

Institut für Physik
Astroteilchenphysik

Anwendung des Mikrogravitationslinseneffekts zur Untersuchung astronomischer Objekte

Dissertation zur Erlangung des akademischen Grades „doctor
rerum naturalium“ (Dr. rer. nat.) in der
Wissenschaftsdisziplin Astrophysik

eingereicht an der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät der
Universität Potsdam

von
Andreas Helms
Potsdam, im April 2004

Abstract (englisch)

The study of microlensed astronomical objects can reveal information about the size and the structure of these objects.

In the first part of this thesis we analyze the spectra of three lensed quasars obtained with the Potsdam Multi Aperture Spectrophotometer (PMAS). The spectra of the quadrupole quasar HE 0435–1223 and the double quasar HE 0047–1756 show evidence for microlensing whereas in the double quasar UM 673 (Q 0142–100) no evidence for microlensing could be found.

By inverting the lightcurve of a microlensing caustic crossing event the one dimensional luminosity profile of the lensed source can be reconstructed. This is investigated in the second part of this thesis. The mathematical formulation of this problem leads to a Volterra integral equation of the first kind, whose solution is an ill-posed problem. For the solution we use a local regularization method which is better adapted to the causal structure of the Volterra integral equation compared to the so far used Tikhonov-Phillips regularization. Furthermore we show that this method is more robust on reconstructing small structures in the source profile. We also study the influence of irregular sampled data and gaps in the lightcurve on the result of the inversion.

Abstract (deutsch)

Die Untersuchung mikrogelinster astronomischer Objekte ermöglicht es, Informationen über die Größe und Struktur dieser Objekte zu erhalten.

Im ersten Teil dieser Arbeit werden die Spektren von drei gelinsten Quasaren, die mit dem Potsdamer Multi Aperture Spectrophotometer (PMAS) erhalten wurden, auf Anzeichen für Mikrolensing untersucht. In den Spektren des Vierfachquasars HE 0435–1223 und des Doppelquasars HE 0047–1756 konnten Hinweise für Mikrolensing gefunden werden, während der Doppelquasar UM 673 (Q 0142–100) keine Anzeichen für Mikrolensing zeigt.

Die Invertierung der Lichtkurve eines Mikrolensing-Kausik-Crossing-Ereignisses ermöglicht es, das eindimensionale Helligkeitsprofil der gelinsten Quelle zu rekonstruieren. Dies wird im zweiten Teil dieser Arbeit untersucht. Die mathematische Beschreibung dieser Aufgabe führt zu einer Volterra'schen Integralgleichung der ersten Art, deren Lösung ein schlecht gestelltes Problem ist. Zu ihrer Lösung wird in dieser Arbeit eine lokale Regularisierung angewendet, die an die kausale Struktur der Volterra'schen Gleichung besser angepasst ist als die bisher verwendete Tikhonov-Phillips-Regularisierung. Darüberhinaus zeigt sich, dass mit dieser Methode eine bessere Rekonstruktion kleinerer Strukturen in der Quelle möglich ist. Weiterhin wird die Anwendbarkeit der Regularisierungsmethode auf realistische Lichtkurven mit irregulärem Sampling bzw. größeren Lücken in den Datenpunkten untersucht.

Inhaltsverzeichnis

1	Einführung	1
2	Der kosmologische Hintergrund	3
2.1	Rotverschiebung, Expansion und CMB	3
2.2	Dynamik des Universums	4
2.3	Entfernungen im Universum	7
3	Quasare	11
3.1	Bezeichnungen und Eigenschaften	11
3.2	Akkretionsscheiben	14
3.2.1	Scheibenmodelle	14
4	Gravitationslinsen	17
4.1	Historisches	17
4.2	Die Grundlagen des Gravitationslinseneffekts	18
4.3	Kritische Kurven und Kaustiken	23
4.4	Mehrfachquasare	27
4.5	Mikrolensing bei Quasaren	28
4.6	Stellares Mikrolensing	29
4.7	Kaustik-Crossing	30
5	Mikrolensing in Quasarspektren	35
5.1	Mikrolensing und Quasarspektren	35
5.2	Das PMAS-Instrument	37
5.3	Extraktion der Spektren	38
5.4	Analyse der Spektren	40
5.5	HE 0435–1223	41
5.6	UM 673 (Q0142–100)	44
5.7	HE 0047–1756	49
5.8	Zusammenfassung der Ergebnisse	51
6	Inverse und schlecht gestellte Probleme	53
6.1	Inverse Probleme	53
6.2	Schlecht gestellte Probleme	54
6.3	Integralgleichungen	56
6.3.1	Riemann-Lebesgue-Lemma	58

6.3.2	Die Abel'sche Integralgleichung	58
6.4	Klassifizierung schlecht gestellter Probleme	59
6.4.1	Diskretisierung der Integralgleichung	59
6.4.2	Singulärwertzerlegung und Moore-Penrose-Inverse	61
6.5	Stabilisierung schlecht gestellter Probleme	64
6.5.1	Tikhonov-Phillips-Regularisierung	65
6.5.2	Wichtung der Messfehler	66
6.5.3	Lösungsverfahren	68
6.5.4	Tikhonov-Phillips-Regularisierung mit Nichtnegativitätsbedingung	68
6.5.5	Weitere Regularisierungsverfahren	69
	Maximum-Entropie-Verfahren	70
	Abgeschnittene Singulärwertzerlegung	70
	Iterative Verfahren	70
6.6	Wahl des Regularisierungsparameters	70
6.6.1	Diskrepanzprinzip	72
6.6.2	Generalized Cross Validation	73
6.6.3	L-Kurven-Methode	74
6.7	Lokale Regularisierung	74
6.7.1	Zerlegung des Volterra-Operators	78
6.7.2	Regularisierung des sequentiellen Verfahrens	79
6.7.3	Bestimmung des Regularisationsparameters bei der lokalen Regularisierung	80
7	Die Rekonstruktion des Quellprofils	81
7.1	Problemstellung	81
7.1.1	Profilbestimmung mit Regularisierungsverfahren	81
7.1.2	Profilbestimmung durch Modellfitting	82
7.2	Zielsetzung	83
7.3	Voraussetzungen für die Anwendung der Rekonstruktionsverfahren	84
7.4	Die Simulationen	84
7.4.1	Erzeugung der Lichtkurven	84
7.4.2	Rekonstruktionsfehler	85
7.5	Einfluss der Quellgröße auf das rekonstruierte Profil	85
7.6	Lichtkurven mit regelmäßig verteilten Messwerten	90
7.7	Lichtkurven mit unregelmäßig verteilten Messwerten	99
7.7.1	Kleinere Abweichungen vom regelmäßigen Sampling	99
7.7.2	Größere Lücken in der Lichtkurve	100
7.8	Rekonstruktion kleiner Strukturen im Quellprofil	114
7.8.1	Strukturen bei Akkretionsscheiben	114
7.8.2	Sternenflecken in Sternennatmosphären	119
7.9	Anwendung auf das OGLE-2002-BUL-69-Ereignis	129
7.10	Zusammenfassung	132
8	Zusammenfassung und Ausblick	135

9 Anhang	137
A.1 Diskretisierung des Profils	137
A.2 Algorithmus für die lokale Regularisierung	137
Literaturverzeichnis	142
Danksagung	153

1 Einführung

Seit der Entdeckung des ersten Gravitationslinsensystems, einem gelinsten Quasar, hat sich das Forschungsgebiet der Gravitationslinsen zu einem wichtigen Zweig innerhalb der Astrophysik entwickelt. Neben der Untersuchung des eigentlichen Effekts, die Ablenkung von Lichtstrahlen an einer Masse, steht immer mehr seine Anwendung im Vordergrund. Mit Hilfe des Gravitationslinseneffekts ist es möglich, Informationen über astrophysikalische Objekte zu erhalten, die mit anderen Methoden nicht zu erhalten sind. So kann mit ihm die Massenverteilung von Galaxien und Galaxienhaufen untersucht werden und daraus auf den Anteil der dunklen Materie im Universum geschlossen werden, eine wichtige Größe für den Aufbau und der Entwicklung des Universums. Auch ist es möglich, mit ihm aus dem Laufzeitunterschied eines Linsensystems die Hubble-Konstante zu bestimmen.

Der Gravitationslinseneffekt dient aber nicht nur dazu, Information über extragalaktische Objekte und über das Universum im Ganzen zu erhalten, sondern auch am anderen Ende der astronomischen Größenskala wird er eingesetzt, beispielsweise bei der Suche nach extrasolaren Planeten. Er ermöglicht es, Planeten zu entdecken, die mit anderen Methoden nicht zu finden sind.

Auch in dieser Arbeit werden wir uns mit einer Anwendung des Gravitationslinseneffekts beschäftigen: dem Mikrogravitationslinseneffekt (Microlensing) zur Untersuchung astrophysikalischer Objekte:

Wir werden die Spektren von drei gelinsten Quasarsystemen, dem Vierfachquasar HE 0435–1223 und den Doppelquasaren UM 673 und HE 0047–1756, untersuchen, um festzustellen, ob es in diesen Systemen Anzeichen für Mikrolensing gibt.

Anschließend befassen wir uns mit der Aufgabe, aus beobachteten Mikrolensing-Lichtkurven das Helligkeitsprofil zu rekonstruieren. Dafür sind aber, wie wir sehen werden, spezielle mathematische Verfahren nötig, die Regularisierungsverfahren. Wie werden für Mikrolensing-Lichtkurven ein neues Verfahren anwenden, die lokale Regularisierung, und sie mit dem bisher verwendeten, der Tikhonov-Phillips-Regularisierung, vergleichen, um festzustellen, welche Methode hierfür besser geeignet ist. Dabei werden wir auch untersuchen, welche Anforderungen an die Lichtkurven zu stellen sind, um mit ihnen eine zuverlässige Rekonstruktion des Profils zu ermöglichen.

2 Der kosmologische Hintergrund

Da es bei den astrophysikalischen Objekten, die wir mit Hilfe des Gravitationslinseneffekts untersuchen wollen, zum Teil um extragalaktische Quellen handelt, ist es notwendig, vorher einige Begriffe und Ideen der Kosmologie vorzustellen. Wichtig ist dabei vor allem die Definition der Winkeldurchmesserdistanz (*angular diameter distance*).

2.1 Rotverschiebung, Expansion und CMB

Eine der wichtigsten Grundlagen für das heutige Standardmodell des Weltalls ist die von Hubble [Hub29] entdeckte Expansion des Weltalls. Er stellte fest, dass die Spektren entfernter Galaxien rotverschoben sind und diese Rotverschiebung mit größer werdender Entfernung der Galaxien zunimmt. Bezeichnen wir mit λ_1 die zur Zeit t_1 emittierte Wellenlänge einer Spektrallinie und die zur Zeit t_0 beobachtete Wellenlänge mit λ_0 , so ist die Rotverschiebung z gegeben durch

$$z = \frac{\lambda_0}{\lambda_1} - 1 \quad (2.1)$$

Für ein expandierendes Universum bestimmt sich die Rotverschiebung z aus

$$z = \frac{a(t_0)}{a(t_1)} - 1 \quad (2.2)$$

mit dem Skalenfaktor $a(t)$, der beschreibt, wie sich Entfernungen im Weltall im Laufe der Zeit ändern. Der heutige Wert des Skalenfaktors wird gleich 1 gesetzt,

$$a(t_0) \equiv 1. \quad (2.3)$$

Die relative Expansionsrate

$$H = \frac{\dot{a}}{a} \quad (2.4)$$

wird als *Hubble-Parameter* bezeichnet. Der heutige Wert für H , die *Hubble-Konstante* H_0 , liegt nach den Messungen des Hubble-Key-Projekts bei $H_0 = 72 \pm 8 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ [FMG⁺01]. Oft wird die Hubble-Konstante in der Form $H_0 = 100h \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ mit dem dimensionslosen Parameter h dargestellt.

Aus der Ausdehnung des Weltalls kann man schließen, dass die Dichte und damit die Temperatur des Weltalls zu früheren Zeiten sehr viel höher gewesen sein muss. Dabei sollte es einen Zeitpunkt gegeben haben, bis zu dem die Materie komplett ionisiert war und mit der elektromagnetischen Strahlung wechselwirkte, so dass das Universum undurchsichtig war. Während der Abkühlung ging die Materie dann in den neutralen Zustand über und

die Strahlung wurde von der Materie entkoppelt. Die von dem Zeitpunkt der Entkopplung stammende Reststrahlung des Universums beobachtet man heute aufgrund der hohen Rotverschiebung $z \gtrsim 1000$ zu diesem Zeitpunkt als eine Strahlung mit einer Temperatur von $T = 3$ K. Sie wird als CMB (*cosmic microwave background*) bezeichnet.

Der CMB wurde, ausgehend von einer Arbeit von Gamov über den Zustand des frühen Universums [Gam48], Ende der vierziger Jahre des 20. Jahrhunderts von Alpher und Herman [AH48] vorausgesagt und 1965 von Penzias und Wilson [PW65] beobachtet. Von Dicke et al. wurde der CMB dann als kosmische Hintergrundstrahlung identifiziert [DPRW65]. Hinweise auf die Existenz dieser Strahlung hatte es aber schon vorher gegeben, der früheste wohl aus dem Jahr 1941, als McKellar aus Radiobeobachtungen von CN-Molekülen im Weltall auf eine Strahlung mit einer Temperatur von $T = 2$ K folgerte [McK41].

Mit dem 1989 gestarteten COBE¹-Satelliten wurde zum ersten Mal außerhalb der Erdatmosphäre das Spektrum des CMB vermessen, es zeigte sich, dass die Strahlung der eines Schwarzen Körpers mit einer Temperatur von $T = 2,7$ K entspricht [MCE+90]. Außerdem konnten mit dem COBE-Satelliten Fluktuationen in der Hintergrundstrahlung entdeckt werden, die seit 2001 vom WMAP²-Satellit genauer untersucht werden, um daraus Rückschlüsse auf den Zustand und den Aufbau des Universums zu ziehen.

2.2 Dynamik des Universums

Die beobachtete Ausdehnung des Weltalls zeigt, dass der Raum keine statische Größe ist. Anstelle eines dreidimensionalen euklidischen Raumes ist zur Beschreibung der Geometrie des Universums eine vierdimensionale, nicht notwendigerweise euklidische, Raumzeit erforderlich. Der Zusammenhang zwischen der Geometrie und der Verteilung von Materie und Energie ist durch die Einstein'schen Feldgleichungen der allgemeinen Relativitätstheorie [Ein16] gegeben. Die Geometrie der Raumzeit wird dabei beschrieben durch die Metrik $g_{\mu\nu}$. Das Linienelement ds^2 , also der raumzeitliche Abstand zwischen zwei Ereignissen mit Koordinaten x^μ und $x^\mu + dx^\mu$ ergibt sich aus

$$ds^2 = \sum_{\mu\nu} g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \quad (2.5)$$

Die Summation erfolgt dabei über die vier raumzeitlichen Koordinaten $\mu = 0,1,2,3$. Zur Beschreibung des Universums müssen nun die Feldgleichungen gelöst werden, was aber in voller Allgemeinheit nicht möglich ist. Zur Hilfe kommt uns hier die Annahme, dass das Weltall auf großen Skalen isotrop und homogen ist. Damit kann man zeigen, dass die Metrik die Form der *Robertson-Walker-Metrik*

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right] \quad (2.6)$$

mit mitbewegten (*comoving*), sphärischen Koordinaten (r, θ, ϕ) annimmt. Je nach Vorzeichen der Krümmung K ist die Geometrie des Raumes sphärisch ($K > 0$), flach ($K = 0$) oder hyperbolisch ($K < 0$).

¹Cosmic Microwave Background Explorer

²Wilkinson Microwave Anisotropy Probe

Für ein homogenes, isotropes und expandierendes Weltall reduzieren sich die Feldgleichungen zu den Friedmann-Gleichungen

$$\ddot{a} = -\frac{4\pi G}{3}a \left(\rho + \frac{3p}{c^2} \right) + \frac{\Lambda}{3}a^2 \quad (2.7)$$

und

$$H^2 = \frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{8\pi G\rho}{3} - \frac{Kc^2}{a^2} + \frac{\Lambda}{3}, \quad (2.8)$$

mit der Gravitationskonstante G und der Lichtgeschwindigkeit c . Aus deren Lösung ergibt sich die zeitliche Entwicklung des Skalenfaktors a . Die Materie- und Energieverteilung gehen dabei über die Dichte ρ und den Druck p in die Gleichungen ein.

In den Gleichungen tritt außerdem die kosmologische Konstante Λ auf, von der lange Zeit angenommen wurde, dass sie nicht existiert und daher in den Gleichungen nicht berücksichtigt werden bräuchte. Beobachtungen von Supernova Ia-Ereignissen zeigten jedoch vor wenigen Jahren, dass ihr Beitrag nicht vernachlässigbar und sie zu einer zusätzlichen Expansion des Universums beiträgt. Supernovae vom Typ Ia zeichnen sich dadurch aus, dass es einen Zusammenhang zwischen ihrer Lichtkurve und ihrer absolute Helligkeit gibt. Sie eignen sich daher zur Entfernungsbestimmung im Weltall. Man entdeckte, dass weit entfernte Supernovae Ia schwächer leuchten als erwartet und schloss daraus auf die Existenz der kosmologischen Konstante [RFC+98]. Ihr physikalische Ursprung wird in einer Energiedichte des Vakuums gesehen.

Für die Zeit nach der Entkopplung von Strahlung und Materie können wir den Druck vernachlässigen und die Dichte ρ in den Friedmann-Gleichungen ist allein durch die Dichte ρ_m der Materie gegeben. Definieren wir die mit der kosmologischen Konstante verbundene Dichte zu

$$\rho_\Lambda = \frac{\Lambda}{8\pi G}, \quad (2.9)$$

so folgt aus Gleichung (2.8)

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}(\rho_m + \rho_\Lambda) - \frac{Kc^2}{a^2}. \quad (2.10)$$

Umformen ergibt

$$\frac{Kc^2}{a^2 H^2} = \frac{8\pi G}{3H^2}(\rho_m + \rho_\Lambda) - 1. \quad (2.11)$$

Die Krümmung hängt somit nur von der Materiedichte ρ_m und von der Dichte ρ_Λ der kosmologischen Konstanten ab. Wir können eine *kritische Dichte*

$$\rho_{\text{crit}} = \frac{3H^2}{8\pi G} \quad (2.12)$$

definieren, bei der für $\rho_m + \rho_\Lambda = \rho_{\text{crit}}$ die Krümmung verschwindet ($K = 0$). Mit der Hubble-Konstante H_0 erhalten wir ihren heutigen Wert zu $\rho_{\text{crit},0} = 1,9 \cdot 10^{-29} h^2 \text{ g cm}^{-3}$. Üblicherweise normiert man die auftretenden Größen auf die kritische Dichte und erhält dadurch die Dichteparameter

$$\Omega_m = \frac{\rho_m}{\rho_c} \quad (2.13)$$

und

$$\Omega_\Lambda = \frac{\rho_\Lambda}{\rho_c}. \quad (2.14)$$

Damit folgt aus Gleichung (2.11)

$$\frac{Kc^2}{a^2 H^2} = \Omega_m + \Omega_\Lambda - 1. \quad (2.15)$$

Für $\Omega_m + \Omega_\Lambda = 1$ entspricht die Dichte des Universums der kritischen Dichte und wir erhalten ein geschlossenes Universum mit einer flachen Geometrie. Für $\Omega_m + \Omega_\Lambda < 1$ nimmt die Krümmung einen negativen Wert an, das Universum ist offen mit hyperbolischer Geometrie. Für $\Omega_m + \Omega_\Lambda > 1$ ergibt sich ein geschlossenes Universum mit einer sphärischen Krümmung.

Um die zeitliche Entwicklung des Universums zu verstehen, müssen wir berücksichtigen, wie sich die Dichten ρ_m und ρ_Λ bei der Änderung des Skalenfaktors verhalten. Die Materiedichte ρ_m skaliert mit dem Volumen,

$$\rho_m(a) = \frac{\rho_{m,0}}{a^3}, \quad (2.16)$$

$\rho_{m,0}$ bezeichnet dabei den heutigen Wert der Materiedichte. Die Dichte ρ_Λ der kosmologischen Konstante ändert sich nicht durch die Expansion des Universums, ihr Wert ist gleich der heutigen Dichte $\rho_{\Lambda,0}$,

$$\rho_\Lambda(a) = \text{konstant} = \rho_{\Lambda,0}. \quad (2.17)$$

Einsetzen in Gleichung 2.10 ergibt

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \left(\frac{\rho_{m,0}}{a^3} + \rho_{\Lambda,0} \right) - \frac{Kc^2}{a^2}. \quad (2.18)$$

Im nächsten Schritt ersetzen wir $\rho_{m,0}$ und $\rho_{\Lambda,0}$ durch die heutigen Werte der Dichteparameter

$$\Omega_{m,0} = \frac{8\pi G}{3H_0^2} \rho_{m,0} \quad (2.19)$$

und

$$\Omega_{\Lambda,0} = \frac{8\pi G}{3H_0^2} \rho_{\Lambda,0} \quad (2.20)$$

und erhalten damit

$$H^2 = H_0^2 \left(\frac{\Omega_{m,0}}{a^3} + \Omega_{\Lambda,0} \right) - \frac{Kc^2}{a^2}. \quad (2.21)$$

Aus Gleichung (2.15) folgt

$$Kc^2 = H_0^2 (\Omega_{m,0} + \Omega_{\Lambda,0} - 1) \quad (2.22)$$

und die Kombination der beiden letzten Gleichungen liefert

$$H^2 = H_0^2 \left(\frac{1}{a^3} \Omega_{m,0} + \frac{1}{a^2} (1 - \Omega_{m,0} - \Omega_{\Lambda,0}) + \Omega_{\Lambda,0} \right). \quad (2.23)$$

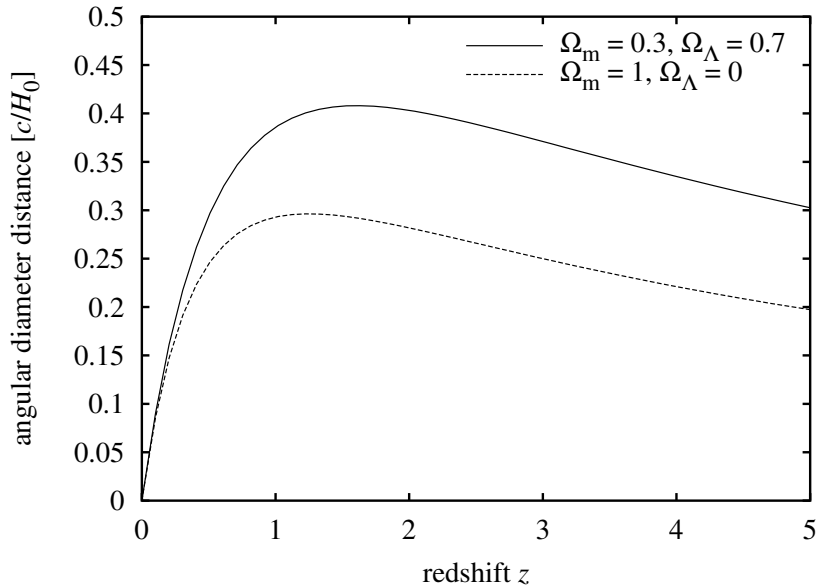


Abbildung 2.1: Die Winkeldistanz D_{ang} in Abhängigkeit von der Rotverschiebung z in Einheiten von c/H_0 für das Einstein-de Sitter Modell mit ($\Omega_m = 1; \Omega_\Lambda = 0$) (gestrichelte Linie) und für das heute favorisierte Standardmodell mit ($\Omega_m = 0,3; \Omega_\Lambda = 0,7$) (durchgezogene Linie)

Die zeitliche Entwicklung des Skalenfaktors wird somit vollständig durch die heutigen Dichten von Materie und der kosmologischen Konstanten beschrieben und man kann untersuchen, wie sich das Weltall für verschiedene Kombination von $\Omega_{m,0}$ und $\Omega_{\Lambda,0}$ entwickelt.

Heutzutage wird das Modell eines flachen Universums favorisiert, das Standardmodell, gestützt unter anderem durch die Analyse der Temperaturfluktuationen im CMB durch den WMAP-Satelliten [SVP⁺03], mit $\Omega_{m,0} = 0,3$, $\Omega_{\Lambda,0} = 0,7$ und dem schon oben erwähnten Wert für die Hubble-Konstante von $H_0 = 72 \pm 8 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$.

Die Gesamtmasse besteht dabei zum größten Teil aus der dunklen Materie, die bisher nur über ihre gravitative Wirkung beobachtet wurde, beispielsweise in den Rotationskurven von Galaxien [Lon98]. Nur etwa 5 % der gesamten Materie liegt in Form von baryonischer Materie vor.

2.3 Entfernungen im Universum

Im Gegensatz zu einem statischen Raum mit euklidischer Geometrie gibt es im expandierenden Universum keine eindeutige Definition einer Entfernung mehr. Betrachten wir eine Quelle mit der Rotverschiebung z_1 und einen Beobachter mit der Rotverschiebung z_0 am Ort $r = 0$. Die mitbewegte Entfernung (*comoving distance*) $D_{\text{com}}(z_0, z_1)$ ist gegeben durch die Koordinatendifferenz zwischen Quelle und Beobachter [BS01]. Da sich Licht auf Nullgeodäten ($ds = 0$) bewegt, folgt aus der Robertson-Walker-Metrik (2.6) mit

$$d\theta = d\phi = 0$$

$$\frac{c dt}{a} = \frac{dr}{\sqrt{1 - Kr^2}}. \quad (2.24)$$

Integration liefert

$$D_{\text{com}}(z_0, z_1) = \int_0^r \frac{dr'}{\sqrt{1 - Kr'^2}} = \int_{a(z_1)}^{a(z_2)} \frac{c dt}{a}. \quad (2.25)$$

Mit $\frac{1}{a} dt = \frac{1}{a(t)} \frac{da}{a} = \frac{1}{a^2 H}$ und Gleichung (2.23) folgt

$$D_{\text{com}}(z_0, z_1) = \int_{a(z_1)}^{a(z_2)} H_0 \sqrt{\frac{1}{a} \Omega_{m,0} + (1 - \Omega_{m,0} - \Omega_{\Lambda,0}) + a^2 \Omega_{\Lambda,0}} da. \quad (2.26)$$

Für die Beschreibung des Gravitationslinseneffekts müssen wir wissen, wie groß der tatsächliche Durchmesser einer Quelle bei z_1 ist, die unter einem bestimmten Winkel von einem Beobachter bei z_0 beobachtet wird. Das Verhältnis von Durchmesser zu beobachtetem Winkel ist durch die Winkeldurchmesserentfernung (*angular diameter distance*) $D_{\text{ang}}(z_0, z_1)$ gegeben, die sich aus D_{com} zu

$$D_{\text{ang}}(z_0, z_1) = a(z_1) D_{\text{com}}(z_0, z_1) \quad (2.27)$$

bestimmt [BS01].

In Abbildung (2.1) ist die Winkeldurchmesserdistanz für zwei verschiedene kosmologische Modelle, dem Einstein-de Sitter-Modell und dem heutigen Standardmodell dargestellt. Die Auswertung von Gleichung (2.27) erfolgte dabei durch numerische Integration. Bei dem Einstein-de Sitter-Modell handelt es sich um ein Universum mit verschwindender kosmogischer Konstante ($\Omega_{\Lambda} = 0$) und mit $\Omega_m = 1$.

Neben der Winkeldurchmesserdistanz müssen wir bei der Untersuchung astronomischer Objekte auch berücksichtigen, wie die beobachtete Helligkeit einer Quelle von ihrer Entfernung abhängt. Dies wird durch die Leuchtkraftentfernung $D_{\text{lum}}(z_0, z_1)$ beschrieben, die durch

$$D_{\text{lum}}(z_0, z_1) = \frac{a^2(z_0)}{a^2(z_1)} D_{\text{ang}}(z_0, z_1)$$

gegeben ist.

Die oben definierten Entfernungen wurden unter der Voraussetzung eines homogenen und isotropen Universum hergeleitet. Für eine genaue Bestimmung der Entfernungen müssen wir aber berücksichtigen, dass es auf Skalen bis etwa 1 Gpc Abweichungen von einer homogen Massenverteilung gibt. Dyer und Roeder führen dazu einen Parameter α ein, der das Verhältnis von gleichmäßig verteilter Materie zu geklumpfter Materie beschreibt [DR73]. Für die gesuchte Winkeldurchmesser D_{ang} erhält man eine Differentialgleichung der Form

$$\begin{aligned} (1+z) (\Omega_{m,0}(1+z)^3 + \Omega_{K,0}(1+z)^2 + \Omega_{\Lambda,0}) \frac{d^2 r}{dz^2} \\ + \frac{1}{2} (7\Omega_{m,0}(1+z)^3 + 6\Omega_{K,0}(1+z)^2 + 4\Omega_{\Lambda,0}) \frac{dr}{dz} \\ + \frac{3}{2} \alpha \Omega_{m,0} (1+z)^2 r = 0 \end{aligned} \quad (2.28)$$

mit $r = D_{\text{ang}} \frac{H_0}{c}$ und $\Omega_{K,0} = -\frac{Kc^2}{a^2 H_0}$ [DdMP03]. Methoden zu ihrer Lösung sind bei Kayser et al. [KHS97] und Demianski zu finden.

3 Quasare

3.1 Bezeichnungen und Eigenschaften

In den sechziger Jahren des letzten Jahrhundert entdeckte man bei der Durchmusterung der Himmels mit Radioteleskopen eine große Anzahl leuchtkräftiger Objekte, die in optischen Aufnahmen nicht von Sternen unterschieden werden konnten und die deshalb als *Quasare* (*quasistellar radio source*) bezeichnet wurden. Auffallend war ihre hohe Rotverschiebung, so dass bald deutlich wurde, dass es sich dabei um extrem leuchtkräftige Galaxien handelt. Später entdeckte man, dass nicht alle dieser Objekte im Radiobereich strahlen, so dass man sie alle unter dem Begriff *QSO* (*quasistellar object*) zusammenfasste.

In der Literatur wird aber nicht immer durchgängig zwischen den beiden Begriffen unterschieden und ich werde im Weiteren den Begriff Quasar verwenden.

Heutzutage geht man davon aus, dass es sich bei den Quasaren um die Kerne sogenannter aktiver Galaxien (*AGN*–*active galactic nuclei*) handelt, zu denen man eine Reihe weiterer Objekte zählt, wie Radiogalaxien, Seyfert-Galaxien und BL Lac-Objekte.

Die aktiven Galaxien zeichnen sich dabei aus durch

- eine hohe Leuchtkraft des Kernes im Vergleich zum Rest der Galaxie
- hohe Leuchtkraft im ultravioletten Wellenlängenbereich (UV-Exzess)
- Emissionslinien im Spektrum

Darüber hinaus beobachtet man etwa 10% aller AGN einen aus der Zentralregion herausragenden Jet und eine damit verbundene Radioemission. Diese AGN werden als radiolaut bezeichnet.

Die folgende Übersicht gibt einen Überblick über die verschiedenen AGN-Phänomene (nach [Pet97]):

Seyfert-Galaxien sind Galaxien, die im Vergleich zu normalen Galaxien einen leuchtkräftigeren Kern besitzen und in deren Spektren Emissionslinien beobachtet werden. Man unterscheidet zwei Klassen von Seyfert-Galaxien. In den Typ-I-Seyfert-Galaxien treten in den Spektren sowohl breitbandige Emissionslinien (*broad lines*) als auch schmalbandige Emissionslinien von verbotenen Übergängen auf (*narrow lines*), während in den Seyfert-II-Galaxien nur die schmalbandigen Linien beobachtet werden.

BL Lac-Objekte sind AGNs mit einer starken ($\gtrsim 0,1$ mag) und schnellen Variabilität ihrer Helligkeit im gesamten Frequenzbereich.

Quasare weisen ähnliche spektrale Eigenschaften wie die Seyfert-I-Galaxien. Sie unterscheiden sich aber insoweit, dass man die Host-Galaxie nur schwer identifizieren kann.

Radiogalaxien mit den spektralen Eigenschaften von Seyfert-Galaxien werden ebenfalls zu den AGNs gezählt. Man unterscheidet, ähnlich wie bei den Seyfert-Galaxien, zwischen *broad line radio galaxies* (NLRG) und *narrow line radio galaxies* (BLRG).

Man geht davon aus, dass sich die unterschiedlichen AGN-Typen durch ein einziges Modell erklären lassen, das die verschiedenen Eigenschaften aller AGNs zusammenfasst (Abb. 3.1). In diesem Modell hängt der Typus des beobachteten AGN vor allem von der Blickrichtung ab, unter der man einen AGN betrachtet [Ant93][UP95].

Nach diesem Modell befindet sich im Innern eines AGN ein Schwarzes Loch mit einer Masse von $10^7 - 10^9 M_{\odot}$. Die in dieses zentrale Schwarze Loch einströmende Materie formt eine Akkretionscheibe, deren Größe einige 100 AU beträgt. In dieser Scheibe wird die Kontinuumsstrahlung des Quasars erzeugt, die vom infraroten Wellenlängenbereich bis in den Röntgenbereich reicht und sich dadurch deutlich von dem Spektrum einer normalen Galaxie unterscheidet. Der spektrale Verlauf der Kontinuumsstrahlung kann grob durch ein Potenzgesetz der Form $F_{\nu} \propto \nu^{-\alpha}$ mit α zwischen 0 und 1 beschrieben werden. Im UV und im optischen Bereich wird ein als “big blue blump” bezeichneter Exzess der Strahlung beobachtet, der vermutlich durch die thermische Strahlung der Akkretionsscheibe entsteht.

Außerhalb der Akkretionsscheibe liegt die Broad-Line-Region (BLR), in der sich mit hoher Geschwindigkeit ($\approx 5000 \text{ km s}^{-1}$) bewegende Gaswolken befinden, in denen die breiten Emissionslinien in den Quasarspektren entstehen. Die Dichte innerhalb dieser Wolken ist mit $> 10^9 \text{ cm}^{-3}$ so hoch, dass in ihnen nur erlaubte Spektralübergänge auftreten. Ihre Anzahl wird auf $10^7 - 10^9$ geschätzt. Die Größe der BLR liegt zwischen 0,01 und 0,1 pc. Umgeben ist die Akkretionsscheibe von einem Staubtorus. Man nimmt an, dass die Blickrichtung bei den Seyfert 2-AGNs gerade so ist, dass die BLR von diesem Staubtorus verdeckt wird und man deshalb in den Spektren die breiten Emissionslinien nicht beobachtet.

Die Gaswolken in der BLR werden durch Photoionisation von der zentralen Quelle zur Linienemission angeregt, so dass eine Änderung des Linienflusses mit dem Fluss aus der Kontinuumsregion korreliert ist. Dies nutzt man bei der Methode der Echokartierung (*reverberation mapping*), um Informationen über die BLR zu erhalten [NP97]. Dabei untersucht man die Änderungen des Linienflusses, der aus einer Änderung des Kontinuumsflusses resultiert, um daraus Informationen über die Größe R_{BLR} der BLR und der Verteilung der Gaswolken in ihr zu bestimmen. Kaspi et al. schließen aus ihren Echo-Kartierungen an 17 Quasaren, dass die R_{BLR} mit $L_{5100}^{0,70 \pm 0,03}$ skaliert, wobei L_{5100} der Fluss bei der Wellenlänge 5100 Å ist [KSN+00].

An die BLR schließt sich die Narrow-Line-Region (NLR) an, in denen die schmalbandigen Emissionslinien entstehen. Die Geschwindigkeit der sich hier befindenden Wolken ist nicht so hoch ($\approx 500 \text{ km s}^{-1}$) wie in der BLR und ihre Dichte ist mit $10^3 - 10^6 \text{ cm}^{-3}$ so gering, dass auch verbotene Übergänge auftreten. Die NLR wird nicht mehr durch den Staubtorus verdeckt, ihre Größe wird zu 50 – 100 pc geschätzt.

Bei vielen AGN beobachtet man einen Jet, der aus senkrecht zur Akkretionsscheibe ausströmenden Materie gebildet wird. Der Jet kann dabei weit aus der Galaxie hinaus-

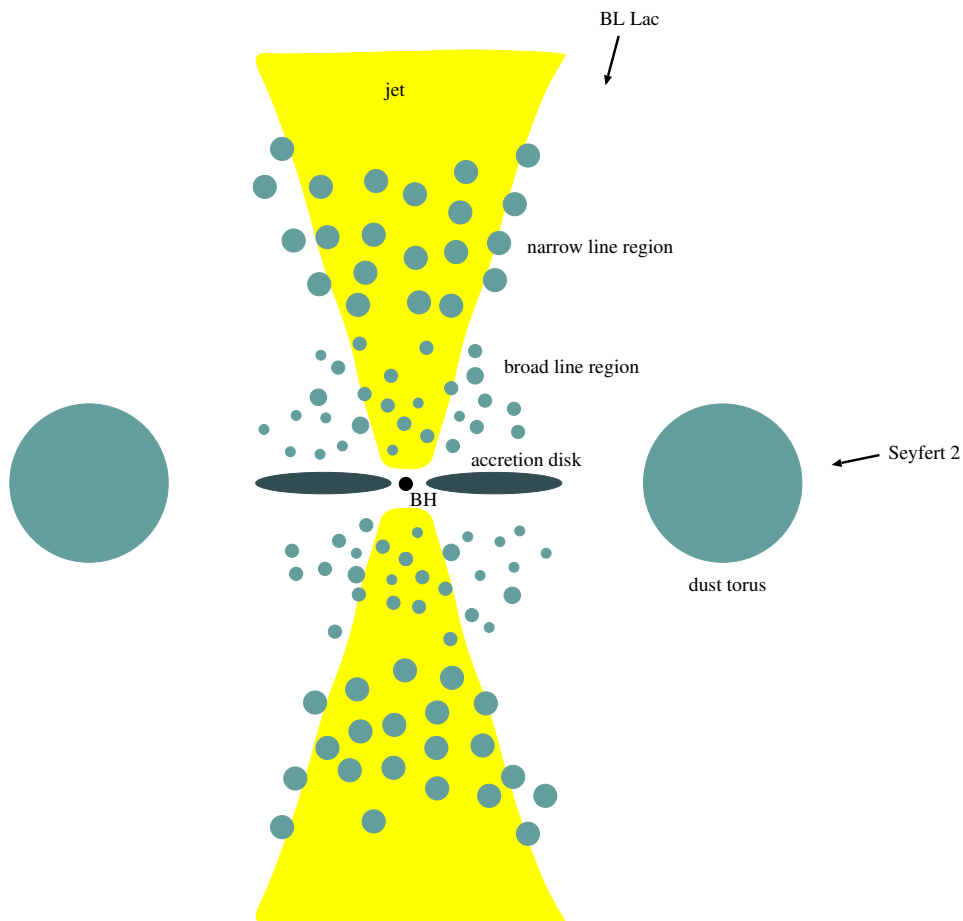


Abbildung 3.1: Schematisches Modell eines AGN (nicht maßstabsgerecht). Das zentrale Gebiet besteht aus einem supermassiven Schwarzen Loch (BH), um das die einströmende Materie eine Akkretionsscheibe bildet. Eingebettet ist dieses Gebiet in die aus einzelnen Gaswolken bestehende Broad-Line-Region (BLR). Ein Staubtorus umgibt Akkretionsscheibe und BLR. Außen schließt sich die Narrow-Line-Region an (nach Urry und Padovani [UP95]).

reichen. Nahe am Zentrum war es bei einigen AGN möglich, direkt die Bewegung von Strukturen im Jet über mehrere Jahre zu verfolgen. Die Ausbreitung erfolgt dabei scheinbar mit Überlichtgeschwindigkeiten, was allerdings eine Folge der sich mit relativistischer Geschwindigkeit in Richtung auf den Beobachter bewegendem Materie ist.

3.2 Akkretionsscheiben

Als energierzeugender Mechanismus eines AGN wird die Freisetzung von Gravitationsenergie bei der Akkretion von Materie auf das zentrale Schwarzes Loch vermutet.

Der Drehimpuls der einströmenden Materie führt zur Ausbildung einer Akkretionsscheibe. Solche Akkretionsscheiben treten nicht nur bei den AGNs auf, sondern werden auch bei vielen anderen astrophysikalischen Systemen wie jungen Sternen, kataklysmischen Veränderlichen und Röntgendoppelsternen beobachtet [FKR92].

3.2.1 Scheibenmodelle

Zur Beschreibung einer Akkretionsscheibe nimmt man an, dass die Materie nur langsam nach innen einströmt und sich annähernd auf Kreisbahnen um den zentralen Körper bewegt. Da der Drehimpuls in der rotierenden Scheibe nach innen hin abnimmt, ist für das Einströmen ein Drehimpulstransport nach außen notwendig. Die Ursache der dafür nötigen Viskosität in der Scheibe ist nicht genau bekannt, man vermutet turbulente Strömungen oder Magnetfelder.

In einem einfachen Modell einer Akkretionsscheibe rotiert die Materie mit der Keplereschwindigkeit v_K um den zentralen Körper. Weiter wird vorausgesetzt, dass die Leuchtkraft L der Scheibe klein gegenüber der Eddington-Leuchtkraft

$$L_{\text{Edd}} = \frac{4\pi GMm_p c}{\sigma_T} \quad (3.1)$$

ist. Die Eddington-Leuchtkraft L_{Edd} ist die Leuchtkraft, bei der der Strahlungsdruck gleich dem Gravitationsdruck wird. Dabei bezeichnen M die Masse des strahlenden Körpers, m_p die Protonenmasse und σ_T den Thomson-Wirkungsquerschnitt.

Die vertikale Ausdehnung der Scheibe ist dann vernachlässigbar klein gegenüber ihrer radialen Ausdehnung, eine solche Scheibe wird als eine dünne Akkretionsscheibe (*thin disk*) bezeichnet.

Durch die bei der Akkretion freigesetzte Energie wird die Scheibe aufgeheizt. Unter der Annahme eines optisch dichten Mediums kann die Scheibe lokal durch einen Schwarzen Körper beschrieben werden. Damit ergibt sich der radiale Temperaturverlauf zu

$$T(R) = \left[\frac{3GM\dot{M}}{8\pi\sigma R^3} \left(1 - \sqrt{\frac{R_g}{R}} \right) \right]^{1/4} \quad (3.2)$$

mit der Stefan-Boltzmann-Konstante σ , der Masse M des zentralen Körpers, der Akkretionsrate \dot{M} und dem inneren Radius R_g der Akkretionsscheibe [FKR92]. Für eine Akkretionsscheibe um ein schwarzes Loch ist der innere Radius R_g durch den kleinsten Radius gegeben, um den ein stabiler Orbit um das Schwarze Loch möglich ist. Dieser

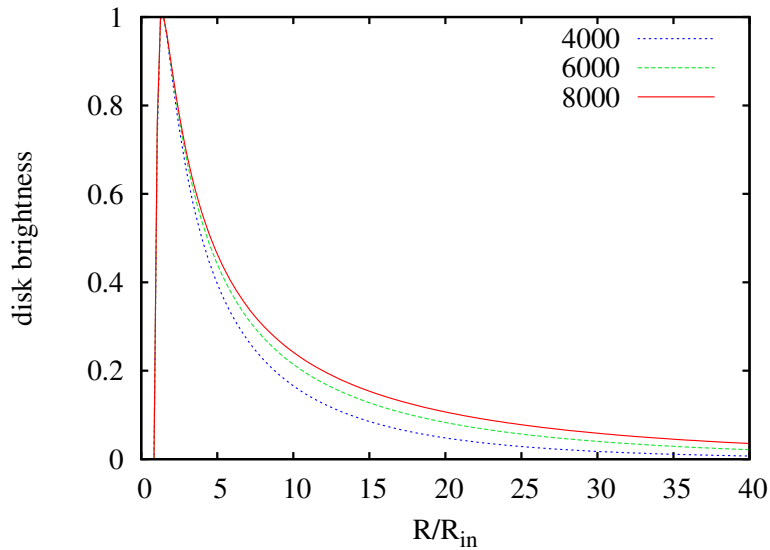


Abbildung 3.2: Radialer Helligkeitsverlauf einer dünnen Akkretionsscheibe für $\lambda = 4000 \text{ \AA}$, $\lambda = 6000 \text{ \AA}$ und $\lambda = 8000 \text{ \AA}$. Zum roten Wellenlängenbereich hin nimmt die beobachtete Größe der Akkretionsscheibe zu.

Radius wird auch als der marginal stabile Radius bezeichnet und beträgt für ein nicht-rotierendes Schwarzes Loch $R_g = 3R_s$, dabei ist $R_s = \frac{2GM}{c^2}$ der Schwarzschildradius des Schwarzen Loches. Der Temperaturverlauf geht für große Entfernungen vom Zentrum in $R^{-3/4}$ -Abhängigkeit über.

Der radiale Helligkeitsverlauf der Akkretionsscheibe für eine bestimmte Wellenlänge λ ergibt sich aus der Temperaturverteilung durch

$$I_\lambda(R) = B_\lambda[T(R)] \quad (3.3)$$

mit der Planck'schen Strahlungsgleichung

$$B_\lambda(T) = \frac{2hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{hc/k\lambda T} - 1}. \quad (3.4)$$

Die beobachtete Größe einer Akkretionsscheibe ist wellenlängenabhängig. In [Abbildung 3.2](#) ist der radiale Helligkeitsverlauf für verschiedene Wellenlängen im visuellen Bereich dargestellt. Man erkennt, dass zum roten Spektralbereich hin die Akkretionsscheibe größer erscheint.

Durch Integration der Gleichung [\(3.3\)](#) ist es möglich, das Spektrum einer dünnen Akkretionsscheibe zu berechnen und mit dem beobachteten Kontinuumsverlauf eines Quasars zu vergleichen. Es zeigte sich, dass mit diesem Modell für eine dünnen Akkretionsscheibe nur eine schlechte Beschreibung von Quasarspektren möglich ist [\[FKR92\]](#).

Shakura und Sunyaev berücksichtigen in ihrem Modell für eine dünne Akkretionsscheibe den Prozess des Drehimpulstransports [\[SS73\]](#). Dabei stellen sie die effektive Viskosität der

Scheibe durch einen Parameter α dar ($0 < \alpha \leq 1$) mit

$$\eta = \alpha c_s H . \quad (3.5)$$

Hierbei bezeichnet H die vertikale Ausdehnung der Scheibe und c_s die Schallgeschwindigkeit des Gases.

Neben den dünnen Scheiben, die als Standardakkretionsscheiben bezeichnet werden, sind auch Modelle für andere Typen von Akkretionsscheiben entwickelt worden. ADAFs¹ weisen bei gleicher Akkretionsrate eine geringere Leuchtkraft als eine vergleichbare Standardscheibe auf [KB99]. Bei den Zwei-Temperatur-ADAFs ist die Dichte in der Scheibe so gering, so dass es nicht zu einer Kopplung zwischen Ionen- und Elektronentemperatur kommt. Die viskosen Prozesse heizen dann nur das Ionensystem auf. Dadurch wird die freiwerdende Gravitationsenergie nicht abgestrahlt, sondern mit der Materie nach innen transportiert [NMQ98].

Bei einer hohen Akkretionsrate \dot{M} kann die Leuchtkraft die Eddington-Leuchtkraft L_{Edd} erreichen. Durch den hohen Strahlungsdruck kann die vertikale Ausdehnung der Scheibe dann so groß werden, dass sie die Größe des Scheibenradius erreicht. Eine solche Scheibe wird als eine dicke Akkretionsscheibe (*thick disk*) bezeichnet [KB99].

¹Advection-Dominated Accretion Flows

4 Gravitationslinsen

Über das Gebiet der Gravitationslinsen gibt es eine Reihe von guten Einführungen, zu erwähnen ist hier vor allem die Monographie von Schneider, Ehlers und Falco [SEF92], die allerdings seit 1992 unverändert ist und somit die aktuellen Entwicklungen in diesem Forschungsgebiet nicht mehr berücksichtigt. Eine knappe Übersicht über dieses Gebiet gibt Wambsganss [Wam98]. Beide Arbeiten bilden die Grundlage für den folgenden Abschnitt.

Die 2002 erschienene Monographie von Petters, Levine und Wambsganss [PLW01] bietet ebenfalls eine umfassende Einführung in dieses Gebiet, ist aber in Teilen mathematisch sehr anspruchsvoll.

4.1 Historisches

In diesem Abschnitt sollen nur die wesentlichen historischen Schritte, die zur Entwicklung dieses Forschungsgebiets führten, kurz dargestellt werden. Einen wesentlich umfangreichen Überblick bilden die bereits erwähnten Arbeiten von Schneider et al. und von Wambsganss.

Anfang des 19. Jahrhunderts berechnete Soldner die Ablenkung, die ein Lichtstrahl in einem Gravitationsfeld erfährt [Sol04]. Er nahm dabei an, dass das Licht genauso wie ein Masseteilchen dem Einfluss des Gravitationsfeldes unterliegt. Mit diesem Ansatz bestimmte er den Ablenkwinkel $\hat{\alpha}$ eines Lichtstrahls, der an einer Masse M im Abstand ξ vorbeiläuft, zu

$$\hat{\alpha} = \frac{2GM}{c^2\xi} \quad (4.1)$$

und erhielt für einen Lichtstrahl, der an der Sonnenoberfläche vorbeiläuft, einen Ablenkwinkel von $0,83''$.

Die Arbeit von Soldner geriet allerdings in Vergessenheit und erst 100 Jahre später untersuchte Einstein erneut die Auswirkung eines Gravitationsfeldes auf die Lichtausbreitung. Mit der von ihm entwickelten Speziellen Relativitätstheorie [Ein05] erhielt er für den Ablenkwinkel den gleichen Zusammenhang zwischen Masse M und Abstand ξ wie schon Soldner vorher und er schlug vor, die Lichtablenkung an der Sonne während einer totalen Sonnenfinsternis zu überprüfen.

Wenige Jahre später erkannte Einstein aber, dass für eine korrekte Behandlung der Lichtausbreitung in einem Gravitationsfeld die von ihm entwickelte Allgemeine Relativitätstheorie [Ein16] zugrunde gelegt werden muss. Der damit erhaltene Wert für den Ablenkwinkel ist genau doppelt so groß wie der vorher von Soldner gefundene Wert.

Mit der Beobachtung von Sonnenfinsternissen wurde später versucht, den wahren Wert des Ablenkwinkels zu bestimmen, eine präzisere Messung ermöglichten aber erst Radio-Beobachtungen des Quasars 3C 279, der einmal jährlich von der Sonne bedeckt wird.

Anfang der siebziger Jahre des 20. Jahrhunderts konnte damit der von der Allgemeinen Relativitätstheorie vorausgesagte Wert bestätigt werden [Sra71].

Chwolson veröffentlichte 1924 eine Arbeit [Chw24], in der er zeigte, dass die Lichtablenkung an einem Stern dazu führen kann, dass ein dahinterliegender Stern doppelt erscheint. Für den Fall, dass Beobachter und die beiden Sterne exakt auf einer Linie liegen, sollte sich ein ringförmiges Bild ergeben, ein Phänomen, das heutzutage als Einstein-Ring bezeichnet wird.

Einstein, der ebenfalls den Einfluss der Lichtablenkung von einem Stern auf die Bilder der dahinterliegenden Sterne untersuchte, fand heraus, dass es dabei zu einer Verstärkung kommen sollte. Allerdings hielt er die Wahrscheinlichkeit, ein solches Gravitationslinsensystem tatsächlich zu beobachten, für sehr gering [Ein36].

Zwicky untersuchte die Möglichkeit, ob extragalaktische Objekte ebenfalls als Gravitationslinse wirken können [Zwi37a] und stellte fest, dass dieser Effekt tatsächlich beobachtbar sein sollte [Zwi37b]. Tatsächlich vergingen dann noch mehr als 40 Jahre, bis 1979 von Walsh et al [WCW79] das erste Gravitationslinsensystem entdeckt wurde, der Doppelquasar 0957+561.

4.2 Die Grundlagen des Gravitationslinseneffekts

Nach der Allgemeinen Relativitätstheorie wird ein Lichtstrahl, der an einem Körper der Masse M in einer minimalen Entfernung ξ entlang läuft, um den Winkel

$$\hat{\alpha} = \frac{4GM}{c^2\xi} \quad (4.2)$$

abgelenkt. Der Ablenkwinkel ist dabei unabhängig von der Wellenlänge des Lichtes.

Die Abbildung 4.1 zeigt die Situation bei der Lichtablenkung an einer Punktmasse. Aus der dargestellten Geometrie ist unmittelbar die Linsengleichung

$$\beta = \theta - \alpha, \quad (4.3)$$

die den Zusammenhang zwischen der Position β der Quelle und der Position θ des Bildes beschreibt, zu erkennen. Der Winkel α wird als reduzierter Ablenkwinkel bezeichnet und bestimmt sich mit den Entfernungen D_{LS} und D_S aus dem Ablenkwinkel $\hat{\alpha}$ zu

$$\alpha = \frac{D_{LS}}{D_S} \hat{\alpha}. \quad (4.4)$$

Einzelne Punktmassen als Gravitationslinsen beobachtet man z. B. in der Milchstraße, bei denen Sterne zwischen uns und dem Zentrum der Galaxis als Linse wirken. Für räumlich ausgedehnte Objekte wie die Linsengalaxien von Mehrfachquasaren reicht die Beschreibung durch eine einzelne Punktmasse nicht mehr aus. Ist die Ausdehnung eines solchen Systems klein gegenüber den Entfernungen zwischen Beobachter, Linse und Quelle, so können wir die Linse durch eine zweidimensionale Massenverteilung in einer Ebene darstellen, in der wir die dreidimensionale Massenverteilung der Linse hineinprojizieren (*thin lens approximation*).

Bei den meisten der beobachteten Mehrfachquasarsysteme geht man davon aus, dass der Gravitationslinseneffekt in diesen Systemen im Wesentlichen durch eine einzige Linse

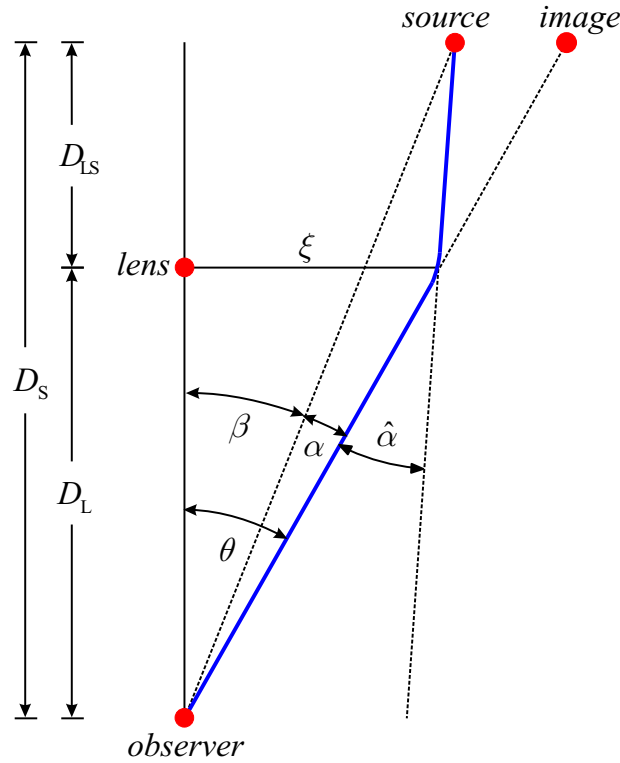


Abbildung 4.1: Lichtablenkung an einer Punktmasse

Die Winkel β und θ bezeichnen die Position der Quelle bzw. ihres Bildes, $\hat{\alpha}$ ist der Winkel, um den der an der Linse in der Entfernung ξ entlang laufende Lichtstrahl abgelenkt wird. D_L und D_S sind die Entfernungen vom Beobachter zur Linse und zur Quelle und D_{LS} die Entfernungen von der Linse zur Quelle. Der Winkel α wird als reduzierter Ablenkwinkel bezeichnet. Nicht dargestellt ist das durch die Lichtablenkung entstehende zweite Bild der Quelle.

erzeugt wird, die dann durch eine einzige Linsenebene dargestellt werden kann (*single plane lensing*).

Wie man sich leicht überlegen kann, gilt auch in diesem Fall die Linsengleichung, allerdings treten statt der bisher verwendeten skalaren Größen jetzt Vektoren für die Quellposition β , die Bildposition θ und den reduzierten Ablenkwinkel $\hat{\alpha}$ auf,

$$\beta = \theta - \alpha(\theta). \quad (4.5)$$

Den Ablenkwinkel $\hat{\alpha}$ können wir dann durch Summation über alle in dieser Linsenebene vorhandenen Massen

$$\hat{\alpha}(\xi) = \sum_{i=1}^n \frac{4G}{c^2} m_i \frac{\xi - \xi_i}{|\xi - \xi_i|^2} \quad (4.6)$$

berechnen, bzw. im Fall einer kontinuierlichen Massenverteilung durch das Integral über die Massenflächendichte $\Sigma(\boldsymbol{\xi})$

$$\hat{\boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{\xi}) = \frac{4G}{c^2} \int_{\mathbb{R}^2} \Sigma(\boldsymbol{\xi}') \frac{\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}'}{|\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}'|^2} d^2\xi'. \quad (4.7)$$

Mit $\boldsymbol{\alpha} = \frac{D_{LS}}{D_S} \hat{\boldsymbol{\alpha}}$ und $\boldsymbol{\xi} = D_L \boldsymbol{\theta}$ folgt

$$\boldsymbol{\alpha} = \frac{4G}{c^2} \frac{D_L D_{LS}}{D_S} \int_{\mathbb{R}^2} \Sigma(\boldsymbol{\theta}') \frac{\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}'}{|\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}'|^2} d^2\theta'. \quad (4.8)$$

Aus der Integraldarstellung des Ablenkswinkels $\boldsymbol{\alpha}$ folgt, dass $\boldsymbol{\alpha}$ als Gradient eines Potentials

$$\psi = \frac{4G}{c^2} \frac{D_L D_{LS}}{D_S} \int_{\mathbb{R}^2} \Sigma(\boldsymbol{\theta}') \ln |\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}'|^2 d^2\theta' \quad (4.9)$$

dargestellt werden kann. Bei der Lichtablenkung an einer Punktmasse ergeben sich zwei Bilder der Quelle auf den gegenüberliegenden Seiten der Linse an den Stellen

$$\theta = \frac{1}{2} \left(\beta \pm \sqrt{\frac{D_{LS}}{D_L D_S} \frac{16GM}{c^2} + \beta^2} \right). \quad (4.10)$$

Für den Fall, dass Beobachter, Linse und Quelle genau auf einer Geraden liegen, werden die Bilder zu einem einzigen Ring verformt, dem Einsteinring, der in Abbildung 4.3 dargestellt ist. Aus Gleichung 4.10 ergibt sich mit $\beta = 0$ der Öffnungswinkel dieses Ringes zu

$$\theta_E = \sqrt{\frac{4GM}{c^2} \frac{D_{LS}}{D_L D_S}} \quad (4.11)$$

und seinen Radius in der Quellebene zu

$$R_{E,S} = D_S \theta_E = \sqrt{\frac{4GM}{c^2} \frac{D_{LS} D_S}{D_L}}. \quad (4.12)$$

Der Einsteinring ist eine charakteristische Größe bei der Untersuchung des Gravitationslinseneffekts. So ist der typische Abstand der sich durch die Lichtablenkung ergebenden Bilder von der Größenordnung $2\theta_E$. Quellen, die sich im Inneren des Einsteinringes befinden, werden im Allgemeinen erheblich verstärkt.

Für eine Galaxie der Masse M , einer Rotverschiebung von $z_L = 0,5$, und einer Quelle mit einer Rotverschiebung von $z_S = 2,0$ hat der Einstein-Radius eine Größe von

$$\theta_E = 0,65 \sqrt{\frac{M}{10^{11} M_\odot}} \text{ arcsec}. \quad (4.13)$$

Der Einsteinradius eines einzelnen Sternes der Masse M aus dieser Galaxie ist um Größenordnungen kleiner,

$$\theta_{E,*} = 2 \cdot 10^{-6} \sqrt{\frac{M}{M_\odot}} \text{ arcsec}. \quad (4.14)$$

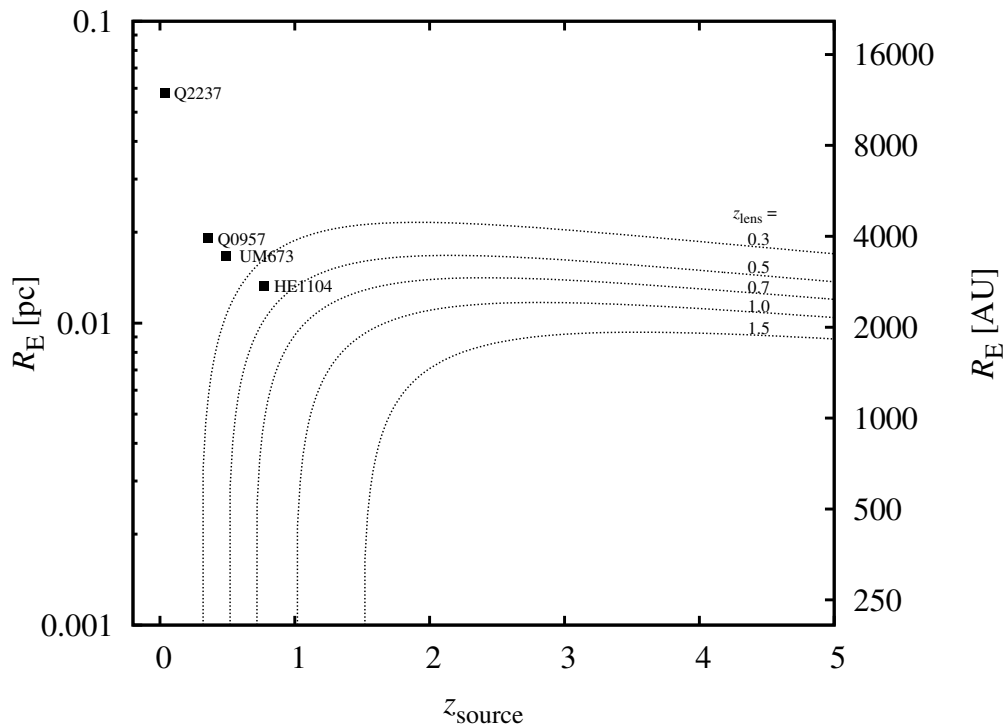


Abbildung 4.2: Größe des Einstein-Radius R_E (in pc und in AU) in der Quellebene für Gravitationslinsen der Masse $1 M_{\odot}$ in Abhängigkeit von der Rotverschiebung von Linse und Quelle. Eingetragen ist auch die Position einiger bekannter Gravitationslinsensysteme.

In Abbildung 4.2 ist die Größe des Einsteinringes für Sterne mit einer Masse von $1M_{\odot}$ in Abhängigkeit von der Rotverschiebung von Quelle und Linse dargestellt. Für die meisten Systeme liegt die Größe des Einsteinradius in Bereich von einigen 1000 AU und liegt damit ein bis zwei Größenordnungen über der vermuteten Größe der Akkretionsscheibe von Quasaren.

Betrachten wir anstelle einer einzelnen Punktmasse eine Kreisscheibe mit konstanter Massendichte als Linse, so erhalten wir durch Integration von Gleichung (4.8) für den Ablenkwinkel

$$\alpha = \frac{D_L D_{LS}}{D_S} \frac{4G}{c^2} \pi \Sigma \theta. \quad (4.15)$$

In diesem Fall beobachtet man einen Einsteinring, wenn die Massendichte einen Wert von $\frac{c^2}{4\pi G} \frac{D_S}{D_L D_{LS}}$ überschreitet. Dies führt zur Definition der kritischen Massendichte,

$$\Sigma_{\text{crit}} = \frac{c^2}{4\pi G} \frac{D_S}{D_L D_{LS}}. \quad (4.16)$$

Indem wir die in der Linsengleichung (4.5) auftretenden Größen in Einheiten des Einsteinradius darstellen,

$$\mathbf{x} := \frac{\boldsymbol{\theta}}{\theta_E}, \quad \mathbf{y} := \frac{\boldsymbol{\beta}}{\theta_E}, \quad \tilde{\boldsymbol{\alpha}} := \frac{\boldsymbol{\alpha}}{\theta_E}, \quad (4.17)$$

erhalten wir die normierte Linsengleichung

$$\mathbf{y} = \mathbf{x} - \tilde{\boldsymbol{\alpha}} \quad (4.18)$$

Mit κ wird die auf die kritische Massendichte

$$\Sigma_{\text{crit}} = \frac{c^2}{4\pi G} \frac{D_S}{D_L D_{LS}}, \quad (4.19)$$

normierte Massendichte bezeichnet,

$$\kappa = \frac{\Sigma}{\Sigma_{\text{crit}}}. \quad (4.20)$$

Damit ergibt sich der Ablenkwinkel zu

$$\boldsymbol{\alpha} = \frac{1}{\pi} \int \kappa(\boldsymbol{\theta}') \frac{\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}'}{|\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}'|^2} d^2\theta' \quad (4.21)$$

und das Potential zu

$$\psi = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \kappa(\boldsymbol{\theta}') \ln |\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}'|^2 d^2\theta'. \quad (4.22)$$

Die Bedingung $\kappa > 1$ für einen Punkt in der Linsenebene ist eine hinreichende Bedingung, dass durch die Linse Mehrfachbilder erzeugt werden. Lokal können wir eine Gravitationslinse durch die Jacobi-Matrix der Linsengleichung

$$\mathcal{A}(\boldsymbol{\theta}) = \frac{\partial \boldsymbol{\beta}}{\partial \boldsymbol{\theta}} \quad (4.23)$$

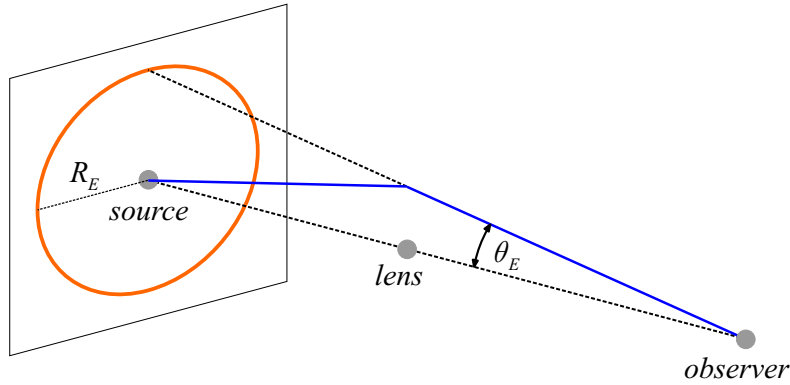


Abbildung 4.3: Entstehung eines Einsteinringes bei einer Punktmasse. Beobachter, Linse und Quelle liegen auf der gemeinsamen Verbindungsgeraden, so dass das entstehende Bild die Form eines Kreisringes hat. Mit θ_E wird der Öffnungswinkel des Einsteinradius bezeichnet, mit R_E sein Radius (hier in der Quellebene).

beschreiben. Die Komponenten von $\mathcal{A}(\boldsymbol{\theta})$ sind dabei durch

$$\mathcal{A}_{ij} = \frac{\partial \beta_i}{\partial \theta_j} = \delta_{ij} - \frac{\partial \alpha_i}{\partial \theta_j} \quad (i, j = 1, 2) \quad (4.24)$$

gegeben. Damit kann die Jacobi-Matrix \mathcal{A} dargestellt werden durch

$$\mathcal{A}(\boldsymbol{\theta}) = \begin{pmatrix} 1 - \kappa - \gamma_1 & -\gamma_2 \\ -\gamma_2 & 1 + \kappa + \gamma_1 \end{pmatrix}. \quad (4.25)$$

Die Matrix \mathcal{A} beschreibt die Form und die Größe der durch den Gravitationslinseneffekt entstehenden Bilder. Die Auswirkung der verschiedenen Komponenten in \mathcal{A} lässt sich am besten anhand einer kreisförmigen Quelle darstellen. Die Massendichte κ führt zu einer isotropen Größenänderung dieses Kreises, κ wird daher auch als Konvergenz oder Ricci-Fokus bezeichnet. Durch die Scherung (*shear*)

$$\gamma = \sqrt{\gamma_1^2 + \gamma_2^2} \quad (4.26)$$

wird das Bild der kreisförmigen Quelle zu einer Ellipse deformiert.

4.3 Kritische Kurven und Kaustiken

Durch den Gravitationslinseneffekt ändert sich, wie im vorherigen Abschnitt beschrieben, die Form und die Größe der Bilder im Vergleich zur Quelle. Da aber die Flächenhelligkeit konstant bleibt, ändert sich dadurch ebenfalls der von der Quelle empfangene Fluss. Beschrieben wird dies durch den Verstärkungsfaktor μ , der sich aus der Determinante der Jacobi-Matrix \mathcal{A} durch

$$\mu = \frac{1}{\det \mathcal{A}(\boldsymbol{\theta})} = \frac{1}{(1 - \kappa)^2 - \gamma^2} \quad (4.27)$$

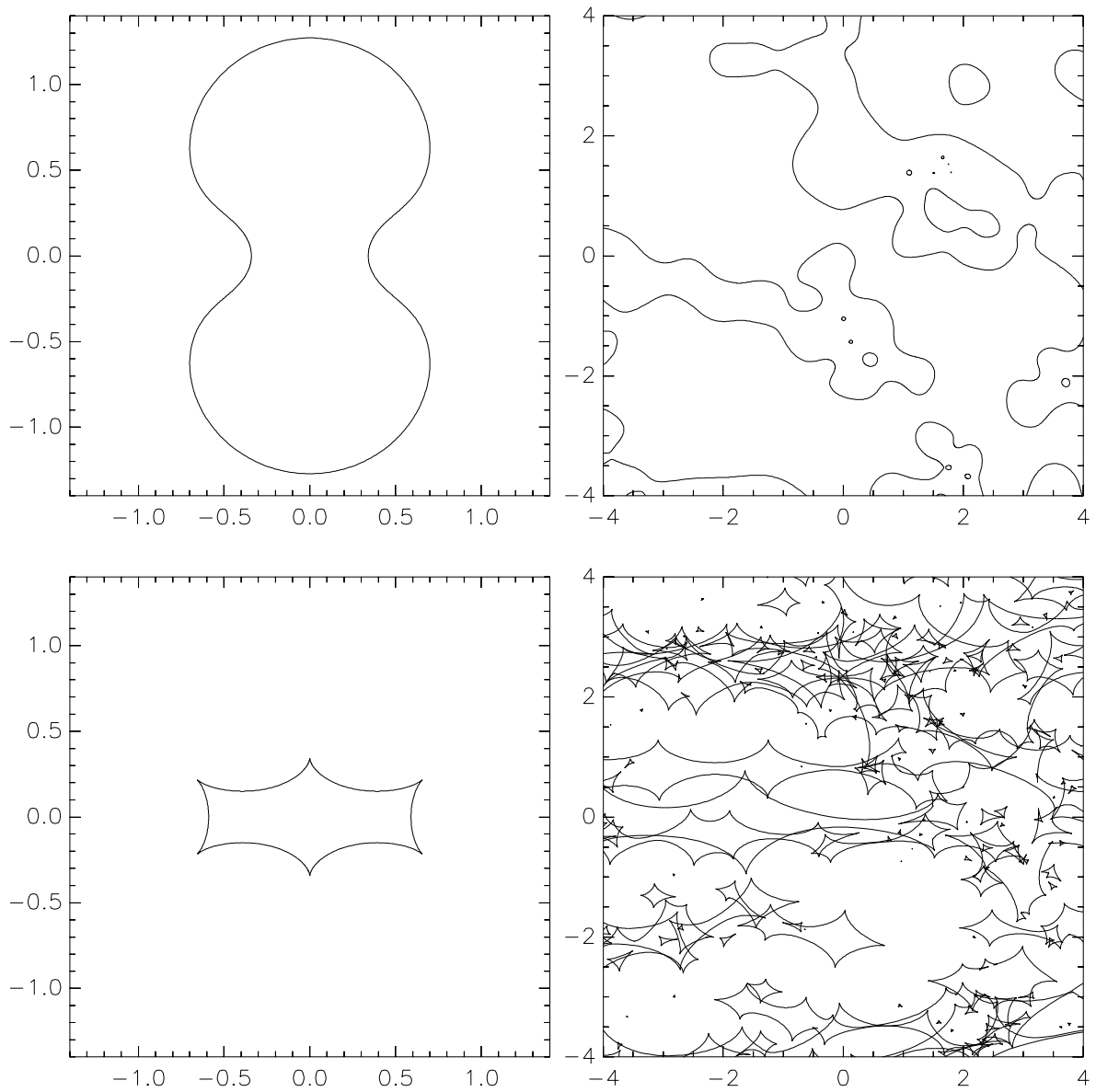


Abbildung 4.4: (Links) Kritische Kurven (oben) und Kaustiken (unten) für eine Doppellinse mit $m_1 = m_2 = 0,5M_0$. Die Linsen befinden sich bei $x = 0$ und $y = \pm 0,5$. Die Längeneinheit ist der Einsteinradius R_E für die Masse $1M_0$.

(Rechts) Kritische Kurven (oben) und Kaustiken (unten) für ein Linsensystem aus mehreren Punktmassen. Die Längeneinheit ist ebenfalls der Einsteinradius R_E für die Masse $1M_0$. Die entsprechende Verstärkungskarte ist in [Abbildung 4.5](#) dargestellt.

ergibt. Dabei kann μ sowohl positive als auch negative Werte annehmen, die korrespondierenden Bilder werden mit positiver bzw. negativer Parität gekennzeichnet. Die beobachtete Verstärkung ist durch den Absolutbetrag $|\mu|$ gegeben.

An den Stellen, an denen die Determinante $\det \mathcal{A}(\boldsymbol{\theta})$ den Wert Null annimmt, wird die Verstärkung formal unendlich hoch. Diese Stellen werden als Singularitäten bezeichnet. Man unterscheidet zwischen den Singularitäten in der Linsenebene, den kritischen Kurven und den dazu korrespondierenden Kaustiken in der Quellebene.

Eine unendlich hohe Verstärkung erscheint zunächst physikalisch unsinnig, aber in realen Linsensituationen sind die Quellen räumlich ausgedehnt und die gesamte Verstärkung ergibt sich durch Mittelung der Verstärkung über die Quelle und bleibt dadurch endlich.

Für eine einzelne Punktmasse ist die Verstärkung durch

$$\mu = \frac{y^2 + 2}{y\sqrt{y^2 + 4}} \quad (4.28)$$

gegeben mit $y = \frac{\beta}{\theta_E}$. Die Kaustik besteht somit aus einem einzelnen Punkt am Ort der Linse, die kritische Kurve ist in diesem Fall gerade der Einsteinring.

Für Linsensysteme aus mehreren Punktmassen sind die Kaustiken nicht mehr punktförmig, sondern bilden geschlossene Kurven. In Abbildung 4.4 sind die kritischen Kurven und Kaustiken für eine Doppellinse und für ein Ensemble aus vielen Einzellinsen dargestellt. Die Berechnung erfolgte mit einer von Witt erarbeiteten Methode [Wit90, Wit91].

Abbildung 4.5 zeigt die Verstärkungskarte des Linsenensembles, die mit dem Ray-Tracing-Programm von Wambsganss berechnet wurde [Wam99].

Aus den Abbildungen ist zu erkennen, dass die Kaustiken geschlossene, sich teilweise überschneidende Kurven bilden. Die kritischen Kurven bilden geschlossene, sich nicht überschneidende Kurven.

Eine mathematische Beschreibung der Linsenabbildung in der Nähe der kritischen Punkte erfolgt auf Grundlage der Katastrophentheorie bzw. Singularitätentheorie. Dadurch kann gezeigt werden, dass zwei Klassen von Singularitäten auftreten, die sich durch das Verhalten des Gradienten ∇D der Determinanten $D = \det \mathcal{A}$ unterscheiden [SEF92]:

Cusp-Kaustiken Bei den Cusp-Kaustiken verschwindet der Gradient $\nabla D = 0$. Sie sind die Eckpunkte der Fold-Kaustiken.

Fold-Kaustiken Die Fold-Kaustiken haben einen nichtverschwindenden Gradienten $\nabla D \neq 0$. Sie bilden geschlossenen Kurven.

In Abbildung 4.6, ein Ausschnitt des in Abbildung 4.4 gezeigten Kaustik-Felds, sind die beiden Kaustik-Typen dargestellt.

Für die Anwendung des Mikrolensing sind vor allem die Fold-Kaustiken interessant, da sich beim Überschreiten einer Fold-Kaustik die Verstärkung des Linsensystems drastisch ändert. Dargestellt ist dies in Abbildung 4.5, in der die Verstärkung entlang der in der Karte eingezeichneten Linie dargestellt ist. Erkennbar ist, dass zwischen den Kaustiken die Verstärkung stark von dem Abstand zu Kaustik abhängt, während außerhalb die Verstärkung nur gering und annähernd konstant ist. Auffallend ist außerdem der typische ‚M‘-förmige Verlauf der Verstärkung zwischen den Kaustiken. Wenn wir im folgenden von

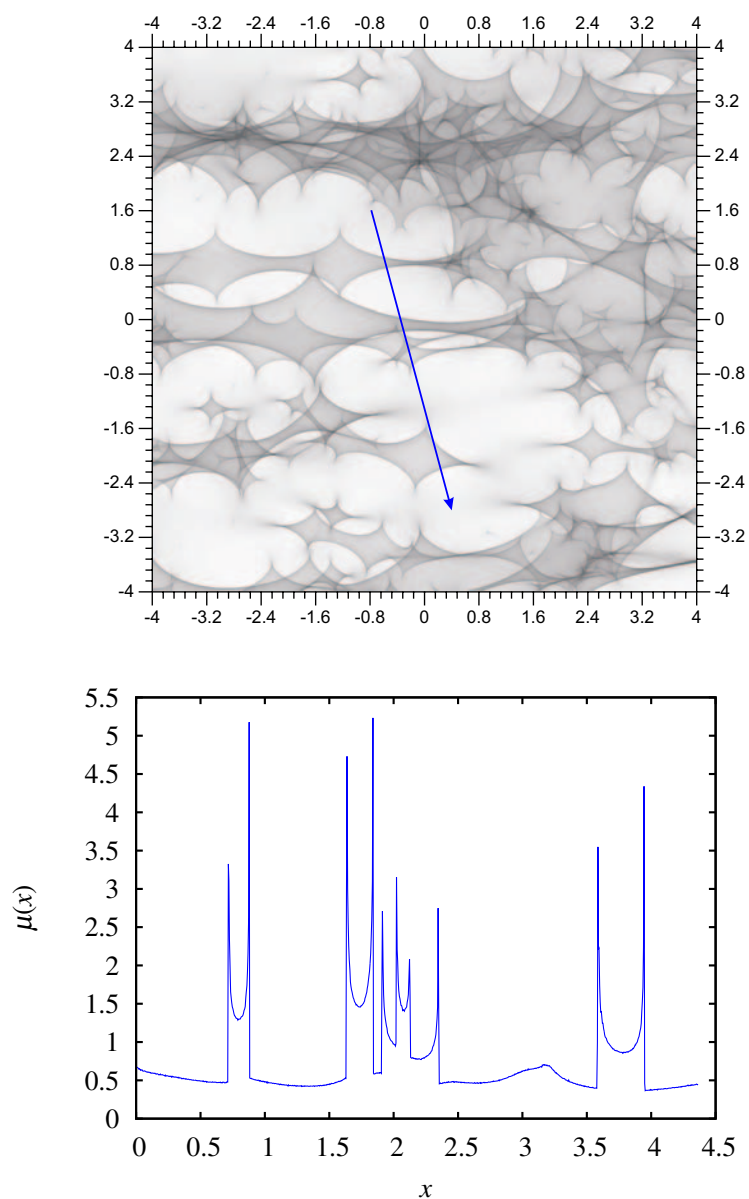


Abbildung 4.5: (Oben) Verstärkungskarte eines Ensembles von Punktmassen. Die Verstärkung nimmt dabei von den helleren Bereichen zu den dunkleren zu. Die mittlere Mas sendichte beträgt $\kappa = 0,36$, die Wert für die Scherung $\gamma = 0,4$. Die korrespondierenden Kaustiken sind in Abbildung 4.4 dargestellt. (Unten) Verstärkung entlang der eingezeichneten Linie. Bei den Fold-Kaustiken tritt der typische ‚M‘-förmige Verlauf der Verstärkung auf.

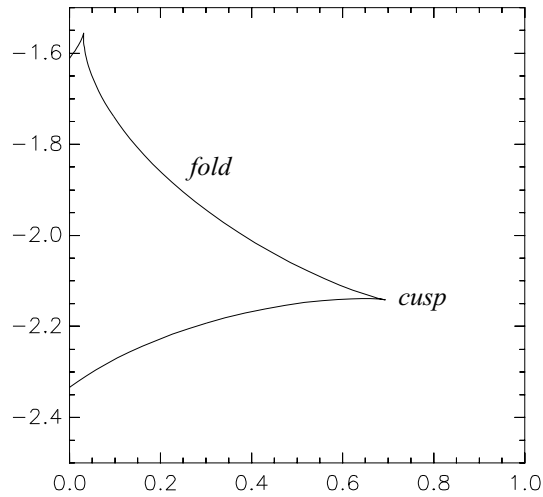


Abbildung 4.6: Ausschnitt aus dem Kaustik-Feld von Abbildung 4.4.

Mikrolensing-Ereignissen sprechen, meinen wir, wenn nicht anders angegeben, damit das Überqueren einer Fold-Kaustik (Kaustik-Crossing).

Lokal ist es möglich, eine Fold-Kaustik durch eine Gerade zu approximieren. Die Verstärkung in der Nähe einer Kaustik hängt dann davon ab, auf welcher Seite der Kaustik wir uns befinden. Für die Gebiete innerhalb kann man bei der lokalen Beschreibung zeigen, dass die Verstärkung einer Punktquelle vom Abstand Δy zur Kaustik abhängt mit

$$\mu = \frac{k}{\sqrt{\Delta y}}, \quad (4.29)$$

während die Gebiete außerhalb eine verschwindende Verstärkung $\mu = 0$ aufweisen.

Der Faktor k gibt die Stärke der Kaustik an und wird mitunter als Flussfaktor bezeichnet. Der Wert von k ist von der Größenordnung 1, falls wir Koordinaten verwenden, die entsprechend Gleichung 4.17 auf den Einstein-Radius normiert wurden.

4.4 Mehrfachquasare

Seit der Entdeckung des ersten Gravitationslinsensystems, dem 1979 gefundenen Doppelquasar 0957+561, wurden mehr als 80 gelinste Quasare gefunden, darunter auch eine Vielzahl von Systemen, die mehr als zwei Bildern aufweisen. Der typische Abstand zwischen den Quasarbildern bei diesen Systemen liegt im Bogensekundenbereich, es ist erst ein System mit einem Bildabstand von über $10''$ bekannt, der 2003 von Inada et al. entdeckte Vierfach-Quasar SDSS J1004+4112 mit einem maximalen Bildabstand von $14''.62$ [IOP⁺03]. Eine, allerdings nicht vollständige Übersicht, über die bekannten Quasargravitationslinsensystemen gibt der Castles-Survey [CAS].

Um ein Gravitationslinsensystem von zufällig nahe beieinander stehenden Quasaren unterscheiden zu können, werden üblicherweise die drei folgenden Kriterien herangezogen:

1. Die Spektren der Quasarbilder müssen die gleiche Rotverschiebung aufweisen
2. Die Spektren sollten einen ähnlichen Verlauf aufweisen.
3. Zwischen uns und dem Quasar sollte sich eine als Gravitationslinse wirkende Galaxie bzw. ein Galaxienhaufen befinden

Das wichtigste Kriterium zur Unterscheidung ist die Forderung nach der identischen Rotverschiebung. Nur wenn für Bilder die gleiche Rotverschiebung beobachtet wird, kann es sich um ein gelinstes System handeln. Die beiden anderen Kriterien liefern dann Hinweise, um zu entscheiden, ob es sich tatsächlich um ein Gravitationslinsensystem handelt. Allerdings können auch bei einem gelinsten System die Spektren unterschiedlich sein. Da die einzelnen Bilder getrennte Lichtwege aufweisen, kann auf diesen Wegen beispielsweise eine unterschiedliche Extinktion auftreten. Auch Mikrolensing, auf das wir weiter unten eingehen werden, kann die Spektren der einzelnen Bilder unterschiedlich beeinflussen.

Die Entdeckung einer als Gravitationslinse wirkenden Galaxie bzw. ein Galaxienhaufen gibt weitere Hinweise auf das Vorhandensein eines Gravitationslinsensystems. Allerdings ist es in vielen Fällen schwierig, eine Linse zu erkennen, da sie in der Regel eine viel geringere Helligkeit als die Quasarbilder aufweist. Nicht auszuschließen ist außerdem die Existenz von Linsen, die aus dunkler Materie bestehen, die somit optisch überhaupt nicht zu erkennen sind.

Aus der Beobachtung eines gelinsten Quasars ist es möglich, die Masse der Gravitationslinse und ihre Verteilung zu bestimmen. Dazu versucht man, ein Modell für die großräumige Massenverteilung an die Positionen und Helligkeiten der beobachteten Quasarbilder anzupassen. Zur Beschreibung von Linsengalaxien werden dabei unterschiedliche Modelle wie isotherme Ellipsoide und de Vaucouleurs-Profile verwendet, es existieren daneben aber eine Reihe weiterer Modelle. Ein Überblick findet sich bei Keeton [Kee01].

Durch die Wirkung der Gravitationslinse erreicht das Licht der einzelnen Quasarbilder den Beobachter auf verschiedenen Wegen. Da die Lichtlaufzeit der einzelnen Wege unterschiedlich sein kann, erreicht ein Signal der Quelle einen Beobachter nicht mehr unbedingt zur gleichen Zeit, es kommt zu einem Laufzeitunterschied Δt (*time delay*). Die Bestimmung des Laufzeitunterschieds für ein konkretes System ist in der Praxis oft schwierig, der Castle-Survey gibt aktuell daher nur für 10 der über 80 aufgeführten Systeme ein gemessenes Time-Delay an. Die Größenordnung reicht dabei von einigen Tagen bis mehreren hundert Tagen. Da das Time-Delay von den Entfernungen von Beobachter, Linse und Quelle abhängt, kann die Messung von Δt auch zur Bestimmung der Hubble-Konstante H_0 genutzt werden, wie 1964 von Refsdal gezeigt wurde [Ref64].

4.5 Mikrolensing bei Quasaren

Die großräumige Massenverteilung einer Gravitationslinse bedingt die Anzahl, Positionen und Helligkeiten der beobachteten Quasarbilder. Dieser Effekt wird als Makrolensing bezeichnet. In vielen Fällen verläuft der Lichtweg der gelinsten Quasarbilder allerdings auch durch Teile der Linsengalaxie und hier können die einzelnen Sterne in der Galaxie ebenfalls als Gravitationslinsen wirken. Dies wird als der Mikrogravitationslinseneffekt

(Mikrolensing) bezeichnet, da der Abstand der sich dadurch ergebenden Bilder von der Größenordnung von 10^{-6} arcsec ist. Eine Auflösung der einzelnen Bilder ist daher mit den heutzutage zur Verfügung stehenden Techniken nicht möglich. Mikrolensing kann nur durch den Einfluss auf die Helligkeit der durch das Makrolensing erzeugten Quasarbilder beobachtet werden. Um den Effekt von Mikrolensing am Ort der beobachteten Bilder zu beschreiben, ersetzen wir die kontinuierliche Massenverteilung durch ein Ensemble von Punktmassen, deren Flächenmassendichte κ und Scherung γ durch das Massenpotential der Linsengalaxie gegeben ist. Die Verstärkungskarte eines solchen Systems hatten wir in Abbildung 4.5 vorgestellt.

In einem Punktmassenensemble sind die Abbildungseigenschaften stark ortsabhängig. Ändern sich nun im Laufe der Zeit durch eine relative Bewegung von Beobachter, Galaxie und Quelle die Abbildungseigenschaften, kann es durch das Mikrolensing zu einer Helligkeitsvariation der beobachteten Quasarbilder kommen und es ist dadurch möglich, den Mikrogravitationslinseneffekt in den Lichtkurven nachzuweisen.

Mikrolensing konnte inzwischen in den Lichtkurven von Gravitationslinsensystemen nachgewiesen werden. Am deutlichsten wurde dieser Effekt beim Vierfachquasar Q2237+0305 beobachtet. In Abbildung 4.7 ist die Lichtkurve der vier Komponenten von Q2237+0305 dargestellt. Die Daten stammen von den OGLE¹-Beobachtungen [WUS+00]. Da der vermutete Laufzeitunterschied Δt des Systems unter einem Tag liegt [WP94], können intrinsische Variationen als Ursache der beobachteten Helligkeitsänderungen des Quasars ausgeschlossen werden.

Neben dem Einfluss auf die Gesamthelligkeit der Quasarbilder kann Mikrolensing auch zu einem chromatischen Effekt führen. So kommt es für eine ausgedehnten Quelle durch Mikrolensing zu einer unterschiedlichen Verstärkung der verschiedenen Gebiete der Quelle. Bei den Akkretionsscheiben von Quasaren geht man davon aus, dass ihre Temperatur zum Zentrum hin ansteigt, sie zeigen daher eine unterschiedliche Größe in verschiedenen Wellenlängenbereichen. Wambsgans und Paczyński zeigten, dass Mikrolensing bei einer solchen Quelle zu unterschiedlichen Lichtkurven in verschiedenen Wellenlängenbereichen führen kann [WP91].

Auch das Profil von Spektrallinien kann Mikrolensing beeinflussen. Das konnten Schneider und Wambsgans für verschiedene Modelle der Broad-Line-Region eines Quasars zeigen [SW90]. Eine Beobachtung dieses Effektes steht aber noch aus.

4.6 Stellares Mikrolensing

Außer bei gelinsten Quasaren wird Mikrolensing auch an Sternen der Milchstraße und benachbarter Galaxien wie den Magellan'schen Wolken und der Andromedagalaxie M31 beobachtet. Zu erwähnen sind hier vor allem die Beobachtungen des OGLE-Teams, das regelmäßig im Zentrum unserer Galaxis und in den Magellan'schen Wolken nach Helligkeitsänderungen von Sternen sucht, um damit unter anderem rechtzeitig Mikrolensing-Ereignisse zu entdecken [UKS97], die dann detailliert von anderen Teams wie der PLANET-Kollaboration [SAB⁺] beobachtet werden. Seit Beginn der OGLE-Beobachtungen wur-

¹Optical Lensing Gravitational Experiment

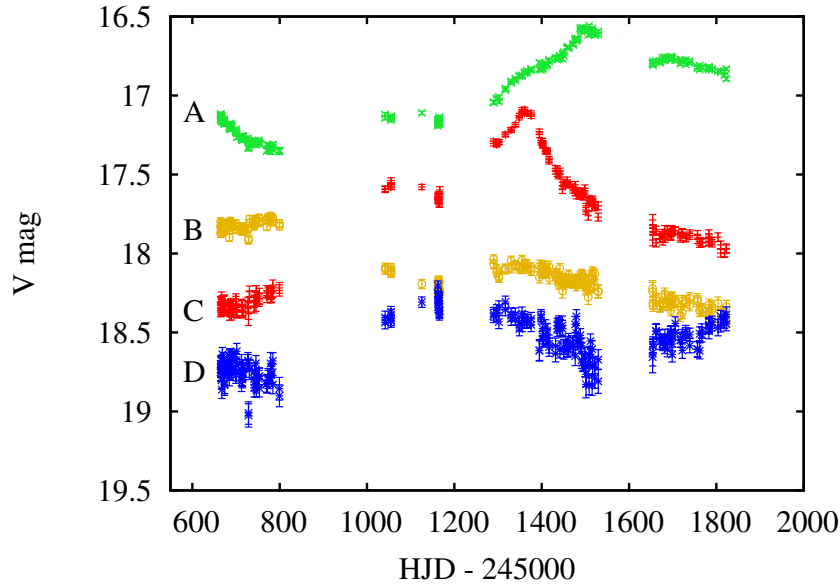


Abbildung 4.7: Lichtkurve der vier Komponenten des Quasars QSO 2237+0305 [WUS+00]

den mehrere hundert Mikrolensing-Ereignisse entdeckt, darunter auch mehrere Kaustik-Crossings.

Im Gegensatz zum Quasarmikrolensing ist die Massendichte in der Milchstraße so gering, dass nur Ereignisse an einzelnen Sternsystemen auftreten.

4.7 Kaustik-Crossing

Die Bewegung der Quelle relativ zum Verstärkungsfeld der Linsengalaxie führt, wie wir gesehen haben, zu einer Änderung der beobachteten Helligkeit der Quelle. Besonders drastische Änderungen entstehen dabei, wenn die Quelle durch eine Fold-Kaustik überschritten wird (Kaustik-Crossing). Im folgenden wollen wir annehmen, dass die Quelle klein genug ist, so dass wir die Kaustik durch eine gerade Linie annähern können. Nach Grieger et al [GKS91] sollte die Größe der Quelle dafür maximal $0,1 R_E$ sein.

Der von der Quelle empfangene Fluss ist durch die Faltung der Verstärkung der Gravitationslinse mit dem Helligkeitsprofil der Quelle gegeben. Bei einer Fold-Kaustik werden die von der Kaustik gleich weit entfernten Bereiche der Quelle um den gleichen Faktor verstärkt, der zum Zeitpunkt t bzw. der entsprechenden Kaustik-Position x beobachtete Fluss $\tilde{f}(x) = \tilde{f}(x(t))$ der Quelle ergibt sich dann durch die Faltung des eindimensionalen Helligkeitsprofils $g(\xi)$ der Quelle mit der Verstärkungsfunktion (4.29) der Kaustik

$$\tilde{f}(x) = \int_{\text{source}} A(x - \xi) g(\xi) d\xi + f_0(x). \quad (4.30)$$

Dabei ist $x(t)$ die Position, die die Kaustik zum Zeitpunkt t hat. A ist die Verstärkungs-

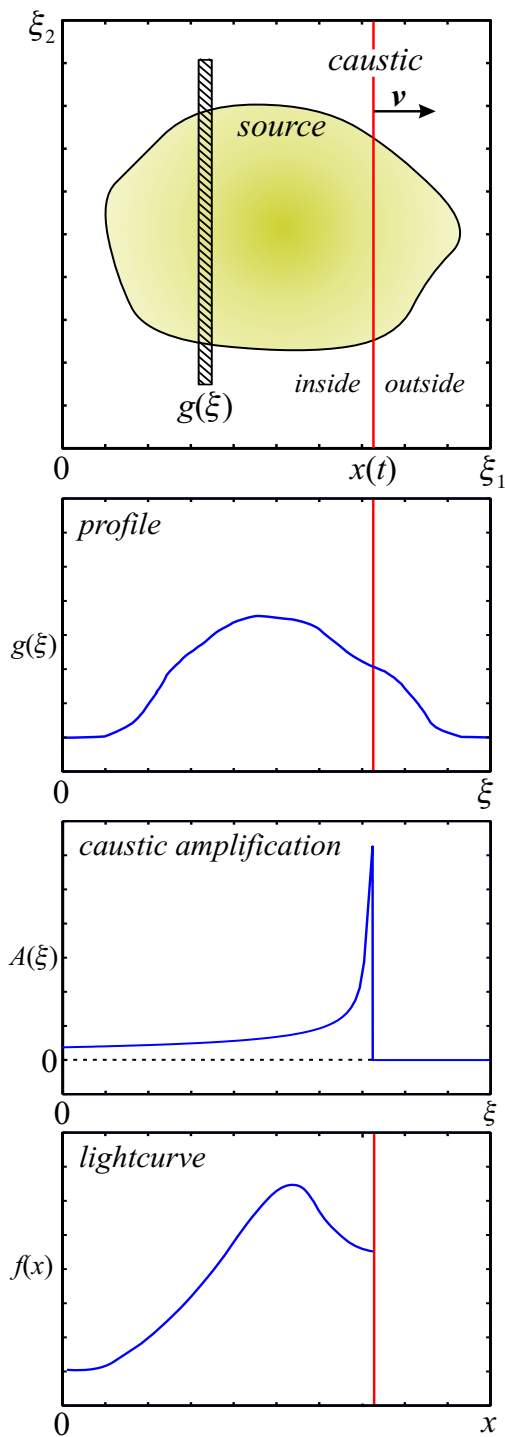


Abbildung 4.8: Darstellung eines Kaustik-Crossing-Ereignisses. **(1)** Quelle mit überschreitender Kaustik. **(2)** Eindimensionales Helligkeitsprofil $g(\xi)$, das sich durch Integration parallel zur Kaustik über die Helligkeitsverteilung der Quelle ergibt. **(3)** Verstärkungsfunktion $A(\xi)$ der Kaustik. Außerhalb der Kaustik ist die Verstärkung Null, innerhalb fällt sie mit der inversen Wurzel des Abstands ab. **(4)** Beobachtete Lichtkurve $f(x)$. Der aktuelle Helligkeitswert ergibt sich aus der Faltung des eindimensionalen Profils $g(\xi)$ mit der Kaustik-Verstärkung $A(\xi)$.

funktion der Kaustik,

$$A(x - \xi) = \begin{cases} \frac{k}{\sqrt{x-\xi}} & \xi \leq x \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}, \quad (4.31)$$

wobei wir die Koordinaten so wählen, dass die Bewegung der Kaustik in Richtung positiver ξ erfolgt.

$f_0(x)$ ist ein zusätzlicher Beitrag zum Fluss, der durch andere nicht aufgelöste Mikrobilder entsteht, der in erster Näherung durch einen linearen Verlauf $f_0(x) = \tilde{f}_0(x - x_o)$ approximiert werden kann.

Die Lichtkurve enthält nun die Information über das eindimensionale Helligkeitsprofil der Quelle, die man im Prinzip wieder aus den Lichtkurven erhalten kann. Dazu gibt es zwei Möglichkeiten:

1. Wir nehmen ein physikalisches Modell, von dem wir annehmen, das es eine gute Beschreibung der Eigenschaften der Quelle ist und fitten dieses an die Lichtkurve an.
2. Wir bestimmen das Helligkeitsprofil direkt durch eine Entfaltung der Lichtkurve.

In dieser Arbeit werden wir uns mit der letzteren Methode beschäftigen. Dafür sind aber spezielle mathematische Methoden, die Regularisierungsverfahren, nötig. Darauf werden wir im Abschnitt 6 genauer eingehen.

Um die Lichtkurve entfalten zu können, müssen wir den Fluss $f_0(x)$ vom beobachteten Fluss $\tilde{f}(x)$ subtrahieren. Wir nehmen an, dass wir dafür $f_0(x)$ mit ausreichender Genauigkeit bestimmen können und erhalten die Gleichung

$$f(x) = \tilde{f}(x) - f_0(x) = \int_{\text{source}} A(x - \xi)g(\xi) d\xi, \quad (4.32)$$

für $f(x)$, aus dem wir das Profil $g(\xi)$ bestimmen wollen.

Damit wissen wir aber noch nicht die absolute Größe der Quelle, da wir nicht die tatsächlichen Positionen $x(t)$ der Kaustik kennen. Nur wenn wir Annahmen über Geschwindigkeit \mathbf{V} , mit der sich die Kaustik über die Quelle bewegt, haben, können wir die tatsächliche Größe der Quelle bestimmen. Weiterhin benötigen wir Kenntnis über Größe des Einsteinradius R_E in der Quellebene, den wir aber durch die Annahme, dass die Masse der meisten Sterne zwischen $0,3M_\odot - 1M_\odot$ liegt, abschätzen.

Schwieriger ist die Bestimmung der Kaustik-Geschwindigkeit, die als effektive Transversalgeschwindigkeit \mathbf{V} bezeichnet wird. Sie hängt ab von den Geschwindigkeiten von Beobachter \mathbf{v}_{obs} , Linse \mathbf{v}_L und Quelle \mathbf{v}_S [KRS86],

$$\mathbf{V} = \frac{1}{1 + z_L} \frac{D_{LS}}{D_L} \mathbf{v}_{\text{obs}} - \frac{1}{1 + z_L} \frac{D_S}{D_L} \mathbf{v}_L + \frac{1}{1 + z_S} \mathbf{v}_S. \quad (4.33)$$

Für das System Q 2237+030 wurde von Wyithe et al. aus der Analyse der einen Zeitraum von 10 Jahren umfassenden OGLE-Daten von Q 2237+030 eine obere Grenze für die effektive Transversalgeschwindigkeit von $\mathbf{V} = 500 \text{ km s}^{-1}$ gefunden [WWT99]. Ein ähnliches Resultat erhält Gil-Merino aus den GLITP-Daten [AMM+02], die von ihm bestimmte

obere Grenze liegt bei $V \simeq 600 \text{ km s}^{-1}$ unter der Annahme, dass die Mikrolinsen eine Masse von $0,1M_{\odot}$ haben. Für Mikrolinsen der Masse $1M_{\odot}$ folgt ein höherer Wert für die obere Grenze der Transversalgeschwindigkeit von $V \simeq 2000 \text{ km s}^{-1}$ [GM03].

Eine interessante Methode, um die Transversalgeschwindigkeit exakt zu bestimmen, schlagen Grieger et al. vor [GKR88]. Danach ist es möglich, die Transversalgeschwindigkeit aus dem zeitlichen Abstand der Mikrolensing-Ereignisse für zwei räumlich getrennte Beobachter zu erhalten. Allerdings muss der Abstand ausreichend groß sein ($\geq 1 \text{ AU}$), so dass dies nur durch Beobachtungen von Satelliten aus möglich ist.

Bis jetzt haben wir nur die relativen Bewegungen von Quelle, Linse und Beobachter betrachtet, aber auch die einzelnen Mikrolinsen in der Linsengalaxie bewegen sich. Wichtig ist dabei vor allem die Bewegung der einzelnen Mikrolinsen mit einer zufällig verteilten Geschwindigkeitskomponente, die durch die Geschwindigkeitsdispersion beschrieben wird. Sie führt dazu, dass das Verstärkungsfeld nicht statisch bleibt, sondern sich im Laufe der Zeit ändert.

Kundić und Wambsgans konnten zeigen, dass eine Geschwindigkeitsdispersion der Mikrolinsen zu einer Änderung der Kaustikstruktur im Verstärkungsfeld führt, in der sich die Positionen der Kaustiken verschieben [KW93]. Dadurch wird die Zeitdauer der Mikrolensing-Ereignisse gegenüber einem statischen System verkürzt. Außerdem treten diese Ereignisse häufiger auf [WK95]. Überwiegt die Transversalgeschwindigkeit des Systems gegenüber der Geschwindigkeitsdispersion, so können wir für die Beschreibung eines Mikrolensing-Ereignisses in erster Näherung die individuelle Bewegung der einzelnen Linsen vernachlässigen.

5 Mikrolensing in Quasarspektren

Im Zeitraum 2.9.2002 bis 5.9.2002 wurden am 3,5 m-Teleskop auf dem Calar Alto mehrere gelinste Quasare mit dem am Potsdamer Astrophysikalischen Institut entwickelten PMAS-Instrument, einem Integral-Field-Spektrografen, beobachtet. Die Untersuchungen hatten die Zielsetzung, in den Spektren der Quasare Hinweise auf Mikrolensing in den Systemen zu finden. Beobachtet wurden das Vierfachsystem HE 0435–1223 und die Doppelquasare UM 673 (Q 0142-100) und HE 0047–1756.

5.1 Mikrolensing und Quasarspektren

Die Strahlung eines Quasares entstammt, wie wir gesehen haben, nicht einer einzelnen Quelle, sondern wird in unterschiedlichen Regionen erzeugt. So kommt die in den Spektren beobachtete Linienemission aus einem Gebiet, das sehr viel größer als die Kontinuumsregion ist.

Durch Mikrolensing kann es zu einer unterschiedlichen Verstärkung der verschiedenen Gebiete eines Quasares kommen. Insbesondere sollte vor allem der Fluss der Kontinuumsregion eines Quasares aufgrund ihrer im Vergleich zur Broad-Line-Region deutlich geringeren Größe durch Mikrolensing beeinflusst werden. Dies sollte sich durch Unterschiede in dem Kontinuumsfluss der einzelnen Komponenten bemerkbar machen. Durch einen Vergleich von Linienfluss und Kontinuumsfluss der Spektren untereinander sollte dieser Effekt erkennbar sein.

Die Suche nach Anzeichen von Mikrolensing bei gelinsten Quasaren hat unter anderem die Zielsetzung, festzustellen, welche Systeme überhaupt durch Mikrolensing beeinflusst werden. Bei solchen Systemen kann dann versucht werden, mit Hilfe von Mikrolensing diese Objekte genauer zu untersuchen.

Um festzustellen, ob Anzeichen für Mikrolensing vorliegen, müssen wir die Linienemission einer Spektrallinie mit der Kontinuumsmission in den einzelnen Spektren miteinander vergleichen. Ein quantitatives Maß dafür ist die Äquivalentbreite

$$W_e = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \frac{S(\lambda) - I(\lambda)}{I(\lambda)} d\lambda \quad (5.1)$$

einer Spektrallinie. Dabei ist $S(\lambda)$ der totale Fluss bei der Wellenlänge λ und $I(\lambda)$ der Kontinuumsfluss. Die Wellenlängen λ_1 und λ_2 geben dabei das Intervall an, in dem sich die Linie befindet.

Neben Mikrolensing können aber auch intrinsische Variabilitäten zu einem unterschiedlichen Linien-zu-Kontinuum-Verhältnis in den Spektren eines Quasares führen. Eine sichere

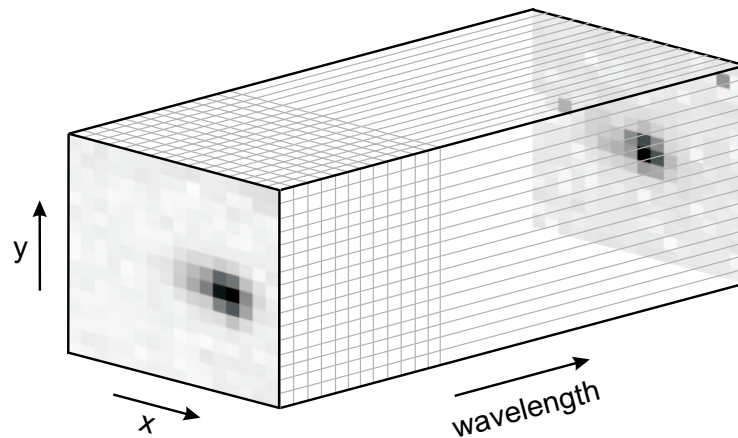


Abbildung 5.1: Datenkubus des PMAS-Instruments.

Bestätigung für Mikrolensing kann man dann allerdings durch mehrfache Beobachtungen unter Berücksichtigung des Time-Delays erhalten.

Bei einigen untersuchten Quasarlinsensystemen konnten spektrale Hinweise auf Mikrolensing entdeckt werden. So wurden von Wisotzki et al. in den Spektren des Doppelquasars HE 1104–1805 Unterschiede zwischen dem Linien-zu-Kontinuum-Verhältnis der Emissionslinien beobachtet. Darüber hinaus scheint durch Mikrolensing auch die Kontinuumskomponente in diesem System beeinflusst zu sein, die A-Komponente weist einen deutlich höheren Kontinuumsfluss im blauen Bereich auf. Die Ursache für diesen chromatischen Effekt ist eine unterschiedliche Verstärkung verschiedener Teile der Akkretionsscheibe [WKKR93].

Lewis et al. beobachteten 1991 und 1994 den Vierfachquasar Q 2237+030, ein System, von dem durch die OGLE-Beobachtungen bekannt ist, dass in ihm Mikrolensing auftritt. In den von Lewis untersuchten Spektren sind daher auch deutliche Hinweise auf Mikrolensing zu finden, die Äquivalentbreiten der einzelnen Komponenten weisen signifikante Unterschiede auf [LIHF98]. Weiterhin wurde eine zeitliche Variation der Äquivalentbreiten festgestellt. Der Einfluss des Mikrolensings ist also zeitlich variabel, was ebenfalls durch die OGLE-Daten bestätigt wird.

Beim Doppelquasar HE 0512–3329 wurden in HST-Spektren von Wucknitz et al. ebenfalls Hinweise auf Mikrolensing in dem System entdeckt [WWLG03]. Daneben wird in den Spektren beider Quasarbilder eine unterschiedlich ausgeprägte Extinktion beobachtet.

Wir wollen anhand der Spektren von drei Objekten, dem Vierfachquasar HE 0435–1223 und den Doppelquasaren UM 673 (Q 0142-100) und HE 0047–1756 untersuchen, ob es in diesen Systemen Anzeichen für Mikrolensing gibt. Die Objekte wurden im Zeitraum zwischen dem 2.9.2002 und dem 5.9.2002 mit dem 3,5-m-Teleskop auf dem Calar Alto beobachtet. Zum Einsatz kam der am Potsdamer Astrophysikalischen Institut entwickelte PMAS-Spektrograph.

5.2 Das PMAS-Instrument

Das PMAS¹-Spektrometer ist ein Instrument, das am Astrophysikalischen Institut in Potsdam zur Integral-Field-Spektroskopie entwickelt wurde. Bei dieser Technik ist es möglich, ein zweidimensionales Gebiet räumlich aufgelöst während einer einzelnen Beobachtung zu spektroskopieren. Gegenüber der Spaltspektroskopie bieten sich damit eine Reihe von Vorteilen [Sch01]:

- Es können gleichzeitig Systeme mit mehr als zwei Komponenten beobachtet werden. Bei der Spaltspektroskopie ist es notwendig, den Spalt entlang der Objekte auszurichten. Dadurch ist es nicht möglich, Systeme mit mehr als zwei Komponenten, die nicht auf einer Linie liegen, gleichzeitig zu spektroskopieren.
- Mögliche Seeingverluste werden verringert, die bei der Spaltspektroskopie aufgrund der endlichen Breite des Spaltes auftreten können.
- Der Einfluss der atmosphärischen Dispersion wird gemindert. Durch die Dispersion kommt es, abhängig von der Zenitdistanz, zu einer spektralen Zerlegung der Objektbilder. Die Richtung dieser Spektren und die Spaltrichtung sind im Allgemeinen nicht parallel, so dass es hierdurch zu Lichtverlusten kommen kann, oder, falls die Spaltbreite so groß gewählt wird, dass Lichtverluste minimiert werden, zu einer Verringerung der spektralen Auflösung.
- Außerdem verringert die Integral-Field-Spektroskopie den Aufwand für den beobachtenden Astronomen, da nicht länger ein Spalt entlang der Objekte ausgerichtet werden muss².

Das PMAS-Instrument befindet sich im Ritchey-Chrétien-Fokus des 3,5 m-Teleskops auf dem Calar Alto. Mit Hilfe einer Feldoptik wird das Öffnungsverhältnis des Teleskops auf $f/118$ reduziert. Das Licht fällt auf ein Array von 16×16 einzelnen Linsen (sogenannte Lenslets). Jede dieser Linsen hat eine Größe von $1 \text{ mm} \times 1 \text{ mm}$, entsprechend einer Auflösung von $0,5''$.

Von jeder Linse wird das Licht mittels einer Glasfaser einem Beugungsgitter zugeführt. Die entstehenden 256 Spektren werden gemeinsam auf einen CCD-Chip projiziert. Die Reduktion der daraus erhaltenen Rohdaten erfolgt mit der dafür entwickelten P3d-Software [Bec01].

Aus dem zweidimensionalen Feld des CCD wird dabei ein dreidimensionaler Datenkubus (Abbildung 5.1) der Größe $16 \times 16 \times n$ erzeugt, wobei die einzelnen 16×16 -Felder aus den monochromatischen Bildern der Objekte bei den entsprechenden Wellenlängen bestehen. Die Anzahl n der Wellenlängenintervalle in den Spektren liegt typischerweise bei etwa 1000.

Für die hier erfolgten Untersuchungen standen die bereits soweit reduzierten Daten zur Verfügung, aus denen dann für die weiteren Analysen die Spektren extrahiert wurden.

¹Potsdam Multi Aperture Spectrophotometer

²So war es am 3,5 m-Teleskop auf dem Calar Alto bis vor kurzem notwendig, das Teleskop in eine bestimmte Position zu bringen, um dann den Spalt direkt am Teleskop auszurichten. Inzwischen ist es aber möglich, dies ferngesteuert durchzuführen.

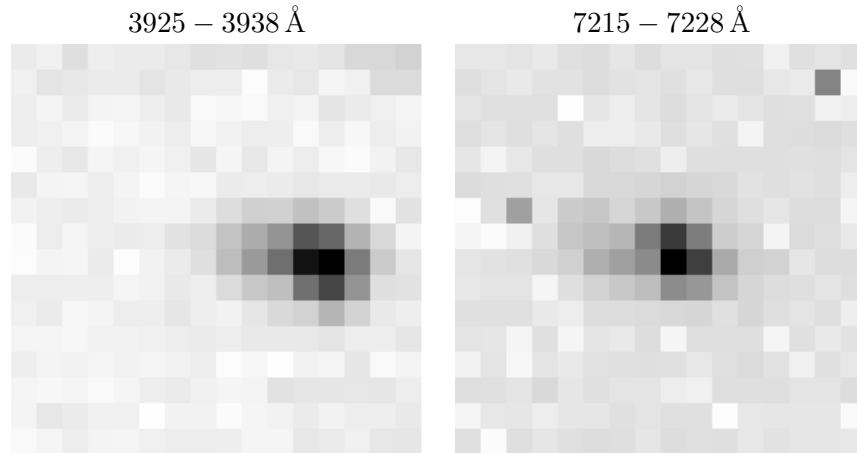


Abbildung 5.2: Die Bilder von HE 0047 (Spektrum 1) in zwei verschiedenen Wellenlängenbereichen. Die Seitenlänge beträgt $8''$. Deutlich ist zu erkennen, dass sich die Position der Quasarbilder ändert. Zur besseren Erkennbarkeit wurden jeweils 5 Bilder in den angegebenen Wellenlängenbereichen addiert.

5.3 Extraktion der Spektren

Bei der Extraktion der Spektren aus den Datenkuben sind zwei Effekte zu berücksichtigen:

- Durch die atmosphärischen Turbulenzen sind die punktförmigen Bilder der einzelnen Objekte zu einem Seeingscheibchen verformt, dessen Profil durch die PSF (*point spread function*) gegeben ist.
- Die atmosphärische Dispersion führt zu einer wellenlängenabhängigen Verschiebung der Bildpositionen. Abbildung 5.2 zeigt diese Verschiebung für die Bilder des Doppelquasars HE 0047–1756.

Die Extraktion der Spektren erfolgt durch einen Fit einer Kombination von n Gaußfunktionen an die n Komponenten des Quasarsystems, wobei wir davon ausgehen, dass die Halbwertsbreite für alle Komponenten gleich ist.

Insgesamt entsteht dadurch ein System aus $n \times 3 + 2$ Fitparametern, bestehend aus den zweidimensionalen Positionen der Zentren und den Amplituden der einzelnen Gaußfunktion, der Halbwertsbreite und einem Untergrundfluss. Der Fit erfolgt in mehreren Schritten. Als erstes werden alle Parameter variabel gehalten. Die damit erhaltenen Positionen und die Halbwertsbreite werden dann durch Polynome approximiert und nicht weiter variiert. Im folgenden, letzten Schritt wird nur noch die Amplitude der Gaußfunktion gefittet.

Aus den erhaltenen Parametern ergibt sich die Anzahl der Counts durch das Produkt von Amplitude und quadrierter Halbwertsbreite. Eine absolute Flusseichung erfolgt mit einem in gleicher Weise extrahierten Spektrum des Sterns HZ4.

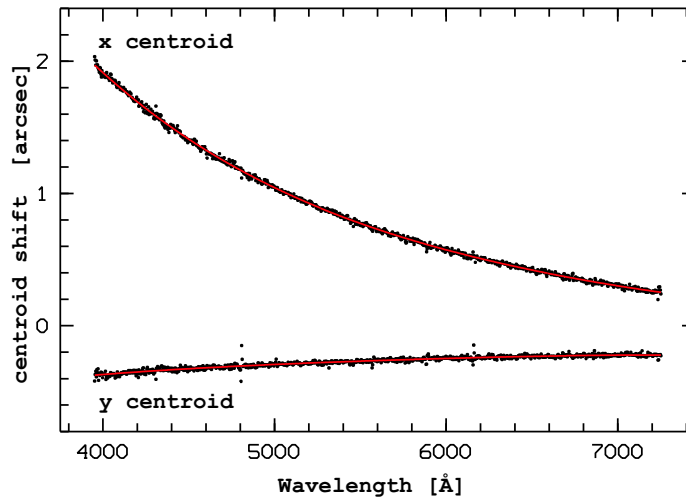


Abbildung 5.3: Verlauf der wellenlängenabhängigen Verschiebung der Position des Doppelquasars 0047–1756 in den PMAS-Daten. Dargestellt ist die sich nach dem Fit einer Gaußfunktion ergebende relative Position des Zentrums der A-Komponente von HE 0047–1756 in den PMAS-Daten.

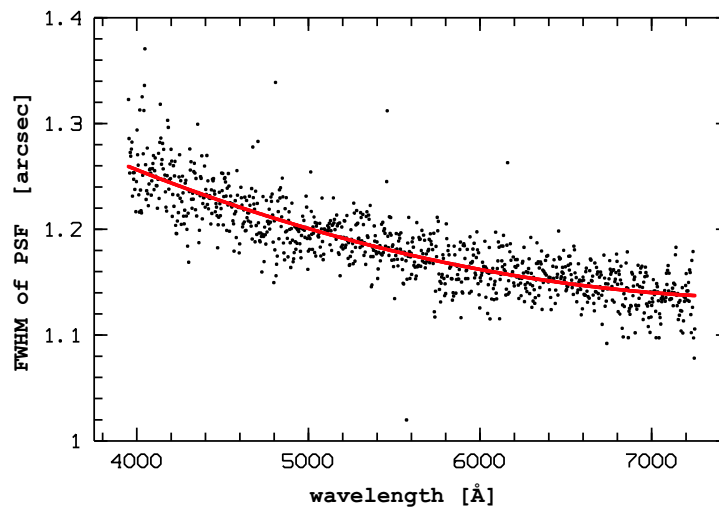


Abbildung 5.4: Verlauf der Halbwertsbreite der Quasarbilder von HE 0047–1756 in Abhängigkeit von der Wellenlänge.

Objekt	Koordinaten		Rotverschiebung	
	RA (2000)	Dec (2000)	z_L	z_S
HE 0435–1223	04 ^h 38 ^m 14 ^s 90	–12° 38′ 14″,4	0,44 (?)	1,69
HE 0047–1756	00 ^h 50 ^m 27 ^s 83	–17° 40′ 8″,8	\gtrsim 0,6 (?)	1,67
UM 673 (=Q 0142-100)	01 ^h 45 ^m 16 ^s 5	–09° 45′ 17″	0,49	2,72

Tabelle 5.1: Daten der beobachteten Quasarsysteme. Bei zwei der Systeme ist die Rotverschiebung der Linse nicht genau bekannt, die vermuteten Werte sind durch ein Fragezeichen gekennzeichnet

Abbildung 5.3 zeigt die wellenlängenabhängige Position der Komponente A von HE 0047–1756. Die Graphik zeigt, dass eine Verschiebung über mehrere Pixel auftritt.

In Abbildung 5.4 ist die Wellenlängenabhängigkeit der Halbwertsbreite dargestellt. Zu erkennen ist, dass das Seeing mit zunehmender Wellenlänge besser wird, ein Effekt, der auch theoretisch vorhergesagt wird [Wil99]. Danach ist die Größe des Seeingscheibchens proportional zu $\lambda^{-0,2}$.

Tabelle 5.1 enthält eine Übersicht über die Daten der beobachteten Quasarsysteme. Von zwei der beobachteten Systeme, HE 0435–1223 und HE 0047–1756, waren mehrere Spektren beobachtet worden. Beim Vergleich der einzelnen Spektren konnten keine signifikanten Unterschiede festgestellt werden, so dass zur weiteren Analyse die Einzelspektren zu einem Gesamtspektrum addiert wurden. Die Wichtung der Messwerte erfolgte dabei gemäß dem Inversen ihrer Standardabweichung (*inverse variance weighting*). Bei diesem Verfahren ergibt sich ein neuer Messwert \bar{f} aus den Messwerten f_i der einzelnen Messungen durch

$$\bar{f} = \frac{\sum_i (f_i/s_i^2)}{\sum_i (1/s_i^2)}, \quad (5.2)$$

wobei s_i die Standardabweichung der i-ten Messung ist [BF96].

5.4 Analyse der Spektren

Zur Analyse der Spektren müssen wir die Äquivalentbreiten der einzelnen Linien bestimmen. Wir wenden dafür folgendes Verfahren an: Links und rechts einer Emissionslinie legen wir zwei Fenster fest, zwischen denen der lokale Verlauf des Kontinuums durch einen linearen Verlauf dargestellt wird. Anschließend legen wir ein Fenster für die Emissionslinie fest und subtrahieren von dem Spektrum das lokale Kontinuum, um dann durch Integration den Fluss der Emissionslinie zu erhalten. In Abbildung 5.5 ist die C IV-Linie von HE 0435–1223 mit dem Verlauf des lokalen Kontinuums dargestellt. Die aus den Emissionsli-

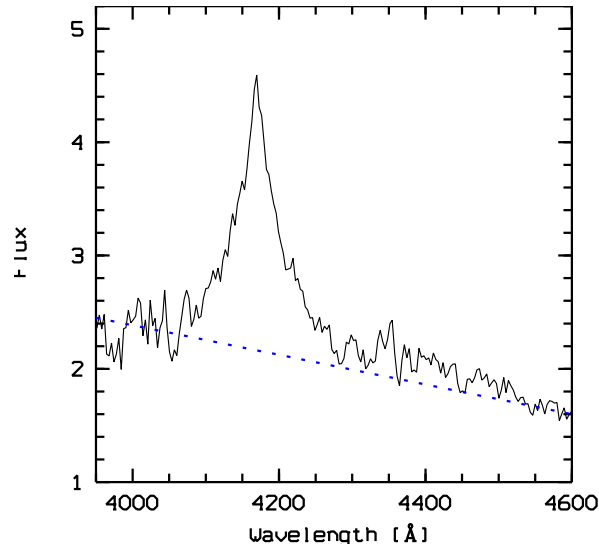


Abbildung 5.5: C IV-Linie von HE 0435–1223. Die gestrichelte Linie gibt den Verlauf des lokalen Kontinuums an, mit dem die Äquivalentbreite W_e der Linie bestimmt wurde.

nien bestimmte Äquivalentbreite W_e^z wird durch

$$W_e = \frac{1}{1+z} W_e^z \quad (5.3)$$

in das Ruhesystem des Quasars übergeführt.

5.5 HE 0435–1223

Das System HE 0435-1223 wurde durch den Hamburg-ESO-Survey [WCB⁺00] als Quasarkandidat gefunden. Weiterführende Beobachtungen von Wisotzki et al. mit dem 6,5 m Baade-Teleskop am Las Campanas Observatorium in Chile [WSB⁺02] zeigten, dass es sich bei diesem Objekt um ein gelinstes Vierfachsystem handelt. Die Rotverschiebung des Quasars liegt bei $z = 1,69$, seine Helligkeit im G-Band beträgt 17,8.

Im Zeitraum 4.9.2002 bis 6.9.2002 wurden vier Spektren von HE 0435-1223 aufgenommen. Die Belichtungszeit eines der Spektren betrug 1200 s, die der drei anderen 1800 s. Zur Auswertung wurden die Spektren verwendet, die von Lutz Wisotzki nach einer Neu-reduktion der PMAS-Daten extrahiert wurde. Die damit gewonnenen Resultate sind in [WBC⁺03] veröffentlicht.

Zwischen den einzelnen Spektren konnten keine Unterschiede festgestellt werden, zur Analyse wurden sie daher nach dem Inverse-Variance-Weighting-Verfahren zu einem Spektrum zusammengefasst, das in Abbildung 5.6 dargestellt ist.

Die für die Analyse der Spektren verwendeten Kontinuums- und Linienfenster sind in Tabelle 5.2 aufgeführt. Der erhaltene Linienfluss und die Äquivalentbreiten der C IV- und der C III]-Linien für die vier Komponenten sind in Tabelle 5.3 aufgeführt. Es zeigt sich, dass die Äquivalentbreiten zwischen den einzelnen Komponenten sich deutlich unterscheiden.

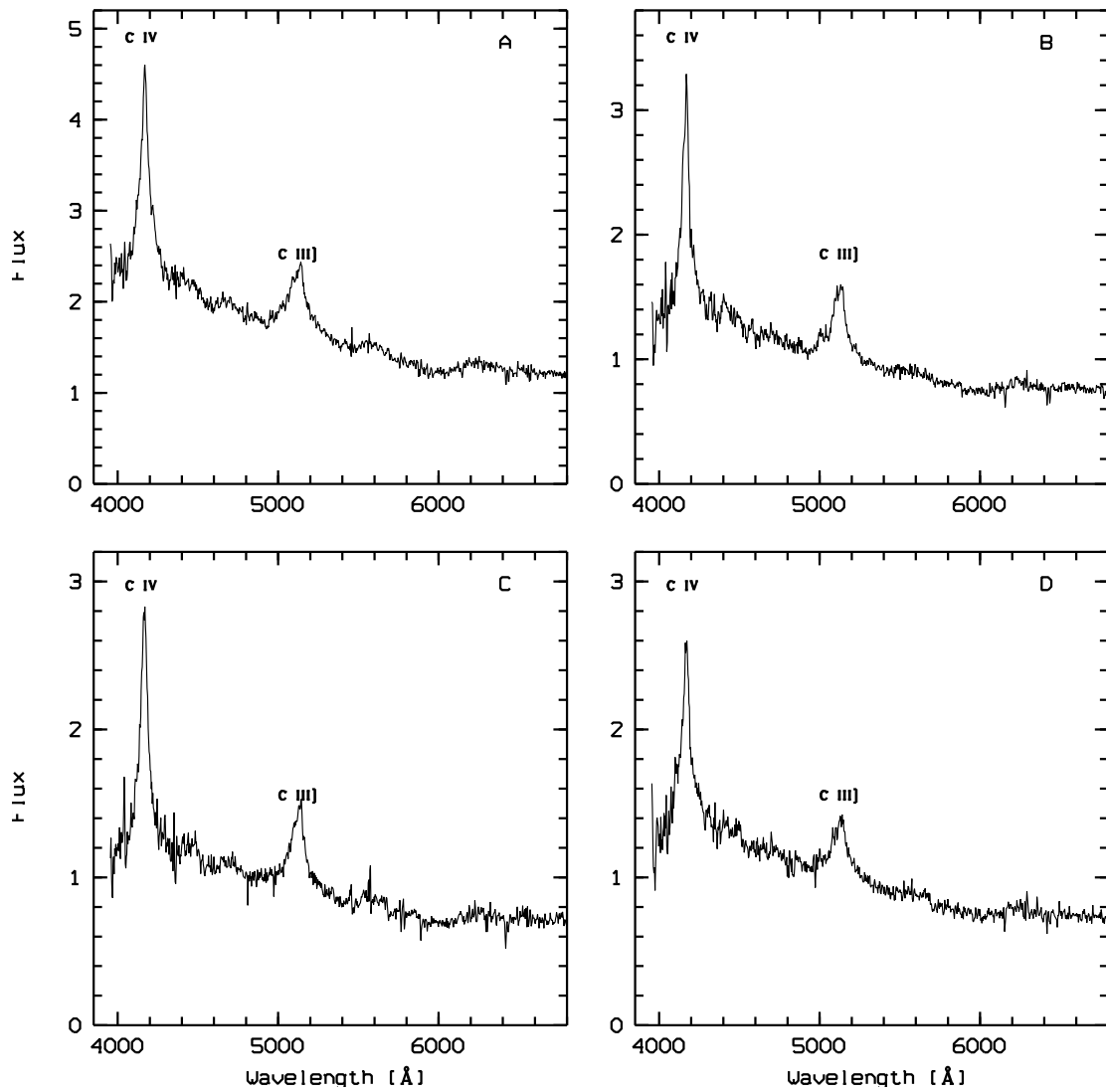


Abbildung 5.6: Spektren der vier Komponenten des Systems HE 0435–1223.

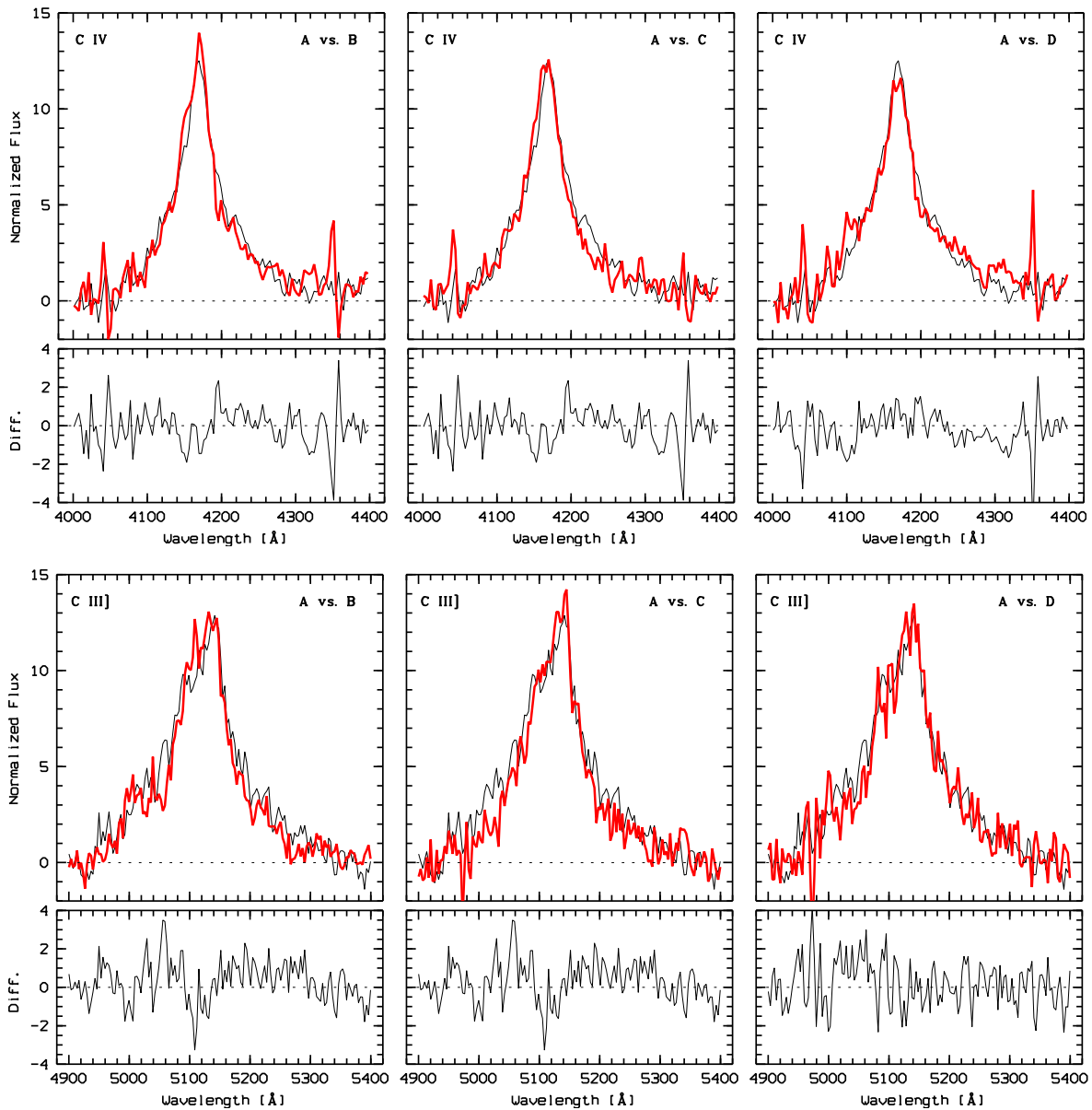


Abbildung 5.7: Vergleich der aufeinander skalierten Emissionslinien von HE 0435–1223. Die A-Komponente ist durch die dünne Linie dargestellt.

Komponente	C IV	C III]
	λ_1	f
Kontinuum 1	3980 – 4020 Å	4890 – 4950 Å
Kontinuum 2	4530 – 4630 Å	5380 – 5440 Å
Linie	4020 – 4300 Å	5075 – 5180 Å

Tabelle 5.2: Verwendete Kontinuums- und Linienfenster für die Analyse der Emissionslinien im System HE 0435–1223

Komponente	C IV		C III]	
	f	W_e	f	W_e
A	120,1	19,2	60,3	13,5
B	90,4	24,2	46,3	17,2
C	86,0	26,8	42,3	16,9
D	66,2	18,3	31,7	11,8

Tabelle 5.3: Linienfluss f (in $10^{-16} \text{ erg s}^{-1} \text{ cm}^{-2}$) und Äquivalentbreiten W_e (in Å) der Emissionslinien im Spektrum von HE 0435–1223.

Die auf einen gemeinsamen Linienfluss skalierten Emissionslinien sind in Abbildung 5.7 dargestellt. Zwischen der Profilform der jeweiligen Linien ist kein signifikanter Unterschied festzustellen. Die beobachteten Unterschiede in den Äquivalentbreiten der Emissionslinien von HE 0435–1223 deuten daraufhin, dass in diesem System Mikrolensing auftritt. Da das erwartete Time-Delay bei etwa 10 Tagen liegt [WSB+02] und keine Unterschiede zwischen den zu unterschiedlichen Zeitpunkten gemessenen Spektren beobachtet wurden, scheinen intrinsische Variabilitäten nicht die Ursache der beobachteten Unterschiede zu sein.

5.6 UM 673 (Q0142–100)

Der Doppelquasar UM 673 (Abbildung 5.8) wurde 1982 durch ein Quasar-Suchprogramm der Universität Michigan von MacAlpine und Feldman als Einzelquelle entdeckt [MF82] und später von Surdej et al. als Doppelquasarsystem identifiziert. Der Abstand der beiden Komponenten beträgt $2''22$. Die Linsengalaxie liegt auf der Verbindungslinie zwischen den beiden Quasarbildern, $0''8$ von der B-Komponente entfernt [SSM+87]. Die Helligkeiten des Systems für verschiedene Wellenlängenbereiche sind in Tabelle 5.4 angegeben.

Durch die Analyse der Spektren konnten Surdej et al. zeigen, dass es sich bei UM 673 um ein Gravitationslinsensystem mit einer Rotverschiebung von $z_s = 2,719$ handelt. Die Rotverschiebung der Linsengalaxie von $z_l = 0,49$ wurde durch die in dem Spektrum der B-Komponente beobachteten Ca II-Absorptionslinien bestimmt. Beim Vergleich des

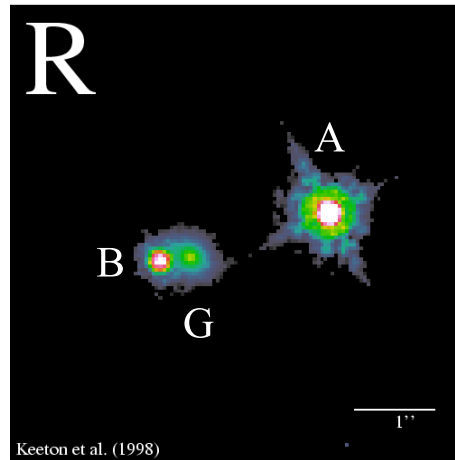


Abbildung 5.8: Der Doppelquasar UM 673 im R-Band [CAS]. A und B sind die beiden Quasarkomponenten, G ist die Linsengalaxie.

	A	B	G
F160W	$15,28 \pm 0,02$	$17,57 \pm 0,03$	$16,63 \pm 0,03$
F555W	$16,89 \pm 0,09$	$19,13 \pm 0,04$	$20,81 \pm 0,02$
F675W	$16,67 \pm 0,06$	$18,96 \pm 0,03$	$19,35 \pm 0,01$
F814W	$16,62 \pm 0,18$	$18,71 \pm 0,15$	$18,72 \pm 0,05$

Tabelle 5.4: Helligkeiten des Systems UM673 in unterschiedlichen Wellenlängenbereichen (Daten vom Castles-Survey [CAS]).

Komponente	Si IV/O IV]	C IV	C III]
Kontinuum 1	5005 – 5070 Å	5485 – 5560 Å	6660 – 6725 Å
Kontinuum 2	5340 – 5470 Å	5905 – 5990 Å	7230 – 7250 Å
Linie	5120 – 5360 Å	5550 – 5890 Å	6900 – 7180 Å

Tabelle 5.5: Verwendete Kontinuums- und Linienfenster für die Analyse der Emissionslinien im System UM 673.

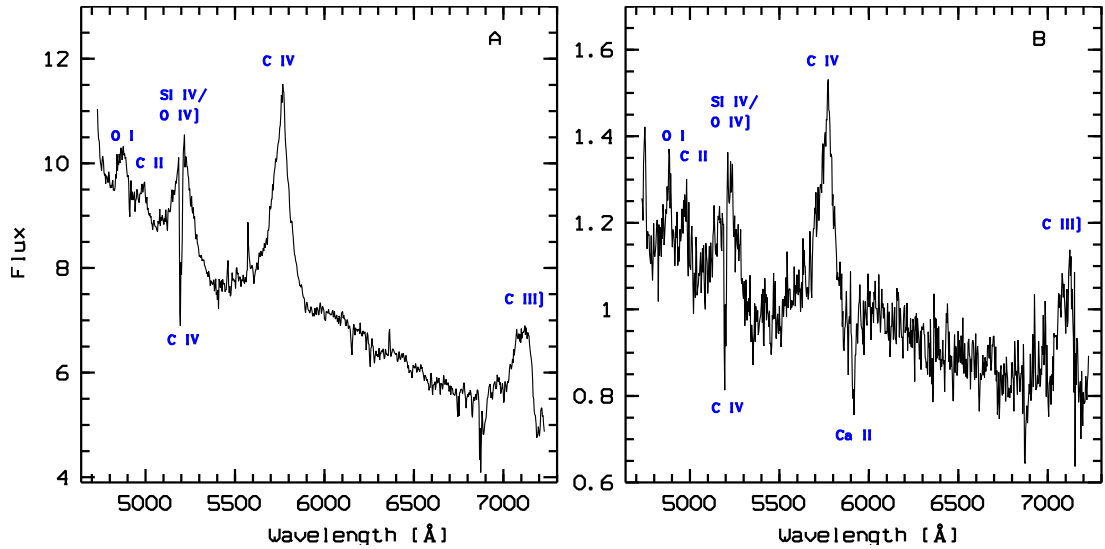


Abbildung 5.9: Spektren des Doppelquasars UM 673 mit den identifizierten Emissions- und Absorptionslinien.

Komponente	SI IV/O IV]		C IV		C III]	
	f	W_e	f	W_e	f	W_e
A	184,5	6,4	442,5	16,0	275,8	14,8
B	26,3	6,9	58,5	16,3	48,7	17,8

Tabelle 5.6: Linienfluss f (in $10^{-16} \text{ erg s}^{-1} \text{ cm}^{-2}$) und Äquivalentbreiten W_e der Emissionslinien im Spektrum von UM 673. Die in der SI IV/O IV]-Linie liegende Absorptionslinie wurde nicht korrigiert.

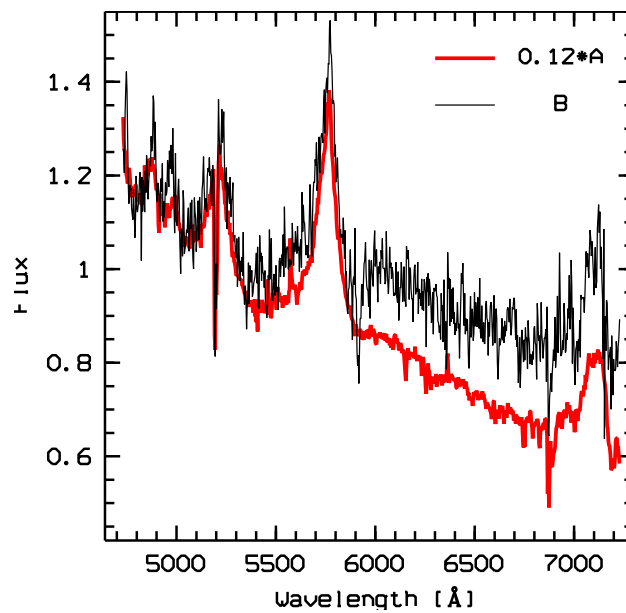


Abbildung 5.10: Spektren des Doppelquasars UM 673. Die A-Komponente wurde mit einem Faktor von 0,12 skaliert.

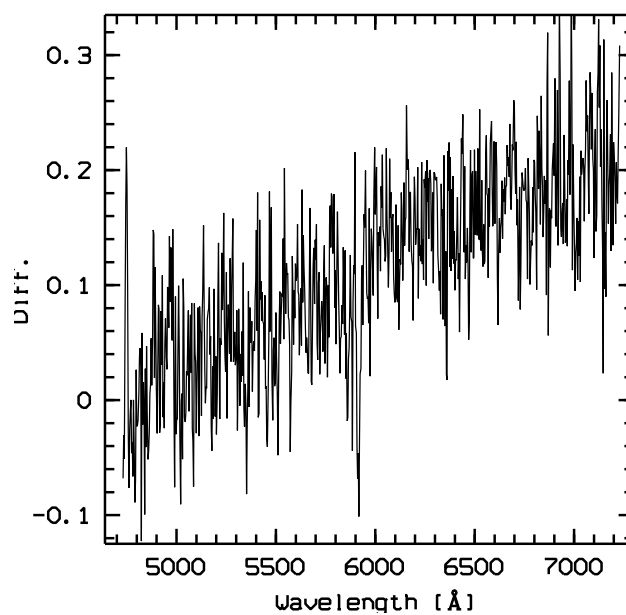


Abbildung 5.11: Differenz der Spektren aus [Abbildung 5.10](#). Deutlich ist die nur in der B-Komponente auftretende Ca II-Absorptionslinie der Linsengalaxie bei 5900 Å zu erkennen.

Emission-zu-Kontinuum-Verhältnisses der Emissionslinien konnten keine Unterschiede zwischen den beiden Komponenten festgestellt werden. Die B-Komponente weist allerdings einen deutlichen Exzess für $\lambda > 5800 \text{ \AA}$ auf, den die Autoren durch eine Überlagerung des Quasarspektrums und dem Spektrum der Linsengalaxie erklären [SMS⁺88].

Außer der Linsengalaxie konnten in beiden Spektren weitere Absorptionssysteme identifiziert werden, neben mehreren Ly α -Absorptionssysteme auch ein System mit C IV- und SI IV-Absorptionslinien bei einer Rotverschiebung von $z = 2,356$. Durch die Untersuchung der Ly α -Systeme konnten Smette et al. die untere Grenze der Ausdehnung der Ly α -Wolken zu $8h^{-1} \text{ kpc}$ abschätzen [SSS⁺92].

Das Time-Delay Δt des Systems ist nicht bekannt. Modellierungen der Linsengalaxie mit unterschiedlichen Massenprofilen ergaben Werte von $\Delta t \approx 80 \text{ d}$ bzw. $\Delta t \approx 120 \text{ d}$ [LFK⁺00].

Zwischen 1995 und 2000 kam es zu einem Helligkeitsanstieg um 0,3 mag, wobei 1996 ein Maximum erreicht wurde. Anschließend wurde eine Abnahme der Helligkeit auf ihren alten Wert beobachtet [SNB⁺01].

Die PMAS-Spektren der beiden Komponenten von UM 673 sind in Abbildung 5.9 dargestellt. In dem Spektrum sind mehrere Emissions- und Absorptionslinien zu erkennen. Die identifizierten Linien sind in den dargestellten Spektren gekennzeichnet.

Die nur in der B-Komponente zu beobachtende Absorptionslinie bei 5900 \AA ist die Ca II H und K Linie der Linsengalaxie. Die gemessenen Wellenlängen liegen bei 5860 \AA und 5915 \AA . Mit den Ruhesystemwellenlängen von 3933 \AA und 3968 \AA [Mor91] kann damit die Rotverschiebung der Linsengalaxie von $z_1 = 0,49$ bestätigt werden.

Die Emissionslinien wurden mit den in Tabelle 5.5 aufgeführten Linienfenstern analysiert. Bei der S IV/O IV]-Linie erfolgte keine Korrektur der Absorptionslinie. In Tabelle 5.6 sind die ermittelten Linienflüsse und Äquivalentbreiten zusammengefasst. Bedingt durch ihre Lage am äußeren Rand des beobachteten Spektrums war eine genaue Messung der Äquivalentbreite der C III]-Linie nicht möglich. Das Ergebnis war stark abhängig von der Wahl der Kontinuumsfenster. Die Unterschiede der Äquivalentbreite der C III]-Linie dürfte hierin ihre Ursache haben. Dagegen zeigen die Äquivalentbreiten der S IV/O IV]-Linien und die C IV-Linien keine signifikanten Abweichungen.

Abbildung 5.10 zeigt beide Spektren gemeinsam, die A-Komponente wurde mit einem Faktor von 0,12 skaliert, um eine Übereinstimmung der Spektren am unteren Wellenlängenbereich zu erzielen. Deutlich ist der erwähnte Exzess der B-Komponente zu erkennen, der durch den Beitrag der Linsengalaxie zum Gesamtspektrum von B entsteht. Das Galaxienspektrum können wir aus der Differenz des B-Spektrums mit dem skalierten A-Spektrum erhalten. Es ist in Abbildung 5.11 dargestellt. Als einzige Linie ist die Ca II-K-Absorptionslinie der Linsengalaxie zu erkennen.

Die Auswertung der PMAS-Spektren hat gezeigt, dass in dem System UM 673 keine Anzeichen für Mikrolensing festzustellen sind. Zu dem gleichen Resultat kam Surdej, allerdings mit Spektren, die im Jahr 1986 beobachtet wurden. Obwohl nicht auszuschließen ist, dass Mikrolensing zwischen Surdejs und unseren Beobachtungen aufgetreten ist, deutet dies möglicherweise darauf hin, dass auch für längere Zeiträume Mikrolensing in diesem System keine Rolle spielt. Interessant ist dieses Ergebnis vor allem durch die Tatsache, dass der Beitrag der Linsengalaxie zum Spektrum der B-Komponente darauf schließen lässt, dass ihr Lichtweg durch die Linsengalaxie verläuft.

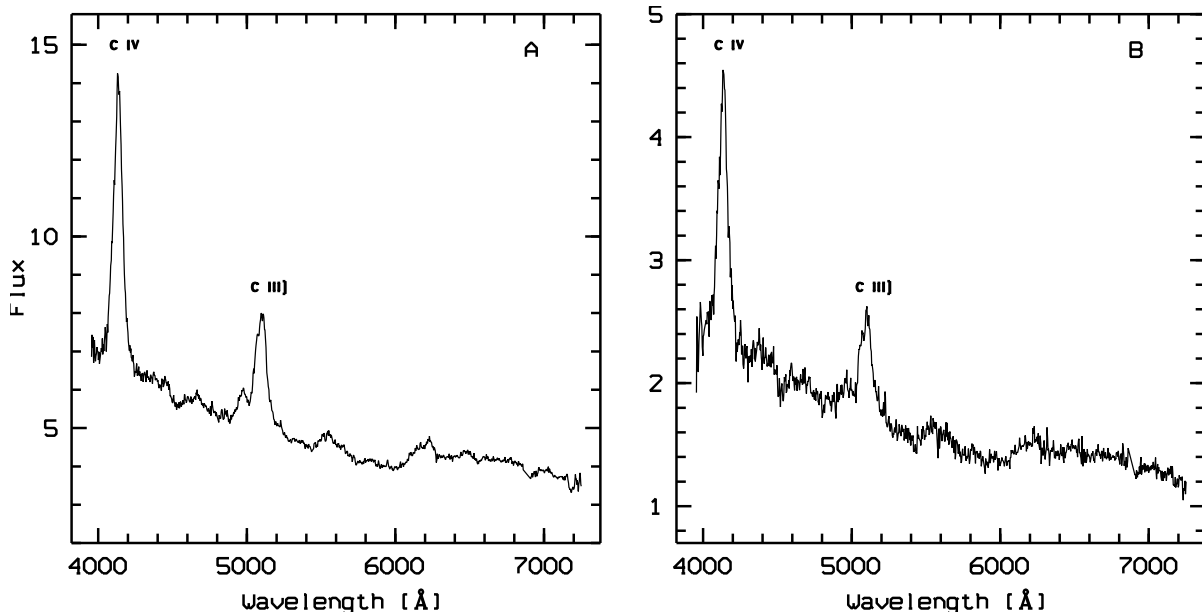


Abbildung 5.12: Die Spektren des Doppelquasars HE 0047–1756

	C IV	C III]
Komponente		
Kontinuum 1	3980 – 4020 Å	4890 – 4950 Å
Kontinuum 2	4490 – 4570 Å	5380 – 5440 Å
Linie	4020 – 4290 Å	4900 – 5380 Å

Tabelle 5.7: Verwendete Kontinuums- und Linienfenster für die Analyse der Emissionslinien im HE 0047–1756.

5.7 HE 0047–1756

Der Doppelquasar HE 0047–1756 wurde durch den Hamburg/ESO-Survey [WCB+00] entdeckt. Das System wurde am 4.2.2002 beobachtet, dabei wurden zwei Spektren mit einer Belichtungszeit von jeweils 1800 s erhalten. Die beiden Einzelspektren wurden mit der beschriebenen Wichtungsmethode zu einem Gesamtspektrum kombiniert, das in Abbildung 5.12 dargestellt ist. Die Ähnlichkeit der Spektren unterstützt die Hypothese, dass es sich bei den beiden Bildern um einen gelinsten Quasar handelt.

In den Spektren treten zwei Emissionslinien auf, die S IV/O IV]-Linie und die S III]-Linie mit den Zentren bei 4132 Å und 5090 Å. Aus der Lage dieser Linie wurde die Rotverschiebung des Quasars zu $z = 1,67$ bestimmt. Der aus den Spektren erhaltene Linienfluss und die Äquivalentbreiten der Emissionslinien sind in Tabelle 5.8 aufgeführt. Dabei wurden die in Tabelle 5.7 angegebenen Kontinuums- und Linienfenster verwendet. Die Spektrallinien der A-Komponente weisen eine höhere Äquivalentbreite auf. In Abbildung 5.13 sind

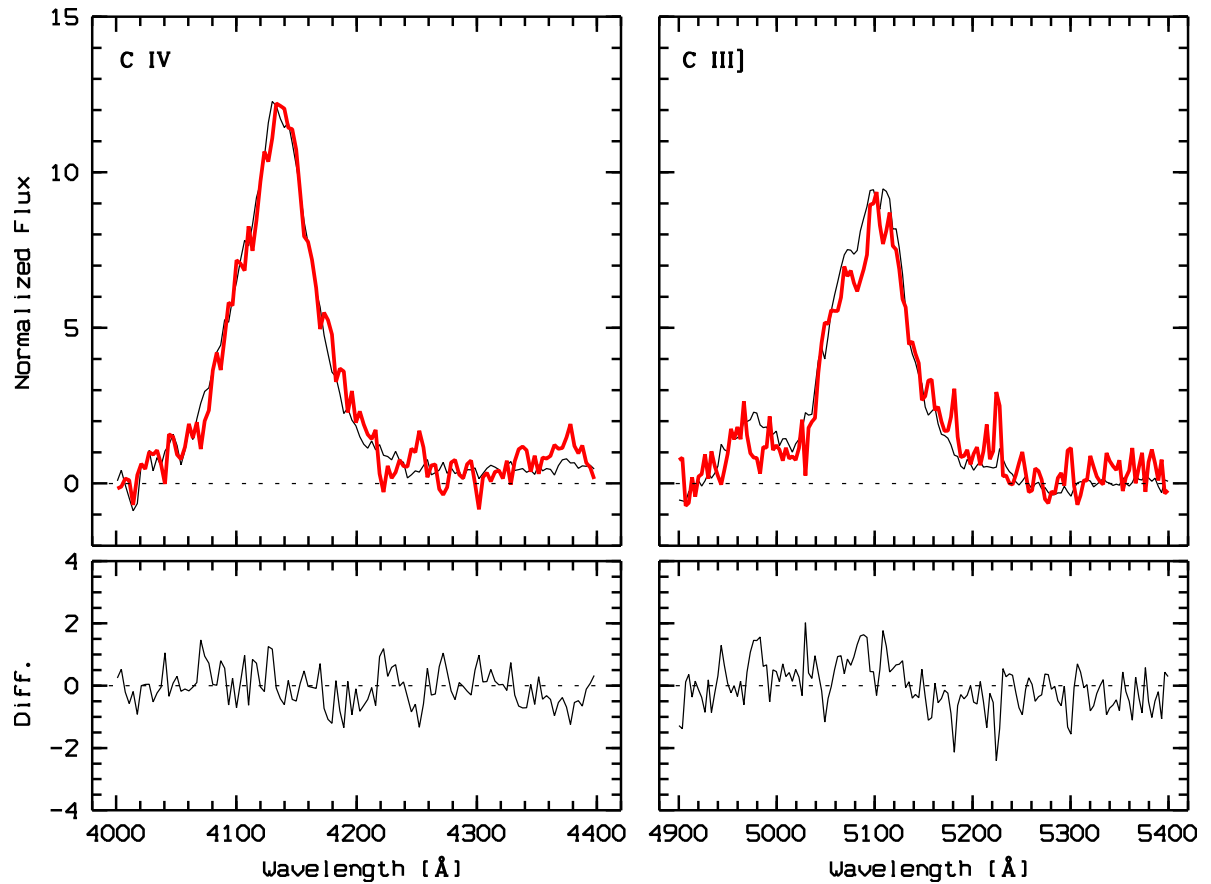


Abbildung 5.13: Vergleich der aufeinander skalierten Emissionslinien von HE 0047–1756. Die A-Komponente ist durch die dünne Linie dargestellt.

Komponente	C IV		C III]	
	f	W_λ	f	W_λ
A	621,3	36,1	369,0	27,8
B	178,6	29,1	112,3	24,7

Tabelle 5.8: Fluss f und Äquivalentbreite W_λ der Emissionslinien in HE 0047–1756.

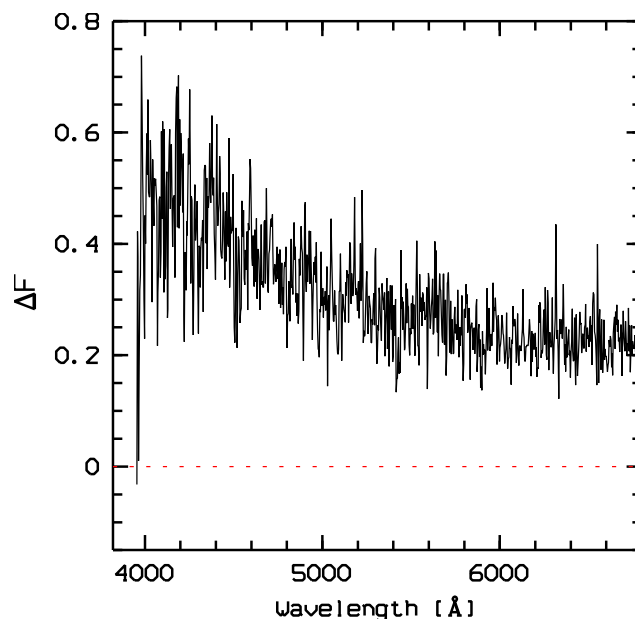


Abbildung 5.14: Differenzspektrum von HE 0047–1756. Die A-Komponente wurde mit einem Faktor von 0,285 skaliert.

die nach Abzug des lokalen Kontinuums auf den Linienfluss skalierten Profile der Emissionslinien dargestellt. Es ist kein signifikanter Unterschied zwischen den Linienprofilen zu erkennen.

Abbildung 5.14 zeigt die Differenz der Spektren zwischen B und der mit 0,295 skalierten A-Komponente. Deutlich ist ein unterschiedlicher Verlauf des Kontinuums zu erkennen. Im blauen Bereich weist die B-Komponente einen höheren Strahlungsanteil als die A-Komponente auf. Das kann darauf hindeuten, dass hier ähnlich wie bei HE 1104–1805 eine unterschiedliche Verstärkung der Kontinuumsregion auftritt. Eine intrinsische Variabilität des Quasars kann aber nicht ausgeschlossen werden.

5.8 Zusammenfassung der Ergebnisse

Mit der Untersuchung der PMAS-Spektren der drei gelinsten Systeme wollten wir feststellen, ob es bei ihnen Hinweise auf Mikrolensing gibt. Bei zwei der Quasare, dem Vierfachquasar HE 0435–1223 und dem Doppelquasar HE 0047–1746, wurden in den Spektrallinien eindeutige Anzeichen für Mikrolensing gefunden. Bei HE 0047–1746 wurden darüber hinaus Unterschiede des Kontinuumsflusses zwischen den beiden Komponenten beobachtet. Das deutet auf eine mögliche differentielle Verstärkung der Kontinuumsregion des Quasars durch Mikrolensing.

Bei dem dritten untersuchten System, dem Doppelquasar UM 673, wurden keine Anzeichen für Mikrolensing entdeckt. Zusammen mit älteren Beobachtungen weist dieses Resultat daraufhin, dass möglicherweise auch in längeren Zeiträumen von mehr als zwei Jahrzehnten Mikrolensing bei UM 673 nicht aufgetreten ist. Bei diesem System stellt sich

die Frage, warum kein Mikrolensing auftritt, obwohl der Lichtweg einer der Komponenten durch die Linsengalaxie und somit durch ein sternreiches Gebiet verläuft.

Die beiden Systeme, bei denen wir Anzeichen für Mikrolensing festgestellt haben, sollten auf jedem Fall weiter beobachtet werden, um die Annahme zu unterlegen, dass die beobachteten spektralen Unterschiede tatsächlich durch Mikrolensing hervorgerufen werden und nicht durch intrinsische Variabilitäten des Quasars. Damit würden sich diese Systeme anbieten, um mit Hilfe des Mikrolensings ihre zentrale Quelle zu untersuchen.

6 Inverse und schlecht gestellte Probleme

Die Rekonstruktion von Helligkeitsprofilen aus den Lichtkurven von Mikrolensing-Ereignissen ist ein inverses Problem, das sehr empfindlich auf kleine Störungen in den Daten reagiert. Eine solche Aufgabenstellung wird in der Mathematik als ein schlecht gestelltes Problem bezeichnet, dessen direkte Lösung nicht mehr zu einem sinnvollen Resultat führt.

Es wurden daher spezielle Methoden entwickelt, die sogenannten Regularisierungsverfahren, die zu einer stabilen (Näherungs)lösung von schlecht gestellten Probleme führen.

In diesem Abschnitt wird zunächst ein Überblick über die wichtigsten mathematischen Eigenschaften schlecht gestellter Probleme gegeben. Dabei werden wir uns auf die linearen schlecht gestellten Probleme beschränken. Anschließend werden die in dieser Arbeit verwendeten Regularisierungsverfahren, die Tikhonov-Phillips-Regularisierung und die lokale Regularisierung, vorgestellt.

Für die Darstellung der mathematischen Eigenschaften von schlecht gestellten Problemen und ihrer Lösungsverfahren genügt es, wenn wir uns dabei auf die diskreten schlecht gestellten Probleme beschränken.

6.1 Inverse Probleme

Viele der in den Naturwissenschaften und in der Technik auftretenden Aufgabestellungen sind *direkte Probleme*, bei denen aus bekannten Ursachen die unbekanntem Wirkungen ermittelt werden. Die umgekehrte Fragestellung, aus den beobachteten Wirkungen auf ihre Ursachen zu schließen, wird als *inverses Problem* bezeichnet.

Mathematisch kann man das betrachtete System durch einen Operator A darstellen, der eine Abbildung

$$\begin{aligned} A : X &\rightarrow Y \\ g &\rightarrow f = A(g) \end{aligned}$$

zwischen zwei Räumen X und Y beschreibt.

Beim direkten Problem versuchen wir aus den Eingangsdaten g die Ausgangsdaten f zu bestimmen, in der Regel bereitet dies bei bekanntem Operator A keine größeren Schwierigkeiten.

Das inverse Problem ist dadurch gekennzeichnet, dass uns die Ausgangsdaten f und der Operator A zur Verfügung stehen und wir daraus versuchen, die Eingangsdaten g zu

bestimmen. Mitunter tritt auch das inverse Problem auf, dass wir zwar die Eingangsdaten g und die Ausgangsdaten f kennen, aber der das System beschreibende Operator A unbekannt ist und aus g und f bestimmt werden soll.

Kennzeichnend für viele inverse Probleme ist, dass sie schwierig zu lösen sind, da sie, sofern sie überhaupt eine mathematisch eindeutig definierte Lösung haben, sehr empfindlich auf Störungen in den Daten wie Messfehler und numerische Rechenungenauigkeiten reagieren. Solche Arten von Problemen werden als *schlecht gestellt*¹ bezeichnet.

6.2 Schlecht gestellte Probleme

Hadamard [Had15] führte bei der Behandlung von Partiellen Differentialgleichungen Anfang des 20. Jahrhunderts den Begriff des korrekt oder gut gestellten Problems ein.

DEFINITION 6.1 [Lou89]/[Rie03] Sei $A : X \rightarrow Y$ eine Abbildung zwischen den topologischen Räumen X, Y . Das Problem (A, X, Y) heißt **gut gestellt**, wenn

1. für jedes $f \in X$ die Gleichung $Af = g$ eine Lösung hat
2. diese Lösung eindeutig ist
3. diese Lösung stetig von den Daten abhängt, d.h. die inverse Abbildung $A^{-1} : Y \rightarrow X$ stetig ist.

Ist eine dieser Bedingungen nicht erfüllt, so nennen wir das Problem **schlecht gestellt**.

Die ersten beiden Punkte fordern die Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung, während der dritte Punkt die Stabilität der Lösung fordert. Falls diese Stabilität nicht gegeben ist, führen kleine Änderungen in den Daten g zu großen Änderungen in f .

Hadamard war der Meinung, dass die mathematische Beschreibung physikalischer Systeme immer auf gut gestellte Probleme führt. Diese Ansicht findet sich ebenfalls bei Courant und Hilbert: "...a mathematical problem cannot be considered as realistically corresponding to physical phenomena unless a variation of the given data in a sufficiently small range leads to an arbitrarily small change in the solution" (zitiert in [Gro93]).

Wie wir heute allerdings wissen, führen viele Aufgabenstellungen aus Technik und Naturwissenschaften zu schlecht gestellten Problemen. Beispiele sind tomographische Verfahren in Medizin, Materialwissenschaften [Rie03, BHB00] und Geologie [YR99]. In der Bildverarbeitung treten schlecht gestellte Probleme auf bei der Rekonstruktion von durch äußere Einflüsse gestörte Bilder [Han00].

Auch in der Astrophysik treten in den verschiedensten Bereichen inverse und schlecht gestellte Probleme auf. Ein Beispiel dafür ist die Rekonstruktion der Massenverteilung von Galaxienhaufen durch Beobachtungen im Röntgenbereich. Die mathematische Beschreibung dieser Aufgabe führt auf eine ähnliche Integralgleichung wie beim Mikrolensing. Das wird im Folgenden etwas ausführlicher dargestellt:

Bei der Beobachtung von Galaxienhaufen wurde festgestellt, dass sie intensiv Röntgenstrahlung emittieren. Ein großer Anteil der Masse eines Galaxienhaufens besteht aus

¹Im Englischen finden sich dafür die Bezeichnungen *ill-posed problems* oder *improperly posed problems*.

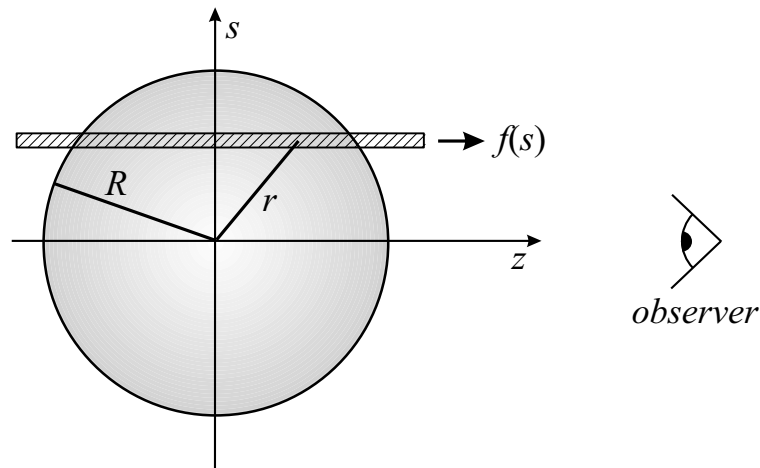


Abbildung 6.1: Röntgentomographie an einem Galaxienhaufen.

Der Galaxienhaufen wird dabei durch eine axialsymmetrische Massenverteilung idealisiert, die Emissivität $g(r)$ ist durch den Abstand vom Zentrum gegeben. R ist der äußere Radius des Haufens. Der vom Beobachter bei der Position s gemessene Röntgenfluss $f(s)$ ist durch Integration über die gesamte Emission in Beobachterraumrichtung innerhalb der Sichtlinie (schraffierter Bereich) gegeben.

heißem Gas, das über den Bremsstrahlmechanismus im Röntgenbereich strahlt. Nimmt man an, dass das Gas sich im hydrostatischen Gleichgewicht befindet, kann man aus der räumlichen Verteilung der Strahlung das Gravitationspotential innerhalb des Haufens bestimmen [Lon98].

Allerdings kann man nur die zweidimensionale Verteilung der Strahlung beobachten, Galaxienhaufen sind aber dreidimensional ausgebildete Körper, von denen man nur die Projektion auf eine Ebene beobachtet. Das Problem ist nun, aus den Beobachtungsdaten die dreidimensionale Struktur zu rekonstruieren [YS99]. Im einfachsten Fall nimmt man an, dass der Galaxienhaufen sphärisch symmetrisch ist (Abb. 6.1). Der beobachtete Fluss $f(s)$ ergibt sich dann durch Integration entlang der Sichtlinie

$$f(s) = 2 \int_0^{\sqrt{R^2 - s^2}} g(r(z)) dz, \quad (6.1)$$

wobei $g(r)$ die (radial abhängige) Emissivität und R der Radius des Haufens ist. Mit $r(z) = \sqrt{s^2 + z^2}$ folgt

$$f(s) = 2 \int_s^R \frac{r}{\sqrt{r^2 - s^2}} g(r) dr. \quad (6.2)$$

Die Invertierung der Gleichung liefert dann die gesuchte Funktion $g(r)$.

Definieren wir $\xi := R^2 - r^2$, $x := R^2 - s^2$, $\tilde{f}(x) := f(\sqrt{R^2 - x})$ und $\tilde{g} := g(\sqrt{R^2 - \xi})$. Damit erhalten wir aus Gleichung 6.2 die Abelsche Integralgleichung

$$\tilde{f}(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{x - \xi}} \tilde{g}(\xi) d\xi. \quad (6.3)$$

Diese Methode wird daher auch als *Abel-Inversion* bezeichnet und kann z. B. auch zur Rekonstruktion der dreidimensionalen Verteilung von Sternen in einem Kugelsternhaufen angewendet werden.

6.3 Integralgleichungen

Die mathematische Beschreibung vieler inverser Probleme führt zu Integralgleichungen der 1. Art, die wie folgt definiert sind:

DEFINITION 6.2 (*Lineare*) *Fredholm'sche Integralgleichung der 1. Art*

$$f(x) = \int_a^b A(x, \xi)g(\xi) d\xi \quad x \in [a, b] \quad (6.4)$$

Die Funktion A wird als Kern der Integralgleichung bezeichnet.

Oft findet sich eine Darstellung in Form einer Operatorgleichung

$$f = Ag.$$

Ist die Integrationsgrenze nicht konstant, sondern von x abhängig, so erhalten wir eine Volterra'sche Integralgleichung:

DEFINITION 6.3 (*Lineare*) *Volterra'sche Integralgleichung der 1. Art*

$$f(x) = \int_a^x A(x, \xi)g(\xi) d\xi \quad x \in [a, b] \quad (6.5)$$

Die Volterra'schen Gleichungen weisen eine kausale Struktur auf: identifizieren wir x mit der Zeit, so sehen wir, dass die Funktion $f(x)$ nur vom Verlauf der Funktion $g(\xi)$ im Zeitraum $[a, x]$ abhängt.

Diesen beiden Klassen von Integralgleichungen ist gemeinsam, dass im Allgemeinen ihre Lösung zu einem schlecht gestellten Problem führt.

Tritt die Funktion g auch außerhalb des Integrals auf, so erhalten wir die entsprechenden Integralgleichungen der 2. Art:

DEFINITION 6.4 (*Lineare*) *Fredholm'sche Integralgleichung der 2. Art*

$$f(x) = g(x) + c \int_a^b A(x, \xi)g(\xi) d\xi \quad x \in [a, b], c = \text{konstant} \quad (6.6)$$

DEFINITION 6.5 (*Lineare*) *Volterra'sche Integralgleichung der 2. Art*

$$f(x) = g(x) + c \int_a^x A(x, \xi)g(\xi) d\xi \quad x \in [a, b], c = \text{konstant} \quad (6.7)$$

Für die Integralgleichungen der 2. Art kann man zeigen, dass ihre Lösung zu einem gut gestellten Problem führt [[Hac95](#)].

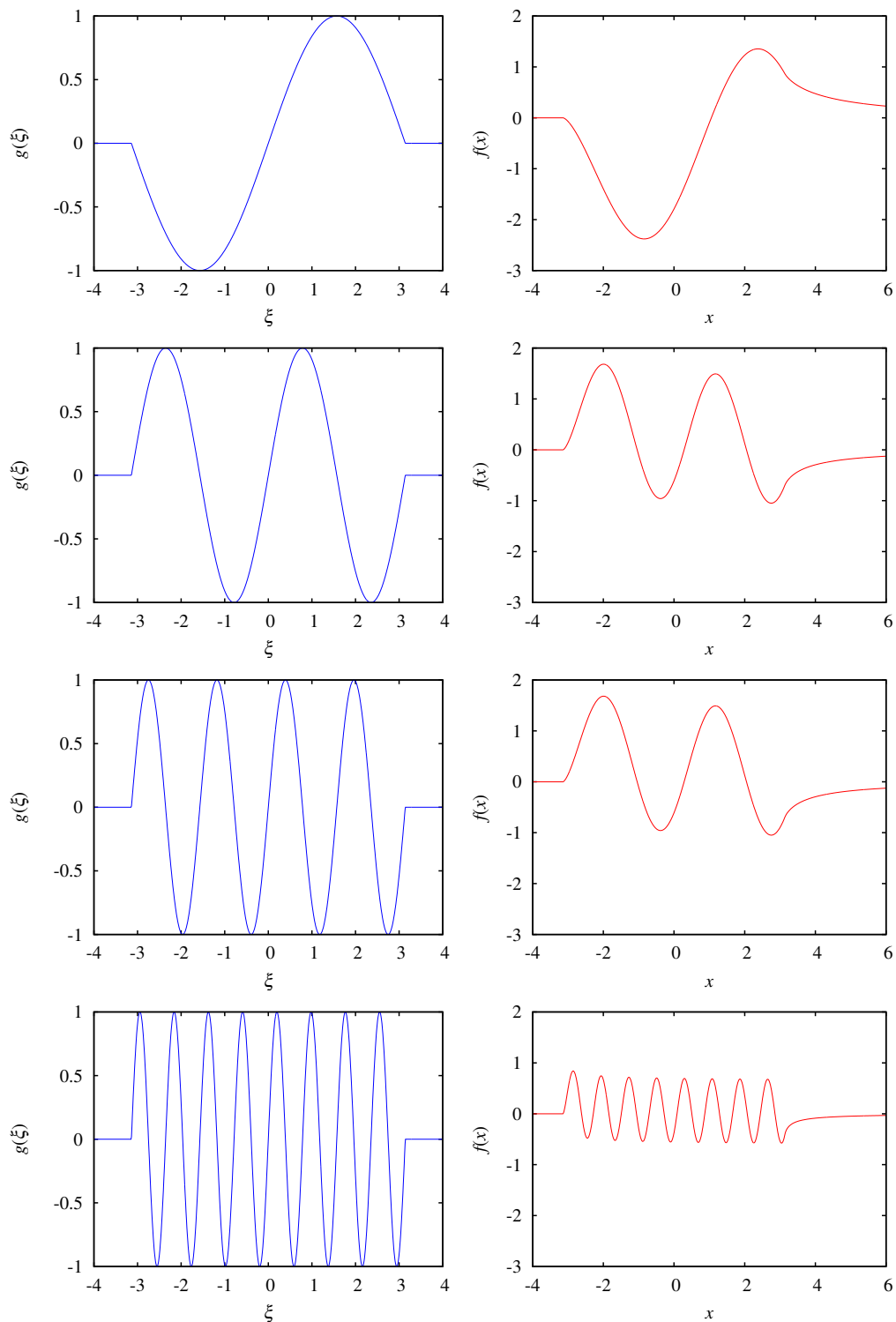


Abbildung 6.2: Riemann-Lebesgue-Lemma. **(Links)** Die Funktion $g(\xi) = \sin(n\xi) \cdot (|\xi| \leq \pi)$ für $n = 1, 2, 4, 8$.

(Rechts) Integral $f(x) = \int_{-\infty}^x A(x-\xi)g(\xi) d\xi$. Man erkennt, dass die Amplitude von $f(x)$ mit zunehmendem n kleiner wird.

6.3.1 Riemann-Lebesgue-Lemma

Die Instabilität der Lösung von Integralgleichungen der 1. Art ist unabhängig von speziellen Eigenschaften des Kerns A . Durch die Integration werden die hohen Frequenzen in der Funktion g gedämpft, so dass bei der Invertierung kleine Störungen in f zu großen Änderungen in der Amplitude von g führen. Deutlich wird dies durch das Riemann-Lebesgue-Lemma:

SATZ 6.1 (Riemann-Lebesgue-Lemma) *Sei $A(\xi)$ integrabel auf $[-\pi, \pi]$.*

Dann gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} A(\xi) \sin(n\xi) \, d\xi = 0.$$

Die Auswirkung des Riemann-Lebesgue-Lemma ist in Abb. 6.2 dargestellt. Dafür wurde mit der Funktion

$$g(\xi) = \begin{cases} \sin(n\xi) & \text{für } |\xi| \leq \pi \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (6.8)$$

für $n = 1, 2, 4, 8$ das Integral

$$f(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{x-\xi}} g(\xi) \, d\xi \quad (6.9)$$

berechnet. Man erkennt, dass mit größer werdendem n die Amplitude des Signals f kleiner wird. Umgekehrt kommt es nun bei der Invertierung der Integralgleichung zu einer großen Verstärkung der hohen Frequenzen, so dass kleine Änderungen in f zu großen Änderungen in g führen.

6.3.2 Die Abel'sche Integralgleichung

Allgemein bezeichnet man eine Integralgleichung der Form

$$\int_0^x \frac{1}{(x-\xi)^{1-\alpha}} g(\xi) \, d\xi = f(x) \quad (6.10)$$

mit $0 < \alpha < 1$ als eine *Abel'sche Integralgleichung* [GV91]. Der Kern hat dabei eine Singularität vom Typ

$$\frac{1}{(x-\xi)^{1-\alpha}}, \quad (6.11)$$

die oft als eine *schwache Singularität* bezeichnet wird, da das Integral

$$\int_0^x \frac{1}{(x-\xi)^{1-\alpha}} g(\xi) \, d\xi \quad (6.12)$$

für $|g(x)| < \infty$ existiert.

Mit $\alpha = \frac{1}{2}$ ergibt sich die bei der Beschreibung der Mikrolinsenereignisse auftretende Gleichung für die Lichtkurve

$$f(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{x-\xi}} g(\xi) \, d\xi \quad (6.13)$$

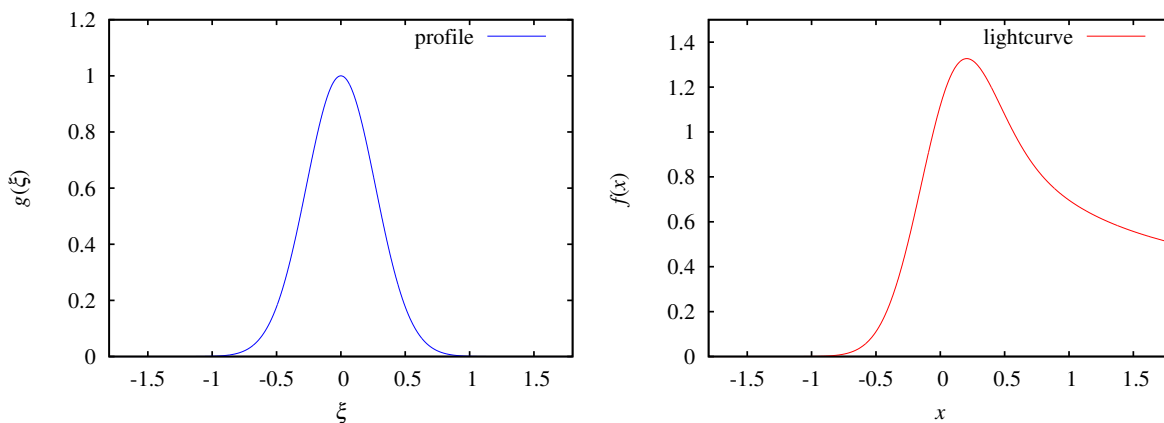


Abbildung 6.3: (Links) Profilfunktion $g(\xi)$. (Rechts) Durch Faltung mit dem Operator $1/\sqrt{x-\xi}$ ergibt sich aus der Profilfunktion die typische Lichtkurve $f(x)$ eines Kaustik-Crossing-Ereignisses.

aus dem Helligkeitsprofil $g(\xi)$. Abbildung 6.3 zeigt eine Lichtkurve, die sich für ein gaußförmiges Profil ergibt.

Man kann zeigen, dass die Lösung der Abel'schen Integralgleichung formal durch

$$g(\xi) = \frac{\sin(\alpha\pi)}{\pi} \frac{d}{d\xi} \int_0^\xi \frac{f(x)}{(\xi-x)^\alpha} dx$$

gegeben ist [BSMM97]. Allerdings hilft uns diese Lösung nicht viel weiter, da die dabei auftretende Differentiation ein numerisch instabiler Prozess ist [HS01].

6.4 Klassifizierung schlecht gestellter Probleme

6.4.1 Diskretisierung der Integralgleichung

Um unser Problem numerisch lösen zu können, müssen wir die Integralgleichung

$$f(x) = \int_a^b A(x, \xi) g(\xi) d\xi \quad (6.14)$$

geeignet diskretisieren. Die Diskretisierung der Funktion f ist uns durch den Messprozess vorgegeben, da sie uns nur durch ihre Werte $f_i = f(x_i)$ an den Stellen $x_i, i = 1, 2, \dots, N$ zur Verfügung steht (Abbildung 6.4), wobei f_i durch

$$f_i = f(x_i) = \int_a^b A(x_i, \xi) g(\xi) d\xi \quad (6.15)$$

gegeben ist.

Die Funktion g approximieren wir ebenfalls durch ihre Werte $g_j = g(\xi_j)$ an den Stellen $\xi_j, j = 1, \dots, M$. Die Anzahl und die Verteilung dieser Stützstellen können wir beliebig

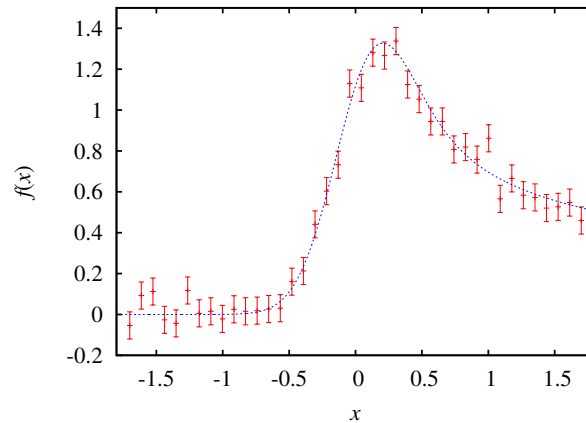


Abbildung 6.4: Beobachtungslichtkurve mit 40 Messwerten eines Mikrolensing-Ereignisses, die aus der kontinuierlichen Lichtkurve $f(x)$ in Abbildung 6.3 erzeugt wurde. Der Messfehler beträgt 5% der Amplitude der Ausgangslichtkurve.

wählen. Wir werden später sehen, welchen Einfluss die Wahl der Stützstellen für g auf die Lösung hat.

Das Integral geht durch die Diskretisierung in eine Summe

$$f_i = \sum_{j=1}^M a_{i,j} g_j$$

über, wobei die a_{ij} davon abhängen, wie wir die Funktionen f und g durch ihre Werte an den Stützstellen darstellen. Die in dieser Arbeit angewendete Diskretisierung der Abel'schen Integralgleichung ist im Anhang A.1 dargestellt.

Wir haben damit ein lineares Gleichungssystem

$$\mathbf{A}\mathbf{g} = \mathbf{f} \tag{6.16}$$

erhalten mit

$$\mathbf{f} = (f_1, f_2, \dots, f_N)^T$$

und

$$\mathbf{g} = (g_1, g_2, \dots, g_M)^T.$$

Bei jeder physikalischen Messung treten unvermeidbare Messfehler auf. Deshalb stehen uns nicht die exakten Daten $\mathbf{f}_{\text{exact}}$ zur Verfügung, sondern nur die durch die Messfehler

$$\delta\mathbf{f} = (\delta f_1, \delta f_2, \dots, \delta f_N)^T$$

gestörten Daten

$$\mathbf{f} = \mathbf{f}_{\text{exact}} + \delta\mathbf{f},$$

wobei der Fehler durch den Rauschpegel ϵ begrenzt ist,

$$\|\mathbf{f}_{\text{exact}} - \mathbf{f}\| \leq \epsilon.$$

Mit $\|\cdot\|$ ist hier eine Vektornorm bezeichnet. Die wichtigsten Eigenschaften von Vektoren- und Matrizenormen sind im Kasten 6.1 auf S.62 zusammengefasst.

Die Störungen δf_i ($i = 1, \dots, N$) in den Daten sind uns natürlich nicht exakt bekannt, ansonsten wäre es uns möglich, damit die exakten Daten $\mathbf{f}_{\text{exact}}$ zu erhalten. Wir haben in der Regel nur eine Abschätzung für die Standardabweichung s_i ($i = 1, \dots, N$) der einzelnen Störungen.

Abbildung 6.4 zeigt eine Lichtkurve, die sich bei der Beobachtung eines Mikrolensing-Ereignisses ergeben könnte. Sie besteht aus 40 Messwerten, die Standardabweichung beträgt 5% der Amplitude der Lichtkurve. An diesem Beispiel sollen in diesem Abschnitt einige der Konzepte und Ideen verdeutlicht werden.

6.4.2 Singulärwertzerlegung und Moore-Penrose-Inverse

Anmerkung: Die in diesem Abschnitt vorkommenden Definitionen und Eigenschaften sind, soweit nicht anders angegeben, der Monographie von Golub und van Loan [GVL96] entnommen.

Durch die Diskretisierung haben wir erreicht, dass wir anstelle der schlecht gestellten Integralgleichung 6.14 jetzt ein schlecht gestelltes lineares Gleichungssystem $\mathbf{A}\mathbf{g} = \mathbf{f}$ lösen müssen, wobei uns, wie schon angemerkt, nicht die exakten Daten $\mathbf{g}_{\text{exact}}$ zur Verfügung stehen, sondern nur die gestörten Daten $\mathbf{g} = \mathbf{g}_{\text{exact}} + \delta\mathbf{g}$.

Für eine invertierbare Matrix \mathbf{A} erhält man die Lösung des linearen Gleichungssystems $\mathbf{A}\mathbf{g} = \mathbf{f}$ durch

$$\mathbf{g} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{f}$$

mit der zu \mathbf{A} inversen Matrix \mathbf{A}^{-1} . Falls die Matrix \mathbf{A} nicht invertierbar ist, gibt es keine Lösung des linearen Gleichungssystems $\mathbf{A}\mathbf{g} = \mathbf{f}$, in diesem Fall ist es aber immer möglich, ein \mathbf{g} zu finden, mit dem das Residuum $\|\mathbf{A}\mathbf{g} - \mathbf{f}\|$ minimiert wird. Die Lösung \mathbf{g} mit minimaler Norm $\|\mathbf{g}\|$ wird als Minimum-Norm-Lösung bezeichnet.

Benutzen wir die euklidische Norm $\|\cdot\|_2$, so wird durch die Minimum-Norm-Lösung die quadratische Abweichung im Residuum minimiert, diese Lösung wird als *least square solution* \mathbf{g}_{LS} bezeichnet.

Ein wichtiges Werkzeug zur Charakterisierung und Lösung linearer Gleichungssysteme ist die Singulärwertzerlegung:

DEFINITION 6.6 Singulärwertzerlegung (SVD)²

Sei \mathbf{A} eine $\mathbb{R}^{m \times n}$ -Matrix. Die SVD ist eine Zerlegung von \mathbf{A}

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^T \tag{6.17}$$

in zwei orthogonale Matrizen

$$\mathbf{U} = (\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n) \in \mathbb{R}^{m \times m},$$

$$\mathbf{V} = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n) \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

und eine Matrix

$$\mathbf{\Sigma} = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_p) \in \mathbb{R}^{m \times n} \quad \text{mit } p = \min\{m, n\}$$

²Singular Value Decomposition

Eine Norm auf $\mathbb{R}^{m \times n}$ ist eine Funktion $\|\cdot\| : \mathbb{R}^{m \times n} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

1. $\|x\| \geq 0$ für $x \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $\|x\| = 0$ für $x = 0$
2. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ für $x, y \in \mathbb{R}^{m \times n}$
3. $\|cx\| = |c| \|x\|$ für $c \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^{m \times n}$

Für einen Vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ist die p -Norm $\|\cdot\|_p$ durch

$$\|\mathbf{x}\|_p = (|x_1|^p + \dots + |x_n|^p)^{\frac{1}{p}}$$

definiert. Spezialfälle der p -Norm sind

- $p = 1$: $\|\mathbf{x}\|_1 = |x_1| + \dots + |x_n|$
- $p = 2$: $\|\mathbf{x}\|_2 = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$ (Euklidische Norm)
- $p = \infty$: $\|\mathbf{x}\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$

Die p -Norm für eine $m \times n$ Matrix \mathbf{A} ist durch

$$\|\mathbf{A}\|_p = \max_{\|\mathbf{x}\|=1} (\mathbf{A}\mathbf{x})$$

für $x \in \mathbb{R}^n$ definiert. Für $p = 2$ erhalten wir die Spektralnorm

- $p = 2$: $\|\mathbf{A}\|_2 = \sqrt{\text{maximaler Eigenwert von } \mathbf{A}^T \mathbf{A}}$

Häufig wird für Matrizen die Frobenius-Norm verwendet:

$$\|\mathbf{A}\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2}$$

Kasten 6.1: Übersicht über die Eigenschaften von Vektor- und Matrixnormen (nach [GVL96]).

und

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_p \geq 0.$$

Die σ_i werden als die **Singulärwerte** von A , die Vektoren \mathbf{u}_i und \vec{v}_i als linke bzw. rechte **Singulärvektoren** von A bezeichnet.

Hansen [Han97] verwendet eine leicht unterschiedliche Definition der SVD, die in Golub und van Loan [GVL96] als *Thin SVD* bezeichnet wird und für die $m \geq n$ vorausgesetzt wird.

Die Anzahl der von Null verschiedenen Singulärwerte σ_i geben den Rang $\text{rank}(A)$ der Matrix A an, also die Anzahl der linear unabhängigen Zeilenvektoren.

Die Lösung eines linearen Gleichungssystems $A\mathbf{g} = \mathbf{f}$ ist für eine invertierbare Matrix A mit der Singulärwertzerlegung $A = U\Sigma V^T$ durch

$$\mathbf{g} = A^{-1}\mathbf{f} = (U\Sigma V^T)^{-1}\mathbf{f} = \sum_{i=1}^n \frac{\mathbf{u}_i^T \mathbf{f}}{\sigma_i} \mathbf{v}_i \quad (6.18)$$

gegeben. Allgemein kann man für jede Matrix A die *Moore-Penrose-Inverse*³

$$A^\dagger := \sum_{i=1}^{\text{rank}(A)} \frac{\mathbf{u}_i^T \mathbf{v}_i}{\sigma_i}, \quad (6.19)$$

definieren, indem in Gleichung (6.18) nur über die von Null verschiedenen Singulärwerte summiert wird. Für eine invertierbare Matrix A ist die Moore-Penrose-Inverse die inverse Matrix A^{-1} .

Die Least-Square-Lösung eines linearen Gleichungssystem ist mit der Moore-Penrose-Inversen durch

$$\mathbf{g}_{\text{LS}} = A^\dagger \mathbf{f}. \quad (6.20)$$

gegeben.

Aus der Definition von A^\dagger ist zu erkennen, dass für kleine Singulärwerte σ_i kleine Störungen in den Daten \mathbf{f} zu großen Änderungen in der Lösung führen können. Wie empfindlich das System auf Störungen reagiert, wird durch die *Konditionszahl* $\text{cond}(A)$ beschrieben, durch die eine obere Schranke für die relativen Änderungen im Ergebnis \mathbf{f} bei Änderungen in den Eingangsdaten \mathbf{g} gegeben ist [Ueb97],

$$\frac{\|\mathbf{f} - \bar{\mathbf{f}}\|}{\|\mathbf{f}\|} \leq \text{cond}(A) \frac{\|\mathbf{g} - \bar{\mathbf{g}}\|}{\|\mathbf{g}\|}.$$

Für die euklidische Norm $\|\cdot\|_2$ zeigen numerische Experimente, dass die tatsächliche relative Abweichung oft sehr nahe bei der oberen Schranke liegt [Win91].

Mit Hilfe der Singulärwertzerlegung berechnet sich die Konditionszahl für die euklidische Norm durch das Verhältnis von größtem zu kleinstem, von Null verschiedenem, Singulärwert

$$\text{cond}(A) = \frac{\sigma_1}{\sigma_{\text{rank}(A)}}. \quad (6.21)$$

³auch als Pseudoinverse oder Verallgemeinerte Inverse bezeichnet

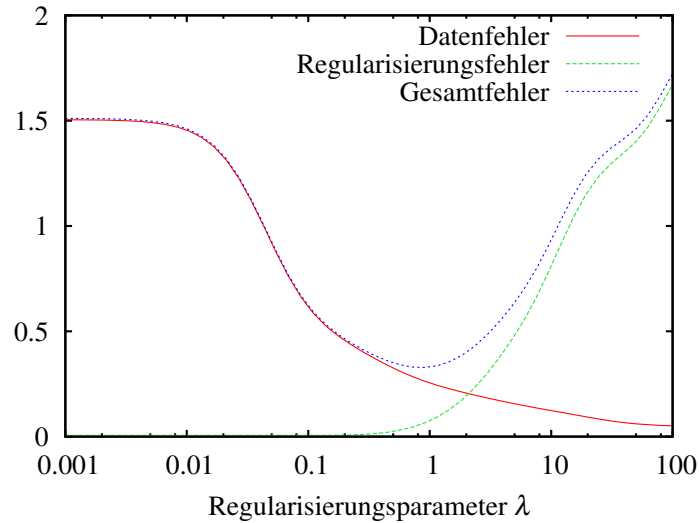


Abbildung 6.5: Verlauf von Datenfehler $\|S_\lambda(\mathbf{f}) - S_\lambda(\mathbf{f}_{\text{exact}})\|_2$, Regularisierungsfehler $\|S_\lambda(\mathbf{f}_{\text{exact}}) - \mathbf{A}^\dagger \mathbf{f}_{\text{exact}}\|_2$ und Gesamtfehler $\|\delta \mathbf{g}\|_2$ in Abhängigkeit vom Regularisierungsparameter für die Tikhonov-Phillips-Regularisierung.

Ein System mit einer kleinen Konditionszahl wird als *gut konditioniert* bezeichnet, bei einer großen Konditionszahl als *schlecht konditioniert*.

Die Darstellung (6.19) legt nahe, ein schlecht gestelltes Problem dadurch zu stabilisieren, in dem man die Singulärwerte mit einem Faktor h_i wichtet und damit den Einfluss der kleinen Singulärwerte verringert. Die Lösung erhält man dann aus

$$\mathbf{g} = \sum_{i=1}^n h_i \frac{\mathbf{u}_i^T \mathbf{f}}{\sigma_i} \mathbf{v}_i. \quad (6.22)$$

Die Wichtungsfaktoren h_i werden als Filter bezeichnet.

6.5 Stabilisierung schlecht gestellter Probleme

Da eine direkte Lösung eines schlecht gestellten Problems nicht zu sinnvollen Resultaten führt, sind spezielle Verfahren zu ihrer Lösung entwickelt worden, die als Regularisierungsverfahren bezeichnet werden.

Eine Regularisierung ist definiert als eine Abbildung $S_\lambda : Y \rightarrow X$ mit einem Regularisierungsparameter λ , die punktweise auf dem Definitionsbereich $D(\mathbf{A}^\dagger)$ von \mathbf{A}^\dagger gegen \mathbf{A}^\dagger konvergiert [Lou89],

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} S_\lambda(\mathbf{f}_{\text{exact}}) = \mathbf{A}^\dagger \mathbf{f} \quad \text{für } \mathbf{f}_{\text{exact}} \in D(\mathbf{A}^\dagger).$$

Da wir nur die gestörten Daten $\mathbf{f} = \mathbf{f}_{\text{exact}} + \delta \mathbf{f}$ kennen, berechnen wir eine Näherungslösung \mathbf{g}_λ für $\mathbf{g}_{\text{exact}}$ durch

$$\mathbf{g}_\lambda = S_\lambda(\mathbf{f}) = \mathbf{A}^\dagger \mathbf{f}. \quad (6.23)$$

Der Fehler $\delta \mathbf{g} = \mathbf{g}_\lambda - \mathbf{g}_{\text{exact}}$, also die Abweichung von exakter Lösung $\mathbf{g}_{\text{exact}}$ und Näherungslösung \mathbf{g}_λ ist durch

$$\delta \mathbf{g} = S_\lambda(\mathbf{f}) - \mathbf{A}^\dagger \mathbf{f}_{\text{exact}}$$

gegeben und lässt sich in einen Datenfehler und einen Regularisierungsfehler zerlegen:

$$\delta \mathbf{g} = \underbrace{S_\lambda(\mathbf{f}) - S_\lambda(\mathbf{f}_{\text{exact}})}_{\text{Datenfehler}} + \underbrace{S_\lambda(\mathbf{f}_{\text{exact}}) - \mathbf{A}^\dagger \mathbf{f}_{\text{exact}}}_{\text{Regularisierungsfehler}}. \quad (6.24)$$

Falls S_λ linear ist, können wir den Datenfehler als

$$S_\lambda(\mathbf{f}) - S_\lambda(\mathbf{f}_{\text{exact}}) = S_\lambda(\mathbf{f} - \mathbf{f}_{\text{exact}}) = S_\lambda(\delta \mathbf{f}) \quad (6.25)$$

darstellen. Damit wird deutlich, dass die Ursache für den Datenfehler die Störung $\delta \mathbf{f}$ in den Daten ist, während der Regularisierungsfehler durch die Anwendung der Regularisierung auf die exakten Daten $\mathbf{f}_{\text{exact}}$ entsteht.

Die Größe der beiden Fehleranteile hängt vom Regularisierungsparameter λ ab. Man kann zeigen, dass mit größer werdendem λ der Datenfehler kleiner wird, während der Regularisierungsfehler zunimmt [Lou89]. In Abbildung (6.5) ist der Verlauf von Datenfehler, Regularisierungsfehler und Gesamtfehler in Abhängigkeit vom Regularisierungsparameter dargestellt. Man erkennt, dass es ein optimales λ gibt, bei dem der Gesamtfehler minimiert wird. Allerdings wird für gestörte Daten der Gesamtfehler $\delta \mathbf{g}$ dabei nicht beliebig klein, daher können wir \mathbf{f} nicht exakt reproduzieren. Ein Ziel bei jedem Regularisierungsverfahren ist es daher, den optimalen Regularisierungsparameter zu finden.

6.5.1 Tikhonov-Phillips-Regularisierung

Anfang der sechziger Jahre des 20. Jahrhunderts entwickelten Phillips [Phi61] und Tikhonov [Tih63] unabhängig voneinander ein Verfahren zur Lösung von Fredholm'schen Integralgleichungen der 1. Art, die als *Tikhonov-Phillips-Regularisierung* bezeichnet wird.

Bei dieser Methode wird eine Näherungslösung g_λ der Integralgleichung $f = Ag$ durch

$$\min_{\lambda > 0} (\mathcal{J}_\gamma(g)) \quad (6.26)$$

mit dem *Tikhonov-Phillips-Funktional*

$$\mathcal{J}_\gamma(g) = \|Ag - f\|^2 + \lambda^2 \Omega(g)^2 \quad (6.27)$$

bestimmt. Der in dem Funktional auftretende Regularisierungsoperator $\Omega(g)$ wird als Strafterm bezeichnet, λ ist der Regularisierungsparameter.

Tikhonov verwendete als Strafterm die Norm $\Omega(g) = \|g\|^2$ der Funktion g . Phillips verwendete die Norm der zweiten Ableitung $\Omega(g) = \|g''\|^2$ von g .

Durch die Diskretisierung ersetzen wir die Funktionen f und g im Tikhonov-Phillips-Funktional durch Vektoren und den Integraloperator A durch eine Matrix und erhalten damit

$$\mathcal{J}_\gamma(\mathbf{g}) = \|\mathbf{A}\mathbf{g} - \mathbf{f}\|^2 + \lambda^2 \Omega(\mathbf{g})^2. \quad (6.28)$$

Der Strafterm wird in der diskreten Version der Tikhonov-Phillips-Regularisierung durch eine geeignete Matrix L dargestellt,

$$\Omega = \|Lg\|_2. \quad (6.29)$$

Überlicherweise verwendet man für L die Einheitsmatrix I oder eine diskrete Approximation eines Differentialoperators [Han97]. Die erste Ableitung wird durch

$$L_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad (6.30)$$

und die zweite Ableitung durch

$$L_2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad (6.31)$$

dargestellt.

Die Tikhonov-Phillips-Regularisierung kann als Filter für die Singulärwerte σ_i der Matrix A dargestellt werden. Für $L = I$ sind die Filterfaktoren h_i durch

$$h_i = \frac{\sigma_i}{\sigma_i^2 + \lambda^2}$$

gegeben [Lou89]. Für im Vergleich zu λ^2 große Singulärwerte σ_i liegt der Wert des Filterfaktors h_i nahe bei 1, so dass der Einfluss des Regularisierungsparameters λ auf den entsprechenden Teil der Lösung nur gering ist. Dagegen wird der Einfluss der kleinen Singulärwerte σ_i auf die Lösung, sofern man λ ausreichend groß wählt, gemindert.

6.5.2 Wichtung der Messfehler

Bisher sind wir davon ausgegangen, dass alle Messwerte mit dem gleichen Gewicht in das Regularisierungsfunktional eingehen. Allerdings weisen die Lichtkurven in der Regel unterschiedlich große Messfehler auf. Wir müssen daher die einzelnen Messwerte gemäß ihrem Messfehler wichten.

Im allgemeinsten Fall einer Kovarianz-Matrix der Form CC^T und vollem Rang erhalten wir das Tikhonov-Phillips-Funktional \mathcal{J}_λ durch eine Skalierung des Residuums mit der Matrix C^{-1} ,

$$\mathcal{J}_\lambda(g) = C^{-1} \|Ag - f\|_2^2 + \lambda^2 \|Lg\|_2^2.$$

Bei den Lichtkurven der Mikrolensing-Ereignisse können wir davon ausgehen, dass die Messfehler der einzelnen Messungen untereinander nicht korreliert sind. Die Kovarianz-Matrix ergibt sich dann als Diagonalmatrix

$$C = C^T = \text{diag}(\sqrt{s_1}, \dots, \sqrt{s_N})$$

mit den Standardabweichungen s_i der jeweiligen Messwerte [Han97].

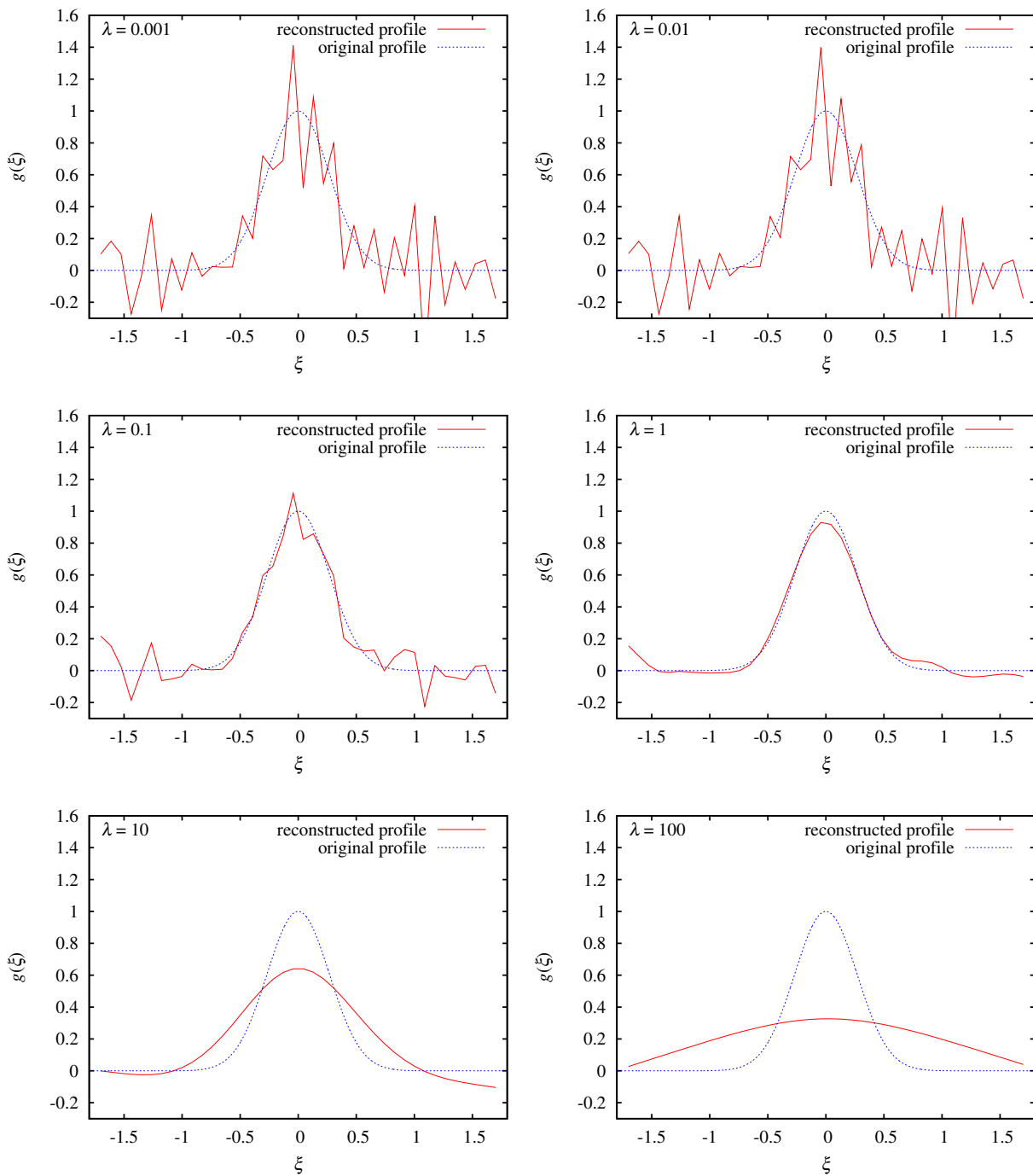


Abbildung 6.6: Einfluss des Regularisierungsparameters λ auf die Lösung des Tikhonov-Verfahrens f λ . Deutlich erkennt man die zunehmende Glättung mit wachsendem Regularisierungsparameter. Das Diskrepanzprinzip liefert $\lambda = 0,37$.

6.5.3 Lösungsverfahren

Die einfachste Möglichkeit, eine Lösung der Tikhonov-Phillips-Regularisierung zu einem gegebenen Regularisierungsparameter λ zu erhalten, bietet die Normalengleichung

$$(A^T A + \lambda^2 L^T L) \mathbf{g} = A^T \mathbf{f}, \quad (6.32)$$

die der Gleichung (6.27) äquivalent ist, wie durch Differenzieren von Gleichung (6.27) nach den einzelnen Komponenten von \mathbf{g} gezeigt werden kann. Die Umformung von Gleichung (6.32) liefert direkt die gesuchte Lösung

$$\mathbf{g} = (A^T A + \lambda^2 L^T L)^{-1} A^T \mathbf{f}.$$

Eine numerisch besser geeignete Methode ist der Bidiagonalisierungsalgorithmus von Eldén, für dessen Beschreibung auf die Literatur verwiesen sei [Eld77].

In der vorliegenden Arbeit kamen für die Tikhonov-Phillips-Regularisierung die NUMERICAL TOOLS von Hansen zum Einsatz [Han92]. Dabei handelt es sich um ein Software-Paket für das Numerik-Program MATLAB [MAT], das speziell für die Lösung schlecht gestellter Probleme entwickelt wurde. Eingesetzt wurde die Software unter GNU OCTAVE [OCT], das in vielen Bereichen kompatibel zu MATLAB ist.

Die NUMERICAL TOOLS stellt Funktionen zur Lösung verschiedener Regularisierungsverfahren und zur Bestimmung des Regularisierungsparameters (siehe Abschnitt 6.6) zur Verfügung.

Die Lösung der Tikhonov-Phillips-Regularisierung erfolgt dabei mit der verallgemeinerten Singulärwertzerlegung (GSVD⁴), die eine Erweiterung der in Abschnitt 6.4.2 eingeführten Singulärwertzerlegung für Matrizenpaare (A, L) ist. Eine genaue Beschreibung findet sich bei Hansen [Han97].

6.5.4 Tikhonov-Phillips-Regularisierung mit Nichtnegativitätsbedingung

Aufgrund von physikalischen Randbedingungen können wir oftmals den Verlauf oder den Wertebereich der Funktion g einschränken. So können die Flächenhelligkeitsprofile, die wir aus den Lichtkurven von Mikrolensing-Ereignissen rekonstruieren möchten, keine negativen Werte annehmen.

Mit dieser Nichtnegativitätsbedingung erhalten wir eine Lösung \mathbf{g}_λ mit der Tikhonov-Phillips-Regularisierung durch die Minimierung von

$$\mathcal{J}_\lambda(\mathbf{g}) = \|\mathbf{A}\mathbf{g} - \mathbf{f}\|^2 + \lambda^2 \|\mathbf{L}\mathbf{g}\|^2, \quad (6.33)$$

mit der Forderung

$$\mathbf{g} \geq 0.$$

Die Lösung erfolgt mit einem iterativen Algorithmus (Kasten 6.2), der Gradienten-Projektions-Methode, die ausführlich von Vogel [Vog02] beschrieben wird. Hier sollen kurz die wesentlichen Schritte dargestellt werden:

Grundlage des Verfahrens ist die Projektion P_{pos} von Vektoren aus \mathbb{R}^n auf den nicht-negativen Zahlenbereich von \mathbb{R}^n . Eine Projektion P ist dabei wie folgt definiert [Vog02]:

⁴Generalized singular value decomposition

```

i = 0;
Bestimme Startwert  $\mathbf{g}_0$ ;
start iteration
   $\mathbf{p}_i = -\nabla \mathcal{J}_\lambda(\mathbf{g}_i)$ ; (Negativer Gradient von  $\mathcal{J}_\lambda(\mathbf{g}_i)$ )
   $\tau_i = \min_{\tau > 0} (\mathcal{J}_\lambda(P_{\text{pos}}(\mathbf{g}_i + \tau \mathbf{p}_i)))$ ; (Golden Section Search)
   $\mathbf{g}_{i+1} = P(\mathbf{g}_{i+1} + \tau_i \mathbf{p}_i)$ ; (Neue Lösung)
   $i = i + 1$ ;
end iteration

```

Kasten 6.2: Algorithmus für Tikhonov-Phillips-Regularisierung mit Nichtnegativitätsbedingung [Vog02].

DEFINITION 6.7 Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ abgeschlossen und konvex. Für $\mathbf{g} \in \mathbb{R}^n$ ist die Projektion $P(\mathbf{g})$ von \mathbf{g} auf M gegeben durch

$$P(\mathbf{g}) := \arg \min_{\boldsymbol{\nu} \in M} \|\mathbf{g} - \boldsymbol{\nu}\| \quad (6.34)$$

Die Komponenten $[P_{\text{pos}}(\mathbf{g})]_i$ ($i = 1, \dots, n$) der Projektion eines Vektors $\mathbf{g} \in \mathbb{R}^n$ auf die Teilmenge der nichtnegativen Zahlen aus \mathbb{R}^n sind gegeben durch

$$[P_{\text{pos}}(\mathbf{g})]_i = \max(g_i, 0) = \begin{cases} g_i & \text{für } g_i \geq 0 \\ 0 & \text{für } g_i < 0. \end{cases} \quad (6.35)$$

Außerdem wird für das Verfahren der Gradient $\nabla \mathcal{J}_\lambda(\mathbf{g})$ des Tikhonov-Phillips-Funktional benötigt, der sich durch

$$\nabla \mathcal{J}_\lambda(\mathbf{g}) = (\mathbf{A}^T \mathbf{A} - \lambda^2 \mathbf{L}^T \mathbf{L}) \mathbf{g} - \mathbf{A}^T \mathbf{f} \quad (6.36)$$

berechnet [Vog02]. Durch den Gradienten $\nabla \mathcal{J}_\lambda(\mathbf{g})$ wird eine Richtung $\mathbf{p}_i = -\nabla \mathcal{J}_\lambda(\mathbf{g})$ ausgezeichnet, entlang der ein ν bestimmt wird, das $\mathcal{J}_\lambda(P_{\text{pos}}(\mathbf{g}_i + \tau \mathbf{p}_i))$ minimiert und mit dem ein neuer Wert für \mathbf{g} berechnet wird. Das ν wird dabei mit der Golden-Section-Search [PTVF92] bestimmt.

Als Startwert \mathbf{g}_0 für den Algorithmus bietet sich an, die Lösung der Standard-Tikhonov-Phillips-Regularisierung zu verwenden. Die Iterationsschleife wird so lange durchlaufen, bis keine Änderung von \mathbf{g} mehr beobachtet wird. Die Zahl der dafür benötigten Iterationsschritte liegt in der Größenordnung von einigen zehn bis zu einigen hundert Iterationen.

In der Praxis zeigte sich allerdings, dass die Einführung einer Nichtnegativitätsbedingung vor allem nur dort eine Verbesserung des rekonstruierten Profils bringt, wo die Profildfunktion nahe bei Null liegt. Im Prinzip werden mit dieser Methode nur die negativen Werte abgeschnitten, die sich bei der Standard-Tikhonov-Phillips-Regularisierung ergeben. Für den globalen Verlauf des rekonstruierten Profils konnte damit keine Verbesserung erzielt werden.

6.5.5 Weitere Regularisierungsverfahren

Neben dem Tikhonov-Phillips-Verfahren gibt es eine Reihe weiterer Regularisierungsverfahren, von denen einige in dem folgenden Überblick kurz vorgestellt werden sollen.

Maximum-Entropie-Verfahren

Das Maximum-Entropie-Verfahren (MEM) ist in der Astrophysik vor allem durch seine Anwendung für die Bildrekonstruktion bekannt geworden [NN86]. Dabei wird im Tikhonov-Phillips-Funktional (6.27) ein Strafterm der Form

$$\Omega(\mathbf{g})^2 = \sum_{i=1}^n g_i \log(g_i) \quad (6.37)$$

verwendet, der ein Maß für die Entropie von \mathbf{g} darstellt. Für die Bildrekonstruktion bietet sich mit dieser Methode der Vorteil, dass die Lösung nur positive Werte annehmen kann.

Abbildung 6.7 zeigt die rekonstruierten Profile der Maximum-Entropie-Methode für verschiedene Werte des Regularisierungsparameters. Es zeigt sich, dass mit dieser Methode im Vergleich zu den anderen Verfahren keine zufriedenstellende Rekonstruktion möglich ist. Eine Ursache dafür ist möglicherweise die Positivitätsforderung an des rekonstruierte Profil.

Abgeschnittene Singulärwertzerlegung

Die Definition 6.19 der Moore-Penrose-Inversen lässt sofort eine Möglichkeit erkennen, zu einer stabilen Lösung zu kommen: Anstatt die Summe über alle Singulärwerte laufen zu lassen, bricht man die Summe bei einem bestimmten Singulärwert σ_k ab. Dieses Verfahren wird als Abgeschnittene Singulärwertzerlegung bezeichnet (TSVD⁵). Der Regularisierungsparameter ist in diesem Fall der Index k , bis zu dem man die Summe laufen lässt.

Iterative Verfahren

Beim *Landweber*-Verfahren formuliert man die Normalen-Gleichungen $\mathbf{A}^T \mathbf{A} \mathbf{g} - \mathbf{A}^T \mathbf{f} = 0$ des linearen Gleichungssystems $\mathbf{A} \mathbf{g} - \mathbf{f} = 0$ als eine Fixpunktgleichung

$$\mathbf{g}^{(n+1)} = \mathbf{g}^{(n)} + \omega \mathbf{A}^T (\mathbf{f} - \mathbf{A} \mathbf{g}^{(n)}) \quad (6.38)$$

mit einem Dämpfungparameter $\omega > 0$ [Ric03].

6.6 Wahl des Regularisierungsparameters

Mit den vorgestellten Regularisierungsverfahren ist es möglich, eine stabile Lösung eines schlecht gestellten Problems zu erhalten. Der Einfluss der Regularisierung auf die Lösung wird dabei über einen Regularisierungsparameter λ gesteuert. Wir haben gesehen, dass der Gesamtfehler in der Lösung sich aus einem Daten- und aus einem Regularisierungsfehler zusammensetzt. Für ein bestimmtes λ wird der Gesamtfehler minimiert.

Wenn λ zu groß gewählt wird, überwiegt der Einfluss der Regularisierung, was in der Regel zu einer zu glatten Lösung führt. Wählen wir allerdings λ zu klein, überwiegt der Datenfehler. Dadurch erhalten wir eine zu sehr verrauschte Lösung. Abbildung 6.6 auf S.

⁵Truncated singular value decomposition

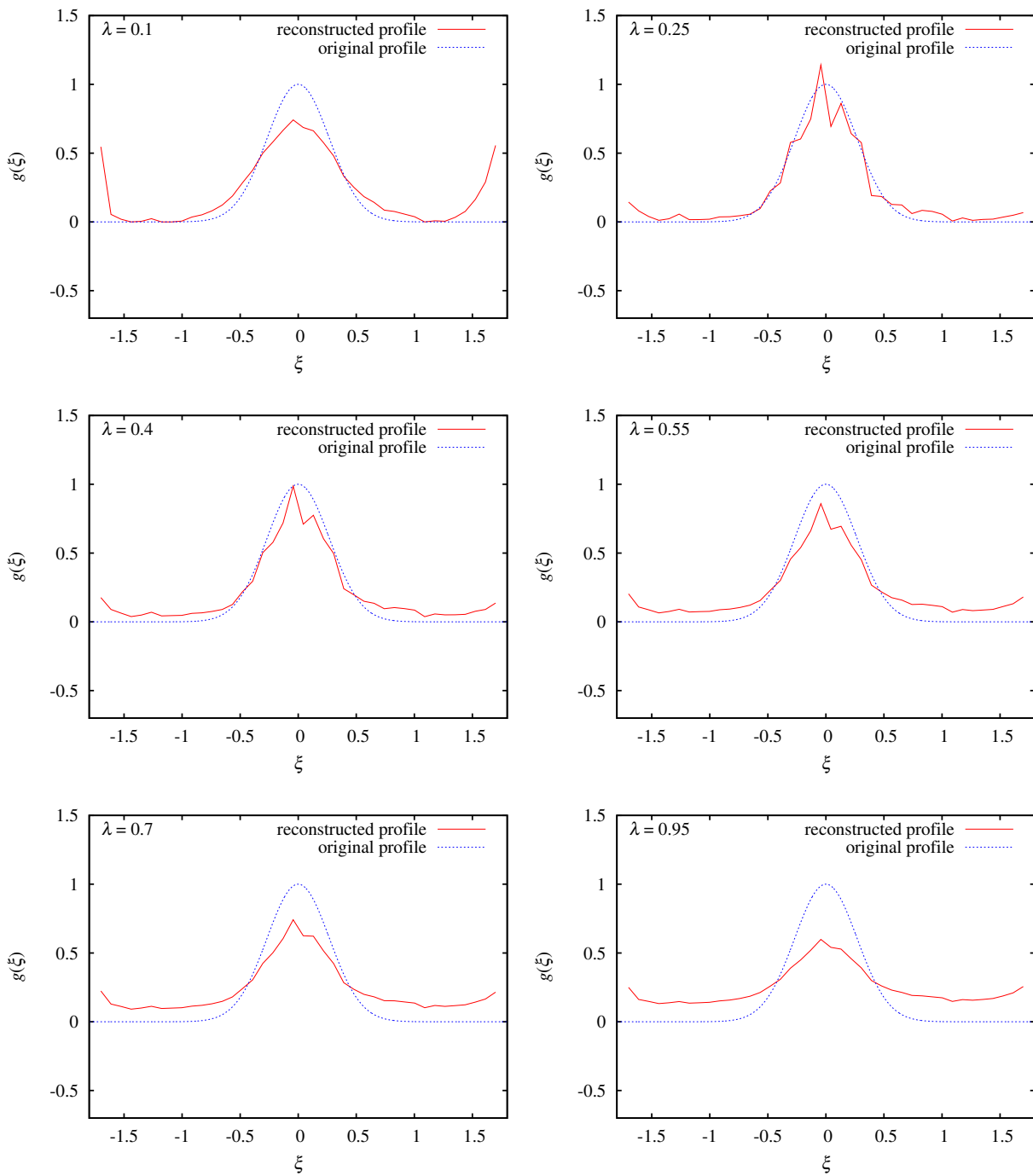


Abbildung 6.7: Einfluss des Regularisierungsparameters λ auf die Lösung der Maximum-Entropy-Methode.

67 zeigt den Einfluss des Regularisierungsparameters auf die Lösung der Tikhonov-Philips-Regularisierung .

Wir brauchen daher ein Verfahren, das uns einen optimalen Regularisierungsparameter λ liefert. Generell gibt es hierfür zwei Klassen von Ansätzen:

- Haben wir Kenntnis über die Größe der Störungen in den Daten, so können wir diese Information nutzen, um damit den Regularisierungsparameter zu bestimmen.

Zu dieser Klasse zählt das Morozov'sche Diskrepanzprinzip, das wir weiter unten besprechen werden.

- In vielen Fällen wissen wir allerdings nicht, wie groß die Fehler in den Daten sind. Dann müssen wir den Regularisierungsparameter mit einem Verfahren bestimmen, das ohne diese Kenntnis auskommt.

Von dieser zweiten Klasse werden wir die *Generalized Cross Validation* und die L-Kurven-Methode vorstellen.

Eine Übersicht über weitere Methoden findet sich in der Monographie von Hansen [Han97], die auch die Grundlage für die folgende Zusammenstellung ist.

Da wir bei der Messung von Lichtkurven davon ausgehen können, dass uns Informationen über den Messfehler zur Verfügung stehen, wurde bei der Anwendung der Regularisierungsverfahren für die im folgenden Kapitel gezeigten Simulationen das Diskrepanzprinzip zur Bestimmung des Regularisierungsparameters angewendet.

6.6.1 Diskrepanzprinzip

Das Diskrepanzprinzip setzt die Kenntnis der Größe der Messfehler in den Daten voraus. Entwickelt wurde es von Morozov [Mor66] und wird als *Morozov'sches Diskrepanzprinzip* bezeichnet.

Diesem Verfahren liegt die Idee zugrunde, dass man mit der Rekonstruktion keine größere Genauigkeit erreichen kann als die Störungen in den Daten erlauben. Der Regularisierungsparameter wird dabei so gewählt, dass für die Lösung \mathbf{g}_λ zu diesem Parameter

$$\|\mathbf{A}\mathbf{g}_\lambda - \mathbf{f}\|_2 = \|\delta\mathbf{f}\|_2 \quad (6.39)$$

gilt. Für die Tikhonov-Regularisierung kann man zeigen, dass die Lösung \mathbf{g}_α für $\|\delta\mathbf{f}\|_2 \rightarrow 0$ gegen

$$\mathbf{A}^\dagger \mathbf{f}$$

konvergiert [Gro93].

Da die exakten Fehler $\delta\mathbf{f}$ in den Daten unbekannt sind, wird $\|\delta\mathbf{f}\|_2$ durch die Standardabweichung \mathbf{s} der Messfehler abgeschätzt, der Regularisierungsparameter wird dann durch

$$\|\mathbf{A}\mathbf{g}_\lambda - \mathbf{f}\|_2 = \|\mathbf{s}\|_2 \quad (6.40)$$

bestimmt.

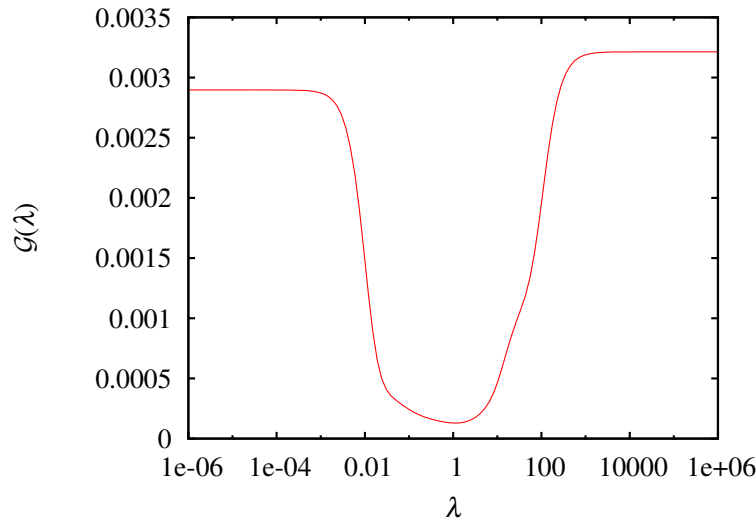


Abbildung 6.8: Verlauf der GCV-Funktion $\mathcal{G}(\lambda)$ in Abhängigkeit vom Regularisierungsparameter λ . Der durch das Minimum der GCV-Funktion bestimmte Regularisierungsparameter liegt bei $\lambda_{\min} = 1,13$.

6.6.2 Generalized Cross Validation

Bei der *Generalized Cross Validation* (GCV) wählt man den Regularisierungsparameter λ nach der *leave-one-out*-Methode, nach der ein aus den Daten \mathbf{f} entfernter Messwert durch das regularisierte Profil \mathbf{g}_λ wieder rekonstruiert werden sollte. Dafür ist die Kenntnis der Messfehler nicht erforderlich, vorausgesetzt wird aber ein weißes Rauschen für die Messfehler. Für die Lichtkurven der Mikrolensing-Ereignisse ist dies nur bedingt erfüllt. In der Regel steigt die Messgenauigkeit mit zunehmendem Fluss des beobachteten Objekts.

Die GCV-Methode wurde von Wahba zur Spline-Approximation [Wah90] entwickelt und später auf die Tikhonov-Phillips-Regularisierung [Wah77] angewendet.

Für die praktische Anwendung dieser Methode wird der Regularisierungsparameter durch das Minimum der GCV-Funktion

$$\mathcal{G} = \frac{\|\mathbf{A}\mathbf{g}_\alpha - \mathbf{f}_{\text{exact}}\|}{\text{trace}(\mathbf{I} - \mathbf{A}\mathbf{A}^\#)^2} \quad (6.41)$$

bestimmt [Han97].

Die Matrix $\mathbf{A}^\#$ wird als *regularisierte Inverse* bezeichnet und ist definiert durch

$$\mathbf{g}_\lambda = \mathbf{A}^\# \mathbf{f}, \quad (6.42)$$

sie erzeugt also zu dem Regularisierungsparameter λ die Lösung \mathbf{g}_λ aus den Daten \mathbf{f} . Für die Tikhonov-Phillips-Regularisierung mit $\mathbf{L} = \mathbf{I}$ erhält man $\mathbf{A}^\#$ aus der Singulärwertzerlegung von $\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^T$ und den Filterfaktoren h_i ,

$$\mathbf{A}^\# = \mathbf{V}\mathbf{H}\mathbf{\Sigma}^\dagger\mathbf{U}^T \quad \text{mit } \mathbf{H} = \text{diag}(h_1, \dots, h_n). \quad (6.43)$$

Diese und weitere Rechenvorschriften zur Bestimmung von A^\dagger für andere Regularisierungsverfahren finden sich in der schon erwähnten Monographie von Hansen [Han97].

Abbildung 6.8 zeigt den Verlauf der GCV-Funktion. Die Berechnung erfolgte mit der entsprechenden Funktion aus den NUMERICAL TOOLS.

6.6.3 L-Kurven-Methode

Die L-Kurven-Methode ist ein graphisches Werkzeug zur Bestimmung des Regularisationsparameters λ . Hinter diesem Verfahren steckt die Idee, dass für kleine λ zwar das Residuum $\|A\mathbf{g}_\lambda - \mathbf{f}\|$ klein wird, da durch die regularisierte Lösung \mathbf{g}_λ die Daten \mathbf{f} gut gefittet werden, allerdings die Lösung \mathbf{g}_λ von den Störungen in den Daten dominiert wird, wodurch der Strafterm $\Omega(\mathbf{g}_\lambda)$ groß wird, da die Lösung nicht glatt genug ist (*undersmoothed solution*)

Für große λ überwiegt die Regularisierung, wir erhalten eine zu glatte Lösung mit kleinem $\Omega(\mathbf{g}_\lambda)$ (*oversmoothed solution*), allerdings auf Kosten eines schlechten Fits an die Daten, so dass das Residuum $\|A\mathbf{g}_\lambda - \mathbf{f}\|$ groß wird.

Das Verhalten der Lösung für unterschiedliche Werte des Regularisierungsparameters wird nun untersucht, indem man den Strafterm $\Omega(\mathbf{g}_\lambda)$ gegen die Residuumsnorm $\|A\mathbf{g}_\lambda - \mathbf{f}\|$ in einer doppeltlogarithmischen Darstellung aufträgt. Der Name dieser Methode kommt daher, dass sich bei dieser Art der Darstellung ein „L“-förmiger Kurvenverlauf ergibt, wobei die Kurve mit zunehmenden Regularisierungsparameter von einem steilen Teil links oben nach einem flachen Teil rechts unten durchlaufen wird. Der steile Teil der Kurve korrespondiert dabei mit den zuwenig geglätteten Lösungen, während im flachen Teil die Lösungen zu sehr geglättet sind.

Mit dem Regularisierungsparameter soll nun zwischen dem zu wenigen Glätten und dem zu vielen Glätten ausbalanciert werden und man wählt für λ den Knick in der L-Kurve. In der praktischen Realisierung geht man nun so vor, dass man die Krümmung der L-Kurve als Funktion $\kappa(\lambda)$ darstellt und dann den Regularisierungsparameter durch das Maximum von κ bestimmt [Han01, HO93].

Abbildung 6.9 zeigt den Verlauf der L-Kurve für unsere Beispiellichtkurve aus Abbildung 6.4. Der damit bestimmte Wert für den Regularisierungsparameter ist aber deutlich zu klein und führt zu keiner guten Lösung für das rekonstruierte Profil, die in Abbildung 6.10 dargestellt ist.

6.7 Lokale Regularisierung

Durch die mathematische Beschreibung eines Kaustik-Crossings erhielten wir eine Volterra'sche Integralgleichung der 1. Art (6.5), die gegenüber der Fredholm'schen Gleichungen durch ihre kausale Struktur ausgezeichnet ist. So ist die Lichtkurve zu einem bestimmten Zeitpunkt nur durch das Quellprofil gegeben, das bereits von der Kaustik überschritten wurde.

Der Wert der Funktion $g(\xi)$ an einer bestimmte Stelle ξ hat somit keinen Einfluss auf den Verlauf von $f(x)$ für $x < \xi$. Zur Rekonstruktion von $g(\xi)$ sollte man daher nur den Teil von $f(x)$ mit $x \geq \xi$ verwenden.

Diese kausale Struktur der Volterra'schen Gleichung wird nun durch die Tikhonov-Phillips-Regularisierung zerstört, die zur Rekonstruktion von $g(\xi)$ die gesamten Daten

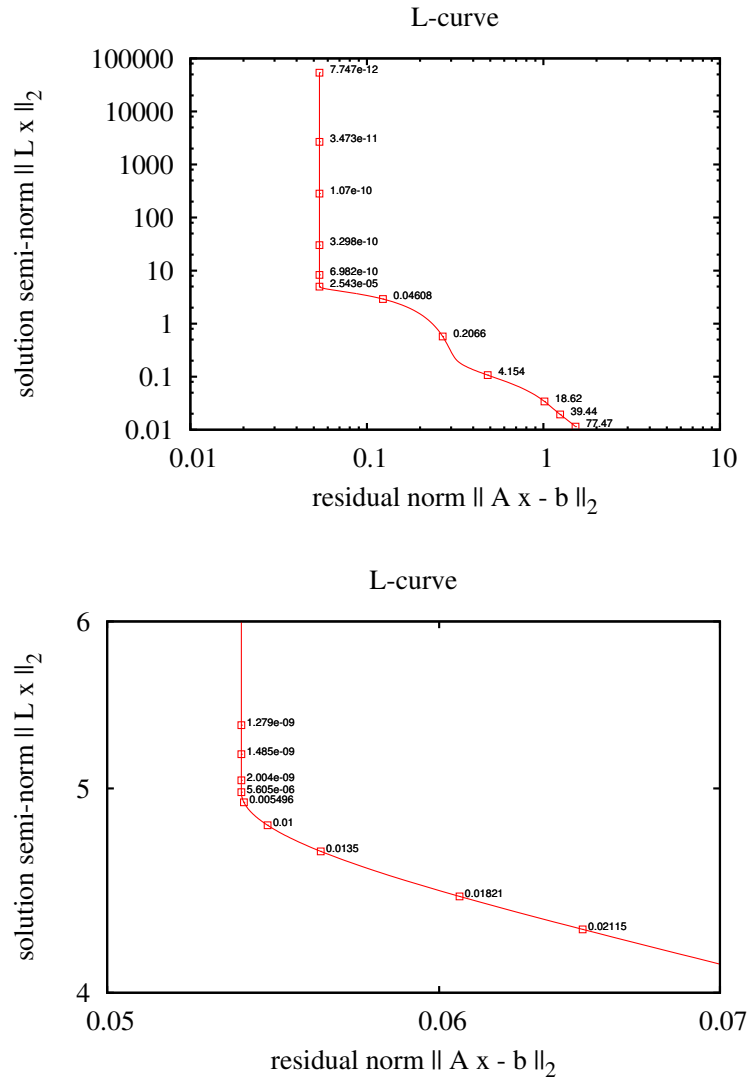


Abbildung 6.9: Die L-Kurve ist die doppellogarithmische Darstellung von $\Omega(g_\lambda)$ gegen die Norm $\|Ag_\lambda - f\|$ in Abhängigkeit vom Regularisierungsparameter λ . **(Oben)** Die L-Kurve des Tikhonov-Phillips-Verfahren für die Beispiellichtkurve aus Abbildung 6.4. **(Unten)** Ausschnitt aus der L-Kurve. Bei der L-Kurven-Methode wird der optimale Regularisierungsparameter durch die Ecke der L-Kurve bestimmt. Für die dargestellte L-Kurve ergibt sich ein Wert von $\lambda = 7 \cdot 10^{-6}$, der deutlich zu klein ist, wie das damit rekonstruierte Profil Abb. 6.10 zeigt.

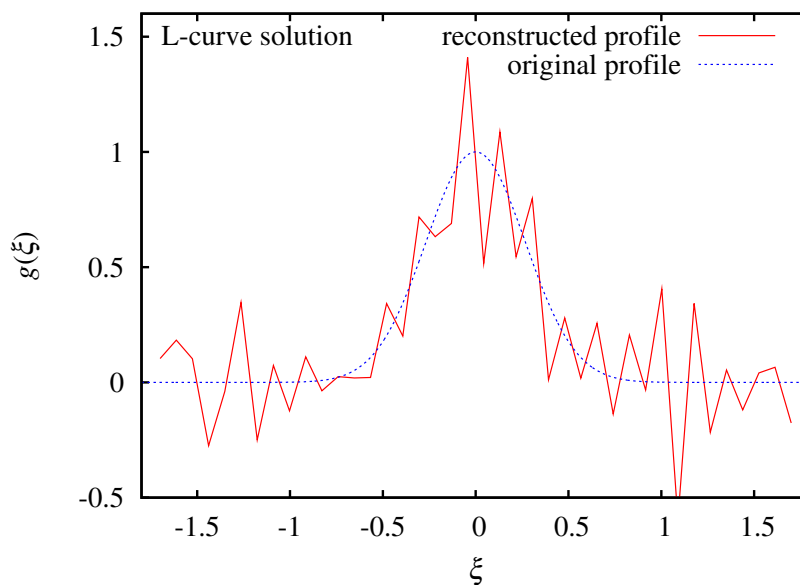


Abbildung 6.10: Mit der L-Kurven-Methode rekonstruiertes Profil der Lichtkurve aus Abbildung 6.4.

von f verwendet, also auch die Daten, die auf die Lösung g eigentlich keinen Einfluss haben.

Deutlich wird dies, wenn man zur Lösung der Tikhonov-Phillips-Regularisierung die Normalengleichung (6.32) anwendet. Durch die Diskretisierung der Volterra'schen Gleichung erhält man im Allgemeinen eine untere Dreiecksmatrix, deren Struktur bei der Lösung durch die Bildung des Produkts $A^T A$ wieder zerstört wird. Bei den anderen Verfahren zur Lösung der Tikhonov-Phillips-Regularisierung wird zwar $A^T A$ nicht explizit berechnet, sie benötigen aber zur Lösung ebenfalls *alle* Daten und sind daher auch nicht strukturerhaltend [Lam96].

Neben dem Problem der Kausalität, das so nur bei den Volterra'schen Gleichungen auftritt, ist mit den bisher besprochenen Regularisierungsverfahren ein weiterer Nachteil verbunden: die Regularisierung erfolgt stets global, d. h. es wird mit nur einem einzigen Regularisierungsparameter die gesamte Lösung g bestimmt. Man kann sich aber leicht vorstellen, dass dies nicht immer ideal ist, da dadurch manche Teile der Lösung g zu sehr, andere Teile dagegen nicht genügend geglättet werden. Besser wäre es, mit einem lokal variablen Regularisierungsparameter zu arbeiten.

Daher ist es sinnvoll, anstelle der bisher besprochenen Regularisierungsverfahren eine Methode anzuwenden, mit der

1. die kausale Struktur der Volterra'schen Integralgleichungen erhalten bleibt und
2. die es ermöglicht, einen lokal variablen Regularisierungsparameter einzusetzen.

Ein Verfahren, das diese beiden Vorteile miteinander vereint, ist die sogenannte lokale Regularisierung.

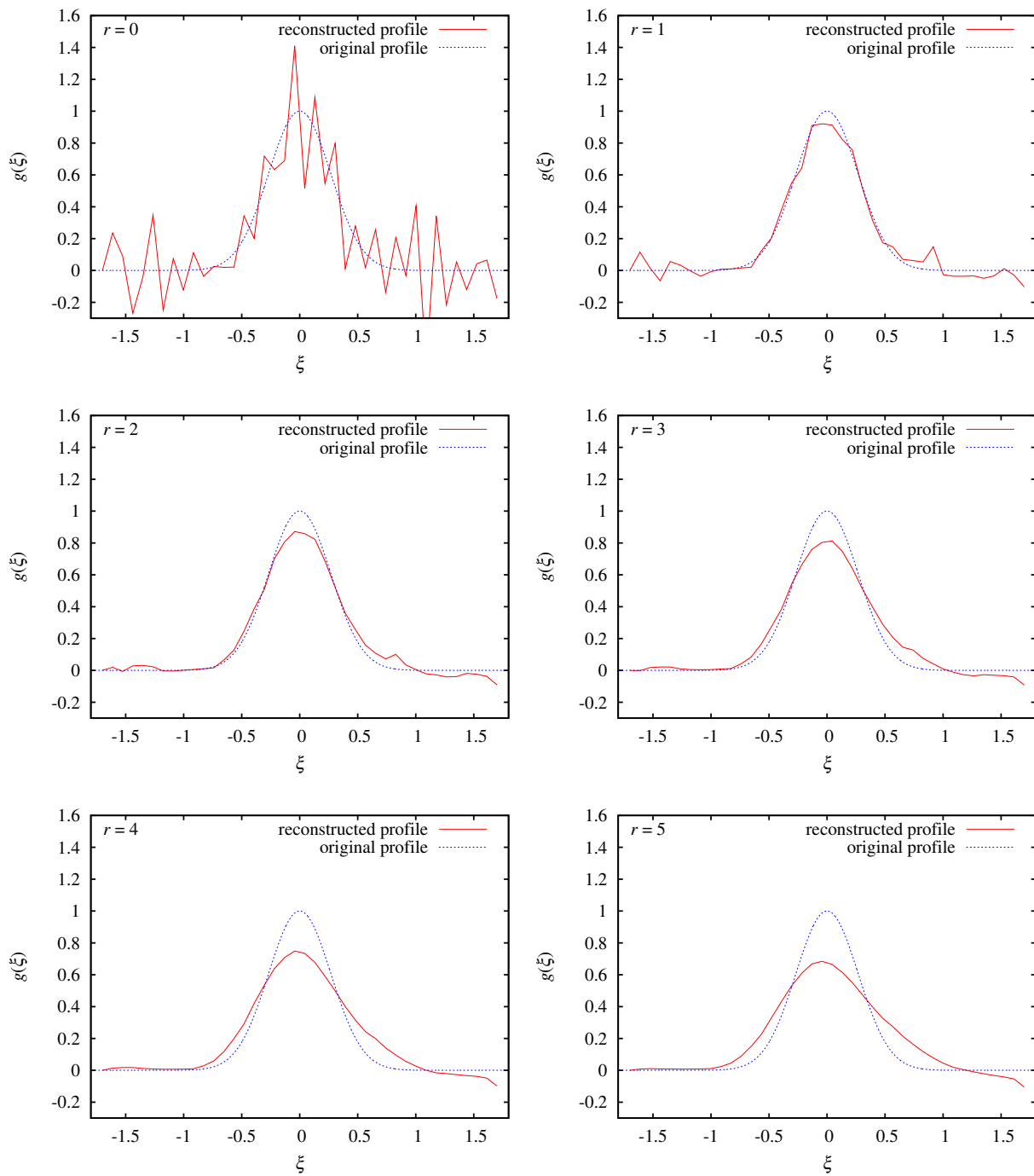


Abbildung 6.11: Einfluss des Regularisierungsparameters r auf die Lösung des lokalen Regularisierung

Ausgangspunkt dafür ist ein Verfahren, das Anfang der sechziger Jahre des 20. Jahrhunderts von Stolz zur Lösung der Inversen Wärmeleitungsgleichung (IHCP⁶) entwickelt wurde [Sto60] und auch von Grieger et al. zur Profilrekonstruktion aus Mikrolensing-Ereignissen angewendet wurde [GKS91].

Bei dieser Methode wird die Funktion g in einem sequentiellen Algorithmus aus den Daten f bestimmt, wobei die Lösung g_{solution} so bestimmt wird, dass die Daten f exakt gefittet werden, das Residuum $\|Ag_{\text{solution}} - f\|$ somit verschwindet. Dabei führen aber Störungen in den Daten dazu, dass man keine stabile Lösung erhält.

Eine Stabilisierung der Stolz-Methode erreichte Beck, ebenfalls zur Lösung der IHCP [Bec62, BBS85], indem zur Bestimmung von g_i anstelle nur des einzelnen Datenwertes f_i zusätzlich die nächsten r Datenpunkte $f_i, f_{i+1}, \dots, f_{i+r}$ verwendet werden.

Erst dreißig Jahre später, Mitte der neunziger Jahre, wurde von Lamm diese Methode erstmalig zur Lösung genereller Volterra'scher Integralgleichungen vorgeschlagen [Lam95].

6.7.1 Zerlegung des Volterra-Operators

Grundlage der lokalen Regularisierungsverfahren ist die Aufspaltung der Volterra'schen Integralgleichung der 1. Art

$$f(x) = \int_0^x A(x - \xi)g(\xi) \xi \quad x \in [0,1] \quad (6.44)$$

in einen lokalen und einen nicht-lokalen Teil [Lam00], wobei wir uns ohne Beschränkung der Allgemeinheit auf das Intervall $[0,1]$ beschränken können.

Wir nehmen, dass wir die Lösung $g(x)$ bis zur Stelle x kennen. Dann muss g die Integralgleichung

$$f(x + \rho) = \int_0^{x+\rho} A(x + \rho - \xi)g(\xi) d\xi \quad (6.45)$$

auch auf dem erweiterten Intervall $[0, x + \rho]$ mit $\rho > 0$, $\rho \leq 1 - x$ und $\rho \ll 1$ erfüllen.

Wir spalten das Integral an der Stelle x auf in zwei Integrale über $[0, x]$ und über $[x, x + \rho]$:

$$\begin{aligned} f(x + \rho) &= \int_0^x A(x + \rho - \xi)g(\xi) d\xi \\ &\quad + \int_x^{x+\rho} A(x + \rho - \xi)g(\xi) d\xi. \end{aligned} \quad (6.46)$$

Wir haben vorausgesetzt, dass wir g bis zur Stelle x kennen. Damit können wir das erste Integral in Gleichung (6.46) explizit ausrechnen, wobei allerdings zu berücksichtigen ist, dass der Operator A um ρ verschoben ist.

Betrachten wir nun das zweite Integral in Gleichung (6.46). Hier ersetzen wir ξ durch $\bar{\xi} = \xi - x$ und erhalten

⁶Inverse Heat Conduction Problem

$$\begin{aligned} \int_x^{x+\rho} A(x+\rho-\xi)g(\xi) d\xi &= \int_0^\rho A(\rho-\bar{\xi})g(\bar{\xi}+x) d\bar{\xi} \\ &= \int_0^\rho A(\rho-\xi)g(\xi+x) d\xi, \end{aligned} \quad (6.47)$$

wobei wir im letzten Schritt $\bar{\xi}$ in ξ umbenannt haben. Damit haben wir $f(x+\rho)$ in ein globales und in ein lokales Integral zerlegt,

$$\begin{aligned} f(x+\rho) &= \underbrace{\int_0^x A(x+\rho-\xi)g(\xi) d\xi}_{\text{global}} + \\ &\quad \underbrace{\int_0^\rho A(\rho-\xi)g(\xi+x) d\xi}_{\text{local}}, \end{aligned} \quad (6.48)$$

und wir können jetzt aus dem lokalen Integral die Funktion g , die wir auf $[0, x]$ als bekannt vorausgesetzt haben, für das Intervall $[x, x+\rho]$ bestimmen.

Tatsächlich aber kennen wir natürlich nicht die Funktion g auf $[0, x]$. Daher ermitteln wir g mit einer sequentiellen Methode. Beginnend bei $x=0$ erhalten wir eine Lösung für g auf dem Intervall $[0, \rho]$, die wir dann als Input nehmen, um g auf dem nächsten Intervall zu bestimmen.

6.7.2 Regularisierung des sequentiellen Verfahrens

Durch die Zerlegung des Integraloperators in einen globalen und einen lokalen Teil haben wir jetzt ein sequentielles Verfahren zur Lösung der Volterra'schen Integralgleichungen der ersten Art. Allerdings haben wir noch die Schlechtgestellttheit dieser Gleichungen in dem Lösungsverfahren zu berücksichtigen. Wir benötigen daher eine regularisierende Version des sequentiellen Algorithmus. Dafür sind eine Reihe von verschiedenen Methoden entwickelt worden:

Bei dem schon oben beschriebenen Verfahren von Beck wird der aktuelle Wert g_i an der Stelle x_i durch einen least-square-Fit an die nächsten r Datenpunkte $f_i, f_{i+1}, \dots, f_{i+r}$ bestimmt. Für diese Methode wurde im Rahmen dieser Arbeit ein Algorithmus entwickelt, um damit die Quellprofile aus den Lichtkurven der Mikrolensing-Ereignisse zu rekonstruieren.

Die Länge des Intervalls, also die Größe r , stellt bei diesem Verfahren den Regularisierungsparameter dar. In Abbildung 6.11 ist dargestellt, welchen Einfluss die Wahl von r auf das Resultat der Rekonstruktion hat.

Lamm konnte zeigen, dass mit dieser Methode für $\delta f \rightarrow 0$ und $r \rightarrow 0$ die Lösung g_r gegen die exakte Lösung g_{exact} konvergiert [Lam95], somit hierdurch ein Regularisierungsverfahren gegeben ist, wobei sie hier noch von einem konstanten Regularisationsparameter r für die Rekonstruktion der gesamten Funktion g ausgeht. In einer weiteren Arbeit von

Lamm und Scofield wird diese Voraussetzung fallen gelassen und ein variabler Regularisationsparameter $r_i = r(x_i)$ zugelassen [LS01].

Der in der Arbeiten von Lamm beschriebene Algorithmus setzt allerdings voraus, dass die Funktion g durch stückweise konstante Funktionen approximiert wird. Außerdem erfolgt die Diskretisierung von g und f auf äquidistanten Intervallen. Dadurch ergibt sich aus dem Integraloperator A eine untere Dreiecksmatrix mit der Struktur einer Töplitzmatrix⁷ A , deren besondere Form in dem angegebenen Algorithmus ausgenutzt wird. Bei vielen physikalischen Messungen ist es sicherlich möglich, die Daten in gleichmäßigen Abständen zu erhalten, bei den Lichtkurven von astronomischen Beobachtungen können wir in der Regel allerdings nicht davon ausgehen.

Daher wurde in der vorliegenden Arbeit ein Algorithmus entwickelt, mit dem auch die Rekonstruktion von g bei einer nicht äquidistanter Verteilung der Daten f möglich ist. Außerdem wird in diesem Algorithmus die stückweise konstante Approximation der Funktion g durch eine stückweise lineare Approximation ersetzt. Eine genaue Beschreibung folgt im Anhang A.2.

6.7.3 Bestimmung des Regularisationsparameters bei der lokalen Regularisierung

Im Gegensatz zur Tikhonov-Phillips-Regularisierung und den anderen beschriebenen Verfahren gibt es bis jetzt für die lokale Regularisierung keine theoretischen Arbeiten zur Bestimmung des Regularisierungsparameters.

Nach den Ausführungen in diesem Abschnitt liegt es nahe, das Diskrepanzprinzip anzuwenden. Da nur diskrete Werte für den Regularisierungsparameter möglich sind, können wir nicht erwarten, dass das Diskrepanzprinzip

$$\|A\mathbf{g}_r - \mathbf{f}\| = \|\mathbf{s}\| \quad (6.50)$$

exakt erfüllt wird. Wir bestimmen r daher so, dass der Absolutbetrag der Differenz

$$\text{abs}(\|A\mathbf{g}_r - \mathbf{f}\| - \|\mathbf{s}\|) \quad (6.51)$$

minimiert wird.

Die Simulationen zeigen, dass mit dem durch diese Methode bestimmten Regularisierungsparameter eine gute Rekonstruktion des Profils möglich ist.

⁷Eine Töplitzmatrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist eine Matrix, deren Elemente $a_{ij} = a_{j-i}$ nur von der Differenz ($j - i$) ihrer Indizes abhängt,

$$A = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{-1} & a_0 & \cdots & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{-(n-1)} & a_{-(n-2)} & \cdots & a_0 \end{pmatrix}. \quad (6.49)$$

7 Die Rekonstruktion des Quellprofils

7.1 Problemstellung

Wir haben gesehen, dass die Lichtkurve eines Kaustik-Crossings durch die Faltung des eindimensionalen Helligkeitsprofil mit der Verstärkungsfunktion der Kaustik gegeben ist. Durch das Überqueren der Quelle durch die Kaustik wird Schritt für Schritt die Quelle abgetastet und die Lichtkurve enthält daher die vollständige Information über das Helligkeitsprofil der Quelle. Die Zielsetzung bei der Beobachtung von Mikrolensing-Lichtkurven ist es, aus ihnen wieder das Quellprofil zu rekonstruieren. Mathematisch geschieht dies durch die Entfaltung der Lichtkurve, wofür die im vorherigen Abschnitt vorgestellten Regularisierungsverfahren benötigt werden.

In diesem Kapitel wollen wir die Frage beantworten, welches der Regularisierungsverfahren für diese Aufgabe am besten geeignet ist. Außerdem untersuchen wir, welche Anforderungen an die beobachteten Lichtkurven zu stellen sind, um zuverlässig das Profil rekonstruieren zu können.

7.1.1 Profilbestimmung mit Regularisierungsverfahren

Eine der ersten Untersuchungen, die sich mit Mikrolinsenereignissen und den daraus resultierenden Lichtkurven befasst, ist die 1984 veröffentlichte Arbeit von Chang und Refsdal [CR84]. Die Autoren untersuchen die Auswirkung, die einzelne Sterne in einer Linsengalaxie auf die Abbildung eines Quasars haben und berechnen die Lichtkurven von Kaustik-Crossing-Ereignissen, wobei sie als Quelle homogene Kreisscheiben verwendeten.

Ausgehend von dieser Arbeit zeigen Grieger et al., dass es im Prinzip möglich ist, aus den beobachteten Mikrolensing-Lichtkurven wieder das Helligkeitsprofil der Quelle zu erhalten [GKR88]. Die von ihnen verwendete Methode, die als *source profile approximation* bezeichnet wird, ist identisch mit dem im vorherigen Kapitel vorgestellten Stolz-Algorithmus. Dieses Verfahren wenden sie auf simulierte Lichtkurven an, wobei es sich um ideale Lichtkurven handelt, die nur ein sehr geringes Rauschen aufweisen. In den rekonstruierten Profilen ist aber dennoch eine deutliche Verstärkung dieses Rauschens erkennbar.

Um auch aus realistischeren Lichtkurven eine stabile Lösung zu erhalten, wenden Grieger et al. in einer weiteren Arbeit die Tikhonov-Phillips-Regularisierung zur Rekonstruktion des Profils an [GKS91].

Darauf aufbauend stellen Mineshige und Yonehara eine Methode vor, um das rekonstruierte eindimensionale Helligkeitsprofil $g(\xi)$ in ein radial-abhängiges Profil $g(r)$ zu transformieren [MY99].

Agol und Krolik entwickelten ein Verfahren, um aus der beobachteten Lichtkurve direkt die zweidimensionale Intensitätsverteilung $I(x, y)$ in der Akkretionsscheibe zu rekonstruieren. Ihre Inversionsmethode setzt dabei voraus, dass die Akkretionsscheibe durch das

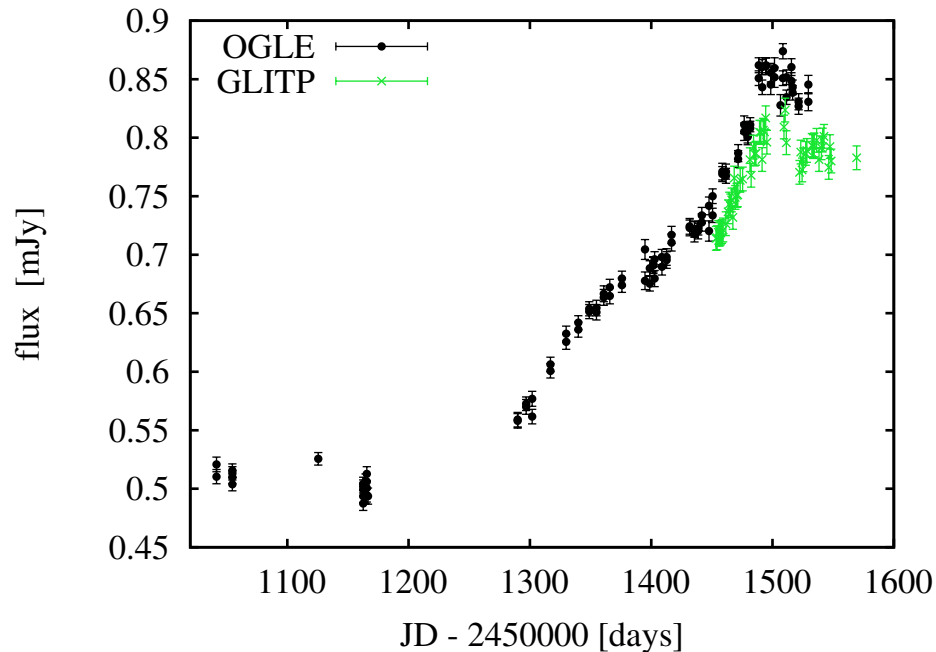


Abbildung 7.1: OGLE- und GLITP-Lichtkurven im V-Band der A-Komponente von Q2237+0305. Die GLITP-Daten weisen gegenüber den OGLE-Daten einen konstanten Offset auf.

Standardmodell für dünne Scheiben beschrieben werden kann. Sie berücksichtigen dabei auch relativistische Effekte des zentralen Schwarzen Loches und die Dopplerverschiebung aufgrund der Scheibenrotation. Für die erfolgreiche Inversion sind Beobachtungen in verschiedenen Wellenlängenbereichen (IR bis nahes UV) erforderlich [AK99].

7.1.2 Profilbestimmung durch Modellfitting

Eine andere Methode, aus den Lichtkurven der Mikrolensing-Ereignisse das Quellprofil zu bestimmen, ist das Anfitzen eines Modells der Quelle an die Lichtkurve. Dieses Verfahren wird bei den bisher beobachteten galaktischen Mikrolensing-Lichtkurven angewendet, um damit Informationen über das Helligkeitsprofil des gelinsten Sternes zu erhalten. Wir werden weiter unten darauf eingehen.

Bei extragalaktischen Mikrolensing-Ereignissen wurde diese Methode auf die Lichtkurven von Q2237+0305 angewendet. Shalyapin et al. deuten die GLITP-Lichtkurve [AMM+02] der Komponente A von Q2237+0305 als ein mögliches Kaustik-Crossing-Ereignis [SGA+02] und versuchen damit ein Akkretionsscheibenmodell zu finden, das den Verlauf der Lichtkurve am besten wiedergibt. Dafür fitten sie unterschiedliche Scheibenmodelle wie die dünne Akkretionsscheibe und Scheiben mit einer gaußförmigen oder einem Potenzgesetz folgender Intensitätsverteilung an die Daten an. Den besten Fit erhalten sie für die Standardakkretionsscheibe und bestimmen eine obere Grenze für den Radius der Scheibe, innerhalb dessen 90% der Energie erzeugt werden, von $r \leq 3,7 \times 10^{16}$ cm.

In einer weiteren Arbeit bestimmen Goicochea et al. mit diesem Ereignis in den GLITP-Daten die Masse des zentralen Schwarzen Loches und die Massenakkretionsrate für eine Standardakkretionsscheibe [GAMM03].

Wenn man allerdings die GLITP-Daten zusammen mit den OGLE-Daten betrachtet (Abbildung 7.1), fällt auf, dass das als Kaustik-Crossing gedeutete Ereignis in der GLITP-Lichtkurve Teil eines viel größeren und länger andauernden Ereignisses ist. Es ist daher nicht verständlich, warum die Autoren nur die GLITP-Daten in ihre Analyse einbeziehen und nicht auch die OGLE-Daten verwenden.

Kochanek wendet eine andere Methode zur Analyse der OGLE-Daten an [Koc03]. Dafür erzeugt er Verstärkungskarten für unterschiedliche Realisierungen des Mikrolinsensystems, in denen dann nach Lichtkurven gesucht wird, die die OGLE-Daten reproduzieren können, wobei als Quellprofil verschiedene Akkretionsscheibenmodelle unterschiedlicher Größe verwendet werden. Durch diese Methode soll es nach Ansicht des Autors möglich sein, die Größe und Struktur der Akkretionsscheibe und die wesentlichen Parameter des Linsensystems wie Transversalgeschwindigkeit der Quelle, die Massenverteilung und die mittlere Masse der Sterne in der Linsengalaxie zu bestimmen.

7.2 Zielsetzung

In den bisher durchgeführten Arbeiten wurde gezeigt, dass es mit der Tikhonov-Phillips-Regularisierung möglich ist, das Quellprofil aus den Lichtkurven eines Mikrolinsenerignisses zu rekonstruieren. Allerdings wird kaum untersucht, mit welcher Qualität dies möglich ist, also welchen Einfluss die verschiedenen Parameter der Lichtkurve wie Sampling und Messfehler auf das Resultat der Rekonstruktion haben. Diese Informationen sind unter anderem wichtig zur Planung von Beobachtungskampagnen.

Durch verschiedene äußere Einflüsse ist es außerdem im Allgemeinen nicht möglich, ein Objekt rund um die Uhr zu beobachten. Dadurch kommt es zwangsläufig zu größeren Lücken in den Lichtkurven.

Die Zeitskala galaktischer Kaustik-Crossing-Ereignisse liegt in der Größenordnung von Tagen, so dass es, außer durch die Abhängigkeit vom Wetter, durch den Tag-Nacht-Rhythmus zu solchen Lücken in den Beobachtungsdaten kommen kann. Hier kann man durch die gleichzeitige Beobachtung mit mehreren, über den Erdball verteilter, Teleskopen, wie es beispielsweise bei der PLANET-Kooperation [SAB⁺] realisiert wird, versuchen, eine lückenlose Lichtkurve zu erhalten.

Im Vergleich dazu ist die Zeitskala für Mikrolinsenergebnisse bei extragalaktischen Quellen viel länger, sie liegt in der Größenordnung von Monaten bis Jahren. Hier kann es durch die Bewegung der Erde um die Sonne für einen längeren Zeitraum zu einer Nichtbeobachtbarkeit kommen, so dass dadurch dann größere Lücken in der gemessenen Lichtkurve entstehen.

Eine Zielsetzung dieser Arbeit ist es daher, einem möglichen Beobachter die Information zur Verfügung zu stellen, wie häufig und mit welcher Genauigkeit ein Objekt beobachtet werden soll und welche Informationen man dann aus einer gemessenen Lichtkurve erhalten kann.

Eine weitere Zielsetzung dieser Arbeit ist die Frage, unter welchen Bedingungen es möglich ist, kleine Strukturen auf der Quelle wie Sternflecken oder hot spots auf einer Akkretionsscheibe zu rekonstruieren. Die bisherigen Arbeiten konzentrierten sich bei der Rekonstruktion vor allem auf den globalen Verlauf des Profils. Hier stellt sich die Frage, ob die bisher angewendete Tikhonov-Phillips-Regularisierung für dieses Problem das geeignete Verfahren ist und ob es mit der lokalen Regularisierungsmethode nicht besser möglich ist, solche Strukturen zu rekonstruieren.

7.3 Voraussetzungen für die Anwendung der Rekonstruktionsverfahren

Um zuverlässig die Rekonstruktionsverfahren auf Mikrolensing-Lichtkurven anzuwenden, sollten einige Voraussetzungen erfüllt sein:

1. Das beobachtete Ereignis sollte tatsächlich ein Kaustik-Crossing sein. Eine eindeutige Identifizierung ist anhand des typischen ‚M‘-förmigen Verlaufs eines solchen Ereignisses möglich.
2. Wir müssen den Fluss f_0 , der durch die anderen Mikrobilder entsteht, bestimmen. Dafür benötigen wir den Verlauf der Lichtkurve vor Eintritt des Kaustik-Crossings.
3. Falls die Quelle eine intrinsische Variabilität aufweist, müssen wir die Lichtkurve um die intrinsischen Helligkeitsänderungen korrigieren. Bei den gelinsten Mehrfachquasarsystemen können wir eine Quellvariabilität durch Vergleich mit Lichtkurven der anderen Komponenten feststellen. Voraussetzung dafür ist aber, dass das Time-Delay bekannt ist.

7.4 Die Simulationen

7.4.1 Erzeugung der Lichtkurven

Für die Untersuchung der Rekonstruktionsverfahren wurden zwei verschiedene Profile verwendet, die sich an astrophysikalischen Quellen orientierten. Zur Anwendung kamen

- das Modell einer Standardakkretionsscheibe
- das Modell einer Sternoberfläche

Die Profile werden durch eine zweidimensionale Intensitätsverteilung $I(x, y)$ beschrieben. Durch numerische Integration entlang einer angenommenen Kaustikrichtung wurden aus $I(x, y)$ das eindimensionale Helligkeitsprofil $g(\xi)$ erzeugt.

Aus dem Helligkeitsprofil $g(\xi)$ wurden die Lichtkurven durch Faltung von $g(\xi)$ mit der Verstärkungsfunktion Gleichung (4.31) einer Kaustik berechnet. Die Längen der Lichtkurven wurde dabei so gewählt, dass sie das gesamte Profil abdecken.

Aus dem Wert der Lichtkurven an bestimmten Stützstellen $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^T$ wurden dann die Beobachtungsdaten erzeugt. Zur Simulation der Messfehler wurden zu diesen Daten normalverteilte Zufallszahlen addiert.

Die Zufallszahlen wurden mit der `randn`-Funktion von GNU OCTAVE erzeugt. Ihre Verteilung ist durch die Standardabweichung s des angenommenen Messfehlers gegeben, wobei im folgenden immer die auf die maximale Amplitude f_{\max} der Lichtkurve normierte relative Standardabweichung

$$s_{\text{rel}} = \frac{s}{f_{\max}}. \quad (7.1)$$

angegeben wird.

Im Gegensatz zu realen Lichtkurven, wo die Größe des Messfehlers in der Regel von der Größe des Signals abhängt, nehmen wir hier vereinfachend eine konstante Standardabweichung des Messfehlers für die gesamte Lichtkurve an.

7.4.2 Rekonstruktionsfehler

Für eine quantitative Einschätzung der Regularisierungsverfahren benötigen wir ein Maß für den Unterschied zwischen dem rekonstruierten Profil \mathbf{g}_{reg} und dem Originalprofil $\mathbf{g}_{\text{exact}}$. Hansen [Han97] definiert dafür den Rekonstruktionsfehler

$$\eta_{\text{rec}} := \frac{\|\mathbf{g}_{\text{exact}} - \mathbf{g}_{\text{reg}}\|}{\|\mathbf{g}_{\text{exact}}\|}, \quad (7.2)$$

der die relative Abweichung zwischen beiden Profilen beschreibt.

7.5 Einfluss der Quellgröße auf das rekonstruierte Profil

Für die Rekonstruktion des Quellprofils aus einem Kaustik-Crossing-Ereignis setzen wir voraus, dass die Verstärkung der Kaustik durch das inverse Wurzelgesetz gegeben ist. Das gilt aber nur, wenn die Quelle ausreichend klein ist, so dass wir die Kaustik durch eine Gerade darstellen können. Grieger gibt als obere Grenze einen Quelldurchmesser von $0,1 R_E$ an.

Bei einem beobachteten Kaustik-Crossing-Ereignis wissen wir natürlich nicht von vornherein, wie groß die Quelle tatsächlich ist und ob es daher zulässig ist, diese Näherung zu machen. Außerdem steigt mit zunehmender Quellgröße auch die Wahrscheinlichkeit, dass die Quelle von mehr als einer Kaustik überquert wird.

Es stellt sich daher die Frage, was geschieht, wenn der Quelldurchmesser größer als $0,1 R_E$ ist. Können wir dann mit den Rekonstruktionsverfahren aus den Lichtkurven überhaupt irgendwelche sinnvolle Informationen über die Quelle erhalten?

Zur Beantwortung dieser Frage untersuchen wir, wie das rekonstruierte Profil aus der Lichtkurve eines Kaustik-Crossing-Ereignisses für unterschiedlich große Quellen aussieht.

Dafür wählen wir ein einfaches Linsensystem, eine Doppellinse mit den Massen $m_1 = 0,8$ und $m_2 = 0,2$, die sich an den Positionen $x_1 = x_2 = 0$ und $y_1 = 0,3$, $y_2 = -0,9$ befinden.

Als Quellprofil werden homogene Kreisscheiben mit den Durchmessern $D = 0,02 R_E$, $D = 0,05 R_E$, $D = 0,1 R_E$ und $D = 0,25 R_E$ verwendet.

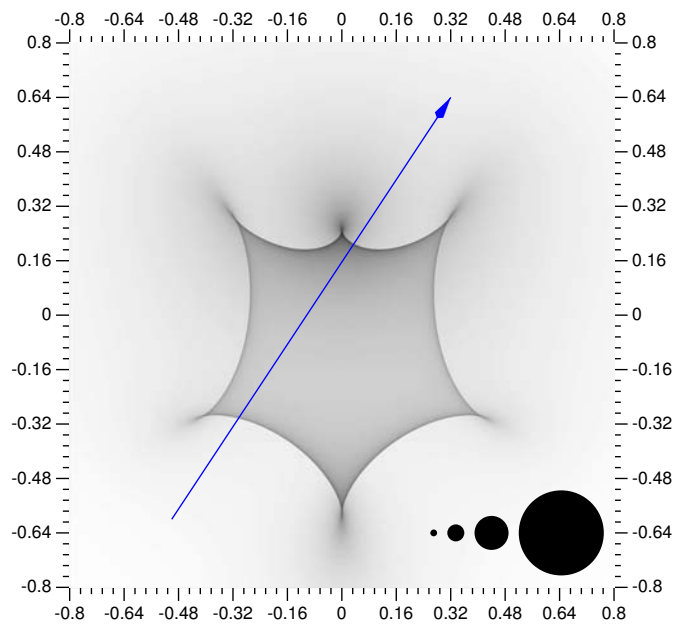


Abbildung 7.2: Verstärkungskarte einer Doppellinse mit den Positionen $\mathbf{r}_1 = (0,0; 0,3)$ und $\mathbf{r}_2 = (0,0; -0,9)$ und den Massen $m_1 = 0,8$ und $m_2 = 0,2$. Die Linie zeigt die Bewegungsrichtung der Quelle. Die Kreisscheiben stellen die vier Quellen mit den Durchmessern $D = 0,02R_E$, $D = 0,05R_E$, $D = 0,1R_E$ und $D = 0,25R_E$ dar.

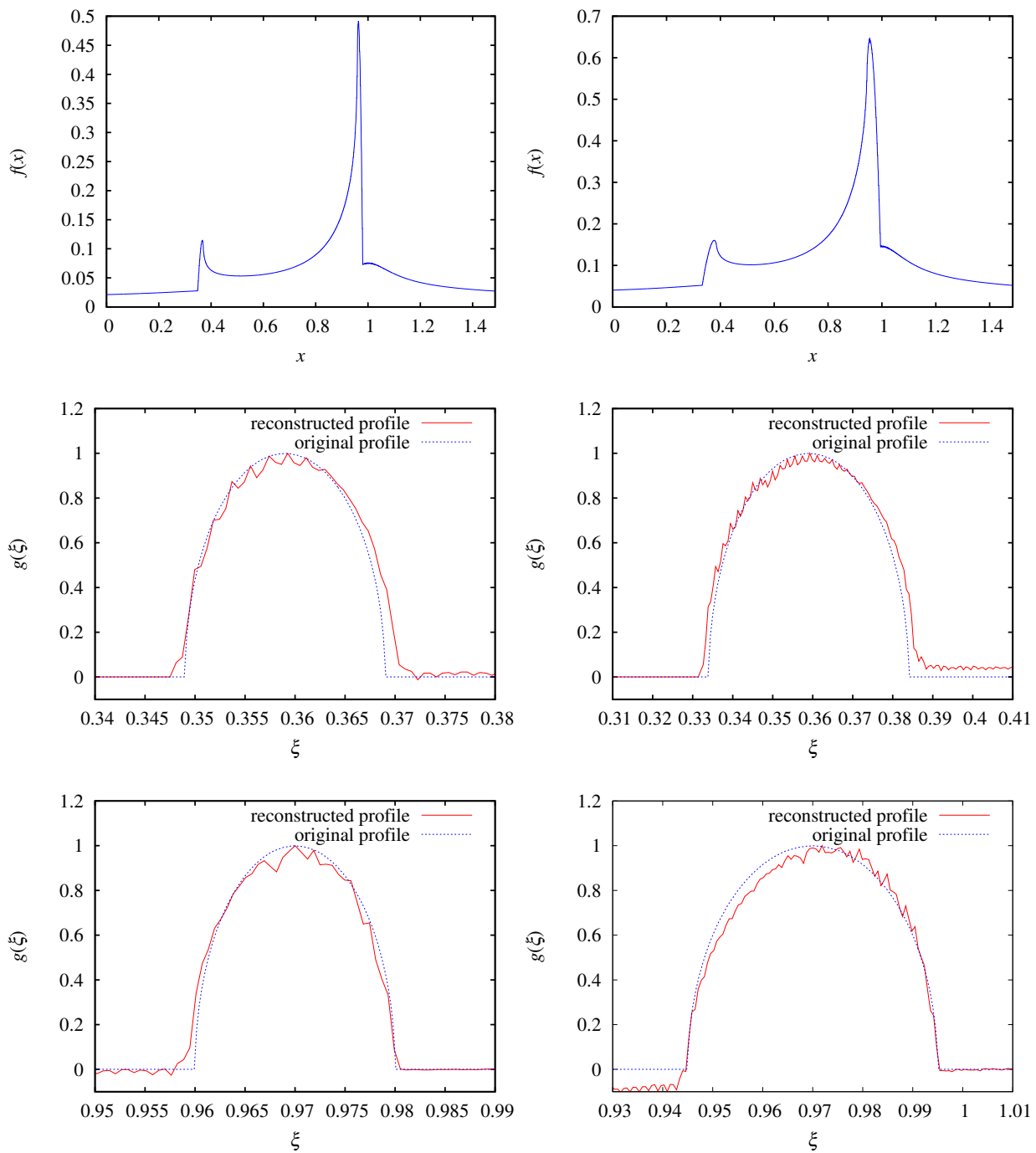


Abbildung 7.3: Lichtkurven und die aus ihnen rekonstruierten Profile für Quellen mit den Durchmessern $D = 0,02 R_E$ (**links**) und $D = 0,05 R_E$ (**rechts**). Die Profile des ersten Kaustik-Crossings sind in der mittleren Reihe dargestellt, die des zweiten Ereignisses in der unteren Reihe. Die gestrichelte Linie gibt den Verlauf des Originalprofils an.

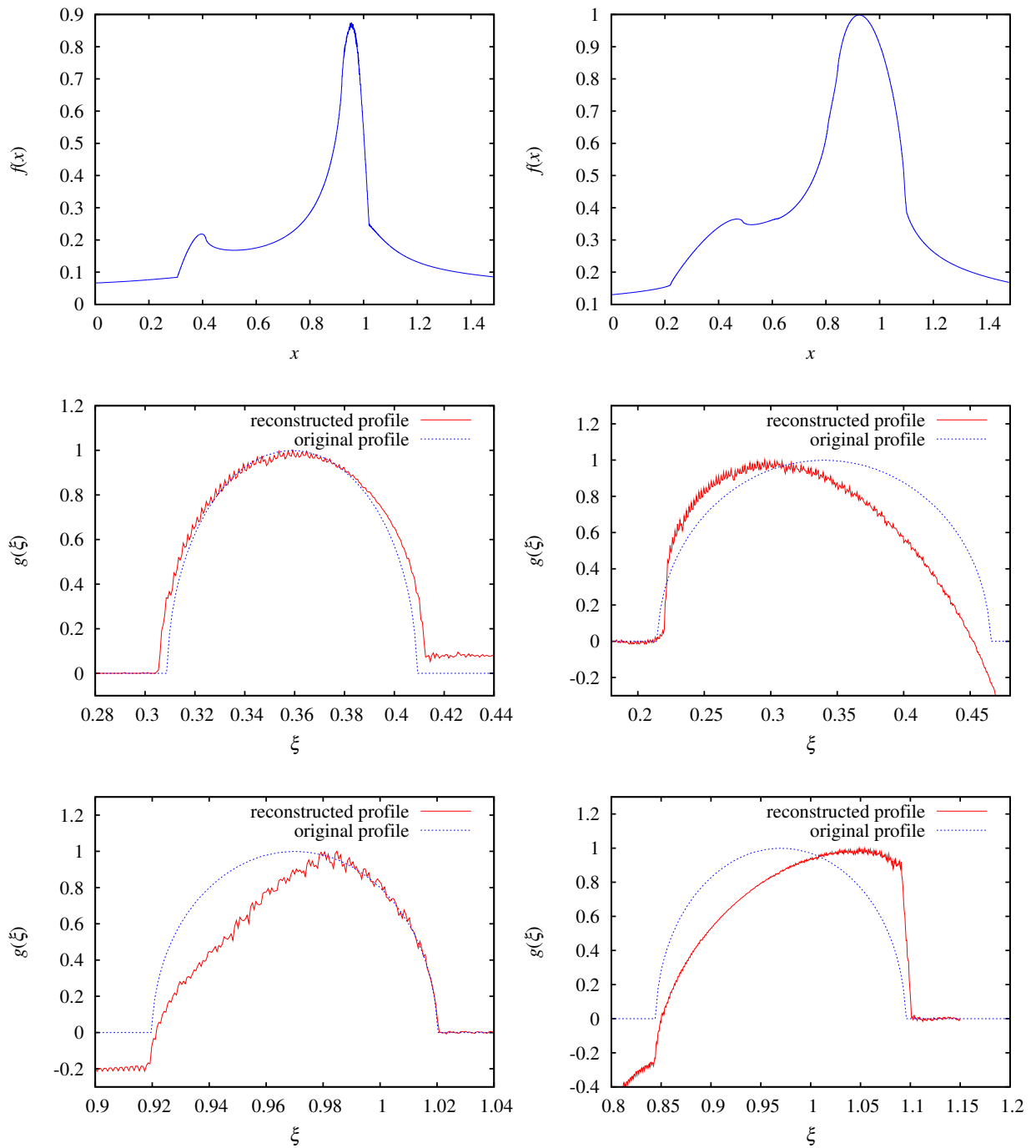


Abbildung 7.4: Lichtkurven und die aus ihnen rekonstruierten Profile für Quellen mit den Durchmessern $D = 0,1 R_E$ (**links**) und $D = 0,25 R_E$ (**rechts**). Die Profile des ersten Kaustik-Crossings sind in der mittleren Reihe dargestellt, die des zweiten Ereignisses in der unteren Reihe. Die gestrichelte Linie gibt den Verlauf des Originalprofils an.

Die Verstärkungskarte des Linsensystems ist in Abbildung 7.2 dargestellt, die eingezeichnete Linie gibt die Bewegungsrichtung der Quelle an. Entlang des Tracks treten zwei Fold-Kaustik-Crossing-Ereignisse auf. Aus der Faltung von Verstärkungskarte und zweidimensionalem Quellprofil wurden die Lichtkurven erzeugt, die in den Abbildungen 7.3 und 7.4 zusammen mit den daraus rekonstruierten Profilen dargestellt sind.

Wie in Abschnitt 4.7 dargestellt wurde, muss zur Anwendung der Rekonstruktionsverfahren die Lichtkurve um den Fluss f_0 korrigiert werden. Das ist hier aber nicht mehr in allen Fällen möglich. Insbesondere beim zweiten Kaustik-Crossing ist dies für die beiden größten Quellen nicht mehr möglich. In diesen Fällen wurden die Lichtkurven um ein konstantes f_0 korrigiert. Bestimmt wurde dieses f_0 aus dem Wert der Lichtkurve zum Zeitpunkt des vermuteten Kaustik-Eintritts. In allen anderen Fällen wurde f_0 durch eine Gerade approximiert, die aus dem Verlauf der Lichtkurve vor dem Eintritt der Quelle in die Kaustik bestimmt wurde.

Als Rekonstruktionsverfahren wurde die lokale Regularisierungsmethode angewendet. Da wir es hier mit idealen Lichtkurven, die nur ein geringes numerisches Rauschen aufweisen, dessen Größenordnung nicht genau bekannt ist, wählen wir den Regularisierungsparameter zu $r = 1$. Das Rauschen der Daten wird bei der Invertierung dennoch deutlich verstärkt, wie in den rekonstruierten Profilen zu erkennen ist.

Bei den beiden kleinsten Quellen mit den Durchmessern von $D = 0,02 R_E$ und $D = 0,05 R_E$ zeigt das Ergebnis der Rekonstruktion eine gute Übereinstimmung mit den Originalprofilen.

Bei der Quelle mit einem Durchmesser von $D = 0,1 R_E$ liefert nur das erste Kaustik-Crossing ein gutes Ergebnis. Beim zweiten Kaustik-Crossing in der Lichtkurve kann für diese Quellgröße der Fluss f_0 nicht mehr durch eine Gerade dargestellt werden. Es kommt hier zu einem deutlichen Unterschied zwischen dem rekonstruierten Profil und dem Original.

Noch drastischer wird dies bei der größten Quelle mit $D = 0,25 R_E$. Hier ist die Quelle so groß, dass von ihr auch noch die Cusp-Kaustiken überquert werden. Eine sinnvolle Rekonstruktion ist hier nicht mehr möglich. Es ist allerdings immer noch möglich, die ungefähre Größe der Quelle abzuschätzen.

Mit diesen Ergebnissen wird deutlich, dass die Quellgröße einen großen Einfluss auf das Ergebnis der Profilrekonstruktion hat. Insbesondere bei größeren Quellen kann die lokale Kaustikstruktur dazu führen, dass es nicht mehr möglich ist, aus der Rekonstruktion ein vernünftiges Resultat zu erzielen. Das dürfte insbesondere für das Quasarmikrolensing eine große Rolle spielen, da dort im Gegensatz zu dem hier untersuchten Doppellinsensystem eine wesentlich kompliziertere Kaustikstruktur auftreten kann. Die Abschätzung von $0,1 R_E$ als obere Grenze für den Quelldurchmesser erweist sich aber auch für das hier untersuchte Doppelsystem als zu optimistisch.

Interessanterweise lässt sich der Verlauf der Lichtkurve vor dem Eintritt des Kaustik-Crossings in den Fällen, in denen eine Rekonstruktion nicht möglich war, nicht durch einen linearen Verlauf darstellen. Möglicherweise bietet sich hiermit ein Kriterium, mit dem es möglich ist, zu entscheiden, ob sich eine Lichtkurve für die Profilrekonstruktion eignet.

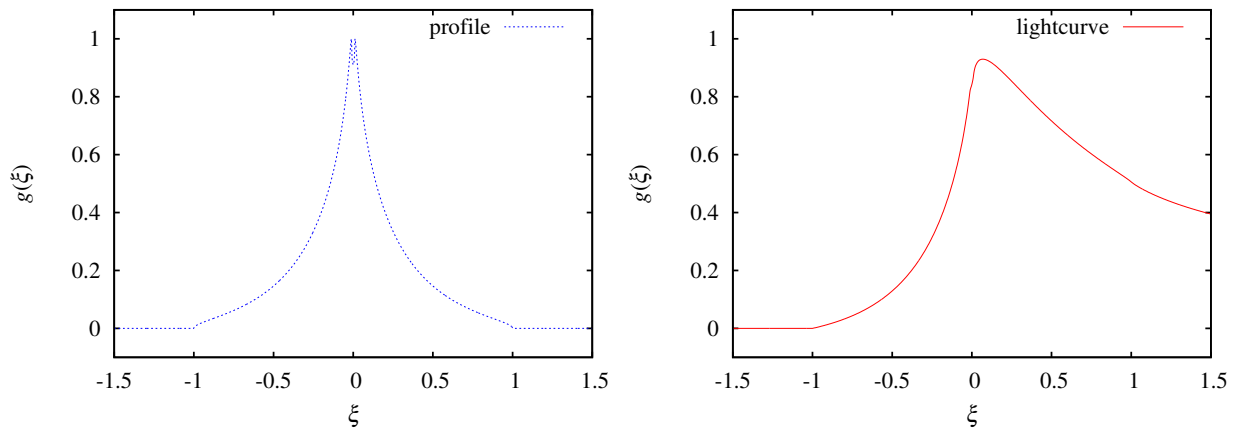


Abbildung 7.5: (Links) Eindimensionales Helligkeitsprofil $g(\xi)$ einer Standardakkretionsscheibe. (Rechts) Mikrolensing-Lichtkurve $f(x)$ der Standardakkretionsscheibe.

7.6 Lichtkurven mit regelmäßig verteilten Messwerten

Der Erfolg der Profilrekonstruktion hängt entscheidend ab von der Qualität der gemessenen Lichtkurve. Wichtige Faktoren sind unter anderem die Anzahl der Messwerte und die Größe des bei der Beobachtung auftretenden Messfehlers. Diese Abhängigkeit wollen wir jetzt untersuchen. Dabei beschränken wir uns auf den Fall einer Lichtkurve mit einem regelmäßigen Sampling der Daten.

Es ist leicht einzusehen, dass man mit einer zunehmender Anzahl der Datenpunkte in der Lichtkurve eine bessere Rekonstruktion des Profils erreichen sollte. Ein ähnliches Verhalten sollte auch für den Einfluss des Messfehlers gelten. Das soll im folgenden quantitativ untersucht werden. Als Quellprofil wird dabei das Modell einer Standardakkretionsscheibe verwendet. Das eindimensionale Helligkeitsprofil $g(\xi)$ der Scheibe und ihre Mikrolensing-Lichtkurve $f(x)$ sind in [Abbildung 7.5](#) dargestellt.

Für die Rekonstruktion wurden Lichtkurven mit 9 bis 100 Datenpunkten für vier verschiedene Fehlerniveaus erzeugt. Die Größe der relativen Standardabweichungen beträgt 1%, 3%, 5% und 10%.

Die [Abbildungen 7.6](#) und [7.7](#) zeigen die Abhängigkeit des Rekonstruktionsfehlers η_{reg} von der Anzahl der Messwerte für die Tikhonov-Phillips-Regularisierung und die lokale Regularisierung.

Der Vergleich der Kurven zeigt keine signifikanten Unterschiede zwischen den beiden Regularisierungsverfahren. Beide Verfahren zeigen die gleiche Abhängigkeit von Messfehler und Anzahl der Datenpunkte.

Wie zu erwarten war, steigt mit geringer werdendem Messfehler die Güte der Rekonstruktion. Interessanter ist die Abhängigkeit von der Anzahl der Datenpunkte. Auch hier bringt zunächst die Erhöhung der Anzahl eine Verbesserung der Rekonstruktion. Allerdings bleibt der Rekonstruktionsfehler ab einer bestimmten Anzahl der Datenpunkte auf einem konstanten Niveau.

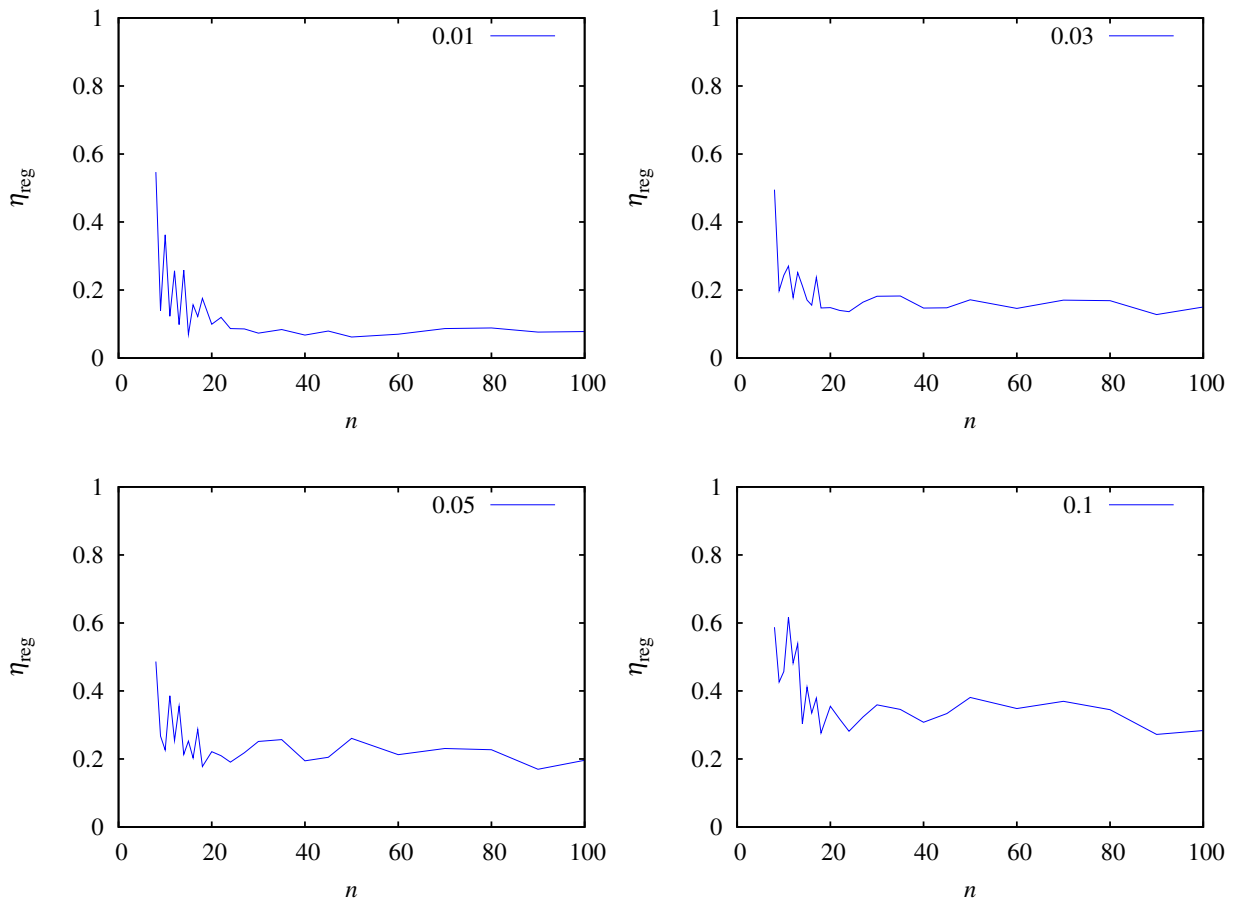


Abbildung 7.6: Verlauf des Rekonstruktionsfehlers η_{reg} der Tikhonov-Phillips-Regularisierung für Lichtkurven mit gleichmäßig verteilten Datenpunkten in Abhängigkeit von der Anzahl der Messwerte n für vier verschiedene Fehlerniveaus von 1%, 3%, 5% und 10%.

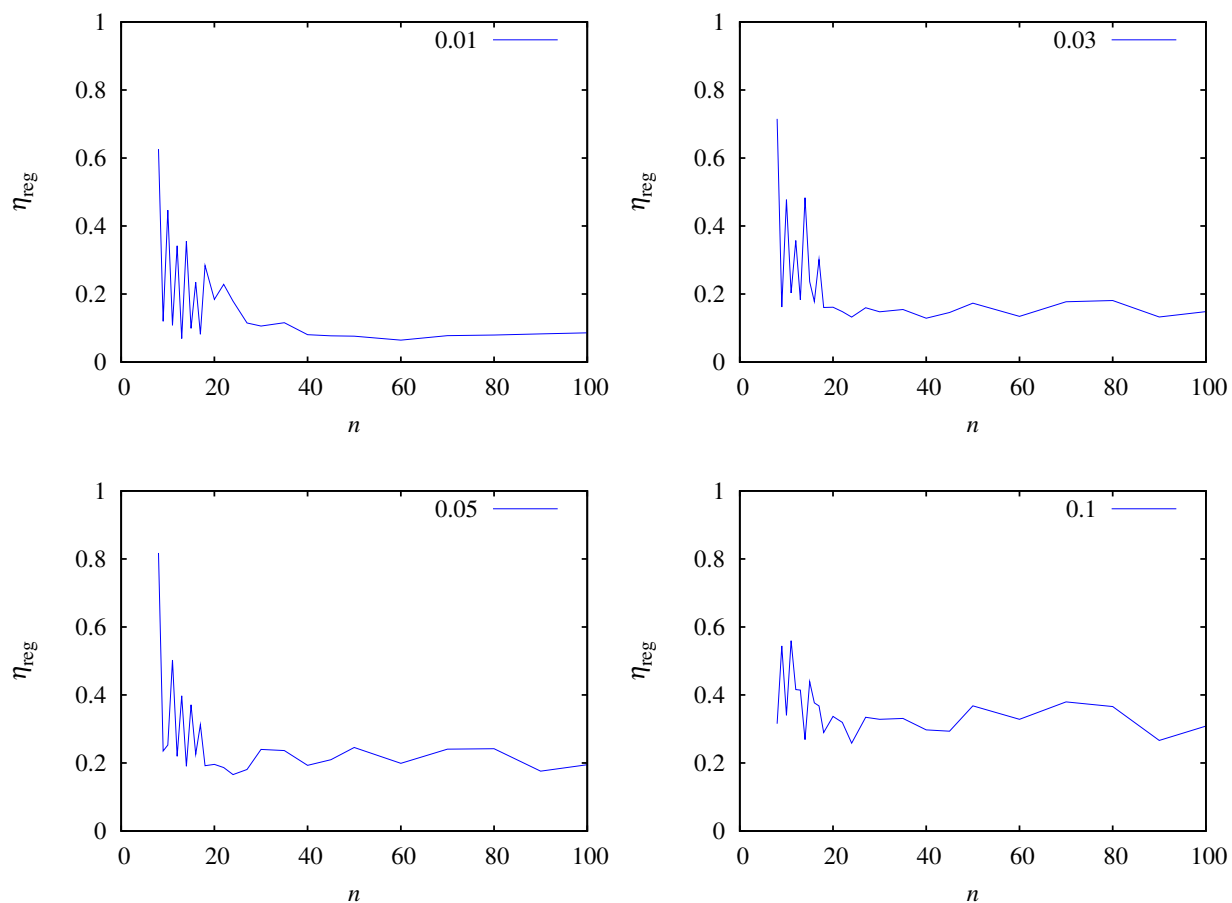


Abbildung 7.7: Verlauf des Rekonstruktionsfehlers η_{reg} der lokalen Regularisierung für Lichtkurven mit gleichmäßig verteilten Datenpunkten in Abhängigkeit von der Anzahl der Messwerte n für vier verschiedene Fehlerniveaus von 1%, 3%, 5% und 10%.

Die Abbildungen 7.8 bis 7.12 zeigen die rekonstruierten Profile für Lichtkurven mit 10, 15, 20, 30 und 50 Datenpunkten und einer Standardabweichung des Fehlers von 1% und 5%.

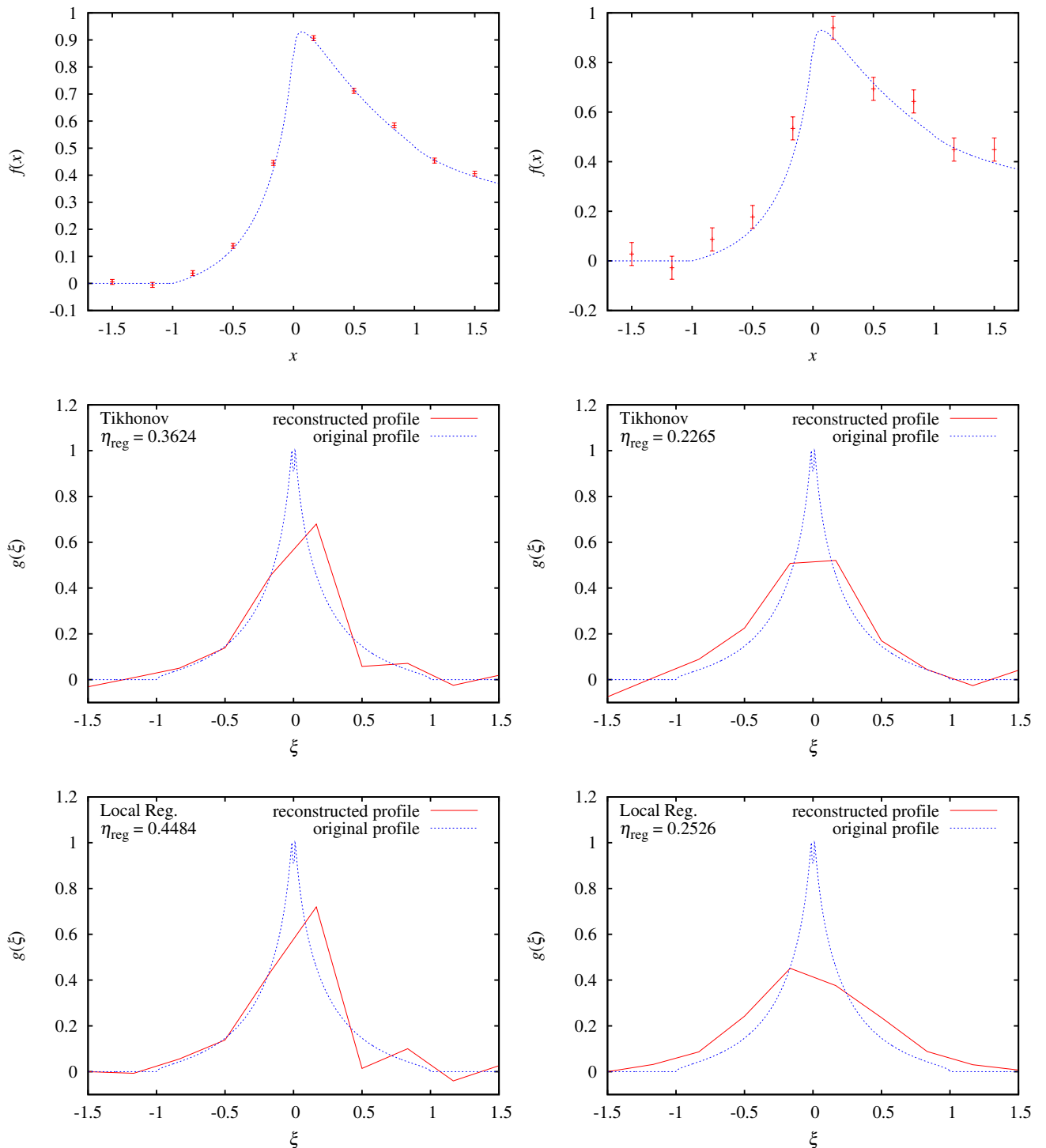


Abbildung 7.8: Lichtkurven mit 10 gleichmäßig verteilten Datenpunkten und mit der Tikhonov-Phillips-Regularisierung und der lokalen Regularisierung rekonstruierte Profile. Die Standardabweichung der Fehler beträgt 1% und 5%. Bei den Profilen ist der Regularisierungsfehler angegeben.

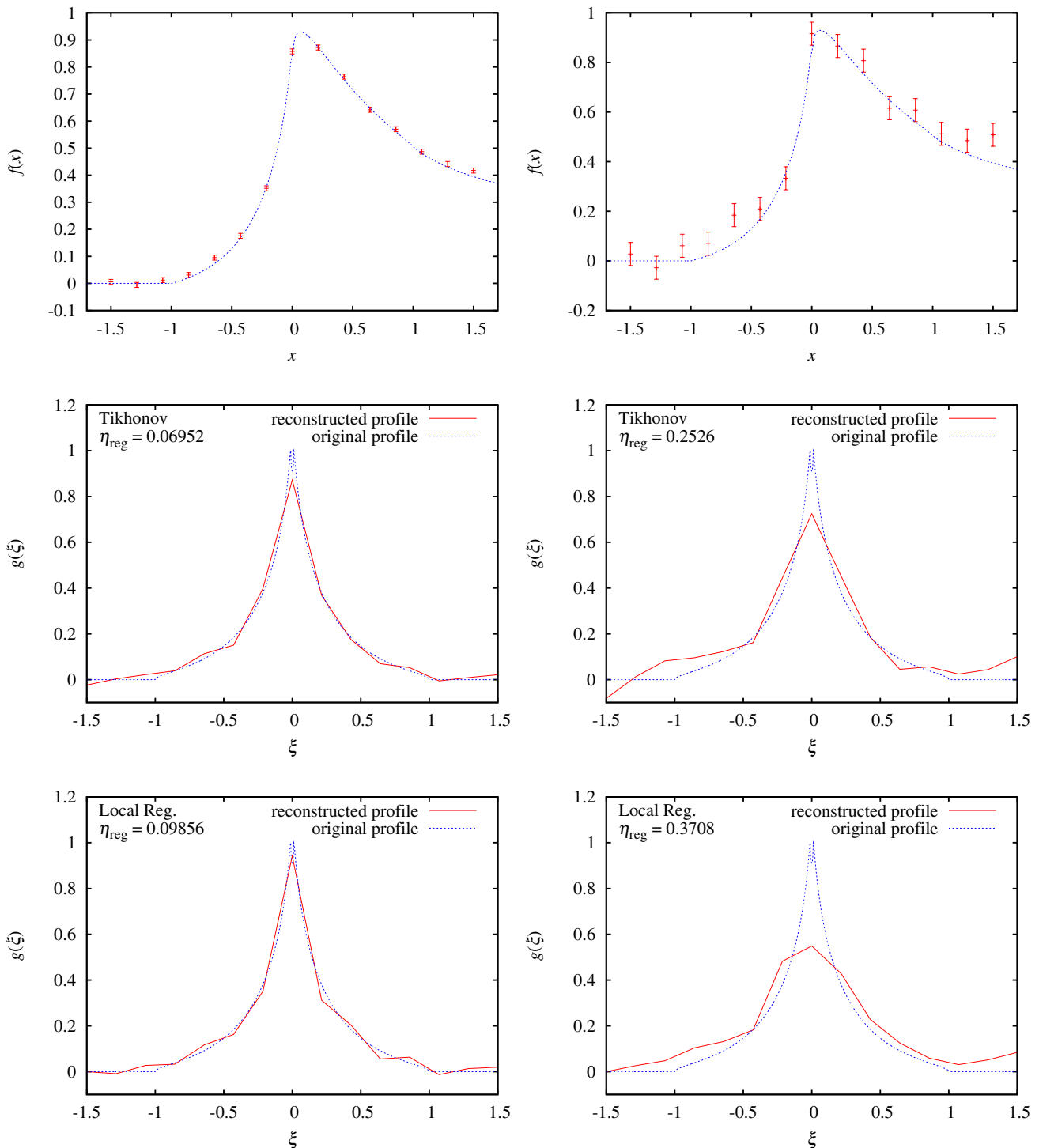


Abbildung 7.9: Lichtkurven mit 15 gleichmäßig verteilten Datenpunkten und mit der Tikhonov-Phillips-Regularisierung und der lokalen Regularisierung rekonstruierte Profile. Die Standardabweichung der Fehler beträgt 1% und 5%. Bei den Profilen ist der Regularisierungsfehler angegeben.

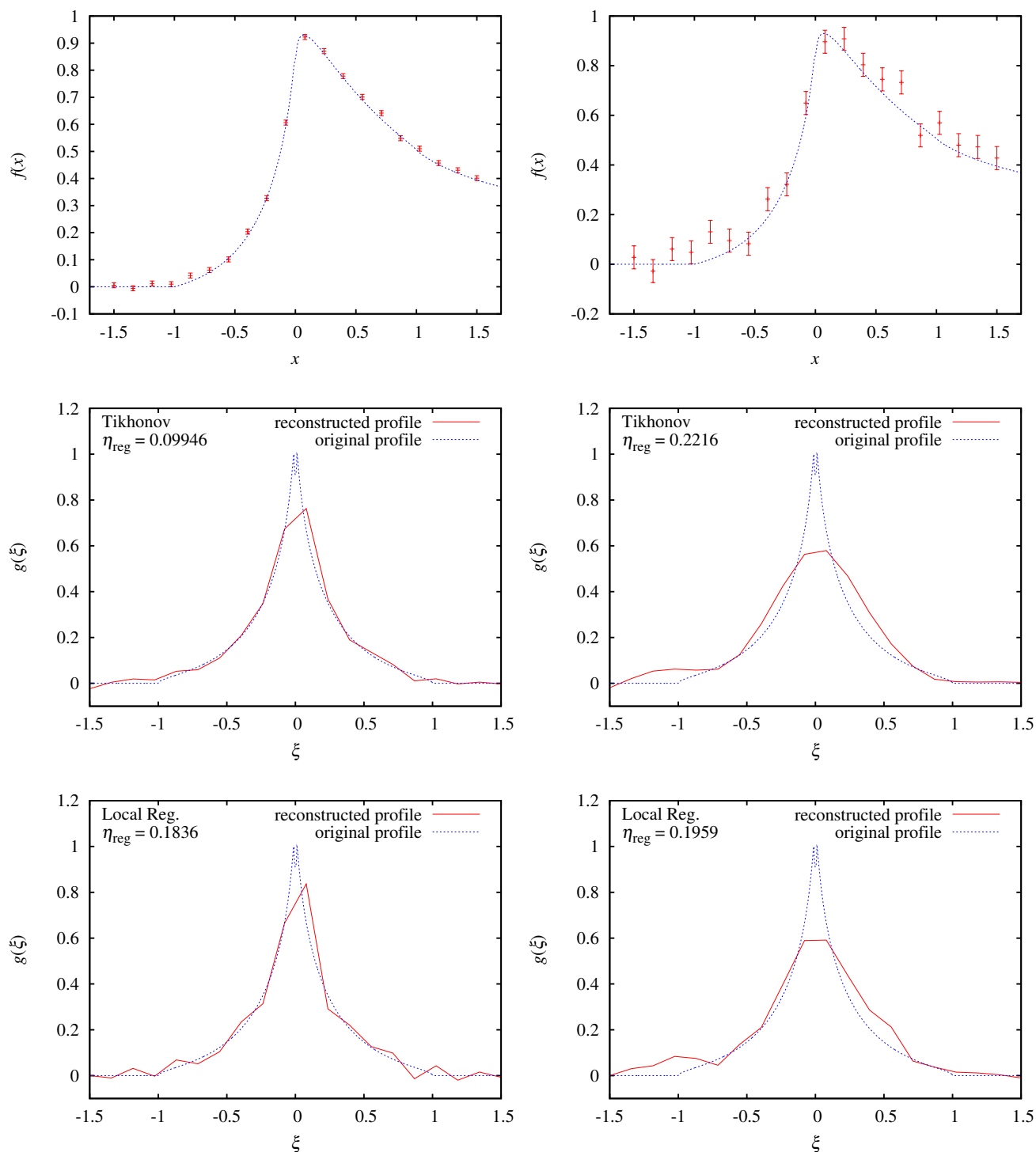


Abbildung 7.10: Lichtkurven mit 20 gleichmäßig verteilten Datenpunkten und mit der Tikhonov-Phillips-Regularisierung und der lokalen Regularisierung rekonstruierte Profile. Die Standardabweichung der Fehler beträgt 1% und 5%. Bei den Profilen ist der Regularisierungsfehler angegeben.

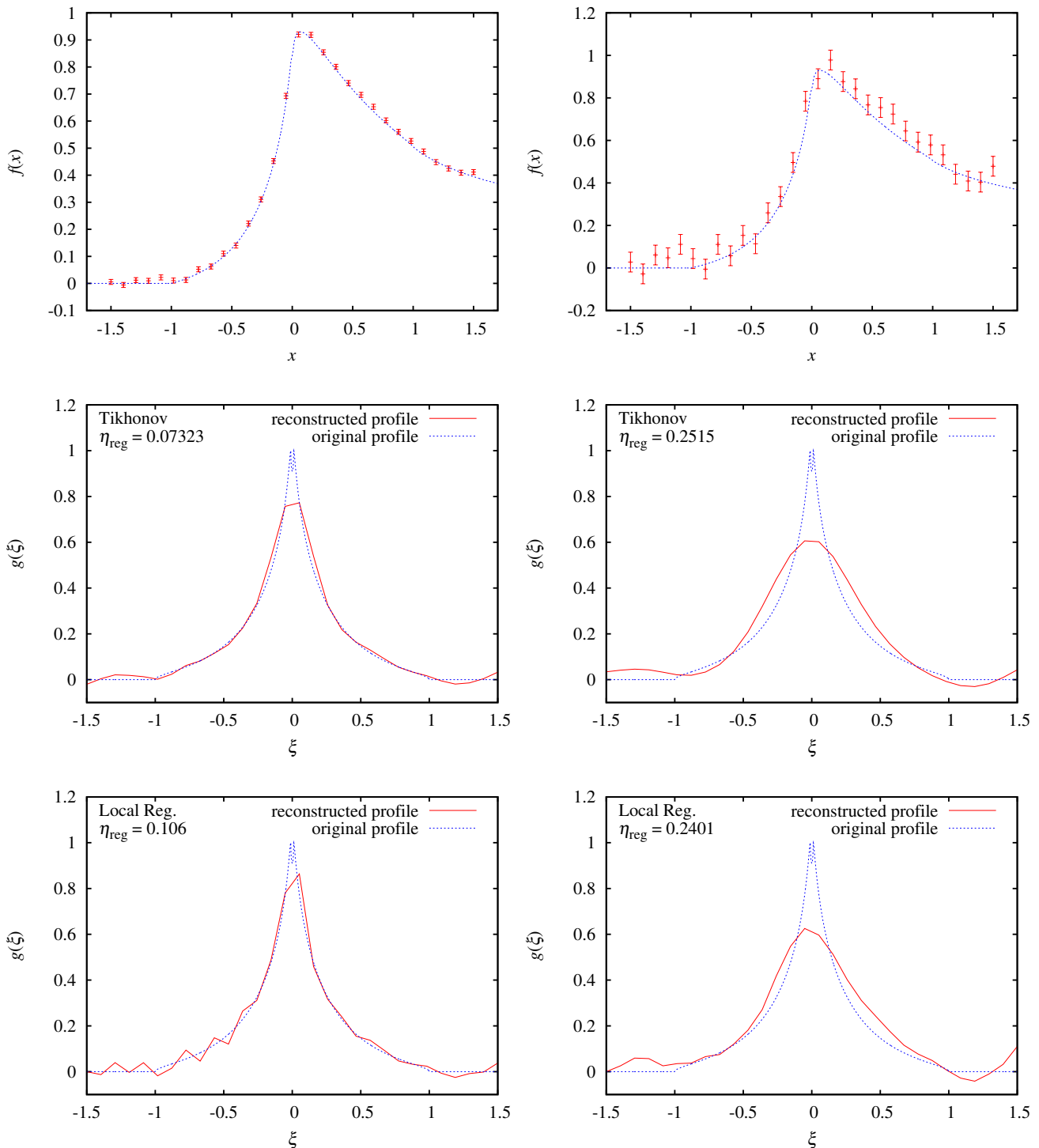


Abbildung 7.11: Lichtkurven mit 30 gleichmäßig verteilten Datenpunkten und mit der Tikhonov-Phillips-Regularisierung und der lokalen Regularisierung rekonstruierte Profile. Die Standardabweichung der Fehler beträgt 1% und 5%. Bei den Profilen ist der Regularisierungsfehler angegeben.

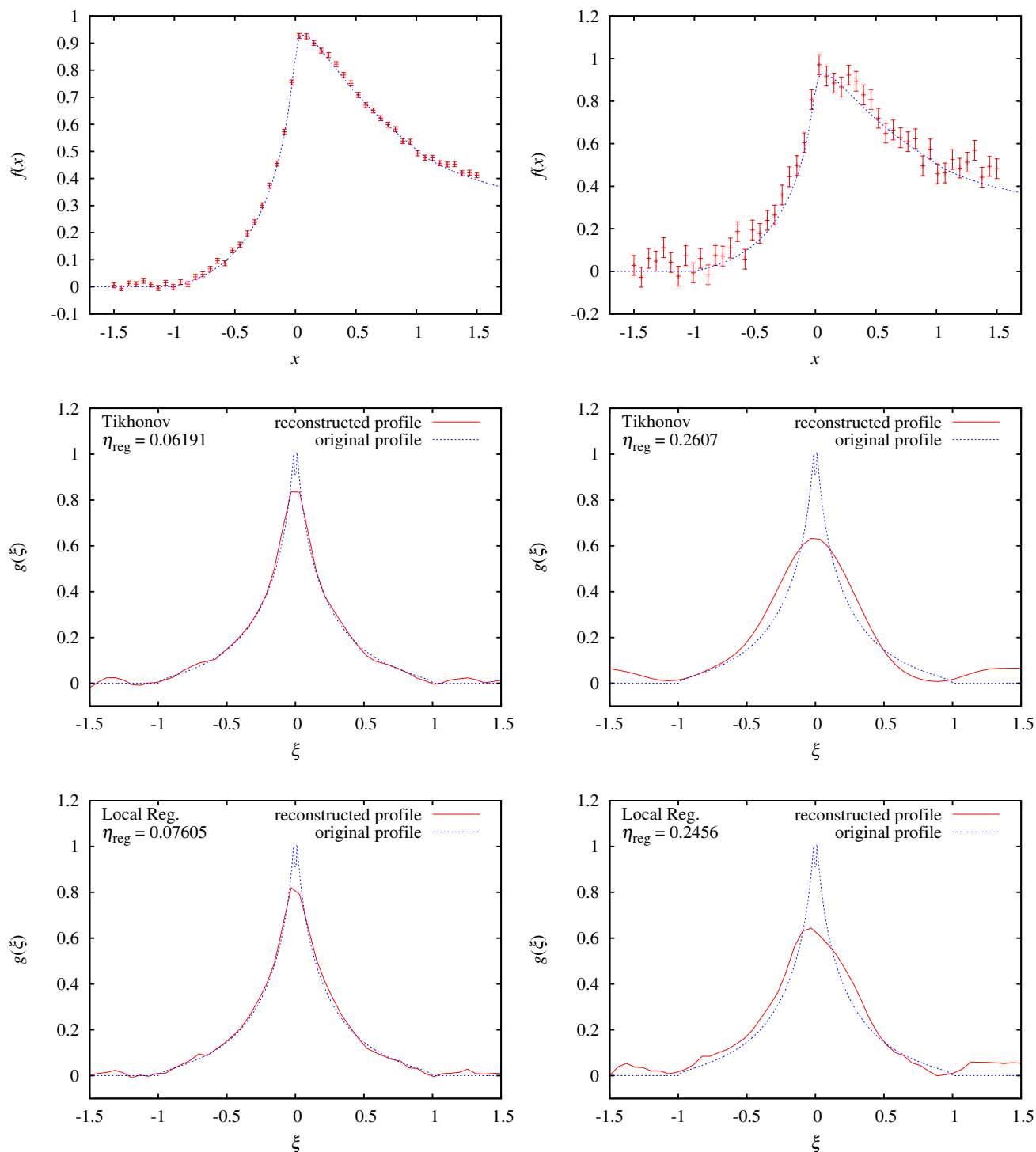


Abbildung 7.12: Lichtkurven mit 50 gleichmäßig verteilten Datenpunkten und mit der Tikhonov-Phillips-Regularisierung und der lokalen Regularisierung rekonstruierte Profile. Die Standardabweichung der Fehler beträgt 1% und 5%. Bei den Profilen ist der Regularisierungsfehler angegeben.

7.7 Lichtkurven mit unregelmäßig verteilten Messwerten

Die Lichtkurven, mit denen wir uns in den vorherigen Abschnitten beschäftigt haben, waren durch ihr regelmäßiges Sampling gekennzeichnet. Für die Lichtkurven von Mikrolensing-Ereignissen können wir das allerdings nicht voraussetzen, wie die OGLE-Daten des Systems Q2237+0305 zeigen. Wir müssen davon ausgehen, dass die Daten nicht regelmäßig verteilt sind. Leider wird das Problem der Anwendung von Regularisierungsverfahren auf solche Daten in der Literatur kaum behandelt. Man geht meistens davon aus, dass sie regelmäßig verteilt sind. Für viele Messverfahren läßt sich das auch problemlos realisieren, doch bei astronomischen Lichtkurven ist das meistens nicht der Fall. Wir werden daher anhand von einigen Simulationen untersuchen, wie sich die Regularisierungsverfahren bei Daten mit unregelmäßigem Sampling verhalten.

Sehen wir uns die OGLE-Lichtkurven von Q2237+0305 genauer an (Abbildung 4.7 auf S. 30), so erkennen wir, dass im Prinzip zwei Klassen von Unregelmäßigkeiten auftreten, wobei es allerdings schwierig ist, eine eindeutige Grenze zu ziehen:

- kleinere Abweichungen von einem regelmäßigen Sampling.
- größere Lücken in den Lichtkurven, die beispielsweise durch Perioden längerer Nichtbeobachtbarkeit entstehen.

Im Gegensatz zu einer regelmäßig gemessenen Lichtkurve, die durch Angabe von Anzahl der Messwerte und Länge der Lichtkurve eindeutig charakterisiert ist, ist der Parameterraum für die möglichen Abweichungen von einem regelmäßigen Sampling praktisch unendlich groß und kann daher nicht erschöpfend behandelt werden. Wir beschränken uns daher auf zwei einfache Fälle:

- Lichtkurven, bei denen die Messwerte zufällig auf das gesamte Messintervall verteilt werden und
- Regelmäßig gesampelte Lichtkurven mit einer einzigen Lücke

7.7.1 Kleinere Abweichungen vom regelmäßigen Sampling

Anhand einiger Beispiele soll die Auswirkung von Lichtkurven, die nur eine geringe Abweichung von einem regelmäßigen Sampling aufweisen, auf die rekonstruierten Profile demonstriert werden. Eine genaue Definition anzugeben, was diese kleinen Abweichungen sind, fällt schwer. Gemeint ist in diesem Zusammenhang, dass deutliche Lücken, wie sie beispielsweise in den OGLE-Daten von Q2237+0305 zu erkennen sind, nicht auftreten sollen.

Zur Erzeugung des nicht-gleichmäßigen Sampling werden die Datenpunkte der Lichtkurve im Beobachtungsintervall zufällig ausgewählt. Um zu nah beieinanderliegende Daten zu vermeiden, wird die Verteilung so durchgeführt, dass zwischen den einzelnen Datenpunkten ein bestimmter Mindestabstand d_{\min} bestehen soll. In den hier gezeigten Beispielen wurde d_{\min} zu $\frac{1}{3}d_{\text{avg}}$ gewählt, wobei mit d_{avg} der mittlere Abstand zwischen den Datenpunkten beschreibt, der durch

$$d_{\text{avg}} = \frac{x_n - x_1}{n}$$

gegeben ist. Hierbei ist n die Anzahl der Daten in der Lichtkurve, x_1 und x_n sind die Position des ersten bzw. letzten Datenpunkts der Lichtkurve. Als Helligkeitsprofil wurde wieder das Modell der Standardakkretionsscheibe verwendet. Die Rekonstruktion der Profile erfolgte mit der Tikhonov-Phillips-Regularisierung und mit der lokalen Regularisierung. Dargestellt sind in den Abbildungen 7.13 bis 7.15 Lichtkurven mit 20, 40 und 60 Datenpunkten und einer Standardabweichung des Messfehlers von 1% und 5%.

Die Resultate zeigen, dass Lichtkurven, deren Messwertverteilung nur wenig von einem regelmäßigem Sampling abweichen, es möglich ist, den globalen Profilverlauf zu rekonstruieren. Beide Regularisierungsverfahren verhalten sich dabei ähnlich.

7.7.2 Größere Lücken in der Lichtkurve

Der Einfluss von größeren Lücken in der Lichtkurve auf das Ergebnis der Profilrekonstruktion wird hier anhand einer Lichtkurve mit 60 Messwerten und einem Messfehler von 3% dargestellt.

Als Profil wurde das Standardmodell einer dünnen Akkretionsscheibe verwendet. Daraus wurden Lichtkurven mit einer regelmäßigen Verteilung der Datenpunkte erzeugt, in die dann durch Entfernung einzelner Messwerte größere Lücken eingefügt wurden. Zur Profilrekonstruktion wurden die Tikhonov-Phillips-Regularisierung und die lokale Regularisierung angewendet.

Neben der Größe der Lücken kann es auch eine Rolle spielen, an welcher Stelle sie in der Lichtkurve auftreten. Um das zu untersuchen, wurden die Lücken an zwei verschiedenen Stellen der Lichtkurven erzeugt, zum einen in dem ansteigenden Teil kurz nach Eintritt des Kaustik-Crossings und zum anderen im Bereich des Maximums der Lichtkurve.

Die Lichtkurven und die daraus rekonstruierten Profile sind in den Abbildungen 7.16 und bis 7.25 dargestellt.

Zu erkennen ist, dass kleinere Lücken nur einen geringen Einfluss auf das rekonstruierte Profil haben. Mit zunehmender Größe der Lücken treten dann aber bei beiden angewendeten Regularisierungsverfahren deutlichen Abweichungen zum Originalprofil auf. Neben dem Profil innerhalb der Lücke kann auch das Profil hinter den Lücken nur schlecht rekonstruiert werden. Die Ursache hierfür liegt in der kausalen Struktur des Kaustik-Crossings. Die Lichtkurve zu einem bestimmten Zeitpunkt enthält nur die Information über den Profilverlauf, den die Kaustik bis dahin überquert hat. Umgekehrt wird für die Rekonstruktion eines Profilverlaufes bei einer bestimmten Position die bis dahin entstandene Lichtkurve benötigt. Fehlen durch eine Lücke Teile der Lichtkurve, so kann das Profil an diesen Stellen nicht mehr zuverlässig rekonstruiert werden. Eine gute Rekonstruktion ist nur dann möglich, wenn wir den genauen Verlauf der Lichtkurve zwischen den Lücken kennen. Die für die Regularisierungsverfahren angewendete Diskretisierung geht von einem linearen Verlauf zwischen den Datenpunkten aus. Daher kommt es insbesondere dann zu einer schlechten Rekonstruktion des Profils, wenn die tatsächliche Lichtkurve zwischen den Lücken von diesem linearen Verlauf abweicht. Das trifft vor allem für die größeren Lücken zu.

Dieses Ergebnis zeigt, dass hier eine prinzipielle Grenze der Regularisierungsverfahren erreicht ist. Ohne Annahmen über den Verlauf der Lichtkurve in der Lücke ist die Rekonstruktion des Profils hinter der Lücke nicht mehr möglich.

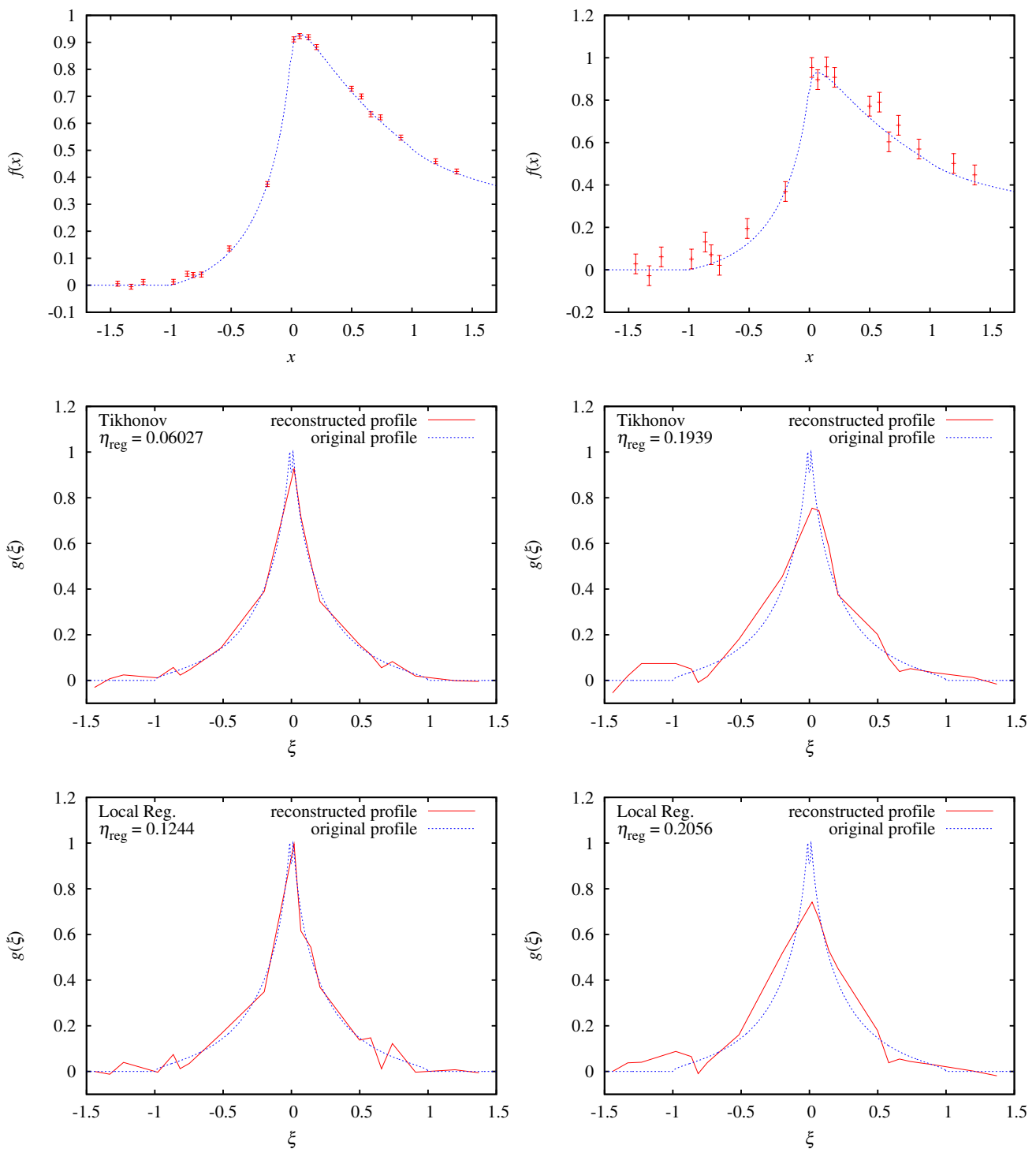


Abbildung 7.13: Lichtkurven mit 20 nicht gleichmäßig verteilten Datenpunkte und die rekonstruierten Profile. Die Standardabweichung des Fehlers in den Daten beträgt 1% und 5%.

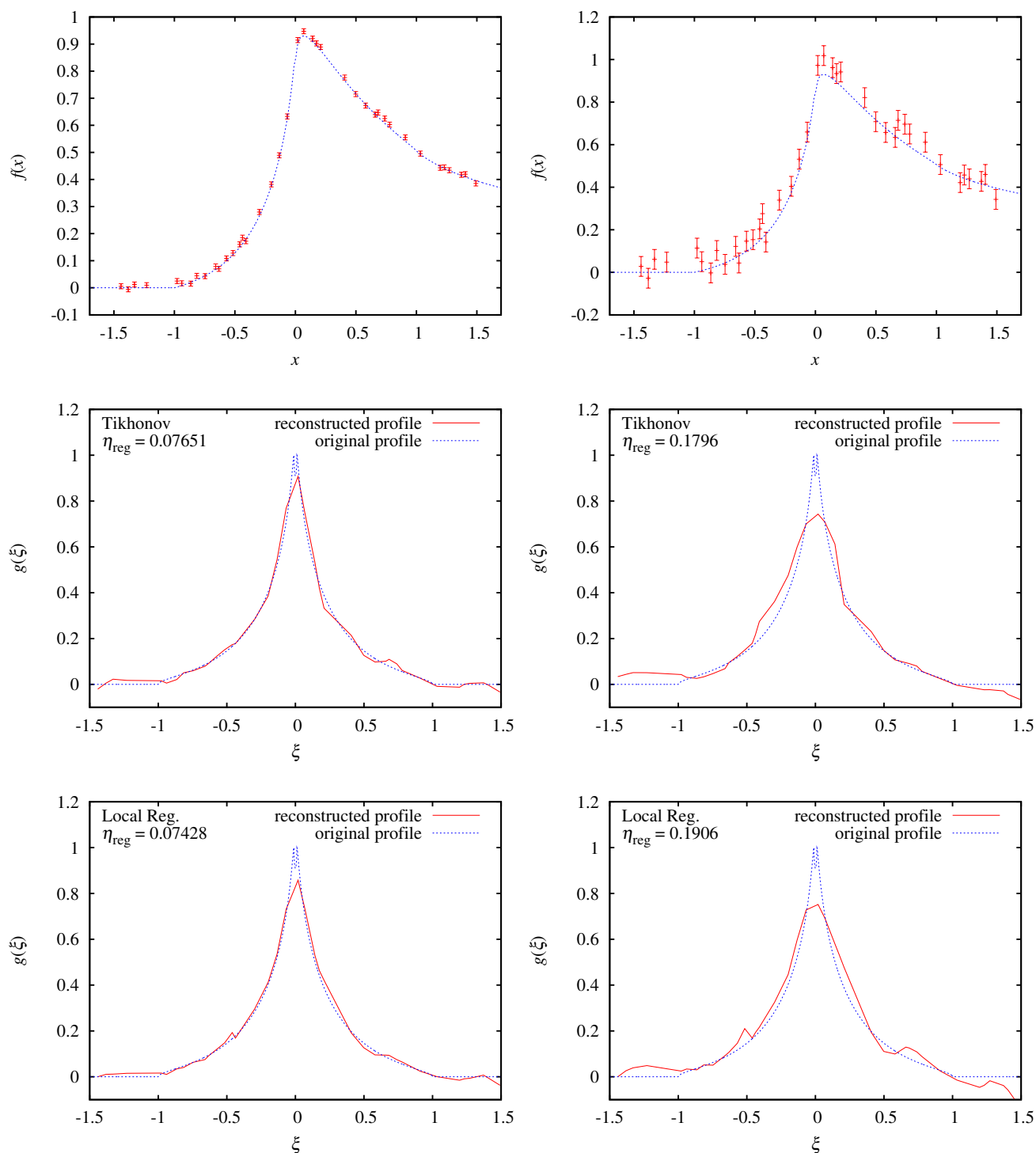


Abbildung 7.14: Lichtkurven mit 40 nicht gleichmäßig verteilten Datenpunkte und die rekonstruierten Profile. Die Standardabweichung des Fehlers in den Daten beträgt 1% und 5%.

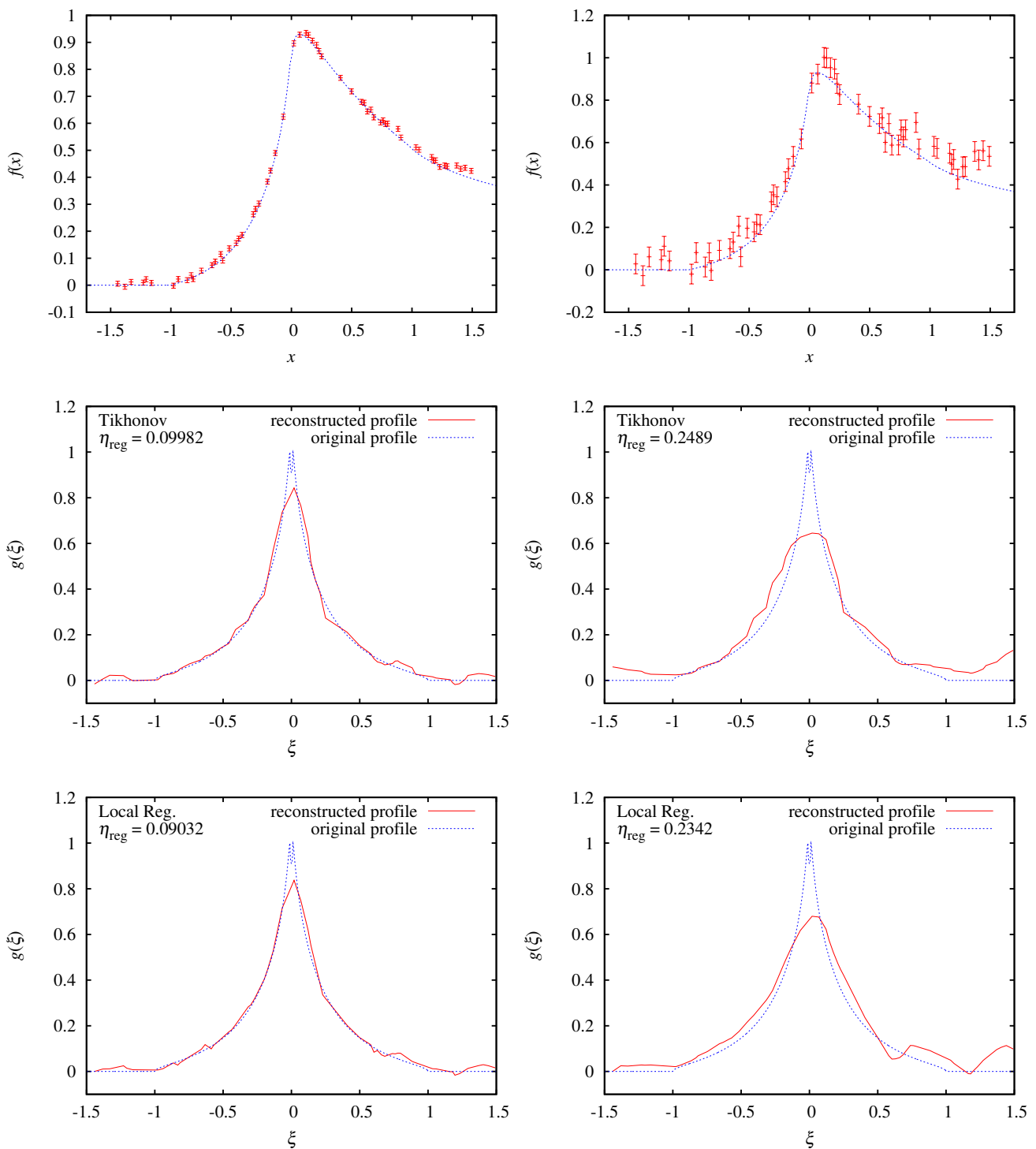


Abbildung 7.15: Lichtkurven mit 60 nicht gleichmäßig verteilten Datenpunkten und die rekonstruierten Profile. Die Standardabweichung des Fehlers in den Daten beträgt 1% und 5%.

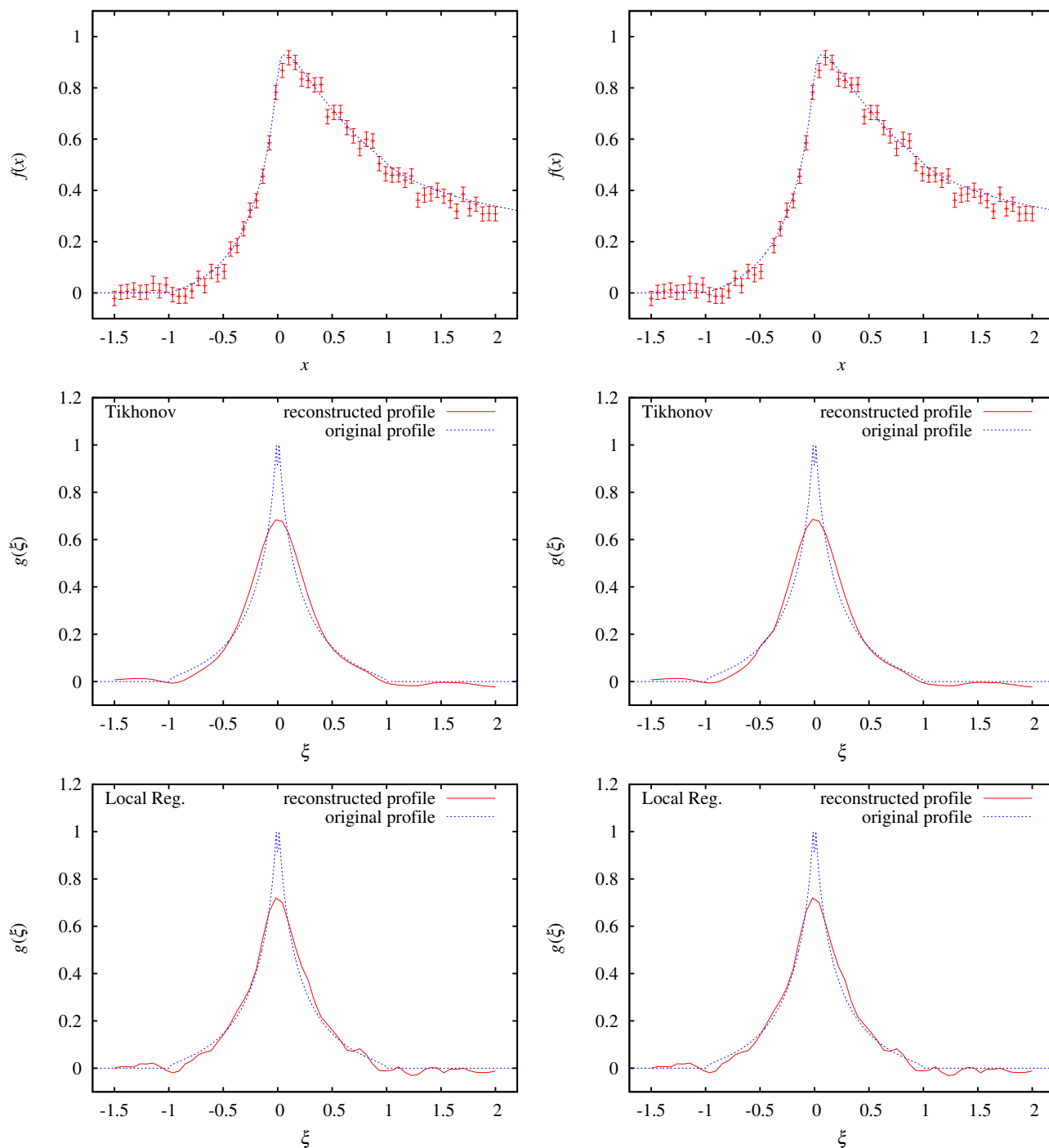


Abbildung 7.16: Lichtkurven und mit der Tikhonov-Phillips-Regularisierung und der lokalen Regularisierung rekonstruierte Profile für unterschiedlich große Lücken. Links: keine Lücke. Rechts: Lücke von $-0,49$ bis $-0,37$.

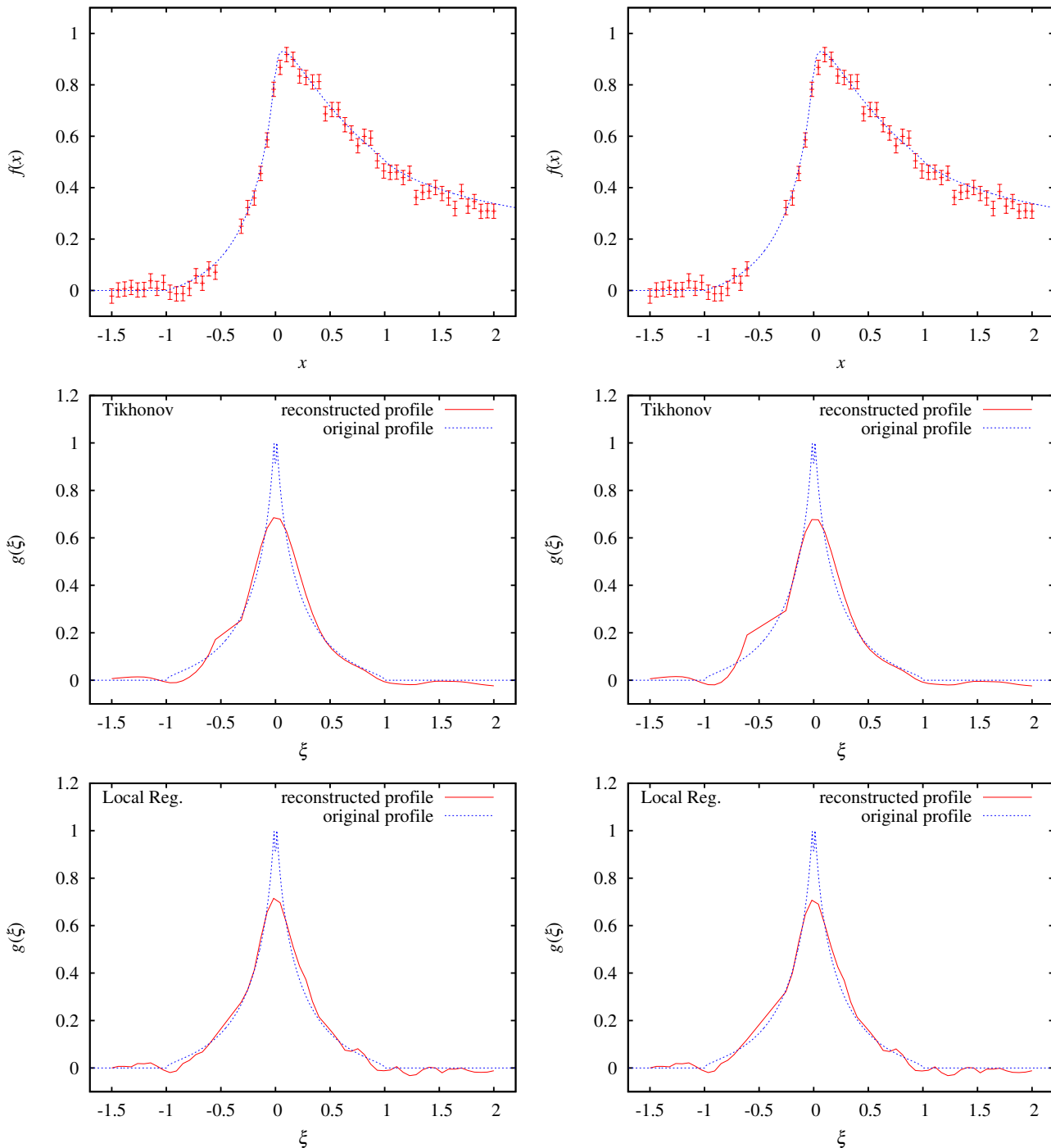


Abbildung 7.17: Lichtkurven und mit der Tikhonov-Phillips-Regularisierung und der lokalen Regularisierung rekonstruierte Profile für unterschiedlich große Lücken. Links: Lücke von $-0,55$ bis $-0,31$. Rechts: Lücke von $-0,61$ bis $-0,25$.

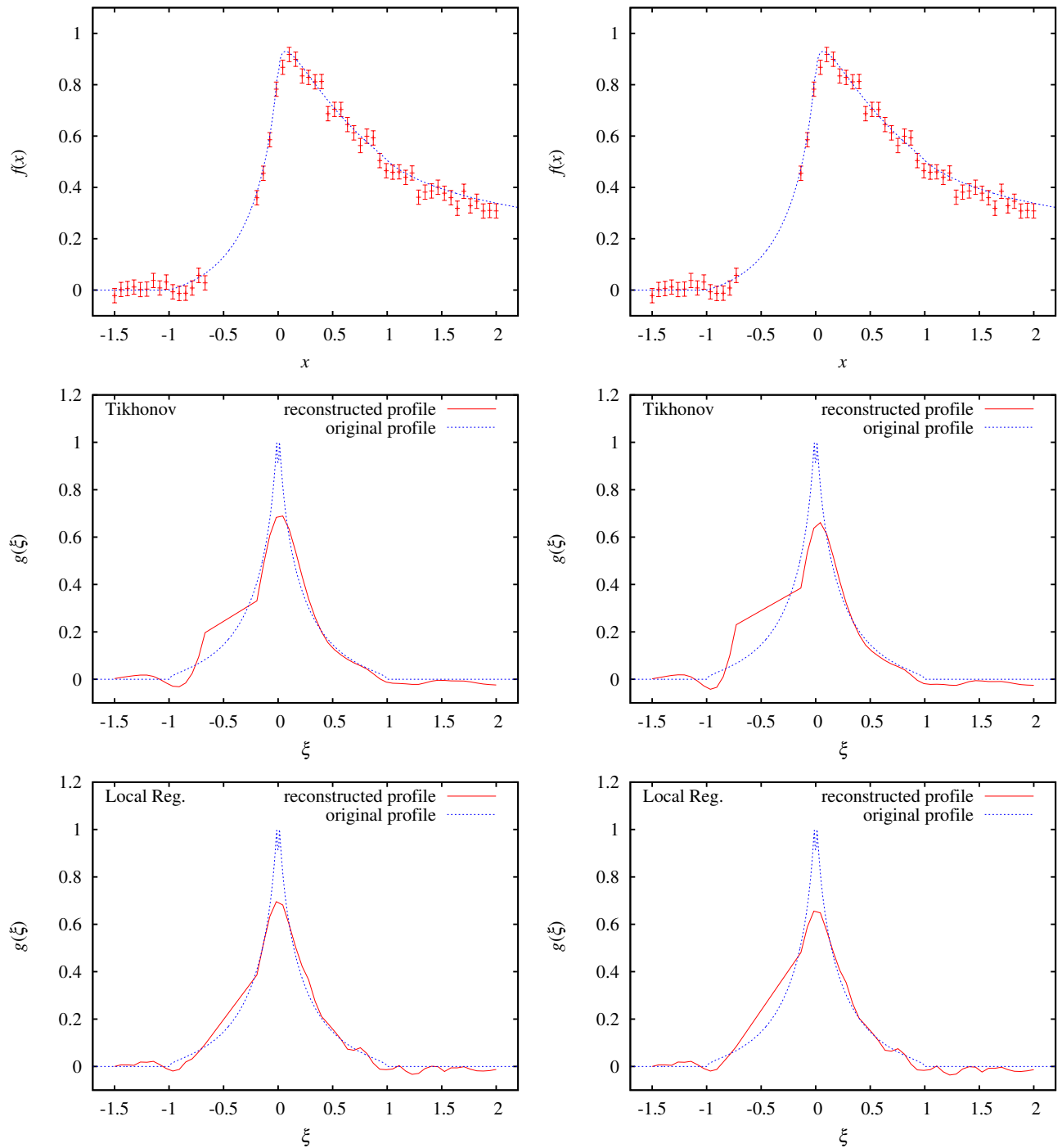


Abbildung 7.18: Lichtkurven und mit der Tikhonov-Phillips-Regularisierung und der lokalen Regularisierung rekonstruierte Profile für unterschiedlich große Lücken. Links: Lücke von $-0,67$ bis $-0,19$. Rechts: Lücke von $-0,73$ bis $-0,13$.

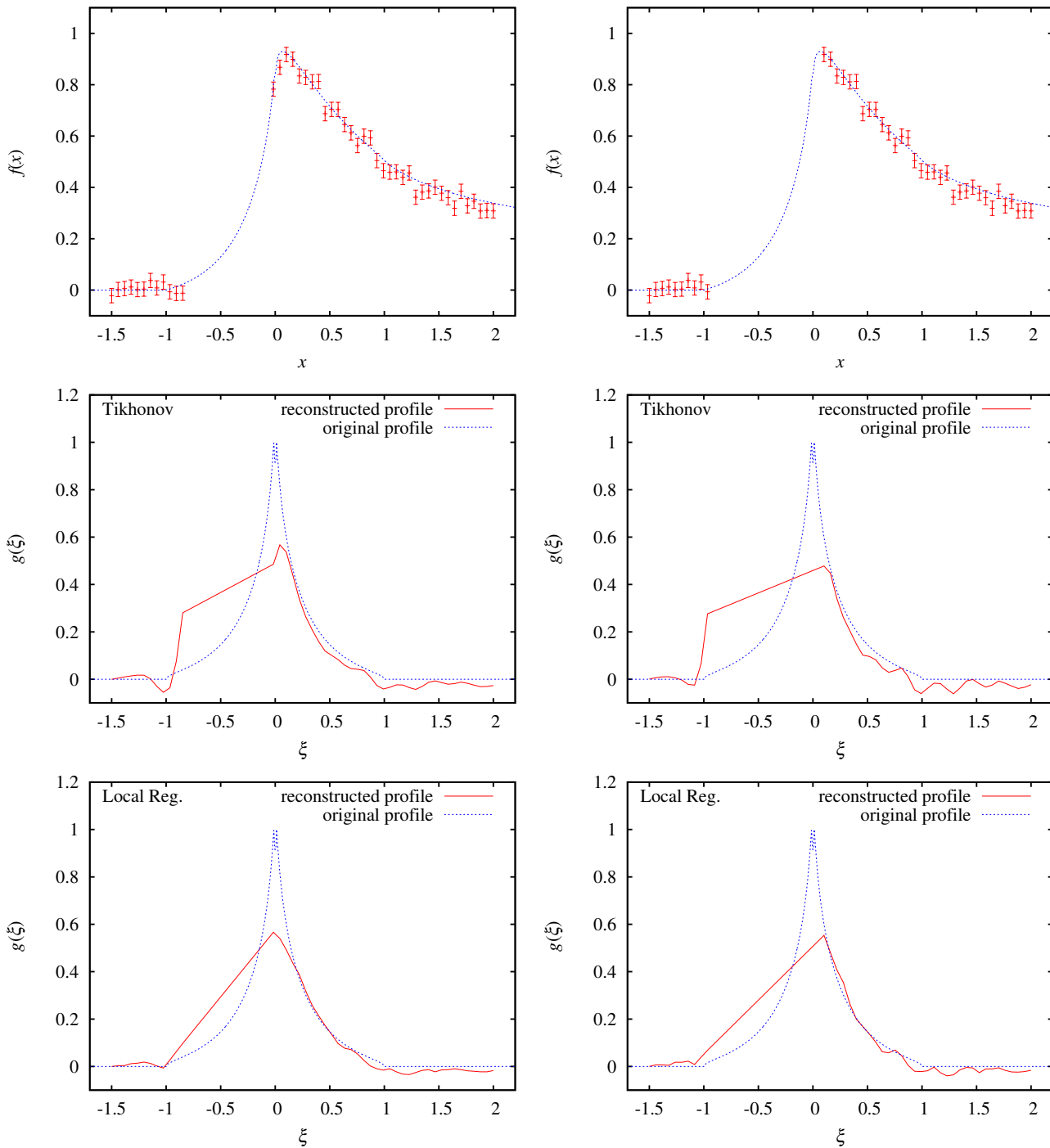


Abbildung 7.19: Lichtkurven und mit der Tikhonov-Phillips-Regularisierung und der lokalen Regularisierung rekonstruierte Profile für unterschiedlich große Lücken. Links: Lücke von $-0,85$ bis $-0,01$. Rechts: Lücke von $-0,97$ bis $0,10$.

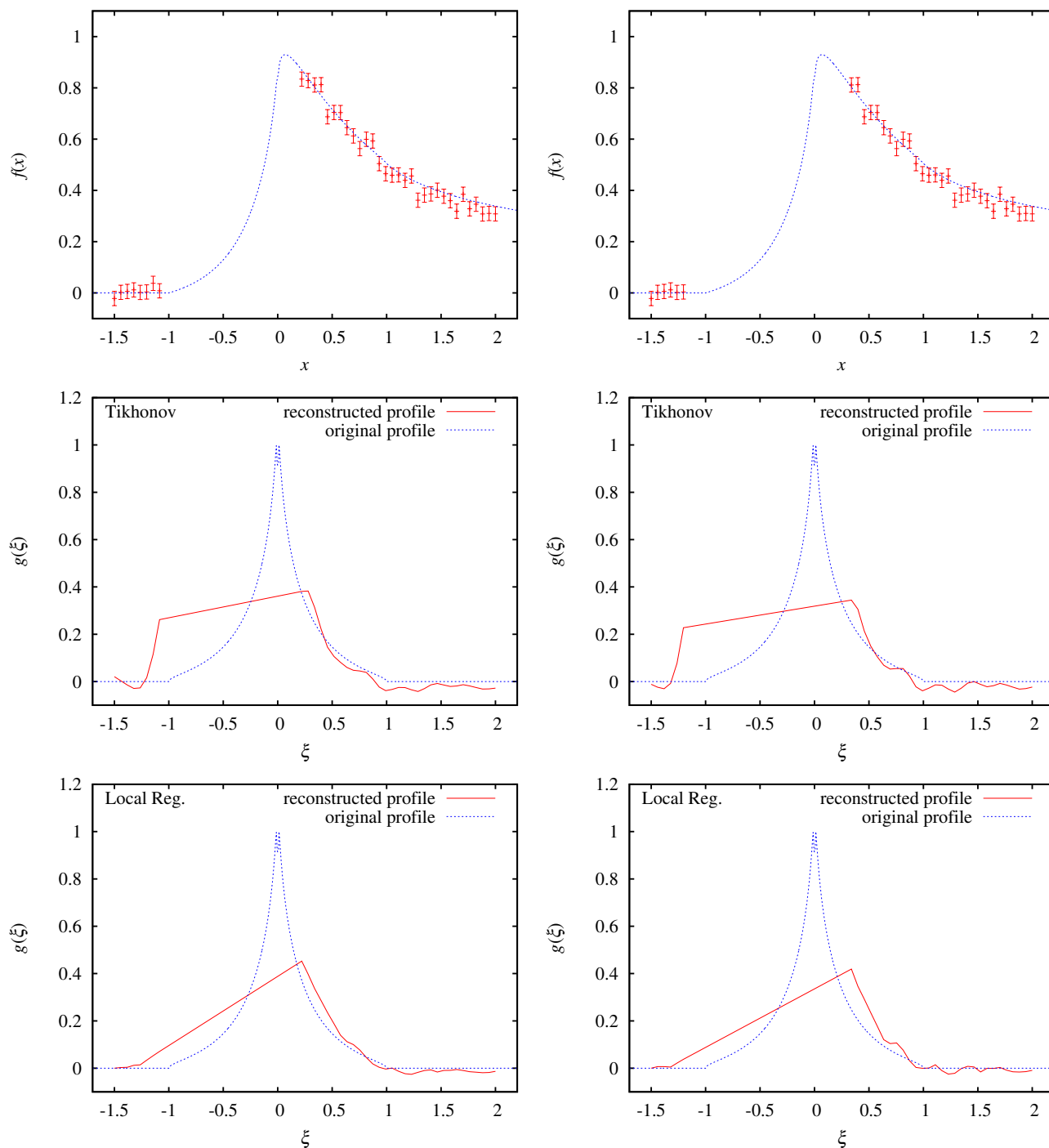


Abbildung 7.20: Lichtkurven und mit der Tikhonov-Phillips-Regularisierung und der lokalen Regularisierung rekonstruierte Profile für unterschiedlich große Lücken. Links: Lücke von $-1,08$ bis $0,22$. Rechts: Lücke von $-1,20$ bis $0,34$.

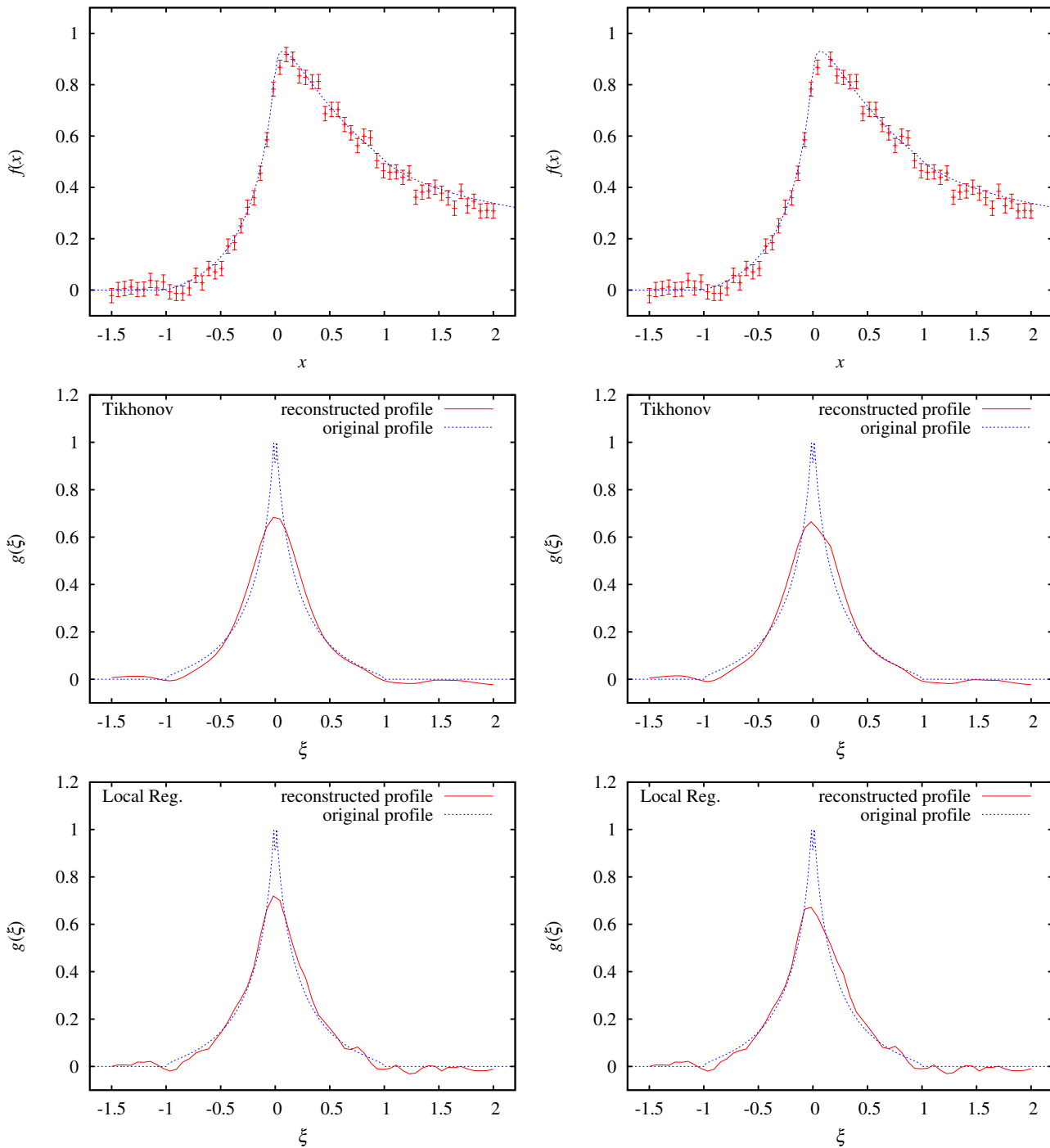


Abbildung 7.21: Lichtkurven und mit der Tikhonov-Phillips-Regularisierung und der lokalen Regularisierung rekonstruierte Profile für unterschiedlich große Lücken. Links: keine Lücke. Rechts: Lücke von 0,04 bis 0,16.

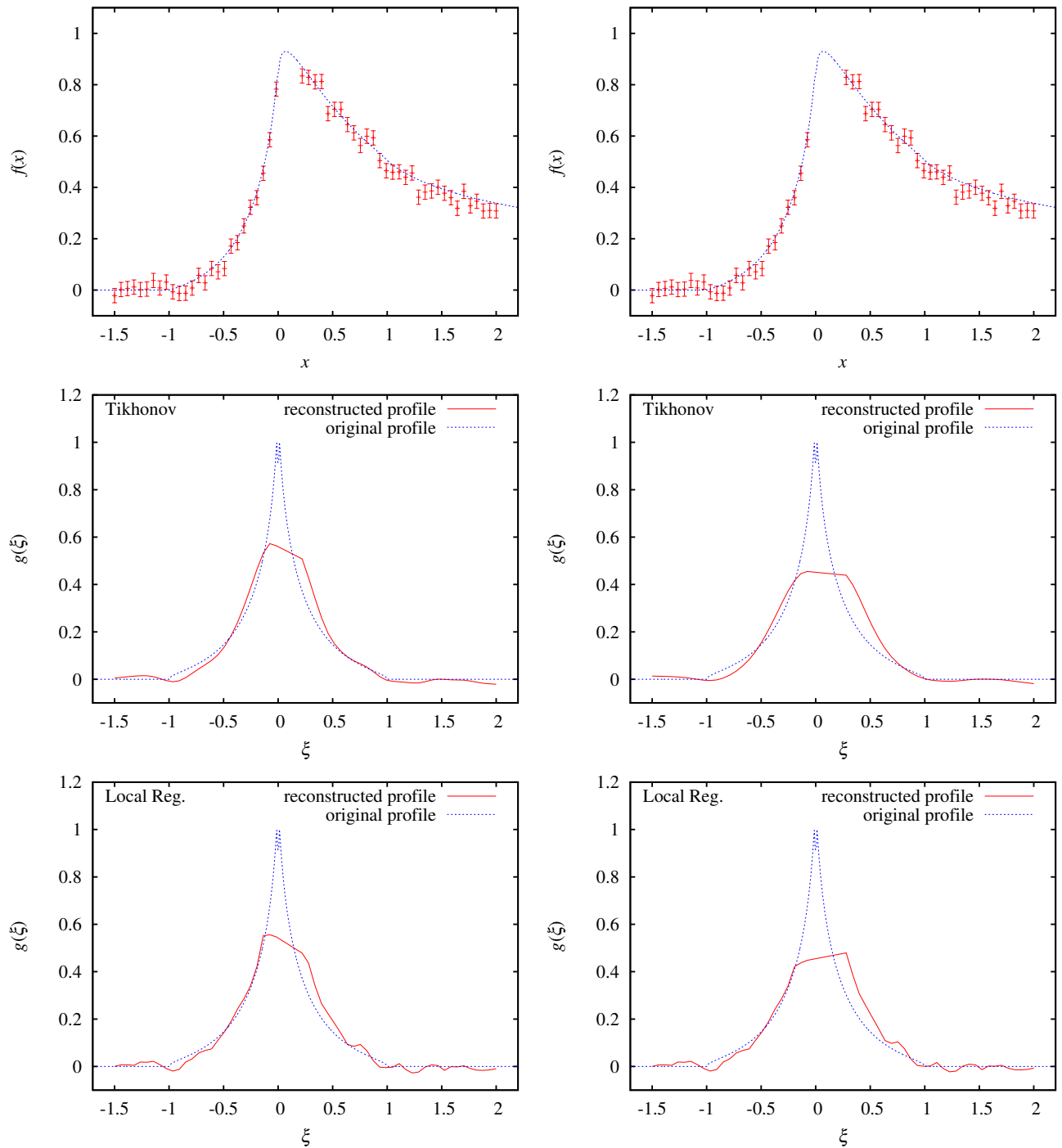


Abbildung 7.22: Lichtkurven und mit der Tikhonov-Phillips-Regularisierung und der lokalen Regularisierung rekonstruierte Profile für unterschiedlich große Lücken. Links: Lücke von $-0,02$ bis $0,22$. Rechts: Lücke von $-0,07$ bis $0,27$.

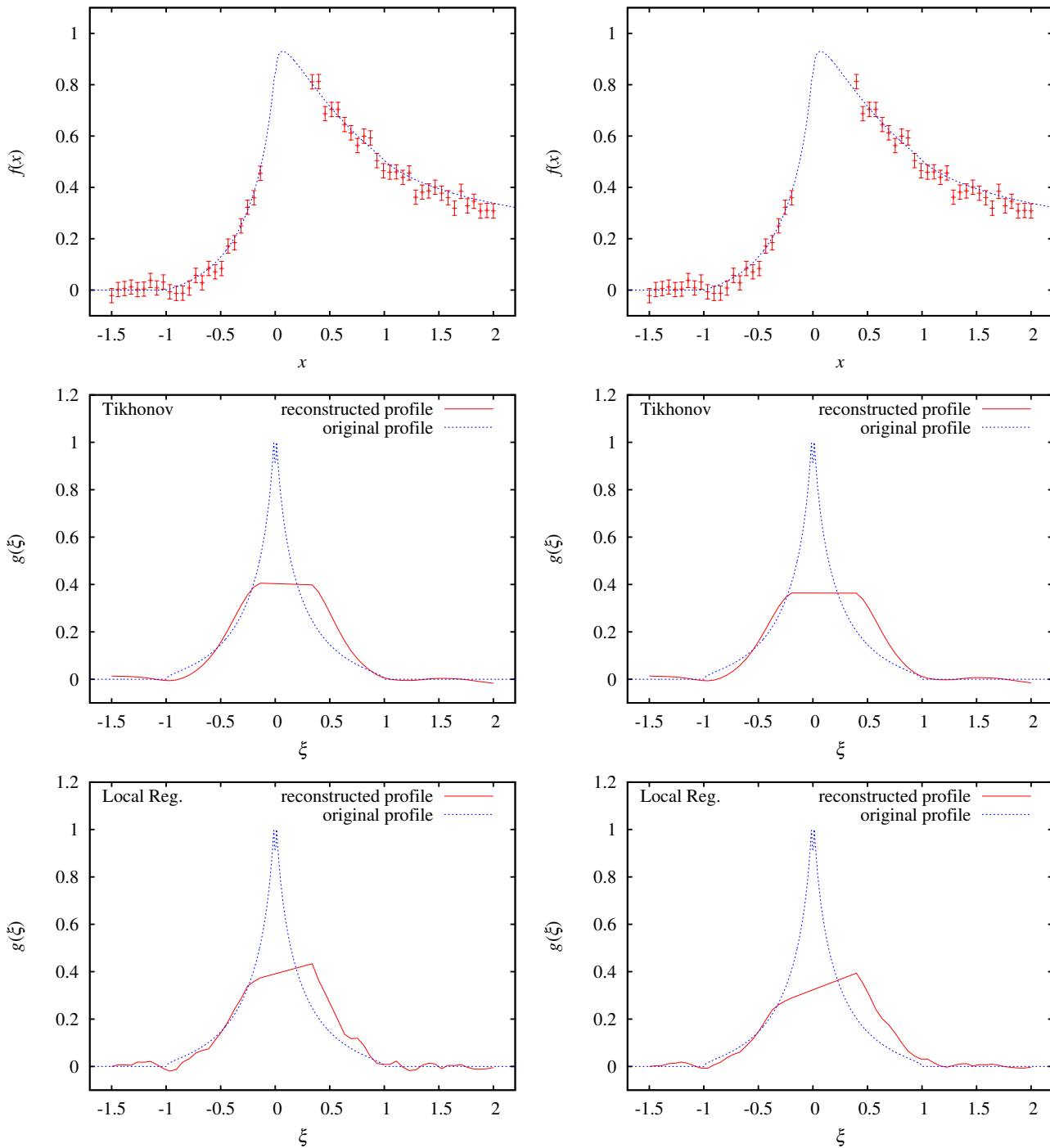


Abbildung 7.23: Lichtkurven und mit der Tikhonov-Phillips-Regularisierung und der lokalen Regularisierung rekonstruierte Profile für unterschiedlich große Lücken. Links: Lücke von $-0,13$ bis $0,34$. Rechts: Lücke von $-0,19$ bis $0,39$.

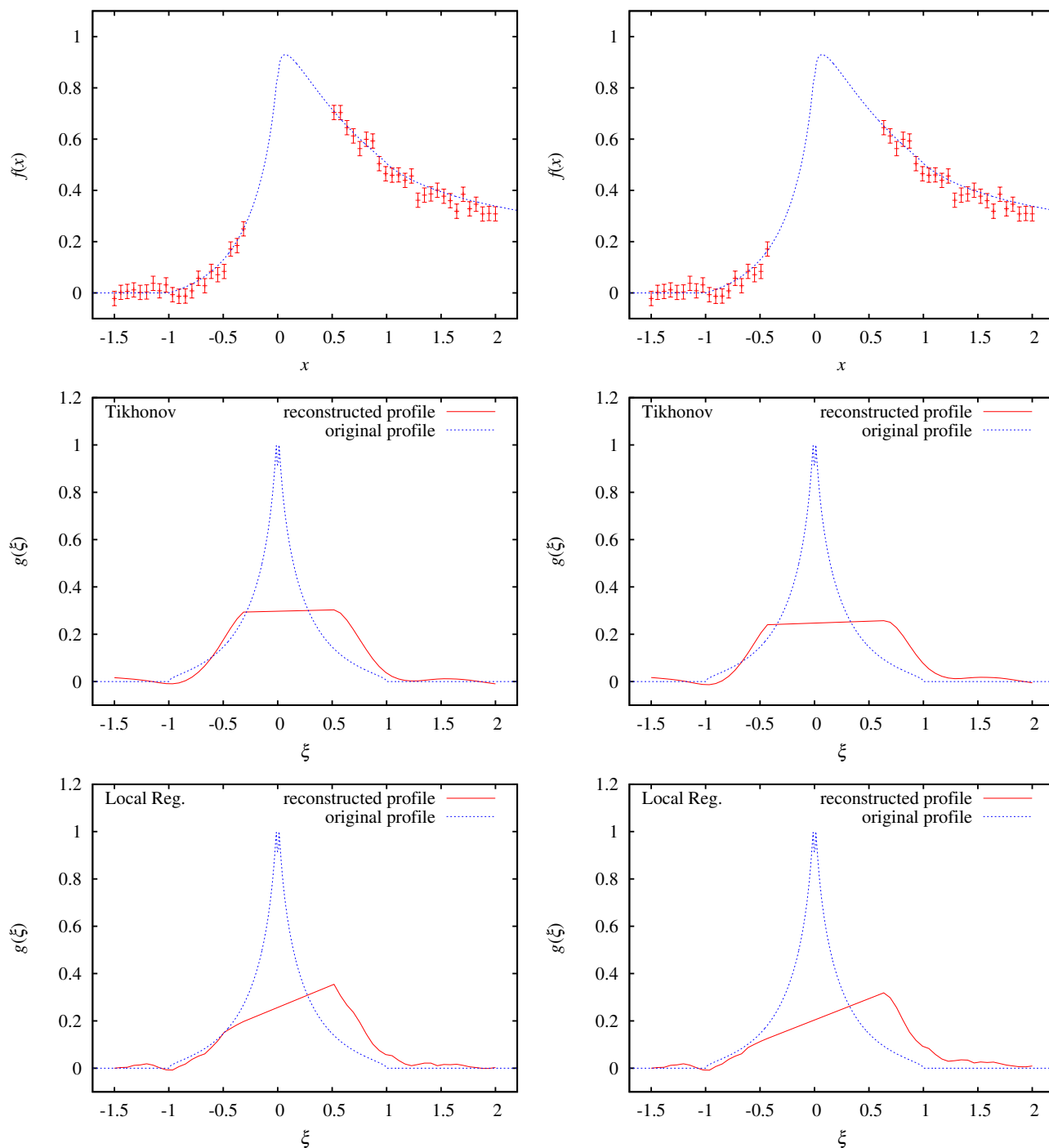


Abbildung 7.24: Lichtkurven und mit der Tikhonov-Phillips-Regularisierung und der lokalen Regularisierung rekonstruierte Profile für unterschiedlich große Lücken. Links: Lücke von $-0,31$ bis $0,51$. Rechts: Lücke von $-0,43$ bis $0,64$.

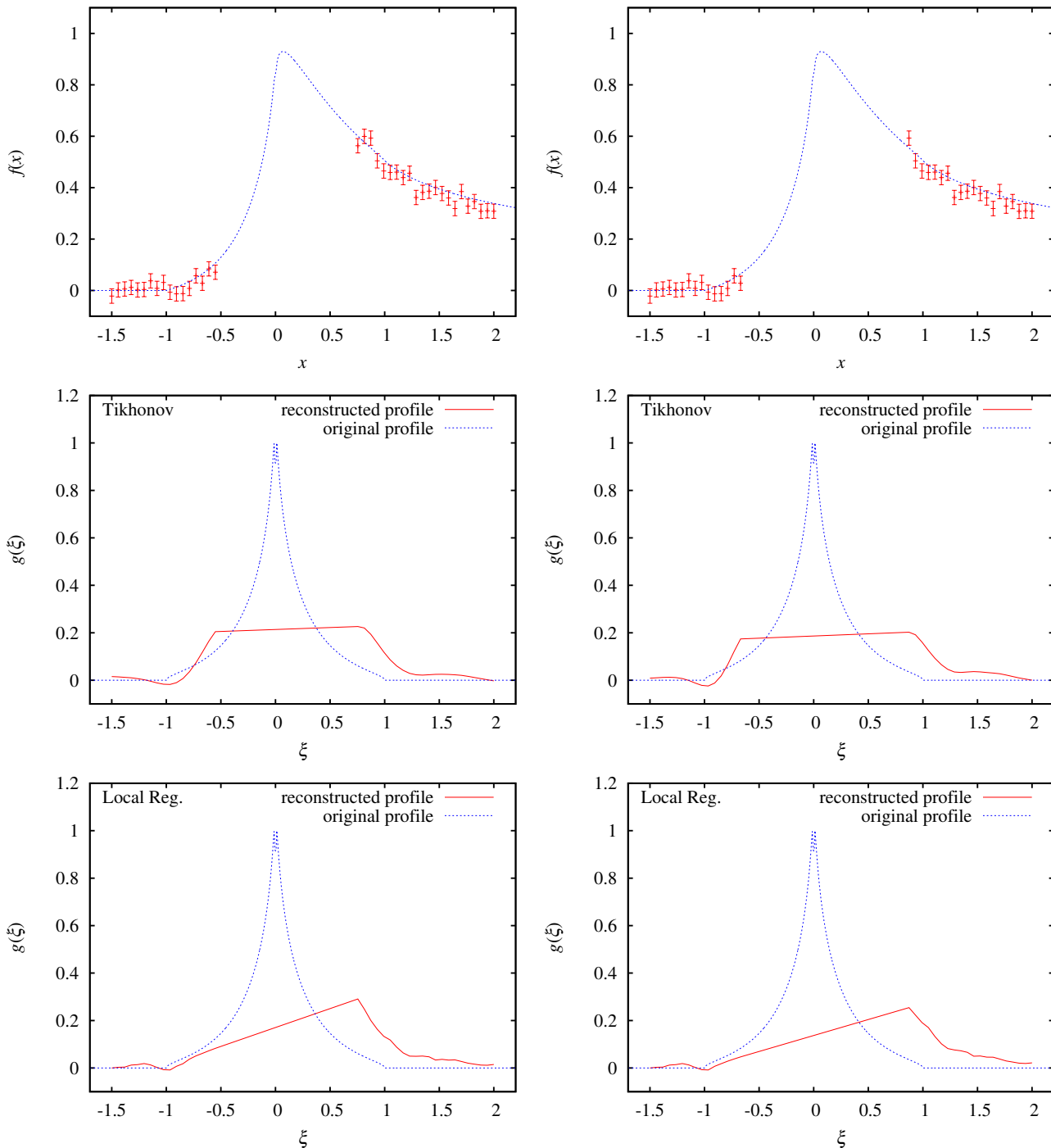


Abbildung 7.25: Lichtkurven und mit der Tikhonov-Phillips-Regularisierung und der lokalen Regularisierung rekonstruierte Profile für unterschiedlich große Lücken. Links: Lücke von $-0,55$ bis $0,75$. Rechts: Lücke von $-0,67$ bis $0,87$.

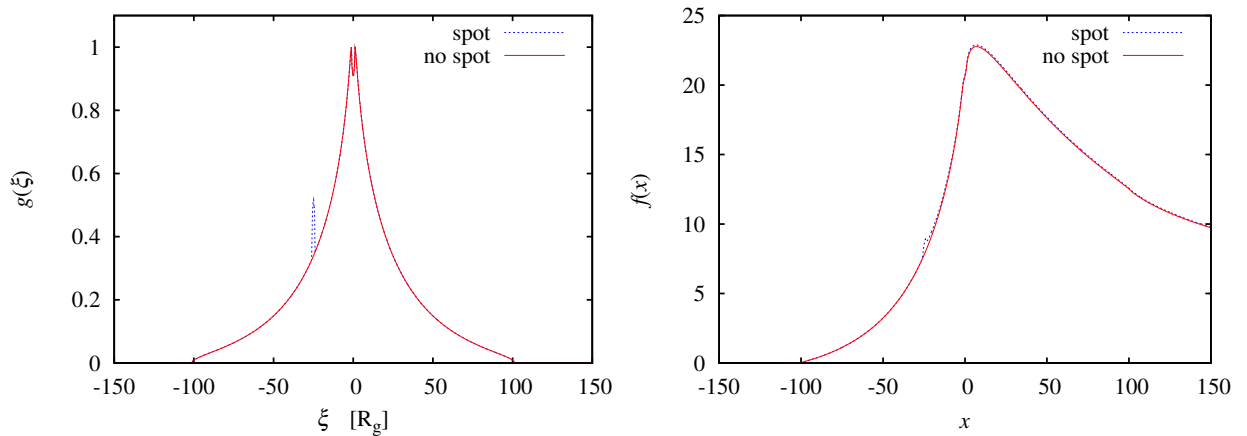


Abbildung 7.26: (Links) Eindimensionales Helligkeitsprofil $g(\xi)$ einer spotfreien Standardakkretionsscheibe und einer Akkretionsscheibe mit Spot. Die Position des Spots ist $\xi_{\text{spot}} = -25R_{\text{in}}$, sein Radius $R_{\text{spot}} = 1R_{\text{in}}$ und der Kontrast $C = 20$. (Rechts) Die aus den Profilen resultierenden Mikrolensing-Lichtkurven der beiden Akkretionsscheiben.

7.8 Rekonstruktion kleiner Strukturen im Quellprofil

Neben der Rekonstruktion des globalen Verlaufs der Quellprofile interessiert uns auch, ob es möglich ist, mit den vorgestellten Regularisierungsverfahren kleine Strukturen im Profil zu rekonstruieren. Es ist leicht einzusehen, dass wir dafür natürlich höhere Anforderungen an die beobachteten Lichtkurven stellen müssen. Während zur Bestimmung der Quellgröße etwa 20 Messungen bei einem Fehler von 10% ausreichen, müssen wir, um Strukturen zu erkennen, wesentlich genauer beobachten. Die erforderliche Sampling-Rate ist dabei vor allem von der Größe der Strukturen abhängig.

Bei den folgenden Untersuchungen gehen wir daher davon aus, dass uns Lichtkurven mit einer relativ hohen Sampling-Rate und einem geringen Messfehler zur Verfügung stehen. Wir werden nur Lichtkurven mit einem regelmäßigen Sampling betrachten. Dabei werden wir uns sowohl dem Quasarmikrolensing als auch dem stellaren Mikrolensing zuwenden.

Die Schwierigkeit beim Erkennen kleiner Strukturen liegt darin, dass sie im Vergleich zur gesamten Quelle nur sehr wenig zum Fluss beitragen. Wir werden aber sehen, dass es durch das Kaustik-Crossing zu einer Verstärkung der Signatur dieser Strukturen kommt.

7.8.1 Strukturen bei Akkretionsscheiben

Das im Abschnitt 3.2 vorgestellte Standardmodell einer dünnen Akkretionsscheibe zeichnet sich durch einen relativ glatten Verlauf der Helligkeitsverteilung aus. Wie wir gesehen haben, lässt sich das Profil einer solchen Scheibe gut rekonstruieren.

Daneben ist es aber auch möglich, dass die Akkretionsscheibe Strukturen aufweist. Wir werden in diesem Abschnitt die Fragestellung untersuchen, ob es möglich ist, solche kleinen Strukturen aus Mikrolensing-Beobachtungen zu erkennen. Als Modell verwenden wir ein Hot-Spot-Modell.

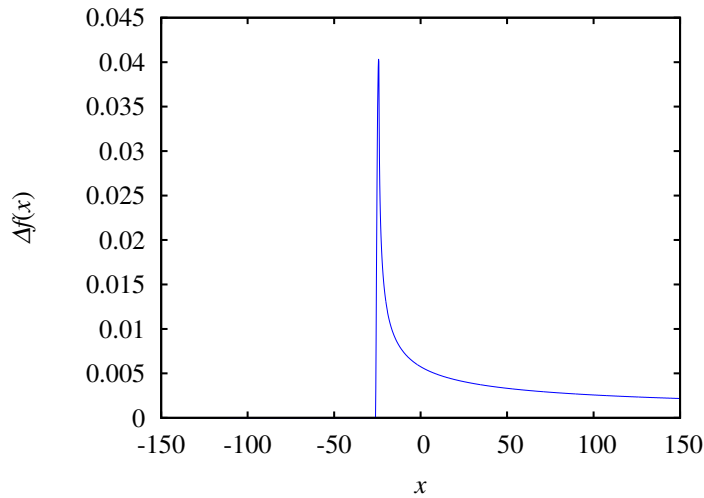


Abbildung 7.27: Relative Abweichung $\Delta f(x)$ zwischen den Lichtkurven der Akkretionsscheiben aus Abbildung 7.26, normiert auf die maximale Amplitude der Lichtkurve der spotfreien Akkretionsscheibe.

Ein solches Modell, bestehend aus einer homogenen Kreisscheibe mit den darauf verteilten Spots wurde von Takahashi et al. verwendet. Dabei untersuchten die Autoren, welche Lichtkurven sich bei einem Kaustik-Crossing-Ereignis für unterschiedliche Akkretionsscheibenmodellen ergeben [TYM01].

Wir verwenden hier eine dünne Akkretionsscheibe, auf der wir Spots an zufällig ausgewählten Positionen verteilen. Als Einschränkung nehmen wir an, dass die Position \mathbf{r}_{spot} der Spots zeitlich konstant bleibt, eine Rotation vernachlässigen wir also. Für reale Mikrolensing-Situationen trifft dies sicherlich nicht zu, die Rotationsperiode der Scheibe kann deutlich unter der Zeitdauer des Kaustik-Crossings liegen. Falls die Lebensdauer der Spots ausreichend groß ist, kann unter Umständen dann der gleiche Spot mehrfach von der Kaustik überquert werden.

Falls man bei der Rekonstruktion tatsächlich Strukturen feststellen sollte, besteht dann auch mehr das Problem, diese richtig zu interpretieren – eine Aufgabe, die aber außerhalb des Rahmens dieser Arbeit liegt und hier nicht weiter betrachtet werden soll.

Die Spots sind Kreisscheiben mit einem Radius R_{spot} . Ihre Helligkeit ist durch den Kontrast C gegeben, der das Verhältnis zwischen Spothelligkeit und der lokalen Helligkeit der Scheibe an der Spotposition beschreibt. Ein Wert $C = 0$ steht somit für einen dunklen Spot, während bei $C = 2$ die Intensität des Spots doppelt so hoch ist wie die lokale Intensität der Scheibe .

In einem ersten Schritt untersuchen wir, inwieweit es überhaupt möglich ist, einen Spot zu erkennen. Dazu nehmen wir einen einzelnen Spot, den wir an unterschiedliche Positionen \mathbf{r}_{spot} auf der Akkretionsscheibe platzieren. Danach berechnen wir das eindimensionale Helligkeitsprofil der Akkretionsscheibe mit Spot und einer Scheibe ohne Spot und erzeugen daraus die Lichtkurven eines Kaustik-Crossings durch Faltung mit der Verstärkungsfunk-

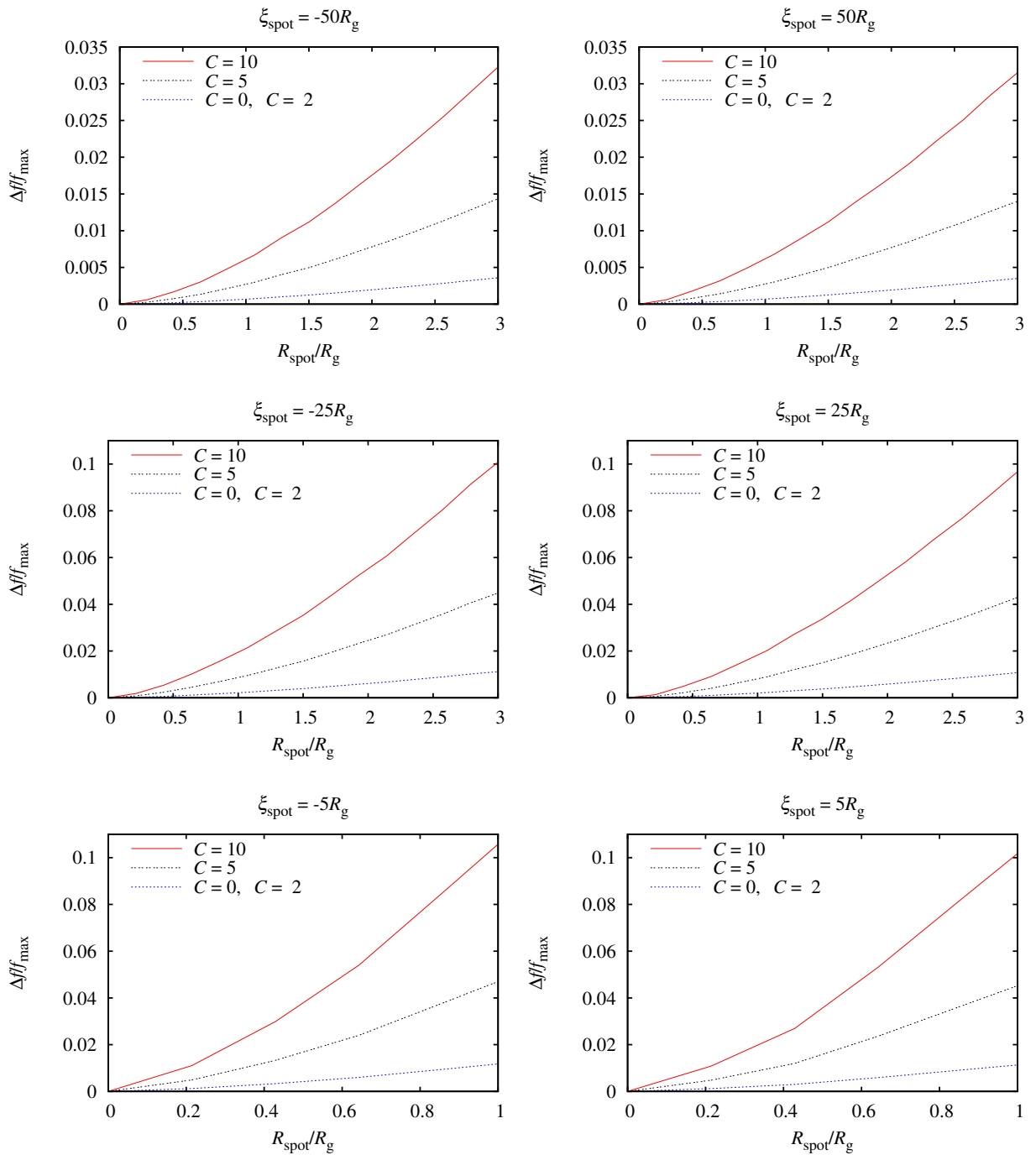


Abbildung 7.28: Maximale Abweichung der Kaustik-Crossing-Lichtkurven zwischen einer strukturlosen Standardakkretionsscheibe und einer Standardakkretionsscheibe mit einem Spot in Abhängigkeit von der Spotgröße R_{spot} , der sich bei $(\xi; 0)$ befindet. Die Spotgröße ist normiert auf die Größe des marginal stabilen Orbits R_g .

Die Abweichung hängt außer vom Kontrast C insbesondere von seiner Position ab. Spots, die sich näher am Zentrum der Akkretionsscheibe befinden, sollten somit besser erkennbar sein.

tion der Kaustik.

Abbildung 7.26 zeigt das eindimensionale Helligkeitsprofil mit der daraus resultierenden Lichtkurve für ein solches Modell mit und ohne Spot. Der Spotradius R_{spot} ist dabei von der Größe des Radius des inneren Randes R_g der Akkretionsscheibe, sein Kontrast beträgt $C = 20$.

Die Abweichung $\Delta f(x)$ zwischen den beiden Lichtkurven ist ein Maß wie gut der Spot zu erkennen ist, sie ist in Abbildung 7.27 dargestellt. Dabei wurde $\Delta f(x)$ auf die maximale Amplitude der Lichtkurve der spotfreien Scheibe normiert, um sie mit der hier verwendeten Definition der Messfehler vergleichen zu können. Die maximale Abweichung liegt in diesem Fall bei etwa 4%.

Die Erkennbarkeit eines Spots hängt nicht nur von seiner Größe und dem Kontrast ab, sondern auch von der Position, bei der er sich auf der Scheibe befindet, wie aus Abbildung 7.28 zu erkennen ist. Dort ist die maximale Abweichung der Lichtkurven zwischen einer spotfreien Akkretionsscheibe und einer Scheibe mit einem Spot der Größe $R_{\text{spot}} = 1R_{\text{in}}$ für verschiedene Positionen r_{spot} dargestellt.

Die Abweichung wird größer, wenn sich der Spot näher am Zentrum der Scheibe befindet. Die Erkennbarkeit von Spots gleicher Größe und gleichem Kontrast steigt also zum Scheibenzentrum hin an.

Nun wollen wir untersuchen, ob sich solche Spots überhaupt rekonstruieren lassen. Dafür nehmen wir das Modell einer dünnen Akkretionsscheibe mit einem Durchmesser von $R_{\text{disk}} = 67,5R_{\text{in}}$, auf der sich 20 zufällig verteilte Spots der Größe $R_{\text{spot}} = 1R_g$ und dem Kontrast $C = 10$ befinden. Die Scheibe ist in Abbildung 7.29 dargestellt.

Abbildung 7.30 zeigt das resultierende eindimensionale Helligkeitsprofil, das wir durch Integration entlang der angenommenen Kaustik-Richtung erhalten. Deutlich erkennbar sind die Strukturen im Profil, die sich durch die Spots ergeben. Einige Spots sind dabei so auf der Scheibe verteilt, dass sie sich in ihrer Wirkung ergänzen und sich dadurch wesentlich deutlichere Signaturen im eindimensionalen Helligkeitsprofil ergeben.

Diese Strukturen sind auch, allerdings wesentlich schwächer, in der entsprechenden Mikrolensing-Lichtkurve, die in Abbildung 7.31 dargestellt ist, erkennbar. Zur Rekonstruktion der hieraus erzeugten Beobachtungslichtkurven wenden wir wieder die Tikhonov-Phillips-Regularisierung und die lokale Regularisierung an.

Die Abbildungen 7.32 bis 7.34 zeigt Lichtkurven mit verschiedenen Messfehlern zwischen 1% und 6% und die daraus rekonstruierten Profile. Die Anzahl der Werte in der Lichtkurve beträgt jeweils $n = 80$.

Die Ergebnisse der Rekonstruktion zeigen, dass die lokale Regularisierungsmethode deutlich besser in der Lage ist, die Strukturen im Profil zu reproduzieren. Bei dem Tikhonov-Phillips-Verfahren werden die Strukturen erst bei einem Messfehler von 1% rekonstruiert, während das lokale Verfahren schon bei einem höheren Fehler von 4% dazu in der Lage ist.

Neben dem Messfehler hat auch die Anzahl der Messwerte entscheidend Einfluss auf das Ergebnis. Zum Vergleich sind in der Abbildung 7.35 Lichtkurven mit 40 und 60 Werten und einem Fehler von 1% dargestellt. Im Vergleich zu der Lichtkurve mit 80 Werten werden hier die Strukturen schlechter rekonstruiert.

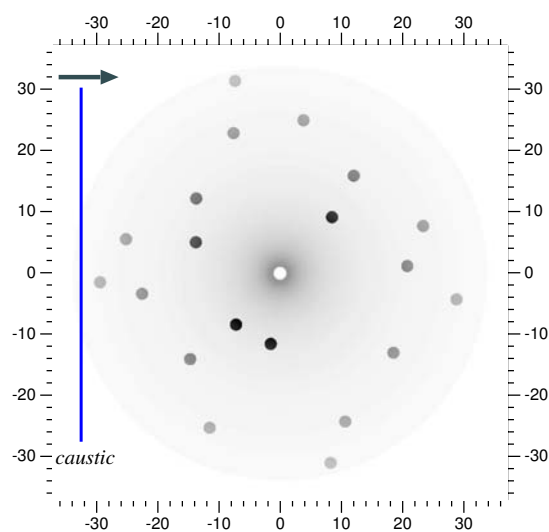


Abbildung 7.29: Zweidimensionales Helligkeitsprofil einer Standardakkretionsscheibe mit Hot Spots. Die Scheibe hat einen Durchmesser von $67,5R_{\text{in}}$. Der Spotdurchmesser beträgt $1R_{\text{in}}$, ihr Kontrast $C = 10$. Gebiete mit hoher Intensität sind dunkel dargestellt. Eingezeichnet ist die Bewegungsrichtung der Kaustik.

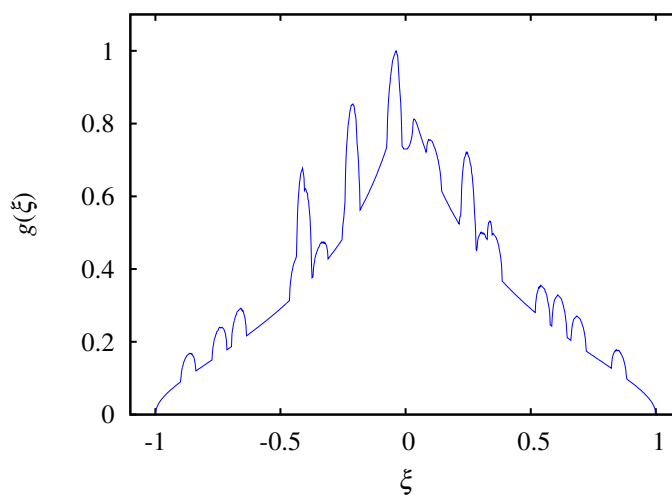


Abbildung 7.30: Eindimensionales Intensitätsprofil der Akkretionsscheibe aus Abbildung [7.29](#)

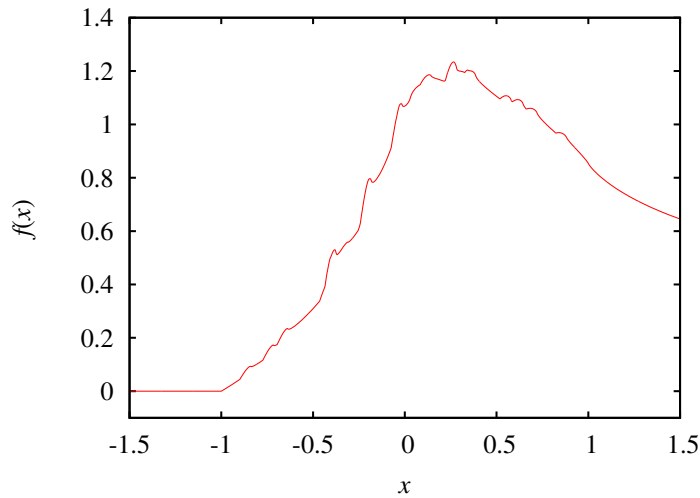


Abbildung 7.31: Mikrolensing-Lichtkurve der Akkretionsscheibe aus Abbildung 7.29

7.8.2 Sternenflecken in Sternenatmosphären

Die Beobachtung von stellaren Mikrolensing-Ereignissen ist eine der wenigen Methoden neben der Photometrie und dem Doppler-Imaging, um detaillierte Informationen über die Struktur von Sternatmosphären zu erhalten. Ein Ziel dabei ist es, die Randverdunkelung der Atmosphäre zu bestimmen und sie mit theoretischen Modellen zu vergleichen. Daneben eröffnet sich mit dem Mikrolensing auch die Möglichkeit, Informationen über Strukturen auf der Sternoberfläche zu erhalten.

Das üblicherweise angewendete Verfahren zur Analyse solcher Ereignisse ist der Fit eines theoretischen Randverdunkelungsgesetzes an die Daten. So beispielsweise bei der Untersuchung des MACHO 98-SMC-1-Ereignisses von Afonso et al., aus dem die Randverdunkelung des gelinsten Sternes in mehreren Wellenlängenbändern bestimmt werden konnte [AAA⁺00].

In der Literatur finden sich verschiedene Formulierungen zur Beschreibung der Randverdunkelung eines Sternes. Die einfachste Formulierung kommt mit nur einem Parameter aus und beschreibt einen linearen Zusammenhang

$$\frac{I(\mu)}{I(1)} = 1 - u_1(1 - \mu) \quad (7.3)$$

zwischen dem Austrittswinkel θ der Strahlung und der Intensität. Dabei ist μ durch $\mu = \cos \theta$ gegeben. Daneben finden sich aber auch Randverdunkelungsgesetze höherer Ordnung, beispielsweise das quadratische Gesetz

$$\frac{I(\mu)}{I(1)} = 1 - u_1(1 - \mu) - u_2(1 - \mu)^2 \quad (7.4)$$

mit den Randverdunkelungsparametern u_1 und u_2 . Eine Übersicht über weitere gebräuchliche Formulierungen gibt Claret [Cla00].

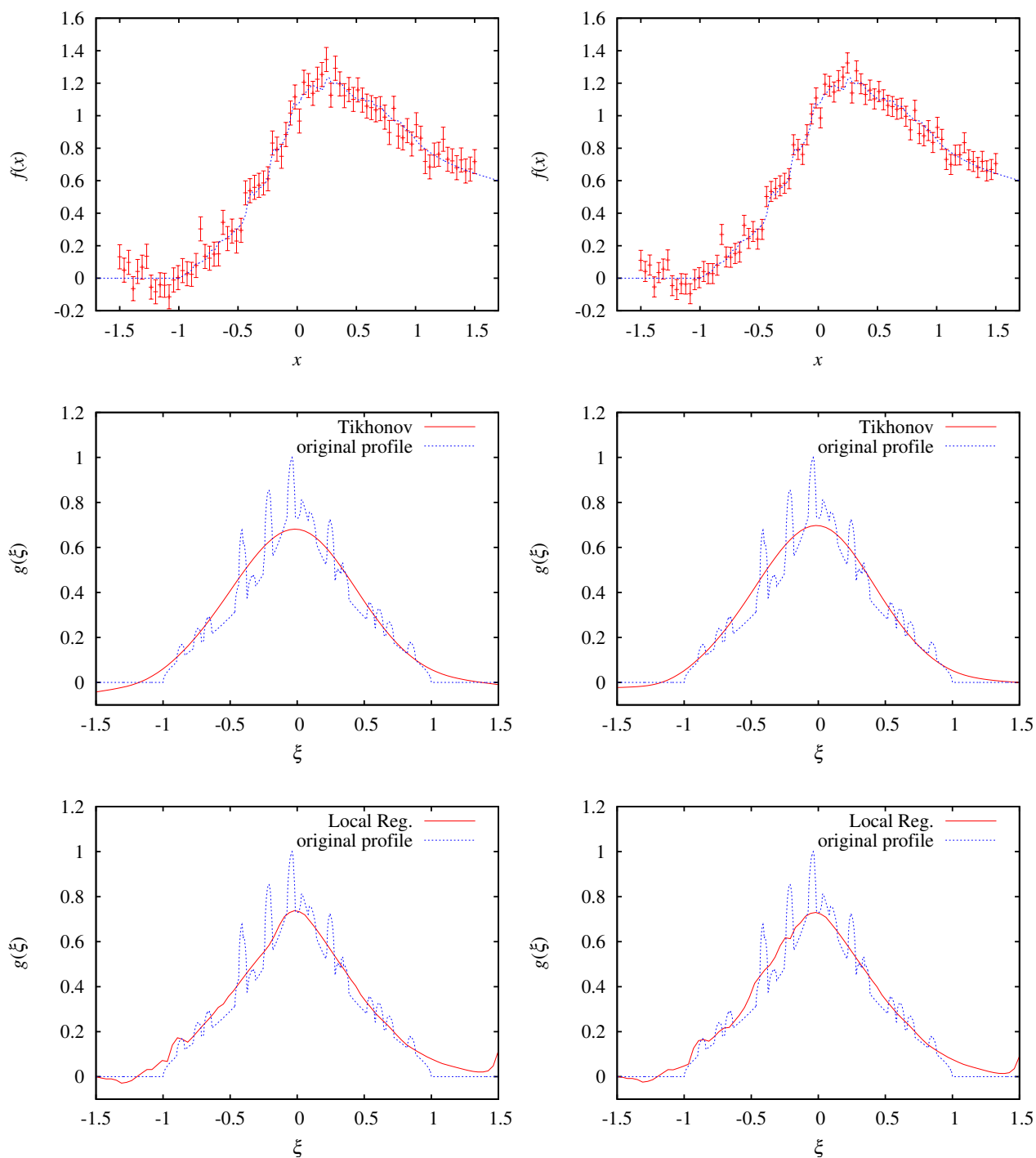


Abbildung 7.32: Lichtkurven für die Akkretionsscheibe mit Hot-Spots und die daraus mit der Tikhonov-Phillips-Regularisierung und mit der lokalen Regularisierung rekonstruierten Profile. **(Links)** 6% Fehler. **(Rechts)** 5% Fehler.

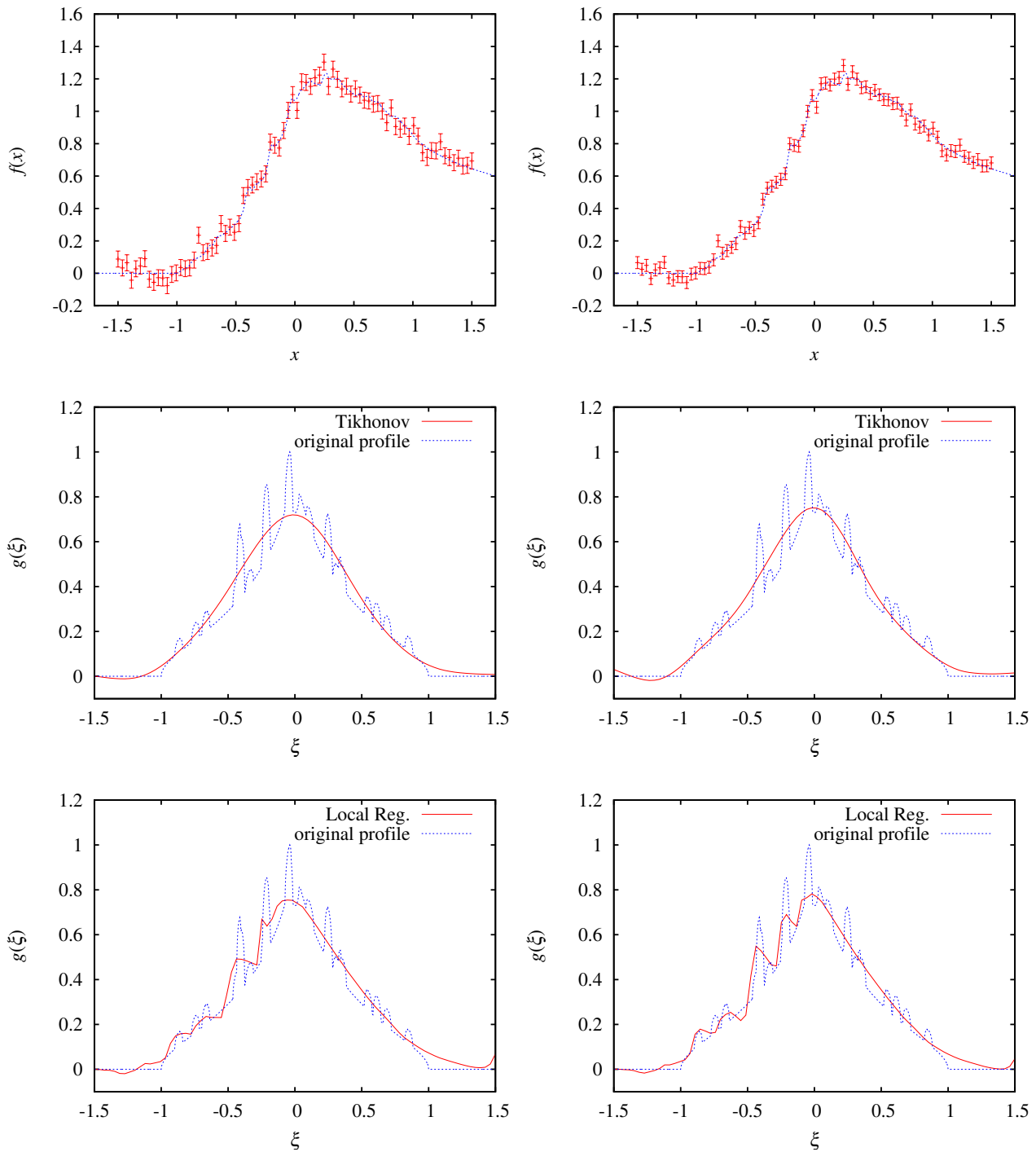


Abbildung 7.33: Lichtkurven für die Akkretionsscheibe mit Hot-Spots und die daraus mit der Tikhonov-Phillips-Regularisierung und mit der lokalen Regularisierung rekonstruierten Profile. **(Links)** 4% Fehler. **(Rechts)** 3% Fehler.

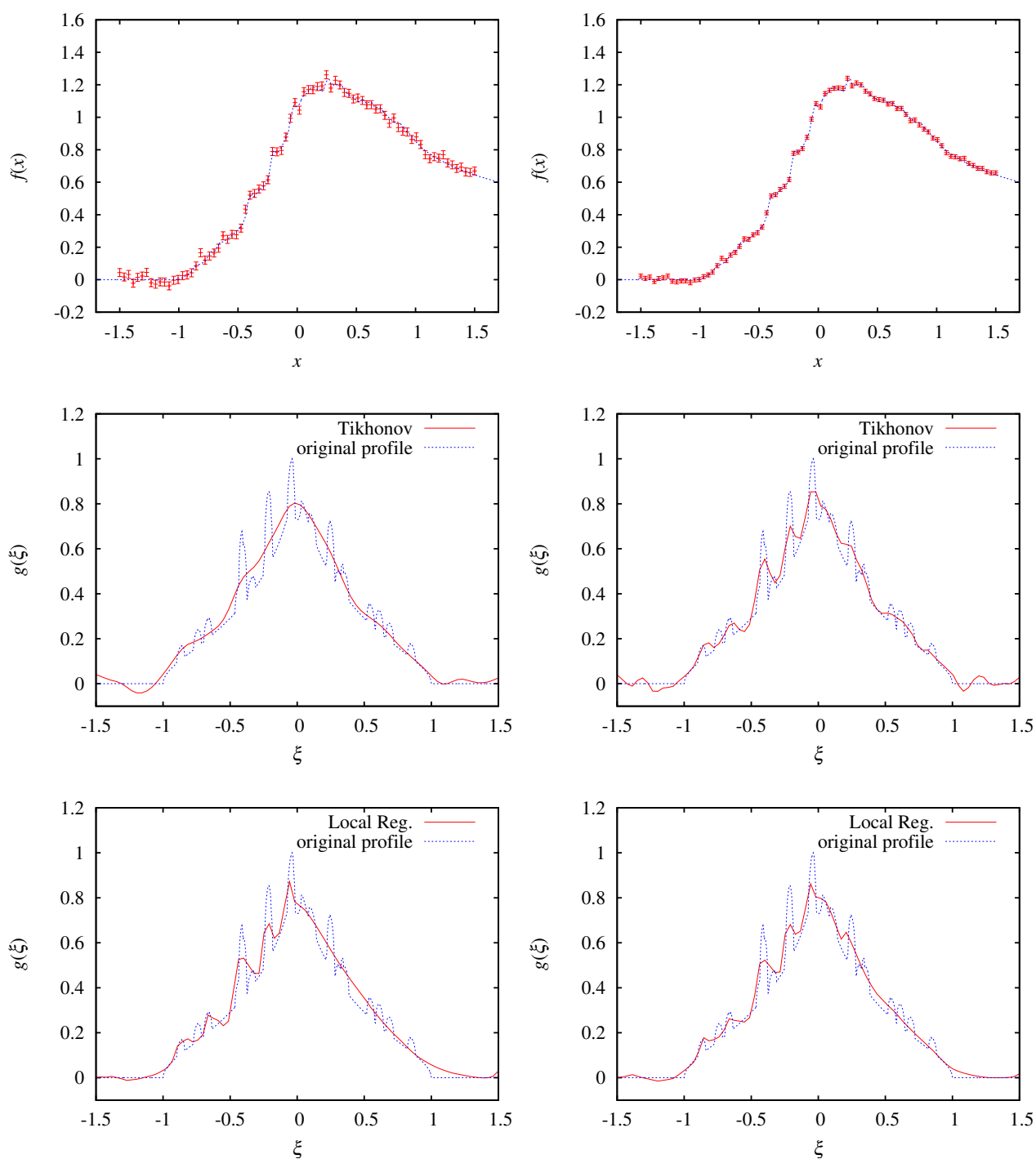


Abbildung 7.34: Lichtkurven für die Akkretionsscheibe mit Hot-Spots und die daraus mit der Tikhonov-Phillips-Regularisierung und mit der lokalen Regularisierung rekonstruierten Profile. **(Links)** 2% Fehler. **(Rechts)** 1% Fehler.

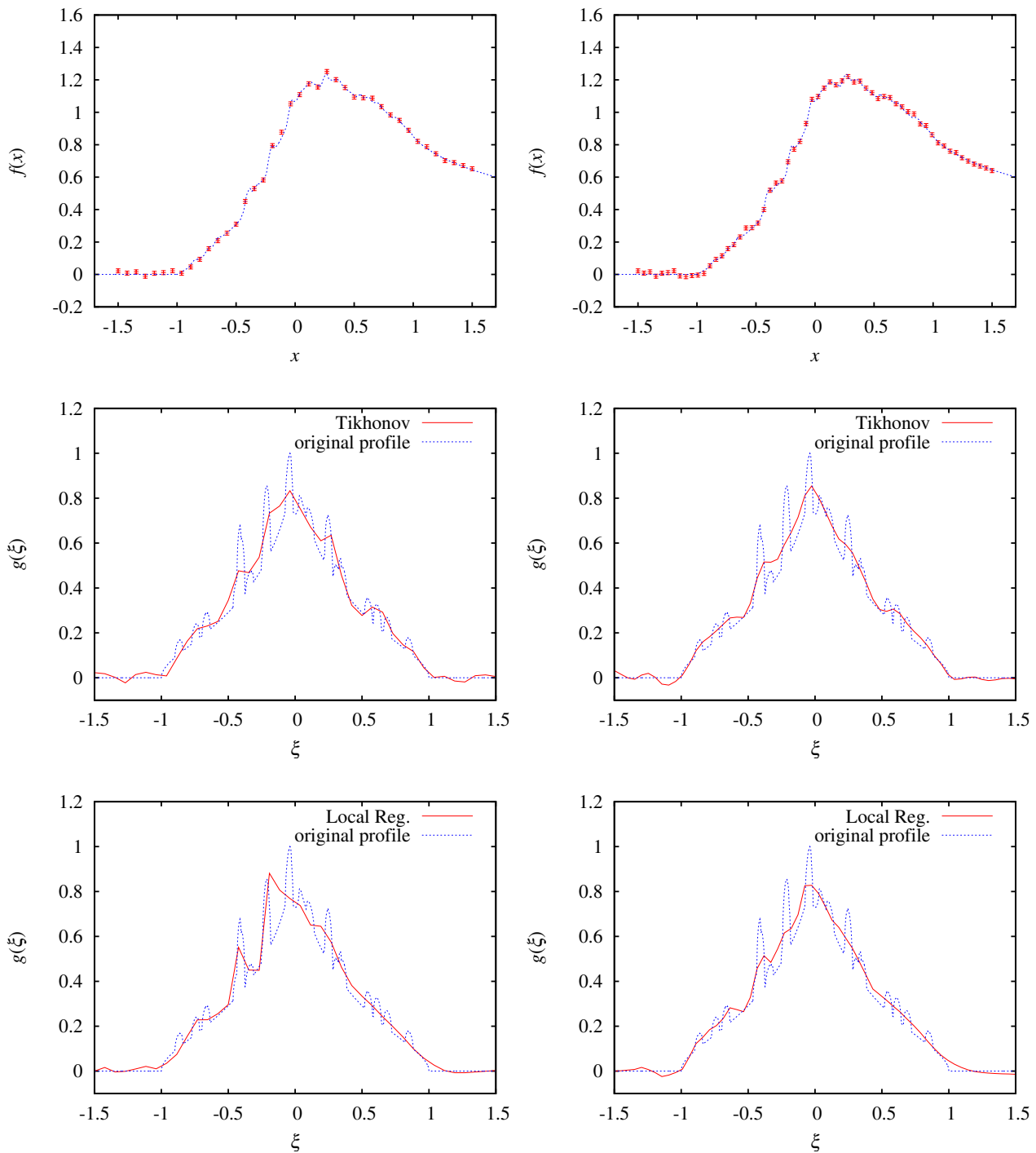


Abbildung 7.35: Lichtkurven mit einem Fehler von 1% für die Akkretionsscheibe mit Hot-Spots und die daraus mit der Tikhonov-Phillips-Regularisierung und mit der lokalen Regularisierung rekonstruierten Profile (**Links**) 40 Messwerte. (**Rechts**) 60 Messwerte.

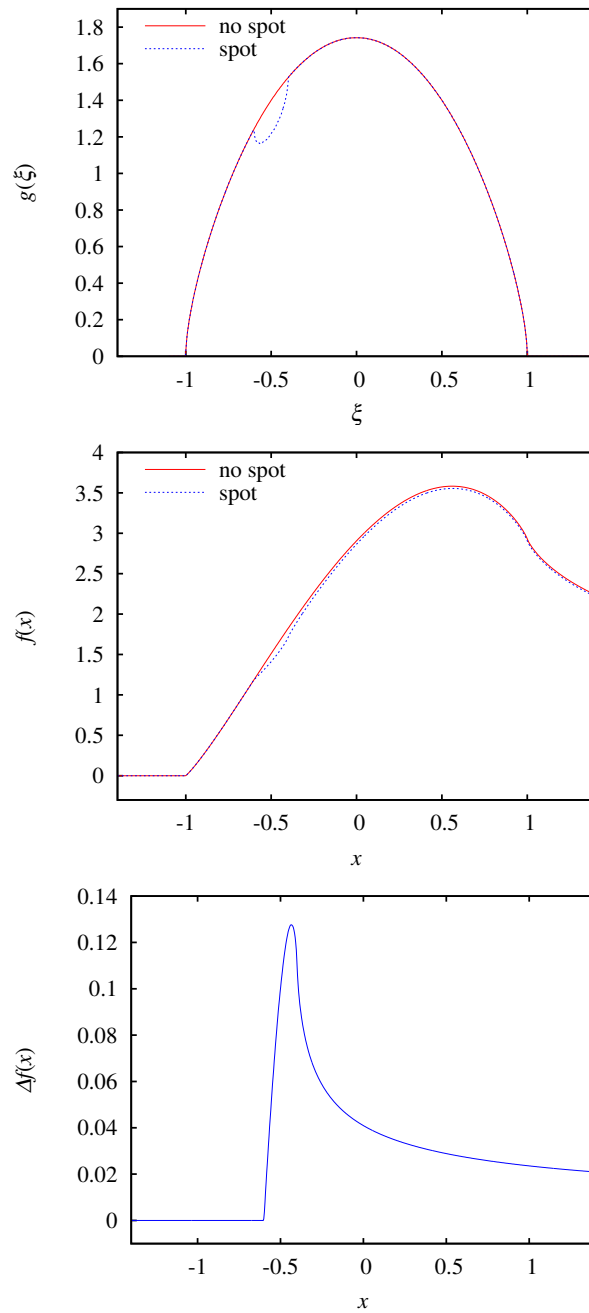


Abbildung 7.36: (Oben) Eindimensionale Helligkeitsprofile von einem fleckfreien Stern und einem Stern mit einem dunklen Fleck mit Radius $R_{\text{spot}} = 0,1R_{\text{star}}$ an der Position $(x = -0,5R_{\text{star}}; y = 0)$. Die Randverdunklung des Sternes folgt dem linearen Gesetz Gleichung (7.3) mit $u_1 = 0,6$. **(Mitte)** Lichtkurven eines Kaustik-Crossing-Ereignisses der beiden Sterne. **(Unten)** Differenz der beiden Lichtkurven.

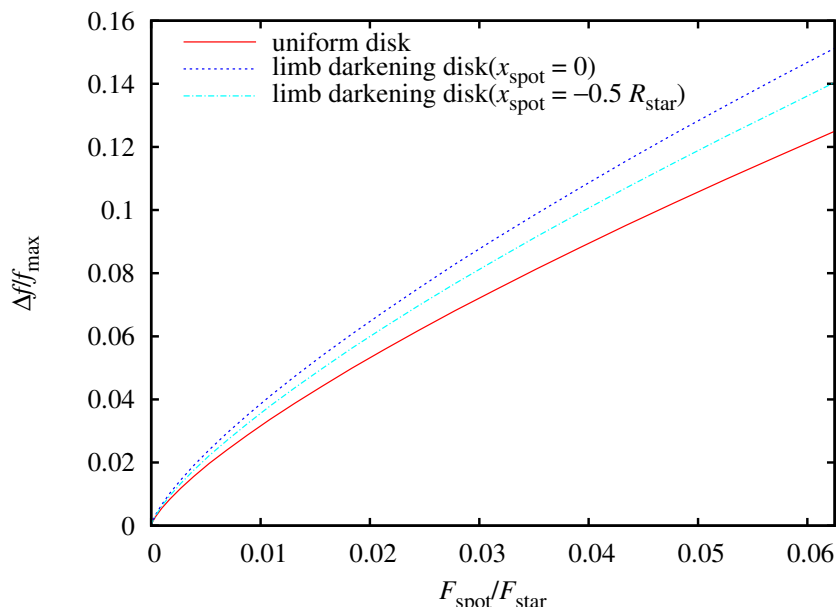


Abbildung 7.37: Maximale Abweichung der Kaustik-Crossing-Lichtkurven zwischen einem spotfreien Stern und einem Stern mit einem Fleck in Abhängigkeit von der Fläche F_{spot} des Flecks. Der Verlauf ist dargestellt für einen Stern mit einer gleichförmigen Helligkeitsverteilung (uniform) und einen Stern mit Randverdunkelung (limb darkening) und für zwei verschiedene Spotpositionen ($R_{\text{spot}} = 0$, $R_{\text{spot}} = -0,5R_{\text{star}}$).

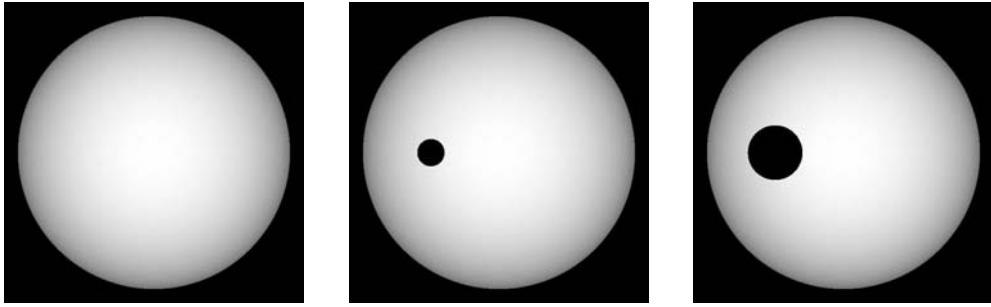


Abbildung 7.38: Die drei Sternenmodelle. (Links) Stern ohne Spot. (Mitte) Stern mit einem Spot mit $R_{\text{spot}} = 0,1R_{\text{star}}$. (Rechts) Stern mit einem Spot mit $R_{\text{spot}} = 0,2R_{\text{star}}$. Das Limb-Darkening des Sternes folgt der linearen Gleichung 7.3 mit $u_1 = 0,6$. Die Spotposition ist bei $x = -0,5R_{\text{star}}$.

Da man annimmt, dass sich die Sternatmosphären gut durch die Randverdunkelungsgesetze beschreiben lassen, ist in diesem Fall die Fit-Methode sicherlich besser geeignet, das Sternprofil zu rekonstruieren. Ausserdem erhält man bei dieser Methode direkt die Randverdunkelungsparameter und kann sie mit theoretischen Sternatmosphärenmodellen vergleichen. Ist es daher überhaupt sinnvoll, die direkte Profilrekonstruktion mit den Regularisierungsmethoden auch bei stellaren Mikrolensing-Ereignissen anzuwenden?

Ein Nachteil des Anfitzens von Randverdunkelungsgesetzen an die Lichtkurven von Mikrolensing-Ereignissen ist, dass sie nicht ohne weiteres in der Lage sind, Strukturen wie Sternenflecken zu reproduzieren. Hier bietet die Profilrekonstruktion mit den Regularisierungsverfahren gegenüber der Fit-Methode den Vorteil, dass sich aus der Rekonstruktion unmittelbar die Signatur des Flecks ergibt. Wir werden daher hier die Fragestellung untersuchen, ob es möglich ist, aus der Lichtkurve eines Kaustik-Crossings-Ereignisses einen Sternenfleck zu rekonstruieren. Dabei soll vor allem untersucht werden, welches der vorgestellten Regularisierungsverfahren dazu besser in der Lage ist.

Für die folgenden Untersuchungen beschreiben wir den Fleck durch eine Kreisscheibe mit einem Radius R_{spot} auf der projizierten Sternoberfläche. Wir werden dabei nur dunkle Flecken mit dem Kontrast $C = 0$ betrachten.

Abbildung 7.36 zeigt die eindimensionalen Helligkeitsprofile eines Sternes mit und ohne Fleck und die daraus resultierenden Lichtkurven. Der Fleck hat einen Radius von $R_{\text{spot}} = 0,1R_{\text{star}}$. Die untere Grafik zeigt die Differenz der beiden Lichtkurven.

In Abbildung 7.37 ist die Differenz der Lichtkurven in Abhängigkeit von der Fläche des Flecks dargestellt. Die Differenz ist dabei auf die maximale Amplitude der Lichtkurve des fleckfreien Sterns normiert. Sie hängt in geringem Maße von der Position des Flecks und von der Art der Randverdunkelung ab. Die Graphik zeigt, dass es durch das Mikrolensing ungefähr zu einer Verdopplung der Signatur des Flecks kommt.

Abbildung 7.38 zeigt drei Sternmodelle. Eine der drei Sterne ist fleckfrei, die beiden anderen haben Flecken mit den Radien $R_{\text{spot}} = 0,1R_{\text{star}}$ und $R_{\text{spot}} = 0,2R_{\text{star}}$. Die resultierenden eindimensionalen Helligkeitsprofile sind in Abbildung 7.39 zusammen mit den daraus erzeugten Lichtkurven dargestellt.

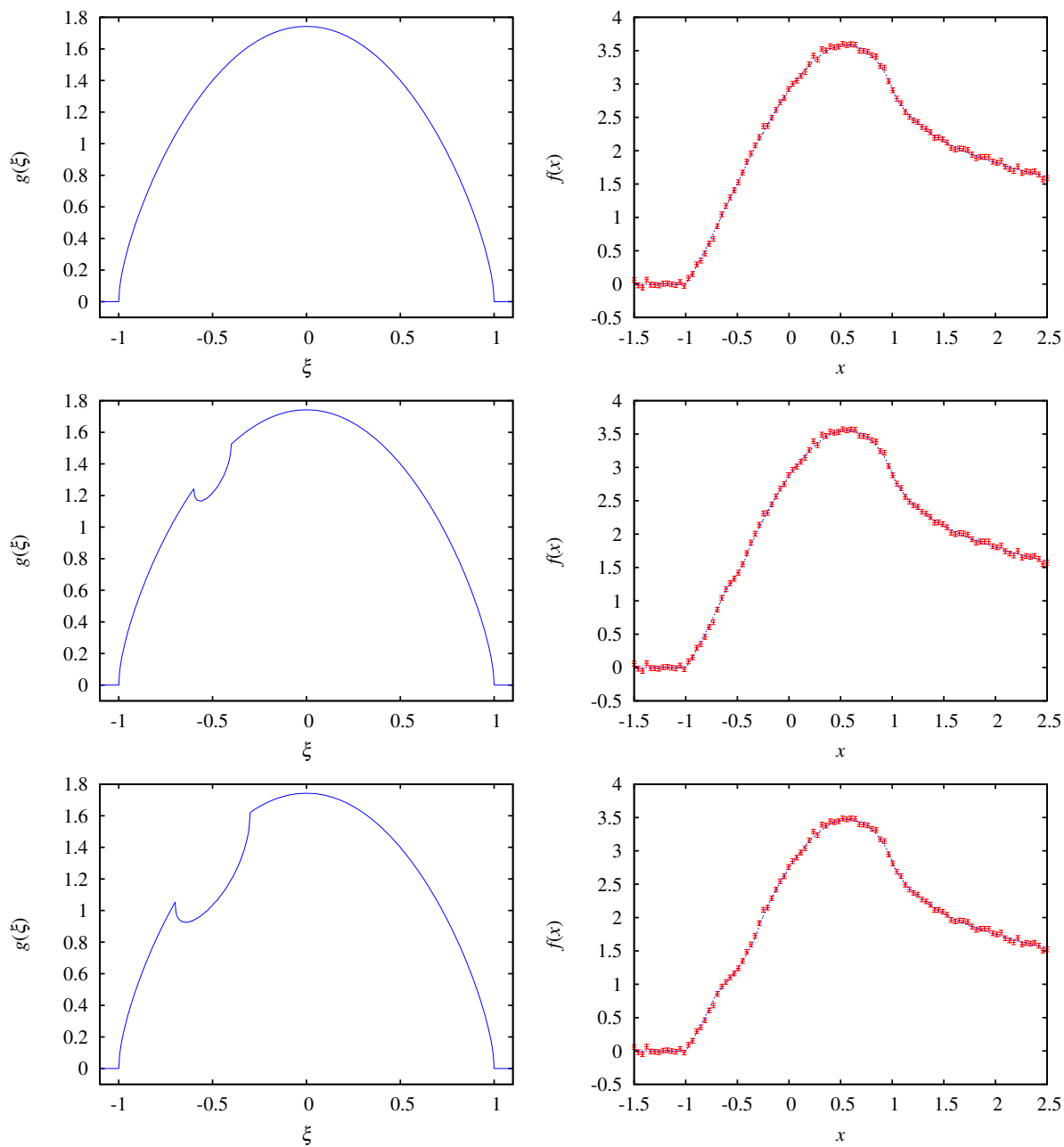


Abbildung 7.39: Die eindimensionalen Sternprofile und die daraus resultierenden Mikrolensing-Lichtkurven.

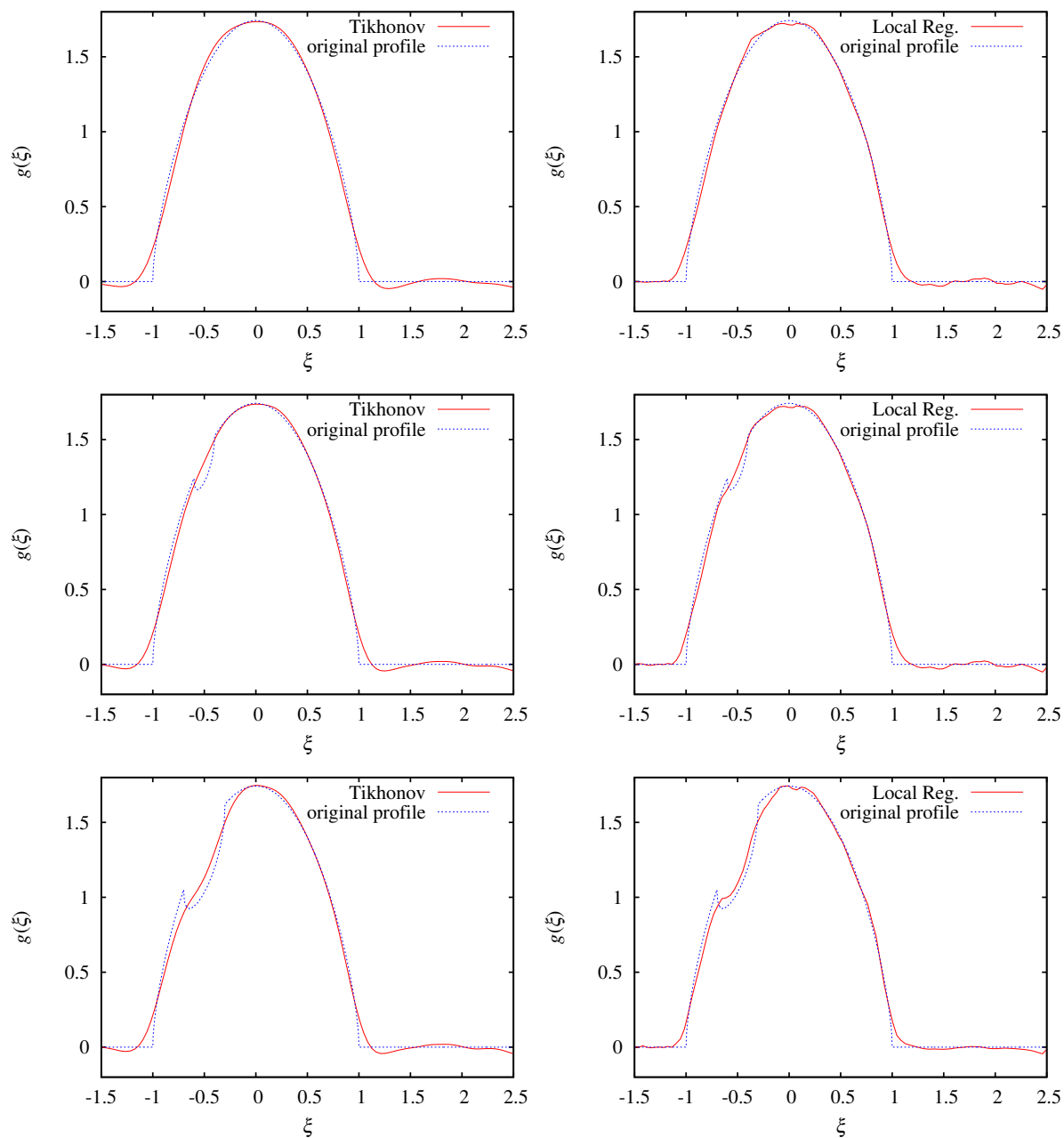


Abbildung 7.40: Die mit der Tikhonov-Phillips-Regularisierung und der lokalen Regularisierung rekonstruierten Profile der drei Sterne im Vergleich zum Originalprofil. Beide Methoden haben Schwierigkeiten mit dem steilen Anstieg des Profils am Rand des Sternes.

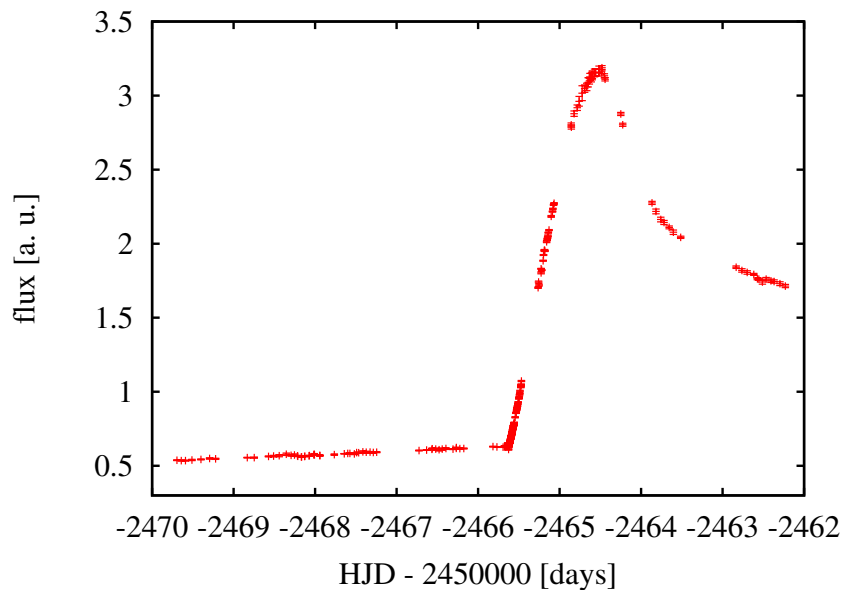


Abbildung 7.41: I-Band-Lichtkurve von OGLE-2002-BUL-69.

Die Qualität der Lichtkurven orientiert sich dabei an den Daten des OGLE-2002-BUL-69-Ereignisses. Sie weisen jeweils 100 gleichmäßig verteilte Datenpunkte auf mit einem Messfehler von 1% der maximalen Amplitude.

In [Abbildung 7.40](#) sind die mit der Tikhonov-Phillips-Regularisierung und mit der lokalen Regularisierung rekonstruierten Profile dargestellt. Man erkennt, dass beide Methoden Probleme haben, den relativ steilen Anstieg des Profilrandes zu rekonstruieren. Allerdings tritt die Signatur des Flecks bei der lokalen Regularisierung deutlicher zu Tage.

7.9 Anwendung auf das OGLE-2002-BUL-69-Ereignis

Im Jahr 2002 wurde von der PLANET-Kollaboration das stellare Mikrolensing-Ereignis OGLE-2002-BUL-69 beobachtet, bei dem ein Stern eine Doppellinse durchquerte. Bei dem Stern handelt es sich um einen G5III-Überriesen, dessen Atmosphäre von Cassan et al. mit den PLANET-Daten analysiert wurde [[CBB⁺04](#)]. Die Methode war dabei der Fit eines Atmosphärenmodells an die Lichtkurve. Die Zeitdauer des Kaustik-Crossings wurde so zu $\Delta t = 1,4594$ d bestimmt, der Eintritt des Sterns erfolgte zum Zeitpunkt $t = 2465,637$ d.

Die Daten wurden von Daniel Kubas zur Verfügung gestellt, um an ihnen die direkte Profilrekonstruktion durchzuführen. Eine detaillierte Analyse des Ereignisses liegt außerhalb des Rahmens der hier durchgeführten Untersuchung, dafür sei auf die Arbeiten von Cassan und von Kubas [[Kub04](#)] verwiesen.

Bei dem Ereignis wurden zwei Kaustik-Crossings beobachtet, von denen aber nur bei einem die Datendichte ausreichend hoch ist, das es sich zur Anwendung der Profilrekonstruktionverfahren eignet. Die Daten stammen vom MPG/ESO 2,2 m-Teleskop auf La Silla. In [Abbildung 7.41](#) ist die Lichtkurve dargestellt. Bei der Darstellung wurde die Zeitachse

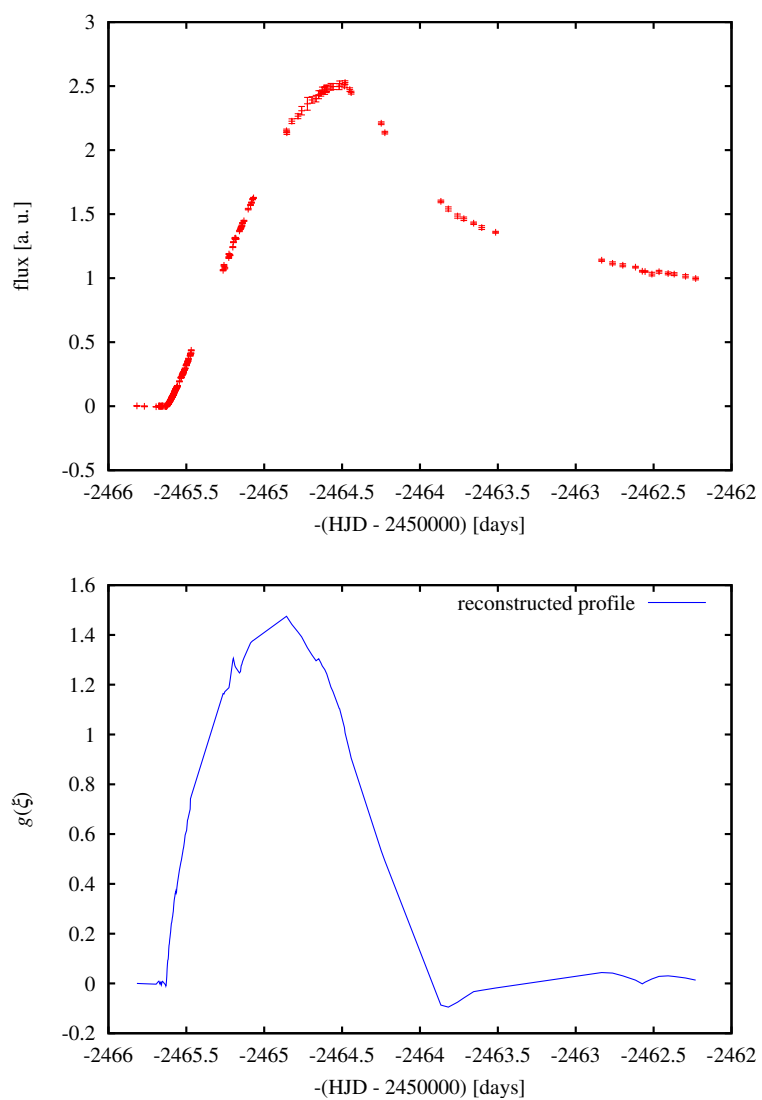


Abbildung 7.42: (Oben) Um den Fluss f_0 korrigierte Lichtkurve des OGLE-2002-BUL-69-Ereignis (Unten) Mit der lokalen Regularisierung rekonstruiertes eindimensionales Helligkeitsprofil des gelinsten Sterns.

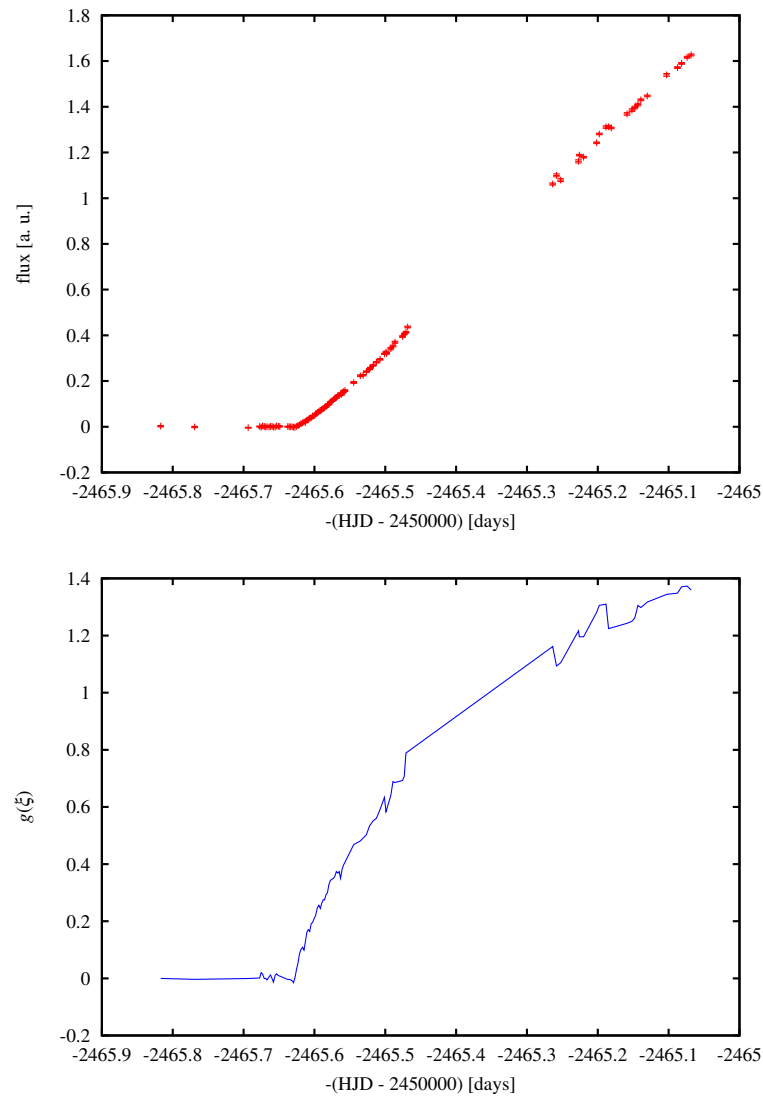


Abbildung 7.43: (Oben) Ausschnitt aus der Lichtkurve von OGLE-2002-BUL-69. (Unten) Mit dem lokalen Regularisierungsverfahren rekonstruiertes Profil für diesen Abschnitt der Lichtkurve.

invertiert, um eine Übereinstimmung mit der in dieser Arbeit verwendeten Konvention einer von links nach rechts wandernden Kaustik zu erzielen. Insgesamt weist die Lichtkurve, die im I-Band beobachtet wurde, 142 Datenpunkte auf, der Messfehler liegt bei unter 1%, bezogen auf die maximale Amplitude. Die Lichtkurve weist mehrere größere Lücken in den Daten auf.

Abbildung 7.42 zeigt die um den Fluss f_0 der anderen Mikrobilder korrigierte Lichtkurve des Kaustik-Crossings und das daraus mit dem lokalen Regularisierungsverfahren rekonstruierte eindimensionale Helligkeitsprofil. Der Fluss f_0 wurde dabei durch lineare Approximation bestimmt. Wegen der großen Lücken in den Daten können wir nicht erwarten, dass uns eine vollständige Rekonstruktion des Profils des Sterns möglich ist. Allerdings ist es möglich, die Größe des Stern bzw. die Zeitdauer des Kaustik-Crossings aus dem Profil abzuschätzen. Sie liegt bei $\Delta t \approx 1,5$ d und ist in Übereinstimmung mit dem von Cassan gefundenen Wert.

Abbildung 7.43 zeigt einen Ausschnitt aus der Lichtkurve mit der ersten in ihr auftretenden Lücke und das daraus rekonstruierte Profil. Aufgrund unserer Ergebnisse der Simulationen können wir erwarten, bis zur Lücke ein zuverlässiges Ergebnis für den Verlauf des Sternprofils erhalten zu haben. In diesem Abschnitt des Profils sind keine Signaturen von Strukturen in der Sternatmosphäre erkennbar. Eine Bestimmung der Randverdunkelungsparameter allein aus diesem rekonstruierten Profil oder ein Vergleich mit theoretischen Sternatmosphärenmodellen ist allerdings nicht möglich, da dafür eine genaue Kenntnis des Sternradius erforderlich ist, den wir für dieses Ereignis nicht genau genug bestimmen können.

7.10 Zusammenfassung

In diesem Abschnitt wendeten wir die vorgestellten Regularisierungsverfahren zur Profilrekonstruktion an. Diese Verfahren gehen von der Approximation einer Fold-Kaustik durch eine Gerade aus. Als Voraussetzung dafür wird in der Literatur ein maximaler Quelldurchmesser von $0,1 R_E$ angegeben. Wir untersuchten zuerst die Gültigkeit dieser Näherung und konnten zeigen, dass es Situationen geben kann, bei denen auch für Quellen mit dieser Größe eine genaue Rekonstruktion des Profils nicht möglich ist. Bei den Lichtkurven, bei denen dies nicht möglich war, stellten wir fest, dass der Fluss f_0 außerhalb der Kaustik nicht durch einen linearen Verlauf beschrieben werden kann. Ob dadurch möglicherweise ein Ausschlusskriterium für Lichtkurven gegeben ist, die sich nicht für eine Rekonstruktion eignen, sollte weiter untersucht werden.

Wie gut sich nun tatsächlich das Helligkeitsprofil einer mikrogelinsten Quelle rekonstruieren lässt, hängt von der Qualität der beobachteten Lichtkurve ab. Unsere Simulationen zeigten, dass für gleichmäßig verteilte Messdaten ab etwa 15 Datenpunkten mit einem Fehler von 5% eine zufriedenstellende Rekonstruktion möglich ist. Bei einem Messfehler von 1% ergab sich eine fast perfekte Übereinstimmung zwischen Originalprofil und dem rekonstruierten Profil. Zwischen den beiden angewendeten Verfahren, der Tikhonov-Phillips-Regularisierung und der lokale Regularisierung waren keine signifikanten Unterschiede bei der Rekonstruktion des globalen Profilverlaufs auszumachen.

Die Simulationen zeigten auch, dass ab einer bestimmten optimalen Anzahl von Daten-

punkten eine Erhöhung der Zahl der Messungen nicht mehr zu einer wesentlichen Verbesserung des rekonstruierten Profilverlaufs führt.

Weitere Simulationen zeigten, dass auch bei einer von einem regelmäßigem Sampling leicht abweichenden Verteilung der Datenpunkte eine gute Rekonstruktion des Profils möglich ist.

Wir konnten auch feststellen, dass die Grenze der Rekonstruktionsverfahren dann erreicht ist, wenn größere Lücken in den Lichtkurven auftreten. In diesen Fällen ist es nicht mehr möglich, das Profil ab Beginn der Lücke in den Daten zuverlässig zu rekonstruieren. Es ist nur möglich, den Profilverlauf bis zum Eintreten dieser Lücke zu rekonstruieren. Solche Lichtkurven eignen sich aber immer noch, um die Größe des beobachteten Objektes abzuschätzen. Hier sind Methoden, die ein Modell des Helligkeitsverlauf an die Daten anfitzen, eindeutig im Vorteil.

Bei der Rekonstruktion kleiner Strukturen zeigte sich ein deutlicher Unterschied zwischen den beiden Regularisierungsverfahren. Anhand von einem Hot-Spot-Modell einer Akkretionscheibe und von Sternmodellen mit Flecken konnten wir feststellen, dass mit der lokale Regularisierung die Rekonstruktion der Signatur der Strukturen wesentlich besser gelingt.

Testweise wendeten wir die lokale Regularisierungsmethode auf das OGLE-2002-BUL-69-Ereignis an, einem stellaren Kaustik-Crossing und konnten zumindest die angegebene Größe des Sternes ungefähr reproduzieren.

8 Zusammenfassung und Ausblick

Die Grundlage dieser Arbeit bildete die Anwendung des Mikrogravitationslinseneffekts zur Untersuchung astronomischer Objekte. Im Vordergrund stand dabei vor allem die Untersuchung von Quasaren. Mikrolensing ist eine der wenigen Methoden, mit denen die inneren Gebiete eines Quasars direkt beobachtet werden können. Aus den Lichtkurven eines Kaustik-Crossing-Ereignisses ist es im Prinzip möglich, das Helligkeitsprofil der Akkretionsscheibe zu bestimmen.

Um festzustellen, ob ein bestimmter gelinster Quasar überhaupt mit Mikrolensing untersucht werden kann, sollten wir wissen, ob in dem betreffenden System überhaupt Mikrolensing auftritt. Um diese Frage zu klären, haben wir im ersten Teil der Arbeit an drei Systemen, dem Vierfachquasar HE 0435–1223 und den Doppelquasaren UM 673 und HE 0047–1756 nach Signaturen für Mikrolensing in ihren Spektren gesucht. Bei zwei der untersuchten Systeme, HE 0435–1223 und HE 0047–1756 konnten deutliche Anzeichen für Mikrolensing beobachtet werden. Bei HE 0047–1746 kommt es darüber hinaus möglicherweise zu einer differentiellen Verstärkung der Kontinuumsregion.

Allerdings können wir uns noch nicht sicher sein, bei HE 0435–1223 und HE 0047–175 tatsächlich Mikrolensing gefunden zu haben. Intrinsische Ursachen für die beobachteten Unterschiede in den Spektren können wir aufgrund der einmaligen Beobachtung dieser Systeme nicht ausschließen. Diese beiden Quasare sollten in der Zukunft unbedingt weiter untersucht werden, um unsere Annahme von Mikrolensing zu untermauern.

In dem dritten untersuchten System, UM 673, fanden wir keine Hinweise dafür. Aus dem Vergleich mit älteren Beobachtungen dieses Quasars kann gefolgert werden, dass es möglicherweise auch in einem längeren Zeitraum von über zwei Jahrzehnten kein Mikrolensing in diesem System gegeben hat.

Nachdem wir in einem Quasarsystem Mikrolensing festgestellt haben, können wir damit versuchen, den Quasar zu untersuchen. Damit befassten wir uns im zweiten Teil der Arbeit, in dem wir uns mit der Rekonstruktion des Helligkeitsprofils aus beobachteten Mikrolensing-Lichtkurven beschäftigten. Die mathematische Beschreibung dieser Aufgabe führt zu einer Volterra'schen Integralgleichung der ersten Art, für die Grieger zeigen konnten, dass zu ihrer Lösung spezielle Methoden, die sogenannten Regularisierungsverfahren, erforderlich sind. Grieger wendete für dieses Problem die Tikhonov-Phillips-Regularisierung an. Es zeigte sich aber, dass dieses Verfahren für diese Aufgabe nicht besonders gut angepasst ist, da es die spezielle kausale Struktur der Volterra'schen Integralgleichung nicht berücksichtigt. Eine speziell für solche Probleme entwickelte Methode ist die lokale Regularisierung, von der wir anhand von Simulationen zeigen konnten, dass mit ihr die Rekonstruktion des Quellprofils möglich ist.

Zur Anwendung der lokalen Regularisierung haben wir einen Algorithmus entwickelt, der es möglich macht, dieses Verfahren auf die Mikrolensing-Lichtkurven anzuwenden. Im Ge-

gensatz zu den in der Literatur vorgestellten Verfahren ist es bei dem von uns entwickelten Algorithmus möglich, ihn auch bei unregelmäßig gemessenen Daten anzuwenden. Unsere Simulationen zeigten, dass es mit dem Diskrepanzprinzip möglich ist, einen geeigneten Regularisierungsparameter zu bestimmen.

Beim Vergleich des lokalen Regularisierungsverfahrens mit der Tikhonov-Phillips-Regularisierung zeigte sich, dass die Rekonstruktion des globalen Profilverlaufs bei beiden Methoden ab etwa 15 Datenpunkte möglich ist. Beide Methoden haben ihre Grenze, wenn größere Lücken in der Lichtkurve auftreten. Bei der Rekonstruktion kleiner Strukturen zeigte sich dann, dass die lokale Regularisierung hierzu deutlich besser in der Lage ist.

Anwenden konnten wir die lokale Regularisierung auf ein stellares Mikrolensing-Ereignis. Leider waren wir noch nicht in der Lage, es bei Quasaren anzuwenden, da bis jetzt kein eindeutig identifiziertes Kaustik-Crossing bei einem Quasar beobachtet wurde. Da unsere Untersuchung der Spektren aber zeigte, dass Mikrolensing durchaus häufig sein kann, ist für die Zukunft zu hoffen, dass solche Ereignisse tatsächlich gefunden werden.

Da die lokale Regularisierung für die Rekonstruktion der Helligkeitsprofile gegenüber der Tikhonov-Phillips-Regularisierung Vorteile aufwies, stellt sich die Frage, ob sie nicht auch für Anwendung bei anderen inversen Probleme besser geeignet ist. Inzwischen wurde auch eine Variante dieser Methode für die Fredholm'schen Integralgleichungen der ersten Art vorgestellt [Lam03], so dass sie möglicherweise bei einer Vielzahl von Problemen angewendet werden kann. Allerdings sind die Verfahren zur Bestimmung des Regularisierungsparameter noch nicht ausreichend gut entwickelt.

9 Anhang

A.1 Diskretisierung des Profils

Für die Anwendung der Regularisierungsmethoden müssen wir die Abel'sche Integralgleichung diskretisieren. Dafür wenden wir das gleiche Verfahren wie bei Grieger et al. an [GKS91].

Die diskretisierte Lichtkurve

$$\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_m)^T \quad (\text{A.1})$$

ist durch den zu den Zeitpunkten t_j ($j = 1, \dots, m$) bzw. den entsprechenden Kaustik-Positionen $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_m)^T$ gemessenen Fluss $f_j = f(x_j)$ gegeben.

Die Profildfunktion $g(\xi)$ wird durch ihre Funktionswerte

$$\mathbf{g} = (g_1, \dots, g_n)^T, \quad (\text{A.2})$$

an den Stellen $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_n)^T$ dargestellt. Dazwischen wird die Funktion $g(\xi)$ durch stückweise, lineare Funktionen

$$g(\xi) = \sum_{i=2}^n g_i(\xi) \phi_i(\xi) \quad (\text{A.3})$$

mit

$$g_i(\xi) = g_{i-1} + s_i(\xi - \xi_{i-1}) \quad (i = 2, 3, \dots, n) \quad (\text{A.4})$$

interpoliert. Dabei bezeichnet $\phi_i(\xi)$ die charakteristische Funktion

$$\phi_i(\xi) := \begin{cases} 1 & \text{für } x_{i-1} \leq \xi \leq x_i \quad (i = 2, 3, \dots, n) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (\text{A.5})$$

Die Steigung s_i der Interpolationsgeraden zwischen g_{i-1} und g_i ist durch

$$s_i = \frac{g_i - g_{i-1}}{\xi_i - \xi_{i-1}} \quad (\text{A.6})$$

gegeben.

A.2 Algorithmus für die lokale Regularisierung

Die Grundlage des für diese Arbeit entwickelten Algorithmus für lokale Regularisierung ist das von Lamm vorgestellte Verfahren [Lam97]. Dort wird allerdings die Funktion g durch stückweise konstante Funktion interpoliert und außerdem wird vorausgesetzt, dass die

Stützstellen von g und f gleichmäßige Abständen aufweisen, wodurch sich das Verfahren nicht unmittelbar auf astronomische Lichtkurven anwenden läßt.

Das Verfahren von Lamm wurde daher für die hier verwendete Diskretisierung mit stückweisen, linearen Interpolationspolynomen und für nicht gleichmäßig verteilten Stützstellen von g und f erweitert.

Für die lokale Regularisierung werden die Stützstellen ξ von g so gewählt, dass sie den Positionen \mathbf{x} der Kaustik bei den gemessenen Lichtkurvenwerten entsprechen. Das zu rekonstruierende Profil wird dann durch einen iterativen Algorithmus bestimmt.

Wir setzen voraus, dass beim ersten Messwert die Kaustik das Profil noch nicht erreicht hat, daher können wir den ersten Profilwert $g_1 = 0$ setzen. Im ersten Iterationsschritt bestimmen wir $g_2(\xi)$ durch einen Least-Square-Fit an die ersten $r + 1$ Datenpunkte f_2, \dots, f_{2+r} . Dazu minimieren wir

$$\begin{aligned}
 Q_2 = & \left| f_2 - \int_0^{x_2} A(x_2 - \xi) g_2(\xi) \phi_2(\xi) \, d\xi \right|^2 \\
 & + \left| f_3 - \int_0^{x_3} A(x_3 - \xi) g_2(\xi) (\phi_2(\xi) + \phi_3(\xi)) \, d\xi \right|^2 \\
 & + \dots + \\
 & + \left| f_{2+r} - \int_0^{x_{2+r}} A(x_{2+r} - \xi) (\phi_2(\xi) + \dots + \phi_{2+r}(\xi)) \, d\xi \right|^2
 \end{aligned} \tag{A.7}$$

Die schon rekonstruierten Profilwerte kennzeichnen wir zur Unterscheidung von den noch nicht bestimmten Profilwerten durch eine Tilde. Im zweiten Iterationsschritt wird $g_3(\xi)$ durch einen Fit an die Daten f_3, \dots, f_{3+r} durch die Minimierung von

$$\begin{aligned}
 Q_3 = & \left| f_3 - \int_0^{x_3} A(x_3 - \xi) (\tilde{g}_2(\xi) \phi_2(\xi) \right. \\
 & \qquad \qquad \qquad \left. + g_3(\xi) \phi_3(\xi)) \, d\xi \right|^2 \\
 & + \left| f_4 - \int_0^{x_4} A(x_4 - \xi) (\tilde{g}_2(\xi) \phi_2(\xi) \right. \\
 & \qquad \qquad \qquad \left. + g_3(\xi) [\phi_3(\xi) + \phi_4(\xi)]) \, d\xi \right|^2 \\
 & + \dots +
 \end{aligned}$$

$$+ \left| f_{3+r} - \int_0^{x_{3+r}} A(x_{3+r} - \xi) \left(\tilde{g}_2(\xi) \phi_2(\xi) + g_3(\xi) [\phi_3(\xi) + \dots + \phi_{3+r}(\xi)] \right) d\xi \right|^2 \quad (\text{A.8})$$

bestimmt. Allgemein erhalten wir $g_q(\xi)$ im $(q-1)$ -ten Schritt durch Minimierung von

$$\begin{aligned} Q_q = & \left| f_q - \int_0^{x_q} A(x_q - \xi) \left(\tilde{g}_2(\xi) \phi_2(\xi) + \dots + \tilde{g}_{q-1}(\xi) \phi_{q-1}(\xi) + g_q(\xi) \phi_q(\xi) \right) d\xi \right|^2 \\ & + \left| f_{q+1} - \int_0^{x_{q+1}} A(x_{q+1} - \xi) \left(\tilde{g}_2(\xi) \phi_2(\xi) + \dots + \tilde{g}_{q-1}(\xi) \phi_{q-1}(\xi) + g_q(\xi) [\phi_q(\xi) + \phi_{q+1}(\xi)] \right) d\xi \right|^2 \\ & + \dots + \\ & + \left| f_{q+r} - \int_0^{x_{q+r}} A(x_{q+r} - \xi) \left(\tilde{g}_2(\xi) \phi_2(\xi) + \dots + \tilde{g}_{q-1}(\xi) \phi_{q-1}(\xi) + g_q(\xi) [\phi_q(\xi) + \dots + \phi_{q+r}(\xi)] \right) d\xi \right|^2 \\ & . \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

Q_q können wir durch eine Summe über r

$$Q_q = \sum_{j=0}^r Q_{q,j} \quad (\text{A.10})$$

darstellen mit den Koeffizienten

$$Q_{q,j} = \underbrace{\left| f_{q+j} - \int_0^{x_{q+j}} A(x_{q+j} - \xi) \left(\tilde{g}_2(\xi) \phi_2(\xi) + \dots + \tilde{g}_{q-1}(\xi) \phi_{q-1}(\xi) + g_q(\xi) [\phi_q(\xi) + \dots + \phi_{q+j}(\xi)] \right) d\xi \right|^2}_{=: S_{q,j}} \quad (\text{A.11})$$

Für A setzen wir die Kaustik-Verstärkungsfunktion ein und erhalten damit

$$\begin{aligned}
S_{q,j} &= \int_0^{x_{q+j}} \frac{1}{\sqrt{x_{q+j}-\xi}} \sum_{i=2}^{q-1} (\tilde{g}_{i-1} + (\xi - x_{i-1})\tilde{s}_i) \phi_i(\xi) d\xi \\
&\quad + \int_0^{x_{q+i}} \frac{1}{\sqrt{x_{q+j}-\xi}} (\tilde{g}_{q-1} + (\xi - x_{q-1})s_q) \sum_{i=q}^{q+j} \phi_i(\xi) d\xi \\
&= \underbrace{\sum_{i=2}^{q-1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{1}{\sqrt{x_{q+j}-\xi}} (\tilde{g}_{i-1} + (\xi - x_{i-1})\tilde{s}_i) d\xi}_{=: D_{q,j}} \\
&\quad + \underbrace{\int_{x_{q-1}}^{x_{q+j}} \frac{1}{\sqrt{x_{q+j}-\xi}} (\tilde{g}_{q-1} + (\xi - x_{q-1})s_q) d\xi}_{=: E_{q,j}}. \tag{A.12}
\end{aligned}$$

$D_{q,j}$ stellen wir durch eine Summe dar

$$D_{q,j} = \sum_{i=2}^{q-1} D_{q,j}^{(i)} \tag{A.13}$$

mit

$$\begin{aligned}
D_{q,j}^{(i)} &= \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{1}{\sqrt{x_{q+j}-\xi}} (\tilde{g}_{i-1} + (\xi - x_{i-1})\tilde{s}_i) d\xi \\
&= 2 (\tilde{g}_{i-1} - x_{i-1}\tilde{s}_i) (\sqrt{x_{q+j}-x_{i-1}} - \sqrt{x_{q+j}-x_i}) \\
&\quad + \frac{2}{3} \tilde{s}_i ((2x_{q+j} + x_{i-1})\sqrt{x_{q+j}-x_{i-1}} - (2x_{q+j} + x_i)\sqrt{x_{q+j}-x_i}) . \tag{A.14}
\end{aligned}$$

Für $E_{q,j}$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
E_{q,j} &= 2 (\tilde{g}_{q-1} - x_{q-1}s_q) (\sqrt{x_{q+j}-x_{q-1}} - \sqrt{x_{q+j}-x_{q+j}}) \\
&\quad + \frac{2}{3} s_q ((2x_{q+j} + x_{q-1})\sqrt{x_{q+j}-x_{q-1}} - (2x_{q+j} + x_{q+j})\sqrt{x_{q+j}-x_{q+j}}) \\
&= \underbrace{2\tilde{g}_{q-1}\sqrt{x_{q+j}-x_{q-1}}}_{=: M_{q,j}} + s_q \underbrace{\frac{4}{3}\sqrt{x_{q+j}-x_{q-1}}(x_{q+j}-x_{q-1})}_{=: N_{q,j}} \\
&= M_{q,j} + s_q N_{q,j} . \tag{A.15}
\end{aligned}$$

Damit können wir Q_q wie folgt darstellen:

$$\begin{aligned}
 Q_q &= \sum_{j=0}^r Q_{q,j} \\
 &= \sum_{j=0}^r (f_{q+j} - S_{q,j})^2 \\
 &= \sum_{j=0}^r (f_{q+j} - D_{q,j} - M_{q,j} - s_q N_{q,j})^2.
 \end{aligned} \tag{A.16}$$

Den gesuchten Profilwert erhalten wir durch die Minimierung von Q_q mit

$$\frac{d}{ds_q} Q_q = \sum_{j=0}^r -2N_{q,j}(f_{q+j} - D_{q,j} - M_{q,j} - s_q N_{q,j}) = 0 \tag{A.17}$$

zu

$$s_q = \frac{\sum_{j=0}^r N_{q,j}(f_{q+j} - D_{q,j} - M_{q,j})}{\sum_{j=0}^r N_{q,j}^2}. \tag{A.18}$$

Die Auswertung der zweiten Ableitung

$$\frac{d^2}{ds_q^2} Q_q = \sum_{j=0}^r 2N_{q,j}^2 > 0 \tag{A.19}$$

zeigt, dass wir tatsächlich Q_q minimiert haben und dadurch den aktuellen Profilwert $g_q(\xi)$ bzw. die Steigung s_q der Interpolationsgeraden im entsprechenden Intervall erhalten haben.

Literaturverzeichnis

- [AAA⁺00] Afonso, C.; Alard, C.; Albert, J. N.; Andersen, J.; Ansari, R.; Aubourg, É.; Bareyre, P.; Bauer, F.; Beaulieu, J. P.; Bouquet, A.; Char, S.; Charlot, X.; Couchot, F.; Coutures, C.; Derue, F.; Ferlet, R.; Glicenstein, J. F.; Goldman, B.; Gould, A.; Graff, D.; Gros, M.; Haissinski, J.; Hamilton, J. C.; Hardin, D.; de Kat, J.; Kim, A.; Lasserre, T.; Lesquoy, É.; Loup, C.; Magneville, C.; Marquette, J. B.; Maurice, É.; Milsztajn, A.; Moniez, M.; Palanque-Delabrouille, N.; Perdureau, O.; Prévot, L.; Regnault, N.; Rich, J.; Spiro, M.; Vidal-Madjar, A.; Vigroux, L.; Zylberajch, S.; Alcock, C.; Allsman, R. A.; Alves, D.; Axelrod, T. S.; Becker, A. C.; Cook, K. H.; Drake, A. J.; Freeman, K. C.; Griest, K.; King, L. J.; Lehner, M. J.; Marshall, S. L.; Minniti, D.; Peterson, B. A.; Pratt, M. R.; Quinn, P. J.; Rodgers, A. W.; Stetson, P. B.; Stubbs, C. W.; Sutherland, W.; Tomaney, A.; Vandehei, T.; Rhie, S. H.; Bennett, D. P.; Fragile, P. C.; Johnson, B. R.; Quinn, J.; Udalski, A.; Kubiak, M.; Szymański, M.; Pietrzyński, G.; Woźniak, P.; Zeburń, K.; Albrow, M. D.; Caldwell, J. A. R.; DePoy, D. L.; Dominik, M.; Gaudi, B. S.; Greenhill, J.; Hill, K.; Kane, S.; Martin, R.; Menzies, J.; Naber, R. M.; Pogge, R. W.; Pollard, K. R.; Sackett, P. D.; Sahu, K. C.; Vermaak, P.; Watson, R.; Williams, A.: Combined analysis of the binary lens caustic-crossing event MACHO 98-SMC-1, *The Astrophysical Journal* 532, (2000) S. 340–352
- [AH48] Alpher, R. A.; Herman, R. C.: The Evolution of the Expanding Universe, *Nature* 162, (1948) S. 774–775
- [AK99] Agol, E.; Krolik, J.: Imaging a quasar accretion disk with microlensing, *The Astrophysical Journal* 524, (1999) S. 49–64
- [AMM⁺02] Alcalde, D.; Mediavilla, E.; Moreau, O.; Muñoz, J. A.; Libbrecht, C.; Goicoechea, L. J.; Surdej, J.; Puga, E.; De Rop, Y.; Barrena, R.; Gil-Merino, R.; McLeod, B. A.; Motta, V.; Oscoz, A.; Serra-Ricart, M.: QSO 2237+0305 VR light curves from gravitational lenses international time project optical monitoring, *The Astrophysical Journal* 572, (2002) S. 729–734
- [Ant93] Antonucci, R.: Unified models for active galactic nuclei and quasars, *Annual Review of Astronomy and Astrophysics* 31, (1993) S. 473–521
- [BBS85] Beck, J. V.; Blackwell, B.; St. Clair, JR., C. R.: *Inverse Heat Conduction*, Wiley-Interscience (1985)

- [Bec62] Beck, J. V.: *Calculation of Surface Heat Flux from an Internal Temperature History*, ASME Paper 62-HT-46 (1962)
- [Bec01] Becker, T.: *3D-Spektroskopie hintergrundkontaminierter Einzelobjekte in der lokalen Gruppe*, Dissertation, Universität Potsdam (2001)
- [BF96] Babu, G. J.; Feigelson, E. D.: *Astrostatistics*, Chapman & Hall (1996)
- [BHB00] Brühl, M.; Hanke-Bourgeois, M.: Kann Mathematik der elektrischen Impedanztomographie zum Durchbruch verhelfen?, *Forschungsmagazin der Johannes Gutenberg-Universität Mainz* 16, (2000) S. 32–40
- [BS01] Bartelmann, M.; Schneider, P.: Weak Gravitational Lensing, *Physics Reports* 340, (2001) S. 291–472
- [BSMM97] Bronstein, I.; Semendjajew, K.; Musiol, G.; Mühlig, H.: *Taschenbuch der Mathematik*, 3. Auflage, Verlag Harri Deutsch (1997)
- [CAS] <http://cfa-www.harvard.edu/castles/>
- [CBB⁺04] Cassan, A.; Beaulieu, J. P.; Brilliant, S.; Coutures, C.; Dominik, M.; Donatowicz, J.; Jørgensen, U. G.; Kubas, D.; Albrow, M. D.; Caldwell, J. A. R.; Fouqué, P.; Greenhill, J.; Hill, K.; Horne, K.; Kane, S.; Martin, R.; Menzies, J.; Pollard, K. R.; Sahu, K. C.; Vinter, C.; Wambsganss, J.; Watson, R.; Williams, A.; Fendt, C.; Hauschildt, P.; Heinmüller, J.; Marquette, J. B.; Thurl, C.: Probing the atmosphere of the bulge G5III star OGLE-2002-BUL-069 by analysis of microlensed H α line, *astro-ph/0401071*
- [Chw24] Chwolson, O.: Über eine mögliche Form fiktiver Doppelsterne, *Astronomische Nachrichten* 221, (1924) S. 329
- [Cla00] Claret, A.: A new non-linear limb-darkening law for LTE stellar atmosphere models: Calculations for $-5 \leq \log[M/H] \leq +1$, $2000 \text{ K} \leq T_{\text{eff}} \leq 50000 \text{ K}$ at several surface gravities, *Astronomy and Astrophysics* 363, (2000) S. 1081–1190
- [CR84] Chang, K.; Refsdal, S.: Star disturbances in gravitational lens galaxies, *Astronomy and Astrophysics* 132, (1984) S. 168–178
- [DdMP03] Demianski, M.; de Ritis, R.; Marino, A. A.; Piedipalumbo, E.: Approximate angular diameter distance in a locally inhomogeneous universe with nonzero cosmological constant, *Astronomy and Astrophysics* 411, (2003) S. 33–40
- [DPRW65] Dicke, R. H.; Peebles, P. J. E.; Roll, P. G.; Wilkinson, D. T.: Cosmic black-body radiation, *The Astrophysical Journal* 142, (1965) S. 414–419
- [DR73] Dyer, C. C.; Roeder, R. C.: Distance-redshift relations for universes with some intergalactic medium, *The Astrophysical Journal Letters* 180, (1973) S. 31–34

- [Ein05] Einstein, A.: Zur Elektrodynamik bewegter Körper, *Annalen der Physik* 17, (1905) S. 891–921
- [Ein16] Einstein, A.: Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie, *Annalen der Physik* 49, (1916) S. 769–823
- [Ein36] Einstein, A.: Lens-like action of a star by the deviation of light in the gravitational field, *Science* 84, (1936) S. 506–507
- [Eld77] Eldén, L.: Algorithms for the regularization of ill-conditioned least squares problems, *BIT* 17, (1977) S. 134–145
- [FKR92] Frank, J.; King, A.; Raine, D.: *Accretion Power in Astrophysics*, 2. Auflage, Cambridge University Press (1992)
- [FMG⁺01] Freedman, W. L.; Madore, B. F.; Gibson, B. K.; Ferrarese, L.; Kelson, D. D.; Sakai, S.; Mould, J. R.; Kennicutt, R. C.; Ford, H. C.; Graham, J. A.; Huchra, J. P.; Hughes, S. M. G.; Illingworth, G. D.; Macri, L. M.; Stetson, P. B.: Final results from the hubble space telescope key project to measure the hubble constant, *The Astrophysical Journal* 553, (2001) S. 47–72
- [Gam48] Gamov, G.: The evolution of the universe, *Nature* 162, (1948) S. 680–682
- [GAMM03] Goicoechea, L. J.; Alcalde, D.; Mediavilla, E.; Muñoz, J. A.: Determination of the properties of the central engine in microlensed QSOs, *Astronomy and Astrophysics* 397, (2003) S. 517–525
- [GKR88] Grieger, B.; Kayser, R.; Refsdal, S.: Gravitational micro-lensing as a clue to quasar structure, *Astronomy and Astrophysics* 194, (1988) S. 54–64
- [GKS91] Grieger, B.; Kayser, R.; Schramm, T.: The deconvolution of the quasar structure from microlensing light curves, *Astronomy and Astrophysics* 252, (1991) S. 508–512
- [GM03] Gil-Merino, R.: *Cosmology through Gravitational Lenses*, Dissertation, Universität Potsdam (2003)
- [Gro93] Groetsch, C.: *Inverse Problems in the Mathematical Science*, Vieweg (1993)
- [GV91] Gorenflo, R.; Vessela, S.: *Abel Integral Equations : Analysis and Applications*, Lecture Notes in Mathematics 1461, Springer (1991)
- [GVL96] Golub, G. H.; Van Loan, C. F.: *Matrix Computations*, 3. Auflage, John Hopkins University Press (1996)
- [Hac95] Hackbusch, W.: *Integral Equations : Theory and Numerical Treatment*, Birkhäuser (1995)
- [Had15] Hadamard, J.: *Four Lectures on Mathematics*, Columbia University Press (1915)

- [Han92] Hansen, P.: Numerical tools for analysis and solution of Fredholm integral equations of the first kind, *Inverse Problems* 8, (1992) S. 849–872
- [Han97] Hansen, P.: *Rank-Deficient and Discrete Ill-Posed Problems : Numerical Aspects of Linear Inversion*, SIAM (1997)
- [Han00] Hanke, M.: Iterative regularization techniques in image restoration, in Colton, D.; Engl, H. W.; Louis, A. K.; McLaughlin, J. R.; Rundell, W. (Herausgeber) *Surveys on Solution Methods for Inverse Problems*, S. 35–52, Springer (2000)
- [Han01] Hansen, P.: The L-curve and its use in the numerical treatment of inverse problems, in Johnston, P. (Herausgeber) *Computational Inverse Problems in Electrocardiography*, S. 119–142, WIT Press (2001)
- [HO93] Hansen, P. C.; O’Leary, D. P.: The use of the L-curve in the regularization of discrete ill-posed problems, *SIAM Journal on Scientific Computing* 14, (1993) S. 1487 – 1503
- [HS01] Hanke, M.; Scherzer, O.: Numerical differentiation as an example for inverse problems (2001)
- [Hub29] Hubble, E.: A relation between distance and radial velocity among extragalactic nebulae, *Proceedings of the National Academy of Science* 15, (1929) S. 168–173
- [IOP⁺03] Inada, N.; Oguri, M.; Pindor, B.; Hennawi, J. F.; Chiu, K.; Zheng, W.; Ichikawa, S.; Gregg, M. D.; Becker, R. H.; Suto, Y.; Strauss, M. A.; Turner, E. L.; Keeton, C. R.; Annis, J.; Castander, F. J.; Eisenstein, D. J.; Frieman, J. A.; Fukugita, M.; Gunn, J. E.; Johnston, D. E.; Kent, S. M.; Nichol, R. C.; Richards, G. T.; Rix, H.; Sheldon, E. S.; Bahcall, N. A.; Brinkmann, J.; Ivezić, Ž.; Lamb, D. Q.; McKay, T. A.; Schneider, D. P.; York, D. G.: A gravitationally lensed quasar with quadruple images separated by 14.62 arcseconds, *Nature* 426, (2003) S. 810–812
- [KB99] Koratkar, A.; Blaes, O.: The ultraviolet and optical emission in active galactic nuclei: The status of accretion disks, *Publications of the Astronomical Society of the Pacific* 111, (1999) S. 1–30
- [Kee01] Keeton, C. R.: A catalog of mass models for gravitational lensing, *astro-ph/0102341*
- [KHS97] Kayser, R.; Helbig, P.; Schramm, T.: A general and practical method for calculating cosmological distances, *Astronomy and Astrophysics* 318, (1997) S. 680–686
- [Koc03] Kochanek, C. S.: Quantitative interpretation of quasar microlensing light curves, *astro-ph/0307422*
- [KRS86] Kayser, R.; Refsdal, S.; Stabell, R.: Astrophysical applications of gravitational micro-lensing, *Astronomy and Astrophysics* 166, (1986) S. 36–52

- [KSN⁺00] Kaspi, S.; Smith, P. S.; Netzer, H.; Maoz, D.; Jannuzi, B. T.; Giveon, U.: Reverberation measurements for 17 quasars and the size-mass-luminosity relations in active galactic nuclei, *The Astrophysical Journal* 533, (2000) S. 631–649
- [Kub04] Kubas, D. et al.: in Vorbereitung (2004)
- [KW93] Kundic, T.; Wambsganss, J.: Gravitational microlensing - the effect of random motion of individual stars in the lensing galaxy, *The Astrophysical Journal* 404, (1993) S. 455–459
- [Lam95] Lamm, P. K.: Future-sequential regularization methods for ill-posed volterra equations: applications to the inverse heat conduction problem, *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 195, (1995) S. 469–494
- [Lam96] Lamm, P. K.: Approximation of ill-posed Volterra problems via predictor-corrector regularization methods, *SIAM Journal on Applied Mathematics* 56, (1996) S. 524–541
- [Lam97] Lamm, P. K.: Regularized inversion of finitely smoothing volterra operator: predictor-corrector regularization methods, *Inverse Problems* 13, (1997) S. 375–402
- [Lam00] Lamm, P. K.: A survey of regularization methods for first-kind volterra equations, in Colton, D.; Engl, H. W.; Louis, A.; McLaughlin, J. R.; Rundell, W. (Herausgeber) *Surveys on Solution Methods for Inverse Problems*, Springer (2000)
- [Lam03] Lamm, P. K.: Variable-smoothing local regularization methods for first-kind integral equations, *Inverse Problems* 19, (2003) S. 195–216
- [LFK⁺00] Lehár, J.; Falco, E. E.; Kochanek, C. S.; McLeod, B. A.; Muñoz, J. A.; Impey, C. D.; Rix, H.-W.; Keeton, C. R.; Peng, C. Y.: Hubble Space Telescope observations of 10 two-image gravitational lenses, *The Astrophysical Journal* 536, (2000) S. 584–605
- [LIHF98] Lewis, G. F.; Irwin, M. J.; Hewett, P. C.; Foltz, C. B.: Microlensing-induced spectral variability in Q 2237+0305, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 295, (1998) S. 573–586
- [Lon98] Longair, M. S.: *Galaxy Formation*, Springer (1998)
- [Lou89] Louis, A. K.: *Inverse und schlecht gestellte Probleme*, Teubner (1989)
- [LS01] Lamm, P. K.; Scofield, T. L.: Local regularization methods for the stabilization of linear ill-posed equations of Volterra type, *Numerical Functional Analysis and Optimization* 22, (2001) S. 913–940
- [MAT] <http://www.mathworks.org>

- [MCE⁺90] Mather, J. C.; Cheng, E. S.; Eplee, R. E.; Isaacman, R. B.; Meyer, S. S.; Shafer, R. A.; Weiss, R.; Wright, E. L.; Bennett, C. L.; Boggess, N. W.; Dwek, E.; Gulkis, S.; Hauser, M. G.; Janssen, M.; Kelsall, T.; Lubin, P. M.; Moseley, S. H.; Murdock, T. L.; Silverberg, R. F.; Smoot, G. F.; Wilkinson, D. T.: A preliminary measurement of the cosmic microwave background spectrum by the Cosmic Background Explorer (COBE) satellite, *The Astrophysical Journal Letters* 354, (1990) S. 37–40
- [McK41] McKellar, A.: The problems of possible molecular identification for interstellar lines, *Publications of the Astronomical Society of the Pacific* 53, (1941) S. 233–235
- [MF82] MacAlpine, G. M.; Feldman, F. R.: Discovery and spectrophotometry of high-redshift quasars, *The Astrophysical Journal* 261, (1982) S. 412–421
- [Mor66] Morozov, V. A.: On the solution of functional equations by the method of regularization, *Soviet Mathematics Doklady* 167, (1966) S. 414–617
- [Mor91] Morton, D. C.: Atomic data for resonance absorption lines. I - wavelengths longward of the Lyman limit, *Astrophysical Journal Supplement* 77, (1991) S. 119–202
- [MY99] Mineshige, S.; Yonehara, A.: Gravitational Microlens Mapping of a Quasar Accretion Disk, *Publications of the Astronomical Society of Japan* 51, (1999) S. 497–504
- [NMQ98] Narayan, R.; Mahadevan, R.; Quataert, E.: Advection-dominated accretion around black holes, in *Theory of Black Hole Accretion Disks*, S. 148–182 (1998)
- [NN86] Narayan, R.; Nityananda, R.: Maximum entropy image restoration in astronomy, *Annual Review of Astronomy and Astrophysics* 24, (1986) S. 127–170
- [NP97] Netzer, H.; Peterson, B. M.: Reverberation Mapping and the Physics of Active Galactic Nuclei, in *ASSL Vol. 218: Astronomical Time Series* (1997)
- [OCT] <http://www.octave.org>
- [Pet97] Peterson, B. M.: *An Introduction to Active Galactic Nuclei*, Cambridge University Press (1997)
- [Phi61] Phillips, D. L.: A technique for the numerical solution of certain integral equations of the first kind, *Journal of the ACM* 9, (1961) S. 84–97
- [PLW01] Petters, A. O.; Levine, H.; Wambsganss, J.: *Singularity Theory and Gravitational Lensing*, Birkhäuser (2001)
- [PTVF92] Press, W.; Teukolsky, S.; Vetterling, W.; Flannery, B.: *Numerical Recipes in C : The Art of Scientific Programming*, Cambridge University Press (1992)

- [PW65] Penzias, A. A.; Wilson, R. W.: A measurement of excess antenna temperature at 4080 Mc/s, *The Astrophysical Journal* 142, (1965) S. 419–421
- [Ref64] Refsdal, S.: On the possibility of determining hubble's parameter and the masses of galaxies from the gravitational lens effect, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 128, (1964) S. 307–310
- [RFC⁺98] Riess, A. G.; Filippenko, A. V.; Challis, P.; Clocchiatti, A.; Diercks, A.; Garnavich, P. M.; Gilliland, R. L.; Hogan, C. J.; Jha, S.; Kirshner, R. P.; Leibundgut, B.; Phillips, M. M.; Reiss, D.; Schmidt, B. P.; Schommer, R. A.; Smith, R. C.; Spyromilio, J.; Stubbs, C.; Suntzeff, N. B.; Tonry, J.: Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant, *The Astronomical Journal* 116, (1998) S. 1009–1038
- [Rie03] Rieder, A.: *Keine Probleme mit Inversen Problemen : Eine Einführung in ihre stabile Lösung*, Vieweg (2003)
- [SAB⁺] Sackett, P. D.; Albrow, M. D.; Beaulieu, J.; Caldwell, J. A. R.; Coutures, C.; Dominik, M.; Greenhill, J.; Hill, K.; Horne, K.; Jorgensen, U.; Kane, S.; Kubas, D.; Martin, R.; Menzies, J. W.; Pollard, K. R.; Sahu, K. C.; Wambsganss, J.; Watson, R.; Williams, A.: PLANET II: A microlensing and transit search for extrasolar planets, in *Bioastronomy 2002: Life Among the Stars*, IAU Symposium 213
- [Sch01] Schmoll, J.: *3D-Spektrofotometrie extragalaktischer Emissionslinienobjekte*, Dissertation, Universität Potsdam (2001)
- [SEF92] Schneider, P.; Ehlers, J.; Falco, E. E.: *Gravitational Lenses*, Springer (1992)
- [SGA⁺02] Shalyapin, V. N.; Goicoechea, L. J.; Alcalde, D.; Mediavilla, E.; Muñoz, J. A.; Gil-Merino, R.: The nature and size of the optical continuum source in QSO 2237+0305, *The Astrophysical Journal* 579, (2002) S. 127–135
- [SMS⁺88] Surdej, J.; Magain, P.; Swings, J.-P.; Borgeest, U.; Courvoisier, T. J.-L.; Kayer, R.; Kellermann, K. I.; Kuhr, H.; Refsdal, S.: Observations of the new gravitational lens system UM 673 = Q 0142-100, *Astronomy and Astrophysics* 198, (1988) S. 49–60
- [SNB⁺01] Sinachopoulos, D.; Nakos, T.; Boumis, P.; van Dessel, E.; Burger, M.; Rodríguez-Gil, P.: Photometric variability of the gravitational lens 0142-100 (UM 673), *The Astronomical Journal* 122, (2001) S. 1692–1696
- [Sol04] Soldner, J.: Über die Ablenkung eines Lichtstrahls von seiner geradlinigen Bewegung durch die Attraktion eines Weltkörpers, an welchem er nahe vorbeigeht, *Berliner Astronomisches Jahrbuch* S. 161
- [Sra71] Sramek, R. A.: A measurement of the gravitational deflection of microwave radiation near the sun, 1970 october, *The Astrophysical Journal Letters* 167, (1971) S. 55–60

- [SS73] Shakura, N. I.; Sunyaev, R. A.: Black holes in binary systems: Observational appearance, *Astronomy and Astrophysics* 24, (1973) S. 337–355
- [SSM⁺87] Surdej, J.; Swings, J.-P.; Magain, P.; Courvoisier, T. J.-L.; Borgeest, U.: A new case of gravitational lensing, *Nature* 329, (1987) S. 695–696
- [SSS⁺92] Smette, A.; Surdej, J.; Shaver, P. A.; Foltz, C. B.; Chaffee, F. H.; Weymann, R. J.; Williams, R. E.; Magain, P.: A spectroscopic study of UM 673 A and B - on the size of Lyman-alpha clouds, *The Astrophysical Journal* 389, (1992) S. 39–62
- [Sto60] Stolz, G.: Numerical solutions to an inverse problem of heat conduction for simple shapes, *ASME Journal of Heat Transfer* 82, (1960) S. 20–26
- [SVP⁺03] Spergel, D. N.; Verde, L.; Peiris, H. V.; Komatsu, E.; Nolta, M. R.; Bennett, C. L.; Halpern, M.; Hinshaw, G.; Jarosik, N.; Kogut, A.; Limon, M.; Meyer, S. S.; Page, L.; Tucker, G. S.; Weiland, J. L.; Wollack, E.; Wright, E. L.: First-year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) observations: Determination of cosmological parameters, *Astrophysical Journal Supplement* 148, (2003) S. 175–194
- [SW90] Schneider, P.; Wambsganss, J.: Are the broad emission lines of quasars affected by gravitational microlensing?, *Astronomy and Astrophysics* 237, (1990) S. 42–53
- [Tih63] Tihonov, A. N.: Solution of incorrectly formulated problems and the regularization method, *Soviet Mathematics Doklady* 4, (1963) S. 1035–1038
- [TYM01] Takahashi, R.; Yonehara, A.; Mineshige, S.: X-ray microlensing of bright quasars, *Publications of the Astronomical Society of Japan* 53, (2001) S. 387–393
- [Ueb97] Ueberhuber, C. W.: *Numerical Computations 1 : Methods, Software, and Analysis*, Springer (1997)
- [UKS97] Udalski, A.; Kubiak, M.; Szymanski, M.: Optical gravitational lensing experiment. OGLE-2 – the second phase of the OGLE project, *Acta Astronomica* 47, (1997) S. 319–344
- [UP95] Urry, C. M.; Padovani, P.: Unified schemes for radio-loud active galactic nuclei, *Publications of the Astronomical Society of the Pacific* 107, (1995) S. 803–845
- [Vog02] Vogel, C.: *Computational Methods for Inverse Problems*, SIAM (2002)
- [Wah77] Wahba, G.: Practical approximate solutions to linear operator equations when the data are noisy, *SIAM Journal on Numerical Analysis* 14, (1977) S. 651–667
- [Wah90] Wahba, G.: *Spline Models for Observational Data*, CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics 59, SIAM (1990)

- [Wam98] Wambsganss, J.: Gravitational lensing in astronomy, *Living Reviews in Relativity* 1, Online article: <http://www.livingreviews.org/lrr-1998-12>
- [Wam99] Wambsganss, J.: Gravitational lensing: numerical simulations with a hierarchical tree code, *Journal of Computational and Applied Mathematics* 109, (1999) S. 353–372
- [WBC⁺03] Wisotzki, L.; Becker, T.; Christensen, L.; Helms, A.; Jahnke, K.; Kelz, A.; Roth, M. M.; Sanchez, S. F.: Integral-field spectrophotometry of the quadruple QSO HE 0435-1223: Evidence for microlensing, *Astronomy and Astrophysics* 408, (2003) S. 455–463
- [WCB⁺00] Wisotzki, L.; Christlieb, N.; Bade, N.; Beckmann, V.; Köhler, T.; Vanelle, C.; Reimers, D.: The Hamburg/ESO survey for bright QSOs. III. A large flux-limited sample of QSOs, *Astronomy and Astrophysics* 358, (2000) S. 77–87
- [WCW79] Walsh, D.; Carswell, R. F.; Weymann, R. J.: 0957 + 561 A, B - Twin quasi-stellar objects or gravitational lens, *Nature* 279, (1979) S. 381–384
- [Wil99] Wilson, R. N.: *Reflecting Telescope Optics II*, Springer (1999)
- [Win91] Wing, G. M.: *A Primer on Integral Equations of the First Kind : The Problem of Deconvolution and Unfolding*, SIAM (1991)
- [Wit90] Witt, H. J.: Investigation of high amplification events in light curves of gravitationally lensed quasars, *Astronomy and Astrophysics* 236, (1990) S. 311–322
- [Wit91] Witt, H.-J.: *Der Mikrogravitationslinseneffekt – Theorie und Anwendungen*, Dissertation, Universität Hamburg (1991)
- [WK95] Wambsganss, J.; Kundic, T.: Gravitational microlensing by random motion of stars: Analysis of light curves, *The Astrophysical Journal* 450, (1995) S. 19–26
- [WKKR93] Wisotzki, L.; Koehler, T.; Kayser, R.; Reimers, D.: The new double QSO HE 1104-1805: Gravitational lens with microlensing or binary quasar?, *Astronomy and Astrophysics* 278, (1993) S. 15–18
- [WP91] Wambsganss, J.; Paczynski, B.: Expected color variations of the gravitationally microlensed QSO 2237+0305, *The Astronomical Journal* 102, (1991) S. 864–868
- [WP94] Wambsganss, J.; Paczynski, B.: Parameter degeneracy in models of the quadruple lens system Q2237+0305, *The Astronomical Journal* 108, (1994) S. 1156–1162
- [WSB⁺02] Wisotzki, L.; Schechter, P. L.; Bradt, H. V.; Heinmüller, J.; Reimers, D.: HE 0435-1223: A wide separation quadruple QSO and gravitational lens, *Astronomy and Astrophysics* 395, (2002) S. 17–23

- [WUS⁺00] Woźniak, P. R.; Udalski, A.; Szymański, M.; Kubiak, M.; Pietrzyński, G.; Soszyński, I.; Żebruń, K.: The optical gravitational lensing experiment: A hunt for caustic crossings in QSO 2237+0305, *The Astrophysical Journal Letters* 540, (2000) S. 65–67
- [WWLG03] Wucknitz, O.; Wisotzki, L.; Lopez, S.; Gregg, M. D.: Disentangling microlensing and differential extinction in the double QSO HE 0512-3329, *Astronomy and Astrophysics* 405, (2003) S. 445–454
- [WWT99] Wyithe, J. S. B.; Webster, R. L.; Turner, E. L.: A measurement of the transverse velocity of Q2237+0305, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 309, (1999) S. 261–272
- [YR99] Yao, Z. S.; Roberts, R. G.: A practical regularization for seismic tomography, *Geophysical Journal International* 138, (1999) S. 293–299
- [YS99] Yoshikawa, K.; Suto, Y.: Reconstructing the radial profiles of gas density and temperature in clusters of galaxies from high-resolution x-ray and radio observations, *The Astrophysical Journal* 513, (1999) S. 549–554
- [Zwi37a] Zwicky, F.: Nebulae as gravitational lenses, *Physical Review* 51, (1937) S. 290
- [Zwi37b] Zwicky, F.: On the probability of detecting nebulae which act as gravitational lenses, *Physical Review* 51, (1937) S. 679–679

Danksagung

Zuallererst möchte ich mich bei Joachim Wambsganß bedanken, der es mir ermöglichte, diese Arbeit bei ihm zu beginnen. Dadurch lernte ich nicht nur das faszinierende Gebiet der Gravitationslinsen näher kennen, sondern auch die ebenso interessanten schlecht gestellten Probleme.

Bei Lutz Wisotzki bedanke ich mich für die Zusammenarbeit bei der Analyse der PMAS-Daten und die von ihm dafür zur Verfügung gestellten MIDAS-Routinen, ohne die ich wahrscheinlich heute noch vor den nicht extrahierten Spektren sitzen würde.

Mein Dank gilt allen anderen Mitarbeitern für die immer angenehme Atmosphäre, insbesondere Janine Heinmüller, Daniel Kubas und Olaf Wucknitz, die die mühevollen Aufgabe übernahmen, nach den vielen Fehlern in dieser Arbeit zu suchen. Bei Rodrigo Gil-Merino bedanke ich mich für die gute Zusammenarbeit und bei Götz Gräfer für die mehr oder weniger sinnvollen Diskussionen über alle möglichen Themen.

Vor allem danken möchte ich Andrea Brockhaus, die mir bei den vielen bürokratischen Problemen immer hilfreich war.

Bei meiner Familie bedanke ich mich für ihre Unterstützung während all der Jahre. Für das letzte Korrekturlesen danke ich meiner Schwester Barbara.

Und schließlich danke ich meiner Tochter Käthe, die sich freuen wird, dass ich jetzt wieder mehr Zeit für sie habe.