"]["list"]["w"][0])
iota = float(par_erg[firma]["par"]["list"]["iota_b"][0])
lambda_ = float(par_erg[firma]["par"]["list"]["lambda"][0])
tau_r = float(par_erg[firma]["par"]["list"]["tau_r"][0])
tau_q = float(par_erg[firma]["par"]["list"]["tau_q"][0])
psi = float(par_erg[firma]["par"]["skalare"]["psi"])
kappa = float(par_erg[firma]["par"]["skalare"]["kappa"])
T_gross = float(par_erg[firma]["par"]["skalare"]["T_gross"])
a_check_in = float(par_erg[firma]["par"]["skalare"]["a_check_in"])
b_check_in = float(par_erg[firma]["par"]["skalare"]["b_check_in"])
k_check_in = float(par_erg[firma]["par"]["skalare"]["k_check_in"])
xi = float(par_erg[firma]["par"]["skalare"]["xi"])
nu = float(par_erg[firma]["par"]["skalare"]["nu"])
verkauf = min(q_d, q_s)

u = verkauf * p_q
r = u + b_check_in * iota - o- psi*k_check_in
steuern = r * tau_r
v = u + b_check_in * iota - o
aussh = r * xi
a_d_R = max(0,min((v - ( xi + tau_r) * r) /p_a , a_d )) # die Realisierung
#von a_d ist der Cash Flow abzueglich Steuerzahungen und Ausschuettung
b_d_R = v - ( xi + tau_r) * r - a_d* p_a # Bondnachfragge

            #ist v - Ausschuettungen und Steuern - Kapitalgueternachfrage

a_check_new = a_check_in *(1-psi) + a_d_R
b_check_new = b_check_in + b_d_R
b_check_new=max(b_check_new,0)
k_check_new = k_check_in * (1-psi) + p_a * a_d_R
if float(zeitpunkt)-1 < max_perioden:
    ausschreiben_neue_startwerte_(a_check_new,b_check_new,\
            k_check_new)
obj = open(ordner_daten_input+"/"+ "T_"+str(int(zeitpunkt)-1)  \
    +"/"+   firma +"/archiv.txt","w")
obj.write("verkauf"+ " " +str(verkauf))
obj.write("\n")
obj.write("u"+ " " +str(u))
obj.write("\n")
obj.write("v"+ " " +str(v))
obj.write("\n")
obj.write("p_q"+ " " +str(p_q))
obj.write("\n")
obj.write("r"+ " " +str(r))
obj.write("\n")
```

```
    obj.write("a_d"+ " " +str(a_d))
    obj.write("\n")
    obj.write("b_d"+ " " +str(b_d))
    obj.write("\n")
    obj.write("l_d"+ " " +str(l_d))
    obj.write("\n")
    obj.write("steuern"+ " " +str(steuern))
    obj.write("\n")
    real= {}   # Dictionary zur Datenrueckgabe fuer Plot
    real_v_werte= [q_s,p_q,a_d_R,b_d_R,q_d,verkauf,u,r,v,\
        a_check_in,b_check_in,k_check_in,e_check_,\
        ep_check_,o,j,gamma]

    log_file([])
    log_file(firma,real_v,real_v_werte)
    print firma
    print
    print
    print real_v_werte
    #raw_input()
    for i in range(len(real_v)):
        real[real_v[i]] =  real_v_werte[i]
    # archivieren der Ergebnisse
    obj_file_unternehmen[firma].write("Periode " + str(zeit+1) + " ")
    for i in range(len(real_v)):
        obj_file_unternehmen[firma].write(real_v[i] + " " +\
                str(real_v_werte[i]) +" ")
    obj_file_unternehmen[firma].write("\n")
    log_file(firma,["acheck_new"], [a_check_new] )
    return p_q ,real

def unternehemns_nummer(i_a):
        # erstellt die Numemr des Unternehmens 'i_a'
        if i_a >    999: firm_no = str((i_a+1))
        if i_a < 1000: firm_no = "0" + str((i_a+1))
        if i_a <    100: firm_no = "00" + str((i_a+1))
        if i_a <     10: firm_no = "000"+ str((i_a+1))
        return firm_no


def nachfrage_funktion(p,eta, Y):
    # Berechnung der Nachfrage nach Konsumguetern in
    # Abhaengigkeit aller Preise
    summe = 0 # Summe im Nenner der Nachfragefunktion
    eta = float(eta)
    Y = float(Y)
    beta = eta/ (eta-1)
    q_d_R = {} # Vektor der Nachfrage
    for i_a in range(anzahl_unternehmen):
        firma = "K_" + unternehemns_nummer(i_a)
        summe = summe + p[firma]**beta
    for i_a in range(anzahl_unternehmen):
        firma = "K_" + unternehemns_nummer(i_a)
        q_d_R[firma] = p[firma]**(1/(eta-1)) * Y / summe
    return q_d_R

def update_p_q(p_q_v,e_pj_v_all,v_pj_v_all,\
        anzahl_unternehmen,zeit):
    # Funktion zum updaten der Erwarungswerte und
    # Varianzen der Konkurrenzpreise
    # hierzu werden die aus der Vorperiode bekannten
    # Varianzen und Erwartungswerte
    # sowie der aktuelle Preisverktor uebergeben
    # dabei ist der Erwartungswert der Durchschnitt aller
    # bisher realisierten Preise
    # die Varianz ist Konvexkombination aus bisheriger
    # Varianz und berechneter
    # die Berechung der Varianz erfolgt ueber die #
    # quadratische Abweichung der
    # realisierten Preise zum Durschnittswert

    # Erwartungswert- und Varianzverktor sind um ein Element
    # kuerzer als die Anzahl der Unternehmen betraegt,
    # da sie nur die Konkurrenten eines Unternehmens
    # enthalten

    sum_v = []
    for i_a_in in range(anzahl_unternehmen):
        summe = 0   # Summe der Preise aller bisherigen Perioden
        # fuer das Unternehmen 'i_a'

        if zeit < 5: von_zeit = 0
        else: von_zeit = zeit - 5
```

```
        for i_t_in in range(von_zeit , zeit):
            summe = summe + p_q_v["T_"+str(i_t_in+1)]\
                ["K_" + str(unternehemns_nummer(i_a_in))]
        sum_v.append(summe)
    # Bestimmung des Durchschnittswertes der Preise
    durch ={}
    for i_a in range(len(sum_v)):durch["K_" +\
        str(unternehemns_nummer(i_a))] = (sum_v[i_a] / (float(zeit)-von_zeit))

    # Bestimmung der Varians
    var = {}
    s=[]
    print "-----------------",p_q_v
    for i_a  in range(anzahl_unternehmen):
        p_n = []
        for n in range(zeit):
            p_n.append( p_q_v["T_"+str(n+1)]["K_" + \
                str(unternehemns_nummer(i_a))])

        for i_t in range(von_zeit ,zeit):
            summe = summe + (p_q_v["T_"+str(i_t_in+1)]["K_" + \
                str(unternehemns_nummer(i_a))] - \
                durch["K_" + str(unternehemns_nummer(i_a))] )**2

        var["K_" + str(unternehemns_nummer(i_a))] = summe/(zeit-von_zeit)


    # ausschreiben der neuen Epj und Vpj Vektoren

    for i_a in range(anzahl_unternehmen):

        obj = open(ordner_daten_input + "/" + "T_" + str(zeit+1) +\
                "/" + "K_" + str(unternehemns_nummer(i_a)) + "/" + \
            "start_Epj.txt","w")
        obj.write("k "+ str(anzahl_unternehmen - 1))
        obj.write("\n")
        for i_w in range(anzahl_unternehmen):
            if i_a <> i_w:
                obj.write("E_pj " + str(durch["K_" +\
                        str(unternehemns_nummer(i_w))] ))
                        # Schreiben des Erwartungswertes
                obj.write("\n")
        obj.close()

        # Einlesen der alten Varianz:
        obj = open(ordner_daten_input + "/" + "T_" + str(zeit) +\
                "/" + "K_" + str(unternehemns_nummer(i_a)) + "/" + \
            "start_Vpj.txt","r")
        tem = obj.readline()
        var_alt={}
        print "..............................."
        print var
        for i in range(anzahl_unternehmen):
                if i <> i_a:
                    var_alt["K_"+ str(unternehemns_nummer(i))] =\
                    (float(obj.readline().split(" ")[1]))
        obj.close()

        upd_var={} # updating der Varianz
        # hierzu wird eine Konvexkombination der alten und
        # neu-berechneten Varianz gebildet

        for i in range(anzahl_unternehmen):
            firma_txt = "K_"+ str(unternehemns_nummer(i))
            # einlesen der alten Varianzen
            if i <> i_a: upd_var[firma_txt] = .5 * var_alt[firma_txt] \
                + .5 * var[firma_txt]

        for i in range(anzahl_unternehmen):
            obj = open(ordner_daten_input + "/" + "T_" + str(zeit+1) +\
                "/" + "K_" + str(unternehemns_nummer(i_a)) + "/" + \
                "start_Vpj.txt","w")
            obj.write("k "+ str(anzahl_unternehmen - 1))
            obj.write("\n")
            for i_w in range(anzahl_unternehmen):
                if i_a <> i_w:
                    obj.write("V_pj " + str(upd_var["K_" +\
                            str(unternehemns_nummer(i_w))] ))
                    obj.write("\n")
        obj.close()
    return

def hist(anzahl_unternehmen,real_v,max_perioden):
```

```
    log_file("Erstelle Histogramme")
    # Schliessen der Datenoutput Files aller Unternehmen
    ausgabe_zeit = max_perioden
    for i in range(anzahl_unternehmen):
        obj_file_unternehmen["K_" +str(unternehemns_nummer(i))].close()
    all= {}
    for i_a in range(anzahl_unternehmen):
        # Einlesen der Werte aus den Filese K_000x
        obj = open("Archiv/K_" + str(unternehemns_nummer(i_a)),"r")
        dic_t1 = {}
        for i_t in range(max_perioden):
            v  = obj.readline()
            v = v.split(" ")
            dic_t1["T_" + str(i_t+1)] = v[1]
            dic_v1 = {}
            for i_v in range(len(v) ):
                if  v[i_v] in real_v:
                    dic_v1[v[i_v]] = v[i_v + 1]
            dic_t1["T_" + str(i_t+1)] = dic_v1
        all["K_" + str(unternehemns_nummer(i_a))] = dic_t1
        obj.close()
    for i in range(len(real_v)):
        # Ausschreiben der Werte in 'tmp_r' und Histogrammplot in R
        a = []
        for i_a in range(anzahl_unternehmen):
            for i_t in range(max_perioden):
                if i_t == ausgabe_zeit - 1:a.append(all["K_" + \
                        str(unternehemns_nummer(i_a))]["T_" + str(i_t+1)]\
                                [real_v[i]])
        obj = open("Archiv/tmp_r","w")
        for i_v in range(len(a)):
            obj.write(str(a[i_v]) + ",")
        obj.close()
        # Ausschreiben des beschriftungstextes fuer R
        obj=open("Archiv/tmp_name","w")
        obj.write(real_v[i] +"_hist"+ ".eps,"+real_v[i] )
        obj.close()
        xs ="R CMD BATCH r_plot_hist.r"
        f = os.popen(xs)
        f.readlines()
        f.close()
    os.remove("Archiv/tmp_r")
    os.remove("Archiv/tmp_name")
    return


p_q_v={}
# Vektor, in den fuer jedes Jahr alle
#Unternehmenszahlen geschrieben werden
all_E_pj_v = {}
all_V_pj_v= {}
anzahl_unternehmen,max_perioden  =  daten()[4:6]
plot_bezeichner = ["qs","pq","ad","bd","qdr","verkauf",\
        "u","r","v","checka","checkb","checkk","checke",\
        "checkep","o","j","\gamma"]

# Loeschen des Logfiles

try:os.remove("log_file.txt")
except:pass
log_obj =  open("log_file.txt","w")


try:shutil.rmtree("Archiv")
except:pass
os.mkdir("Archiv")
durch_vor_preis = {}
obj_file_unternehmen = {}
for i in range(anzahl_unternehmen):
    obj_file_unternehmen["K_" + str(unternehemns_nummer(i))] = \
    open("Archiv/K_" + str(unternehemns_nummer(i)),"w")
    durch_vor_preis[i] = 1000
text = "*****************       START       *****************  "
textv1 =\
[str("Anzahl  der Periode        " ),  str("Anzahl  Unternehmen        " ) ]
valuesv = [str(max_perioden), str(anzahl_unternehmen) ]
log_file(text,textv1,valuesv)



Archiv = {}  # Archiv Dictionary
start_time = time.time()
```

```
for zeit in range(max_perioden):
    #raw_input("neue periode")
    text = "**********************************  '  "
    textv1 = [str("Periode         "),"\n" ]
    valuesv = [ str(zeit+1) ,"\n"]
    log_file(text,textv1,valuesv)
    abbruch = "weiter"
    jahr =str( "T_" +str(zeit +1))
    e_preis_nummer = 0

    run = 0
    e_check_l =[]
    ep_check_l=[]
    e=[]
    for i in range(anzahl_unternehmen):
        e_check_l.append(0)
        # Dictionary mit Bestandsangaben der Vorprodukte
        # fuer jedes Unernehmen
        ep_check_l.append(0)    # sum(j_1) v p_e * e   - summe
        e.append(0)

    p_q_v[jahr] = {}
    e_menge_v, e_preis_v = einlesen_vorprodukte(jahr)
    # einlesen des Mengen und Preisvektors des Vorproduktangebotes
    text = "Angebot Vorprodukte    Meng/Preis    "
    log_file(text,["Menge","--------------"] +e_menge_v + ["                "],\
        ["Preis","-------------"]+e_preis_v+[" "])

    while abbruch <> "Abbruch":
        E_pj_v=[]
        V_pj_v=[]
        e_erhalten = []
        for i in range(anzahl_unternehmen):
            e_erhalten.append(0)
        # innere Schleife: laeuft ueber alle Elemente des\
        #Preis bzw. Mengenvektors  der Vorprodukte und
        ergebnisse_u_parameter = {}
        if run < len(e_preis_v):
            p_e = e_preis_v[run]      # uebernimmt Preis
            #aus dem VorproduktPreisvektor
        elif run == len(e_preis_v) :
            # Wenn Liste mit Angeboten kein weiteres
            # Vorproduktanbgebot enthaelt
            # dann Ausschreiben neuer Nebenbedingung
            #und letztmalige Optimierung
            p_e = 1
        e_dem = {} # liste in die die Vorproduktnachfragen
                #geschrieben werden fuer alle Unternehmen
        E_pj_v={}
        V_pj_v={}
        demand_print=[]
        for i_a in range(anzahl_unternehmen):
            log_file("\n" + "Optimierung fuer Unternehmen : K_" + \
                unternehemns_nummer(i_a))
            # erste innere Schleife, laeuft ueber alle Unternehmen
            # string fuer den Pfadnamen
            firm_no = unternehemns_nummer(i_a)
            schreibe_e(ep_check_l[i_a],e_check_l[i_a],p_e,zeit, durch_vor_preis[i_a])
            # schreibt Werte fuer e_check
            # ep_check, p_e

            par,ergebnisse = optimierung(firm_no,str(zeit+1))
            # optimierungsergebnis
            if  float(ergebnisse["ms"]) in range(3,6):
                text = "Optimierung gescheiter        Modellstatus        "+\
                       str(ergebnisse["ms"]) + "!!!!!!!!!!!!!!!"
                log_file(text)
                print "ABBRUCH, Optimierung fehlgeschlagen!"
                exit()

            ergebnisse_u_parameter["K_" + firm_no] = {"par":par,"res":ergebnisse}
            dem_e_sk = float(ergebnisse_u_parameter["K_" + firm_no]["res"]["e"] )
                # Nachfrage nach Vorprodukten

            e_dem["K_" + str(unternehemns_nummer(i_a))]= dem_e_sk
            E_pj_v["K_" + str(unternehemns_nummer(i_a))] = par["list"]["Epj"][0]
            V_pj_v["K_" + str(unternehemns_nummer(i_a))]= par["list"]["Vpj"][0]
            demand_print.append(dem_e_sk)

        u_text = []

        #log_file(text,u_text,["  "]+e_dem)
        text2 = []
```

```
        if run < len(e_menge_v):
            e_erhalten,gesamtnachfrage = rationierung(e_dem,e_menge_v[run])
            text2 = e_erhalten
        text = ["Unternehmen    Vorproduktnachfrage     Erhalten    "]
        print sum(e_erhalten) , "erhalten"
        #text = str("-----------------------------")
        for i in range(len(demand_print)):
            u_text.append(str("K_" + unternehemns_nummer(i)))
        log_file(text,u_text,demand_print,  text2)
        print e_dem

        for i_a2 in range(anzahl_unternehmen):
            e_check_l[i_a2] = e_check_l[i_a2] +e_erhalten[i_a2]
            ep_check_l[i_a2] = ep_check_l[i_a2] +e_erhalten[i_a2] *p_e
        print "e",e_check_l
        #raw_input()

        # Abbruchbedingungen
        if gesamtnachfrage in range(0,1) :
            # Wenn alle Nachfrage nach Vorprodukten befriedigt wurde: Abbruch
            print "abbruch wegen summe e_dem  = 0"
            abbruch = "Abbruch"
        elif run == len(e_menge_v) +1:
            # wenn kein weiteres Angebot an Vorprodukten wird noch einmal mit
            # "==" Nebenbedingung optimiert
            # und dann ebenfalls abgebrochen.
            print "abbruch wegen erreichen Ende Angebot"
            abbruch = "Abbruch"

        run = run+1



    all_E_pj_v["T_"+ str(zeit+1)] = E_pj_v
    all_V_pj_v["T_"+ str(zeit+1)] = V_pj_v
    # erstellen des Preisvektors  fuer Vorprodukte
    preis_v,q_s_v = preis_Angebot_vektor(ergebnisse_u_parameter)

    # erstellen Nachfragevektor
    q_nachfrage_v  =nachfrage_funktion(preis_v,ergebnisse_u_parameter["K_0001"]\
        ["par"]["skalare"]["eta"],\
    ergebnisse_u_parameter["K_0001"]["par"]["list"]["Y"][0])
    # Unternehmesnummer hier egal, da die relevanten Daten fuer alle identsich
    tem_archiv={}
    for i_a in range(anzahl_unternehmen):

        p_q, realisierungs_werte = realisierung(q_nachfrage_v,\
        ergebnisse_u_parameter,\
        "K_"+str(unternehemns_nummer(i_a)),str(zeit+2),\
                plot_bezeichner,e_check_l[i_a] ,ep_check_l[i_a] )
        tem_archiv["K_"+str(unternehemns_nummer(i_a) )] = realisierungs_werte


        durch_vor_preis[i_a] =\
                .5 * durch_vor_preis[i_a] + .5 * ep_check_l[i_a] /  e_check_l[i_a]

        # zeit + 2,  + , da mit Null begonnen weir dzu zaehlen und + 2
        # weil Ausschreiben fuer naechste Periode erfolgt


        #Neuberechnung Erwartungswerte und Varianzen der Gueterpreise

        p_q_v[jahr]["K_"+unternehemns_nummer(i_a)] = p_q
    Archiv[jahr] =   tem_archiv

    if zeit +1< max_perioden:
        update_p_q (p_q_v,all_E_pj_v,all_V_pj_v,anzahl_unternehmen,zeit+1)

PLOT(Archiv,anzahl_unternehmen, plot_bezeichner,max_perioden)
#gn = Gnuplot.Gnuplot(persist = 1)
#PLOTrange(Archiv,anzahl_unternehmen, plot_bezeichner,max_perioden)
#gn = Gnuplot.Gnuplot(persist = 1)
#PLOTSum(Archiv,anzahl_unternehmen, plot_bezeichner,max_perioden)
#hist(anzahl_unternehmen,plot_bezeichner,max_perioden)
end_time = time.time()
tt = end_time - start_time
tt = tt /60
tt = round(tt)
log_file("RECHENZEIT " + str(tt)+ "    in Minuten")
log_obj.close()
```

B.6 Modul:GAMS_steuerung.py

```
################################################################################
#                               Steuerung der GAMS Optimierung
#                               mit Daten-Transfer und GAMS
#                               Aufruf
################################################################################

def steuerung(log_file ,DAT_INPUTORDNER, datei_ergebnisse_gams ,pfad_gams ,\
        modell_name ,datei_werte_fuer_gams ,opt_try ,Dat_loeschen ):

    import os

    try:
        import Gnuplot
    except:pass
    from time import time
    import plt_f_gams

    import shutil
    import time
    import random

    import plt_f_gams
    from bezeichner import bezeichner


################################################################################

    def einlesen_start_werte_Sets(anzahl_sets):

        # Es werden alle 'Set' Parameter eingelesen.
        # (BISHER SIND SETS NUR IN DER FORM /1 * n / moeglich)
        # 'anzahl_sets' ist die Anzahl der Sets und wird an Definition
        # uebergeben. Diese Zahl entspricht der Laenge der Liste '
        # sets_bezeichnung'.

        obj = open(DAT_INPUTORDNER +"/start_werte_sets.txt","r")
        sets_wert=[]
        a = obj.readlines()
        for i in range(len(a)):
            b = a[i].split(" ")
            sets_wert.append([b[1],b[2]])
        obj.close()
        return sets_wert


    def einlesen_start_werte_Skalare(anzahl_parameter):

        # Es werden hier all skalaren Parameter aus der Datei 'datei_name'
        # eingelesen und als Liste zurueckgegeben.
        # Die Datei 'datei_name' liegt im Verzeichnes 'start_werte_skalare'.

        obj = open(DAT_INPUTORDNER+ "/start_werte_skalare.txt","r")

        parameter_scalare = []
        a = obj.readlines()
        for i in range(len(a)):
            b = a[i].split(" ")
            parameter_scalare.append(b[1])
        obj.close()
        return parameter_scalare


    def einlesen_startwerte_listen(variable):

        # Es werden hier Parameter in Listenform aus der Datei 'variable'
        # eingelesen und als Liste zurueckgegeben.
        # Die Parameter in Listenform sind unter ihren Variablennamen im
        # Verzeichnes 'daten_input' abgelegt.


        return_wert=[]
        obj = open(DAT_INPUTORDNER+ "/start_"+ variable + ".txt","r")
        index_eins = int(obj.readline().split(" ")[1])
        for t in range(index_eins):
            return_wert.append(float(obj.readline().split(" ")[1]))
        obj.close()
        return return_wert

################################################################################
    def ausschreiben_f_gams(sets_bezeichnung ,sets_text ,sets_wert ,\
```

```
    tables_bezeichnung,tables_indizes,tables_text,tables_wert,\
    lists_bezeichnung,lists_indizes,lists_text,lists_wert,\
    parameters_bezeichnung,parameters_text,parameters_wert):

    # Ueber das Modul 'plt_f_gams.py' werden alle Daten formatiert und
    # in der Datei 'daten_fuer_gams' als fuer GAMS lesbar ausgeschrieben.

    sets_=[]
    tables_=[]
    lists_ = []
    scalar_parameters = []
    import plt_f_gams
    for i in range(len(sets_bezeichnung)):
        sets_.append([sets_wert[i],sets_bezeichnung[i],sets_text[i]])
    for i in range(len(tables_bezeichnung)):
        tables_.append([tables_wert[i],tables_bezeichnung[i],\
        tables_indizes[i],tables_text[i]])
    for i in range(len(lists_bezeichnung)):
        lists_.append([lists_wert[i],lists_bezeichnung[i],lists_indizes[i],\
        lists_text[i]])
    for i in range(len(parameters_bezeichnung)):
        scalar_parameters.append([parameters_wert[i],\
        parameters_bezeichnung[i],parameters_text[i]])

    plt_f_gams.daten_fuer_gams(datei_werte_fuer_gams,sets_,tables_,\
    lists_,scalar_parameters,2)
    return


def random_kontrollV_start(t,kontroll_v, identisch = 1):
    obj= open("kontrollV_start.txt","w")
    for i in range(len(kontroll_v)):
        if identisch == 0:
            for j in range(int(t)):
                value = random.uniform(kontroll_v[i][1][0],\
                kontroll_v[i][1][1])
                value = round(value,4)
                obj.write(kontroll_v[i][0] + "(\"" + str(j+1) + "\") =  " \
               + str(value) + "   ;")
                obj.write("\n")
        else:
            value = random.uniform(kontroll_v[i][1][0],kontroll_v[i][1][1])
            value = round(value,4)
            for j in range(int(t)):
                obj.write(kontroll_v[i][0] + "(\"" + str(j+1) + "\") =  " \
               + str(value) + "   ;")
                obj.write("\n")
    obj.close()

def optimierung_gams(pfad_gams,modell_name):

    # Es erfolgt der Aufruf der Optimeirung. Hierzu muss der Pfad des
    # GAMS Programms (pfad_gams' und der name des Modells (modell_name)
    # angegeben werden.
    xs = pfad_gams +"  " +modell_name
    f = os.popen(xs)
    f.readlines()
    f.close()

###############################################################################

def einlesen_gams_ergebnisse(ausgabe_bezeichner):

    # Nach erfolgter Optimeirung werden die durch das GAMS Modell
    # ermittelten Ergebnisse eingelesen.Das GAMS Modell legt hierzu die
    # Ergebnisse in der Datei 'ergebnisse_gams.txt' ab.
    # Points gibt an, um wieviele daten es sich je Variable handelt.
    # Diese werden aus der Datei 'daten_ergebnis_points.txt eingelesen.

    # GAMS schreibt eine Datei in der der variablenname und nachfolgen
    # die Ergebnisswerte aufgelistet sind
    # --- ee = "%.02f" % e ---- nimmte eine Formatierung auf 2
    # Nachkommastellen vor. points wird zurueckgegeben, um im weiteren
    # Programm verwendet werden zu koennen.

    points=[]
    obj = open( "daten_ergebnis_points.txt","r")
    for i in range(len(ausgabe_bezeichner)):
        points.append(int(obj.readline()))

    obj = open(datei_ergebnisse_gams,"r")
    ergebnisse_ = []
    for i in range(len(ausgabe_bezeichner)):
```

```
        zwischen_ergebnisse_=[]
        name = str(obj.readline())

        for j in range(points[i]):
            e = (str(obj.readline()))

            ee = "%.06f" % float(e)
            zwischen_ergebnisse_.append(ee)
        eee = [name,zwischen_ergebnisse_]
        ergebnisse_.append(eee)

    obj.close()

    return  ergebnisse_,points



def loeschen(name):

    # Dateien, die nicht weiter benoetigt werden, koennen
    # mit dieser Definition geloescht werden.

    os.remove(name)
    return

##############################################################################
def test_opt(mod_status,opt_value):
    if float(mod_status) > 2:
        print      "+++++++++++++++++++++++++"
        print      "++++                    +"
        print      "+ +++    ++++++++       +"
        print      "+          ++++++        +"
        print      "+          ++++         +"
        print      "+          ++++         +"
        print      "+          ++++         +"
        print      "+           ++          +"
        print      "+           ++          +"
        print      "+           ++          +"
        print      "+           ++          +"
        print      "+                       +"
        print      "+           ++          +"
        print      "+           ++          +"
        print      "+++++                   +"
        print      "+++                     +"
        print      "+++++++++++++++++++++++++"
        print      "+++ Modell Status ",round(float(mod_status),1),"+++"
        print      "+++++++++++++++++++++++++"
    else:
        print      "+++++++++++++++++++++++++"
        print      "+                       +"
        print      "+    ***************    +"
        print      "+   *****       *****   +"
        print      "+   **             **   +"
        print      "+   **             **   +"
        print      "+   **   XX   XX   **   +"
        print      "+   **             **   +"
        print      "+   **             **   +"
        print      "+   **      oo     **   +"
        print      "+   **             **   +"
        print      "+   **  *       *  **   +"
        print      "+   **  **     **  **   +"
        print      "+   **   *******   **   +"
        print      "+   **     ***     **   +"
        print      "+   ****         ****   +"
        print      "+     *************     +"
        print      "+++++++++++++++++++++++++"
        print      "+++ Modell Status ",round(float(mod_status),0),"+++"
        print      "+++++++++++++++++++++++++"

        print
        print      "........................."
        print      "........................."
        print      " OPT-Wert:", opt_value
        print      "........................."
        print      "........................."
    return mod_status

# Einlesen der Bezeichnungen und Dokumentationen fuer Listen,Scalare und
# Tabels 'ausgabe_bezeichner' gibt an, welche Variablen durch GAMS als
# Ergebnisse geschrieben werden sollen.Diese Angaben sind im Python Modul
# 'bezeichner.py' abgelegt und werden hierals erstes aufgerufen.
```

```
    sets_bezeichnung, sets_text, tables_bezeichnung, tables_indizes,\
    tables_text, lists_bezeichnung, lists_indizes, lists_text,\
    parameters_bezeichnung,\
    parameters_text, ausgabe_bezeichner, kontroll_v = bezeichner()
##########################################################################
    # Es werden im Folgenden die Set Parameter eingelesen.
    sets_wert = einlesen_start_werte_Sets(len(sets_bezeichnung))



##########################################################################
    # Es werden im Folgenden die skalaren Parameter eingelesen.
    parameters_wert =einlesen_start_werte_Skalare(len(parameters_bezeichnung))

##########################################################################
    # Es werden im Folgenden die Parameter in Listenform eingelesen
    lists_wert=[]
    for i in range(len(lists_bezeichnung)):
        lists_wert.append(einlesen_startwerte_listen(lists_bezeichnung[i]))

    tables_wert = []

##########################################################################
    # Alle Parameter werden an die Definition 'ausschreiben_f_gams' uebergeben
    # und in der fuer GAMS lesbaren formatierung ausgeschrieben
    ausschreiben_f_gams(sets_bezeichnung, sets_text, sets_wert,\
        tables_bezeichnung, tables_indizes, tables_text, tables_wert,\
        lists_bezeichnung, lists_indizes, lists_text, lists_wert,\
        parameters_bezeichnung, parameters_text, parameters_wert)

    abbruch = 0
    versuch = 1
    ergebnisse_save = []
    r = 0
    while abbruch == 0:
        ######################################################################
        # Die Optimeirung wird genau 'opt_try' mal mir jeweils
        # zufaellig gewaehlten Startwerten aufgerufen
        # Das Ergebniss mit dem hoechsten Zielfunktionswert wird an das
        # aufrufende Modul uebergeben
        ######################################################################
        # Ausschreiben einer Liste zufaelliger Startwerte der Optimierung
        random_kontrollV_start(sets_wert[0][1], kontroll_v)

        ######################################################################
        # Aufruf der Optimierung

        optimierung_gams(pfad_gams, modell_name)

        ######################################################################
        # Einlesen der Ergebnisse
        ergebnisse_tmp, points = einlesen_gams_ergebnisse(ausgabe_bezeichner)

        ergebnisse_tmp[0][1][0] = float(ergebnisse_tmp[0][1][0])




        ######################################################################
        # Test des Modell-Status
        mod_status = test_opt(ergebnisse_tmp[1][1][0], ergebnisse_tmp[0][1][0])


        print "VERSUCH - ", versuch , "       Status      ", mod_status

        if float(mod_status)  <=2 or float(mod_status)== 7:
            if versuch == 1: ergebnisse_save = [ergebnisse_tmp]
            else: ergebnisse_save.append(ergebnisse_tmp)


        ######################################################################
        # Abbruch, wenn Anzahl der Versuche erreicht
        text = "Opt.Versuch   " + str(versuch) + "(" + str(opt_try) + ")    - Status: " \
               + str(mod_status) +"  Opt.Value:     " + str(ergebnisse_tmp[0][1][0])
        log_file(text)
        if versuch >= opt_try:
            if len(ergebnisse_save) ==0:
                print "hh"
                if r <2:
                    versuch = 0
                    r = r + 1
```

```
            else:abbruch = 1
        else: abbruch = 1


    versuch = versuch  + 1

erg = ergebnisse_save[0]


for i in range(len(ergebnisse_save)-1):
    '''
    print "-------------------------------------"
    print ergebnisse_save[i+1][0][1][0] , erg[0][1][0]
    print  ergebnisse_save[i+1][1][1][0] ,erg[1][1][0]
    print "-------------------------------------"
    raw_input()
    '''
    if ergebnisse_save[i+1][0][1][0] > erg[0][1][0]  and \
            ergebnisse_save[i+1][1][1][0] <= erg[1][1][0]:
        erg =   ergebnisse_save[i+1]

ergebnisse = erg

#######################################################################
# Aufruf der 'archiv' Definition und Ausschreiben der Ergebnisse
# name _ file und Verzeichnis, in dem gespeichert wurde




#######################################################################
# Loeschen der Parameter Datei, die fuer GAMS geschrieben wurde
'''
if Dat_loeschen == 1:

    loeschen(datei_werte_fuer_gams)
    loeschen(datei_ergebnisse_gams)
    #loeschen("outputProducerq.dat")
    loeschen("kontrollV_start.txt")
 '''
#######################################################################
# Ergebnis-Uebergabe an aufrufendes Modul
# ertsellen von dictionarys fuer datenuebergabe
tr_sets_wert = {}
tr_lists_wert = {}
tr_skalar_wert = {}
tr_res={}
for i in range(len(sets_bezeichnung)):
    tr_sets_wert[sets_bezeichnung[i]] = sets_wert[i]

for i in range(len(lists_bezeichnung)):
    tr_lists_wert[lists_bezeichnung[i]] = lists_wert[i]

for i in range(len(parameters_bezeichnung)):
    tr_skalar_wert[parameters_bezeichnung[i]] = parameters_wert[i]

for i in range(len(ausgabe_bezeichner)):
    tr_res[ausgabe_bezeichner[i]] = ergebnisse[i][1][0]

text = "max.OptValue:  "+ str(ergebnisse[0][1][0])
log_file(text,[" ----------------------- "],["------------------  "])
for i in range(len(ausgabe_bezeichner)):
    text = ausgabe_bezeichner[i] + "     "   + str(tr_res[ausgabe_bezeichner[i]])
    log_file(text)
log_file("                    ")

return tr_sets_wert,tr_skalar_wert,tr_lists_wert, tr_res
```

B.7 Modul:plt_f_gams.py

```python
def daten_fuer_gams(datei_name,sets_,tables_,lists_,parameter_,perioden_max):
    '''
    Das Modul 'daten_fuer_gams' bekommt alle Parameterinformationen uebergeben
    und schreibt dann in angegebene Datei einene formatierten, fuer GAMS
    verarbeitbaren Output.

    datei_name    ist der Name der Datei, unter dem die Daten fuer GAMS
                  gespeichert werden sollen
    sets_         ist Liste, mit den Werten, Bezeichnungen und der Dokumentation
                  der Set - ELEMENTE
    tables_       ist Liste, mit den Werten, Bezeichnungen und der Dokumentation
                  der Table - ELEMENTE
    lists         ist Liste, mit den Werten, Bezeichnungen und der Dokumentation
                  der List - ELEMENTE
    parameter_    ist Liste, mit den Werten, Bezeichnungen und der Dokumentation
                  der Scalar - ELEMENTE
    perioden_max  Anzahl der Perioden, ueber die dynamisches System laeuft
    '''
    import os

    def erstelle_kopfzeile(list,perioden_max):
        # Erstellt eine Kopfzeile fuer Tables
        a = []
        for i in range(len(list)):
            for j in range(len(list[i])):
                a.append(len(str(list[i][j])))
        m = max(a)
        for i in range(len(list)):
            for j in range(len(list[i])):
                list[i][j] = str(list[i][j]) + (m - len(str(list[i][j])) + 3) * " "
        kopfzeile = "          "
        for i in range(perioden_max):
            kopfzeile = kopfzeile + str(i+1)
            kopfzeile = kopfzeile + (m - len(str(i+1)) + 3 ) * " "
        return list,kopfzeile


    # oeffnen der Datei "datei_name"
    dat=open(datei_name,"w")


    #    Schreiben der Sets
    dat.write("Sets    ")
    dat.write("\n")
    for  i in range(len(sets_)):
        dat.write(str(sets_[i][1])+"    " + sets_[i][2] + " / " + str(sets_[i][0][0]) + "
*  " +    str(sets_[i][0][1]) + "   /  " )
        dat.write("\n")
    dat.write("\n")
    dat.write(";")
    dat.write("\n")

    #    Schreiben der skalaren Parameter
    dat.write("Parameters")
    dat.write("\n")
    dat.write("")
    dat.write("\n")
    for  i in range(len(parameter_)):
        dat.write(parameter_[i][1] + "     " +    parameter_[i][2] + "       ")

        dat.write("/")
        dat.write(str(parameter_[i][0]))
        dat.write("/")
        dat.write("\n")
        dat.write("\n")
    dat.write(" ")

    #    Schreiben der Listen
    for  i in range(len(lists_)):
        #     i ist Anzahl der Variablen in Listenform
        #     j ist Anzahl der Werte je Variable
        dat.write(lists_[i][1]  +  lists_[i][2] + "     " + lists_[i][3])
        dat.write("\n")
        dat.write("/")
        for j in range(len(lists_[i][0])):
            dat.write(str(j+1) + (10-len(str(j))   ) * " ")
            dat.write(str(lists_[i][0][j]))
            dat.write("\n")
        dat.write("/")
        dat.write("\n")
```

```
    dat.write(";")
    dat.write("\n")

#   Schereiben der Tables
    dat.write("")
    dat.write("\n")
    dat.write("")
    for  i in range(len(tables_)):
        # i ist Anzahl der Variablen in Tabel-Form
        # j ist Anzahl der Werte je Variable
        # u ist Anzahl der Perioden

        #      1             2              3            - Perioden
        # 1    .03           .04            .05
        # 2    .04           .05            .06
        #      ...           ...                         ...
        # Anzahl Werte

        dat.write("Table      ")
        list , kopfzeile = erstelle_kopfzeile(tables_[i][0],len(tables_[i][0]))
        dat.write(tables_[i][1]  + tables_[i][2] + "     " +tables_[i][3])
        dat.write("\n")
        dat.write(kopfzeile)
        dat.write("\n")
        for j in range(len(tables_[i][0][1])):
            dat.write(str(j+1) + (10-len(str(j))   ) * " ")
            for u in range(len(tables_[i][0])):
                dat.write(list[u][j])
            dat.write("\n")
        dat.write("\n")
        dat.write(";")
        dat.write("\n")


    dat.close()
    return 0
```

B.8 Skript:konsum_produzentx1.gms

```
*********************************************************************************
*                          Mikro - Produzenten - Template
*
*
*
*                                  Frank Meißner
*
*
*
*                              Modellversion 1.0
*
*********************************************************************************

option limrow = 1000;


*********************************************************************************
*                              Einlesen d. Startwertre
*
*********************************************************************************

$include input_daten_gams
* Einlesen der Startwerte fuer Parameter
$include e_Vor.txt
* Einlesen der Startwerte fuer die Vorprodukte
* ep_check, e_check

scalars state   solve state of the model
        mn      max. number of tries    / 10 /
        count   count futile tries
;
count = 0; state = inf;

Parameter
beta1
beta2
sum_ew_n
sum_V_n                     ;

*  sum_ew_n ist die Summe der Erwartungswerte der Konkurrenzpreise in der
*  Erwartungsnachfragefunktion
*  sum_V_n Summe in der Varianzbestimmung der q(i)

beta1 =1 / (eta -1);
beta2 = eta/(eta-1);
sum_ew_n = sum(k $(ord(k) < Konk+1) ,
                        Epj(k)**beta2 + .5 *(beta2 - 1) * beta2
                        * Vpj(k) * Epj(k)**(beta2 - 2));

sum_V_n =  sum(k $(ord(k) < Konk+1) ,
                        Epj(k)**beta2 );


*********************************************************************************
*                             Variablendeklaration
*
*********************************************************************************

Variables

R_hat_big         Zielfunktionswert
v_hat(t)                  erwarteter Cash Flow
gamma_q_tilde(t)  kum. Wahrscheinlichkeit fuer Unterschreiten

u_hat(t)                  Umsatz
afa(t)            Abschreibung
tax(t)            Gewinnsteuern
b_d(t)            Bondnachfrage
;

Positive Variables

a_check(t)        Kapitalgueterbestand
a_d(t)            Kapitalgueternachfrage
e_d(t)            Vorproduktanchfrage
p_q(t)            Gueterpreis
q_hat_d(t)        erwartete Gueternachfrage
q_d(t)            probabilistische Gueternachfrage
q_s(t)            Gueterangebot
```

```
o(t)                        Kosten

********************************************************************************
*            Variablen zur Nachrichtlichen Ausgabe
*
********************************************************************************

b_check(t)       Bondbestand
k_check(t)       Kapitalgüterwert
j(t)                    Produktionspotential
l_d(t)           Arbeistnachfrage

cl(t)                   Arbeitskosten
ca(t)            Herstellungskosten o. Arbeit
q_tilde(t)       Schwellenwert der Nachfrage
e(t)                    Vorproduktnachfrage
Varq(t)          Varianz der Nachfrage
e_d(t)           Vorproduktnachfrage
erwpbnb(t)
varpbnb(t)
test3(t)
test4(t)
test5(t)
;


********************************************************************************
*                            Gleichungsdeklaration
*
********************************************************************************


Equations

FKT_a_check_in(t)       Kapitalgueterbestand initial FKT
FKT_a_check(t)          Kapitalguetermengen Veraenderungsgleichung
FKT_b_check_in(t)       Bondbestand veraenderungsgleichung  initial FKT
FKT_b_check(t)          Bondbestand veraenderungsgleichung
Cons_e_d(t)                     Gleichung der Vorproduktnachgfrage
FKT_q_hat_d(t)          Erwartete Gueternachfrage FKT
Cons_e_d(t)                     Nachfrage nach Vorprodukten

FKT_o(t)                                Kostenfunktion
FKT_v_hat(t)                    FKT des erw Cash Flow
FKT_gamma_q_tilde_d(t)  FKT zur Bestimmung der Wahrscheinlichkeit des Erreichens
*                       *des Schwellenwertes der Nachfrage
FKT_R_hat_Big           FKT des kumulierten erw Gewinns - Zielfunktion
cons_Bequest(t)         Nebenbediungung - BequestFKT
cons_rel_q(t)                   Nebenbediungung erw Nachfrage
cons_rel_Ppot(t)                Nebenbediungung Produktionspotential
cons_prob_NB(tsub)      probabilistische Nebenbedingung
cons_u(t)                       Hilfs NB
cons_B_check(t)         Nebenbedingung des Bondbestandes
cons_finanz(t)                  Finanzrestriktion
Cons_e_d(t)                     Nachfrage nach Vorprodukten
;



********************************************************************************
*                            Gleichungen
*
********************************************************************************

* In Abweichung zur mathematischen Modellbeschreibung werden im GAMS-Code
* einige Variablen durch erweiterte Ausdruecke ersetzt.
* Dies hat den Vorteil, dass die Bearbeitungsgeschwindigkeit und - genauigkeit
* erhöht werden kann.
*
* Im Folgenden sind diese Ausdruecke aufgezeigt:
*
********************************************************************************
* Kapitalgueterwert          k_check(t)  =
* -----------------          ((a_check("1")
*                             * p_a(t) * (1-psi)**(ord(t)-1)
*                             + sum(tsub $(ord(tsub)<ord(t)),a_d(tsub) * p_a(tsub)
*                             * (1-psi)**(ord(t) - ord(tsub)-1))))
*
********************************************************************************
* ABSCHREIBUNGEN          PSI_BIG(t)
* ---------------         (a_check("1")
*                         * p_a(t) * (1-psi)**(ord(t)-1)
```

```
*                         + sum(tsub $(ord(tsub)<ord(t)),a_d(tsub) * p_a(tsub)
*                         * (1-psi)**(ord(t) - ord(tsub)-1)))
*                         *  psi
*****************************************************************************
* Varianz von q(i)
* ----------------        sum(
*                         k $(ord(k)<Konk+1),
*                         (Vpj(k) * (p_q(t) * Epj(k))**(1/(eta("1",t)-1))
*                         eta("2",t) *
*                         eta("1",t))/
*                         ((sum(ksub $(ord(ksub)<Konk),Epj(ksub)**
*                         ((eta("1",t)/(eta("1",t)-1))))
*                         + p_q(t))**2 * (1-eta("1",t)))
*                         )
*****************************************************************************
* erwarteter Gewinn
* -----------------
*                         r_hat(t) =
*                         (v_hat(t) - ((a_check("1")
*                         * p_a(t) *(1-psi)**(ord(t)-1)
*                         + sum(tsub $(ord(tsub)<ord(t)),a_d(tsub) * p_a(tsub)
*                         * (1-psi)**(ord(t) - ord(tsub)-1))))
*                         *  psi)
*
*****************************************************************************


FKT_a_check_in("1")..     a_check("1") =e=
                          a_check_in;

FKT_a_check(t)..          a_check(t) $(ord(t) > 1) =e=
                          a_check(t-1) * (1-psi) + a_d(t-1);

FKT_b_check_in("1")..     b_check("1") =e=
                          b_check_in;

FKT_b_check(t)..          b_check(t) $(ord(t) > 1) =e=
                          b_check(t-1) + b_d(t-1);


FKT_q_hat_d(t)..q_hat_d(t) =e=
                           (p_q(t)**beta1 * Y(t)) /
                           (sum_ew_n  + p_q(t)**beta2);

*Cons_e_d(t).. e_d(t)  =e=  kappa * q_s(t) - e_check(t);



FKT_o(t)..        o(t) =e=
                          omegafix(t) * a_check(t) +(ep_check(t) +  e_d(t)  * p_e(t)
                          ) + w(t)
                          * (log(a_check(t)*rho(t))*log(a_check(t)*rho(t))
                          + lambda(t) *  q_s(t));

FKT_v_hat(t)..    v_hat(t) =e=
                          p_q(t) * q_s(t) - o(t)
                          + b_check(t) * iota_b(t);

FKT_gamma_q_tilde_d(t)..   gamma_q_tilde(t) =e=
                           Errorf(-((1- xi - tau_r(t)) * (q_hat_d(t) * p_q(t) -
                                  o(t) + b_check(t) * iota_b(t))
                                  - a_d(t) * p_a(t)  - b_d(t)
                                  + (Xi + tau_r(t)) *
                                  (
                                  (k_check_in* (1-psi)**(ord(t)-1)
                                  + sum(tsub $(ord(tsub)<ord(t)),a_d(tsub) * p_a(tsub)
                                  * (1-psi)**(ord(t) - ord(tsub)-1)))
                                  *  psi ))
                          /sqrt(
                           (a_d(t))**2 *  Var_p_a(t) + ((1- xi - tau_r(t)) *p_q(t) )**2  *
                           sum(k  $(ord(k) < Konk+1) ,
                              ((Epj(k)**beta1 * p_q(t)**beta1 * Y(t) * eta)
                              /
                              ((sum_V_n + p_q(t)**beta2)**2 * (1-eta)))**2
                              * Vpj(k)
                              )
                           )
                          )       ;
```

```
FKT_R_hat_Big.. R_hat_big =e= sum(t$(ord(t)<5),
                        (v_hat(t) -
                        ((k_check_in*(1-psi)**(ord(t)-1)
                        + sum(tsub $(ord(tsub)<ord(t)),a_d(tsub) * p_a(tsub)
                        * (1-psi)**(ord(t) - ord(tsub)-1))))
                        *  psi)  * (1-nu)**(ord(t)-1))  ;


*******************************************************************************
*                              NEBENBEDINGUNGEN
*
*******************************************************************************

*******************************************************************************
*                                    - 1 -
*
*   Produktion-/Angebotsmenge <= Erwartungsnachfrage
*
*   ----------------------------------------------
*

cons_rel_q(t)..         q_s(t) =l= q_hat_d(t);

*******************************************************************************
*                                    - 2 -
*
*   Produktion-/Angebotsmenge <= Produktionspotential
*
*   -----------------------------------------------
*

cons_rel_Ppot(t)..      q_s(t) =l= a_check(t) *rho(t);

*******************************************************************************
*                                    - 3 -
*
*   Vererbungsfunktion
*
*   -----------------

cons_Bequest(t)$(ord(t)=T_gross + 1)..  a_check(t) * rho(t) =g=
                        1/T_gross *sum(tsub,q_s(tsub));
*******************************************************************************
*                                    - 4 -
*
*   Probabilistische Nebenbedingung
*
*   ------------------------------
*

cons_prob_NB(tsub)..    gamma_q_tilde(tsub) =l= gamma_tilde ;

*******************************************************************************
*                                    - 5 -
*
*  Hilfsnebenbedingung wegen Problmen des Solvers
*

cons_u(t)..             q_s(t) * p_q(t) =g= 0;


*******************************************************************************
*                                    - 6 -
*
*   Bondbestand >= 0
*
*   ---------------
*

cons_B_check(t)..       b_check(t) =g= 0 ;

*******************************************************************************
*                                    - 7 -
*
*   Finanzrestriktion
*
*   ----------------
*


cons_finanz(t)..        v_hat(t) =e=
                        a_d(t) * p_a(t) + b_d(t) +
```

```
                         (tau_r(t) + xi) *  (v_hat(t) -
                          (k_check_in * (1-psi)**(ord(t)-1)
                         + sum(tsub $(ord(tsub)<ord(t)),a_d(tsub) * p_a(tsub)
                         * (1-psi)**(ord(t) - ord(tsub)-1)))
                         *  psi );

*******************************************************************************
*                                     - 8  -
*
*   Hilfsnebenbedingung , stellt  sicher, dass bei vorhandenen Bestaqbd
        an Vorprodukten e_check                    *
*     die Nachfrage nach weiteren Vorprodukten e_d nicht die notwendige Menge
        kappa * q_s uebersteigt              *
*   ----------------
*

Cons_e_d(t).. e_d(t)  =g=  kappa * q_s(t) - e_check(t);

*******************************************************************************
*                                Bounds
*
*******************************************************************************
q_s.lo(t)        =  1;
p_q.lo(t)        = .0001;
a_d.lo(t)        = .0001;
q_hat_d.lo(t)    = .0001;
a_check.lo(t)    = 0.001;

*******************************************************************************
*                                Startwerte
*
*******************************************************************************

$include kontrollV_start.txt
* Einlesen der Startwerte der Kontrollvariablen

b_d.l(t) = 0;
e_d.l(t) = q_s.l(t) * kappa ;

*******************************************************************************
*                                Skalierung
*
*******************************************************************************
a_check.scale(t) =1e-2;
p_q.scale(t) =1e-3;
q_s.scale(t) =1e-3;
*gamma_q_tilde.scale(t) = 1e-15;
*FKT_gamma_q_tilde_d.scale(t) = 1e-15;



*******************************************************************************
*                                Initials
*
*******************************************************************************



a_check.l("1")  = a_check_in;

b_check.l("1")  = b_check_in;

loop(t,a_check.l(t+1)$(ord(t)<5) =
        a_check.l(t) * (1 - psi)  + a_d.l(t));

loop(t,b_check.l(t+1)$(ord(t)<5) =
        b_check.l(t)  + b_d.l(t));

loop(t,
        q_hat_d.l(t) =
                          (p_q.l(t)**beta1 * Y(t)) /
                          (sum_ew_n  + p_q.l(t)**beta2);
        ;


        o.l(t)           =
                         omegafix(t) * a_check.l(t) +(ep_check(t) +  e_d.l(t)  * p_e(t)
                ) + w(t)
                * (log(a_check.l(t)*rho(t))*log(a_check.l(t)*rho(t))
                + lambda(t) *   q_s.l(t));

        v_hat.l("1")   =
                 (p_q.l("1") * q_s.l("1")  - o.l("1")
```

```
                + b_check_in *iota_b("1")) ;

        v_hat.l(t)$(ord(t)>1)    =
                (p_q.l(t) * q_s.l(t) - o.l(t)
                        + b_check.l(t) * iota_b(t));


                ;
        gamma_q_tilde.l(t) = 1e-20;


        );

R_hat_big.l               = sum(t$(ord(t)<5),
                        (v_hat.l(t) -
                        ((k_check_in*(1-psi)**(ord(t)-1)
                        + sum(tsub $(ord(tsub)<ord(t)),a_d.l(tsub) * p_a(tsub)
                        * (1-psi)**(ord(t) - ord(tsub)-1))))
                        *  psi)  * (1-nu)**(ord(t)-1))  ;




*******************************************************************************
*         Festlegung von Parametern d. Optimierung                            *
*******************************************************************************
models Produktion_1_0 /all/;
Produktion_1_0.tolinfeas = 1e-2;
Produktion_1_0.tolinfrep = 1e-2;
Produktion_1_0.tolproj = 1e-2;
Produktion_1_0.scaleopt = 1;
Produktion_1_0.optfile=1;
option ITERLIM = 3000;

*******************************************************************************
*         Aufruf der Optimeirung                                              *
*******************************************************************************
while(count lt mn and state gt 2, count = count + 1;
     solve Produktion_1_0 using dnlp maximizing R_hat_Big;
     state =Produktion_1_0.modelstat;
     );

*******************************************************************************
*         Nachtraegliche Berechung                                            *
*******************************************************************************

loop(t,
*b_check.l(t)    = b_check_in  + sum(tsub $(ord(tsub)<ord(t)),
*                       v_hat.l(tsub) - a_d.l(tsub) * p_a(tsub));
l_d.l(t)         = (log(a_check.l(t)*rho(t))*log(a_check.l(t)*rho(t))
                        + lambda(t) *  q_s.l(t));
j.l(t)           = rho(t) * a_check.l(t);
k_check.l(t)     = k_check_in* (1-psi)**(ord(t)-1)
                        + sum(tsub $(ord(tsub)<ord(t)),a_d.l(tsub) * p_a(tsub)
                        * (1-psi)**(ord(t) - ord(tsub)-1))
                        ;
u_hat.l(t)       = p_q.l(t) * q_s.l(t);
cl.l(t)                 = l_d.l(t) * w(t);
ca.l(t)          = omegafix(t) * a_check.l(t) + p_q.l(t) * q_s.l(t);
afa.l(t)                = psi * k_check.l(t);
tax.l(t)                = tau_r(t) * ((p_q.l(t) * q_s.l(t) - o.l(t)
                        + b_check.l(t) * iota_b(t)) - afa.l(t));

Varq.l(t)        = sum(k  $(ord(k) < Konk+1) ,
                            ((Epj(k)**beta1 * p_q.l(t)**beta1 * Y(t) * eta)
                            /
                            ((sum_V_n + p_q.l(t)**beta2)**2 * (1-eta)))**2
                            * Vpj(k)
                            );

q_tilde.l(t)      =0;

* Erwarungswert der prob NB
erwpbnb.l(t)     = (1-  xi - tau_r(t)) * (q_hat_d.l(t) * p_q.l(t) - o.l(t)
                        + b_check.l(t) * iota_b(t))
                        - a_d.l(t) * p_a(t)  - b_d.l(t)
                        + (Xi + tau_r(t)) *
                       (
                       (k_check_in * (1-psi)**(ord(t)-1)
                        + sum(tsub $(ord(tsub)<ord(t)),a_d.l(tsub) * p_a(tsub)
                        * (1-psi)**(ord(t) - ord(tsub)-1)))
                        *  psi )
                               ;
```

```
********************************************************************************
*        Ausschreiben der Ergebnisse                                           *
********************************************************************************

file output text /outputProducerq.dat/;

output.nd = 8;

put output;
put 'ModellStatus';
put /;
put Produktion_1_0.modelstat/;
put /;
put 'Optimaler Wert:',R_hat_big.l/;
put 'a_check - Kapitalgüterbestand';
put  /;
loop(t,put t.tl , a_check.l(t)/);
put '-------------------------------------------';
put /;

put 'b_checki - Bondbestand';
put  /;
loop(t,put t.tl , b_check.l(t)/);
put '-------------------------------------------';
put /;
put 'Kapitalgueterwert';
put /;
loop(tsub,put tsub.tl , k_check.l(tsub)/);
put '-------------------------------------------';
put /;
put 'Afa';
put /;
loop(tsub,put tsub.tl , afa.l(tsub)/);
put '-------------------------------------------';
put /;
put 'Umsatz';
put /;
loop(tsub,put tsub.tl , u_hat.l(tsub)/);
put '-------------------------------------------';
put /;
put 'Cash Flow';
put /;
loop(tsub,put tsub.tl , v_hat.l(tsub)/);
put '-------------------------------------------';


put /;
put 'Steuern';
put /;
loop(tsub,put tsub.tl , tax.l(tsub)/);

put /;
put '-------------------------------------------';
put /;
put 'Arbeitseinsatz';
put /;
loop(tsub,put tsub.tl , l_d.l(tsub)/);
put '-------------------------------------------';
put /;
put 'Arbeitskosten';
put /;
loop(tsub,put tsub.tl , cl.l(tsub)/);
put /;
put 'Herstellungskosten';
put /;
loop(tsub,put tsub.tl , ca.l(tsub)/);
put '-------------------------------------------';
put /;
put 'o';
put /;
loop(tsub,put tsub.tl , o.l(tsub)/);
put '-------------------------------------------';
put /;
put 'q_hat_d - erw. Güternachfrage';
put /;
loop(tsub,put tsub.tl , q_hat_d.l(tsub)/);
put '-------------------------------------------';
put /;
put 'q_s - Güterangebot';
put /;
loop(tsub,put tsub.tl , q_s.l(tsub)/);
put '-------------------------------------------';
```

```
put /;
put 'p_q - GüterPreis';
put /;
loop(tsub,put tsub.tl , p_q.l(tsub)/);
put '-----------------------------------------';
put /;
put 'a_d - Kapitalgüternachfrage';
put /;
loop(tsub,put tsub.tl , a_d.l(tsub)/);
put '-----------------------------------------';
put /;
put 'b_d - Bondnachfrage';
put /;
loop(tsub,put tsub.tl , b_d.l(tsub)/);
put '-----------------------------------------';
put /;
put 'e_d - Vorpnachfrage';
put /;
loop(tsub,put tsub.tl ,e_d.l(tsub)/);
put '-----------------------------------------';
put /;
put 'gamma_q_tilde - erw. WHK für Unterschreiten des Mindest CF';
put /;
loop(tsub,put tsub.tl , gamma_q_tilde.l(tsub)/);
put /;
put /;
put 'q_tilde -';
put /;
loop(tsub,put tsub.tl , q_tilde.l(tsub)/);
put /;
put /;
put 'test 1- Erwartungswer prob NB';
put /;
put /;
loop(tsub,put tsub.tl , erwpbnb.l(tsub)/);
put /;
put 'varpbnb - Nachtraeglich VARIANZ Nb';
put /;
loop(tsub,put tsub.tl , varpbnb.l(tsub)/);
put /;
put 'test - Nachtraeglich Whk porgb Nb';
put /;
loop(tsub,put tsub.tl , test3.l(tsub)/);
put /;
put /;
loop(tsub,put tsub.tl , test4.l(tsub)/);
put /;
loop(tsub,put tsub.tl , test5.l(tsub)/);
put /;
put /;
put 'gamma_tilde', gamma_tilde;
put '-----------------------------------------';
putclose output;

********************************************************************************
*        Ausschreiben der Ergebnisse  fuer Weiterverarbeitung
*                in Python
********************************************************************************

file output1 text /ergebnisse_gams.txt/;

output1.nd = 4;
output1.nw = 25;

put output1;
put 'opt_value   0';
put /;
put R_hat_big.l  ;
put /;
put 'ModellStatus    1 ';
put /;
put Produktion_1_0.modelstat/;
put 'q_s             2';
put /;
loop(tsub,put q_s.l(tsub)/);
put 'p_q             3';
put /;
loop(tsub,put p_q.l(tsub)/);
put 'a_d             4';
put /;
loop(tsub,put a_d.l(tsub)/);
put 'b_d             5';
put /;
```

```
loop(tsub,put b_d.l(tsub)/);
put 'a_check         6';
put /;
loop(tsub, put a_check.l(tsub)/);
put 'k_check         7';
put /;
loop(tsub,put k_check.l(tsub)/);
put 'b_check         8';
put /;
loop(tsub,put b_check.l(tsub)/);
put 'j               9';
put /;
loop(tsub,put j.l(tsub)/);
put 'u_hat          10';
put /;
loop(tsub,put u_hat.l(tsub)/);
put 'v              5';
put /;
loop(tsub,put v_hat.l(tsub)/);
put 'l_d           12';
put /;
loop(tsub,put l_d.l(tsub)/);
put 'e_check            13 ';
put /;
loop(tsub,put e_check(tsub)/);
put 'pe_check                14 ';
put /;
loop(tsub,put ep_check(tsub)/);
put 'o             15';
put /;
loop(tsub,put o.l(tsub)/);
put 'gamma         16';
put /;
loop(tsub,put gamma_q_tilde.l(tsub)/);
put 'q_hat_d       17';
put /;
loop(tsub,put q_hat_d.l(tsub)/);
put 'e            18';
put /;
loop(tsub,put e_d.l(tsub)/);

put 'Varq            19';
put /;
loop(tsub,put Varq.l(tsub)/);



put 'erwpbnb            20';
put /;
loop(tsub,put erwpbnb.l(tsub)/);


put 'erwpbnb            21';
put /;
loop(tsub,put varpbnb.l(tsub)/);

putclose output1;



putclose output1;


file output2 text /param_gams.txt/;
output2.nd = 4;
output2.nw = 25;
put output2;

put a_check_in;
put /;
put k_check_in
put /;
put b_check_in
put /;

put nu
put /;

put psi
put /;
```

```
put tau_r("1")
put /;

put p_e("1")
put /;

put kappa
put /;

put Xi
put /;

put Var_p_a("1")
put /;

put Konk
put/;

put eta
put/;




put 'Y';
put /;
loop(tsub,put Y(tsub)/);
put 'pa';
put /;
loop(tsub,put p_a(tsub)/);
put 'iota';
put /;
loop(tsub,put iota_b(tsub)/);
put 'lambda';
put /;
loop(tsub,put lambda(tsub)/);
put 'omegafix';
put /;
loop(tsub,put omegafix(tsub)/);
put 'w';
put /;
loop(tsub,put w(tsub)/);
put 'rho';
put /;
loop(tsub,put rho(tsub)/);

put 'Epj';
put /;
loop(k $(ord(k)<Konk+1),put Epj(k)/);


put 'Vpj';
put /;
loop(k $(ord(k)<Konk+1),put Vpj(k)/);


putclose output2;
```

Literatur

Arrow, K. J. (1953). Le Rôle des Valeurs Boursières pour la Répartition la Meilleure des Risques. *Econométrie 40*, S. 41–47.

Arrow, K. J. (1964). The Role of Securities in the Optimal Allocation of Risk-bearing. *Review of Economic Studies 31*(2), S. 91–96.

Arrow, K. J. und G. Debreu (1954). Existence of an equilibrium for a Competitive Economy. *Econometrica 22*(3), S. 265–290.

Aumann, R. J. (1997). Rationality and Bounded Rationality. *Games and Economic Behavior 21*, S. 2–14.

Axtell, R. L. (2006). Mulit-Agent Systems Macro: A Prospectum. In: D. Colander (Hrsg.), *Post Walrasian Macroeconomics*, S. 203–220. Cambridge, New York: Cambridge University Press.

Batra, R. N. und A. Ullah (1974). Competitive Firm and the Theory of Input Demand under Price Uncertainty. *Journal of Political Economy 82*(3), S. 537–48. TY - JOUR.

Benchmark, C. (2005). http://www.mat.univie.ac.at/ neum/glopt/coconut/Benchmark/Benchmark.html.

Blackorby, C. und W. Schworm (1988). The Existence of Input and Output Aggregates in Aggregate Production Functions. *Econometrica 56*(3), S. 613–43. TY - JOUR.

Blackorby, C. und A. F. Shorrbocks (Hrsg.) (1995). *Separability and Aggregation, Collected Works of W.M. Gorman*, Volume 1. Oxford: Clarendon Press.

Bloech, J., R. Bogaschewsky, U. Götz und F. Roland (1992). *Einführung in die Produktion*. Heidelberg: Pysica-Verlag.

Blundell, R. und J.-M. Robin (2000). Latent Separability: Grouping Goods Without Weak Separability. *Econometrica 68*(1), S. 53–84.

Bénassy, J. P. (1982). *The Ecomomics of Market Disequilibrium*. New York London: Academic Press.

Bénassy, J. P. (2002). *The Macroeconomics of Imperfect Competition and Nonclearing Markets*. Cambridge: MIT Press.

Border, K. C. (1985). *Fixes Point Theorems with Applications to Economic and Game Theory*. Cambridge: Cambridge Universiy Press.

Brock, W. A. und S. N. Durlauf (2006). Macroeconomics and Model Uncertainty. In: D. Colander (Hrsg.), *Post Walrasian Macroeconomics*, S. 116–134. Cambridge, New York: Cambridge University Press.

Buergin, R. (1999). *Handeln unter Unischerheit und Risiko: Eine Zusammenschau verschiedener Zugänge und disziplitärer Forschungslinien*. Dissertation, Albert-Ludwigs-Universität Freiburg.

Candeal, J. C. und E. Indurain (1993). On the strukture of Homothetic Functions. *Aequationes mathematicae 45*, S. 207–218.

Casella, G. und R. L. Berger (2002). *Statistical Inference*. Duxbury Advanced Series. Duxbury.

Chambers, R. G. und J. Quiggin (2000). *Uncertainty, Production, Choice, and Agency*. New York: Cambridge University Press.

Cherny, V. (1985). A thermodynamical approach to the travelling salesman problem: an efficient simulation algorithm. *Journal of Optimization Theory and Applications 54*, S. 41–51.

Conlisk, J. (1996). Why Bounded Rationality? *Journal of Economic Literature XXXIV*, S. 669–700.

Cyert, R. M. und M. H. DeGroot (1974). Rational Expectations and Bayesian Analysis. *The Journal of Political Economy 82*(3), S. 521–536.

Davison, A. C. und H. D.V. (1997). *Bootsrap Methods and their Application*. Cambridge Series in Statistical and Probabilistic Mathematics. New York u.a.: Cambridge University Press.

Debreu, G. (1954). Valuation Equilibrium and pareto Optimum. *Proceedings of the National Academy of Sciences 40*(7), S. 588–592.

Debreu, G. (1959a). *Theory of Value*. New Haven London: Yale University Press.

Debreu, G. (1959b). *Theory of Value*. New Haven London: Yale University Press.

Diggelmann, P. B. (1999). *Value at Risk Kritische Betrachtung des Konzeps*. Zürich: Versus Verlag AG.

Dixit, A. K. (1990). *Optimization in Economic Theory*. Oxford: Oxford University Press.

Dixit, A. K. und J. E. Stiglitz (1977). Monopolistic Competition and Optimum Product Diversity. *American Economic Review 67*(3), S. 297–308. TY - JOUR.

Doukham, P. (2003). *Theory and Applications of Long-Range Dependence*. Boston Basel Berlin: Birkhäuser.

Down, K. (1998). *Beyond Value At Risk*. Chicester u.a.: Wiley.

Dreze, J. H. (1985). Uncertainty and the Firm in General Equilibrium Theory. *Economic Journal 95*(380), S. 1–20.

Felderer, B. und S. Homburger (2005). *Makroäkonomik und neue Makroökonomik*, Volume 9. Berlin Heidelberg: Springer.

Felipe, J. und F. M. Fisher (2003). Aggregations in Production Functions: What Applied Economists Schould Know. *Metroeconomica 54*(2-3), S. 208–262.

Fisher, F. M. (1965). Embodied Technical Change and the Existence of an Aggregate Capital Stock. *Review of Economic Studies 32*, S. 393–388. TY - RPRT.

Fisher, F. M. (1969). The Existence of Aggregate Production Functions. *Econometrica 37*(4), S. 553–77. TY - JOUR.

Fisher, F. M. (1982). Aggregate Production Functions Revisited: The Mobility of Capital and the Rigidity of Thought. *Review of Economic Studies, 44*, S. 615–626.

Fisher, F. M. (1992). Introduction. In: J. Monz (Hrsg.), *Aggregation: Aggregate Production Functions and related Topics*, S. ix – xxiv. New York: Harvester Wheatsheaf.

Fisher, I. (1911). *The Purchasing Power of Money* ((latest edition, A.M. Kelly, New York 1963) Aufl.). New York: Macimillan.

GAMS (2003). The Solver Manual.

Gellma, A., J. B. Carlin, H. S. Stern und D. B. Rubin (1995). *Baysian Data Analysis*. Texts in Statistical Science. London: Chapman & Hall.

Gorman, W. M. (1953). Klein Aggregates and Conventional Index Numbers. *in C. Blackorby and A.F. Shorrocks*.

Gorman, W. M. (1965). Capital Aggregation in Vintage Models. In: *First Congress of the Econometric Society*, Rome.

Gorman, W. M. (1968). The Structure of Utility Functions. *Review of Economic Studies 35*, S. 367–390.

Grabner, M. (2002). Representative Agents and the Microfoundations of Macroeconomics. Workingpaper, University of California.

Götz, G. (1995). *Technischer Fortschritt bei monopolistischem Wettbewert*, Volume 467 of *Volkswirtschaftliche Schriften*. Berlin: Duncker und Humbolt.

Gutenberg, E. (1951). *Grundlagen der Betriebswirtschaftslehre* (1 Aufl.), Volume 1. Springer-Verlag Berlin.

Gutenberg, E. (1983). *Grundlagen der Betriebswirtschaftslehre* (3 Aufl.), Volume 1. Springer-Verlag Berlin.

Hager, P. (2004). *Cash Flow at Risk und Value at Risk*. Competence Center Finanz- und Bankmanagement. Frankfurt a.M.: Bankakademie Verlag GmbH.

Hartley, J. E. (1996). Retrospectives: The Origins of the Representative Agent. *Journal of Economic Perspectives 10*(2), S. 169–77. TY - JOUR.

Hennig, C. (1999). Was ist Wahrscheinlichkeit? : Antworten, konstruktivistisch betrachtet.

Henrion, R. (2004). Optimization Problems with Probabilistic Constraints.

Henrion, R. (2005). Optimization Problems with Linear Chance Constraints-Structure, Numerics and Applications. In: *75. Sitzung der GOR Arbeitsgruppe: Praxis der mathematischen Optimierung - Optimization under Uncertainty*, Bad Honnef.

Hulten, C. R. (1990). *The Mesurement of Capital*, Volume 54 of *Studies in Income and Welth*. Chicago: The University of Chicago Press.

Intriligator, M. D. (2002). *Mathematical Optimization and Economic Theory*. Classics In Applied Mathematics. Los Angeles: SIAM.

Jaeger, C. C., O. Renn, E. A. Rosa und T. Webler (2001). *Risk, Uncertainty, and Rational Action*. London: Earthscan Publications Ltd.

Kirby, M. J. L. (1967). The Current State of Cance-Constrained Programming. Systems research memorandum no. 181, Northwestern University.

Klein, L. R. (1946a). Macroeconomics and the Theory of Rational Behavior. *Econometrica 14*(2), S. 93–108.

Klein, L. R. (1946b). Remarks on the Theorys of Aggregation. *Econometrica 14*(4), S. 303311.

Knight, F. H. (1921). *Risk, Uncertainty, and Profit*. Bosten New York: Houghton Mifflin.

Küpper, H.-U. (1976). Produktionsfunktionen. *WiSt 5*.

Krelle, W. (1969). *Produktionstheorie*. Tübingen: J.C.B. Mohr.

Kurz, H. D. und N. Salvadori (1994). *Theory of production: a long-periode analysis*. Cambridge University Press.

Lettau, M. und H. Uhlig (1999). Rules of Thumb versus Dynamic Programmin. *The American Economic Review 89*(1).

Liu, B. (2002). *Theory and Practice of Uncertain Programming*. Heidelberg: Pysica-Verlag.

Ljungqvist, L. und T. J. Sargent (2004). *Recursive Macroeconomic Theory*. Cambridge: MIT Press.

Loehle, C. (2006). Global Optimization 5.2, UserGuide.

Mak, K.-t. (1987). Separability and the Existence of Aggregtes. In: W. Eichhorn (Hrsg.), *Mesurement in Economics*. Heidelberg: Pysica-Verlag.

Mas Collel, A., M. D. Whinston und J. R. Green (1995). *Microeconomic Theory*. New York: Oxford University Press.

May, K. (1946). The Aggregation Problem for a One-Industrie Model. *Economietrica 14*(4).

May, K. (1947). Technological Change and Aggregation. *Economietrica 15*(1), S. 51–63.

Mises, v. (1951). *Wahrscheinlichkeit, Statistik und Wahrheit* (3 Aufl.). Wien: Springer.

Morishima, M. (1961). A Historical Note on Professor Sono's Theory of Seperability. *International Economic Review 2*(3), S. 272–275.

Muth, J. F. (1961). Rational Expectations and the Theory of Price Movements. *Econometrica 29*(3), S. 315–335.

Nataf, A. (1948). Sur la Possibilité de Construction de Cerain Macromodéles. *Econometrica 16*, S. 232–244.

Parkin, M. (1987). Adaptive Expectations. In: M. M. N. P. Eatwell, J. (Hrsg.), *The New Palgrave a Dictionary of Economics*, Volume 4, S. 20 – 21. London and Basingstoke: The Macmillan Press Limited.

Pasinetti, L. L. (1977). *Lectures on the Theory of Production*. New York: Columbia University Press.

Pokropp, F. (1972a). *Aggregation von Produktionsfunktionen*. Berlin: Springer-Verlag.

Pokropp, F. (1972b). A Note on the Problem of Aggregation. *Review of Economic Studies 39*(2), S. 221–30. TY - JOUR.

Pu, S. S. (1946). A Note on Macroeconomics. *Econometrica 14*(4), S. 299–302.

Radner, R. (1982). Equilibrium under Uncertainty. In: I. M. D. Arrow, K. J. (Hrsg.), *Handbook of Mathematical Economics*, Volume II. Amsterdam: Elsevier.

Rothschild, K. W. (1981). *Einführung in die Ungleichgewichtstheorie*. Berlin: Springer-Verlag.

Russell, R. R., R. V. Breunig und C.-H. Chiu (1998). Aggregation and Econometric Analysis of Demand and Supply. In: Mar (Hrsg.), *Handbook of Applied Economic Statistics*, S. 177–235. New York: Marcel Dekker.

Sargent, T. J. (2007). *Rational Expectations*. The Library of Economics and Liberty. http://www.econlib.org/library/enc/RationalExpectations.html.

Sato, K. (1975). *Production Functions and Aggregation*. Amsterdam: North-Holland.

Savin, N. E. (1987). Rationa Expectations: Economic Implications. In: M. M. N. P. Eatwell, J. (Hrsg.), *The New Palgrave a Dictionary of Economics*, Volume 4, S. 76 – 79. London and Basingstoke: The Macmillan Press Limited.

Schohl, F. (1998, 1998///Feb). The Paradoxical Fate of the Representative Firm. Forschungsbericht, Friedrich-Schiller-Universität Jena, Wirtschaftswissenschaftliche Fakultät. TY - RPRT.

Schumann, J. (1992). *Grundzüge der mikroökonomischen Theorie* (6 Aufl.). Berlin Heidelberg: Springer-Verlag.

Schweitzer, M. und H.-U. Küpper (1974). *Produktions- und Kostenthorie*. Wiesbaden: Gabler.

Simon, H. A. (1987). Bounded Rationality. In: M. M. N. P. Eatwell, J. (Hrsg.), *The New Palgrave a Dictionary of Economics*, Volume 4, S. 266–267. London and Basingstoke: The Macmillan Press Limited.

Solow, R. M. (1964). Capital, Labor and Income in Manufacturing. In: *The Behavior of Income Shares*, Volume 27 of *Sturdies in Income and Wealth, National Bureau of Economic Research*. Princton: Princton University Press.

Sonntag, S. (2004). *Die Gutenberg Produktionsfunktion*. Deutscher Universitäts-Verlag.

Sprumont, Y. (1991). The Division Problem with Single-Peaked Preferences: A Characterization of the Uniform Allocation Rule. *Econometrica 59*(2), S. 509–19. TY - JOUR.

Sraffa, P. (1976). *Warenproduktion mittels Waren*. Frankfurt am Main: Suhrkamp Verlag.

Steven, M. (1998). *Produktionstheorie*. Wiesbaden: Gabler.

Stöss, E. (2001). Deutsche Bundesbank's Corporate Balance Sheet Statistics and Areas of Application. In: *Schmollers Jahrbuch 121*, S. 131–137. Berlin: Dubnker & Humbolt.

Tesfatsion, L. (2006a). Agent-Based Computational Economics: A Constructive Approach to Economic Theory. In: J. K. L. Tesfatsion, L. (Hrsg.), *Handbook of Computional Economics*, Volume 2. Amsterdam: Elsevier, Noth Holland.

Tesfatsion, L. (2006b). Agent-Based Computational Modeling and Macroeconomics. In: D. Colander (Hrsg.), *Post Walrasian Macroeconomics*, S. 175–202. Cambridge, New York: Cambridge University Press.

Tesfatsion, L. (2006c). Introduction to Rational Expectations. *http://www.econ.iastate.edu/tesfatsi/reintro.pdf*.

Teusch, W. (1983). *Aufbau und Gewinnung SHEPHARDscher Produktionsfunktionen unter Berücksichtigung empirischer Aspekte*. Königstein /Ts.: Verlagsgruppe Athenäum, Hain, Hanstein.

Thah, H. A. (1992). *Operations Research: An Introduction*. New York: Macmillan Publishing Company.

van Daal, J. und A. H. Q. M. Merkies (1981). A Simple Proof of Nataf's Theorem on Consistent Aggregation. *Economic Letters 7*, S. 145–150.

van Daal, J. und A. H. Q. M. Merkies (1987). The Problem of Aggregation of Individual Economic Relations; Consistency and Representativity in a Historical Perspective. In: W. Eichhorn (Hrsg.), *Mesurement in Economics*. Heidelberg: Pysica-Verlag.

Varian, H. R. (1992). *Microeconomic Analysis* (2. Aufl.). New York, London: W. W. Norton and Company, Inc.

von Böventer, E. und G. Illing (1995). *Einführung in die Mikroökonomie*. München Wien: Oldenburg.

Williamson, J. und D. Cornfield (2001). Introduction: Bayesianism into the 21st Century. In: W. J. Cornfield, D. (Hrsg.), *Foundations of Bayesianism*, Applied Logic Series. Dordrecht Boston London: Kluwer Academic Publishers.

Zamagni, S. (1987). *Microeconomic Theory*. Hamshir: Gregg Revivals.

Sachverzeichnis