



Universität Potsdam

Mathias Brehe

Ein Nachfragesystem für dynamische
Mikrosimulationsmodelle

Universitätsverlag Potsdam

Mathias Brehe

**Ein Nachfragesystem für dynamische
Mikrosimulationsmodelle**

Universitätsverlag Potsdam 2007

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de/> abrufbar.

© Universitätsverlag Potsdam, 2007

Universitätsverlag Potsdam, Am Neuen Palais 10, 14469 Potsdam
Fon +49 (0) 331 977 4517 / Fax 4625
e-mail: ubpub@uni-potsdam.de
<http://info.ub.uni-potsdam.de/verlag.htm>

ISBN 978-3-939469-83-4

URL <http://pub.ub.uni-potsdam.de/volltexte/2007/1322/>
URN <urn:nbn:de:kobv:517-opus-13225>
[<http://nbn-resolving.de/urn:nbn:de:kobv:517-opus-13225>]

Druck: docupoint GmbH Magdeburg

Dieses Manuskript ist urheberrechtlich geschützt.

Dissertation

Ein Nachfragesystem für dynamische Mikrosimulationsmodelle

zur Erlangung des akademischen Grades
Doktor der Wirtschafts- und Sozialwissenschaften
(Doctor rerum politicarum)

eingereicht an der
Wirtschafts- und Sozialwissenschaftlichen Fakultät
der Universität Potsdam

von
Mathias Brehe

Dekan: Prof. Dr. Erhard Stölting

Gutachter:

1. Prof. Dr. Hans-Georg Petersen
2. Prof. Dr. Gert Kneis

Potsdam, 2006

Vorwort

Die vorliegende Arbeit wurde im November 2006 von der Wirtschafts- und Sozialwissenschaftlichen Fakultät der Universität Potsdam als Dissertation angenommen. Sie entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Lehrstuhl Finanzwissenschaft. Prof. Dr. *Hans-Georg Petersen* hat als Lehrstuhlinhaber mit seinen Arbeiten im Bereich der Mikrosimulation die Wahl meines Themas entscheidend beeinflusst. Als meinem Doktorvater gilt ihm der erste Dank. Das Zweitgutachten wurde von Prof. Dr. *Gert Kneis* erstellt. Die fachlichen Hinweise von ihm haben maßgeblich zum Gelingen der Arbeit beigetragen. Dafür möchte ich ihm an dieser Stelle herzlich danken. *Hans-Georg Petersen* und *Gert Kneis* waren und sind für mich zudem mehr als nur akademische Lehrer. In ihnen sehe ich vielmehr Vorbilder, denen es nicht nur fachlich, sondern auch menschlich nachzustreben gilt.

Meiner lieben Lebensgefährtin *Anja Stottmeister* danke ich für das Verständnis und die Geduld, die mir in Zeiten geringen Fortschritts und damit verbundener Unzufriedenheit entgegen gebracht wurden. Sie hat zudem die Arbeit mehrfach Korrektur gelesen, was bei diesem doch recht technischem Inhalt kaum hinreichend zu würdigen ist.

Besonderer Dank gilt meiner Familie. Meine Eltern *Lutz* und *Christa* und meine Schwestern *Elisabeth* und *Dorothea* haben mich in meinem Vorhaben immer unterstützt. Ich hoffe, dass ich sie mit dem erfolgreichen Abschluss meiner Promotion erfreuen kann.

Des Weiteren danke ich all meinen Freunden, Bekannten und Kollegen. Die Zeit der Promotion wäre ohne sie nur halb so schön gewesen, denn sie waren zugleich Antrieb, Ruhepol und Ablenkung. Eine namentliche Erwähnung ist immer mit der Schwierigkeit einer notwendigen Auswahl verbunden. Ich möchte dennoch nicht darauf verzichten, da mir die Kosten der Veröffentlichung dieser Arbeit von Freunden zum Geschenk gemacht wurden. Dafür danke ich insbesondere: *Ivo* und *Bianka Bäcker*, *Stephan Goericke*, *Katja Lötze*, *Jana Noack*, *Ralf Schwarzer*, *Dagmar Dederky*, *Mario Littmann*, *Katharina Bernhardt*, *Ol Barsch*, *Susanne Rohn*, *Bert Helwing*, *Judith Rönnefahrt*, *Arnim Paschek*, *Inga Wagner*, *Hendrik Hecht*, *Constanze Zemlin*, *Daniel* und *Marina Zahl*.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Mikrosimulation	5
2.1	Das Instrument Mikrosimulation	5
2.1.1	Grundkonzept der Mikrosimulation	5
2.1.2	Möglichkeiten der Mikrosimulation	8
2.1.3	Grenzen der Mikrosimulation	9
2.2	Probleme und Lösungsansätze	12
2.2.1	Erstellung des Datensatzes	12
2.2.2	Modellierung der Anpassungsreaktionen	18
2.2.3	Nachfragesysteme in der Mikrosimulation	20
2.3	Mikrodaten für Nachfragesysteme	27
2.3.1	Anforderungen und allgemeiner Überblick	27
2.3.2	Erhebungsmethode der EVS	32
2.3.3	Daten der EVS	39
3	Theorie der Güternachfrage	47
3.1	Präferenzen und ihre Abbildung	47
3.1.1	Rationale Präferenzordnung	47
3.1.2	Die Abbildung von Präferenzordnungen	48
3.1.3	Die Budgetbeschränkung	50
3.2	Modelle der Haushaltsentscheidung	51
3.2.1	Nutzenmaximierungsmodell	51
3.2.2	Ausgabenminimierungsmodell	53
3.2.3	Nachfragefunktionen	54
3.2.4	Indirekte Nutzenfunktion und Ausgabenfunktion	57
3.3	Wechselbeziehungen und Implikationen	58
3.3.1	Verknüpfung von $\mathcal{N}(p, M)$ und $\mathcal{A}(p, \bar{U})$	59
3.3.2	Bestimmung von $x^{\mathcal{M}}(p, M)$ mittels $\mathcal{N}(p, M)$	59
3.3.3	Bestimmung von $x^{\mathcal{H}}(p, \bar{U})$ mittels $\mathcal{A}(p, \bar{U})$	60
3.3.4	Verkettung von $x^{\mathcal{M}}(p, M)$ und $x^{\mathcal{H}}(p, \bar{U})$	60
3.3.5	Lagrangemultiplikatoren	66

4	Nachfragesysteme	67
4.1	Separabilität und two-stage budgeting	67
4.1.1	Güteraggregation nach <i>Leontief</i> und <i>Hicks</i>	68
4.1.2	Two-stage budgeting	71
4.1.3	Homothetische vs. additive Separabilität	73
4.1.4	Two-stage budgeting unter der Annahme additiver Separabilität	80
4.1.5	Two-stage budgeting unter der Annahme homothetischer Separabilität	89
4.1.6	Two-stage budgeting unter der Annahme additiver Separabilität mit homothetischen Subnutzenfunktionen	96
4.2	Möglichkeiten der Spezifizierung	100
4.2.1	<i>Gormansche</i> Nachfragesysteme vollen Ranges	102
4.2.2	Rang-1-Nachfragesysteme	102
4.2.3	Rang-2-Nachfragesysteme	104
4.2.4	Rang-3-Nachfragesysteme	106
4.2.5	Theoretische Plausibilität von Rang-3-Systemen	109
4.2.6	Rang 3 als Maximum: ein Beispiel	110
5	Ausgewählte funktionale Formen	113
5.1	Das proportionale Ausgabensystem PES	114
5.1.1	Aufbau eines PES	114
5.1.2	Eigenschaften eines PES	115
5.1.3	Schätzung eines PES	118
5.2	Das lineare Ausgabensystem LES	119
5.2.1	Aufbau eines LES	120
5.2.2	Eigenschaften eines LES	121
5.2.3	Schätzung eines LES	125
5.3	Das quadratische Ausgabensystem QES	131
5.3.1	Aufbau eines QES	132
5.3.2	Eigenschaften eines QES	134
5.3.3	Schätzung eines QES	138
6	Nachfragesysteme für die Mikrosimulation	143
6.1	Demographische Spezifizierung	143
6.1.1	Varianten demographischer Spezifizierung	144
6.1.2	Demographische Spezifizierung und Querschnittsdaten	148
6.2	Das Problem des Nullkonsums	151
6.2.1	Ursachen und Auswirkungen des Nullkonsums	152
6.2.2	Handhabung des Problems Nullkonsum	157
6.3	Nachfragesysteme in der Anwendung	161
6.3.1	Querschnittsdaten und two-stage budgeting	162
6.3.2	Modifizierter two-stage budgeting Ansatz	167

6.3.3	Nachbildung der Nachfragereaktion	172
6.4	Schlussbetrachtung	180
6.4.1	Zusammenfassung	180
6.4.2	Schlussfolgerungen und Ausblick	190
A	Erläuterungen und Beweise	193
A.1	Abstimmungsparadoxon	193
A.2	Eigenschaften einer rationalen Präferenzordnung	194
A.2.1	Reflexivität	194
A.2.2	Symmetrie	194
A.3	Güterraum, Güterbündel und Güterpreise	194
A.4	Existenz einer Nutzenfunktion	195
A.5	Die Budgetmenge	196
A.5.1	Beweis der Konvexität	196
A.5.2	Herleitung der Orthogonaleigenschaft von p	196
A.6	Verletzung der Annahmen	197
A.7	Eigenschaft des Gradienten	198
A.8	Differentiationsreihenfolge	200
A.9	Spezielle Matrizen	201
A.9.1	Hesse-Matrix	201
A.9.2	Geränderte Hesse-Matrix	201
A.10	Definitheit einer symmetrischen Matrix	201
A.11	Krümmungseigenschaften	204
A.12	Envelope-Theorem	206
A.13	Bemerkung zur Dualität	207
A.14	Nachweis von $E3^N$ und $E1^A$	208
A.15	<i>Eulersche</i> Homogenitätsrelation	209
A.16	Engelkurven homothetischer Nutzenfunktionen	209
A.17	<i>Gorman Polar Form</i> Theorem	210
A.18	<i>Slutsky</i> -Symmetrie und <i>GGPF</i>	214
A.19	Nutzenfunktionsstruktur	216
A.19.1	Funktionsstruktur bei starker Separabilität	218
A.19.2	Funktionsstruktur bei schwacher Separabilität	220
A.20	Fundamentale Matrixgleichung	221
A.21	Krümmung von Subnutzenfunktionen	224
A.22	Lagrangemultiplikator und Konkavität	227
A.23	Grenzwert der allgemeinen Funktion $P(p)$ im PES	228
A.24	<i>Cobb-Douglas</i> - und <i>CES</i> -Nutzenfunktion	230

Abbildungsverzeichnis

2.1	Grundkonzept der Mikrosimulation	6
2.2	Verknüpfung der Merkmalsträger	14
2.3	Verknüpfung der Merkmale	16
2.4	Konsumentenrente	23
2.5	Erhebungsdesign EVS 1998 und 2003	38
2.6	Struktur der Konsumausgaben privater Haushalte	42
3.1	Budgetmenge	51
3.2	Bestimmung des optimalen Güterbündels	52
3.3	Wechselbeziehungen	58
3.4	$\mathcal{A}(p, \bar{U})$ konkav in p	63
4.1	Güteraggregation I	69
4.2	Güteraggregation II	70
4.3	Nutzenbaum	72
4.4	Lokale Präferenzenabbildung mit linearen Engelkurven	88
5.1	Ausgewählte Indifferenzkurven von CES-Nutzenfunktionen	117
5.2	Indifferenzkurven eines LES	122
5.3	Lineare Engelkurven eines LES	123
6.1	Demographische Verschiebung eines LES	149
6.2	Auswirkungen des zufälligen Nullkonsums	154
6.3	Dichtefunktion einer gestutzten und zensierten Verteilung	156
6.4	Nullkonsum im <i>Tobin</i> -Fall	160
6.5	Modellierte Nachfragereaktionen bei Einkommensänderung	175
A.1	Güterbündel	194
A.2	Existenz einer Nutzenfunktion	196
A.3	Verletzung der Forderung nach strenger Quasikonkavität	197
A.4	Wirkung einer Verletzung der Annahme A6	197
A.5	Bessermenge	198
A.6	Gradient und Tangentialebene	199
A.7	Richtungsvektor der Indifferenzkurventangente	200

A.8 Streng konkave Funktion	205
A.9 Homothetische Funktion	210
A.10 Lineare Engelkurve	211

Tabellenverzeichnis

2.1	Hochrechnungsfaktoren bei freier Hochrechnung	36
2.2	Fehler bei freier Hochrechnung	36
2.3	Struktur der Konsumausgaben privater Haushalte	40
2.4	Berechnung der Ersparnis in der EVS	45

Kapitel 1

Einleitung

Die Anwendung eines Mikrosimulationsmodells als Instrument der wirtschaftswissenschaftlichen Forschung erfreut sich großer Beliebtheit. Die Verwendung dieses Modelltyps hat vor allem zwei Gründe. Zum einen sind die in den letzten Jahren extrem gesunkenen Kosten der Informationsverarbeitung ursächlich für die mittlerweile häufige Verwendung. Zum anderen besitzt diese Analyseform Eigenschaften, die kein anderes Instrument aufweist. Insbesondere für die Abschätzung der Verteilungswirkungen von Steuer- und Transferreformen ist die Mikrosimulation eine nahezu ideale Methode. Durch die Einbindung eines Nachfragesystems kann sowohl das Anwendungsgebiet eines Mikrosimulationsmodells erweitert als auch dessen potentielle Leistungsfähigkeit gesteigert werden. Die vorliegende Arbeit hat im Wesentlichen die Beantwortung der Fragestellungen aus den folgenden zwei Fragenkomplexen zum Ziel:

- Wann ist die Einbindung eines Nachfragesystems in Mikrosimulationsmodelle sinnvoll und wie kann ein solches System in das eigentliche Mikrosimulationsmodell integriert werden?
- Welche Nachfragesysteme können aus den in Deutschland in Querschnittsform vorhandenen Mikrodatensätzen geschätzt werden und welche theoretischen Eigenschaften besitzen diese Systeme bzw. deren in einem zweistufigen Budgetierungsprozess einsetzbare Kombinationen?

Die Arbeit gliedert sich einschließlich der Einleitung in sechs Kapitel, wobei der erste Fragenkomplex vor allem in den Kapiteln zwei und sechs bearbeitet wird. Die Bearbeitung des zweiten Fragenkomplexes ist insbesondere in den Kapiteln drei bis fünf dieser Arbeit von zentralem Interesse. Ein Anhang enthält ergänzende Erläuterungen und ausgewählte Beweise. Die relativ umfangreichen Ausführungen des Anhangs dienen dem besseren Verständnis der Arbeit und sollten daher nicht vernachlässigt werden.

In dem dieser Einleitung folgenden zweiten Kapitel wird zunächst das Instrument Mikrosimulation vorgestellt. Es werden sowohl die Möglichkeiten als

auch die Grenzen dieses Werkzeuges beschrieben. Danach stehen ausgewählte Probleme der Mikrosimulation mit den dazugehörigen Lösungsansätzen im Mittelpunkt. Es wird gezeigt, dass Nachfragesysteme in zwei Bereichen eingesetzt werden können:

Der erste Anwendungsbereich nutzt das Potential eines Nachfragesystems zur Erstellung adäquater Mikrodatensätze. Das Nachfragesystem kann der Mikroeinheit Haushalt eine im Datensatz möglicherweise nicht erfasste Güternachfrage zuordnen. Dazu sind lediglich Informationen über die Güterpreise und das für den Konsum verwendete Haushaltseinkommen nötig. Die Zuordnung der geschätzten Güternachfrage kann, falls gewünscht, auch nach demographischen Merkmalen differenziert erfolgen.

Der zweite Anwendungsbereich liegt in der Nachbildung von Anpassungsreaktionen der Mikroeinheiten. Grundsätzlich lassen sich statische und dynamische Mikrosimulationsmodelle unterscheiden. In der für diese Arbeit gewählten Abgrenzung zeichnen sich letztere durch die Möglichkeit einer Nachbildung der Anpassungsreaktionen aus. Das Nachfragesystem bildet in diesem Bereich Reaktionen auf Preis- oder Einkommensänderung nach. Prinzipiell kann auch die Wirkung von demographischen Veränderungen auf die Güternachfrage simuliert werden.

Den Abschluss des zweiten Kapitels bildet eine Übersicht über die für Mikrosimulationsmodelle geeigneten Datensätze in Deutschland. Da die Einkommens- und Verbrauchsstichprobe eine herausragende Stellung für die Schätzung von Nachfragesystemen besitzt, wird sie einer genaueren Betrachtung unterzogen.

Das dritte Kapitel beschreibt das durch die Mikroökonomie zur Verfügung gestellte theoretische Fundament, welches einem in der einschlägigen Literatur als *theoretisch konsistent* bezeichneten Nachfragesystem zugrunde liegt. Die Ausführungen bilden die Basis für die in den darauf folgenden Kapiteln dargestellten Möglichkeiten der Nachfragesystemschatzung. Mit diesem Kapitel wird zugleich eine für die Arbeit einheitliche Notation festgelegt.

Das eigentliche Konzept eines Nachfragesystems und die speziell für dieses theoretische Konstrukt notwendigen Annahmen über die Nutzenfunktion eines Haushalts werden im ersten Teil des vierten Kapitels beschrieben. Die in der Realität vorhandene extrem große Anzahl von Güterarten stellt ein generelles Problem für die Schätzung eines Nachfragesystems dar. Um einen besseren Einstieg in die Problematik zu ermöglichen, werden zunächst kurz traditionelle Konzepte der Güteraggregation erläutert. Im Anschluss daran werden verschiedene Separabilitätsannahmen vorgestellt, die eine zweistufige Budgetierung des Haushalts, das so genannte two-stage budgeting, ermöglichen und dadurch die Vielgüterproblematik entschärfen.

Im zweiten Teil des vierten Kapitels stehen dann drei grundlegende Nachfragefunktionsklassen im Mittelpunkt. Sie bilden, bis auf wenige Ausnahmen, die

Grundlage für die in der empirischen Praxis verwendeten funktionalen Formen. Die explizite Darstellung dieser Funktionsklassen dient dem Zweck, bereits auf dieser Ebene verankerte Eigenschaften der Nachfragesysteme aufzudecken. Des Weiteren ermöglicht sie eine verwandtschaftliche Einordnung der im nächsten Kapitel vorgestellten Systeme.

Das fünfte Kapitel widmet sich ausgewählten funktionalen Formen von Nachfragesystemen. Die Auswahl richtet sich dabei an der Frage aus, ob die Systeme mit Querschnittsdaten geschätzt werden können. Die danach möglichen drei Formen sind jeweils ein Spezialfall der drei im Kapitel 4 behandelten Funktionsklassen. Neben der Beschreibung des Aufbaus und der Eigenschaften des jeweiligen Nachfragesystems wird explizit auf die Schätzung der dazugehörigen Parameter eingegangen. Es wird gezeigt, dass für die Identifikation der Parameter im simplen **P**roportionalen **E**xpenditure **S**ystem (PES) bereits ein einziger Querschnittsdatensatz genügt. Das im Vergleich flexiblere **Q**uadratische **E**xpenditure **S**ystem (QES) ist schon mit zwei Querschnittsdatensätzen identifizierbar. Das gemessen an der Flexibilität dazwischen liegende und empirisch häufig verwendete **L**ineare **E**xpenditure **S**ystem (LES) kann je nach gewählter Methode mit einem oder zwei Datensätzen in Querschnittsform identifiziert werden.

Die ersten beiden Abschnitte des sechsten und gleichzeitig letzten Kapitels dieser Arbeit haben die Analyse zweier besonderer Problemfelder der empirischen Nachfragesystemschatzung zum Inhalt. Die Problematik der demographischen Spezifizierung in der Nachfragesystemschatzung kann, wie zu zeigen sein wird, noch relativ gut gelöst werden. Das zweite Problemfeld der Nullnachfrage hingegen gefährdet generell den Versuch, ein adäquates Nachfragesystem für Mikrosimulationsmodelle zu schätzen. Die Ausführungen dazu können jedoch im Rahmen dieser Arbeit nur einen flüchtigen Einblick in dieses bisher nur unzureichend gelöste Problem gewährleisten.

Im Anschluss werden die im fünften Kapitel vorgestellten funktionalen Formen miteinander verknüpft. Die Verknüpfung erfolgt dabei so, dass die im ersten Teil des vierten Kapitels ermittelten Bedingungen für eine two-stage budgeting Strategie erfüllt sind. Zudem wird ein modifizierter two-stage budgeting Ansatz vorgestellt, der trotz theoretischer Schwächen vom Verfasser als ideal für die Anwendung in Mikrosimulationsmodellen angesehen wird. Die Beschreibung einer möglichen Strategie der Nachbildung von Anpassungsreaktionen eines Haushalts steht danach im Mittelpunkt, bevor im letzten Abschnitt des Kapitels die gesamte Arbeit abschließend betrachtet wird.

In dieser Schlussbetrachtung werden nach einer an den Kapiteln dieser Arbeit orientierten Zusammenfassung die beiden zentralen Fragekomplexe beantwortet. Zudem wird ein Ausblick auf in der Zukunft mögliche Fortschritte in diesem Gebiet gewagt, die weiterhin offene oder eventuell neue Fragen und Aufgaben lösen könnten.

Kapitel 2

Mikrosimulation

Mikrosimulationsmodelle sind ein mögliches Instrument für die Abschätzung der Wirkungen staatlichen Handelns. *Orcutt*, ein Pionier auf diesem Gebiet, bemerkt hierzu treffend:

„The use of simulation in training drivers, pilots, and rocket passengers is well known. [...] Perhaps economic policy-makers also should try their skill on a model of the economy.“¹

In diesem Kapitel soll die grundlegende Konzeption dieses Instruments der wirtschaftswissenschaftlichen Forschung vorgestellt werden. Es wird gezeigt, dass dieses Instrument vielfältige Vorteile gegenüber anderen Analysemethoden besitzt. Die vorhandenen Schwächen können durch verschiedene Hilfsmittel behoben werden. Die Nutzung eines empirisch geschätzten Nachfragesystems ist eine dieser möglichen Verbesserungen.

2.1 Das Instrument Mikrosimulation

Zunächst wird das Grundkonzept der Mikrosimulation vorgestellt. Im Anschluss daran werden dann sowohl die Möglichkeiten als auch die Grenzen dieses Instruments beschrieben.

2.1.1 Grundkonzept der Mikrosimulation

Das Grundkonzept der Wirkungsanalyse von Reformen und Maßnahmenbündeln durch Mikrosimulationsmodelle ist, verglichen mit anderen Untersuchungsmethoden der Wirtschaftswissenschaften, relativ unkompliziert. Der Schlichtheit des Grundkonzepts stehen jedoch vielfältige Schwierigkeiten in Detailfragen gegenüber.

¹*Orcutt, G.H.* (1960, S. 895).

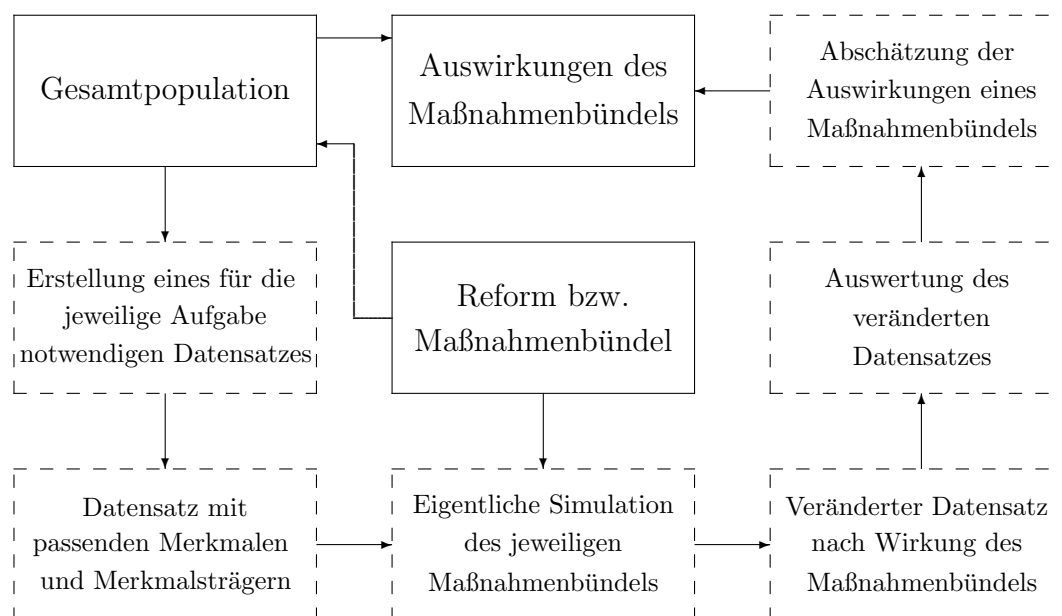


Abbildung 2.1: Grundkonzept der Mikrosimulation (Quelle: Eigene Darstellung).

In Abbildung 2.1 ist die grundlegende Methodik von Mikrosimulationsmodellen skizziert. Sollen z.B. die Auswirkungen einer Reform der Einkommensbesteuerung untersucht werden, wird zunächst ein für diese Untersuchung notwendiger Datensatz erstellt. Die eingangs erwähnten Schwierigkeiten bei der praktischen Durchführung einer Mikrosimulation nehmen hier ihren Anfang.² Im gewählten Beispiel muss ein solcher Datensatz sowohl die zur Nachbildung der Reform notwendigen Merkmale wie Bruttoeinkommen oder Werbungskosten enthalten als auch die Merkmalsträger³ der Gesamtpopulation hinreichend genau erfassen. Für den in der Praxis eher unwahrscheinlichen Idealfall einer Vollerhebung mit allen notwendigen Merkmalen müssen möglichst gute Annäherungen gefunden werden. Die Möglichkeiten hierfür sind äußerst vielfältig. Sie reichen von der Erhebung einer eigens für den Untersuchungszweck kreierten Stichprobe bis hin zur Nutzung von Merging- und Matchingverfahren, um aus bereits vorhandenen Datensätzen einen entsprechend guten Datensatz herzustellen.

Die zweite maßgebliche Quelle der praktischen Probleme ist die Modellie-

²Ausgewählte, mögliche Lösungen werden ausführlicher unter 2.2.1 auf Seite 12ff. beschrieben.

³In mikroanalytischen Modellen der Wirtschaftswissenschaften werden unter Merkmalsträgern in der Regel Einzelpersonen, Familien, Haushalte oder Unternehmen verstanden. Die Festlegung der „decision unit“ folgt dabei neben der Fragestellung auch praktischen Überlegungen der Datenbeschaffung. Die gängige Bezeichnung „decision unit“ für die einzelnen Komponenten des Modells geht nach Kenntnis des Verfassers auf *Orcutt, G.H.* (1960, S. 901) zurück.

rung der Reform und ihrer Wirkung auf die Mikroeinheiten im Datensatz. Zwei grundsätzliche Modellvarianten können hier unterschieden werden: die statische und die dynamische Mikrosimulation. Dabei sind die definitorischen Übergänge zwischen beiden Varianten fließend.⁴ Wird der Abgrenzung von *Petersen* gefolgt, werden unter dynamischen Mikrosimulationsmodellen diejenigen Modelle verstanden, die Verhaltensanpassungen der Entscheidungseinheiten modellieren.⁵ Andere wiederum bezeichnen nur solche Modelle als dynamisch, die demographische und sozioökonomische Merkmale der Individuen im Zeitablauf modellendogen verändern.⁶ Die Anpassung des Verhaltens der Mikroeinheiten als Reaktion auf die Reformvorschläge wird hier klar von dem Begriff „dynamisch“ getrennt. Würde dieser Sicht gefolgt, bedarf es einer dritten Kategorie zur Einordnung der Modellklassen. Eine Unterteilung in statische und dynamische Modelle wird z.B. von *Bork* unabhängig von der Tatsache getroffen, ob in den Modellen Verhaltensänderungen Berücksichtigung finden.⁷ Den Begriff „dynamisch“ vermeiden auch Autoren, deren Fokus explizit auf der Modellierung von Verhaltensanpassungen liegt. So ordnen zwar *Creedy, J.* und *Duncan, A.* nur *morning-after* Simulationen der statischen Simulation zu, nennen ihren Ansatz jedoch „behavioural microsimulation“.⁸

In dieser Arbeit werden dennoch unter dem Begriff dynamische Mikrosimulation diejenigen Modelle subsumiert, die über die so genannte *morning-after* Simulation mit oder ohne *static-aging*⁹ hinausgehen. Der Begriff *morning-after* verdeutlicht dabei bildhaft, dass die Zeit für Anpassungsreaktionen der Entscheidungseinheiten zu kurz ist. Die Mikroeinheiten passen beispielsweise ihr Güternachfrageverhalten nicht einer durch die simulierte Steuerreform veränderten Einkommenssituation an. Bei dieser Abgrenzung im Sinne von *Petersen* sind folglich nur reine *morning-after*-Modelle statisch. Alle anderen Modelle werden als dynamisch definiert, da sie allgemein den Merkmalsvektor einer Mikroeinheit in der Zeit ändern. Insofern werden auch komparativ-statische Änderungen, die das Verhalten betreffen und somit Zeit benötigen, als dynamische Simulation gesehen.

Die Auswertung des durch die Simulation veränderten Datensatzes zur Beurteilung der Reform ist im Vergleich zu den ersten beiden Schritten wenig proble-

⁴Diese Einschätzung gilt ausdrücklich nur für die hier behandelten ökonomischen Mikrosimulationsmodelle. Vgl. *Wilkins, J.G.* (2000, S. 34).

⁵Vgl. *Petersen, H.-G.* (1992, S. 17) oder *Brunner, Petersen* (1990, S. 13).

⁶Darunter wird beispielsweise die modellendogene Simulation von Eheschließungen, Sterbe- und Geburtsereignissen etc. verstanden. Eine derartige Abgrenzung wird u.a. von *Spahn, P.B.* et al. (1992, S. 19ff.) getroffen.

⁷Vgl. *Bork, C.* (2000, S. 62ff.)

⁸Vgl. *Creedy, J.* und *Duncan, A.* (2002, S. 2 bzw. S. 7).

⁹Der Begriff *static-aging* bezeichnet z.B. die Anpassung der Altersstruktur der Individuen an die möglicherweise auch zukünftige Altersstruktur der Gesamtpopulation durch die Umgewichtung bestimmter Kohorten in der Stichprobe. *Merz, J.* (1986, S. 430) versteht unter dem Begriff ganz allgemein das „reweighting of the available information“. Zur praktischen Umsetzung siehe beispielsweise *Harding, A.* et al. (1994, S. 9ff.).

matisch. Im Folgenden sollen zunächst die Vorteile des Analysewerkzeugs Mikrosimulation gegenüber anderen Methoden beschrieben werden, um im Anschluss daran die Grenzen dieses Ansatzes aufzuzeigen.

2.1.2 Möglichkeiten der Mikrosimulation

Die Stärke eines jeden Mikrosimulationsmodells liegt in der im Vergleich zu anderen Analysewerkzeugen extrem starken Vielfalt der Merkmalsträger und Merkmale der Datengrundlage und in der somit zumindest theoretisch fast unbegrenzten Flexibilität der Reformnachbildungsmöglichkeiten begründet. Kein anderes Instrument der empirischen Wirtschaftsforschung ist in der Lage, die Wirkungen von Steuer- und Transferreformen in dieser direkten Art abzubilden. Wie sollte z.B. ein makroökonomisches Modell die Verteilungseffekte einer Grundfreibetragserhöhung in der Einkommensbesteuerung schätzen können, wenn als Datengrundlage bzw. Modellvariable nur aggregierte Größen, wie das Volkseinkommen oder die gesamtwirtschaftliche Steuerquote, zur Verfügung stehen? Für Abschätzungen dieser Art wirtschaftspolitischer Maßnahmen sind Mikrosimulationsmodelle geradezu ideal, wenn nicht unerlässlich. Untersuchungen von Parameteränderungen in den Systemen der Steuer- und Sozialpolitik verlangen nach einer adäquaten Berücksichtigung der Komplexität eben dieser Systeme. Es ist unmittelbar einsichtig, dass Aussagen über die Wirkung von Systemänderungen, die in ihrer Konstruktion an individuellen Merkmalen der Wirtschaftssubjekte festgemacht sind, Informationen über diese Merkmale erfordern. Das Grundkonzept der Mikrosimulation, die Realität möglichst exakt nachzubilden und dabei weitestgehend auf vereinfachende Aggregation zu verzichten, zahlt sich hier aus.¹⁰

Es ist aber nicht nur die hohe Flexibilität bei der Reformnachbildung, die für das Instrument spricht. In der Regel existiert auch der Wunsch, die Abschätzung der Reformwirkung möglichst differenziert vornehmen zu können. Auch hier sind die Mikrosimulationsmodelle konstruktionsbedingt den Modellen höherer Aggregation überlegen. Nur mit ihnen können Wirkungsbeschreibungen differenziert nach beliebig bestimmten sozio-demographischen Merkmalskombinationen vorgenommen werden. So kann der in Abbildung 2.1 auf S. 6 schematisch dargestellte, veränderte Datensatz, also das Ergebnis der eigentlichen Simulation, äußerst flexibel ausgewertet werden. Neben den für die Gesamtpopulation relevanten Analysen, die z.B. durch Aggregation bestimmter Merkmalsausprägungen über alle Mikroeinheiten erfolgen können, erlaubt die gegebene Merkmalsvielfalt auch die spezielle Untersuchung von ganz bestimmten Bevölkerungsgruppen, wie z.B. Rentnern.

¹⁰Auch bei Mikrosimulationsmodellen ist eine Aggregation praktisch unumgänglich, wenn auch auf niedrigerem Niveau. Zur Bildung von Entscheidungseinheiten wie Haushalt oder Unternehmen ist sie ebenso notwendig wie beispielsweise bei der zeitlichen Aggregation von Einkommensströmen zu einer Einkommensgröße. Auf die damit verbundenen möglichen Fehlerquellen weist u.a. *Galler, H.P.* (1986, S. 27) hin.

Die bisher genannten Möglichkeiten dieser Modelle gelten unabhängig von der Modellklasse. Bei den dynamischen Modellen kommt ein weiterer Vorteil hinzu. Anders als statische Simulationsmodelle eignen sich die dynamischen insbesondere für langfristige Prognosen. Vielfältige Fragestellungen benötigen gerade diese Art der Analyse. Sollen beispielsweise die langfristigen Auswirkungen einer Änderung des Rentenrechts untersucht werden, können selbst Modelle, die durch die *static-aging* Methode in die Zukunft fortgeschrieben wurden, keine Aussagen über die individuellen Erwerbsbiographien liefern. Zur Beantwortung bestimmter Fragestellungen bezüglich einer solchen Reform sind diese Informationen jedoch zwingend erforderlich.¹¹ Neben der Leistungsfähigkeit dieses Modelltyps, die Mikro-Komponenten endogen in die Zukunft fortzuschreiben und dadurch spezielle Analysen zu ermöglichen, bietet sich die dynamische Mikrosimulation auch als Alternative zu anderen langfristigen Prognosemodellen, d.h. in der Regel makroökonomischen Modellen, an. Die Genauigkeit derartiger Vorhersagen ist aber mindestens genauso unsicher wie die von Modellen höherer Aggregation, so dass sich die vergleichsweise hohen Kosten dynamischer Mikrosimulationsmodelle damit nicht rechtfertigen lassen. Auch bei der Wahl des Untersuchungswerkzeugs sollte das ökonomische Prinzip gelten. Ist der Auftraggeber bzw. der Forscher nur an einer langfristigen Prognose über ein großes Aggregat, wie z.B. dem Anteil der Rentnerhaushalte an der Gesamtbevölkerung, interessiert, wäre die Erstellung und Nutzung eines dynamischen Mikrosimulationsmodell wie das berühmte "mit-Kanonen-auf-Spatzen-schießen"-Gleichnis, welches sowohl auf die Kosten als auch auf die Treffsicherheit des eingesetzten Mittels zuträfe.

Nachdem ein grober Überblick über die Möglichkeiten von Mikrosimulationsmodellen gegeben wurde, sollen im Folgenden die Grenzen dieses Ansatzes aufgezeigt werden. Auch hier wird kein Anspruch auf Vollständigkeit erhoben, sondern nur ein erster Einblick gegeben.

2.1.3 Grenzen der Mikrosimulation

Auf den ersten Blick erscheinen Mikrosimulationsmodelle als die ultimativen Werkzeuge der Wirtschaftswissenschaften. Die Probleme sind jedoch vielfältig und reichen von den vergleichsweise äußerst umfangreichen Datenanforderungen über die Modellierung der zu analysierenden Reform bis hin zu Nachbildungen von über *morning-after* Effekte hinausgehende Reaktionen der Entscheidungseinheiten. Jeder dieser Bereiche birgt Schwierigkeiten, die im Extremfall die sinnvolle Anwendung dieser Methode unmöglich werden lassen.

Die Stärke der Modelle liegt vor allem in ihrer großen Flexibilität. Diese wird durch die Mikrostruktur des verwendeten Datensatzes ermöglicht. Die die Stärke

¹¹Vgl. *Harding, A.* (2000, S. 305), aber auch *Spahn, P.B.* et al. (1992, S. 22).

der Modelle ermöglichende Mikrostruktur ist zugleich auch eine der größten Schwächen, denn Mikrodatensätze sind selbst in entwickelten Volkswirtschaften mit einer ausgebauten amtlichen Statistik äußerst rar.¹²

Zwei grundsätzliche Ursachen sind für die mangelnde Verfügbarkeit und Qualität verantwortlich. Als erstes müssen die hohen Kosten derartiger Datensätze genannt werden. Bei Mikrodatensätzen ist sowohl die Erstellung als auch die Pflege sehr kostenintensiv. Zwar hat die rasante Entwicklung der Computertechnologie einen einst großen Kostenblock in diesem Bereich stark reduziert, dennoch erfordert die Erstellung eines geeigneten Datensatzes noch immer einen immensen Aufwand. Selbst wenn Mikrodatensätze zur Verfügung stehen, entsprechen sie oft nicht den Anforderungen an die Repräsentativität der Merkmals-träger bei gleichzeitiger Merkmalsvielfalt und passender Merkmalsauswahl bzw. -abgrenzung.¹³ Auch die zeitliche Komponente darf nicht vernachlässigt werden. Häufig sind vorhandene Datensätze veraltet und genügen deshalb nicht den Anforderungen. Unter 2.2.1 werden Instrumente beschrieben, die versuchen, diesen Schwierigkeiten durch das Zusammenführen von vorhandenen Daten und anderen Anpassungstechniken zu begegnen. Diese Verfahren sind wiederum mit einem erheblichen Zeit- und Arbeitsaufwand verbunden und können zumeist nur von hochqualifizierten Spezialisten durchgeführt werden. Obwohl diese Methoden oftmals von Erfolg gekrönt sind, stellen sie doch einen erheblichen Kostenfaktor der Mikrosimulation dar, was die Vorteilhaftigkeit des Instruments einschränkt.¹⁴ In Entwicklungs- oder Transformationsländern, in denen Datensätze mit dem gewünschten starken Disaggregationsgrad fehlen, können selbst die unter 2.2.1 beschriebenen Hilfsmittel keine Lösung herbeiführen. Das Problem mangelnder Daten kann in diesen Fällen die Nutzung des Instruments Mikrosimulation völlig verhindern.¹⁵ Der einzige Ausweg wäre hier die überaus kostspielige Erhebung eines eigens für die Untersuchung definierten Mikrodatensatzes. Selbst wenn hierfür genügend Mittel zur Verfügung stünden, verbleibt ein weiterer wesentlicher Grund für die mangelnde Datenverfügbarkeit:

Neben den hohen Kosten können aus dem Datenschutz resultierende Hindernisse als die zweite Ursache der begrenzten Anzahl von Mikrodatensätzen iden-

¹²Merz, J. sieht in dieser Situation der mangelnden Verfügbarkeit die Regel und nicht die Ausnahme. Vgl. Merz, J. (1986, S. 424). Auch Galler, H.P. (1994, S. 134f.) sieht in der Datensatzproblematik die größte Einschränkung bei den Einsatzmöglichkeiten von Mikrosimulationsmodellen.

¹³Vgl. Kortmann, K. (1982, S. 6).

¹⁴Vgl. Krupp, H.-J. (1986, S. 37).

¹⁵In einer von der Volkswagenstiftung finanzierten Untersuchung über die Auswirkungen einer umfassenden Steuerreform in der Republik Georgien besteht genau dieses Problem. Ein von Petersen, H.-G. geleitetes Team deutscher und georgischer Wissenschaftler prüft derzeit die Verfügbarkeit brauchbarer Mikrodatensätze. Erste Ergebnisse weisen auf eine für Mikrosimulationsmodelle völlig unzureichende Datenlage hin. Auch bei anderen Projekten, an denen der Verfasser beteiligt war, entsprach die Datenlage nicht den Anforderungen, so dass regelmäßig die unter 2.2.1 beschriebenen Hilfsmittel zur Anwendung kommen mussten.

tifiziert werden. Aufgrund der Merkmalsvielfalt ist die Wahrscheinlichkeit der Reidentifikation der Entscheidungseinheiten aus dem Datensatz vergleichsweise hoch.¹⁶ Insbesondere bei so sensiblen Angaben wie detaillierten Informationen über Unternehmen oder Daten der Einkommensteuererklärung muss diese Eventualität soweit wie möglich ausgeschlossen werden.¹⁷ Die Notwendigkeit der faktischen Anonymisierung ist einerseits aus rechtlicher Perspektive bei amtlichen Statistiken geboten.¹⁸ Diese Datensätze werden teilweise unter Nutzung hoheitlichen Zwangs erhoben. In einem demokratischen Rechtsstaat ist der Schutz dieser Daten im Regelfall ein verfassungsrechtlich verankertes Grundrecht.¹⁹ Andererseits ist die Garantie auf die praktische Unmöglichkeit einer Reidentifikation der Entscheidungseinheiten aus dem Datensatz eine absolut notwendige Voraussetzung für die freiwillige Teilnahme der Wirtschaftssubjekte an derartigen Erhebungen. Die Wenigsten würden z.B. wahrheitsgemäße, freiwillige Angaben zum Thema illegale Schwarzarbeit machen, wenn nicht eine absolute Sicherheit der Anonymität bestünde.²⁰

Ein weiteres, nicht zu unterschätzendes Problemfeld bei der praktischen Umsetzung des Mikrosimulationsansatzes ist die Modellierung der jeweiligen Reform. Zunächst muss die zu simulierende Reform in ihrer Gesamtheit bekannt sein. Diese Forderung mag bei oberflächlicher Betrachtung als selbstverständlicher und keineswegs problembehafteter Anspruch an das Maßnahmenbündel wirken. In der wirtschaftspolitischen Praxis werden aber häufig oberflächlich formulierte Reformvorschläge unterbreitet, die für eine Simulation ungeeignet sind.²¹ Ist die Reform detailliert und umfassend bekannt, muss sie in ihrer Gesamtheit in maschinenlesbare Form gebracht werden. Ob hierfür vorhandene Computerprogramme

¹⁶Viele Merkmale erhöhen die Wahrscheinlichkeit, dass Ausprägungskombinationen einzigartig sind. Eine abnehmende Zahl so genannter statistischer Zwillinge erhöht die Möglichkeit der Reidentifikation. Vgl. *Blien, U.* (2003, S. 60f.).

¹⁷Die Möglichkeiten einer Reidentifikation sind bei Unternehmensdaten ungleich größer als bei Personendaten. Vgl. *Gottschalk, S.* (2002, S. 3).

¹⁸Mikrodaten werden als faktisch anonym bezeichnet, wenn die Deanonymisierung zwar nicht gänzlich ausgeschlossen werden kann, die Angaben jedoch nur mit einem unverhältnismäßig hohen Aufwand an Zeit, Kosten und Arbeitskraft dem jeweiligen Merkmalsträger zugeordnet werden können (§ 16 Abs. 6 BStatG). Gemäß Bundesstatistikgesetz dürfen faktisch anonymisierte Daten allerdings nur wissenschaftlichen Einrichtungen und nur zur Durchführung wissenschaftlicher Vorhaben zugänglich gemacht werden. Vgl. *Statistisches Bundesamt* (2005d, S.123).

¹⁹Zum Spannungsfeld zwischen dem Grundrecht auf informationelle Selbstbestimmung und dem Grundrecht der Forschungsfreiheit siehe z.B. *Bizer, J.* (1992).

²⁰Diese Überlegungen waren u.a. die Triebkraft des so genannten Statistik-Geheimnisses. Dieser Grundsatz der Geheimhaltung ist älter als der moderne Datenschutz. Vgl. *Wagner, G.* (2000, S. 79).

²¹Ob dieser vom Verfasser beobachtete Mangel auf ein politisches Kalkül oder einfach nur auf mangelnde Detailkenntnis zurückzuführen ist, kann hier nicht beantwortet werden. Für die politischen Entscheidungsträger sind beide Begründungsansätze ein nicht unbedingt positives Zeugnis.

genutzt werden können oder ob hier extra spezielle Programme entwickelt werden müssen, ist nicht nur zeit- sondern auch kostenrelevant.²²

Sollen neben den *morning-after* Effekten weitere Anpassungsreaktionen modelliert werden, erfordert das neben einem erweiterten Datenbedarf auch einen erhöhten Programmieraufwand. Der Anspruch, die Realität in ihrer Kleinteiligkeit abzubilden und dabei gleichzeitig die gegenseitigen Wirkungsbeziehungen zwischen den Entscheidungseinheiten in die Kalkulation einzubeziehen, stößt hier sehr schnell an seine Grenzen. Die Wirklichkeit ist viel zu komplex, als dass sie vollständig in einem Modell nachgebildet werden könnte.²³ Selbst kleinste Fortschritte, wie z.B. die Nachbildung von Geburt und Tod in einem Modell, erfordern bereits einen außerordentlichen Aufwand.²⁴ Dennoch wird versucht, dynamische Aktionen und Reaktionen der Entscheidungseinheiten nachzubilden. Unter 2.2.2 werden verschiedene Möglichkeiten der Modellierung dieser dynamischen Effekte näher beleuchtet. Ob die dafür erforderlichen Mehraufwendungen durch eine verbesserte Genauigkeit der Prognose gerechtfertigt sind, muss im Einzelfall entschieden werden.

Wie soeben kurz aufgezeigt wurde, sind gründliche Kosten- und Nutzenüberlegungen vor der Anwendung von Mikrosimulationsmodellen empfehlenswert. Unter 2.2 wird anhand ausgewählter Teilbereiche gezeigt, wie die mit der Methode verbundenen Probleme teilweise gelöst oder zumindest gemindert werden können. Die Forderung nach der Effizienz des eingesetzten Mittels verlangt die explizite Berücksichtigung der durch diese Lösungsversuche entstehenden Kosten.

2.2 Probleme und Lösungsansätze

Im Folgenden werden ausgewählte Ansätze vorgestellt, die dazu dienen, das Instrument Mikrosimulation entweder überhaupt zu ermöglichen oder in seiner Leistungsfähigkeit zu verbessern.

2.2.1 Erstellung des Datensatzes

Bei der Erstellung eines für die jeweilige Aufgabe passenden Datensatzes können zwei Anpassungsschwerpunkte unterschieden werden. Erstens muss der Datensatz hinsichtlich der Merkmalsträger ein repräsentatives Abbild der zu untersuchenden Grundgesamtheit bieten. Zweitens müssen die im Datensatz erfassten Merkmale

²²Für vergleichsweise einfache *morning-after* Simulationen bieten statistische Standardprogramme, wie z.B. SPSS, meist eine ausreichende Leistungsfähigkeit. Die Notwendigkeit der Entwicklung spezieller Programme nimmt jedoch mit der Komplexität des Modells zu.

²³Vgl. beispielsweise *de Lathouwer, L.* (1996, S.72) oder *Hoschka, P.* (1986, S. 48f.).

²⁴Einen komprimierten Überblick über die Herausforderungen dynamischer Modelle bietet beispielsweise *Harding, A.* (1993, S. 28ff.).

sowohl in ihrer Quantität als auch in ihrer Qualität der nachzubildenden Reform genügen.²⁵ Vorhandene Mikrodatensätze, wie sie beispielsweise unter 2.3 beschrieben werden, können diese Anforderungen in der Regel nicht oder nur teilweise erfüllen. Ein Standardproblem, welches beide der genannten Schwerpunkte in gleicher Weise berührt, ist die Aktualität der Datensätze. Erhebungen sind zum Zeitpunkt ihrer Nutzung meist veraltet. Die künstliche zeitliche Fortschreibung des Datensatzes stellt daher eine nicht zu vernachlässigende Herausforderung dar.

Der erste Anpassungsschwerpunkt bei der Erstellung adäquater Datensätze beinhaltet folglich zweierlei: zum einen die durch das Alter der Daten notwendig gewordene zeitliche Anpassung der vorhandenen Merkmalsträger und zum anderen das Zusammenführen von mit unterschiedlichen Merkmalsträgern ausgestatteten Datensätzen. Beiden Aufgabengebieten liegt im Allgemeinen dieselbe Überlegung zugrunde. Der Referenzpunkt ist immer die multivariate Verteilung der zu untersuchenden Population zu einem bestimmten Zeitpunkt. Ziel des Anpassungs- bzw. Erstellungsprozesses ist es, alle relevanten Arten von Merkmalsträgern im Zieldatensatz zusammenzuführen und diese mit den entsprechenden, aktuellen Hochrechnungsfaktoren zu versehen. Die Verknüpfung von Datensätzen hinsichtlich der Merkmalsträger wird *Merging* genannt, wobei dieser Begriff auch ganz allgemein für das Zusammenführen von Datensätzen steht. Andere verwenden daher den präziseren Begriff *integrative Verknüpfung*.²⁶ Die zeitliche Anpassung, d.h. die Anpassung veralteter Mikrodaten an aktuelle Verteilungen, entspricht dem *static aging*.²⁷ Die Vorgehensweise ist zur Verdeutlichung in Abbildung 2.2 schematisch dargestellt. In dem dort dargestellten Beispiel werden 6 Datensätze zu einem Datensatz zusammengefügt.²⁸ Die Merkmalsträger in den einzelnen Datensätzen genügen nicht den Anforderungen an die Repräsentativität. Durch die Nutzung von Zusatzinformationen über die Gesamtpopulation können die jeweiligen Merkmalsträger zusammengeführt werden. Im verknüpften Datensatz finden sich dann sämtliche Merkmalsträger nebst einem ihnen zugeordneten Hochrechnungsfaktor. Dieser gewichtet die einzelnen Einheiten so, dass die Merkmalsträger entsprechend ihrem (aktuellen) Anteil an der Gesamtpopulation

²⁵Der Ausdruck Quantität beschreibt die notwendige Vielfalt der Merkmale. Soll z.B. eine Einkommensteuerreform simuliert werden, müssen alle Merkmale, die zur Berechnung der persönlichen Einkommensteuer notwendig sind, im Datensatz enthalten sein. Mit dem Begriff Qualität wird hier neben der möglichst akkuraten Erfassung der Merkmalsausprägungen die korrekte, d.h. die für die Simulation notwendige, Definition des Merkmals beschrieben.

²⁶Der Begriff *integrative Verknüpfung* wird z.B. von Kortmann und Krupp (1977, S. 113) verwandt.

²⁷Vgl. Spahn, P.B. et al. (1992, S. 158).

²⁸Es wurde vereinfachend angenommen, dass die Merkmale in allen Datensätzen übereinstimmen und die vorhandenen Datensätze in der Summe zur Nachbildung der Gesamtpopulation genügen. Ist dies nicht der Fall, müssen hypothetische Merkmalskorrekturen und eine synthetisch-hypothetische Generierung von Beobachtungseinheiten erfolgen. Vgl. Kortmann, Krupp (1977, S. 114).

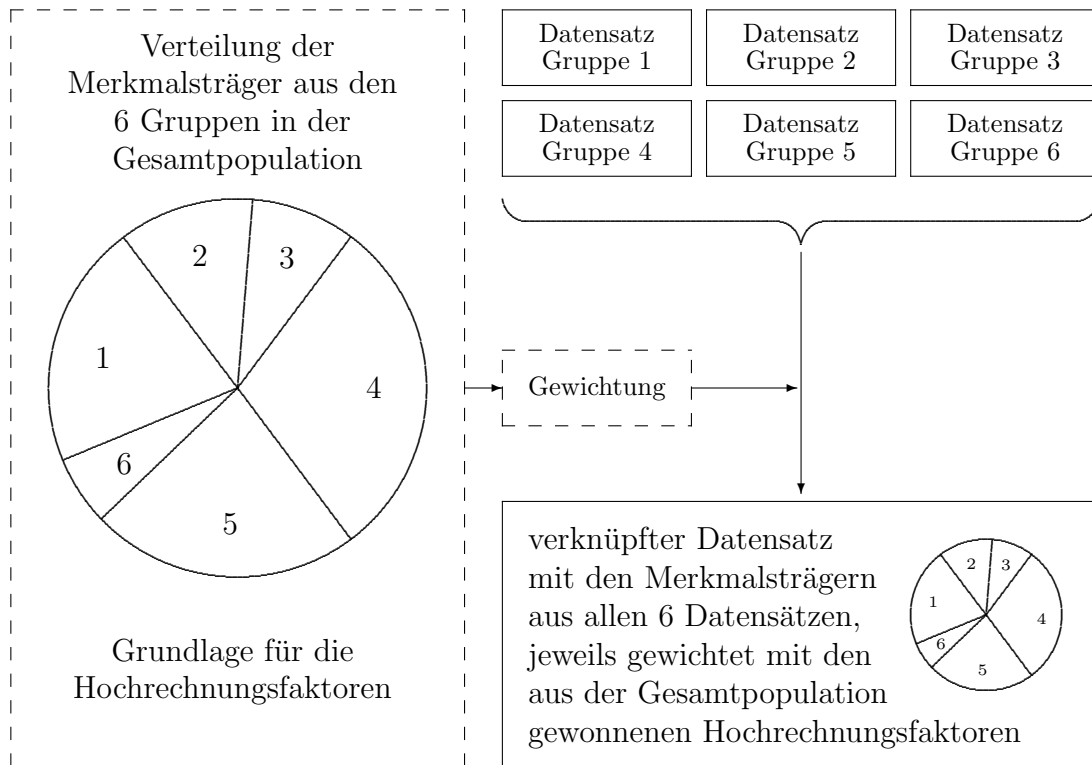


Abbildung 2.2: Verknüpfung der Merkmalsträger (Quelle: Eigene Darstellung).

vertreten sind. Die Gewinnung und Anwendung der Hochrechnungsfaktoren zur zeitlichen Anpassung oder zur Zusammenführung von Datensätzen ist im eindimensionalen Beispielfall relativ simpel. Schwieriger wird es, wenn die Anpassung multidimensional erfolgen soll. In diesem Fall muss zunächst ein Merkmalsvektor definiert werden, der die Gruppen voneinander abgrenzt. Der Anspruch, alle Typen von Merkmalsträgern zu erfassen, scheitert schnell an der Umsetzbarkeit. Im Prinzip erzeugen unendlich viele verschiedene Abgrenzungsvektoren eine Unzahl unterschiedlicher Gruppen, so dass der Abbildungswunsch praktisch nicht zu erfüllen ist. In der empirischen Praxis wird daher auf eine geringe Anzahl von Abgrenzungsmerkmalen zurückgegriffen.²⁹ Diese richten sich sowohl nach den vorhandenen Informationen über die Grundgesamtheit als auch nach dem Forschungsziel. *Kortmann* bemerkt hierzu:

„Als ideal ist ein Mikrodatenfile anzusehen, das diejenigen Bevölkerungsgruppen explizit nachweist, deren Lebenslage durch zur Zeit

²⁹ *Percival* identifiziert z.B. 8 Merkmale, darunter Alter, Geschlecht und Bildungsstatus, die den Ansprüchen an den Integrierten Mikrodatenfile für STINMOD, einem statischen Mikrosimulationsmodell, Genüge tun. Vgl. *Harding, A. et al.* (1994, S. 3).

gültige, in der Diskussion befindliche oder in absehbarer Zeit wahrscheinlich diskutierte sozial- oder verteilungspolitische gesetzgeberische Maßnahmen tangiert wird.“³⁰

Nachdem der Vektor der Gruppenabgrenzungen definiert ist, erfolgt die multidimensionale Anpassung, auf die hier nicht näher eingegangen werden soll. Hierzu sei auf die Ausführungen von *Spahn, P.B. et al.* verwiesen.³¹ Ein praktisches Beispiel für die allgemeine Problematik der Hochrechnungsfaktoren findet sich unter 2.3.2 auf S. 32ff.

Der zweite Anpassungsschwerpunkt bei der Erstellung von adäquaten Mikrodatensätzen hat die Angleichung der Merkmale an die durch das Simulationsvorhaben determinierten, notwendigen Anforderungen zum Ziel. Auch hier ist neben der eigentlichen Problematik mangelnder Quantität und Qualität die Aktualität der Merkmalsausprägungen von Bedeutung. Dem letzteren Problem der Aktualität kann in der Regel durch ähnliche Verfahren wie bei der zeitlichen Anpassung der Merkmalsträger begegnet werden. Die skizzierte Nutzung von aktuellen Zusatzinformationen beschränkt sich allerdings nicht nur auf die Bestimmung von Hochrechnungsfaktoren, sondern greift auch direkt in die Merkmalsausprägungen ein. Beispielsweise werden die in den Mikrodatensätzen vorhandenen Informationen zum Merkmal Einkommen künstlich an die aktuelle Einkommenssituation bzw. -entwicklung angepasst. Neben diesen zeitlichen Justierungen steht bei dem zweiten Schwerpunkt der Datensatzerstellung jedoch das Zusammenführen von Datensätzen mit unterschiedlichen Merkmalen im Vordergrund. Dabei können zwei grundsätzliche Typen der Zusammenführung unterschieden werden. Als erstes ist die so genannte exakte Verknüpfung zu nennen. Hier liegen Informationen über ein und denselben Merkmalsträger in zwei oder mehreren unterschiedlichen Datensätzen vor. Kann der Merkmalsträger in den jeweiligen Datensätzen eindeutig identifiziert werden, ist diese Methode der Verschmelzung ideal.³² In der Praxis ist diese eindeutige Identifikation jedoch äußerst selten; mehr noch, diese Zuordnungsmöglichkeit ist von den Vertretern der amtlichen Statistik gänzlich unerwünscht. Die unter 2.1.3 auf S. 9ff. kurz angerissene Forderung der faktischen Anonymität steht dieser Methode diametral entgegen.³³ Die zweite Methode der so genannten statistischen Verknüpfung ist daher die im Normalfall von Forschern gewählte Vorgehensweise. In Abbildung 2.3 ist der Ansatz schematisch dargestellt. Der Datensatz A besitzt zwei Typen von Merkmalen: einerseits Merkmale, die nur in A erfasst wurden und andererseits Merkmale, die sowohl

³⁰*Kortmann, K.* (1982, S. 15).

³¹Vgl. *Spahn, P.B. et al.* (1992, S. 153ff.).

³²Vgl. *Lewis, Michel* (1990, S. 13).

³³Die ungewollte Deanonymisierung wird definiert als die Möglichkeit, Zusatzwissen mit Hilfe von Überschneidungsmerkmalen mit dem Zieldatensatz eindeutig und richtig zu verknüpfen. Vgl. *Statistisches Bundesamt* (2005d, S. 125).

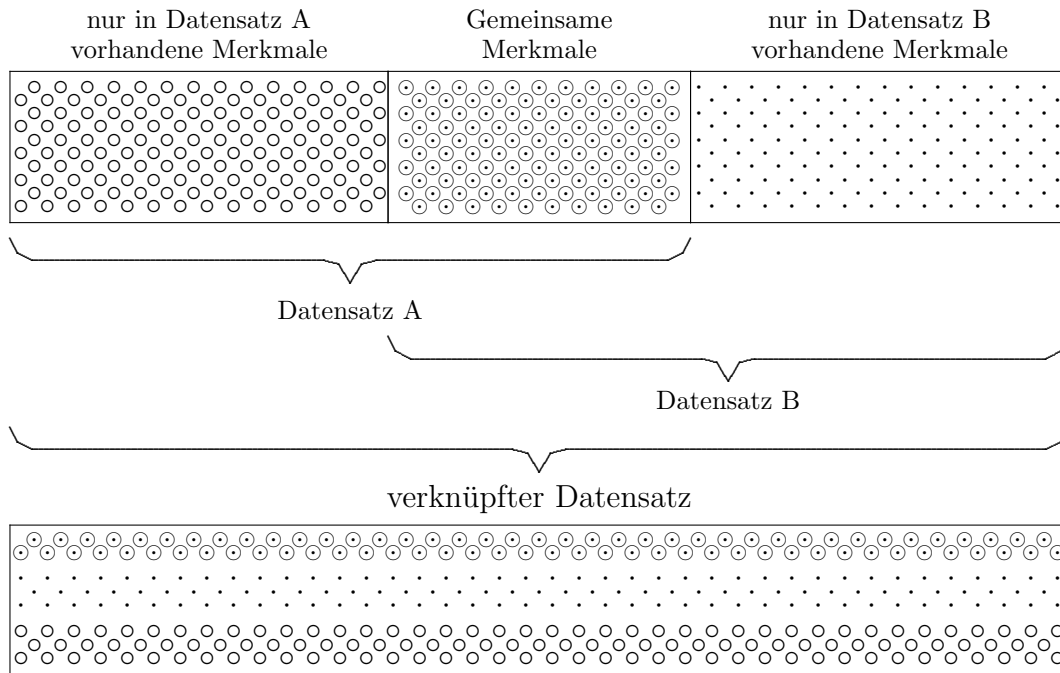


Abbildung 2.3: Verknüpfung der Merkmale (Quelle: Eigene Darstellung).

in Datensatz A als auch in Datensatz B vorhanden sind.³⁴ Auch der Datensatz B besitzt neben den nur dort vorhandenen Merkmalen gemeinsame Merkmale. Die Zusammenführung von A und B erfolgt durch ein so genanntes *Matching* der Merkmalsträger beider Datensätze. Merkmalsträger aus A, die in den Merkmalsausprägungen der gemeinsamen Merkmale den Merkmalsträgern aus B hinreichend ähnlich sind, werden diesen zugeordnet. Nach dieser Zuordnung erfolgt die Verschmelzung der beiden Merkmalsträger.³⁵ Das Ergebnis dieses Verfahrens ist die Verlängerung des Merkmalsvektors im neuen Datensatz. Dieser verknüpfte Datensatz enthält neben den gemeinsamen Merkmalen die Merkmale aus beiden Datensätzen. Die Informationen über einen Merkmalsträger können auch mehrmals im neuen Datensatz Verwendung finden. Ähnelt z.B. der Merkmalsträger B_i aus dem Datensatz B sowohl A_j als auch A_k , können die zusätzlichen Merkmale bzw. Ausprägungen von B_i beiden Merkmalsträgern aus A zugeordnet werden.

Die theoretischen Hintergründe und technischen Details der Prozedur des *Matching* und *Merging* können hier nicht umfassend beschrieben werden. Bezüglich der hier nur grob umrissenen Problemstellung existiert eine Vielzahl von

³⁴In der Abbildung 2.3 ist der erste Merkmalstyp durch ein ○ gekennzeichnet. Die gemeinsamen Merkmale beider Datensätze werden durch ⊙ und die nur in B vorhandenen Merkmale durch ein · abgebildet.

³⁵Vgl. dazu beispielsweise Wiegert, R. (2003, S. 26).

Literatur, deren alleinige Aufzählung schon zu umfangreich wäre. Dennoch sei an dieser Stelle auf einige Standardwerke verwiesen:

Zwei Pioniere auf dem Gebiet der Erstellung integrierter Mikrodatsätze sind zweifellos die Eheleute *Nancy* und *Richard Ruggles*. Ein von ihnen entwickeltes *Matching*-Verfahren, das so genannte *Ruggles*-Verfahren, wurde beispielsweise vom Verfasser zur Zusammenführung von Mikrodaten verwendet. In dem von *Ruggles, Ruggles* herausgegebenen Sammelband *Macro- and Microdata Analyses and their Integration* finden sich mehrere Artikel, die den Einstieg in die Datensatzerstellungsproblematik erleichtern.³⁶ Bei der deutschsprachigen Literatur sind nach Auffassung des Verfassers vor allem die Arbeiten von *Paaß, Wauschkuhn* und *Kortmann* hervorzuheben.³⁷ Bezüglich der Evaluation verschiedener Verknüpfungstechniken sei beispielsweise auf die Arbeit von *Rodgers* und die von *Paaß* und *Wauschkuhn* verwiesen.³⁸

Die bisherigen Anmerkungen zur Erstellung von Datensätzen beruhten auf der grundlegenden Idee der Zusammenführung. Eine weitere Strategie zur künstlichen Erstellung adäquater Mikrodaten ist die Nutzung von Regressionstechniken.³⁹ Dabei wird zunächst in einem Datensatz B ein multiples Regressionsmodell geschätzt. Mittels der geschätzten Regressionsgleichungen können die fehlenden Merkmalsausprägungen in A berechnet werden. Notwendige Voraussetzung für diese Methode ist wiederum das Vorhandensein gemeinsamer Merkmale, welche hier als unabhängige bzw. erklärende Variablen des Regressionsmodells dienen. Diese vergleichsweise einfache Methode hat zweifellos Charme. Gegen die Verfahrensweise spricht allerdings, dass anders als bei dem obigen Verfahren die im Datensatz B vorhandene Varianz nicht aufrecht erhalten bleibt.⁴⁰

Im Folgenden Abschnitt 2.2.2 werden die Möglichkeiten der Modellierung von Anpassungsreaktionen umrissen. Dabei zeigt sich, dass die Schätzung und Anwendung von Regressionsgleichungen eine zentrale Rolle in diesem Bereich spielt. Das unter 2.2.3 beschriebene Nachfragesystem hat als Ergebnis eines solchen Regressionsansatzes mehr Einsatzmöglichkeiten als zunächst vermutet. Es kann neben der Verwendung für die eigentliche Simulation auch bei der Erstellung adäquater Datensätze eingesetzt werden, wobei das Nachfragesystem vielleicht nicht die beste technisch mögliche, sondern auf Grund der doppelten Verwendbarkeit die wirtschaftlichste Methode sein kann. Geschätzte Regressionsgleichungen können demnach sowohl für die Erstellung des Datensatzes als auch für die eigentliche Simulation nützlich sein. Diese Eigenschaft muss bei der Kosten-

³⁶Beispielsweise *Ruggles, Ruggles* (1970 und 1974) und *Ruggles, Ruggles, Wolff* (1977) in *Ruggles, Ruggles* (1999, S. 192-213, 214-234 und 314-324).

³⁷Siehe *Paaß* (1979 und 1982), *Wauschkuhn* (1979) und *Kortmann, K.* (1982).

³⁸Siehe *Rodgers* (1984, S. 91-102) und *Paaß, Wauschkuhn* (1980).

³⁹Vgl. *Bork, C.* (2000, S. 117).

⁴⁰Vgl. *Ruggles, Ruggles* (1974, S. 194).

Nutzenanalyse der Instrumentenwahl Berücksichtigung finden.⁴¹

2.2.2 Modellierung der Anpassungsreaktionen

Das Konzept der Mikrosimulation wurde unter 2.1.1 beschrieben. Ausgangspunkt für die Nachbildung der Reformmaßnahmen ist ein Datensatz, der sowohl bezüglich der Merkmalsträger als auch der Merkmale den Anforderungen genügt. Die Informationen über die Merkmalsausprägungen im erstellten Mikrodatsatz dienen bei der Modellierung der Anpassungsreaktionen als Inputgrößen.

Im einfachsten Fall geht eine Outputgröße, also eine Größe nach Wirkung der zu simulierenden Reform, aus den Input-Ausprägungen durch einfache Berechnung hervor. Die Bestimmung bzw. Programmierung des funktionalen Zusammenhangs stellt keine grundsätzliche Schwierigkeit dar, obgleich die praktische Umsetzung oftmals ein zeitintensives Studium des Reformvorschlages beinhaltet und die Programmierung der Berechnungsvorschrift eine nicht zu unterschätzende potenzielle Fehlerquelle ist. Diese Art der Mikrosimulation wird, wie bereits unter 2.1.1 beschrieben, als *morning-after* Simulation bezeichnet. Bei dieser Art der Simulation zeigt sich auf sehr eingängige Weise die immense Wichtigkeit der Datenqualität. Keine noch so perfekte Programmierleistung kann eventuelle Schwächen in den Daten beheben. Bei *morning-after* Modellen liegt das Hauptaugenmerk daher auf der Erstellung des Datensatzes.

Bei dynamischen Modellen⁴² verschiebt sich der Kostenschwerpunkt in Richtung Nachbildung der Reformmaßnahmen. Die hier zu bestimmenden Output-Größen des Simulationsmodells folgen in ihrer Berechnung nicht mehr eindeutig und direkt aus den aus dem Reformvorschlag ableitbaren Berechnungsvorschriften. Die Parameter des funktionalen Zusammenhangs müssen vielmehr erst durch geeignete Methoden bestimmt werden. Dazu werden in der Praxis neben den eigentlichen Mikrodaten auch andere Informationsquellen genutzt. Dynamische Modellierungen zeichnen sich generell durch einen großen Datenhunger aus.⁴³ Für die Simulation des Todes eines Merkmalsträgers sind beispielsweise Informationen über die Abhängigkeit der Sterbewahrscheinlichkeit von Alter, Geschlecht und anderen Merkmalen von Relevanz. Anpassungsparameter, wie z.B. Heiratswahrscheinlichkeiten, benötigen für ihre Schätzung wiederum andere Daten, so dass schnell ein nicht mehr zu befriedigender Datenbedarf entsteht. Daneben erfordert die eigentliche Schätzung der Parameter und die anschließende programmiertechnische Implementierung der Reaktionen im Mikrosimulationsmodell einen großen Aufwand.⁴⁴

⁴¹Vgl. dazu Abbildung 2.1 und die Ausführungen unter 2.1.3.

⁴²Zum Begriff "dynamische Modelle" siehe die unter 2.1.1, S. 5ff., getroffene Abgrenzung.

⁴³Vgl. *Harding, A.* (1993, S. 29).

⁴⁴Beispielsweise versuchen *Creedy, J. et al.* (2002) im **Melbourne Institute Tax and Transfer**

Das allgemeine Modell der Simulation der Anpassungsreaktionen kann durch

$$\begin{pmatrix} A^1 & A^2 & \cdots & A^H \\ A^1 & A^2 & \cdots & A^H \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A^1 & A^2 & \cdots & A^H \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} \mathcal{I}^1 \\ \mathcal{I}^2 \\ \vdots \\ \mathcal{I}^H \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{O}^1 \\ \mathcal{O}^2 \\ \vdots \\ \mathcal{O}^H \end{pmatrix}$$

skizziert werden. Das \odot bezeichnet dabei einen beliebigen funktionalen Zusammenhang. In diesem sehr allgemeinen Schema sind die Matrizen der Anpassungsparameter A^h der einzelnen H Mikrosimulationseinheiten bzw. Haushalte abgebildet. Die H Parametermatrizen A^h determinieren durch die funktionale Verknüpfung mit den Inputvektoren \mathcal{I}^h die Outputvektoren \mathcal{O}^h , jeweils mit $h = 1, \dots, H$. Die einzelnen Inputvektoren können grundsätzlich in ihrer Länge variieren und Outputvektoren des entsprechenden Haushalts aus Vorperioden enthalten.⁴⁵ Für den obigen allgemeinen Fall sei zunächst nur die Annahme der zeitlichen Konstanz der A^h getroffen.⁴⁶ Der Outputvektor des Haushalts h in der Periode t ist folglich in diesem Fall eine Funktion aller Inputvektoren und aller Parametermatrizen. Im eingangs erwähnten einfachen Fall der *morning-after* Simulation sind alle Parameter und Inputvektoren bekannt und die Bestimmung des Outputvektors beschränkt sich auf die Nachbildung der Verknüpfung \odot . Im dynamischen Modell hingegen müssen, wie schon angedeutet, die Parameter in den Matrizen A^h und die funktionale Verknüpfung bestimmt werden. Dies stellt eine ohne weitere Vereinfachungsannahmen praktisch nicht zu lösende Aufgabe dar.

Vetterle weist darauf hin, dass multiplikative Verknüpfungen oder Polynome durch geeignete Transformationen und Substitutionen linearisiert werden können. Des Weiteren gelingt durch die Annahme der alleinigen Abhängigkeit des Outputs \mathcal{O}^h von zu dem Haushalt h gehörenden Merkmalsausprägungen (Inputvektor \mathcal{I}^h) eine starke Vereinfachung des obigen allgemeinen Modells.⁴⁷

$$\begin{pmatrix} A^1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A^H \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathcal{I}^1 \\ \mathcal{I}^2 \\ \vdots \\ \mathcal{I}^H \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{O}^1 \\ \mathcal{O}^2 \\ \vdots \\ \mathcal{O}^H \end{pmatrix}.$$

Simulator (MITTS) die Anpassungsreaktionen der Haushalte hinsichtlich des Arbeitsangebotes nachzubilden. Selbst diese begrenzte Aufgabenstellung erfordert erheblichen Aufwand. Für Deutschland erfolgte ein erster Versuch der Arbeitsangebotsmodellierung im Jahre 1989. Vgl. dazu *Kaiser, van Essen, Spahn* (1994, S. 152-175).

⁴⁵Formal dargestellt: $\mathcal{I}_t^h = \left(\mathcal{I}_{1t}^h, \dots, \mathcal{I}_{it}^h, \dots, \mathcal{I}_{mt}^h, \mathcal{O}_{1(t-k)}^h, \dots, \mathcal{O}_{j(t-k)}^h, \dots, \mathcal{O}_{n(t-k)}^h \right)^T$. Der Laufindex i bezeichnet hier die Merkmale m des Basisdatensatzes und der Laufindex j steht für die Neumerkmale n , die zu verschiedenen $k > 0$ generiert wurden.

⁴⁶Diese Annahme entspricht der Verhaltenskonstanz der jeweiligen Haushalte h über die Zeit.

⁴⁷Vgl. *Vetterle, H.* (1986, S. 83ff.). Zur Schätzung von nichtlinearen Regressionsmodellen siehe beispielsweise *Greene, W.H.* (2003, S. 162ff.).

Ohne auf technische Details wie z.B. die Identifizierbarkeit der Parameter oder die Eigenschaften der zu ergänzenden Fehlermatrix etc. einzugehen, stellt das obige System ein klassisches statistisches Problem dar.⁴⁸ Die Bestimmung der Verhaltensparameter kann grundsätzlich durch die Schätzung dieses multiplen Regressionsmodells erfolgen. Ob weitere vereinfachende Annahmen getroffen werden müssen, hängt primär von der Datenlage ab. Sind z.B. keine hinreichenden Längsschnittdaten über jeden einzelnen Haushalt h erhältlich, muss die Annahme der Verhaltensgleichheit zwischen den Haushalten getroffen werden, um eine Schätzung zu ermöglichen. In diesem Fall würde sich das System auf

$$\begin{pmatrix} A & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathcal{I}^1 \\ \mathcal{I}^2 \\ \vdots \\ \mathcal{I}^H \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{O}^1 \\ \mathcal{O}^2 \\ \vdots \\ \mathcal{O}^H \end{pmatrix}$$

reduzieren. Es gilt dann: $A = A^1 = A^2 = \cdots = A^H$. Diese oftmals absolut notwendige Annahme wird im Grundsatz auch für die Schätzung von Nachfragesystemen aus Querschnittsdaten verwandt.⁴⁹

Wie kurz gezeigt wurde, ist die Erstellung eines anspruchsvollen dynamischen Mikrosimulationsmodells mit vielfältigen Schwierigkeiten verbunden. Alle möglichen Anpassungsreaktionen eines Haushalts abzubilden, ist nach heutigem Erkenntnisstand nicht möglich. Wie schon unter 2.1.3 angeführt, muss der Nutzen den Aufwand einer jeden Modellierung rechtfertigen.⁵⁰ Im nächsten Abschnitt wird auf die Anpassungsreaktionen der Haushalte in Bezug auf ihre Nachfrage nach Gütern eingegangen. Es wird dabei versucht, den Nutzen dieser Art der Modellierung herauszuarbeiten und cursorisch mögliche Schwierigkeiten, grundlegende Lösungsansätze und Kosten aufzuzeigen.

2.2.3 Nachfragesysteme in der Mikrosimulation

Es liegt in der Natur von Steuer- und Transferreformen, dass sie die individuellen Einkommenssituationen verändern. Des Weiteren verändern derartige Maßnahmen in bestimmten Fällen auch direkt die Preise von Gütern. Insbesondere Reformen, die eine Änderung spezifischer Verbrauchssteuern zum Inhalt haben, bewirken Preisveränderungen.⁵¹ Sie sind in der Regel das Mittel, um vom Gesetzge-

⁴⁸Es sei bezüglich der technischen Details wiederum auf *Vetterle, H.* (1986, S. 88ff.) und auf *Greene, W.H.* (2003, S. 339ff.) verwiesen. Insbesondere für Problemlösungen bei der Parameterbestimmung in Situationen mit qualitativen Outputmerkmalen (z.B. 0-1-Form, wie 0 für das Sterben und 1 für das Überleben der Mikroeinheit) bietet *Ronning, G.* (1991) einen sehr guten Überblick.

⁴⁹Vgl. dazu Kapitel 5.

⁵⁰Vgl. *Galler, H.P.* (1990, S. 297).

⁵¹Zur Überwälzung von indirekten Steuern siehe z.B. *Petersen, H.-G.* (1993, S. 310ff.).

ber gewollte Anpassungsreaktionen der Wirtschaftssubjekte hervorzurufen. Eine Analyse, die Reaktionen der Mikroeinheiten auf Einkommens- und Preisänderungen nicht berücksichtigt, hat daher nur begrenzte Aussagekraft. Nachfragesysteme versuchen, diese Qualitätslücke zu schließen. Ihnen liegt dabei die Annahme zugrunde, dass die Veränderungen der Güternachfrage eines Haushalts primär von den genannten Veränderungen des Haushaltseinkommens und des Preisvektors beeinflusst werden.⁵²

Exemplarisch für den Nutzen von Nachfragesystemen sei folgendes Szenario angeführt: In einem Land soll die geltende Einkommensteuergesetzgebung grundlegend reformiert werden. Zumindest in demokratischen Gesellschaftsordnungen wird ein solches Vorhaben von umfassenden politischen Diskussionen begleitet. Dabei stehen in der Regel zwei Fragen im Mittelpunkt: Die erste bezieht sich auf die Kosten einer derartigen Reform. In Zeiten knapper öffentlicher Kassen kann ein Vorhaben dieser Art wahrscheinlich nur dann die politischen Hürden überwinden, wenn glaubhaft vermittelt werden kann, dass die Implementierung der neuen Regelungen aufkommensneutral gelingt. Die zweite Frage bezieht sich immer auf die Verteilungswirkungen der Reform. Wer bzw. welche Bevölkerungsgruppe gewinnt und wer verliert verfügbares Einkommen durch die Neuregelung der Einkommensteuer? Dabei ist es eine Binsenweisheit, dass bei angestrebter Aufkommensneutralität und der Vernachlässigung etwaiger durch die Reform implizierter, langfristiger Wachstumseffekte einer Gruppe von Gewinnern immer eine Gruppe von Verlierern gegenüberstehen muss.⁵³ Für die Beantwortung der zwei Fragestellungen eignen sich Mikrosimulationsmodelle in besonderem Maße.⁵⁴

Bei der Abschätzung der Reformwirkungen unter dem Postulat der Aufkommensneutralität wird bei statischen Mikrosimulationsmodellen die Einkommensteuerregelung nachgebildet und die Bemessungsgrundlage eines jeden Einkommensteuerpflichtigen bestimmt. Anschließend werden die tarifären Parameter so eingestellt, dass sie annähernd das alte Einkommensteueraufkommen generieren.⁵⁵ Ist dies geschehen, erfolgt die Gewinner-Verlierer-Analyse durch Anwendung des Einkommensteuerreformvorschlags mit den ermittelten, aufkommensgleichen Parametern. Dieses Vorgehen ist für die kurzfristige *morning-after* Be-

⁵²Es besteht auch die Möglichkeit, soziodemographische Besonderheiten eines Haushalts in den die Anpassungsreaktionen determinierenden Inputvektor aufzunehmen. Siehe dazu 6.1 auf S. 143.

⁵³Aller trivialen Erkenntnis zum Trotz scheint bei einigen Vertretern aus Politik und Medien immer noch der Wunsch "Wasch mir den Pelz aber mach mich nicht nass" das Leitbild ihrer Argumentation zu sein.

⁵⁴Siehe dazu 2.1.2, S. 8f. Es sei an dieser Stelle auch an die mediale Berichterstattung im Jahre 2005 bezüglich des Steuerreformvorschlags von Paul Kirchhof erinnert, die der aus der Passionsgeschichte bekannten Reihenfolge *-Hosiana-* und *-kreuziget ihn-* folgte. Nach Auffassung des Verfassers wäre angesichts der schwierigen Situation unseres Landes eine Versachlichung der Debatte und der nüchterne Umgang mit dem Thema der Problematik eher gerecht geworden.

⁵⁵Vgl. beispielsweise *Anton, Brehe und Petersen* (2002, S. 42-121).

trachtung geeignet, greift aber in der mittleren und langen Frist zu kurz. Die Ungenauigkeiten folgen dabei nicht nur aus Anpassungen der Haushalte bezüglich des Arbeitsangebots etc., also aus einkommensteuerlich relevanten Reaktionen, sondern auch aus den durch die Veränderung des verfügbaren Einkommens implizierten Nachfrageänderungen. Der Begriff Aufkommensneutralität wird bei letzterer Betrachtung weiter gefasst. Hier finden auch Änderungen der Steuereinnahmen aus der Güterbesteuerung Beachtung. Sinkt das verfügbare Einkommen des Haushalts, ist eine Nachfrageänderung nahezu zwangsläufig.⁵⁶ Trifft die Nachfragereduktion⁵⁷ besonders Bereiche mit einer hohen steuerlichen Belastung, wie z.B. Mineralöl oder Tabakwaren, sind die Auswirkungen auf den Staatshaushalt umso intensiver. Die Schätzung und Anwendung von Nachfragesystemen bei der Mikrosimulation ist folglich selbst dann begründbar, wenn die nachzubildenden Maßnahmenbündel keine direkten Änderungen der Preise zum Inhalt haben.

Empirisch geschätzte Nachfragesysteme ermöglichen prinzipiell auch die Erweiterung der Gewinner-Verlierer-Analyse. Sie sind somit auch für die zweite oben erwähnte Fragestellung nach den Verteilungswirkungen von gewissem Interesse. Es sei angenommen, eine Steuerreform versucht die Aufkommensneutralität dadurch zu erzielen, dass die Senkung der Einkommensteuertarife durch eine Erhöhung von Verbrauchssteuern gegenfinanziert werden soll. Nachfragesysteme sind in diesem Beispiel nicht nur für die Bestimmung der Verbrauchsteuereinnahmen von Bedeutung, sondern auch dafür, ob der einzelne Haushalt durch die Senkung der Einkommensteuer bei gleichzeitiger durch die Verbrauchssteuererhöhung induzierter Preiserhöhung besser-, schlechter- oder gleichgestellt ist. Dabei ist es notwendig, den durch die Preiserhöhung verursachten Nutzenverlust eines Haushalts monetär zu bewerten. Nur so kann festgestellt werden, ob sich der in Geldeinheiten ausgedrückte Nutzen eines Haushalts verändert hat. Einer der ersten Versuche der Beantwortung dieser Fragestellung geht auf den britischen Ökonomen *Alfred Marshall* zurück.⁵⁸ Der ursprüngliche Ansatz wurde u.a. entscheidend von *John R. Hicks* verbessert bzw. konkretisiert und dadurch in seinem Erklärungsgehalt gerettet.⁵⁹ Ohne zu sehr auf Details der ideengeschichtlichen Entwicklung eingehen zu wollen, sei hier ein kurzer Überblick über das Konzept der so genannten Konsumentenrente gegeben,⁶⁰ um zu verdeutlichen, welchen Beitrag Nachfragesysteme in diesem Bereich leisten können und wo ihre Grenzen liegen. Die Veränderung der im *Hicksschen* Sinne verbesserten Konsum-

⁵⁶Die Möglichkeit des Entsparens sei hier einmal vernachlässigt.

⁵⁷Es kann bei der Reduktion von Einkommen auch zu Nachfragesteigerungen von bestimmten Gütern kommen.

⁵⁸Vgl. *Marshall A.* (1890), Nachdruck 1956. *Marshall* greift dabei ein von *Dupuit J.* (1869 [1844], S. 255-283) hervorgebrachtes Konzept auf.

⁵⁹Vgl. hier z.B. *Hicks J.R.* (1941, S. 108-116) oder *Hicks J.R.* (1943, S. 31-41), aber auch *Henderson, A.* (1941, S. 117-121) oder *Bishop, R.L.* (1943, S. 421-449).

⁶⁰Beispielsweise bietet *Dooley P.C.* (1983, S. 26-38) bezüglich der ideengeschichtlichen Entwicklung bzw. der Kritik am Konzept der Konsumentenrente einen exzellenten, umfassenden Überblick.

umentenrente, also die monetarisierte Nutzenveränderung, entspricht der durch eine Preisveränderung determinierten Fläche links neben der *Hicks*schen Nachfragekurve. Auf der linken Seite in Abbildung 2.4 ist dies skizziert,⁶¹ wobei hier vereinfachend eine lineare Nachfragekurve angenommen wurde.⁶² Formal folgt

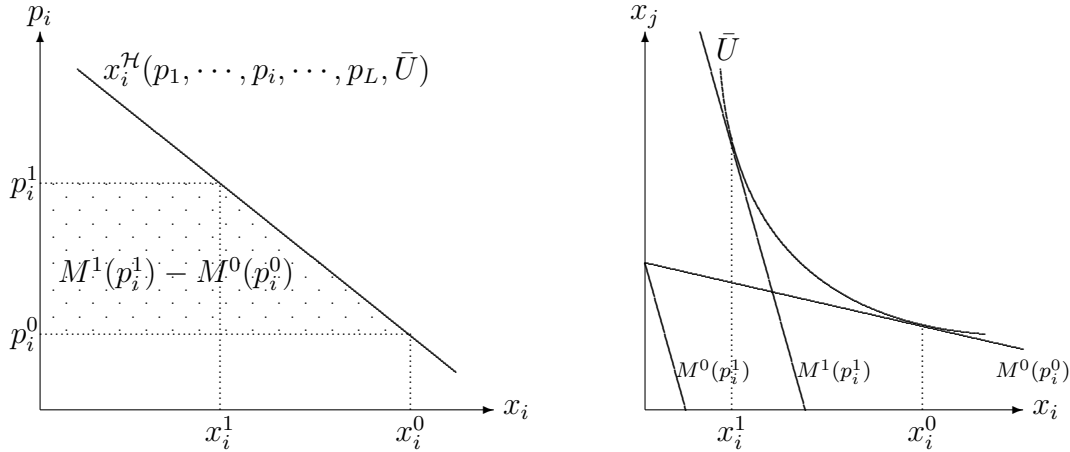


Abbildung 2.4: Die Konsumentenrente nach *Hicks* (Quelle: Eigene Darstellung).

dieser Zusammenhang bzw. die monetarisierte Nutzenveränderung aus:⁶³

$$-\int_{p^0}^{p^1} x_i^H dp_i = -\int_{p^0}^{p^1} \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial p_i} dp_i = \mathcal{A}(p^0, \bar{U}) - \mathcal{A}(p^1, \bar{U}) = M^0(p^0, \bar{U}) - M^1(p^1, \bar{U}).$$

Dieser Zusammenhang ermöglicht theoretisch die Bewertung von Preisänderungen in Geldeinheiten. Dabei ist es unerheblich, wie viele und in welcher Reihenfolge Preise geändert werden.⁶⁴ Die Idee lautet: Wie viele Geldeinheiten muss der

⁶¹Die rechte Seite der Abbildung 2.4 zeigt die durch einen Einkommenszuwachs kompensierte Reaktion des Haushalts auf die Preisänderung. Der Haushalt kompensiert durch Einkommen, bis er wieder das Nutzenniveau \bar{U} erreicht hat: $(M^0(p_i^0) \rightarrow M^0(p_i^1) \rightarrow M^1(p_i^1))$.

⁶²Zur nutzentheoretischen Fundierung linearer Nachfragekurven siehe *Kneis, Schöler* (2003, S. 571-580).

⁶³Sowohl in der Abbildung 2.4 als auch in der formalen Darstellung steht p^0 für den Preisvektor vor und p^1 für den Preisvektor nach der Reform. Auch alle anderen Notationen entsprechen denen in Kapitel 3. Dort werden des Weiteren die Beweise für die Konsumentenrentenformel präsentiert. An dieser Stelle sei dazu lediglich folgendes angemerkt: \bar{U} steht für ein konstantes Nutzenniveau. M steht für das Einkommen und \mathcal{A} für die Ausgaben (jeweils auf Konsumgüter bezogen). Die duale Beziehung zwischen M und \mathcal{A} und der Zusammenhang $x_i^H = \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial p_i}$ wird ebenfalls in Kapitel 3 erläutert.

⁶⁴Die Reihenfolge der Preisänderungen ist nicht relevant. Diese Eigenschaft wird auch als Pfadunabhängigkeit bezeichnet. Es gilt für die Summe (Σ) der Änderungen: $-\Sigma \int_{p^0}^{p^1} x_i^H dp_i = -\int_{p^0}^{p^1} \Sigma \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial p_i} dp_i = -\int_{p^0}^{p^1} d\mathcal{A} = \mathcal{A}(p^0, \bar{U}) - \mathcal{A}(p^1, \bar{U}) = M^0(p^0, \bar{U}) - M^1(p^1, \bar{U})$. Die Konsumentenrente bei der *Marshall*nachfrage besitzt diese Eigenschaft nur unter sehr restriktiven Annahmen.

Haushalt erhalten (oder angeben), um das Nutzenniveau vor der Preisänderung zu erreichen?⁶⁵ Der kritische Leser wird hier zu Recht einwenden, dass dies die Kenntnis des individuell gefühlten Nutzens erfordert. In der Tat kann die empirische Nachfrageanalyse keine *Hicksschen* Nachfragekurven schätzen, sondern nur aus der Dualität zweier Optimierungsüberlegungen determinierte und somit theoretische Reaktionen wie beispielsweise *Hickssche* Preiselastizitäten bestimmen.⁶⁶ Wird das Konzept der Konsumentenrente auf die empirisch schätzbaren *Marshalln*achfragekurven angewendet, so zeigt sich zunächst die Pfadabhängigkeit, da λ^M abhängig von den Preisen ist und somit nicht vor das Integral gezogen werden kann:⁶⁷

$$-\int_{p^0}^{p^1} x_i^M dp_i = -\int_{p^0}^{p^1} \frac{1}{\lambda^M} \lambda^M x_i^M dp_i = \int_{p^0}^{p^1} \frac{1}{\lambda^M} \frac{\partial \mathcal{N}}{\partial p_i} dp_i.$$

Für den *Marshall*schen Lagrangemultiplikator λ^M muss daher zunächst die Unabhängigkeit von Preisänderungen angenommen werden ($\frac{\partial \lambda^M}{\partial p_i} = 0 \forall i = 1, \dots, L$). Da er des Weiteren homogen vom Grade (-1) ist, gilt gemäß *Eulerscher* Homogenitätsrelation:⁶⁸

$$\sum_{i=1}^L p_i \frac{\partial \lambda^M}{\partial p_i} + M \frac{\partial \lambda^M}{\partial M} = -\lambda^M.$$

Die Möglichkeit, λ^M vor das Integral zu ziehen, impliziert daher $M \frac{\partial \lambda^M}{\partial M} = -\lambda^M$ bzw. nach der Division durch $-\lambda^M$ eine Einkommenselastizität von 1, da hier $-\frac{M}{\lambda^M} \frac{\partial \lambda^M}{\partial M} = 1 = \frac{M}{x_i^M} \frac{\partial x_i^M}{\partial M}$ gilt.⁶⁹ Folglich muss die Nutzenfunktion homothetisch

⁶⁵Dieser Ansatz wird als *kompensierende Variation* bzw. *compensating variation* bezeichnet. Vgl. beispielsweise *Henderson, A.* (1941, S. 117). Alternativ hierzu kann die Frage gestellt werden, wie viele Geldeinheiten der Haushalt erhalten (oder angeben) muss, um das Nutzenniveau nach der Preisänderung zu erreichen. Diese Überlegung wird mit dem Begriff *äquivalente Variation* umschrieben. *Kaiser* formalisiert den Unterschied beider Konzepte mittels der Ausgabenfunktion: *kompensierende Variation*: $\mathcal{A}(p^1, \bar{U}^1) - \mathcal{A}(p^1, \bar{U}^0)$ versus *äquivalente Variation*: $\mathcal{A}(p^0, \bar{U}^1) - \mathcal{A}(p^0, \bar{U}^0)$. Vgl. *Kaiser, H.* (1990, S. 12). Anmerkung des Verfassers: Es gilt dabei $\mathcal{A}(p^1, \bar{U}^1) = \mathcal{A}(p^0, \bar{U}^0)$.

⁶⁶Siehe dazu die folgenden Kapitel. Die genannte Reaktion wird mittels des *Slutsky*-Zusammenhangs berechnet.

⁶⁷Auch die dieser Beziehung zugrunde liegenden theoretischen Erkenntnisse, wie *Roys Identität*: $-\lambda^M x_i^M = \frac{\partial \mathcal{N}}{\partial p_i}$, werden im folgenden Kapitel 3 hergeleitet. Der Lagrangemultiplikator λ^M wird näher unter 3.3.5 auf S. 66 erläutert und kann als Grenznutzen des Einkommens interpretiert werden. Siehe dazu auch Fußnote 71, S. 25.

⁶⁸Der *Marshall*sche Lagrangemultiplikator richtet die Länge des Preisvektors mit der Länge des von den *Marshall*schen Nachfragemengen determinierten Gradienten der Nutzenfunktion gleich. Da bei gleichzeitiger Vervielfachung des Einkommens und aller Preise die *Marshall*schen Nachfragemengen unverändert bleiben (x^M ist homogen vom Grade 0), bleibt auch der Gradient unverändert ($\nabla U(x^M(sp, sM)) = \lambda^M(sp, sM)sp = \nabla U(x^M(p, M))$). Der Zusammenhang $s^{-1}\lambda^M(p, M)sp = \nabla U(x^M(p, M))$ verdeutlicht die genannte Homogenitätseigenschaft. Siehe dazu: 3.2.1, S. 51; 3.2.3, S. 54; A.15, S. 209 und zur Veranschaulichung Abbildung A.6, S. 199.

⁶⁹Die Beziehung $-\frac{M}{\lambda^M} \frac{\partial \lambda^M}{\partial M} = \frac{M}{x_i^M} \frac{\partial x_i^M}{\partial M}$ kann wie folgt hergeleitet werden: Gemäß dem *Satz*

sein, wobei gleichzeitig der linearhomogene Spezialfall durch $\frac{\partial \lambda^M}{\partial M} \neq 0$ ausgeschlossen ist.⁷⁰ Sind all diese Bedingungen erfüllt, kann durch das Herauslösen des "Grenznutzens des Geldes" λ^M aus dem Integral folgende Lösung erlangt werden, wobei der Term $\frac{1}{\lambda^M}$ die Differenz des Nutzens monetarisiert:⁷¹

$$\int_{p^0}^{p^1} \frac{1}{\lambda^M} \frac{\partial \mathcal{N}}{\partial p_i} dp_i = \frac{1}{\lambda^M} \int_{p^0}^{p^1} \frac{\partial \mathcal{N}}{\partial p_i} dp_i = \frac{1}{\lambda^M} (\mathcal{N}(p^1, M) - \mathcal{N}(p^0, M)).$$

Eine individuelle Bewertung der durch die Preisänderung verursachten Nutzenänderung ($\mathcal{N}(p^1, M) - \mathcal{N}(p^0, M)$) benötigt also selbst bei Geltung aller genannten Eigenschaften der Nutzenfunktion zusätzlich Erkenntnisse über den individuellen "Grenznutzen des Geldes" λ^M . Unglücklicherweise scheitert die empirische Analyse an dieser Aufgabe, was in den folgenden Kapiteln zu zeigen sein wird.⁷² An dieser Stelle sei deshalb lediglich angemerkt, dass bei der klassischen Form der Haushaltsbeobachtung das analytische Problem in der nicht beobachtbaren, persönlichen Empfindung des Nutzens besteht. Vielleicht können zukünftig experimentalanalytische Versuche in diesem Bereich Fortschritte erzielen, aber bis dahin bleibt die Bestimmung von λ^M ein nicht zu lösendes Rätsel. Trotz aller Probleme und Ungenauigkeiten wird jedoch in der Praxis mit der *Marshallschen* Konsumentenrente argumentiert und diese als Näherung für die *Hickssche* Konsumentenrente betrachtet. Dies geschieht zu Recht, da dieser Ansatz das bestmögliche Instrument repräsentiert und keine in der Qualität vergleichbaren Alternativen zur Verfügung stehen. *Silberberg, E.* fasst es so zusammen: „Scientific objectivity requires that areas to the left of empirical demand curves be regarded as estimates of compensating variations in money income and not some vague idea

von Schwarz (vgl. A.8, S. 200) gilt: $\mathcal{N}_{p_i M} = \mathcal{N}_{M p_i}$ und somit wegen der Ableitung von $\mathcal{N}_{p_i} = -\lambda^M x_i^M$ (*Roys Identität*) nach M und $\mathcal{N}_M = \lambda^M$ nach p_i : $\mathcal{N}_{p_i M} = -\left[\lambda^M \frac{\partial x_i}{\partial M} + x_i^M \frac{\partial \lambda^M}{\partial M}\right] = \frac{\partial \lambda^M}{\partial p_i} = \mathcal{N}_{M p_i}$. Für den hier relevanten Fall $\frac{\partial \lambda^M}{\partial p_i} = 0$ folgt nach Multiplikation mit M und kurzer Umformung die obige Beziehung $-\frac{M}{\lambda^M} \frac{\partial \lambda^M}{\partial M} = \frac{M}{x_i^M} \frac{\partial x_i^M}{\partial M}$.

⁷⁰Eine Einkommenselastizität von 1 impliziert homothetische Nutzenfunktionen. Vgl. A.16, S. 209. Zum linearhomogenen Spezialfall $\frac{\partial \lambda^M}{\partial M} = 0$ siehe A.22, S. 227. Die häufig im Zusammenhang mit der *Marshallschen* Konsumentenrente geforderte "Konstanz des Grenznutzens des Geldes" ist wörtlich genommen falsch. Sie kann sich, wie gezeigt, entweder vollständig auf die Preise beziehen oder λ^M ist mindestens in einem Preis flexibel und dafür im Einkommen konstant. Vgl. dazu beispielsweise *Morey, E.R.* (1984, S. 167).

⁷¹ λ^M gibt an, wie sich der Nutzen ändert, wenn eine marginale Geld- bzw. Einkommenseinheit mehr zur Verfügung steht. Die Maßeinheit ist somit $\frac{\text{Nutzeinheit}}{\text{Geldeinheit}}$. Da die Differenz des Nutzens in Nutzeneinheiten gemessen wird, bewirkt die Multiplikation mit $\frac{1}{\lambda^M}$ eine Umwandlung in Geldeinheiten.

⁷²Die Versuche, aus *Marshallschen* Nachfragekurven gute Näherungen für *Hickssche* Nachfragekurven zu gewinnen und so das Problem zu lösen, beschränken sich nach Kenntnis des Verfassers auf die Schätzung aggregierter Marktnachfragen. Das eigentliche Problem der individuellen Bewertung des Nutzens wird hier umgangen. Vgl. beispielsweise *Hausman, J.A.* (1981, S. 662-676).

of consumer's gains from utility changes."⁷³

Ein geschätztes Nachfragesysteme ist rein technisch in der Lage,⁷⁴ jeder beliebigen Preisvektor-Einkommens-Kombination den nutzenoptimalen Vektor der Güternachfrage zuzuordnen. Bei Mikrodatensätzen ist ein Merkmalsvektor der Güternachfrage eines einzelnen Haushalts nicht immer gegeben. Empirisch geschätzte Nachfragesysteme können in diesen Fällen bei der möglicherweise notwendigen Anpassung des Datensatzes helfen, wobei diese Technik wahrscheinlich nicht die bestmöglichen Ergebnisse liefert.⁷⁵ Die Methode ist jedoch im Vergleich zu anderen Strategien der Datensatzverbesserung recht kostengünstig, zumindest bei einem schon vorhandenen Nachfragesystem. Als Inputmerkmale genügen das für den Konsum genutzte Haushaltseinkommen, ein Preisvektor und eventuell integrierte soziodemographische Merkmale.⁷⁶ Alle Haushalte mit gleichem Inputvektor besäßen dann die gleiche Güternachfrage. *Kassella* weist in diesem Zusammenhang auf die mögliche Erzeugung einer künstlichen Streuung durch eine Monte-Carlo-Simulation hin.⁷⁷

Wie bei allen dynamischen Modellierungen hängt die Güte der Nachbildung der Reaktionen zu einem Großteil von den zur Verfügung stehenden Daten ab. Im Abschnitt 2.3 wird daher ein Überblick über die Mikrodatensituation im Hinblick auf die Konsumnachfrage gegeben. Die Möglichkeiten, die diese Daten für die Schätzung von Nachfragesystemen bieten, werden im Anschluss an dieses Kapitel umfassend untersucht. Es zeigt sich, dass selbst bei dieser stark begrenzten Anzahl der einflussnehmenden Merkmale (Einkommen und Güterpreise) die empirische Bestimmung der Anpassungsreaktionen sehr schwierig ist. Das Ziel der Ermittlung von Einkommens- und Preiselastizitäten kann nur durch massive Vereinfachungen erreicht werden. Sinnvoller Weise erfolgen diese Vereinfachungen durch die Nutzung theoretischer Erkenntnisse der Mikroökonomie, da alle anderen Simplifizierungen absolut willkürlich wären und somit jeglicher Wissenschaftlichkeit entbehrten. Die durch diese Strategie verursachten Einschränkungen der Anpassungsparameter müssen bei ihrer Anwendung in der Mikrosimu-

⁷³*Silberberg, E.* (1972, S. 951).

⁷⁴Die Einschränkung "technisch" bezieht sich hier auf die teilweise vorhandene, lokale Beschränkung des Systems. Bestimmte Nachfragesysteme liefern nur sinnvolle Ergebnisse, wenn sie in einem bestimmten Bereich des Preise-Einkommen-Raums Anwendung finden. Sie bilden die Präferenzordnung des Haushalts nur lokal ab. Vgl. dazu z.B. Abbildung 4.4, S. 88, und die dazugehörigen Ausführungen. Eine globale Anwendung könnte hier zu negativen Mengen und somit zu unsinnigen Ergebnissen führen.

⁷⁵Siehe dazu die Ausführungen zu 2.2.1, S. 12ff.

⁷⁶Alternativ zu der direkten Integration soziodemographischer Merkmale in Nachfragesysteme können auch für verschiedene Subpopulationen spezielle Systeme geschätzt werden und diese dann anschließend in den jeweiligen Untergruppen Anwendung finden. Vgl. dazu 6.1, S. 143ff.

⁷⁷Vgl. *Kassella, T.* (1994, S. 157).

lation und bei der Auswertung und Beurteilung der Simulationsergebnisse unbedingt berücksichtigt werden. Dabei ist vor allem die Frage zu stellen, ob die unter Zuhilfenahme von Nachfragesystemen gewonnene Analyseergebnisse nicht schon a priori durch die Theorie festgelegt wurden. Als ein Extrembeispiel sei hier die Schätzung eines PES-Systems genannt. Bei dieser starken Form der Vereinfachung entsprechen die Einkommenselastizitäten aller Güter exakt Eins. Die Kosten für die Schätzung und Implementierung dieses Nachfragesystems könnten somit nicht gerechtfertigt werden, wenn das Ziel nur die Ermittlung eben dieser Einkommenselastizitäten wäre.⁷⁸ In den nachfolgenden Kapiteln wird daher die den Nachfragesystemen zugrunde liegende Theorie mit all ihren Wirkungen untersucht, um das bei gegebener Datenlage empirisch mögliche, flexibelste System zu ermitteln.

2.3 Mikrodaten für Nachfragesysteme

Das in der Bundesrepublik für Forschungsvorhaben zur Verfügung stehende Angebot an Mikrodatensätzen ist, beginnend mit dem 1989 erstmals als Scientific Use File zur Verfügung gestellten Mikrozensus, in den letzten Jahren stetig gestiegen.⁷⁹ Einführend soll ein keinen Anspruch auf Vollständigkeit erhebender Überblick über derzeit erhältliche Mikrodatensätze in Deutschland gegeben werden. Auf eine Darstellung von Datensätzen, die explizit keine Mikrostruktur besitzen, wird dabei verzichtet.⁸⁰ Informationen aus Erhebungen, wie beispielsweise die aus der Volkswirtschaftlichen Gesamtrechnung, haben zweifelsohne Bedeutung für die Mikrosimulation, was u.a. die Ausführungen unter 2.2.1 verdeutlichen. Dennoch soll hier keine Aufzählung derartiger Erhebungen erfolgen.

Die eine Haushalts-Mikrostruktur besitzenden Datensätze werden im Folgenden hinsichtlich ihrer Eignung für die Schätzung von Nachfragesystemen überprüft. Es zeigt sich, dass einzig und allein die Einkommens- und Verbrauchs-Stichprobe (EVS) den grundlegenden Anforderungen an die Datenbasis genügt. Daher wird speziell für diesen Datensatz die Erhebungsmethode skizziert. Anschließend werden die in der EVS erfassten Merkmale über den Verbrauch von Haushalten benannt und eingehender untersucht.

2.3.1 Anforderungen und allgemeiner Überblick

Die aus dem Wunsch nach der Schätzung eines Nachfragesystems folgenden Anforderungen an Mikrodatensätze gehen direkt aus den Erläuterungen unter 2.2.2

⁷⁸Siehe dazu 5.1, S. 114ff.

⁷⁹Davor konnten nur einzelne, ausgewählte Forscher amtliche Individualdaten nutzen. Vgl. Lüttjäger P. et al. (2003, S. 154).

⁸⁰Einen allgemeineren Überblick über für steuerpolitische Simulationsrechnungen geeignete Datensätze bieten z.B. Bork, C. und Petersen, H.-G. (1997).

und 2.2.3 hervor. Ein Datensatz muss auf der Haushaltsebene erfasste Informationen über das Einkommen, detaillierte Konsumausgaben und demographische Merkmale besitzen und dabei eine hinreichende Repräsentativität für die zu untersuchende Gesamtpopulation gewährleisten.⁸¹ Die im Folgenden genannten ausgewählten Datensätze werden kursorisch bezüglich dieser Anforderungen und hinsichtlich ihres Potentials für eventuelle *Merging*-Prozeduren überprüft.⁸²

Mikrozensus

Der Mikrozensus ist eine repräsentative 1%-Stichprobe der deutschen Bevölkerung. Einmal jährlich werden 1% der deutschen Haushalte, das sind ca. 390.000, befragt. Damit ist der seit 1957 erhobene Mikrozensus die größte jährliche Haushaltsbefragung in Europa. Der Fragebogen besteht aus einem mit einer allgemeinen Auskunftspflicht belegten Grund- und Ergänzungsprogramm, welches in einem vierjährigen Rhythmus durch ein Zusatzprogramm mit eingeschränkter Auskunftspflicht erweitert wird.⁸³ Die erfassten Daten sind äußerst umfangreich und können daher hier nur unvollständig aufgeführt werden:⁸⁴

- Demographische Hintergründe, z.B. Geschlecht, Alter und Familienstand,
- Beschäftigungsstatus, z.B. befristeter oder unbefristeter Arbeitsvertrag,
- Arbeitszeit, z.B. Arbeitsstunden pro Woche oder Sonn-, Nacht- und Feiertagsarbeit,
- Ausbildung, z.B. höchster Schulabschluss,
- Einkommen, z.B. persönliches Nettoeinkommen nach Selbsteinstufung.

Der Mikrozensus erfasst zwar eine Fülle von Informationen, allerdings zum Preis der mangelnden Detailliertheit in den für die finanzwissenschaftliche Mikrosimulation entscheidenden Bereichen. Dennoch ist der Mikrozensus von immenser Bedeutung. Zum einen ist er eine potentielle Informationsquelle für *Merging*-Prozeduren, d.h. er liefert notwendige Verteilungsinformationen über Merkmals-träger eines etwaigen, detaillierteren Mikrodatsatzes.⁸⁵ Zum anderen dient er der im weiteren Verlauf noch näher zu beschreibenden EVS als Auswahlgrundlage.⁸⁶

⁸¹Vgl. *Missong, M.* (2003, S. 60), die Abbildung 2.1, S. 6, und die Erläuterungen unter 2.2.2, S. 18ff., und 2.2.3, S. 20ff.

⁸²Siehe zu Letzterem 2.2.1, S. 12ff.

⁸³Vgl. dazu die Erläuterung des *Statistischen Bundesamtes* (2003c) zum Mikrozensus unter: <http://www.destatis.de/presse/deutsch/abisz/mikrozensus.htm>.

⁸⁴Die Auswahl erfolgte in Anlehnung an *Schwarz, N.* (2001, S. 651f.).

⁸⁵Siehe dazu die Abbildung 2.2, S. 14.

⁸⁶Vgl. dazu *Kühnen, C.* (2001, S. 9f.).

Steuerstatistiken

Steuerstatistiken mit einer Mikrostruktur, wie die Lohn- und Einkommensteuerstatistik,⁸⁷ sind naturgemäß prädestiniert für die Simulation von Steuerreformen. Die Nutzungsmöglichkeit derartiger Statistiken ist allerdings erst jüngeren Datums und beruht auf der durch die 1996er Novelle des Statistik-Gesetzes ermöglichten zentralen Speicherung der Daten.⁸⁸ *Zwick* nennt vier Zugangsmöglichkeiten der Wissenschaft zu diesen aus datenschutzrechtlicher Sicht sehr sensiblen Daten:⁸⁹

- Auswertung der Datensätze durch die statistischen Ämter im Auftrag der Wissenschaft,
- Anwendung der von der Wissenschaft erstellten Analyseprogramme auf die Datensätze in den statistischen Ämtern,
- Herausgabe faktisch anonymisierter Datensätze an die Wissenschaft,
- in den statistischen Ämtern durchgeführte Analyse nicht-anonymisierter Datensätze durch die Wissenschaftler.

Als faktische Totalerhebungen erfasst die Einkommensteuerstatistik sämtliche zur Einkommensteuer veranlagte Inländer. Auf die Gesamtbevölkerung bezogen sind allerdings Personen des unteren Einkommensbereichs mangels Steuerpflicht äußerst unzureichend erfasst.⁹⁰ Die Einkommensteuerstatistik besitzt keinerlei Informationen über den Verbrauch eines Haushalts, so dass sie in Bezug auf die Schätzung von Nachfragesystemen keine direkte Bedeutung hat. Ihr Potential hinsichtlich der beschriebenen *Merging*-Prozeduren ist jedoch enorm. Wie noch zu zeigen sein wird, erfasst die EVS keine Haushalte der obersten Einkommenschicht.⁹¹ Die Zusammenführung vorhandener Mikrodatensätze kann, wie unter 2.2.1 beschrieben, eine Lösung dieses Problems sein. Nach der Auffassung von *Bach* und *Bartholmai* ist die Einkommensteuerstatistik trotz vielfältiger Probleme die einzig verlässliche Informationsquelle für diese Aufgabe.⁹² Des Weiteren können durch die Einkommensteuerstatistik die in anderen Stichproben gegebenenfalls zu grob erhobenen Einkommensgrößen in ihrer Feinstruktur angepasst werden. Dieser Prozess der Informationszusammenführung wird in seiner grundsätzlichen Struktur durch die Abbildung 2.3 auf S. 16 skizziert.

⁸⁷Im Folgenden wird diese Statistik nur noch kurz Einkommensteuerstatistik genannt.

⁸⁸Vgl. *Zwick, M.* (2001, S. 640f.).

⁸⁹Vgl. ebd. S. 642.

⁹⁰Vgl. *Bach, Bartholmai* (2000, S. 7).

⁹¹In der EVS 1998 lag die Einkommensgrenze der erfassten Haushalte bei einem monatlichen Haushaltsnettoeinkommen von 35.000 DM. Vgl. *Kühnen, C.* (2001, S. 10). Bei der EVS 2003 lag diese Obergrenze bei 18.000 € . Vgl. *Statistisches Bundesamt* (2005c, S. 26).

⁹²Vgl. *Bach, Bartholmai* (2000, S. 19f.).

Sozio-ökonomisches Panel

Das Sozio-ökonomische Panel (SOEP) des Deutschen Instituts für Wirtschaftsforschung existiert seit 1984. Als eine repräsentative, im jährlichen Rhythmus erhobene Wiederholungsbefragung privater Haushalte wurde das Panel mit ca. 6.000 Haushalten gestartet. 1990 erfolgte die Ausweitung auf die neuen Bundesländer. Nach nunmehr 21 Wellen, d.h. 21 Befragungsjahren, sind im Jahre 2004 von den ursprünglich 6.000 Haushalten immer noch knapp 4.000 Haushalte Teil der Stichprobe.⁹³ Das SOEP wurde aufgrund des nicht zu vermeidenden Schwundes und zur Anpassung an aktuelle gesellschaftliche Entwicklungen durch neue Haushalte ergänzt, so dass im Jahre 2004 insgesamt ca. 12.000 Haushalte freiwillig teilnahmen.⁹⁴ Folgende Themenschwerpunkte werden durch das SOEP abgedeckt:

- Erwerbs- und Familienbiographien,
- Erwerbsbeteiligung und berufliche Mobilität,
- Einkommensverläufe,
- Gesundheit,
- Lebenszufriedenheit,
- gesellschaftliche Partizipation und Zeitverwendung,
- Persönlichkeitsmerkmale,
- Haushaltszusammensetzung und Wohnsituation.

Diese Schwerpunktthemen werden darüber hinaus durch jährlich wechselnde Themen, wie z.B. Umweltverhalten oder Weiterbildung und Qualifikation, ergänzt.⁹⁵ Das Panel bietet wegen der relativ grob erfassten Einkommenssituation der Haushalte eine nur begrenzt geeignete Datenbasis für die Simulation von Einkommensteuerreformen.⁹⁶ Das SOEP enthält zudem keine hinreichenden Informationen

⁹³Von den ursprünglich im Jahre 1990 hinzugekommenen ca. 2.100 ostdeutschen Haushalten wurden 2004 noch ca. 1.800 Haushalte erfasst. Zur Panelstabilität siehe beispielsweise von *Rosenblatt* (2004, S. 31ff.).

⁹⁴Hinzugekommen ist eine spezielle Stichprobe für Zuwandererhaushalte (1994), eine Innovationsstichprobe (2000), eine Ergänzungsstichprobe für Haushalte des oberen Einkommensbereichs (2002) und eine so genannte Querschnitt'98 Stichprobe (1998), die primär der allgemeinen Auffrischung und Vergrößerung des SOEP diene. Vgl. *Frick, J.R.* (2005, S. 11).

⁹⁵Vgl. dazu die "Übersicht über das SOEP" des *Deutschen Instituts für Wirtschaftsforschung* unter <http://www.diw.de/deutsch/sop/uebersicht/index.html>.

⁹⁶Vgl. *Becker, I. et al.* (2002, S. 72), aber auch *Bork, Petersen* (1997, S. 12). *Schwarze* bietet einen guten Überblick über die mit einem solchen Simulationsvorhaben verbundenen Schwierigkeiten. Er unternimmt den Versuch, das Einkommensteueraufkommen und die Sozial-

über den Konsumgüterverbrauch von Haushalten. Zwar werden z.B. die Ausgaben für Wohnung etc. erfragt, jedoch erfolgt keine umfassende Erhebung aller Verbrauchsausgaben.⁹⁷ Dadurch ist das SOEP für die Schätzung von Nachfragesystemen gänzlich ungeeignet. Der große Vorteil des SOEP liegt zweifelsfrei in der Panelstruktur. Dadurch ist es ein potentieller Kandidat für die Schätzung verschiedenlicher Anpassungsreaktionen und des Weiteren ein grundsätzlich interessanter *Merging*-Partner, wenn versucht wird, Längsschnittinformationen in einen Querschnittsdatensatz zu integrieren.⁹⁸

Einkommens- und Verbrauchsstichprobe

Die seit 1962/63 regelmäßig und seit 1973 in einem fünfjährigen Turnus durchgeführte Einkommens- und Verbrauchsstichprobe liefert umfassende Daten zur wirtschaftlichen Situation privater Haushalte. Wie schon der Name verrät, liegt der Fokus der Erhebung dabei sowohl auf der Einkommensausstattung als auch auf der Einkommensverwendung der Haushalte. Dazu liefert die EVS u.a. Informationen über die Ausstattung der Haushalte mit Gebrauchsgütern, die Einkommens-, Vermögens-, und Schuldsituation sowie eine sehr detaillierte Aufstellung der Konsumausgaben.⁹⁹ Für die empirische Schätzung von Nachfragesystemen stellen die einzelnen EVS damit die wichtigsten Datensätze dar, was sich vor allem mit der detaillierten, genauen Erfassung des Verbrauchs auf der Mikroebene Haushalt bei gleichzeitiger Repräsentativität begründet.¹⁰⁰ Neben diesen besonderen Eigenschaften für Nachfragesysteme hat die EVS ganz allgemein das Potential zum Basisdatensatz für vielfältige mikroanalytische Untersuchungen. So ist die EVS zusammen mit dem SOEP die Grundlage für den Armuts- und Reichtumsbericht der Bundesregierung.¹⁰¹ Aufgrund dieser Sonderstellung soll unter 2.3.2 zunächst die Erhebungsmethode näher erläutert werden, um im Anschluss daran unter 2.3.3 die erfassten Verbrauchsausgaben eingehender zu beleuchten.

versicherungsbeiträge mit den SOEP-Daten zu bestimmen. Vgl. *Schwarze, J.* (1995, S. 12ff.). Selbst bei der recht groben Einkommenserfassung des SOEP sind die Angaben der Haushalte teilweise lückenhaft. Zu den Möglichkeiten der künstlichen Ergänzung fehlender Einkommensangaben siehe *Frick, Grabka* (2003).

⁹⁷Vgl. *Becker, I.* et al. (2002, S. 62).

⁹⁸Beispielsweise nutzt *Kaiser* das SOEP als Grundlage seiner Untersuchung des Zusammenhangs zwischen Arbeitsangebot und Einkommensbesteuerung. Vgl. *Kaiser, H.* (1990, S. 137).

⁹⁹Vgl. *Lüttinger P.* et al. (2003, S. 164).

¹⁰⁰Vgl. *Missong, M.* (2003, S. 60).

¹⁰¹Vgl. *Bundesministerium für Arbeit und Sozialordnung* (2001, S. 3).

2.3.2 Erhebungsmethode der EVS

Die EVS ist, anders als der Mikrozensus, eine Quotenstichprobe. Die Versuche, das methodisch überlegene Zufallsstichprobenverfahren anzuwenden, sind fehlgeschlagen. Die Teilnahmebereitschaft war schlicht zu gering und konzentrierte sich zudem auf bestimmte Bevölkerungsgruppen, was dem Zufallsansatz widersprach. Da nicht von der Freiwilligkeit der Teilnahme abgerückt wurde, verblieb nur das Quotenverfahren.¹⁰²

Für die Erhebung wurde die Grundgesamtheit der Haushalte zunächst in so genannte Quotierungszellen aufgeteilt. Abgrenzungsmerkmale sind dabei: das Bundesland, wobei das Bundesland Berlin in Berlin Ost und Berlin West getrennt wird (17 mögliche Ausprägungen), sechs Haushaltstypen, sechs (2003 sieben) verschiedene soziale Stellungen der jeweiligen Bezugsperson des Haushalts und fünf Intervallgruppen des Haushaltsnettoeinkommens. Die daraus resultierenden 3.060 theoretisch möglichen Zellen (ohne Landwirte)¹⁰³ wurden z.B. bei der 1998er EVS wegen zu geringer Zellenbesetzung in der Grundgesamtheit durch Zusammenlegung benachbarter Zellen auf 1.274 Zellen reduziert. In der EVS 2003 wurden zusätzlich Bundesländer zusammengefasst, was insgesamt zu einer Reduktion auf 859 Quotierungszellen führte. Die Quotierungsmerkmale neben den 16(+1) Bundesländern sind im Einzelnen:¹⁰⁴

- HAUSHALTSTYP:
 - Einpersonenhaushalte
 - Ehepaare und nichteheliche Lebensgemeinschaften ohne Kinder (ohne weitere Personen)
 - Alleinerziehende mit ledigen Kindern unter 27 Jahren und mit mindestens einem Kind unter 18 Jahren (ohne weitere Personen)
 - Ehepaare und nichteheliche Lebensgemeinschaften mit ledigen Kindern unter 27 Jahren und mit mindestens einem Kind unter 18 Jahren, höchstens ein Partner erwerbstätig (ohne weitere Personen)
 - Ehepaare und nichteheliche Lebensgemeinschaften mit ledigen Kindern unter 27 Jahren und mit mindestens einem Kind unter 18 Jahren, beide Partner erwerbstätig (ohne weitere Personen)
 - sonstige Haushalte.

¹⁰²Vgl. *Statistisches Bundesamt* (1997, S. 7).

¹⁰³Die Haushalte der Landwirte bildeten 2003 eine eigene Quotierungszelle, ohne dass diese nach den anderen Merkmalen weiter untergliedert wurde. Vgl. *Statistisches Bundesamt* (2005c, S. 31).

¹⁰⁴Vgl. *Statistisches Bundesamt* (2002, S. 25f.) und *Statistisches Bundesamt* (2005c, S. 31).

- SOZIALE STELLUNG DER BEZUGSPERSON:
 - Selbstständige
 - Beamte
 - Angestellte
 - Arbeiter
 - Rentner/Pensionäre
 - sonstige Nichterwerbstätige
 - Landwirte (seit 2003 von den Selbstständigen getrennt).

- HAUSHALTSNETTOEINKOMMEN PRO MONAT:¹⁰⁵
 - von 0 DM bis unter 1.400 DM bzw. 0 € bis unter 900 €
 - von 1.400 DM bis unter 2.500 DM bzw. 900 € bis unter 1.300 €
 - von 2.500 DM bis unter 5.000 DM bzw. 1.300 € bis unter 2.600 €
 - von 5.000 DM bis unter 7.000 DM bzw. 2.600 € bis unter 3.600 €
 - von 7.000 DM bis unter 35.000 DM bzw. 3.600 € bis unter 18.000 €.

Die letzte Gruppe der Haushaltsnettoeinkommen verdeutlicht, dass Haushalte mit einem Einkommen von über 35.000 DM bzw. 18.000 € bei den Erhebungen nicht erfasst wurden. Diese Einschränkung nach oben besitzen, mit im Zeitverlauf wechselndem Niveau, alle EVS.¹⁰⁶

Der unter 2.3.1 auf S. 28 kurz beschriebene Mikrozensus dient als Basis für die Festlegung des so genannten Erhebungssolls, d.h., wie viele Haushalte in den einzelnen Quotierungszellen erhoben werden sollten, damit jede soziale Schicht entsprechend ihrem Anteil an der Gesamtbevölkerung vertreten ist. Insgesamt wurde jeweils ein Auswahlatz von 0,2% der Erhebungsgesamtheit des Mikrozensus, das sind sowohl 1998 als auch 2003 ca. 74.000 Haushalte, festgelegt.¹⁰⁷ Die

¹⁰⁵DM-Angaben EVS 1998 und €-Angaben EVS 2003.

¹⁰⁶Haushalte der obersten Einkommensschicht sind nach Aussage von *Bach* und *Bartholmai* für derartige Befragungen ohnehin nicht ansprechbar. Vgl. *Bach, Bartholmai* (2000, S. 3).

¹⁰⁷Vgl. *Kühnen, C.* (1999, S. 112) und *Statistisches Bundesamt* (2005c, S. 30). Für die Festlegung der 1998er bzw. 2003er EVS waren die Ergebnisse des 1995er bzw. des 2000er Mikrozensus verfügbar und somit jeweils Grundlage des Erhebungssolls. Die 0,2%, also die 20% von dem 1% des Mikrozensus, würden bei Multiplikation mit der unter 2.3.1 auf S. 28 genannten aktuell gemeldeten, ungefähren Haushaltsanzahl des Zensus von ca. 390.000 ungefähr 78.000 Haushalte für eine aktuelle EVS ergeben. Der Mikrozensus des Jahres 1995 hätte nach dieser Überlegung ca. 370.000 Haushalte erfasst haben müssen. Die Angaben in der Literatur über den Mikrozensus des Jahres 1995 schwanken jedoch. Beispielsweise geben *Engelhard, M.* et al. (1997, S. 1) ungefähr 350.000 vom Mikrozensus erfasste Haushalte an. Die vom Statistischen Bundesamt

Aufteilung des angestrebten Stichprobenumfangs von 74.000 Haushalten auf die einzelnen Quotierungszellen erfolgte nach dem "Prinzip der vergleichbaren Präzision für gegliederte Ergebnisse". Dieses Verfahren und die damit verbundenen Vorteile können hier nicht dargestellt werden.¹⁰⁸ Die prinzipielle Wirkungsrichtung dieses Verfahrens sei an dieser Stelle nur an einem Beispiel mit der Quotierungszellenabgrenzung BUNDESLAND skizziert: Das gemäß der Zufallsstichprobe des 1995er Mikrozensus kleinste Bundesland bezüglich der Haushalte ist Bremen mit ca. 345.000 Haushalten. Das in diesem Sinne größte Bundesland ist Nordrhein-Westfalen mit ca. 8.032.000 Haushalten. Die EVS 1998 hätte ohne das obige Verfahren jeweils genau 0,2% dieser Haushalte als Erhebungssoll vorgegeben. Das genannte Verfahren berücksichtigt jedoch die unterschiedlichen Grundgesamtheiten der jeweiligen Quotierungszellen,¹⁰⁹ so dass in Bremen statt 0,2% von 345.000 = 690 Haushalte ein Erhebungssoll von 860 Haushalten festgelegt wurde. Das entsprach einem so genannten Auswahlatz von 0,25%. Nordrhein-Westfalen hingegen wurde nur mit einem Auswahlatz von 0,18% ausgestattet, was zu einem Erhebungssoll von ca. 0,18% von 8.032.000 = 14.500 Haushalten führte. Ohne das Verfahren hätten ca. 16.000 Haushalte in Nordrhein-Westfalen erhoben werden sollen. Eine äquivalente Methode wurde anschließend für die Aufteilung der Länderstichprobenumfänge auf die anderen, auf S. 33 genannten Quotierungsmerkmale angewandt. Als Aufteilungsmerkmal diente in diesem Fall das Merkmal "Privater Verbrauch". Dieses Merkmal wiederum wurde zuvor, da im Mikrozensus nicht erhoben, aus der vorangegangenen EVS ermittelt, im Falle der Auswahlatzbestimmung für die 1998er EVS also aus der Erhebung zum "Privaten Verbrauch" der 1993er EVS. Der 1998 jeweils für die Länder ermittelte Auswahlatz schwankt im Bundesdurchschnitt bei den Einkommensgruppen zwischen 0,42% und 0,14% für die oberste respektive unterste Einkommensgruppe. Beim Quotierungsmerkmal SOZIALE STELLUNG DER BEZUGSPERSON liegt der höchste Auswahlatz bei den Selbstständigen mit 0,42% und der niedrigste mit 0,14% bei den Rentnern/Pensionären. Bei der Abgrenzung HAUSHALTSTYP wiesen die sonstigen Haushalte mit 0,3% den höchsten und die Einpersonenhaushalte mit 0,14% den niedrigsten Auswahlatz auf.¹¹⁰

Nachdem das oben beschriebene Verfahren der Erhebungssollbestimmung erfolgt ist, wird nach den entsprechenden Vorgaben versucht, Haushalte für die

in einer Pressemitteilung gemeldete Gesamtzahl der Haushalte im Jahre 1995 stimmt hingegen mit der nach obiger Überlegung rechnerisch vermuteten Zahl von ca. 37.000.000 Haushalten im Bundesgebiet überein. Vgl. *Statistisches Bundesamt* (1996, S. 1). Für die EVS 1993 sollten zum Vergleich 70.000 Haushalte gewonnen werden. Vgl. dazu *Statistisches Bundesamt* (1997, S. 8).

¹⁰⁸Vgl. hierzu Kühnen, C. (2001, S. 11ff.).

¹⁰⁹Vgl. dazu auch *Statistisches Bundesamt* (1997, S. 7).

¹¹⁰Die Zahlen wurden dem Methodenbericht zur 1998er EVS entnommen. Vgl. Kühnen, C. (2001, S. 12ff.).

Teilnahme an der EVS zu gewinnen. Die verschiedenen Werbemaßnahmen führten erstmals bei der EVS 1993 nicht zum gewünschten Resultat. Bei dieser Erhebung wurde nur 96% des Erhebungssolls erfüllt.¹¹¹ Im Jahre 1998 konnten trotz vielfältiger Erleichterungen für die Haushalte nur noch 93% des Erhebungssolls für das Einführungsinterview und nur noch 84% für die so genannten Quartalsanschreibungen gewonnen werden.¹¹²

Eine logische Konsequenz dieser mangelnden Teilnahmebereitschaft war, dass viele Quotierungszellen unterbesetzt blieben. Bevor auf die dadurch verursachten Probleme eingegangen wird, sei an die Ausführungen unter 2.2.1 zu Abbildung 2.2 erinnert.¹¹³ Dort wurde bereits die Aufgabe von Hochrechnungsfaktoren erläutert. Die Bestimmung des zu jedem Haushalt passenden Hochrechnungsfaktors folgt generell dem Ziel der bestmöglichen Anpassung der multidimensionalen Verteilung der Stichprobe an die multidimensionale Verteilung der Grundgesamtheit. Für die Hochrechnungsfaktoren der als Quotenstichprobe erhobenen EVS bedeutet dies die Anpassung an die Verteilung der Quotierungsmerkmale durch so genannte freie Hochrechnung innerhalb der Quotierungszellen.¹¹⁴ Da die gemeinsame Verteilung, d.h. die Menge der Haushalte mit der entsprechenden Quotierungszellenabgrenzung in der Grundgesamtheit, u.a. aus dem Mikrozensus abgeschätzt werden kann, folgen die jeweiligen Hochrechnungsfaktoren eigentlich aus einer einfachen Überlegung, die mittels eines Beispiels illustriert werden soll: Es sei angenommen, es gäbe vier durch jeweils zwei Ausprägungen zweier Merkmale abgegrenzte Quotierungszellen, in denen jeweils das Erhebungssoll n_Q als optimal angesehen wird. Im Beispiel sei dies die SOZIALE STELLUNG DER BEZUGSPERSON mit den Ausprägungen $A \equiv \text{Arbeiter}$ und $B \equiv \text{Beamter}$ und das Haushaltsnettoeinkommen mit den Ausprägungen $E1 \equiv 0\text{€} - 900\text{€}$ und $E2 \equiv 900\text{€} - 1.300\text{€}$ und den in der Tabelle 2.1 angegeben n_Q . Wenn die aktuelle Grundgesamtheitsanzahl N_Q der mit einer bestimmten Ausprägungskombination versehenen Haushalte bekannt ist, errechnet sich der Hochrechnungsfaktor einfach aus dem Quotienten $\frac{N_Q}{n_Q}$. Das Verfahren wird als "freie Hochrechnung mit aktuellen Hochrechnungsrahmen" bezeichnet. Die Bezeichnung "aktuell" umschreibt

¹¹¹Vgl. *Statistisches Bundesamt* (1997, S. 8).

¹¹²Vgl. *Kühnen, C.* (2001, S. 23). Die Erleichterungen für die geworbenen Haushalte gründeten vor allem auf den 1998 eingeführten Vereinfachungen beim Führen der Haushaltsbücher, also primär der Erfassung der Ausgaben. Hier wurde zum so genannten Prinzip der Quartalsanschreibung übergegangen. Siehe dazu auch Abbildung 2.5, S. 38, und die dazugehörigen Ausführungen.

¹¹³Abbildung 2.2 findet sich auf S. 14.

¹¹⁴Streng genommen können unter stichprobentheoretischen Gesichtspunkten keine Auswahlwahrscheinlichkeiten für die Stichprobeneinheiten berechnet werden, da keine Zufallsstichprobe erfolgte. Vgl. z.B. *Krug, W.* et al. (2001, S. 67). Dem folgenden Verfahren liegt daher die praktische Annahme zugrunde, dass die Auswahl der Haushalte innerhalb einer Quotierungszelle zufällig erfolgte. Bei Geltung dieser Annahme entspricht eine Quotenstichprobe der geschichteten Zufallsstichprobe. Siehe zur allgemeinen Stichprobentheorie beispielsweise *Särndal, C. E.* et al. (1992).

hier die Verwendung von möglichst aktuellen N_Q .

Tabelle 2.1: Hochrechnungsfaktoren bei freier Hochrechnung (Quelle: Eigene Darstellung).

Quotierungszelle Q	Stichprobe n_Q	Grundgesamtheit N_Q	Hochrechnungsfaktor: $\frac{N_Q}{n_Q}$	hochgerechnetes Ergebnis: $\frac{N_Q}{n_Q} n_Q$
A E1	40	8000	200	8000
A E2	90	4500	50	4500
B E1	10	700	70	700
B E2	70	2100	30	2100
$\sum E1$	50	8700	=	8700
$\sum E2$	160	6600	=	6600
$\sum A$	130	12500	=	12500
$\sum B$	80	2800	=	2800

Durch die erwähnte mangelnde Besetzung einzelner Quotierungszellen und die damit teilweise notwendig gewordene Zusammenlegung führt dieser Ansatz jedoch nicht zu optimalen Ergebnissen. In Tabelle 2.2 werden die Folgen unzureichender Teilnahmebereitschaft wiederum anhand eines Beispiels beschrieben.

Tabelle 2.2: Fehler bei freier Hochrechnung (Quelle: Eigene Darstellung i.A.a. Kühnen, C. (2001, S. 18)).

Quotierungszelle Q	Stichprobe n_Q	Grundgesamtheit N_Q	Hochrechnungsfaktor: $\frac{N_Q}{n_Q}$	hochgerechnetes Ergebnis: $\frac{N_Q}{n_Q} n_Q$
A E1	40	8000	200	8000
A E2	90	4500	50	4500
B E1	0	700	$\frac{700+2100}{70+0}$	0 +
B E2	70	+ 2100 = 2800	= 40	2800
$\sum E1$	40	8700	\neq	8000
$\sum E2$	160	6600	\neq	7300
$\sum A$	130	12500	=	12500
$\sum B$	70	2800	=	2800

Die mangelnde Zellenbesetzung wird hier am extremen Fall der Nullbesetzung skizziert. Durch diesen Umstand wird die Zusammenlegung der Merkmalskombinationen B E1 und B E2 notwendig. Durch diesen Schritt werden jetzt alle Be-

amtenhaushalte B mit einem Hochrechnungsfaktor 40 ausgestattet. Die Nutzung dieses Faktors führt jedoch zu Verzerrungen. Die Summen der hochgerechneten Haushalte mit einem Einkommen in der Einkommensklasse E1 bzw. E2 entsprechen jetzt nicht mehr den Summen in der Grundgesamtheit. Seit der EVS 1998 wird daher ergänzend ein weiteres Verfahren genutzt.

Die so genannte "Hochrechnung nach dem Prinzip des minimalen Informationsverlustes" kann hier nicht vollständig erläutert werden.¹¹⁵ Hierzu sei lediglich angemerkt, dass zunächst die obige Methode der "freien Hochrechnung mit aktuellen Hochrechnungsrahmen" angewandt wird. Anschließend erfolgt die Anpassung der hochgerechneten Ergebnisse an fachlich sinnvolle Rahmendaten, wie z.B. die Randverteilungen der Quotierungsmerkmale (im Beispiel $\sum E1, \sum E2$ und $\sum A, \sum B$). Dieser Vorgang vollzieht sich unter der Maßgabe, die Hochrechnungsfaktoren des ersten Schrittes möglichst wenig zu verändern.¹¹⁶

Bevor unter 2.3.3 die durch die EVS erhobenen Konsum-Daten einer genaueren Betrachtung unterzogen werden, soll an dieser Stelle die spezielle Erhebungsmethode eben dieser Daten im Mittelpunkt stehen.¹¹⁷ Wie schon kurz angedeutet wurde die EVS ab 1998 vereinfacht. Sie besteht seither aus insgesamt drei Erhebungsteilen und erstreckt sich über ein gesamtes Jahr.¹¹⁸

Bei allen durch das oben beschriebene Auswahlverfahren bestimmten Haushalten war die Durchführung eines Einführungsinterviews vorgesehen. Das Erhebungssoll von rund 74.000 Haushalten konnte jedoch 1998 nur zu 93% und 2003 nur noch zu 81% erfüllt werden. Es nahmen 1998 rund 68.900 und 2003 rund 60.000 Haushalte an diesem ersten Interview teil.¹¹⁹ Die Befragung umfasste Angaben zur Zusammensetzung des Haushalts, zu sozioökonomischen Merkmalen der Haushaltsmitglieder und zur Ausstattung mit langlebigen Gebrauchsgütern. Außerdem wurden Informationen über das Vorhandensein von Haus- und Grundbesitz und über die Wohnsituation des Haushalts erfragt.

Für die Mehrheit der Merkmale der EVS ist die Führung eines Haushaltsbuches notwendig. Diese detailliertere Form der Erhebung verlangt den Haushalten viel Mühe ab, so dass für den zweiten Erhebungsteil 1998 erstmals ein neues Verfahren angewendet wurde. Die Gesamtstichprobe wird bei dieser Methode in vier ungefähr gleich große Teile zerlegt. Die vier daraus resultierenden, ungefähr 18.500 Haushalte umfassenden Gruppen führen dann, wie in Abbildung 2.5 sche-



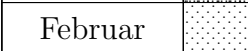

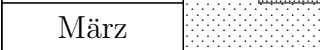

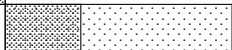





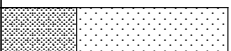









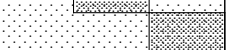

¹¹⁵Siehe dazu *Merz, J.* (1983a, S. 342-366).

¹¹⁶Vgl. *Krug, W.* et al. (2001, S. 72 und 205).

¹¹⁷Vgl. dazu *Kühnen, C.* (2001, S. 7f.).

¹¹⁸Vgl. zu den Ausführungen über die drei Erhebungsteile die Abbildung 2.5, S. 38. Die seit 2003 zum Einführungsinterview hinzugefügte Anlage erfragt u.a. das Geld- und Sachvermögen des Haushalts und wird auch als vierter Erhebungsteil bezeichnet. Vgl. *Statistisches Bundesamt* (2005c, S. 12 und S. 19).

¹¹⁹Vgl. bezüglich der Teilnehmerzahlen *Illgen, Münnich* (2000, S. 125) und *Statistisches Bundesamt* (2005c, S. 27).

Zeitraum	Erhebungsteile
1.01. 1998	Einführungsinterview seit 2003 mit Anlage (ca. 74.000 Haushalte)
Januar	 
Februar	 
März	 
April	 
Mai	 
Juni	 
Juli	 
August	 
September	 
Oktober	 
November	 
Dezember	 



 Führung von Haushaltsbüchern bei ca. 18.500 Haushalten im Durchschnitt je Quartal
 Führung von Feinaufzeichnungen bei ca. 1.250 Haushalten im Durchschnitt je Monat

Abbildung 2.5: Erhebungsdesign EVS 1998 und 2003 (Quelle: Eigene Darstellung i.A.a. Kühnen, C. (2001, S. 8) und Statistisches Bundesamt (2005c, S. 27)).

matisch dargestellt, jeweils ein Quartal lang ein Haushaltsbuch mit Aufzeichnungen über Einnahmen und Ausgaben des Haushalts.¹²⁰ Eine weitere Neuerung der 1998er EVS war der Verzicht auf ein so genanntes Schlussinterview. Die bisher in diesem Interview gestellten Fragen zur Bildung von Geldvermögen und von Schulden wurden in die Haushaltsbuchführung integriert.

Im dritten Erhebungsteil, den so genannten Feinaufzeichnungen, werden die

¹²⁰Bei der EVS 1993 erfolgte die Führung des Haushaltsbuchs noch über das gesamte Jahr. Vgl. Statistisches Bundesamt (1997, S. 13). Trotz dieser Vereinfachung wurden 1998 im ersten Quartal nur rund 14.000 statt der gewünschten 18.500 Haushalte für diesen zweiten Erhebungsteil gewonnen. Die Anzahl konnte zwar in den letzten drei Quartalen auf jeweils ca. 16.000 Haushalte gesteigert werden, jedoch ist die daraus resultierende Quote von 84% immer noch gering. Die Abbruchquote konnte jedoch im Vergleich zu früheren EVS in der 1998er EVS gesenkt werden. Vgl. Illgen, Münnich (2000, S. 125f.). Bei der EVS 2003 waren von den ursprünglich für das Einführungsinterview gewonnenen 60.000 Haushalten nur 53.500 Haushaltsbuchaufzeichnungen am Jahresende verwertbar. Vgl. Statistisches Bundesamt (2005a, S. 9).

Ausgaben für Nahrungsmittel, Getränke und Tabakwaren noch detaillierter nach Menge und Preis erhoben. Für die Feinaufzeichnungen wird in den vier Quartalsgruppen nochmals eine ca. 20% Unterstichprobe gezogen und diese dann innerhalb der jeweiligen Quartale auf die drei Monate verteilt. Auch dieses Vorgehen ist in Abbildung 2.5 skizziert. Monatlich sollten demnach rund 1.250 Haushalte für diesen dritten Erhebungsteil gewonnen werden.¹²¹

2.3.3 Daten der EVS

Die EVS erfasst sowohl die Einkommensentstehung als auch die Einkommensverwendung, wobei sich diese beiden grundlegenden Kategorien in der Summe bis auf eine so genannte statistische Differenz ausgleichen. An dieser Stelle wird zunächst eine genauere Betrachtung der erfassten Konsumdaten erfolgen, bevor ein kursorischer Überblick über die erste, jedoch für Nachfragesysteme eher zweitrangige Kategorie der Einkommensentstehung gegeben wird. Im Anschluss daran werden die vorhandenen Informationen über das Sparverhalten beleuchtet und kurz die demographischen Merkmale eines EVS-Datensatzes aufgeführt.

Konsum-Daten der EVS

Die in der EVS erhobenen Konsum-Daten werden durch die Haushaltsbücher erfasst.¹²² Unter dem Begriff Haushalt wird dabei „eine Gruppe von verwandten oder persönlich verbundenen (auch familienfremden) Personen [verstanden], die sowohl einkommens- als auch verbrauchsmäßig zusammengehören“.¹²³ Die begriffliche Abgrenzung der Einnahmen und Ausgaben ist seit der EVS 1998 grundlegend durch die *Systematik der Einnahmen und Ausgaben* von 1998 (kurz: *SEA98*) bestimmt, welche wiederum in Anlehnung an die internationale Klassifikation der Verwendungszwecke (kurz: COICOP)¹²⁴ der OECD entwickelt wurde.¹²⁵ In der Tabelle 2.3 sind die aus der EVS 1998 und der EVS 2003 ermittelten Ausgaben eines durchschnittlichen Haushalts aufgeführt. Insgesamt werden elf Güterabteilungen mit unterschiedlich vielen Gütergruppen durch die *SEA98* abgegrenzt. Das primäre Ziel der gewählten Darstellung ist die grobe Aufstellung dieser durch die EVS erfassten Konsuminformationen.

¹²¹Vgl. Kühnen, C. (2001, S. 16) und *Statistisches Bundesamt* (2005c, S. 35).

¹²²Ausnahmen bilden hier nur die Konsum-Daten aus den Feinaufzeichnungen.

¹²³*Statistisches Bundesamt* (2005a, S. 8). Der obigen Bezeichnung „Gruppe“ sind auch allein wirtschaftende Einzelpersonen mit eigenem Einkommen zugeordnet. Eine ausführlichere Definition eines EVS-Haushalts findet sich in *Statistisches Bundesamt* (2002, S. 12f.).

¹²⁴COICOP steht für: Classification of Individual Consumption According to Purpose. Vgl. dazu Code 76 in *United Nations* (2000).

¹²⁵Vgl. *Statistisches Bundesamt* (2005a, S. 9). Die EVS 1993 wurde noch auf Grundlage der *Systematik der Einnahmen und Ausgaben* von 1983 erhoben. Vgl. *Statistisches Bundesamt* (1997, S. 25).

Tabelle 2.3: Struktur der Konsumausgaben privater Haushalte (Datenquelle: *Statistisches Bundesamt* (2001, S. 62, 248 und 2005b, S. 17), woraus die Angaben für 1998 berechnet und für 2003 unmittelbar übernommen wurden).

<i>Tabellenteil 1 von 2</i>	EVS 1998		EVS 2003	
Gütergruppen	€	%	€	%
G1: Nahrungsmittel, Getränke, Tabakwaren u.Ä.	287	14	303	14
G2: Bekleidung und Schuhe	118	5,7	112	5,1
G2.1: Herrenbekleidung	28	1,4	24	1,1
G2.2: Damenbekleidung	48	2,4	46	2,1
G2.3: Bekleidung für Kinder (unter 14 Jahre)	8	0,4	9	0,4
G2.4: Herren-, Damen- und Kinderstrümpfe	3	0,15	4	0,2
G2.5: Sonstige Bekleidung und Zubehör	6	0,3	4	0,2
G2.6: Schuhe und Schuhzubehör	21	1	21	1
G2.7: Reparaturen, Reinigung, Ausleihe	4	0,2	4	0,2
G3: Wohnen, Energie, Wohnungsinstandhaltung	653	32	697	32
G3.1: Wohnungsmieten u.Ä.	498	24	515	23,7
G3.2: Energie	95	5	120	5,5
G3.3: Wohnungsinstandhaltung	60	3	62	2,8
G4: Innenausst., Haushaltsgeräte und -gegenst.	145	7	127	5,8
G4.1: Möbel und Einrichtungsgegenstände	60	3	50	2,3
G4.2: Teppiche und andere Bodenbeläge	10	0,5	7	0,3
G4.3: Kühl- und Gefriermöbel	3,5	0,2	3	0,1
G4.4: Sonstige größere Haushaltsgeräte	14	0,7	10	0,5
G4.5: Kleine elektrische Haushaltsgeräte	4,5	0,2	5	0,2
G4.6: Heimtextilien	10	0,5	10	0,4
G4.7: Sonstige Gebrauchsgüter für die Haushaltsführung	20	1	24	1,1
G4.8: Verbrauchsgüter für die Haushaltsführung	11	0,5	9	0,4
G4.9: Dienstleistungen für die Haushaltsführung	12	0,6	11	0,5
G5: Gesundheitspflege	74	3,6	84	3,9
G5.1: Gebrauchsgüter für die Gesundheitspflege	16	0,8	17	0,8
G5.2: Verbrauchsgüter für die Gesundheitspflege	22	1	27	1,3
G5.3: Dienstleistungen für die Gesundheitspflege	36	1,8	40	1,8
G6: Verkehr	278	13,5	305	14
G6.1: Kraftfahrzeuge	120	6	106	4,9
G6.2: Kraft- und Fahrräder	8	0,4	7	0,3
G6.3: Ersatzteile und Zubehör	11	0,5	14	0,7
G6.4: Kraftstoffe und Schmiermittel	63	3	82	3,8
G6.5: Wartung, Reparatur an Kfz, Kraft-, Fahrrädern	32	1,5	34	1,6
G6.6: Garagen- und Stellplatzmieten	5	0,25	26	1,2
G6.7: Sonstige Dienstleistungen	10	0,5	8	0,4
G6.8: Personenbeförderung, Verkehrsdienstleistungen	29	1,25	27	1,2

<i>Tabellenteil 2 von 2</i>	EVS 1998		EVS 2003	
Gütergruppen	€	%	€	%
G7: Nachrichtenübermittlung	51	2,5	68	3,1
G7.1: Telefon-, Faxgeräte, Anrufbeantworter	3	0,2	4	0,2
G7.2: Dienstleistungen für die Nachrichtenübermittlung	48	2,3	65	3
G8: Freizeit, Unterhaltung u. Kultur (F., U. u. K.)	246	12	261	12
G8.1: Rundfunkempfangsgeräte u.Ä.	4,5	0,2	4	0,2
G8.2: Fernseh- und Videogeräte, TV-Antennen	8	0,4	8	0,4
G8.3: Foto-, Filmausrüstung und optische Geräte	5	0,2	6	0,3
G8.4: Datenverarbeitung und Zubehör	14	0,7	14	0,7
G8.5: Bild und Tonträger	6,6	0,3	8	0,3
G8.6: Sonstige Gebrauchsgüter für F., U. u. K.	10	0,5	12	0,6
G8.7: Spielwaren und Hobbys	14	0,7	9	0,4
G8.8: Blumen und Gärten	16	0,8	18	0,8
G8.9: Haustiere	7,5	0,4	11	0,5
G8.10: Freizeit und Kulturdienstleistungen	57	2,8	63	2,9
G8.11: Bücher	14	0,7	14	0,6
G8.12: Zeitungen, Zeitschriften u.Ä.	19	0,9	25	1,1
G8.13: Sonstige Verbrauchsgüter	4,5	0,2	6	0,3
G8.14: Reparaturen für F., U. u. K.	3,5	0,15	3	0,1
G8.15: Pauschalreisen	63	3	61	2,8
G9: Bildungswesen	10	0,5	20	0,9
G10: Beherbergungs- und Gaststätdienstleist.	100	4,9	100	4,6
G10.1: Verpflegungsdienstleistungen	81	4	81	3,7
G10.2: Beherbergungsdienstleistungen	19	0,9	19	0,9
G11: Andere Waren und Dienstleistungen	88	4,3	100	4,6
G11.1: Schmuck, Uhren und Edelmetalle	10	0,5	7	0,3
G11.2: Sonstige persönliche Gebrauchsgegenstände	6	0,3	5	0,2
G11.3: Dienstleistungen für die Körperpflege	20	1	22	1
G11.4: Körperpflegeartikel und Geräte	18	0,9	29	1,3
G11.5: Sonstige Dienstleistungen	34	1,6	37	1,7
Private Konsumausgaben	2.050	100	2.177	100

In Abbildung 2.6 sind ergänzend zur Tabelle 2.3 die Ausgabenanteile der elf Abteilungen für das Jahr 1998 und für das Jahr 2003 visualisiert. Die aufgelisteten Ausgabengrößen und die zwei Kreisdiagramme können wegen der zugrunde liegenden Durchschnittsgrößen nur einen sehr begrenzten Einblick in die Konsumstruktur deutscher Haushalte ermöglichen. Nach Auffassung des Verfassers vermitteln die Darstellungen jedoch einen Eindruck vom hohen Informationspotential dieser vergleichsweise sehr detaillierten Daten. Es wird u.a. deutlich, dass

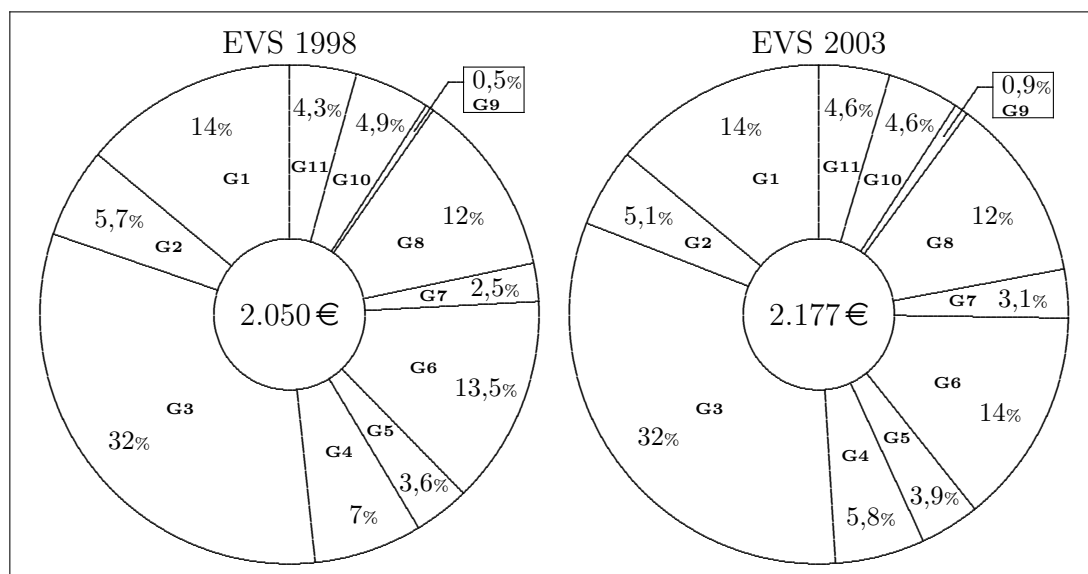


Abbildung 2.6: Struktur der Konsumausgaben privater Haushalte 1998 und 2003 (Quelle: Eigene (aktualisierte) Darstellung i.A.a. *Statistisches Bundesamt* (2004, S. 11). Die Daten wurden der Tabelle 2.3 entnommen.).

trotz der Durchschnittsbildung und des hohen Aggregationsgrades die Ausgabenanteile der Haushalte in einigen Kategorien über die Zeit signifikant voneinander abweichen. Eine mutmaßliche Fehlerquelle für langfristige Prognosen mit statischen Mikrosimulationsmodellen scheint hier Bestätigung zu finden. Obgleich für eine solche Bestätigung unbestritten bessere statistische Methoden existieren, verdeutlicht die Abbildung 2.6, dass die in diesen Modellen angenommene Konstanz der Güternachfrage empirisch nicht gegeben ist. Des Weiteren werden durch die Darstellung der durch die EVS erhobenen Konsumdaten die zu einem großen Teil von der Gütervielfalt verursachten Kosten und die diesem Umstand geschuldete, vergleichsweise geringe Erhebungshäufigkeit nachvollziehbarer.

Bezüglich der ersten Güterabteilung G1 "Nahrungsmittel, Getränke, Tabakwaren u.Ä." sei noch an die schon unter 2.3.2 auf S. 38 erwähnte Methode der Feinaufzeichnung erinnert, die zur Erfassung der Daten in dieser Abteilung genutzt wird. Eine umfassende Aufzählung aller durch diese sehr detaillierte Befragung gewonnenen Daten kann hier nicht erfolgen. Zur Verdeutlichung ihrer Feingliederigkeit sei hier lediglich eine Erfassungsanweisung aus dem Feinaufzeichnungsheft zitiert: „Beschreiben Sie die gekauften Waren möglichst genau. Vermeiden Sie bitte Sammelbezeichnungen, notieren Sie statt Obst: Äpfel, Apfelsinen, Bananen, Kiwis, usw. statt Brot: Mischbrot, Weißbrot, Toastbrot, Roggenbrot usw.“¹²⁶

¹²⁶ *Statistisches Bundesamt* (2005c, S. 125).

Die durch das Haushaltsbuch und die Feinaufzeichnung ermittelten Daten werden unter Nutzung von Güteraggregationen wechselnder Stärke zusammengefasst und stehen dann, mehrheitlich als reine Ausgabengröße einer Gütergruppe, der empirischen Analyse zur Verfügung.¹²⁷ Für eine theoretisch fundierte Betrachtung von Nachfragesystemen sind reine Ausgabengrößen jedoch unzureichend. Vielmehr verlangt das theoretische Modell eines den Nutzen maximierenden Haushalts nach Preisinformationen. Wie im nächsten Kapitel 3 ausführlich beschrieben wird, sind die optimalen Gütermengen in dieser Modellwelt durch das Haushaltseinkommen und den Preisvektor determiniert. Für die empirische Abschätzung der Parameter eines Nachfragesystems sind demnach Preisinformationen notwendig. Dieser Überlegung folgend entspricht dann die von einem Haushalt konsumierte aggregierte Menge $Q^g(x^g)$ eines Gütergruppenvektors x^g dem Quotienten aus der Ausgabengröße für die Gütergruppe M^g und einem passenden Preisaggregat $P^g(p^g)$, also

$$Q^g(x^g) = \frac{M^g}{P^g(\mathbf{p}^g)} \quad \text{mit } g = 1, \dots, G.$$

Bezüglich der Schwierigkeiten mit Güteraggregationsansätzen sei auf die Ausführungen unter 4.1.1 auf S. 68ff. verwiesen. Es könnten beispielsweise die elf in Tabelle 2.3 angeführten Güterabteilungen (hier wäre $G = 11$) oder aber die Gütergruppen, wie z.B. die 15 Gütergruppen G8.1 bis G8.15 in Güterabteilung G8, als Aggregate betrachtet werden. Wird eine den Anforderungen an eine empirische Schätzung genügende Genauigkeit des jeweiligen bei der EVS gebildeten Aggregats unterstellt, besitzt die amtliche Statistik neben den Ausgabengrößen M^g für die beschriebenen Abgrenzungen auch die benötigten detaillierten Preisinformationen zu diesen EVS-Güteraggregaten. Die Erhebung von derartigen Informationen zum Preisvektor \mathbf{p}^g dient bei der amtlichen Statistik in erster Linie der Bestimmung von Verbraucherpreisindizes für die Bundesrepublik. Ohne hier auf die besonderen Anforderungen an ein für Nachfragesysteme adäquates Preisaggregat $P^g(\mathbf{p}^g)$ eingehen zu wollen,¹²⁸ sei bezüglich der Preisdaten angemerkt, dass die schon erwähnte Abgrenzung COICOP (siehe dazu auch Fußnote 124 auf S. 39) auch bei der Preiserfassung von Bedeutung ist. Die Bildung der verschiedenen Verbraucherpreisindizes verfolgt das Ziel einer umfassenden Abbildung der Preisentwicklung in Deutschland. Dazu werden ca. 750 Waren und Dienstleistung ausgesucht und die Preise für diesen so genannten Warenkorb erhoben.¹²⁹ Mit diesen Preisinformationen über den Warenkorb erfolgt dann die Bildung der verschiedenen, für die Veröffentlichung bestimmten Indizes, indem eine Gewichtung

¹²⁷Die Formulierung "Güteraggregationen wechselnder Stärke" bezieht sich auf die gängige Praxis, dass Feinheiten, wie z.B. der Konsum unterschiedlicher Brotsorten, zwar erfragt, aber nicht in jedem der Wissenschaft zur Verfügung gestellten Datensatz explizit ausgewiesen werden.

¹²⁸Siehe dazu die Ausführungen zu 4.1.1 auf S. 68ff., 4.1.5 auf S. 89ff. und die Erläuterungen zu Gleichung (4.3) auf S. 76.

¹²⁹Vgl. *Statistisches Bundesamt* (2003a, S. 7).

mittels eines u.a. durch die EVS-Ausgabendaten determinierten Wägungsschemas erfolgt.¹³⁰ Als Ergebnis stehen der Öffentlichkeit Preisindizes in einer Gliederungstiefe zur freien Verfügung, die ungefähr der Gruppengliederungstiefe aus Tabelle 2.3 entspricht.¹³¹ Noch detailliertere Preisdaten bis hin zu den Warenkorbpreisen sind nach einer vom Verfasser eingeholten telefonischen Auskunft kostenpflichtig beim *Statistischen Bundesamt* erhältlich.

Einkommens-Daten der EVS

Das Nettoeinkommen eines EVS-Haushalts entspricht der Summe der Nettoeinkommen aller Haushaltsmitglieder. Das Nettoeinkommen einer im Haushalt lebenden Person entspricht wiederum der Summe aller erzielten Einkünfte inklusive ausgezahlter Renten, Pensionen und öffentlicher Zahlungen, wie z.B. Wohngeld oder Kindergeld, abzüglich der direkten Steuern und der Pflichtbeiträge zu den Sozialversicherungen.¹³² Die einzelnen Komponenten dieser Summe werden dabei in Übereinstimmung zur erwähnten *SEA98* abgegrenzt. Das so entstandene Nettoeinkommen des Haushalts wird um Einnahmen aus dem Verkauf von Waren, wie z.B. dem Verkauf eines Pkw, ergänzt. Die ermittelten ausgabefähigen Einkommen des Haushalts werden auch als verfügbares Haushaltseinkommen bezeichnet.¹³³

EVS-Daten über das Spar- bzw. Entsparverhalten eines Haushalts

Die EVS enthält des Weiteren Angaben zur Ersparnis privater Haushalte. Je nach Ausprägung, d.h. Ersparnis oder Schulden, ist diese Angabe der Einkommensentstehung oder der Einkommensverwendung zuzuordnen. Bei der EVS folgt diese Größe rein rechnerisch aus anderen vom Haushalt angegebenen Daten. Die Tabelle 2.4 soll die zwei zur Berechnung der Ersparnis verwendeten Vorgehensweisen grob skizzieren. Hinter den in der Tabelle aufgeführten Posten stehen feingliedrigere Informationen bzw. Daten,¹³⁴ die hier nicht weiter aufgeschlüsselt werden sollen. Eine etwaige Differenz zwischen den in der Tabelle abgebildeten zwei Ersparnistypen kann sachlogisch nicht erklärt werden. Sie beruht auf nicht vermeidbaren Messfehlern bei der Erhebung. Die eingangs auf S. 39 erwähnte "statistische Differenz" begründet sich mit diesen Messfehlern. Sie wird als eigenständige Angabe im Datensatz aufgeführt und entspricht in dieser Darstellung formal: statistische Differenz = Ersparnis Typ 2 - Ersparnis Typ 1.

¹³⁰Vgl. dazu das Wägungsschema 2000 in *Statistisches Bundesamt* (2003b, S. 1ff.) und die Gliederungstiefe in Tabelle 2.3 auf S. 40f.

¹³¹Vgl. z.B. *Statistisches Bundesamt* (2006, S. 12-62).

¹³²Vgl. *Statistisches Bundesamt* (2005a, S. 9).

¹³³Vgl. *Statistisches Bundesamt* (2005c, S. 25).

¹³⁴Wie z.B. die in Tabelle 2.3 auf S. 40 aufgeschlüsselten privaten Konsumausgaben.

Tabelle 2.4: Berechnung der Ersparnis in der EVS (Quelle: Eigene Darstellung i.A.a. *Statistisches Bundesamt* (2005c, S. 26)).

Ausgabefähige Einkommen und Einnahmen	Ausgaben für die Vermögensbildung
minus Aufwendungen für die privaten Konsumausgaben	plus Rückzahlung von Schulden und Krediten
minus Geleistete Übertragungen und sonstige Ausgaben	minus Zinsen für Hypotheken, Baudarlehen und Konsumentenkredite
minus Zinsen für Hypotheken, Baudarlehen und Konsumentenkredite	minus Einnahmen aus Auflösung von Vermögen
	minus Einnahmen aus der Aufnahme von Krediten
= Ersparnis Typ 1	= Ersparnis Typ 2

Soziodemographische Merkmale in der EVS

Einige der soziodemographischen Eigenheiten eines Haushalts werden bei der unter 2.3.2 beschriebenen Erhebung der EVS genutzt und wurden daher schon aufgeführt. Die Erfassung soziodemographischer Merkmale erfolgt grundsätzlich im Einführungsinterview. Dort werden Informationen über alle Haushaltsmitglieder erfragt. Ohne einen Anspruch auf Vollständigkeit zu erheben sind dies, neben den schon unter 2.3.2 genannten Merkmalen, die Merkmale¹³⁵

- Geschlecht,
- Familienstand,
- höchster beruflicher Ausbildungsabschluss,
- Stellung im Haushalt (z.B. Kind oder Lebensgefährte),
- Geburtsjahr.

Die in diesem Kapitel beschriebenen Daten der EVS fungieren als empirischer Ausgangspunkt für die nachfolgenden Ausführungen. Im anschließenden Kapitel 3 werden Erkenntnisse der mikroökonomischen Theorie präsentiert, die als theoretischer Ausgangspunkt dazu dienen, ein optimales Nachfragesystem für dynamische Mikosimulationsmodelle zu entwickeln.

¹³⁵Vgl. *Statistisches Bundesamt* (2005c, S. 53ff.).

Kapitel 3

Theorie der Güternachfrage

In diesem Kapitel erfolgt ein Überblick über die theoretischen Grundlagen, deren Kenntnis zur empirischen Schätzung von Nachfragesystemen zwingend notwendig ist. Eine kompakte Darstellung des theoretischen Rahmens hat vielfältige Vorteile. Zum einen dient das Kapitel der Einführung einer einheitlichen Notation. Zum anderen ermöglicht die am Thema der Arbeit ausgerichtete und mit zahlreichen Abbildungen und Beweisen ausgestattete Beschreibung einen kritischen Umgang mit den Ergebnissen mikroökonomischer Theorie. Die folgenden Ausführungen legen somit die Basis für die Beurteilung der Güte von Nachfragesystemen. Die im vorangegangenen Kapitel unter 2.2.3 beschriebene Problematik der Konsumentenrente belegt die Notwendigkeit dieses Vorgehens.

3.1 Präferenzen und ihre Abbildung

Dem Ansatz des methodologischen Individualismus¹ folgend versucht die mikroökonomische Theorie das Verhalten und Interagieren von Wirtschaftssubjekten zu modellieren. Die Nachbildung des ökonomischen Wahlverhaltens von Haushalten steht im Vordergrund der folgenden Darstellung. Dem Haushalt wird als dem ökonomischen Ort des Konsums der Vorzug gegenüber der Einzelperson oder der Familie gegeben. Diese Abgrenzung ist sowohl methodisch sinnvoll als auch der Datenlage² entsprechend.

3.1.1 Rationale Präferenzordnung

Die im Haushalt lebenden Personen bilden bezüglich der Güternachfrage eine Einheit. Das angestrebte Ziel einer jeden Wahlhandlung ist annahmegemäß die optimale Bedürfnisbefriedigung der Haushaltsmitglieder bei gegebener Budgetrestriktion. Die Bedürfnisbefriedigung erfolgt in diesem Ansatz durch den Kon-

¹Vgl. dazu beispielsweise *Petersen, H.-G. und Müller, K. (1999, S. 1ff.)*.

²Vgl. hierzu 2.3, S. 27ff.

sum von Gütern. Immaterielle Werte, wie beispielsweise Liebe oder Vertrauen, werden vernachlässigt. Bei den materiellen Werten sind verschiedene Güterarten zu unterscheiden. Die Ausführungen beziehen sich auf private Güter³, da bei diesen die Verteilung über Märkte erfolgt und somit Preise vorhanden sind. Die Entscheidung, welche Güter bevorzugt in den Warenkorb des Haushalts eingehen, ist zunächst in den Präferenzen der einzelnen Haushaltsmitglieder verankert. Um die Präferenzordnung eines Haushalts zu bestimmen, müssen die Einzelpräferenzen zusammengefügt werden. Dabei kann es zu einem so genannten Abstimmungsparadoxon⁴ kommen. Im Weiteren wird jedoch von einer eindeutig bestimmten *rationalen Haushaltspräferenzordnung* ausgegangen, welche sich durch die folgenden Eigenschaften auszeichnet:

Es sei Ω eine konvexe Menge aller alternativen Güterbündel⁵ mit $x, y, z \in \Omega$. Ferner steht die binäre Beziehungen $x \succeq y$ für „ x ist mindestens so gut wie y “, woraus $x \succ y$ für „ x ist besser als y “ und $x \sim y$ für „ x ist genauso gut wie y “ folgen.⁶

A1 Vollständigkeit: $\forall x, y: x, y \in \Omega$ gilt, $(x \succeq y) \cup (y \succeq x) \cup (x \sim y)$.

A2 Transitivität: $\forall x, y, z: x, y, z \in \Omega$ gilt, $(x \succeq y) \cap (y \succeq z) \Rightarrow (x \succeq z)$.

A3 Stetigkeit: Es sei $A(x)$ die Menge aller $a \in \Omega$ mit der Eigenschaft „mindestens so gut wie x “, also $A(x) = \{a \mid a \succeq x\}$ und entsprechend $B(x)$ die Menge aller $b \in \Omega$ mit der Eigenschaft „nicht besser als x “, also $B(x) = \{b \mid b \preceq x\}$. Die Präferenzordnung ist stetig, wenn $A(x)$ und $B(x)$ für alle $x \in \Omega$ abgeschlossene Mengen sind.

Die Eigenschaften A1 und A2 implizieren zudem:⁷

- Reflexivität: $\forall x: x \in \Omega$ gilt, $x \sim x$.
- Symmetrie: $\forall x, y: x, y \in \Omega$ gilt, $(x \sim y) \Leftrightarrow (y \sim x)$.

3.1.2 Die Abbildung von Präferenzordnungen

Präferenzordnungen von Haushalten können durch Nutzenfunktionen abgebildet werden. Funktionen sind Vorschriften, die Werten einer Menge in eindeutiger Weise numerische Werte zuordnen. Eine Funktion $U(\cdot)$ wird Nutzenfunktion genannt, wenn gilt:

$$x \succeq y \Leftrightarrow U(x) \geq U(y).$$

³Klubgüter werden vernachlässigt.

⁴Siehe dazu Anhang A.1, S. 193.

⁵Siehe dazu Anhang A.3, S. 194f.

⁶ $x \succeq y \wedge y \succeq x \Rightarrow x \sim y$ und $x \succeq y \wedge x \not\succeq y \Rightarrow x \succ y$.

⁷Der Beweis findet sich im Anhang A.2, S. 194.

Durch die angenommene Stetigkeit der Präferenzordnung existiert eine Funktion⁸ mit der genannten Eigenschaft. Mittels positiver monotoner Transformation⁹ können unendlich viele Nutzenfunktionen für diese Präferenzordnung generiert werden. Dies entspricht dem Konzept der ordinalen Nutzenfunktionen. Beim kardinalen Nutzenkonzept wird hingegen eine Funktion ausgewählt, um einen numerischen Wert der Nutzendifferenzen zwischen zwei Güterbündeln zu bestimmen.

Die bisher getroffenen Annahmen A1 bis A3 erlauben die Abbildung der Präferenzordnung durch Nutzenfunktionen. Diese Darstellungsweise ermöglicht die Anwendung von herkömmlichen mathematischen Methoden, da der größte Funktionswert die beste Wahl des Haushalts repräsentiert. Gleichzeitig stehen dem Haushalt nur begrenzte Mittel zur Verfügung, die durch die Budgetrestriktion repräsentiert werden. Eine hinreichende Bedingung für die Existenz eines Maximums (und Minimums) ist durch das *Weierstrasssche* Theorem gegeben.

Theorem von Weierstrass: Ist $U(\cdot)$ eine stetige Funktion und ist B eine nichtleere, abgeschlossene und beschränkte Menge, so besitzt $U(\cdot)$ ein Maximum und ein Minimum auf B .

B stellt in diesem Fall die Menge aller Güterkombinationen dar, die bei gegebenem Budget möglich sind. Die Bedingung der beschränkten Menge verdeutlicht nochmals die Begrenztheit der Theorie auf private Güter. Die Ergänzung um freie Gütern würde die Existenz eines Maximums zwar nicht unmöglich machen, jedoch wäre ein optimales Güterbündel nicht zwangsläufig vorhanden.

Neben der Stetigkeit garantieren zwei weitere Anforderungen an den Nutzenfunktionstyp die Modellierung des ökonomischen Wahlverhaltens durch ein Maximierungsproblem unter Nebenbedingungen.

Zunächst wird die eindeutige Bestimmtheit des Optimums¹⁰ durch die Annahme einer streng quasikonkaven Nutzenfunktion gesichert.¹¹ Eine (steigende) Nutzenfunktion mit dem Definitionsbereich $\Omega \subseteq \mathbb{R}_+^n$ ¹² ist streng quasikonkav, wenn für jeden Punkt in Ω die Bessermenge \mathcal{B} ¹³ streng konvex ist.¹⁴

A4 Steigende streng quasikonkave Nutzenfunktion in Ω .

Als Verschärfung der Quasikonkavität kann Konkavität der Nutzenfunktion gefordert werden. Letztere ist eine stärkere Einschränkung und bringt das 1. *Gossensche* Gesetz zur Geltung. Dies besagt, dass die Nutzenzuwächse mit zunehmenden Gütermengen abnehmen, aber immer positiv sind. Es gilt allgemein:

⁸Der Beweis findet sich im Anhang A.4, S. 195.

⁹Beispielsweise $f(U(\cdot)) = 3U(\cdot)$.

¹⁰Annahme: B ist konvex, siehe dazu 3.1.3, S. 50f., und A.5, S. 196.

¹¹Hinweis: Die Indifferenzkurven sind dann streng konvex zum Ursprung.

¹²Siehe dazu im Anhang A.3, S. 194f.

¹³Die Bessermenge \mathcal{B} eines Punktes in Ω ist diejenige Punktmenge in Ω , welche einen mindestens genauso großen Funktionswert ergibt. Siehe dazu auch Abbildung A.5, S. 198.

¹⁴Vgl. *Hoy, M.* u.a. (1996, S. 48).

Konkavität \implies Quasikonkavität

Des Weiteren ist die zweimalige Differenzierbarkeit der Nutzenfunktion vorteilhaft. Diese Anforderung ist rein technischer Natur. Sie dient in erster Linie dazu, dass bestimmte Rechentechniken verwendet werden können.¹⁵

A5 Differenzierbarkeit: $U(\cdot)$ sei eine zweimal differenzierbare Funktion.

Die Nichtsättigungsannahme¹⁶ oder alternativ die Forderung nach strenger Monotonie der Präferenzordnung¹⁷, welche beide die vollständige Ausnutzung des Budgets gewährleisten, werden bereits durch die Forderung nach strenger Quasikonkavität erfüllt. Sie gelten als Alternativen zu A4, falls auf die Eindeutigkeitsforderung der Optimierungslösung verzichtet wird.

3.1.3 Die Budgetbeschränkung

Eine Budgetbeschränkung bzw. eine Budgetmenge B beschreibt formal die ökonomisch zulässigen Güterbündel eines Haushalts. B ist eine Teilmenge von Ω und abhängig vom Haushaltseinkommen M und den Güterpreisen p . Es gilt:

$$B(M, p) = \{x \in \Omega : p^T x \leq M\},$$

wobei p der Güterpreisvektor und x ein Güterbündel ist. Es wird angenommen, dass alle Güter zu allgemein bekannten positiven Preisen gehandelt werden und die Haushalte Preisnehmer sind.¹⁸

A6 Die Preise sind allgemein bekannt, positiv ($p > 0$) und können von den Haushalten nicht beeinflusst werden.

Der Begriff des Haushaltseinkommens M bedarf weiterer Erklärung. M kann in dieser theoretischen Betrachtung der Haushaltsnachfrage mit den potentiellen Ausgabemöglichkeiten für die L Güter umschrieben werden, wobei die Aufteilung der dem Haushalt zur Verfügung stehenden Mittel in Sparen bzw. Verschulden und Ausgaben für andere Dinge als die hier modellierten Güter bereits unwiderruflich erfolgt ist. Sollte das so definierte Haushaltseinkommen M nicht vollständig verbraucht werden, so verfällt es ersatzlos. Allerdings wird dieser Fall durch die Annahme A4 ausgeschlossen, was im Folgenden unter 3.2.1 verdeutlicht wird. Ein Gleichsetzen der Begrifflichkeiten Einkommen und Ausgaben ist daher in dieser Modellwelt möglich.

¹⁵Beispielsweise erfüllen *Leontief*-Präferenzen nicht diese Eigenschaft. Insofern hat die folgende Annahme A5 eine ökonomische Bedeutung, da sie diese Art von Präferenzen ausschließt.

¹⁶Die Nutzenfunktion fällt in keinem Argument und steigt in mindestens einem Argument. Dies schließt die Existenz von „dicken“ Indifferenzkurven aus.

¹⁷Strenge Monotonie der Präferenzordnung: $(x_l \geq y_l) \cap (x \neq y) \Rightarrow (x \succ y)$. Dabei steht l für ein beliebiges Gut aus den Güterbündeln x und y .

¹⁸Siehe Anhang A.3, S. 194f.

In der nebenstehenden Abbildung 3.1 ist eine Budgetmenge für den Zweigüterfall ($L = 2$) skizziert. In dieser Konstellation bildet $p^T x = M$ eine Gerade, die rechtwinklig zum Preisvektor ist. Allgemein gilt für den Mehrgüterfall ($L > 2$), dass der Preisvektor zur Budgethyperebene orthogonal ist. Diese Eigenschaft wird bei der Optimierung der streng quasikonkaven Nutzenfunktion verwendet. Des Weiteren ist $B(M, p)$ unter den getroffenen Annahmen eine konvexe Menge.¹⁹

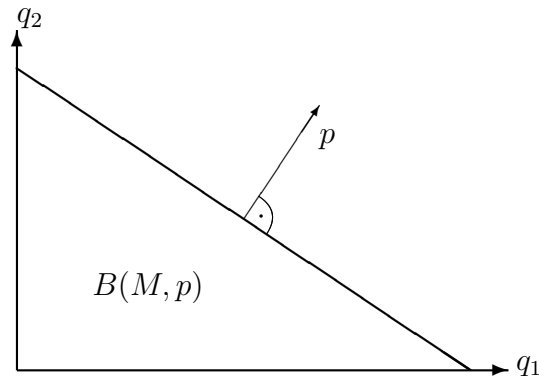


Abbildung 3.1: Budgetmenge (Quelle: Eigene Darstellung).

Die Annahmen A1 bis A6 ermöglichen die Modellierung der Haushaltsentscheidung bezüglich der Güternachfrage mittels eines eindeutig²⁰ bestimmten Optimierungsproblems. Die Eigenschaften und theoretischen Implikationen dieses Ansatzes werden im folgenden Abschnitt näher betrachtet.

3.2 Modelle der Haushaltsentscheidung

3.2.1 Nutzenmaximierungsmodell

Gelten die Annahmen A1 bis A6, so optimiert der Haushalt die Nutzenfunktion $U(x)$ unter der Nebenbedingung $p^T x = M$.²¹ Ein in den Wirtschaftswissenschaften häufig genutztes einfaches Verfahren für dieses Optimierungsproblem ist die Methode der Lagrangemultiplikatoren. Zunächst wird die Lagrangefunktion in der folgenden Form aufgestellt:

$$\mathcal{L}(x, \lambda^M) = U(x) + \lambda^M(n(x)),$$

wobei λ^M den Lagrangemultiplikator, x den Gütervektor bestehend aus L Gütern und $n(x)$ die nach Null umgestellte Nebenbedingung ($n(x) = M - p^T x$) darstellen. Die notwendige Bedingung für ein lokales Maximum von $U(x)$ ²² wird durch ein

¹⁹Der Beweis der Konvexität der Budgetmenge und die Herleitung der Orthogonaleigenschaft des Preisvektors sind im Anhang A.5, S. 196, zu finden.

²⁰Zwei Gegenbeispiele zur Eindeutigkeit sind in den Abbildungen A.3 und A.4 im Anhang A.6, S. 197, zu finden.

²¹Die Formulierung der Nebenbedingung als Gleichung $p^T x = M$ anstelle von $p^T x \leq M$ wird durch die Annahme A4 ermöglicht.

²²Die Maximaleigenschaft der Lösung wird hinreichend durch A4 und A6 garantiert. Eine formale Darstellung ist in *Silberberg, E.* (1990, S. 173ff.) zu finden.

Gleichungssystem der Form

$$\nabla U(x) = -\lambda^M \cdot \nabla n(x)$$

$$n(x) = 0$$

repräsentiert.

Das System folgt aus dem partiellen Differenzieren der Lagrangefunktion nach den L Gütern und λ^M mit anschließendem Nullsetzen. $\nabla U(x)$ stellt dabei den Spaltenvektor der partiellen Ableitungen nach den Gütern dar, der "Gradient der Nutzenfunktion" genannt wird. Entsprechendes gilt für $\nabla n(x)$ mit der Besonderheit, dass der Gradient der Nebenbedingung genau dem mit (-1) multiplizierten Preisvektor p entspricht.²³ Die Lagrangemethode bestimmt folglich jene Güterkombination auf der Budgetebene, bei der der Gradient der Nutzenfunktion²⁴ dem λ^M -fachen des Preisvektors entspricht. Diese innere Lösung repräsentiert die Güterkombination, die ein Haushalt mit rationaler Präferenzordnung unter den Parametern M und p wählen wird. Die innere Lösung ist für den Zweigüterfall ($L = 2$) in der Abbildung 3.2 skizziert.

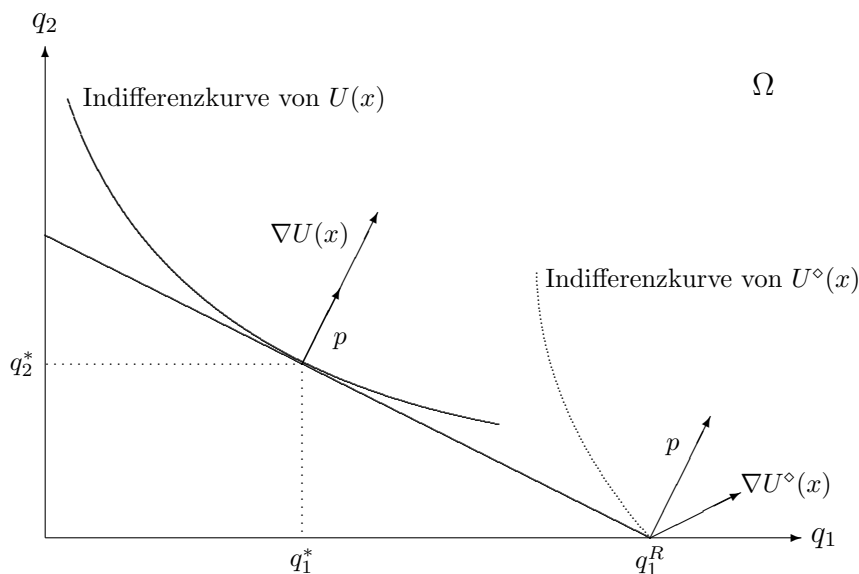


Abbildung 3.2: Die eindeutige Bestimmung des optimalen Güterbündels (Quelle: Eigene Darstellung).

Neben der inneren Lösung (q_1^*, q_2^*) sind prinzipiell auch Randlösungen möglich, die in Abbildung 3.2 aufgezeigt, aber von der verwendeten Optimierungsmetho-

²³ $\nabla U(x) = \left(\frac{\partial U(x)}{\partial q_1}, \frac{\partial U(x)}{\partial q_2}, \dots, \frac{\partial U(x)}{\partial q_L} \right)^T$; $\nabla n(x) = \left(\frac{\partial n(x)}{\partial q_1}, \frac{\partial n(x)}{\partial q_2}, \dots, \frac{\partial n(x)}{\partial q_L} \right)^T = (-p_1, -p_2, \dots, -p_L)^T$.

²⁴Die Eigenschaft des Gradienten der Nutzenfunktion, welche dieser Methode zugrunde liegt, wird unter A.7, S. 198ff., erörtert.

de nicht bestimmt werden.²⁵ Dieser Mangel fällt jedoch durch die Annahme der im Definitionsbereich Ω streng quasikonkaven Nutzenfunktion nicht ins Gewicht, da die Indifferenzkurven den Rand des Definitionsbereichs nicht berühren.²⁶ Der beispielhaft gewählte Fall einer zwar quasikonkaven, jedoch nicht streng quasikonkaven Nutzenfunktion in Ω wird in der Abbildung 3.2 durch die Indifferenzkurve von $U^\circ(x)$ repräsentiert. In dieser Konstellation ist der absolute Wert des Anstiegs der Indifferenzkurve im gesamten Definitionsbereich größer als der absolute Wert des Anstiegs der Budgetgeraden. Die Randlösung $(q_1^R, 0)$ maximiert in diesem Fall die Nutzenfunktion. Im obigen Randpunkt gilt jedoch: $\lambda^M p \neq \nabla U^\circ(x)$, also nicht das genannte Gleichungssystem.²⁷

Einerseits ist die Einschränkung des Nutzenfunktionstyps sehr restriktiv, da sie impliziert, dass jedes der L Güter vom Haushalt konsumiert wird ($q_i > 0$). Eine derartige Situation widerspricht vor allem der Datenlage.²⁸ Andererseits gelten die für die empirische Schätzung von Nachfragesystemen notwendigen theoretischen Erkenntnisse nur für die innere Lösung des Optimierungsproblems. Das Dilemma des Nichtkonsums von Gütern wird unter 6.2 auf S. 151 eingehender beleuchtet.

Zusammenfassend kann festgehalten werden, dass die Methode der Lagrange-multiplikatoren bei Geltung der Annahmen A1 bis A6 ein optimales Güterbündel

$$x^*(p, M) = (q_1^*(p, M), \dots, q_L^*(p, M))^T$$

und ein $\lambda^{M^*}(p, M)$ in Abhängigkeit von den Parametern Einkommen (M) und Güterpreisen (p) bestimmt.

3.2.2 Ausgabenminimierungsmodell

Alternativ zum Nutzenmaximierungsmodell kann zur Bestimmung des optimalen Güterbündels das Ausgabenminimierungsmodell verwendet werden. Hier wird mittels der Lagrangemethode die Güterkombination bestimmt, welche bei gegebenem Nutzenniveau \bar{U} die geringsten Ausgaben verlangt. Formal kann dieser Ansatz mit

$$\mathcal{L}(x, \lambda^H) = p^T x + \lambda^H (\bar{U} - U(x))$$

beschrieben werden. Die notwendige Bedingung für die Minimaleigenschaft von $p^T x$ ist wiederum ein durch partielles Differenzieren nach den Gütern x und λ^H bestimmtes Gleichungssystem

$$p = \lambda^H \cdot \nabla U(x)$$

²⁵Die allgemeine Bestimmung der Lösung des Optimierungsproblems ist mittels der *Kuhn-Tucker*-Bedingungen möglich. Vgl. dazu beispielsweise *Hoy, M.* u.a. (1996, S. 571ff.)

²⁶Siehe dazu im Anhang A.6, S. 197f.

²⁷In diesem Beispiel existiert keine (λ^M, x) -Kombination, die das Gleichungssystem $\lambda^M p = \nabla U(x)$ erfüllt. $\lambda^M p \neq \nabla U(x)$ für alle $\lambda^M \in R_+$ und $x \in \Omega$.

²⁸Siehe dazu 2.3, S. 27ff.

$$\bar{U} - U(x) = 0.$$

Die notwendige Bedingung des Minimierungsansatzes unterscheidet sich von der des Maximierungsansatzes nur in der Nebenbedingung und im Lagrangemultiplikator.²⁹ Auch hier wird die Güterkombination x^* bestimmt, bei der der Gradient der Nutzenfunktion proportional zum Preisvektor ist. Die Beschränkung auf innere Lösungen gilt damit wie beim Maximierungsansatz. Die Lösung des Gleichungssystems ergibt

$$x^*(p, \bar{U}) = (q_1^*(p, \bar{U}), \dots, q_L^*(p, \bar{U}))^T$$

und ein $\lambda^{\mathcal{H}^*}(p, \bar{U})$. In diesem Modellansatz besteht Abhängigkeit von den Parametern Nutzenniveau (\bar{U}) und Güterpreisen (p).

3.2.3 Nachfragefunktionen

Das Modell der Nutzenmaximierung bestimmt die Nachfrage nach den L Gütern in Abhängigkeit vom Einkommen und von den Güterpreisen. Diese Art der Nachfragefunktion wird als *Marshall'sche* (oder auch unkompenzierte) Nachfragefunktion bezeichnet.³⁰ Im Folgenden soll dieser Typus mit einem hochgestellten \mathcal{M} gekennzeichnet werden. Der Vektor der *Marshall*-Nachfrage wird daher mit $x^{\mathcal{M}}$ bezeichnet:

$$\begin{aligned} q_1^* &= q_1^{\mathcal{M}}(p_1, p_2, \dots, p_i, \dots, p_L, M) \\ q_2^* &= q_2^{\mathcal{M}}(p_1, p_2, \dots, p_i, \dots, p_L, M) \\ q_i^* &= q_i^{\mathcal{M}}(p_1, p_2, \dots, p_i, \dots, p_L, M) \\ q_L^* &= q_L^{\mathcal{M}}(p_1, p_2, \dots, p_i, \dots, p_L, M). \end{aligned}$$

$q_i^{\mathcal{M}}(p, M)$ ist homogen vom Grad Null ($x^{\mathcal{M}}(sp, sM) = x^{\mathcal{M}}(p, M)$) für einen Skalar $s > 0$, was sich leicht zeigen lässt.³¹ Des Weiteren ist $q_i^{\mathcal{M}}(p, M)$ stetig und differenzierbar.³² Durch die Eigenschaft der Nullhomogenität von *Marshall*-Nachfragefunktionen gilt folgender Zusammenhang: Es sei dabei $\varepsilon_{ij}^{\mathcal{M}}$ die Preiselastizität des Gutes q_i bezüglich des Preises p_j und $\varepsilon_{iM}^{\mathcal{M}}$ die Einkommenselastizität des Gutes q_i . Gemäß der *Eulerschen* Homogenitätsrelation gilt:³³

$$\frac{\partial q_i^{\mathcal{M}}}{\partial p_1} p_1 + \frac{\partial q_i^{\mathcal{M}}}{\partial p_2} p_2 + \dots + \frac{\partial q_i^{\mathcal{M}}}{\partial p_i} p_i + \dots + \frac{\partial q_i^{\mathcal{M}}}{\partial p_L} p_L + \frac{\partial q_i^{\mathcal{M}}}{\partial M} M = 0.$$

²⁹Bei $\lambda^{\mathcal{H}}$ handelt es sich wieder um den Lagrangemultiplikator. $\lambda^{\mathcal{H}}$ ist mit $\lambda^{\mathcal{M}}$ in besonderer Weise verknüpft. Vgl. dazu im Anhang A.13, S. 207f.

³⁰Vgl. *Schöler, K.* (1999, S. 39).

³¹Das Gleichungssystem der notwendigen Bedingung ist unabhängig von einem etwaigen Skalar s dieser Form, da beide Seiten der Gleichungen mit s multipliziert werden.

³²Die Annahmen A3, A4 und A5 gewährleisten diese Eigenschaften. Beweise hierfür finden sich beispielsweise in *Mas-Colell, Whinston und Green* (1995, S. 92ff.) und in *Barten, Böhm* (1982, S. 411). Letztere Beweisführung zeigt weiterhin, dass die Eigenschaft der Differenzierbarkeit bei Geltung der Annahmen gleichbedeutend mit der Nicht-Singularität der geränderten Hesse-Matrix der Nutzenfunktion ist.

³³Vgl. dazu A.15, S. 209.

Diese Gleichung durch x_i dividiert ergibt:

$$\mathbf{E1}^{\varepsilon^M} \quad \varepsilon_{i1}^M + \varepsilon_{i2}^M + \dots + \varepsilon_{ii}^M + \dots + \varepsilon_{iL}^M + \varepsilon_{iM}^M = 0.$$

Eine Eigenschaft der *Marshall'schen* Einkommenselastizitäten folgt aus der Budgetbeschränkung

$$p_1 q_1^M + \dots + p_i q_i^M + \dots + p_L q_L^M = M.$$

Nach M differenziert ergibt dies:

$$p_1 \frac{\partial q_1^M}{\partial M} + \dots + p_i \frac{\partial q_i^M}{\partial M} + \dots + p_L \frac{\partial q_L^M}{\partial M} = 1.$$

Jeder Term dieser Gleichung wird nun mit $\frac{M}{M}$ und $\frac{x_i^M}{x_i^M}$ für $i = 1, \dots, L$ multipliziert. Dies ergibt:

$$\mathbf{E2.1}^{\varepsilon^M} \quad \frac{p_1 q_1}{M} \varepsilon_{1M} + \dots + \frac{p_i q_i}{M} \varepsilon_{iM} + \dots + \frac{p_L q_L}{M} \varepsilon_{LM} = 1.$$

Die Summe der mit dem jeweiligen Anteil der Ausgaben für das Gut an den Gesamtausgaben M gewichteten Einkommenselastizitäten ergibt folglich 1. Für die Preiselastizitäten impliziert die Budgetbeschränkung einen Zusammenhang, der durch die Preiselastizität bezüglich p_1 verdeutlicht werden soll. Die beispielhaft nach p_1 differenzierte Budgetgleichung:

$$q_1^M + p_1 \frac{\partial q_1^M}{\partial p_1} + p_2 \frac{\partial q_2^M}{\partial p_1} + \dots + p_L \frac{\partial q_L^M}{\partial p_1} = 0$$

ergibt, erweitert mit $\frac{p_1}{M}$ und $\frac{x_i^M}{x_i^M}$ für $i = 1, \dots, L$ und umgestellt:

$$\frac{p_1 q_1^M}{M} \varepsilon_{11} + \frac{p_2 q_2^M}{M} \varepsilon_{21} + \dots + \frac{p_L q_L^M}{M} \varepsilon_{L1} = -\frac{p_1 q_1^M}{M}.$$

Allgemein gilt daher für die Preiselastizität der *Marshall*-Nachfrage bezüglich p_j :

$$\mathbf{E2.2}^{\varepsilon^M} \quad \frac{p_1 q_1^M}{M} \varepsilon_{1j} + \dots + \frac{p_L q_L^M}{M} \varepsilon_{Lj} = -\frac{p_j q_j^M}{M}.$$

Die Summe der mit dem jeweiligen Budgetanteil gewichteten Preiselastizitäten bezüglich des Preises eines bestimmten Gutes j entspricht dem negativen Budgetanteil des Gutes j .

Unter *Hicksschen* bzw. "kompensierten" Nachfragefunktionen sollen im Folgenden die Funktionen verstanden werden, die einer p, \bar{U} -Kombination gemäß des Ausgabenminimierungsmodells eindeutig eine optimale Gütermenge zuordnen. Die Begrifflichkeit "kompensiert" erklärt sich durch das Nutzenniveau \bar{U} .

Der Haushalt kompensiert (mittels Einkommen) ein durch Preisänderung verringertes (oder gestiegenes) Nutzenniveau, so dass er konstant in \bar{U} verbleibt.³⁴ *Hickssche* Nachfragekurven werden mit einem hochgestellten \mathcal{H} gekennzeichnet. Der Vektor der *Hicksschen*-Nachfrage wird mit $x^{\mathcal{H}}$ bezeichnet:

$$\begin{aligned} q_1^* &= q_1^{\mathcal{H}}(p_1, p_2, \dots, p_i, \dots, p_L, \bar{U}) \\ q_2^* &= q_2^{\mathcal{H}}(p_1, p_2, \dots, p_i, \dots, p_L, \bar{U}) \\ q_i^* &= q_i^{\mathcal{H}}(p_1, p_2, \dots, p_i, \dots, p_L, \bar{U}) \\ q_L^* &= q_L^{\mathcal{H}}(p_1, p_2, \dots, p_i, \dots, p_L, \bar{U}). \end{aligned}$$

Die durch das Ausgabenminimierungsmodell generierten *Hicksschen* Nachfragekurven $q_i^{\mathcal{H}}(p, \bar{U})$ sind homogen vom Grad Null in p , d.h. $x^{\mathcal{H}}(sp, \bar{U}) = x^{\mathcal{H}}(p, \bar{U})$ für einen Skalar $s > 0$. Eine allgemeine Preiserhöhung (-senkung), die das Preisverhältnis unberührt lässt, hat somit in diesem Modell keine Wirkung auf das optimale Güterbündel.³⁵ Auch die *Hicksschen* Nachfragekurven sind stetig und differenzierbar, wenn die Annahmen A3, A4 und A5 gelten.³⁶ Wie die oben beschriebenen *Marshall'schen* Elastizitäten besitzen auch die *Hicksschen* besondere Eigenschaften. Die *Hicksschen*-Nachfragefunktionen sind wie beschrieben nur bezüglich p homogen vom Grad Null. Daher gilt, wieder gemäß der *Eulerschen* Homogenitätsrelation:

$$\mathbf{E1}^{\varepsilon^{\mathcal{H}}} \quad \varepsilon_{i1}^{\mathcal{H}} + \varepsilon_{i2}^{\mathcal{H}} + \dots + \varepsilon_{ii}^{\mathcal{H}} + \dots + \varepsilon_{iL}^{\mathcal{H}} = 0.$$

Im Unterschied zu $\mathbf{E1}^{\varepsilon^{\mathcal{M}}}$ gilt diese Beziehung nur für die Preiselastizitäten, d.h. die Elastizität bezüglich des konstanten Nutzenniveaus \bar{U} entfällt. Die partielle Ableitung der Nebenbedingung des Ausgabenminimierungsmodells nach p_j

$$\frac{\partial U}{\partial q_1^{\mathcal{H}}} \frac{\partial q_1^{\mathcal{H}}}{\partial p_j} + \frac{\partial U}{\partial q_2^{\mathcal{H}}} \frac{\partial q_2^{\mathcal{H}}}{\partial p_j} + \dots + \frac{\partial U}{\partial q_i^{\mathcal{H}}} \frac{\partial q_i^{\mathcal{H}}}{\partial p_j} + \dots + \frac{\partial U}{\partial q_L^{\mathcal{H}}} \frac{\partial q_L^{\mathcal{H}}}{\partial p_j} = 0$$

führt zur zweiten Eigenschaft der *Hicksschen* Preiselastizitäten.

Das Einsetzen der notwendigen Bedingung des Ausgabenminimierungsmodells $\nabla U(x) = p \left(\frac{1}{\lambda^{\mathcal{H}}} \right)$ und das anschließende Multiplizieren mit $\lambda^{\mathcal{H}}$ führt zu

$$p_1 \frac{\partial q_1^{\mathcal{H}}}{\partial p_j} + p_2 \frac{\partial q_2^{\mathcal{H}}}{\partial p_j} + \dots + p_i \frac{\partial q_i^{\mathcal{H}}}{\partial p_j} + \dots + p_L \frac{\partial q_L^{\mathcal{H}}}{\partial p_j} = 0.$$

Diese Gleichung mit $\frac{p_j}{M}$ und $\frac{q_i}{q_i}$ für $i = 1, \dots, L$ multipliziert ergibt die zweite Eigenschaft

$$\mathbf{E2}^{\varepsilon^{\mathcal{H}}} \quad \frac{p_1 q_1}{M} \varepsilon_{1j}^{\mathcal{H}} + \frac{p_2 q_2}{M} \varepsilon_{2j}^{\mathcal{H}} + \dots + \frac{p_i q_i}{M} \varepsilon_{ij}^{\mathcal{H}} + \dots + \frac{p_L q_L}{M} \varepsilon_{Lj}^{\mathcal{H}} = 0.$$

In $\mathbf{E1}^{\varepsilon^{\mathcal{H}}}$ wurde die Beziehung der Preiselastizitäten eines Gutes bezüglich aller Preise beschrieben. Hingegen wird mit $\mathbf{E2}^{\varepsilon^{\mathcal{H}}}$ eine Verknüpfung der Preiselastizitäten aller L -Güter bezüglich p_j aufgezeigt.

³⁴Vgl. *Schöler, K.* (1999, S. 39).

³⁵Der Skalar verändert ausschließlich die Länge des zur Budgethyperebene orthogonalen Vektors p . Siehe dazu Abbildung A.6, S. 199.

³⁶Vgl. *Mas-Colell, Whinston und Green* (1995, S. 62 und 92ff.).

3.2.4 Indirekte Nutzenfunktion und Ausgabenfunktion

Die indirekte Nutzenfunktion ist die eigentliche Lösung des Maximierungsansatzes. Sie bestimmt den optimalen Nutzen in Abhängigkeit von p und M und wird nachfolgend mit \mathcal{N} bezeichnet:

$$\mathcal{N}(p, M) = U(q_1^*(p, M), \dots, q_L^*(p, M)) = U(q_1^M(p, M), \dots, q_L^M(p, M)) = U(x^M).$$

Indirekte Nutzenfunktionen sind:

E1^N Homogen vom Grad 0.

E2^N Monoton steigend in M und fallend in p_i für $i = 1, \dots, L$.

E3^N Quasikonvex, d.h. die Schlechtermenge $\{(p, M) : \mathcal{N}(p, M) \leq \bar{U}\}$ ist konvex.

E4^N Stetig in p und M .

Die Eigenschaften E1^N und E4^N folgen direkt aus den genannten Eigenschaften der *Marshall*-Nachfragekurven. E3^N wird im Anhang A.14, S. 208, bewiesen. Der Nachweis von E2^N findet sich unter 3.3.5, S. 66, und unter 3.3.2, S. 59.

Die Ausgabenfunktion stellt äquivalent zur indirekten Nutzenfunktion die Lösung des Minimierungsansatzes dar. Sie ordnet einer p, \bar{U} -Kombination die minimalen Ausgaben zu und wird im Folgenden mit \mathcal{A} bezeichnet:

$$\mathcal{A}(p, \bar{U}) = p_1 \cdot q_1^*(p, \bar{U}), \dots, p_L \cdot q_L^*(p, \bar{U}) = p_1 \cdot q_1^{\mathcal{H}}(p, \bar{U}), \dots, p_L \cdot q_L^{\mathcal{H}}(p, \bar{U}) = p^T \cdot x^{\mathcal{H}}.$$

Ausgabenfunktionen zeichnen sich durch die folgenden Eigenschaften aus:

E1^A Homogen vom Grad 1 in p (linearhomogen in p).

E2^A Monoton steigend in \bar{U} und in p_i für $i = 1, \dots, L$.

E3^A Konkav in p .

E4^A Stetig in p und \bar{U} .

Die Eigenschaft E4^A folgt wie bei \mathcal{N} aus der Stetigkeit der *Hicks*-Nachfragekurven in Verbindung mit A3 und A4.³⁷ E1^A wird im Anhang A.14 auf S. 208 hergeleitet. Der Nachweis für E2^A findet sich unter 3.3.5 und 3.3.3, Seiten 66 und 60 und der für E3^A unter 3.3.4, S. 60.

³⁷Siehe dazu auch Anhang A.4, S. 195.

3.3 Wechselbeziehungen und Implikationen

Die Zusammenhänge zwischen den Nachfragefunktionen, indirekter Nutzenfunktion und Ausgabenfunktion werden in der Abbildung 3.3 kompakt dargestellt. Sowohl die Herleitung der indirekten Nutzenfunktion mittels der *Marshall*-Nachfrage als auch die Bestimmung der Ausgabenfunktion durch die *Hicks*-Nachfrage wurden bereits in den Punkten 3.2.3 und 3.2.4 dargestellt. Die folgenden Ausführungen vervollständigen die zur empirischen Schätzung von Nachfragesystemen notwendigen Erkenntnisse der mikroökonomischen Theorie. Die dazu notwendigen mathematischen Hintergründe (Dualität und Envelope-Theorem) werden im Anhang A.13 auf S. 207f. beschrieben.

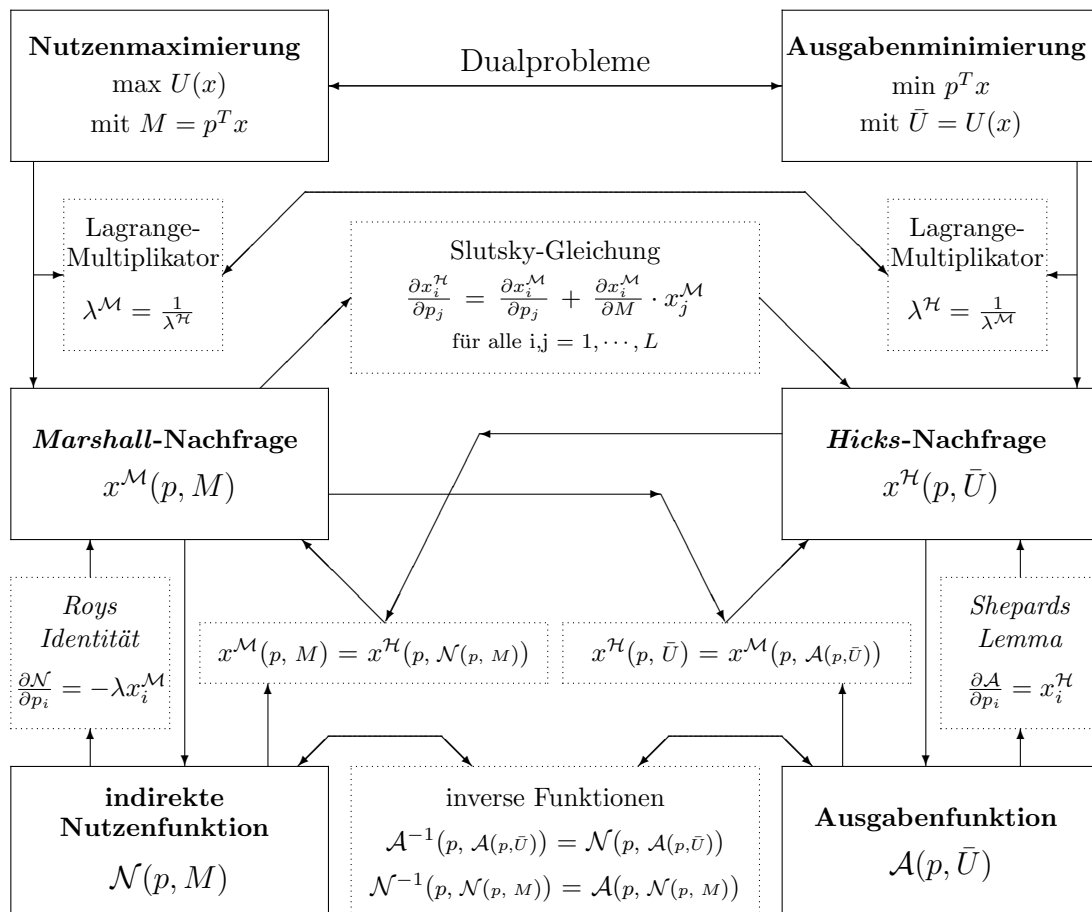


Abbildung 3.3: Wechselbeziehungen

(Quelle: Eigene Darstellung i.A.a. *Deaton, Muellbauer*(1980b, S. 38 und S. 41)).

3.3.1 Verknüpfung von $\mathcal{N}(p, M)$ und $\mathcal{A}(p, \bar{U})$

Die indirekte Nutzenfunktion $\mathcal{N}(p, M)$ ist durch die Dualität von Nutzenmaximierungs- und Ausgabenminimierungsmodell eng mit der Ausgabenfunktion $\mathcal{A}(p, \bar{U})$ verknüpft. Die indirekte Nutzenfunktion beschreibt den funktionalen Zusammenhang zwischen den unabhängigen Variablen Einkommen und Preisvektor und dem dadurch bestimmten maximal erreichbaren Nutzenniveau als abhängiger Variable. Bei der Inversion dieser Funktion wird aus der abhängigen Variablen Nutzenniveau eine unabhängige Variable, d.h. das Nutzenniveau wandelt sich zum Parameter. Die nach dem Einkommen M aufgelöste Funktion \mathcal{N}^{-1} beschreibt folglich die Ausgaben (=Einkommen) als Funktion von Nutzenniveau und Preisvektor. Diese inverse Funktion von \mathcal{N} entspricht exakt der Ausgabenfunktion. Analog dazu entspricht die Inverse der Ausgabenfunktion exakt der indirekten Nutzenfunktion. Indirekte Nutzenfunktion und Ausgabenfunktion sind folglich alternative Darstellungsformen ein und derselben Information.

3.3.2 Bestimmung von $x^{\mathcal{M}}(p, M)$ mittels $\mathcal{N}(p, M)$

Die *Marshall*-Nachfrage nach Gut q_i bzw. x_i kann durch Differenzieren der indirekten Nutzenfunktion nach p_i und anschließendem Dividieren durch $-\lambda^{\mathcal{M}}$ bestimmt werden. Die beschriebene Beziehung zwischen indirekter Nutzenfunktion und *Marshall*-Nachfrage ist allgemein unter dem Begriff *Roys Identität* bekannt und kann leicht mit Hilfe des Envelope-Theorems nachgewiesen werden. Danach entspricht die partielle Ableitung der indirekten Nutzenfunktion nach p_i der partiellen Ableitung der Lagrangefunktion des Nutzenmaximierungsmodells nach p_i . Es gilt gemäß Envelope-Theorem

$$\frac{\partial \mathcal{N}(p, M)}{\partial p_i} = \frac{\mathcal{L}(x, \lambda^{\mathcal{M}})}{\partial p_i} = -\lambda^{\mathcal{M}} \cdot x_i^{\mathcal{M}}(p, M)$$

bzw. in Vektorform

$$\nabla_p \mathcal{N}(p, M) = -\lambda^{\mathcal{M}} \cdot x^{\mathcal{M}}(p, M).$$

Der Nachweis von $E2^{\mathcal{N}}$ bezüglich der Preisreaktion ist hiermit erbracht, da:

$$\frac{\partial \mathcal{N}(p, M)}{\partial p_i} < 0 \quad \text{für} \quad i = 1, \dots, L$$

gilt, denn $\lambda^{\mathcal{M}} > 0$ und $x_i^{\mathcal{M}}(p, M) > 0$, was wiederum aus A4 und A6 folgt.³⁹

³⁸Siehe dazu 3.3.5, S. 66.

³⁹Vgl. dazu auch 3.2.1 und 3.3.5, Seiten 51ff. und 66.

3.3.3 Bestimmung von $x^{\mathcal{H}}(p, \bar{U})$ mittels $\mathcal{A}(p, \bar{U})$

Parallel zu Punkt 3.3.2 ergibt sich die *Hicks-Nachfrage* durch partielles Ableiten der Ausgabenfunktion. Dieser Zusammenhang wird in der Literatur häufig als *Shepards Lemma* bezeichnet und fußt wie *Roys Identität* auf dem Envelope-Theorem. Im Unterschied zu *Roys Identität* wird beim partiellen Differenzieren der Ausgabenfunktion die reine *Hicks-Nachfrage*, d.h. ohne den Lagrangemultiplikator, bestimmt. Es gilt:

$$\frac{\partial \mathcal{A}(p, \bar{U})}{\partial p_i} = \frac{\mathcal{L}(x, \lambda^{\mathcal{H}})}{\partial p_i} = x_i^{\mathcal{H}}(p, \bar{U})$$

bzw. in Vektorform

$$\nabla_p \mathcal{A}(p, \bar{U}) = x^{\mathcal{H}}(p, \bar{U}).$$

Der Nachweis für E2^A bezüglich der Preisreaktion ist auch hier leicht erkennbar, da

$$\frac{\partial \mathcal{A}(p, \bar{U})}{\partial p_i} > 0 \quad \text{für } i = 1, \dots, L$$

gilt. Für $x_i^{\mathcal{H}}(p, \bar{U}) > 0$ gelten die gleichen Argumente wie für $x_i^{\mathcal{M}}(p, M) > 0$ in Punkt 3.3.2.

3.3.4 Verkettung von $x^{\mathcal{M}}(p, M)$ und $x^{\mathcal{H}}(p, \bar{U})$

Die Verbindung zwischen *Marshall-Nachfrage* und *Hicks-Nachfrage* besteht in zwei Ausprägungen. Zunächst gilt Gleichheit beider Nachfragemengen, wenn die Optimallösung des einen Optimierungsproblems als Parameter des anderen Optimierungsproblems gewählt wird, d.h.:

$$x^{\mathcal{H}}(p, \bar{U}) = x^{\mathcal{M}}(p, \mathcal{A}(p, \bar{U}))$$

bzw.

$$x^{\mathcal{M}}(p, M) = x^{\mathcal{H}}(p, \mathcal{N}(p, M)).$$

Diese Eigenschaft erklärt sich aus der Ähnlichkeit der notwendigen Bedingungen der beiden Optimierungsmodelle.⁴⁰ Das Einsetzen der jeweils anderen Optimallösung bewirkt die qualitative Gleichheit der Nebenbedingungsbeschränkung.⁴¹

Die andere Verkettung zwischen *Marshall-* und *Hicks-Nachfrage* hat als so genannte *Slutsky-Gleichung* Eingang in die wirtschaftswissenschaftliche Literatur gefunden. Ausgehend von der oben beschriebenen Verbindung gilt für die Nachfrage nach Gut i :

$$x_i^{\mathcal{H}}(p, \bar{U}) = x_i^{\mathcal{M}}(p, \mathcal{A}(p, \bar{U})).$$

⁴⁰Vgl. dazu 3.2.1 und 3.2.2, Seiten 51ff. und 53f.

⁴¹Vgl. dazu auch die Ausführungen zur Dualität A.13, S. 207f.

Beide Seiten nach p_j differenziert ergibt:

$$\frac{\partial x_i^{\mathcal{H}}}{\partial p_j} = \frac{\partial x_i^{\mathcal{M}}}{\partial p_j} + \frac{\partial x_i^{\mathcal{M}}}{\partial \mathcal{A}} \cdot \frac{\partial \mathcal{A}(p, \bar{U})}{\partial p_j},$$

wobei wegen $\mathcal{A}(p, \bar{U}) = M$, obiger Verbindung zwischen $x^{\mathcal{H}}$ und $x^{\mathcal{M}}$ und *Shepards Lemma*

$$\frac{\partial x_i^{\mathcal{M}}}{\partial \mathcal{A}} = \frac{\partial x_i^{\mathcal{M}}}{\partial M} \quad \text{und} \quad \frac{\partial \mathcal{A}(p, \bar{U})}{\partial p_j} = x_j^{\mathcal{H}}(p, \bar{U}) = x_j^{\mathcal{M}}(p, \mathcal{A}(p, \bar{U})) = x_j^{\mathcal{M}}(p, M)$$

gelten. Daraus folgt die *Slutsky*-Gleichung

$$\frac{\partial x_i^{\mathcal{H}}}{\partial p_j} = \frac{\partial x_i^{\mathcal{M}}}{\partial p_j} + \frac{\partial x_i^{\mathcal{M}}}{\partial M} \cdot x_j^{\mathcal{M}}(p, M)$$

bzw.

$$\frac{\partial x_i^{\mathcal{M}}}{\partial p_j} = \frac{\partial x_i^{\mathcal{H}}}{\partial p_j} - \frac{\partial x_i^{\mathcal{M}}}{\partial M} \cdot x_j^{\mathcal{M}}(p, M).$$

Oftmals wird für die *Slutsky*-Gleichung eine Darstellung in Elastizitätenform gewählt. Durch Multiplikation mit $\frac{p_j}{x_i}$ und $\frac{M}{M}$

$$\frac{p_j}{x_i} \cdot \frac{\partial x_i^{\mathcal{H}}}{\partial p_j} = \frac{p_j}{x_i} \cdot \frac{\partial x_i^{\mathcal{M}}}{\partial p_j} + \frac{p_j}{x_i} \cdot \frac{M}{M} \cdot \frac{\partial x_i^{\mathcal{M}}}{\partial M} \cdot x_j^{\mathcal{M}}(p, M)$$

folgt die Elastizitätenform der *Slutsky*-Gleichung:

$$\varepsilon_{ij}^{\mathcal{M}} = \varepsilon_{ij}^{\mathcal{U}} - \frac{p_j x_j}{M} \cdot \varepsilon_{iM}.$$

Unter der so genannten *Slutsky*-Matrix ($\mathcal{S}(p, M)$) wird im Folgenden die Matrix der Größen $\frac{\partial x_i^{\mathcal{H}}}{\partial p_j}$ aus den *Slutsky*-Gleichungen für alle i, j -Kombinationen verstanden. Es sind besonders die Eigenschaften dieser Matrix, die für die empirische Nachfrageanalyse notwendig sind. $\mathcal{S}(p, M)$ beschreibt kompakt die Reaktion der kompensierten *Hicks*-Nachfrage auf Preisänderungen in Abhängigkeit von Preisvektor und Einkommen:

$$\mathcal{S}(p, M) = \begin{pmatrix} \mathcal{S}_{11} & \mathcal{S}_{12} & \cdots & \mathcal{S}_{1L} \\ \mathcal{S}_{21} & \mathcal{S}_{22} & \cdots & \mathcal{S}_{2L} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \mathcal{S}_{L1} & \mathcal{S}_{L2} & \cdots & \mathcal{S}_{LL} \end{pmatrix}$$

mit

$$\mathcal{S}_{ij} = \frac{\partial x_i^{\mathcal{M}}}{\partial p_j} + \frac{\partial x_i^{\mathcal{M}}}{\partial M} \cdot x_j^{\mathcal{M}}(p, M).$$

Die *Slutsky*-Matrix besitzt die folgenden Eigenschaften:

E1^S $\mathcal{S}(p, M)$ ist negativ semidefinit, d.h. $x^T \mathcal{S}x \leq 0 \quad \forall x \in R^n$.

E2^S $\mathcal{S}(p, M)$ ist symmetrisch, d.h. $\mathcal{S}_{ij} = \mathcal{S}_{ji}$.

E3^S $\mathcal{S}(p, M) \cdot p = 0$.

E4^S $\text{Rg}[\mathcal{S}(p, M)] \leq (L - 1)$. D.h. $\mathcal{S}(p, M)$ besitzt nicht den vollen Rang (Rg) und ist somit eine singuläre Matrix ($|\mathcal{S}| = 0$).

Angesichts der Bedeutung der *Slutsky*-Matrix für die empirische Nachfrageanalyse sind Beweise für die genannten Eigenschaften zweckmäßig. *Shepards* Lemma in Vektorform aus Punkt 3.3.3 lautete:

$$\nabla_p \mathcal{A}(p, \bar{U}) = x^{\mathcal{H}}(p, \bar{U}).$$

Folglich gilt bei nochmaligem Differenzieren beider Seiten nach p :

$$\nabla_p^2 \mathcal{A}(p, \bar{U}) = \mathcal{S}(p, M)$$

bzw.

$$\frac{\partial^2 \mathcal{A}(p, \bar{U})}{\partial p_i \partial p_j} = \frac{\partial x_i^{\mathcal{H}}}{\partial p_j} = \mathcal{S}_{ij}.$$

Gemäß dem Satz von Schwarz⁴² ist aber:

$$\frac{\partial^2 \mathcal{A}(p, \bar{U})}{\partial p_i \partial p_j} = \frac{\partial^2 \mathcal{A}(p, \bar{U})}{\partial p_j \partial p_i} \quad \text{und somit} \quad \mathcal{S}_{ij} = \mathcal{S}_{ji},$$

was die Eigenschaft E2^S beweist.

Die Eigenschaft E1^S folgt direkt aus der Konkavitätseigenschaft der Ausgabenfunktion bezüglich der Preise p (E3^A). Zunächst soll daher die Eigenschaft E3^A hergeleitet werden. Bei gegebenem p^0 und \bar{U}^0 liefert das Ausgabenminimierungsmodell die optimalen Ausgaben:

$$\mathcal{A}(p^0, \bar{U}^0) = p_1^0 x_1^{\mathcal{H}}(p^0, \bar{U}^0) + \cdots + p_i^0 x_i^{\mathcal{H}}(p^0, \bar{U}^0) + \cdots + p_L^0 x_L^{\mathcal{H}}(p^0, \bar{U}^0).$$

Wird nun, wie in Abbildung 3.4 durch $\mathcal{A}(p_1^0, \dots, p_{i-1}^0, p_i, p_{i+1}^0, \dots, p_L^0, x^{\mathcal{H}}(\mathbf{p}^0, \bar{U}^0))$ dargestellt, p_i ausgehend von p_i^0 variiert, ohne dass eine Anpassung von $x^{\mathcal{H}}$ erfolgt, ändern sich die Ausgaben linear mit dem Anstieg $x_i^{\mathcal{H}}(p^0, \bar{U}^0)$.⁴³ Die Ausgabenfunktion $\mathcal{A}(p_1^0, \dots, p_{i-1}^0, p_i, p_{i+1}^0, \dots, p_L^0, x^{\mathcal{H}}(\mathbf{p}, \bar{U}^0))$, welche eine Anpassung der $x^{\mathcal{H}}$ an die p_i Variation gestattet, liefert per Definition die minimalen Ausgaben. Sie muss daher, wie Abbildung 3.4 zeigt, unter der linearen Ausgabenfunktion

⁴²Vgl. im Anhang A.8, S. 200f.

⁴³Da die Variable p_i in dieser Funktion keine Wirkung auf die konstanten $x^{\mathcal{H}}$ hat, ist $\frac{\partial(\sum_{i=1}^L p_i x_i^{\mathcal{H}})}{\partial p_i} = x_i^{\mathcal{H}}$.

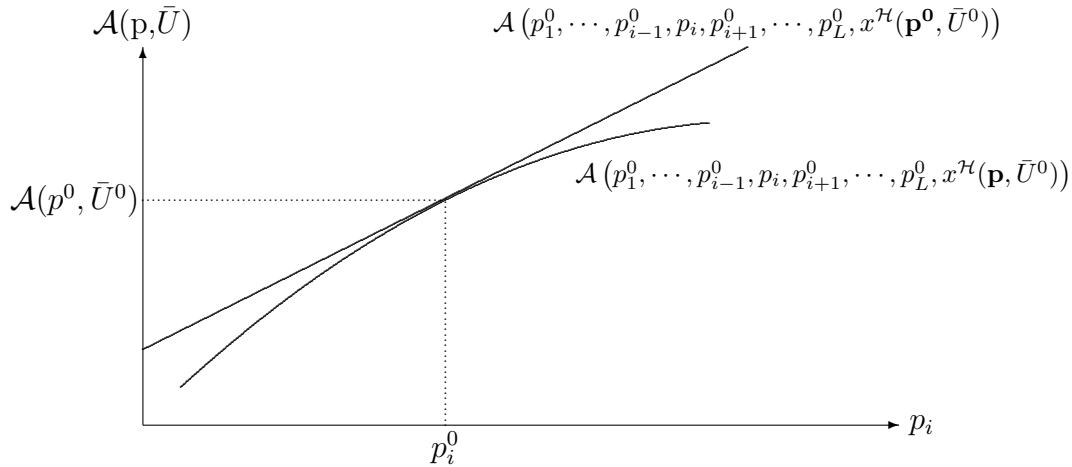


Abbildung 3.4: $\mathcal{A}(p, \bar{U})$ konkav in p (Quelle: Eigene Darstellung).

ohne x^H Anpassung liegen, da hier nicht die optimalen Mengen für den durch p_i veränderten Preisvektor konsumiert werden. Gleichheit beider Ausgabenwerte entsteht folglich nur bei $p_i = p_i^0$. Daher gilt allgemein für $p_i \neq p_i^0$:

$$\mathcal{A}(p_1^0, \dots, p_{i-1}^0, p_i, p_{i+1}^0, \dots, p_L^0, x^H(p^0, \bar{U}^0)) > \mathcal{A}(p_1^0, \dots, p_{i-1}^0, p_i, p_{i+1}^0, \dots, p_L^0, x^H(p, \bar{U}^0)),$$

was die Konkavität der Ausgabenfunktion bezüglich p_i zeigt. Es ist zunächst unzulässig, von der konkaven Eigenschaft der Funktion in eine Richtung p_i auf die allgemeine Konkavität bezüglich p zu schließen. Wie in Abbildung A.8 auf S. 205 verdeutlicht, muss die Funktion degressiv für alle $dp > 0$ steigen, also auch für eine gleichzeitige positive Änderung mehrerer Preise. Die gewählte Argumentation ist aber auch für diesen Fall gültig. So gilt für eine gleichzeitige Änderung von zwei Preisen (p_i, p_j) statt der Funktionsgeraden mit Anstieg $x_i^H(p^0, \bar{U}^0)$ die Ebene mit den Richtungsanstiegen $x_i^H(p^0, \bar{U}^0)$ und $x_j^H(p^0, \bar{U}^0)$. Die Ausgabenfunktion mit x^H -Anpassung liegt dann allgemein unter dieser Ebene und berührt selbige im Punkt (p_i^0, p_j^0) .⁴⁴

Die Hesse-Matrix einer konkaven Funktion ist wie in A.11 beschrieben negativ semidefinit.⁴⁵ Die *Slutsky*-Matrix $\mathcal{S}(p, M)$ entspricht aber gerade der Hesse-Matrix der Ausgabenfunktion bezüglich der Preise, was E1^S verdeutlicht. Die obigen Erläuterungen könnten zu dem falschen Schluss auf eine negativ definite Eigenschaft der Matrix \mathcal{S} verleiten, da die Abbildung 3.4 einen streng konkaven

⁴⁴Die allgemeine Bedingung erster Ordnung für die Konkavität einer stetigen, differenzierbaren Funktion $f(x)$ lautet: $\nabla f(x)(x' - x) \geq f(x') - f(x)$ mit $x', x \in \Omega$. Vgl. beispielsweise *Berck, Strom, Sydsaeter* (1999, S. 81). Die gewählte Argumentation der Linearisierung der Ausgabenfunktion $\mathcal{A}(p, \bar{U}^0)$: $\mathcal{A}(p) + \nabla \mathcal{A}(p)(p' - p) \geq \mathcal{A}(p')$ mit $p', p \in \Omega$, entspricht exakt dieser Bedingung.

⁴⁵Vgl. Anhang A.11, S. 204ff.

Verlauf der Ausgabenfunktion zeigt. Für die Eigenwerte von \mathcal{S} gilt jedoch wegen E4^S

$$\lambda_1^{E^S} \cdot \lambda_2^{E^S} \cdots \lambda_L^{E^S} = |\mathcal{S}| = 0$$

und somit nur die Eigenschaft für negativ semidefinite Matrizen⁴⁶

$$\lambda_i^{E^S} \leq 0 \quad (i = 1, \dots, L),$$

da genau ein Eigenwert $\lambda_i^{E^S} = 0$ existiert. Durch E1^S kann auch die einzige eindeutig durch die Annahmen A1 bis A6 bestimmte Preisreaktion⁴⁷

$$\mathcal{S}_{ii} = \frac{\partial x_i^{\mathcal{H}}}{\partial p_i} < 0$$

bestätigt werden. Es gilt die Beziehung:⁴⁸

$$\text{Spur}(\mathcal{S}) = \text{Spur}(\Lambda^{E^S}) \Rightarrow \sum_{i=1}^L \mathcal{S}_{ii} = \sum_{i=1}^L \lambda_i^{E^S} < 0.$$

Die Eigenschaft E3^S folgt direkt aus der Homogenitätseigenschaft der Hicks-Nachfrage bezüglich p .⁴⁹ Gemäß der Eulerschen Homogenitätsrelation⁵⁰ gilt daher:

$$\sum_{j=1}^L p_j \cdot \frac{\partial x_i^{\mathcal{H}}(p, \bar{U})}{\partial p_j} = 0 \cdot x_i^{\mathcal{H}}(p, \bar{U}) \quad i = 1, \dots, L$$

bzw. in Matrixform:

$$\mathcal{S}(p, M) \cdot p = 0,$$

was E3^S entspricht.

Bezüglich der Eigenschaft E4^S folgt direkt aus E3^S und der Annahme A6 ($p > 0$), dass die Matrix \mathcal{S} nicht den vollen Rang besitzt. Die Vektoren von \mathcal{S} sind nicht linear unabhängig, da E3^S ein homogenes lineares Gleichungssystem darstellt.⁵¹

$$\text{Rg}[\mathcal{S}(p, M)] \leq L - 1.$$

An dieser Stelle soll aufgezeigt werden, dass die theoretischen Restriktionen nur einen, linear abhängigen Vektor verlangen. Sie determinieren somit einen Rang

⁴⁶Siehe Anhang A.10, S. 201ff.

⁴⁷Die Eigenschaft kann mittels des Satzes über implizite Funktionen nachgeprüft werden. Der Nachweis findet sich beispielsweise in Silberberg, E. (1990, S. 323). $\frac{\partial x_i^{\mathcal{H}}}{\partial p_j} < 0$ für $i \neq j$ gilt in seiner Eindeutigkeit nur für den Zweigüterfall.

⁴⁸ $\text{Spur}(\mathcal{S}) = \text{Spur}(\mathcal{S}Q Q^T) = \text{Spur}(Q^T \mathcal{S}Q) = \text{Spur}(\Lambda^{E^S})$.

⁴⁹Vgl. dazu 3.2.3.

⁵⁰Vgl. dazu Anhang A.15, S. 209.

⁵¹Der Beweis findet sich beispielsweise in Kneis, G. (2000, S. 74f.).

von höchstens $L - 1$. Ein geringerer Rang kann zwar nicht ausgeschlossen werden, folgt aber nicht zwangsläufig aus der Theorie. Dieser Schritt des Nachweises nutzt die Ausgangsgleichung:⁵²

$$H_U(x^M) \cdot \lambda^H \mathcal{S}(p, M) + p \cdot \left(\frac{\partial x^M}{\partial M} \right)^T = I,$$

wobei $H_U(x^M)$ der regulären Hesse-Matrix der Nutzenfunktion im Optimum und I der Einheitsmatrix entspricht. Durch das Umstellen der Gleichung

$$H_U(x^M) \cdot \lambda^H \mathcal{S}(p, M) = I - p \cdot \left(\frac{\partial x^M}{\partial M} \right)^T$$

ergibt sich auf der rechten Seite der Gleichung eine Matrix vom Rang $L-1$, denn bei der Matrix

$$I - p \left(\frac{\partial x^M}{\partial M} \right)^T = \begin{pmatrix} 1 - p_1 \frac{\partial x_1^M}{\partial M} & -p_1 \frac{\partial x_2^M}{\partial M} & -p_1 \frac{\partial x_3^M}{\partial M} & \cdots & -p_1 \frac{\partial x_L^M}{\partial M} \\ -p_2 \frac{\partial x_1^M}{\partial M} & 1 - p_2 \frac{\partial x_2^M}{\partial M} & -p_2 \frac{\partial x_3^M}{\partial M} & \cdots & -p_2 \frac{\partial x_L^M}{\partial M} \\ -p_3 \frac{\partial x_1^M}{\partial M} & -p_3 \frac{\partial x_2^M}{\partial M} & 1 - p_3 \frac{\partial x_3^M}{\partial M} & \cdots & -p_3 \frac{\partial x_L^M}{\partial M} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -p_L \frac{\partial x_1^M}{\partial M} & -p_L \frac{\partial x_2^M}{\partial M} & -p_L \frac{\partial x_3^M}{\partial M} & \cdots & 1 - p_L \frac{\partial x_L^M}{\partial M} \end{pmatrix}$$

ist jede Spalte eine Linearkombination der übrigen Spalten. Dies soll am Beispiel der ersten Spalte gezeigt werden. Dabei wird die aus der Budgetbeschränkung folgende Beziehung

$$p^T \cdot x^M = M \Rightarrow p_1 \frac{\partial x_1^M}{\partial M} + p_2 \frac{\partial x_2^M}{\partial M} + \cdots + p_L \frac{\partial x_L^M}{\partial M} = 1$$

genutzt. Für die erste Spalte gilt:

$$\begin{pmatrix} 1 - p_1 \frac{\partial x_1^M}{\partial M} \\ -p_2 \frac{\partial x_1^M}{\partial M} \\ -p_3 \frac{\partial x_1^M}{\partial M} \\ \vdots \\ -p_L \frac{\partial x_1^M}{\partial M} \end{pmatrix} = \frac{p_2}{p_1} \cdot \begin{pmatrix} -p_1 \frac{\partial x_2^M}{\partial M} \\ 1 - p_2 \frac{\partial x_2^M}{\partial M} \\ -p_3 \frac{\partial x_2^M}{\partial M} \\ \vdots \\ -p_L \frac{\partial x_2^M}{\partial M} \end{pmatrix} + \frac{p_3}{p_1} \cdot \begin{pmatrix} -p_1 \frac{\partial x_3^M}{\partial M} \\ -p_2 \frac{\partial x_3^M}{\partial M} \\ 1 - p_3 \frac{\partial x_3^M}{\partial M} \\ \vdots \\ -p_L \frac{\partial x_3^M}{\partial M} \end{pmatrix} + \cdots + \frac{p_L}{p_1} \cdot \begin{pmatrix} -p_1 \frac{\partial x_L^M}{\partial M} \\ -p_2 \frac{\partial x_L^M}{\partial M} \\ -p_3 \frac{\partial x_L^M}{\partial M} \\ \vdots \\ 1 - p_L \frac{\partial x_L^M}{\partial M} \end{pmatrix}.$$

⁵²Die Ausgangsgleichung folgt aus einem Trick. Es wird zunächst die Inverse der mit Hilfe der Hesse-Matrix der Nutzenfunktion und dem Preisvektor gebildeten Matrix $\begin{pmatrix} H_U(x^M) & p \\ p^T & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda^H \mathcal{S} & \frac{\partial x^M}{\partial M} \\ \left(\frac{\partial x^M}{\partial M} \right)^T & -\frac{\partial \lambda^M}{\partial M} \end{pmatrix}$ bestimmt. Siehe hierzu die Gleichung (A.77), S. 224. Die Multiplikation der ersten Zeile der linken mit der ersten Spalte der rechten Matrix ergibt die Ausgangsgleichung.

Somit besitzt die Matrix $H_U(x^M) \cdot \lambda^H \mathcal{S}(p, M)$ höchstens den Rang $L - 1$, d.h. die theoretischen Restriktionen implizieren mindestens einen linear abhängigen Vektor. Daraus folgt wiederum

$$\text{Rg}[\mathcal{S}(p, M)] \leq L - 1,$$

denn allgemein gilt für verkettete Matrizen A und B: $\text{Rang}AB \leq \min(\text{Rang}A, \text{Rang}B)$ und daher hier: $\min(\text{Rg}[H_U(x^M)], \text{Rg}[\mathcal{S}]) = \text{Rg}[\mathcal{S}]$.⁵³

3.3.5 Lagrangemultiplikatoren

Die Lagrangemultiplikatoren λ^M und λ^H werden jeweils aus der notwendigen Bedingung der Lagrangemethode bestimmt. Sie sind beide positiv ($\lambda^M > 0$ und $\lambda^H > 0$), da gemäß A6 sowohl $p > 0$, als auch gemäß A4 $\nabla U(x) > 0$ gilt.⁵⁴ Der in Abbildung 3.3 aufgezeigte Zusammenhang zwischen λ^M und λ^H

$$\lambda^H = \frac{1}{\lambda^M} \quad \text{bzw.} \quad \lambda^M = \frac{1}{\lambda^H}$$

gilt für den Fall, dass die Optimallösung des einen Optimierungsproblems als Parameter des anderen Optimierungsproblems gewählt wird.⁵⁵ Durch die dadurch erzeugte qualitative Gleichheit der Nebenbedingungsbeschränkung besteht der Unterschied zwischen Maximierungs- und Minimierungsmodell nur noch in λ . Der Vergleich der notwendigen Bedingungen

$$p = \lambda^H \cdot \nabla U(x) \quad \text{vs.} \quad p \cdot \lambda^M = \nabla U(x)$$

führt zum obigen Zusammenhang.

Des Weiteren kann, obwohl in Abbildung 3.3 nicht verdeutlicht, der Lagrangemultiplikator aus der indirekten Nutzenfunktion bzw. aus der Ausgabenfunktion abgeleitet werden. Gemäß Envelope-Theorem gilt:

$$\frac{\partial \mathcal{N}(p, M)}{\partial M} = \frac{\mathcal{L}(x, \lambda^M)}{\partial M} = \lambda^M$$

bzw.

$$\frac{\partial \mathcal{A}(p, \bar{U})}{\partial \bar{U}} = \frac{\mathcal{L}(x, \lambda^H)}{\partial \bar{U}} = \lambda^H.$$

Der Nachweis von $E2^N$ bezüglich der Einkommensreaktion sowie der Nachweis von $E2^A$ bezüglich der Nutzenniveaureaktion ist hiermit erbracht, da beide Lagrangemultiplikatoren positiv sind. λ^M wird aufgrund des obigen Zusammenhangs auch als Grenznutzen des Einkommens bezeichnet und stellt wie λ^H eine Bewertung der jeweiligen Restriktion dar.

⁵³Bei Geltung der Annahmen A1 bis A6 besitzt $H_U(x^M)$ den vollen Rang L .

⁵⁴Zur Eigenschaft des Gradienten: $\nabla U(x) > 0$ siehe Anhang A.7, S. 198ff.

⁵⁵Vgl. dazu 3.3.4, S. 60ff.

Kapitel 4

Nachfragesysteme

In einer entwickelten Volkswirtschaft ist die Zahl der verfügbaren unterschiedlichen Güter ungemein groß. Besteht das Forschungsvorhaben in der Schätzung der Elastizitäten des *Marshall'schen* Nachfragesystems in der allgemeinen Form

$$\begin{aligned}q_1^* &= q_1^{\mathcal{M}}(p_1, p_2, \dots, p_i, \dots, p_L, M) \\q_2^* &= q_2^{\mathcal{M}}(p_1, p_2, \dots, p_i, \dots, p_L, M) \\q_i^* &= q_i^{\mathcal{M}}(p_1, p_2, \dots, p_i, \dots, p_L, M) \\q_L^* &= q_L^{\mathcal{M}}(p_1, p_2, \dots, p_i, \dots, p_L, M),\end{aligned}$$

sind L^2 Preiselastizitäten und L Einkommenselastizitäten zu bestimmen. Dies ist ohne die Verwendung von theoretischen Restriktionen unmöglich. Die in der empirischen Nachfrageanalyse teils zwingend notwendigen, teils aus Vereinfachungsgründen verwendeten theoretischen Restriktionen sind Inhalt dieses Kapitels. Die Ausführungen zur Separabilität beschreiben zunächst grundlegende Anforderungen an die funktionale Form des zu schätzenden Nachfragesystems. Im darauf folgenden Abschnitt wird ein allgemeiner Überblick über die vielfältigen Möglichkeiten der Spezifizierung von Nachfragesystemen gegeben.

4.1 Separabilität und two-stage budgeting

Um die in der Realität vorhandene Vielgütersituation für die empirische Analyse handhabbar zu gestalten, ist es notwendig, die Zahl der zu schätzenden Elastizitäten drastisch zu reduzieren. Die im Folgenden beschriebene angenommene Budgetierungsstruktur (two-stage budgeting) des Haushalts ermöglicht eine solche Reduzierung. Es wird gezeigt, dass bestimmte Separabilitätsanforderungen an die Haushaltspräferenzen sowohl notwendig als auch hinreichend für diese Modellierung der Konsumentenpräferenzen sind. Des Weiteren werden die Anforderungen an die funktionale Form des Nachfragesystems beschrieben, die sich durch diese Annahme über die Präferenzstruktur ergeben. Zunächst sollen jedoch

zwei frühe Ansätze der Güteraggregation erläutert werden. Einerseits ermöglichen die Ansätze von *Hicks* und *Leontief* einen hervorragenden Einstieg in die Problematik, andererseits wird dadurch der Vorteil des two-stage budgeting Ansatzes deutlich.

4.1.1 Güteraggregation nach *Leontief* und *Hicks*

Ein früher Reduktionsansatz bezüglich der in der Realität gegebenen Gütervielfalt hat als *Hicks-Leontief composite commodity theorem* Eingang in die wirtschaftswissenschaftliche Literatur gefunden. Ziel dieses Theorems ist die Verringerung der Variablen in ökonomischen Systemen durch die Schaffung von künstlichen Güteraggregaten. Die Aggregate und analog die Aggregatspreise sind dabei kompatibel zur allgemeinen mikroökonomischen Theorie.

In seinem Artikel *composite commodities and the problem of index numbers* aus dem Jahre 1936 beschreibt *Leontief* die Anforderungen an eine derartige Aggregatsbildung mittels dreier Güter A, B und C.¹ In der folgenden Abbildung 4.1 ist analog zu den Indifferenzkurven des Zweigüterfalls eine Indifferenzoberfläche U^1 für drei Güter abgebildet. Jede A-B-C-Kombination auf dieser gekrümmten Fläche stiftet dem Haushalt einen konstanten Nutzen U^1 . Die Indexebene I ist der Schlüssel des von *Leontief* empfohlenen Weges. Die auf der Abszisse A stehende Ebene repräsentiert den geometrischen Ort eines konstanten Mengenverhältnisses der Güter B und C. Das Mengenverhältnis ist dabei durch den Anstieg der Ebene determiniert.² Wird die Oberfläche U^1 bei A_0 geschnitten, führt u.a. die Güterkombination B_0, C_0 zu einem Nutzen von U^1 . Die Indifferenzkurve (U_1 bei A_0 -Ebenenschnitt) ist im linken Teil der Abbildung 4.2 dargestellt. Des Weiteren zeigt Abbildung 4.2 die Indifferenzkurve des Nutzens U_1 bei einem Schnitt durch die Oberfläche in Höhe A_1 . In der A_1 -Situation ist die Güterkombination B_1, C_1 hinreichend für das Erreichen des Nutzenniveaus U_1 . Im rechten Teil der Abbildung 4.2 ist die Indifferenzkurve für das Nutzenniveau U_1 in einem I-A-Diagramm dargestellt. Die Kurve entspricht der Schnittlinie der Indexebene I mit der Indifferenzoberfläche. I_0 ist dabei die Güterkombination B_0, C_0 und I_1 ist analog die Güterkombination B_1, C_1 . Die gestrichelten Indifferenzkurven in der Abbildung 4.2 beschreiben den gleichen Zusammenhang bei einem erhöhten Nutzenniveau von U_2 . Eine Dimensionsreduzierung und somit eine Aggregation der Güter B und C zu einem composite good I ist gemäß *Leontiefs* Argumentation dann fehlerfrei zulässig, wenn die Originalpunkte des dreidimensionalen System alle auf der Indexebene liegen, wobei der Anstieg und somit das Verhältnis von B und C frei wählbar ist. Für die empirische Berechnung des Aggregationsindex schlägt *Leontief* deshalb die Wahl eines Anstiegs vor, welcher die Abstände zwischen den

¹Vgl. *Leontief, W.* (1936, S. 53ff.).

² $\frac{B_1}{C_1} = \frac{B_0}{C_0}$ = Anstieg der Indexebene I.

Originalpunkten und den dimensionsreduzierten Punkten minimiert.³ Allerdings erkennt auch er den begrenzten Nutzen dieser Methode, da eine solche Bestimmung Kenntnisse über die Form der Indifferenzkurven erfordert „...an empirical task the difficulty of which can hardly be exaggerated.“⁴

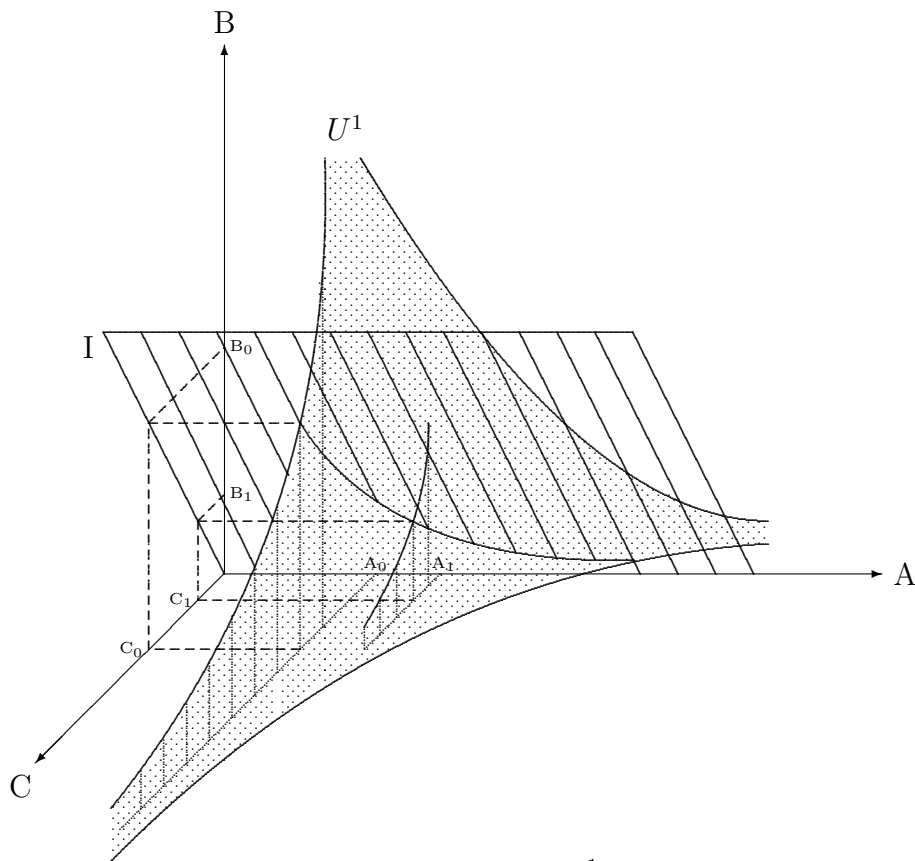


Abbildung 4.1: Konvexe Indifferenzoberfläche U^1 geschnitten von Indexebene I (Quelle: Eigene Darstellung i.A.a. Leontief, W. (1936, S. 55)).

Fast zeitgleich zu *Leontief* beschreibt *Hicks* in seinem Werk *value and capital* eine Bedingung für die Aggregation von Einzelgütern.⁵ Er argumentiert im Gegensatz zum *Leontiefschen* Ansatz mit gleichgerichteten Preisentwicklungen und bezieht sich ausschließlich auf kompensierte Nachfragesysteme. Der Ansatz von *Hicks* stellt sich wie folgt dar:⁶

³Vgl. *Leontief, W.* (1936, S. 57).

⁴*Leontief, W.* (1936, S. 58).

⁵Vgl. *Hicks, J. R.* (1938, S. 312ff.); die erste Ausgabe erschien bereits 1936.

⁶Die Ausführungen stimmen inhaltlich mit denen von *Hicks* überein. Sie sind jedoch an die im Kapitel 3 eingeführte Notation angepasst.

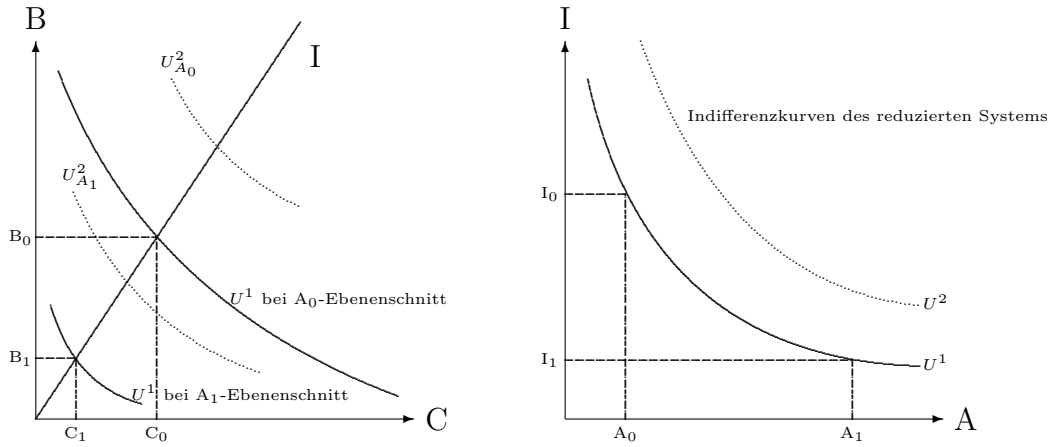


Abbildung 4.2: Dimensionsreduzierung (Quelle: Eigene Darstellung).

Als Ausgangspunkt wird der Basispreisvektor

$$p^0 = (p_1^0, \dots, p_k^0, p_{k+1}^0, \dots, p_L^0)^T$$

angenommen. Bei gegebenem Nutzenniveau \bar{U} ergibt sich die Ausgabenfunktion

$$\mathcal{A}(p^0, \bar{U}) = p_1^0 q_1^{\mathcal{H}}(p^0, \bar{U}) + \dots + p_k^0 q_k^{\mathcal{H}}(p^0, \bar{U}) + p_{k+1}^0 q_{k+1}^{\mathcal{H}}(p^0, \bar{U}) + \dots + p_L^0 q_L^{\mathcal{H}}(p^0, \bar{U})$$

als Lösung des in Kapitel 3 beschriebenen Minimierungsproblems

$$\sum_{i=1}^k p_i q_i + \sum_{i=k+1}^L p_i q_i \implies \min$$

unter der Nebenbedingung

$$U(q_1, \dots, q_L) = \bar{U}.$$

Ändern sich die Preise der $k+1$ bis L Güter im Zeitablauf proportional mit $\theta(t)$, gilt also

$$p_{k+1}^t = \theta(t) p_{k+1}^0, p_{k+2}^t = \theta(t) p_{k+2}^0, \dots, p_L^t = \theta(t) p_L^0 \quad \text{mit } \theta(0) = 1,$$

kann die Ausgabenfunktion im Zeitpunkt t wie folgt umformuliert werden:

$$\mathcal{A}(p^t, \bar{U}) = \mathcal{A}(\bar{U}, p_1^t, p_2^t, \dots, p_k^t, \theta(t) p_{k+1}^0, \dots, \theta(t) p_L^0) = \mathcal{A}(\bar{U}, p_1^t, p_2^t, \dots, p_k^t, \theta(t)),$$

also

$$\mathcal{A}(p^t, \bar{U}) = p_1^t \cdot q_1^{\mathcal{H}} + \dots + p_k^t \cdot q_k^{\mathcal{H}} + \theta(t) p_{k+1}^0 \cdot q_{k+1}^{\mathcal{H}} + \dots + \theta(t) p_L^0 \cdot q_L^{\mathcal{H}}.$$

θ wirkt hier wie ein herkömmlicher Preis.⁷ Die dazugehörige Menge folgt gemäß *Shepards Lemma* aus dem Differenzieren der Ausgabenfunktion nach θ :

$$\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial \theta} = p_{k+1}^0 \cdot q_{k+1}^{\mathcal{H}} + \cdots + p_L^0 \cdot q_L^{\mathcal{H}}.$$

Somit besteht das von *Hicks* definierte composite good mit dem Preis θ aus dem mit dem Basispreisvektor p^0 gewichteten kompensierten Nachfragevektor $q^{\mathcal{H}}$. Die für den vorliegenden Untersuchungsgegenstand wenig hilfreiche Beschränkung des *Hicksschen* Ansatzes auf kompenzierte Nachfragesysteme kann durch die Annahme von homothetischen Nutzenfunktionen behoben werden. Durch diese Einschränkung der zulässigen Nutzenfunktionstypen entspricht die *Hickssche* Definition des Güteraggregats inhaltlich vollständig der *Leontiefs*. Eine proportionale Preisänderung bewirkt bei diesem Typus von Nutzenfunktionen eine proportionale Änderung der Mengen. Dadurch verbleibt eine auf der Indexebene I liegende B-C-Güterkombination auf selbiger, wenn sich der Preis der Güter B und C proportional mit dem Faktor θ ändert.⁸

Neben der schwierigen empirischen Umsetzung dieser theoretischen Aggregationsüberlegungen schränkt eine derartige Lösung der Vielgüterproblematik auch die Anwendung des Nachfragesystems ein.⁹ Zum Beispiel kann die Wirkung einer Preisänderung innerhalb des Güteraggregats mit einer derartigen Modellierung nicht untersucht werden. Insofern können die beschriebenen Überlegungen beispielsweise nur als theoretische Rechtfertigung für die unterste Aggregationsstufe der EVS-Verbrauchsdaten herangezogen werden.¹⁰ Der folgende Abschnitt beschreibt eine Alternative zum Güteraggregationsansatz.

4.1.2 Two-stage budgeting

Beim Präferenzstrukturmodell des two-stage budgeting entscheidet der Haushalt zunächst über die optimale Verteilung seines Einkommens (seiner Ausgaben) M auf bestimmte Güterbereiche (erste Stufe). Im Anschluss an diese erste Allokationsentscheidung optimiert der Haushalt dann die einzelnen Bereiche, d.h. er trifft Entscheidungen über die optimalen Güterbündel innerhalb dieser Untergruppen. Diese zweite Stufe wird für die jeweilige Untergruppe ausschließlich durch die

⁷Der formale Beweis für diese Aussage und die Herleitung der Eigenschaften E1^A bis E4^A (siehe 3.2.4, S. 57) für die umformulierte Ausgabenfunktion findet sich u.a. in *Silberberg, E.* (1990, S. 382f.). Nach Auffassung des Verfassers ist die dortige Beweisführung eingängiger als die im *Hicksschen* Originalwerk.

⁸Homothetische Funktionen werden unter A.16, S. 209f., beschrieben.

⁹Die Annahme von konstanten relativen Preisen ist für große Güteraggregate sehr realitätsfern. Ein neuerer Ansatz von *Lewbel* versucht diese Schwäche zu beheben. In seinem Artikel: *Aggregation Without Separability: A Generalized Composite Commodity Theorem* *Lewbel, A.* (1996, S. 524ff.) beschreibt er eine Möglichkeit, die Annahme der über die Zeit absoluten Konstanz der relativen Preise innerhalb eines Güteraggregats aufzugeben.

¹⁰Siehe dazu 2.3, S. 27ff.

Preise der Güter innerhalb dieser Gruppe und durch das zuvor zugeweilte Ausgabenvolumen der Gruppe determiniert. Bei der ersten Entscheidung über die Gruppenausgabenvolumina genügt dem Haushalt bereits die Kenntnis über das Gesamteinkommen und über Preisindizes der einzelnen Bereiche. Anders als bei dem Aggregationsansatz des obigen Abschnitts wird hier versucht, die Vielgüterproblematik über die Annahme einer bestimmten Präferenzstruktur zu lösen. Diese Struktur kann übersichtlich mit einem so genannten Nutzenbaum verdeutlicht werden.¹¹ Der in Abbildung 4.3 skizzierte, zweistufige Budgetierungsprozess

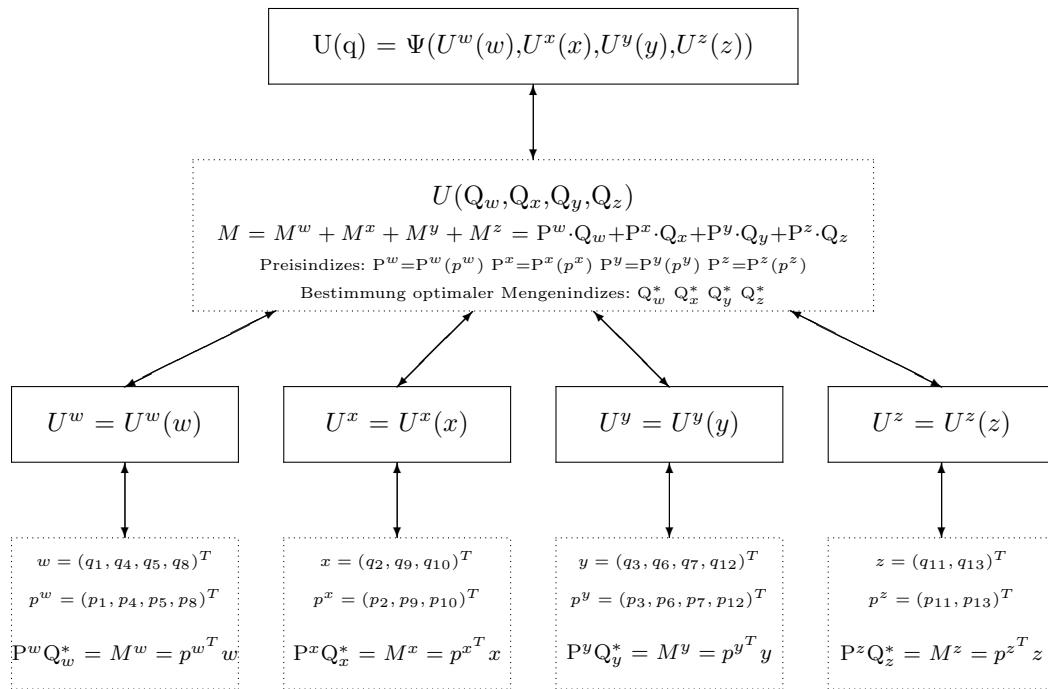


Abbildung 4.3: Beispiel eines Nutzenbaums (Quelle: Eigene Darstellung).

wurde nach Kenntnis des Verfassers erstmalig von *R. H. Strotz* in seinem Werk *The empirical implication of a utility tree* aus dem Jahre 1957 vorgeschlagen.¹² In diesem Artikel schildert *Strotz* die Budgetierungsprozedur, versäumt jedoch die korrekte Beschreibung der für diesen Ansatz notwendigen Separabilitätsanforderungen¹³ an die Nutzenfunktion bzw. an die Haushaltspräferenzen. In der ersten Stufe wird, wie schon erwähnt, die optimale Aufteilung des Einkommens M von den Preisindizes der Untergruppen (in Abbildung 4.3 P^w , P^x , P^y und

¹¹Die in der Abbildung 4.3 u.a. dargestellte Verwendung von Preis- und Mengenindizes, die bei ihrer Multiplikation die Gruppenausgaben ergeben, gilt allerdings nur unter der Annahme homothetischer Separabilität.

¹²*Strotz, R. H.* (1957, S. 269-280).

¹³Siehe dazu 4.1.3, S. 73ff.

P^z) determiniert. Die Qualität des two-stage budgeting ist, verglichen mit der herkömmlichen direkten Optimierungsmethode, abhängig von der Qualität eben dieser Preisindizes. Die Möglichkeit der Bildung von perfekten Preisindizes stellt daher die erste Grundlage des two-stage budgeting dar und soll im Folgenden mit dem Begriff Preisaggregation bezeichnet werden. Die zweite Grundlage, die Dezentralisierbarkeit des Optimierungsproblems, ist die notwendige Bedingung für die zweite Stufe, also die Möglichkeit des Haushalts, die Bereichsnutzenfunktion U^w (bzw. U^x , U^y , U^z) nur mit Informationen über Preise innerhalb des Bereichs und über die jeweilige Bereichsausgabengröße zu optimieren. Letzteres kann mit der Annahme der Separierbarkeit der Nutzenfunktion U gewährleistet werden und wurde deshalb auch so von *Strotz* proklamiert. Die Schwäche der *Strotz*schen Argumentation wurde von *W. M. Gorman* 1959 aufgedeckt. In seinem Artikel *seperable utility and aggregation* erläutert *Gorman* die notwendigen Anforderungen an die Nutzenfunktion bzw. an die Bereichsnutzenfunktionen, um eine perfekte Preisaggregation und somit die erste Grundlage des two-stage budgeting zu ermöglichen.¹⁴

Der zweistufige Budgetierungsprozess ist also die Verbindung von Dezentralisierung und Preisaggregation und daher eng mit der Separabilität von Präferenzen verbunden.¹⁵ Separabilität ist jedoch keinesfalls deckungsgleich mit two-stage budgeting. Im folgenden Abschnitt wird gezeigt, dass entweder homothetische oder additive Separabilitätsannahmen notwendig und hinreichend für diese Form der Budgetierung sind. Die noch ausstehende umfassende Erläuterung der Abbildung 4.3 erfolgt erst unter 4.1.5, S. 89ff. Die Verschiebung ist der genannten engen Verbindung zwischen dem abgebildeten Prozess und der noch genauer zu beschreibenden Separabilität geschuldet.

4.1.3 Homothetische vs. additive Separabilität

In diesem Abschnitt wird zunächst der Begriff Separabilität erläutert. Dabei werden zwei Ausprägungen (starke und schwache Separabilität) unterschieden.¹⁶ Anschließend wird gezeigt, dass die Separierbarkeit der Nutzenfunktion U hinreichend für die Dezentralisierbarkeit ist. Da der two-stage budgeting Prozess zusätzlich die Möglichkeit der Preisaggregation benötigt, werden alternative Bedingungen für diese Grundlage der ersten Stufe des Prozesses vorgestellt.

Für die Präferenzordnung des Haushalts gelten die in Kapitel 3 getroffenen Annahmen A1 bis A6. Somit ist U eine zweimal differenzierbare, steigende, streng

¹⁴*Gorman, W. M.* (1959, S. 469-481).

¹⁵*Blackorby, Russell* (1997, S. 186).

¹⁶Die Ausführungen hierzu orientieren sich am Artikel *A note on separability in demand analysis* von *S.M. Goldman* und *H. Uzawa* (1964, S. 387-398). Der Vorteil der in diesem Artikel verwendeten Art der Beschreibung von Separabilität liegt in der Nutzung von Differenzierbarkeitsannahmen. Der Artikel reiht sich daher besser als die nahezu gleichwertigen Beschreibungen von beispielsweise *Bliss* (1975) oder *Stigum* (1967) in die bisherige Argumentation ein.

quasikonkave Nutzenfunktion in Ω .¹⁷ Die Menge aller Güter sei definiert als $N = \{1, \dots, L\}$. Eine beliebige Zuordnung der L Güter in S disjunkte Untergruppen sei definiert als

$$N = N_1 \cup N_2 \cup \dots \cup N_S \quad \text{mit } N_s \cap N_k = \emptyset \text{ für } s \neq k \text{ (} s, k \in S \text{)}.$$

Ein Güterbündel $x = (x_1, \dots, x_L)$ sei analog segmentiert, so dass

$$x = (x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(k)}, \dots, x^{(S)})$$

mit dem Subvektor $x^{(k)}$ bestehend aus x_k ($k \in N_k$) gilt.

Eine Nutzenfunktion $U(x)$ wird stark separierbar bezüglich der disjunkten Untergruppen ($N_1 \cup N_2 \cup \dots \cup N_S$) genannt, wenn gilt:

$$\frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{U_i(x)}{U_j(x)} \right) = 0 \quad \text{für alle } i \in N_s, j \in N_t \text{ und } k \notin N_s \cup N_t \text{ (} s \neq t \text{)}.$$

Dies bedeutet, dass die Grenzrate der Substitution $\left(\frac{U_i(x)}{U_j(x)} \right)$ zwischen den Gütern i und j aus zwei unterschiedlichen Untergruppen N_i und N_j unabhängig von etwaigen Mengenänderungen von Gütern außerhalb dieser beiden Untergruppen ist. Die Charakterisierung von starker Separierbarkeit kann auch durch die Annahme einer bestimmten strukturellen Form der Nutzenfunktion erfolgen.¹⁸ Dieser besonderen Struktur ist die Bezeichnung "additive" anstelle von "starker" Separabilität geschuldet.¹⁹ Es gilt:

Starke bzw. additive Separabilität: Die Nutzenfunktion $U(x)$ wird stark bzw. additiv separierbar bezüglich der disjunkten Untergruppen ($N_1 \cup N_2 \cup \dots \cup N_S$) genannt, wenn sie die strukturelle Form

$$U(x) = F(U^1(x^{(1)}) + U^2(x^{(2)}) + \dots + U^S(x^{(S)}))$$

besitzt. $F(t)$ ist dabei eine monoton steigende Funktion einer Variablen t . Für $s = 1, \dots, S$ ist $U^s(x^{(s)})$ eine Funktion des Subvektors $x^{(s)}$.

Eine Nutzenfunktion $U(x)$ wird schwach separierbar bezüglich der disjunkten Untergruppen ($N_1 \cup N_2 \cup \dots \cup N_S$) genannt, wenn gilt:

$$\frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{U_i(x)}{U_j(x)} \right) = 0 \quad \text{für alle } i, j \in N_s \text{ und } k \notin N_s, s = 1, \dots, S.$$

¹⁷Siehe dazu 3.1.1, S. 47f.

¹⁸Der Beweis dazu findet sich im Anhang A.19, S. 216ff.

¹⁹Einige Autoren verwenden den Begriff *Blockweise Additivität*, um die Existenz von Gütergruppen anstelle von Einzelgütern innerhalb der einzelnen Bereiche zu verdeutlichen. Vgl. hierzu beispielsweise Hansen, G. (1993, S. 306).

Die Grenzrate der Substitution $\left(\frac{U_i(x)}{U_j(x)}\right)$ zwischen den Gütern i und j aus einer Untergruppe N_s ist bei schwacher Separierbarkeit unabhängig von etwaigen Mengenänderungen von Gütern außerhalb dieser Untergruppe. Wie bei der starken Separierbarkeit kann auch hier die Eigenschaft alternativ durch die Nutzenfunktionsstruktur festgelegt werden.²⁰

Schwache Separabilität: Die Nutzenfunktion $U(x)$ wird schwach separierbar bezüglich der disjunkten Untergruppen $(N_1 \cup N_2 \cup \dots \cup N_S)$ genannt, wenn sie die strukturelle Form

$$U(x) = \Psi(U^1(x^{(1)}), U^2(x^{(2)}), \dots, U^S(x^{(S)}))$$

besitzt. Ψ ist dabei eine in jedem Argument steigende Funktion von S Variablen. Für $s = 1, \dots, S$ ist $U^s(x^{(s)})$ eine Funktion des Subvektors $x^{(s)}$.

Bei der additiven Separabilität handelt es sich um einen Spezialfall der schwachen Separabilität. Es genügt daher der Nachweis, dass die Annahme schwacher Separabilität hinreichend für die Dezentralisierbarkeit eines Optimierungsproblems ist.²¹

Das Optimierungsproblem ist definitionsgemäß nur dann dezentralisierbar, wenn die Maximierung einer Bereichsnutzenfunktion nur mit Informationen über die Gruppenpreise und die jeweilige Bereichsausgabe gelingt. Die Annahme der schwachen Separabilität gewährleistet die Unabhängigkeit der Grenzzraten der Substitution von etwaigen Parameteränderungen außerhalb der Untergruppe, da diese nur die Mengen der anderen Gruppe beeinflussen. Die Grenzzraten der Substitution einer Untergruppe bestimmen eindeutig die Lage der Tangentialhyperebene an einer Indifferenzhyperfläche. Im Zweigüterfall bedeutet dies, dass der Anstieg der Indifferenzkurventangente von U^s gerade $-\frac{U_i(x)}{U_j(x)}$ mit $i, j \in N_s$ entspricht. Da der Gradient $\nabla U^s(x^s)$ der Subnutzenfunktion s orthogonal zur entsprechenden Tangentialhyperebene steht, wird seine Richtung nicht von Parameteränderungen außerhalb der Gruppe beeinflusst. Somit ist bei Geltung der Annahme schwacher Separabilität die Bereichsnutzenoptimierung unabhängig von Parametern außerhalb der Gruppe.²²

Die zweite Stufe des two-stage budgeting ist folglich immer dann zulässig, wenn die Nutzenfunktion schwach separierbar ist. Es verbleibt die Beschreibung der für die erste Stufe des zweistufigen Optimierungsprozesses notwendigen funktionalen Struktur der Nutzenfunktion.

²⁰Der Beweis hierzu befindet sich wiederum in Anhang A.19, S. 216ff.

²¹Ein formaler Nachweis findet sich beispielsweise in: *Blackorby, Primont und Russell* (1978, S. 182ff.). Für die folgende Argumentation wird vor allem auf die unter A.7, S. 198, beschriebenen Eigenschaften des Gradienten einer Nutzenfunktion zurückgegriffen.

²²Siehe dazu 3.2.1, S. 51ff.

Die Ausführungen von *Gorman* erlauben die Darstellung der Nutzenfunktionsstruktur, welche die Möglichkeit der perfekten Preisaggregation bei gleichzeitiger Dezentralisierbarkeit eröffnet, in einer kompakten Form.²³ Demnach ist Preisaggregation und somit two-stage budgeting möglich, wenn die Nutzenfunktion die Form

$$U(x) = F \left[\sum_{s=1}^d U^s(x^s) + G(U^{d+1}(x^{d+1}), \dots, U^S(x^S)) \right] \quad (4.1)$$

besitzt. Dabei müssen die Bereichsnutzenfunktionen U^s mit $s = 1, \dots, d$ indirekte Nutzenfunktionen implizieren, die der so genannten *Generalized Gorman Polar Form*²⁴ entsprechen und alle übrigen Bereichsnutzenfunktionen U^s mit $s = d+1, \dots, S$ homothetische Präferenzen repräsentieren, was eine Transformation eben dieser Funktionen in linearhomogene Nutzenfunktion gestattet. F ist eine streng monoton steigende Funktion einer Variablen. Für empirische Untersuchungen des Konsumentenverhaltens stellen die beiden Spezifizierungen $d = 0$ und $d = S$ die geeignetsten, da am einfachsten zu handhabenden Alternativen dar.²⁵ Die Wahl zwischen einer additiv separierbaren ($d = S$, im Folgenden auch additive Separabilitätsannahme genannt) und einer schwach separierbaren Nutzenfunktion mit linearhomogenen Bereichsnutzenfunktionen ($d = 0$, im Folgenden auch homothetische Separabilitätsannahme genannt) wird in der Literatur kontrovers diskutiert. *Strotz* bemerkt bezüglich dieser Problematik treffend „... if homogeneity is the Scylla, additivity may be the Charybdis of the utility tree.“²⁶ Bevor jedoch unter 4.1.4 und 4.1.5 auf den Seiten 80ff. und 89ff. auf die Auswirkungen der Modellierungen $d = 0$ und $d = S$ eingegangen wird, soll gezeigt werden, dass die genannte Bedingung für das two-stage budgeting (4.1) hinreichend für Preisaggregation ist.²⁷ Die generelle Möglichkeit der Preisaggregation sei formal definiert als

$$M^s = \Theta^s(M, P^1(p^1), \dots, P^S(p^S)), \quad s = 1, \dots, S, \quad (4.2)$$

wobei Θ^s und P^s differenzierbar für alle $s = 1, \dots, S$ sind. Des Weiteren müssen die Preisindizes homogen vom Grade 1 sein, um Preisaggregation zu ermöglichen. Dies lässt sich wie folgt zeigen:

Bei perfekter Preisaggregation gilt:²⁸

$$M^s = \Theta^s(M, P^1, \dots, P^S) = \Theta^s(M, P^1(p^1), \dots, P^S(p^S)). \quad (4.3)$$

²³Vgl. *Gorman, W. M.* (1959, S. 476ff.).

²⁴Siehe Gleichung (4.17), S. 79.

²⁵Vgl. *Blackorby, Primont* und *Russell* (1978, S. 205).

²⁶*Strotz, R.H.* (1959, S. 485).

²⁷Die Beweisführung ist neben eigenen Erläuterungen eine Kombination der Beweisführungen von *Gorman, W. M.* (1959, S. 478), (1965, S. 64ff.) und *Blackorby, Primont* und *Russell* (1998, S. 60ff.). Auf den Beweis der Notwendigkeit der Gleichung (4.1) wird verzichtet. An diesem Nachweis interessierte Leser seien auf *Blackorby, C., Russell, R.R.* (1997, S. 188ff.) verwiesen.

²⁸*Blundell, R.* (1988, S. 20).

Da M^s homogen vom Grade 1 in p^1, \dots, p^S , M ist,²⁹ folgt gemäß der *Eulerschen* Homogenitätsrelation³⁰ aus (4.3)

$$\sum_{s=1}^S \frac{\partial \Theta^s}{\partial P^s} P^s + \frac{\partial \Theta^s}{\partial M} M = \sum_{s=1}^S \frac{\partial \Theta^s}{\partial P^s} \left(\sum_{i=1}^{l^s} \frac{\partial P^s}{\partial p_i^s} p_i^s \right) + \frac{\partial \Theta^s}{\partial M} M, \quad (4.4)$$

wobei der Vektor $(1^s, \dots, l^s)$ die Güterpreise in der disjunkten Untergruppe N^s repräsentiert. Demnach erfordert perfekte Preisaggregation, dass $P^s = \sum_{i=1}^{l^s} \frac{\partial P^s}{\partial p_i^s} p_i^s$ ist. Die Preisindexfunktion $P^s(p^s)$ hat somit homogen vom Grade 1 zu sein. Es sei nun eine indirekte Nutzenfunktion $\mathcal{N}^{PA}(\mathbf{M}, p)$ definiert als

$$\mathcal{N}^{PA}(\mathbf{M}, p) = \mathcal{N}^{PA} [\Xi (M, P^1(p^1), \dots, P^S(p^S)), q(p)]. \quad (4.5)$$

Im Folgenden wird gezeigt, dass die Präferenzen Preisaggregation dann und nur dann erfüllen, wenn die indirekte Nutzenfunktion die Form (4.5) hat, wobei q homogen vom Grade 0 in p^s für alle $s = 1, \dots, S$ ist. Für die anschließende Prüfung der two-stage budgeting Bedingung (4.1) verbleibt dann der Nachweis, dass es sich bei (4.1) um einen Spezialfall von (4.5) handelt.

Die Notwendigkeit der Gleichung (4.5) für Preisaggregation lässt sich wie folgt zeigen:

Die indirekte Nutzenfunktion $\mathcal{N} = \mathcal{N}(\mathbf{M}, p)$ wird zunächst transformiert, um die Preisindizes als erklärende Variablen einzuführen:

$$\mathcal{N} = \mathcal{N}(M, p) = \mathcal{N}^{PA}(M, P(p), q(p)). \quad (4.6)$$

Die glatte (1,1)-Transformation der $L + 1$ Koordinaten³¹ erfolgt dabei so, dass der S -dimensionale Vektor der Preisindizes $P(p)$ homogen vom Grade 1 in den Komponenten $P^s(p^s)$ und der $(L - S)$ -dimensionale Vektor $q(p)$ homogen vom Grade 0 in den Komponenten $q_i^s(p^s)$ für alle $s = 1, \dots, S$ mit $i = 1, \dots, (l^s - 1)$ ist.³² Die Nachfrage nach Gut i entspricht demnach:³³

$$\begin{aligned} x_i^{\mathcal{M}}(p, M) &= - \frac{\mathcal{N}_{p_i}}{\mathcal{N}_M} \\ &= - \frac{\mathcal{N}_{P^s}^{PA} P_{p_i}^s + \mathcal{N}_{q^s}^{PA} q_{p_i}^s}{\mathcal{N}_M^{PA}} \end{aligned} \quad (4.7)$$

²⁹Diese Homogenitätseigenschaft von M^s folgt direkt aus der Nullhomogenität der *Marshall-*Nachfrage und der Beziehung $M^s = p^{s^T} x^s$. Vgl. dazu 3.2.3, Seite 54ff. x^s entspricht dabei inhaltlich $q^{\mathcal{M}}$.

³⁰Vgl. A.15, S. 209.

³¹Die Anzahl der L Güterpreise addiert mit dem Einkommen M ergibt $L + 1$.

³²Zur besseren Verständlichkeit sei hier die glatte (1,1)-Transformation des p -Vektors anhand des Beispiels aus der Abbildung 4.3 aufgezeigt. L entspricht in diesem Beispiel 13 und S ist 4. Die Güteranzahlindizes sind $l^w = 4$, $l^x = 3$, $l^y = 4$, $l^z = 2$. Somit folgt der vierdimensionale Vektor der Preisindizes $P(p) = (P^w(p^w), P^x(p^x), P^y(p^y), P^z(p^z))$ und der neundimensionale Vektor $q(p) = (q_1^w(p^w), q_2^w(p^w), q_3^w(p^w), q_1^x(p^x), q_2^x(p^x), q_1^y(p^y), q_2^y(p^y), q_3^y(p^y), q_1^z(p^z))$.

³³Vgl. zum besseren Verständnis die Gleichungen (4.11)ff. Auch dort findet *Roy's Identität* Anwendung.

Die Multiplikation mit p_i und die anschließende Summation über alle i ($i = 1^s, \dots, l^s$) führt zu den Ausgaben M^s für die Güter der Gruppe N^s . Die rechte Seite der Gleichung reduziert sich dabei durch die Anwendung der Homogenitätseigenschaften von P und q auf:

$$M^s = -\frac{\mathcal{N}_{P^s}^{PA}}{\mathcal{N}_M^{PA}} \cdot P^s. \quad (4.8)$$

Es sei nochmals darauf verwiesen, dass diese Reduktion nur durch die Linearhomogenität von $P(p^s)$ möglich war. Diese ist wiederum notwendig für Preisaggregation, was ein Vergleich mit Gleichung (4.4) verdeutlicht. Aus (4.8) folgt

$$\frac{M^s}{P^s} = -\frac{\mathcal{N}_{P^s}^{PA}}{\mathcal{N}_M^{PA}}. \quad (4.9)$$

Folglich ist $q(p)$ von $(M, P(p))$ in (4.6) separierbar,³⁴ was die Notwendigkeit der Indirekten Nutzenfunktion (4.5) zeigt.

Die Gleichung (4.5) ist nicht nur notwendig, sondern auch hinreichend für Preisaggregation. Gemäß *Roys Identität*³⁵ kann aus (4.5) die *Marshall-Nachfrage* für das Gut x_i aus der disjunkten Untergruppe N^s abgeleitet werden:

$$-\frac{\partial \mathcal{N}^{PA}(p, M)}{\partial p_i} \cdot \frac{1}{\lambda^M} = x_i^M(p, M). \quad (4.10)$$

Da λ^M gemäß Envelope-Theorem³⁶

$$\frac{\partial \mathcal{N}^{PA}[\Xi(M, P), q(p)]}{\partial \Xi} \frac{\partial \Xi(M, P)}{\partial M} \text{ mit } P = (P^1(p^1), \dots, P^S(p^S)) \quad (4.11)$$

(in Kurzform: $\lambda^M = \mathcal{N}_{\Xi}^{PA} \cdot \Xi_M$) ist und die partielle Ableitung $\frac{\partial \mathcal{N}^{PA}(p, M)}{\partial p_i}$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \mathcal{N}^{PA}[\Xi(M, P), q(p)]}{\partial \Xi} \cdot \frac{\partial \Xi(M, P)}{\partial P^s} \cdot \frac{\partial P^s(p^s)}{\partial p_i} \\ & + \frac{\partial \mathcal{N}^{PA}[\Xi(M, P), q(p)]}{\partial q^s(p^s)} \cdot \frac{\partial q^s(p^s)}{\partial p_i} \end{aligned} \quad (4.12)$$

(in Kurzform: $\frac{\partial \mathcal{N}^{PA}(p, M)}{\partial p_i} = \mathcal{N}_{\Xi}^{PA} \Xi_{P^s} P_{p_i}^s + \mathcal{N}_{q^s}^{PA} q_{p_i}^s$) entspricht, folgt für (4.10)

$$x_i^M(p, M) = -\frac{\mathcal{N}_{\Xi}^{PA} \Xi_{P^s} P_{p_i}^s + \mathcal{N}_{q^s}^{PA} q_{p_i}^s}{\mathcal{N}_{\Xi}^{PA} \cdot \Xi_M}. \quad (4.13)$$

³⁴Dieser Schluss folgt aus der Definition der schwachen Separabilität (siehe unter 4.1.3 die S. 74). Der Quotient der partiellen Ableitungen auf der rechten Seite der Gleichung (4.9) ist unabhängig von den Argumenten des $q(p)$ -Vektors.

³⁵Siehe dazu 3.3.2, S. 59.

³⁶Siehe dazu A.12, S. 206f.

Die Multiplikation der Gleichung (4.13) mit p_i und die anschließende Summation über alle i ($i = 1^s, \dots, l^s$) führt zu den Ausgaben M^s für die Güter der Gruppe N^s :

$$\sum_{i=1^s} p_i x_i^M(p, M) = - \frac{\mathcal{N}_{\Xi}^{PA} \Xi_{P^s} \sum_{i=1^s} P_{p_i}^s p_i + \mathcal{N}_{q^s}^{PA} \sum_{i=1^s} q_{p_i}^s p_i}{\mathcal{N}_{\Xi}^{PA} \cdot \Xi_M}. \quad (4.14)$$

Da die Preisindexfunktion $P^s(p^s)$ homogen vom Grade 1 und q^s homogen vom Grade 0 in p^s ist,³⁷ gilt

$$\sum_{i=1^s} P_{p_i}^s p_i = P^s(p^s) \quad \text{und} \quad \sum_{i=1^s} q_{p_i}^s p_i = 0. \quad (4.15)$$

Aus (4.15) folgt daher für (4.14)

$$M^s = - \frac{\Xi_{P^s}(M, P) P^s(p^s)}{\Xi_M(M, P)} =: \Theta^s(M, P^1(p^1), \dots, P^S(p^S)). \quad (4.16)$$

Somit ist die Form (4.5) hinreichend für Preisaggregation, was ein Vergleich von (4.16) mit (4.2) verdeutlicht.

Die two-stage budgeting Bedingung (4.1) ist ein Spezialfall von (4.5), was sich wie folgt zeigen lässt:

Zunächst sei dafür die *Generalized Gorman Polar Form* definiert als³⁸

$$\mathcal{N}^s(M^s, p^s) = \Gamma^s \left(\frac{M^s}{P^s(p^s)} \right) + \Lambda^s(p^s) \quad s = 1, \dots, d, \quad (4.17)$$

wobei Λ^s homogen vom Grade 0 und P^s homogen vom Grade 1 in p^s sind und Γ^s eine monoton steigende Funktion ist. Die zur Nutzenfunktion (4.1) gehörende indirekte Nutzenfunktion kann durch Lösung der folgenden Beziehung bestimmt werden:³⁹

$$\begin{aligned} \mathcal{N}^{PA}(\mathbf{M}, p) &= \max_{M^s} \left\{ F \left(\sum_{s=1}^d \left[\Gamma^s \left(\frac{M^s}{P^s(p^s)} \right) + \Lambda^s(p^s) \right] \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + G \left(\frac{M^{d+1}}{P^{d+1}(p^{d+1})}, \dots, \frac{M^S}{P^S(p^S)} \right) \right) \middle| \sum_{s=1}^S M^s = M \right\}. \end{aligned} \quad (4.18)$$

³⁷Siehe dazu die Gleichungen (4.4) und (4.6).

³⁸Vgl. *Gorman W.M.* (1959, S. 476). Die notwendige Nullhomogenität von $\mathcal{N}^s(M^s, p^s)$ ist durch die Linearhomogenität von $P^s(p^s)$ und die Homogenität vom Grade 0 von $\Lambda^s(p^s)$ gesichert. Siehe zur Nullhomogenität einer indirekten Nutzenfunktion unter 3.2.4 die Eigenschaft $E1^N$, Seite 57. Bezüglich der Symmetrie einer von (4.17) generierten *Slutsky*-Matrix siehe A.18, S. 214ff.

³⁹Die zu einer linearhomogenen Funktion $U(x)$ gehörende indirekte Nutzenfunktion hat die Form $\frac{M}{P(p)}$, wobei $P(p)$ homogen vom Grade 1 ist. Siehe dazu beispielsweise *Blackorby, Primont* und *Russell* (1978, S. 92). Die genannte Eigenschaft kann auch aus den Ausführungen zu A.16 und A.17, Seiten 209f. und 210ff. geschlossen werden.

Da es sich bei F um eine streng monotone Funktion handelt, ist die Optimierung (4.18) unabhängig von den additiven Termen $\Lambda^s(p^s)$. Somit entspricht die Lösung von (4.18) der Form (4.2), was wiederum die generelle Möglichkeit der Preisaggregation etabliert. Das Einsetzen der Lösungsform (4.2) in (4.18) ergibt dann einen Spezialfall von (4.5), da die Funktionen $\Lambda^s(p^s)$ homogen vom Grade 0 sind. Q.E.D.

In den beiden folgenden Abschnitten werden die Vor- und Nachteile der beiden two-stage-budgeting Modellierungen $d = 0$ und $d = S$ beschrieben. Die Erläuterungen dienen der theoretischen Fundierung des im Kapitel 6 erörterten Modells.

4.1.4 Two-stage budgeting unter der Annahme additiver Separabilität

Bei dieser Form der Modellierung wird die höhere funktionale Flexibilität, die die *Generalized Gorman Polar Form* gegenüber linearhomogenen Bereichsnutzenfunktion besitzt, durch eine stärkere funktionale Einschränkung auf der ersten Stufe des two-stage budgeting erkaufte. Die Probleme einer derartigen Strukturannahme sind vielfältig und reichen von der praktischen Umsetzung der theoretischen Überlegungen bis hin zu empirisch zweifelhaften, jedoch durch die Strukturannahme implizierten Elastizitätsbeziehungen.

In der ersten Stufe des two-stage budgeting Prozesses erfolgt die Zuweisung des Einkommens auf Untergruppen gemäß der so genannten Preisaggregationsfunktion:⁴⁰

$$M^s = \Theta^s (M, P^1(p^1), \dots, P^S(p^S)). \quad (4.19)$$

Wie noch unter 4.1.5 zu zeigen sein wird, stellt eine Modellierung unter der Annahme homothetischer Separabilität keine speziellen Einschränkungen für die Preisaggregationsfunktion dar.⁴¹

Anders verhält es sich bei einer additiven Separabilitätsannahme. Die bisherigen Ausführungen verdeutlichten nur die theoretische Existenz einer solchen Funktion, wenn die Präferenzstruktur des Haushalts von der Nutzenfunktion (4.1) beschrieben werden kann. Die funktionale Form von (4.19) ist bei der blockadditiven Modellierung von der funktionalen Form der Bereichsnutzenfunktionen abhängig, was sowohl die konkrete praktische Umsetzung der theoretischen Überlegungen als auch eine einfache Wirkungsbeschreibung erschwert.⁴² Obwohl sich die Funktion (4.19) nicht einfach über eine Nutzenmaximierung mit

⁴⁰Vergleiche dazu die Ausführungen auf S. 76.

⁴¹Vgl. dazu 4.1.5, S. 89ff. Nur bei homothetischer Separabilität entspricht das Produkt aus Preis- und Mengenindex der jeweiligen Gruppenausgabe. Eine Standardoptimierung unter Nutzung der Preis- und Mengenindizes liefert hier die optimalen Gruppenausgaben.

⁴²Eine konkrete, von der Bereichsnutzenfunktionsform abhängige Preisaggregationsfunktion findet sich beispielsweise in *Anderson, R.W.*(1979, S. 1215).

Hicks-Aggregaten bestimmen lässt, entsprechen die Wirkungen einer blockadditiven Modellierung teilweise denen einer additiven Verknüpfung von Einzelgut-subnutzenfunktionen.⁴³ Daher wird in der dem Verfasser bekannten Literatur zu meist mit der vereinfachenden Annahme von Eingutgruppen argumentiert. Die Aussage von *Deaton*, die diese Vorgehensweise zu rechtfertigen sucht: „all the additional features over weak separability occur between groups rather than within them.“⁴⁴ ist im Grundsatz richtig. Dennoch soll hier ein allgemeinerer Weg der Wirkungsbeschreibung gegangen werden.⁴⁵ Wird eine blockadditive Modellierung der Form

$$U(x) = F \left[\sum_{s=1}^S U^s(x^s) \right] \quad (4.20)$$

der herkömmlichen Nutzenmaximierungsmethode unterworfen, so folgt daraus das bekannte Gleichungssystem der Bedingungen erster Ordnung:⁴⁶

$$\begin{aligned} \frac{dF}{dt} \nabla U^1(x^1) + \lambda^{\mathcal{M}} p^1 &= 0 & (4.21) \\ &\vdots = \vdots \\ \frac{dF}{dt} \nabla U^s(x^s) + \lambda^{\mathcal{M}} p^s &= 0 \\ &\vdots = \vdots \\ \frac{dF}{dt} \nabla U^S(x^S) + \lambda^{\mathcal{M}} p^S &= 0 \\ M - p^{1T} x^1 - \dots - p^{sT} x^s - \dots - p^{ST} x^S &= 0, \end{aligned}$$

mit $t = \sum_{s=1}^S U^s$ und x^s bzw. p^s als Mengen- bzw. Preisvektor der Gütergruppe s in Spaltenform. Werden die ersten S Subgleichungssysteme durch den Term $\frac{dF}{dt}$ geteilt, so folgt ein Gleichungssystem, welches bis auf den Lagrangemultiplikator den Bedingungen erster Ordnung eines blockadditiven Modells ohne eine monoton steigende Transformation F entspricht.⁴⁷ Eine Vereinfachung der Gleichung (4.20) zu

$$U(x) = \sum_{s=1}^S U^s(x^s) \quad (4.22)$$

⁴³Siehe dazu 4.1.6, S. 96ff.

⁴⁴*Deaton*, A. (1986, S. 1817).

⁴⁵Eine im Ergebnis fast gleiche Wirkungsbeschreibung formuliert *Gorman*, W.M. (1970b, S. 128 ff.). Als einziger der dem Verfasser bekannten Autoren verzichtet *Gorman* dabei auf die Eingutgruppenvereinfachung. Seine Vorgehensweise unterscheidet sich jedoch von der hier gewählten Argumentation.

⁴⁶Vgl. zur Bedingung erster Ordnung 3.2.1, S. 51ff.

⁴⁷Für den Lagrangemultiplikator gilt: $\lambda^{\mathcal{M}*} = \frac{\lambda^{\mathcal{M}}}{\frac{dF}{dU}}$. Im Weiteren wird, falls nicht explizit erwähnt, keine Unterscheidung zwischen $\lambda^{\mathcal{M}*}$ und $\lambda^{\mathcal{M}}$ getroffen.

ist daher ohne Verlust der Allgemeinheit der Aussagen über die Wirkungen einer blockadditiven Modellierung möglich. Es sei an dieser Stelle nochmals darauf hingewiesen, dass es sich bei F um eine beliebige, monoton steigende Funktion handelt. So besitzt beispielsweise die bekannte *Cobb-Douglas*-Funktion die Struktur (4.20).⁴⁸ Aus der Gleichung (4.22) folgt eine blockdiagonale Form der geränderten Hesse-Matrix von $U(x)$. Eine derartige Matrix ist für einen Dreigruppenfall unter A.21 auf S. 224 abgebildet. Dort wird am Beispiel illustriert, dass bei Geltung der Annahme A4, also der strengen Quasikonkavität der Nutzenfunktion $U(x)$, mindestens $(S - 1)$ Subnutzenfunktionen streng konkav sein müssen.⁴⁹

Im Optimum von (4.20) sind alle Lagrangemultiplikatoren der Subnutzenfunktionen gleich, was sich wie folgt mittels der Lagrangeoptimierung der indirekten Subnutzenfunktionen $\mathcal{N}^s(p^s, M^s)$ unter der Budgetverteilungsbeschränkung $M - \sum_{s=1}^S M^s$ zeigen lässt:

$$\mathcal{L}(M^1, \dots, M^s, \dots, M^S, \lambda) = F \left(\sum_{s=1}^S \mathcal{N}^s(p^s, M^s) \right) + \lambda \left(M - \sum_{s=1}^S M^s \right) \quad (4.23)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial M^1} &= \frac{dF}{dt} \frac{\partial \mathcal{N}^1}{\partial M^1} - \lambda = 0 \\ &\vdots \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial M^s} &= \frac{dF}{dt} \frac{\partial \mathcal{N}^s}{\partial M^s} - \lambda = 0 \\ &\vdots \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial M^S} &= \frac{dF}{dt} \frac{\partial \mathcal{N}^S}{\partial M^S} - \lambda = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} &= M - M^1 - M^2 \dots - M^S = 0, \end{aligned} \quad (4.24)$$

mit $t = \sum_{s=1}^S \mathcal{N}^s(p^s, M^s)$ und $\frac{\partial \mathcal{N}^s}{\partial M^s} = \lambda^s$ ($s = 1, \dots, S$). Aus dem Gleichungssystem (4.24) folgt:

$$\frac{\partial \mathcal{N}^1}{\partial M^1} = \dots = \frac{\partial \mathcal{N}^s}{\partial M^s} = \dots = \frac{\partial \mathcal{N}^S}{\partial M^S} = \lambda^1 = \dots = \lambda^s = \dots = \lambda^S = \frac{\lambda}{\frac{dF}{dt}}. \quad (4.25)$$

Auch der Optimierungsansatz (4.23) hat den in Kapitel 3 getroffenen Eindeutigkeitsanforderungen⁵⁰ zu genügen. Somit gilt für die geränderte, im blockadditiven

⁴⁸ Ist die Funktion F gleich $e^{[\cdot]}$ und entsprechen die Subnutzenfunktionen $U^1(x_1) = \alpha \ln x_1$ bzw. $U^2(x_2) = \beta \ln x_2$, folgt daraus die *Cobb-Douglas*-Nutzenfunktion $U(x) = x_1^\alpha x_2^\beta$.

⁴⁹Eine allgemeine Herleitung dieser Eigenschaft der blockadditiven Modellierung wird derzeit von *Brehe, M.* und *Kneis, G.* versucht und soll im Falle eines Erfolgs im Jahre 2007 veröffentlicht werden.

⁵⁰Siehe dazu auch A.6, S. 197f.

Fall diagonale Hesse-Matrix der indirekten Nutzenfunktion:⁵¹

$$|\bar{H}_{\mathcal{N}}^k(M, p)| = (-1)^k \begin{vmatrix} 0 & \mathcal{N}_1 & \mathcal{N}_2 & \cdots & \mathcal{N}_s & \cdots & \mathcal{N}_k \\ \mathcal{N}_1 & \mathcal{N}_{11} & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \mathcal{N}_2 & 0 & \mathcal{N}_{22} & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 & \cdots & 0 \\ \mathcal{N}_s & 0 & 0 & 0 & \mathcal{N}_{ss} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ \mathcal{N}_k & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathcal{N}_{kk} \end{vmatrix} > 0 \quad (4.26)$$

mit $k, s = (1, \dots, S)$ und $\frac{\partial \mathcal{N}^s}{\partial M^s} = \mathcal{N}_s$ bzw. $\frac{\partial^2 \mathcal{N}^s}{\partial M^s \partial M^s} = \mathcal{N}_{ss}$.

Es sei nun zur Veranschaulichung wiederum der Dreigruppenfall $S = 3$ angenommen.⁵² Im Folgenden soll die Wirkung der Modellierung (4.20) auf die Reaktion der Preisaggregationsfunktion (4.19) bezüglich einer Einkommensänderung ΔM beschrieben werden. Aus der Ungleichung (4.26) können unter Nutzung der Gleichung (4.25) drei Ungleichungen für den Dreigruppenfall abgeleitet werden:⁵³

$$\mathcal{N}_{11} < \frac{-1}{\frac{1}{\mathcal{N}_{22}} + \frac{1}{\mathcal{N}_{33}}} \quad (4.27)$$

für den Fall, dass die Subnutzenfunktionen U^2 und U^3 streng konkav sind. In diesem Fall gilt $\mathcal{N}_{22} < 0$ und $\mathcal{N}_{33} < 0$.

$$\mathcal{N}_{22} < \frac{-1}{\frac{1}{\mathcal{N}_{11}} + \frac{1}{\mathcal{N}_{33}}} \quad (4.28)$$

für den Fall, dass die Subnutzenfunktionen U^1 und U^3 streng konkav sind. In diesem Fall gilt $\mathcal{N}_{11} < 0$ und $\mathcal{N}_{33} < 0$.

$$\mathcal{N}_{33} < \frac{-1}{\frac{1}{\mathcal{N}_{11}} + \frac{1}{\mathcal{N}_{22}}} \quad (4.29)$$

für den Fall, dass die Subnutzenfunktionen U^1 und U^2 streng konkav sind. In diesem Fall gilt $\mathcal{N}_{11} < 0$ und $\mathcal{N}_{22} < 0$.

Das implizite Differenzieren des Gleichungssystems (4.24) nach dem Einkommensparameter M führt unter Vernachlässigung der monotonen Transformation

⁵¹Die monotone Transformation F wird wieder ohne Verlust an Allgemeinheit der Aussage ignoriert.

⁵²Auch hier wird für die allgemeingültige Argumentation zur Wirkung einer blockadditiven Modellierung auf die geplante Veröffentlichung von *Brehe, M.* und *Kneis, G.* verwiesen.

⁵³Die drei Ungleichungen sind nur für den Fall genau einer nicht konkaven Subnutzenfunktion von Bedeutung. Sind alle Subnutzenfunktionen streng konkav, sind die Ungleichungen auf jeden Fall erfüllt.

F zu:

$$\begin{pmatrix} \mathcal{N}_{11} & 0 & 0 & -1 \\ 0 & \mathcal{N}_{22} & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \mathcal{N}_{33} & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial M^1}{\partial M} \\ \frac{\partial M^2}{\partial M} \\ \frac{\partial M^3}{\partial M} \\ \frac{\partial \lambda}{\partial M} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}. \quad (4.30)$$

Unter Anwendung der *Cramerschen* Regel folgt daraus:

$$\frac{\partial M^1}{\partial M} = \frac{1}{\frac{\mathcal{N}_{11}}{\mathcal{N}_{22}} + \frac{\mathcal{N}_{11}}{\mathcal{N}_{33}} + 1} \quad (4.31)$$

$$\frac{\partial M^2}{\partial M} = \frac{1}{\frac{\mathcal{N}_{22}}{\mathcal{N}_{11}} + \frac{\mathcal{N}_{22}}{\mathcal{N}_{33}} + 1} \quad (4.32)$$

$$\frac{\partial M^3}{\partial M} = \frac{1}{\frac{\mathcal{N}_{33}}{\mathcal{N}_{11}} + \frac{\mathcal{N}_{33}}{\mathcal{N}_{22}} + 1}. \quad (4.33)$$

Es können nun drei Fälle unterschieden werden:⁵⁴

Fall 1: Alle Subnutzenfunktionen sind streng konkav, d.h. $\mathcal{N}_{11} < 0$, $\mathcal{N}_{22} < 0$ und $\mathcal{N}_{33} < 0$. Daraus folgt für die Ableitungen der jeweiligen Preisaggregationsfunktionen bezüglich des Einkommens M :

$$0 < \frac{\partial M^s}{\partial M} < 1 \quad \text{für alle } s = 1, \dots, S. \quad (4.34)$$

Fall 2: (S-1) Subnutzenfunktionen sind streng konkav und genau eine Subnutzenfunktion ist linear homogen, d.h. z.B. $\mathcal{N}_{11} = 0$, $\mathcal{N}_{22} < 0$ und $\mathcal{N}_{33} < 0$. Daraus folgt für die entsprechenden Ableitungen der Preisaggregationsfunktionen bezüglich des Einkommens M :

$$\text{Genau 1 mal } \frac{\partial M^s}{\partial M} = 1 \quad \text{mit } \mathcal{N}_{ss} = 0 \quad (4.35)$$

$$\text{Genau } (S-1) \text{ mal } \frac{\partial M^i}{\partial M} = 0 \quad \text{mit } \mathcal{N}_{ii} < 0 \quad (i \neq s). \quad (4.36)$$

Fall 3: (S-1) Subnutzenfunktionen sind streng konkav und genau eine Subnutzenfunktion ist nicht konkav, d.h. z.B. $\mathcal{N}_{11} > 0$, $\mathcal{N}_{22} < 0$ und $\mathcal{N}_{33} < 0$. Daraus folgt für die entsprechenden Ableitungen der Preisaggregationsfunktionen bezüglich des Einkommens M :

$$\text{Genau 1 mal } \frac{\partial M^s}{\partial M} > 1 \quad \text{mit } \mathcal{N}_{ss} > 0 \quad (4.37)$$

$$\text{Genau } (S-1) \text{ mal } \frac{\partial M^i}{\partial M} < 0 \quad \text{mit } \mathcal{N}_{ii} < 0 \quad (i \neq s). \quad (4.38)$$

⁵⁴Siehe hierzu auch A.22, S. 227f., unter Berücksichtigung des Zusammenhangs $\mathcal{N}_s = \lambda^s$ bzw. $\mathcal{N}_{ss} = \frac{\partial \lambda^s}{\partial M^s}$.

Im Gegensatz zu Fall 1 und 2 ist die letzte Konstellation in ihren Auswirkungen nicht sofort ersichtlich. Die Nutzung der passenden Ungleichung (4.27), (4.28) oder (4.29) in Verbindung mit den Gleichungen (4.31) bis (4.33) führt hier zum Ergebnis.

Eine blockadditive Modellierung schränkt, wie gezeigt, die Reaktionsmöglichkeiten der Gruppenausgaben auf Gesamteinkommensänderungen ein. Lässt man die praktisch eher unwahrscheinlichen Fälle zwei und drei außer Betracht,⁵⁵ kann folgende Aussage getroffen werden:

Güter aus unterschiedlichen Gruppen sind bei blockadditiver Modellierung im *Hicksschen* Sinne:

- **Substitute**, wenn es sich entweder um zwei normale oder zwei inferiore Güter handelt:

$$\mathcal{S}_{ij} > 0 \quad \text{mit} \quad (i \in s, j \in t, s \neq t),$$

wenn

$$\frac{\partial x_i}{\partial M^s} > 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial x_j}{\partial M^t} > 0 \quad \text{oder} \quad \frac{\partial x_i}{\partial M^s} < 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial x_j}{\partial M^t} < 0,$$

- **nur dann komplementäre Güter**, wenn es sich bei dem einen um ein normales Gut und bei dem anderen um ein inferiores Gut handelt:

$$\mathcal{S}_{ij} < 0 \quad \text{mit} \quad (i \in s, j \in t, s \neq t),$$

wenn

$$\frac{\partial x_i}{\partial M^s} > 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial x_j}{\partial M^t} < 0 \quad \text{oder} \quad \frac{\partial x_i}{\partial M^s} < 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial x_j}{\partial M^t} > 0.$$

Erklärung: Aus der *Fundamentalen Matrixgleichung der Nachfrage* folgt die mögliche Zerlegung des *Hicksschen* Substitutionseffektes in einen spezifischen und einen allgemeinen Teil:⁵⁶

$$\mathcal{S}_{ij} = \frac{\partial x_i^{\mathcal{M}}}{\partial p_j} + \frac{\partial x_i^{\mathcal{M}}}{\partial M} \cdot x_j^{\mathcal{M}}(p, M) = \lambda^{\mathcal{M}} H_{U_{ij}}^{-1} - \frac{\lambda^{\mathcal{M}}}{\frac{\partial \lambda^{\mathcal{M}}}{\partial M}} \frac{\partial x_i^{\mathcal{M}}}{\partial M} \frac{\partial x_j^{\mathcal{M}}}{\partial M}. \quad (4.39)$$

Die linksstehende Komponente $\lambda^{\mathcal{M}} H_{U_{ij}}^{-1}$ wird als spezifischer und die rechtsstehende Komponente $-\frac{\lambda^{\mathcal{M}}}{\frac{\partial \lambda^{\mathcal{M}}}{\partial M}} \frac{\partial x_i^{\mathcal{M}}}{\partial M} \frac{\partial x_j^{\mathcal{M}}}{\partial M}$ als allgemeiner Substitutionseffekt bezeichnet.⁵⁷

⁵⁵Vgl. *Gorman, W.M.* (1970b, S. 130).

⁵⁶Vgl. Gleichung (A.71), S. 223.

⁵⁷ $H_{U_{ij}}^{-1}$ bezeichnet das Element der i -ten Zeile und j -ten Spalte der Inversen der Hesse-Matrix der Nutzenfunktion.

Durch die Vereinfachung $F \left[\sum_{s=1}^S U^s(x^s) \right] = \sum_{s=1}^S U^s(x^s)$ besteht der Substitutionseffekt (4.39) für Güter aus unterschiedlichen Gruppen nur noch aus dem allgemeinen Substitutionseffekt.⁵⁸ Die blockdiagonale Struktur der Hesse-Matrix der Nutzenfunktion bleibt bei der Bildung der Inversen $H_{U(x)}^{-1}$ erhalten, so dass $H_{U_{ij}}^{-1} = 0$ für $(i \in s), (j \in t)$ und $(s \neq t)$ gilt. Die qualitativen Aussagen über diesen Intergruppensubstitutionseffekt besitzen jedoch, wie schon erwähnt, allgemeine Gültigkeit. Eine nichtlineare monotone Transformation der Nutzenfunktion hätte zur Folge, dass der spezifische Substitutionseffekt ungleich Null wird. Diese Änderung wird jedoch durch die gleichzeitige Änderung des allgemeinen Substitutionseffekts kompensiert, da derartige Transformationen Einfluss auf den Term $\left(\frac{\lambda^M}{\frac{\partial \lambda^M}{\partial M}} \right)$ haben.⁵⁹ Somit beschreibt die Gleichung

$$\mathcal{S}_{ij} = -\frac{\lambda}{\frac{\partial \lambda}{\partial M}} \frac{\partial x_i^s}{\partial M} \frac{\partial x_j^t}{\partial M} \quad \text{für } (i \in s, j \in t, s \neq t) \quad (4.40)$$

hinreichend die Intergruppensubstitutionseffekte bei einer blockadditiven Modellierung. Die für das two-stage Budgeting notwendige Nutzenfunktionsstruktur (4.1) erlaubt die Nutzung der Dezentralisationsfunktion⁶⁰

$$x_i^s(p^s, M^s(p, M)) = x_i^s(p, M). \quad (4.41)$$

Gleichung (4.41) nach dem Gesamteinkommen M differenziert ergibt:

$$\frac{\partial x_i^s}{\partial M^s} \frac{\partial M^s}{\partial M} = \frac{\partial x_i^s}{\partial M}. \quad (4.42)$$

Einsetzen von (4.42) in (4.40) führt zu

$$\mathcal{S}_{ij} = -\frac{\lambda}{\frac{\partial \lambda}{\partial M}} \frac{\partial x_i^s}{\partial M^s} \frac{\partial M^s}{\partial M} \frac{\partial x_j^t}{\partial M^t} \frac{\partial M^t}{\partial M} \quad \text{für } (i \in s, j \in t, s \neq t). \quad (4.43)$$

Im hier relevanten Fall 1 der strengen Konkavität der Subnutzenfunktionen sinken die Lagrangemultiplikatoren λ^s mit steigenden Bereichsausgaben M^s .⁶¹ Aus $\frac{\partial \lambda^s}{\partial M^s} < 0$ ($s = 1, \dots, S$) folgt aber wegen (4.25) $\frac{\partial \lambda}{\partial M} < 0$. Des Weiteren gilt im praktisch relevanten Fall 1 $\frac{\partial M^s}{\partial M} > 0$ ($s = 1, \dots, S$), was insgesamt die getroffenen Aussagen über die möglichen Intergruppensubstitutionseffekte mittels (4.43) erklärt. Die Gleichung (4.40) zeigt auch, dass die *Hicks*schen Intergruppensubstitutionseffekte proportional zu den entsprechenden Einkommensänderungsreaktionen der Güter sind. Der Proportionalitätsfaktor $-\frac{\lambda}{\frac{\partial \lambda}{\partial M}}$ ist dabei unabhängig

⁵⁸Siehe Gleichung (4.22), S. 81.

⁵⁹Vgl. *Phlips, L.* (1983, S. 63).

⁶⁰Vgl. die Ausführungen unter 4.1.3, S. 73ff. Die Dezentralisationsfunktion erlaubt die Bestimmung der optimalen Menge eines Gutes mittels der Gruppenpreise und der Gruppenausgaben.

⁶¹Siehe dazu wiederum A.22, S. 227f.

von den zwei aus S gewählten Untergruppen. Für die *Marshall'sche* Reaktion $\frac{\partial x_i^M}{\partial p_j}$ folgt aus der *Slutsky*-Gleichung:⁶²

$$\frac{\partial x_i^s}{\partial p_j} = \left(-\frac{\lambda}{\frac{\partial \lambda}{\partial M}} \frac{\partial x_j^t}{\partial M} - x_j^t \right) \frac{\partial x_i^s}{\partial M} \quad \text{für } (i \in s, j \in t, s \neq t). \quad (4.44)$$

Der Proportionalitätsfaktor $\left(-\frac{\lambda}{\frac{\partial \lambda}{\partial M}} \frac{\partial x_j^t}{\partial M} - x_j^t \right)$ zwischen *Marshall'scher* Preis- und Einkommensreaktion ist demnach nur vom preisverändernden Gut x_j^t abhängig.

Die Subnutzenfunktionen müssen, wie schon erwähnt, bei der blockadditiven Modellierung indirekte Nutzenfunktionen der Form (4.17) implizieren. Die Modellierung einer Präferenzstruktur durch die *Generalized Gorman Polar Form* ist grundsätzlich ein lokaler Ansatz. Wird durch Nutzung von *Roys Identität* und Gleichung (4.25) die *Marshall'sche* Nachfragemenge aus der indirekten Nutzenfunktion (4.17) bestimmt, ergibt sich

$$x_i^s = M^s \frac{\frac{\partial P^s(p^s)}{\partial p_i}}{P^s(p^s)} - \frac{P^s(p^s) \frac{\partial \Lambda^s(p^s)}{\partial p_i}}{\frac{\partial \Gamma^s(t^s)}{\partial t^s}} \quad \text{mit } (t^s = \frac{M^s}{P^s(p^s)}) \quad (4.45)$$

und es zeigt sich, dass bei null Einkommen auch negative Nachfrage nach Gut x_i modelliert sein kann.⁶³ Eine allgemeine Geltung für sämtliche Preisvektor-Einkommens-Kombinationen ist daher ausgeschlossen. Der Ansatz einer lokalen Nutzung der *Generalized Gorman Polar Form* zur Präferenzenabbildung in der empirischen Nachfrageanalyse erklärt neben der Lösung des Problems der negativen Nachfrage auch die zunächst verwirrende, mögliche Modellierung von inferioren Gütern mit linearen Engelkurven.⁶⁴ Inferiorität eines Gutes kann niemals global, d.h. bei jeder Preisvektor-Einkommens-Kombination auftreten. Eine fallende, global geltende, lineare Engelkurve würde die Nachfrage eines inferioren Gutes abzubilden suchen, welches niemals nachgefragt werden würde.⁶⁵ Die lokale Präferenzenabbildung in der Untergruppe s mit linearen Engelkurven ist in der untenstehende Abbildung 4.4 beispielhaft dargestellt. Der nichtschattierte Bereich stellt hier den bei gegebenem Preisvektor mit linearen Engelkurven abbildbaren Einkommensbereich dar. Lineare Engelkurven folgen aus den indirekten Nutzenfunktionen (4.17), wenn Γ^s eine lineare Transformation ist.⁶⁶ Die jeweiligen Schnittpunkte der Engelkurven mit der Ordinate entsprechen in die-

⁶²Siehe Gleichung (4.39), S. 85.

⁶³Das Vorzeichen von $\frac{\partial \Lambda^s(p^s)}{\partial p_i}$ ist nicht definiert.

⁶⁴Siehe beispielsweise *Seade, J.* (1978, S. 516).

⁶⁵Siehe dazu z.B. *Silberberg, E.* (1990, S. 326). Die Überlegung hierzu ist simpel. Bei Null-einkommen können keine Güter konsumiert werden. Die erste Geldeinheit würde zu einer sinkenden, also negativen Nachfrage nach dem inferioren Gut führen.

⁶⁶Siehe A.17, S. 210ff.

sem Fall $-c_s^{-1}P^s(p^s)\frac{\partial\Lambda^s(p^s)}{\partial p_i}$, wobei $c_s = \frac{\partial\Gamma^s(\frac{M^s}{P^s(p^s)})}{\partial(\frac{M^s}{P^s(p^s)})}$ wegen der Linearität von Γ^s konstant ist.

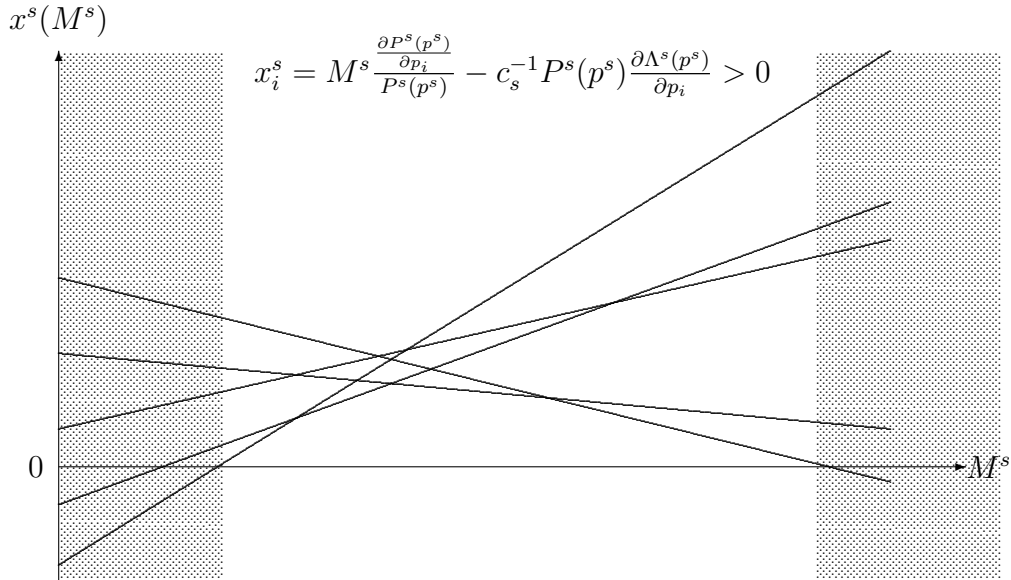


Abbildung 4.4: Lokale Präferenzenabbildung mit linearen Engelkurven (Quelle: Eigene Darstellung).

Der auf Seite 84 genannte Fall 1 der strengen Konkavität der Subnutzenfunktionen als Eindeutigkeitsanforderung der Optimierung impliziert, dass der Lagrangemultiplikator mit steigendem Einkommen abnimmt. Das Differenzieren von (4.17) nach den Untergruppenausgaben M^s ergibt gemäß dem Envelope-Theorem den Lagrangemultiplikator.⁶⁷ Somit muss im Fall 1 (Standardfall) die zweite Ableitung der *Generalized Gorman Polar Form* nach M^s einen negativen Wert aufweisen. Im Falle der eben erwähnten, möglichen Linearität von Γ^s gilt aber

$$\frac{\partial \mathcal{N}^s}{\partial M^s} = c^s \frac{1}{P^s(p^s)} = \lambda^s \quad (4.46)$$

und somit

$$\frac{\partial \lambda^s}{\partial M^s} = 0. \quad (4.47)$$

Nach Auffassung des Verfassers ist daher eine Erweiterung der *Generalized Gorman Polar Form* geboten. Um die für den Fall 1 notwendige, strenge Konkavität der Subnutzenfunktionen sicherzustellen, muss entweder Γ^s selbst eine streng konkave Funktion sein, oder die *Generalized Gorman Polar Form* (4.17) wird

⁶⁷Siehe dazu A.12, S. 206f.

einer monoton steigenden Transformation \mathcal{K} unterworfen, welche die notwendige Krümmung sicherstellt:

$$\mathcal{N}^s(M^s, p^s) = \mathcal{K}^s \left[\Gamma^s \left(\frac{M^s}{P^s(p^s)} \right) + \Lambda^s(p^s) \right] \quad s = 1, \dots, d. \quad (4.48)$$

Aus dem zweimaligen Differenzieren von (4.48) nach M^s folgt dann die für den Fall 1 notwendige negative Reaktion des Lagrangemultiplikators auf Einkommensänderungen:

$$\frac{\partial \lambda^s}{\partial M^s} = \frac{1}{(p^s)^2} \left[\frac{\partial^2 \mathcal{K}^s(r^s)}{\partial r^s \partial r^s} \left(\frac{\partial \Gamma^s(t^s)}{\partial t^s} \right)^2 + \frac{\partial \mathcal{K}^s(r^s)}{\partial r^s} \frac{\partial^2 \Gamma^s(t^s)}{\partial t^s \partial t^s} \right] < 0 \quad (4.49)$$

mit $t^s = \frac{M^s}{P^s(p^s)}$ und $r^s = \Gamma^s \left(\frac{M^s}{P^s(p^s)} \right) + \Lambda^s(p^s)$. Die Summe in der eckigen Klammer der Gleichung (4.49) repräsentiert die Anforderung an die Krümmungskombination der Funktionen \mathcal{K}^s und Γ^s .⁶⁸

4.1.5 Two-stage budgeting unter der Annahme homothetischer Separabilität

Der in Abbildung 4.3 dargestellte zweistufige Budgetierungsprozess nutzt für die erste Stufe des two-stage budgeting Preis- und Mengenindizes. Bevor diese Methode der Bestimmung der optimalen Gruppenausgaben beschrieben wird, soll zunächst der Beweis erbracht werden, dass homothetische Separabilität hierfür notwendig und hinreichend ist.⁶⁹

Die getroffene Annahme der schwachen Separabilität impliziert, dass die Nutzenfunktion $U(x)$ die Form

$$U(x) = \Psi \left(U^1(x^{(1)}), U^2(x^{(2)}), \dots, U^S(x^{(S)}) \right) \quad (4.50)$$

besitzt.⁷⁰ Es wurde gezeigt, dass schwache Separabilität hinreichend für die Dezentralisierbarkeit des Optimierungsproblems ist.⁷¹ Die Dezentralisationsfunktion $\phi^s(p^s, M^s)$ repräsentiert die ausschließlich von den Gruppenausgaben M^s und den Gruppenpreisen p^s abhängige Güternachfrage der Gruppe s

$$x^{(s)} = \phi^s(p^s, M^s). \quad (4.51)$$

⁶⁸ $\frac{\partial \mathcal{K}^s(r^s)}{\partial r^s} > 0$, da es sich bei \mathcal{K}^s definitionsgemäß um eine monoton steigende Funktion handelt.

⁶⁹Die folgende Beweisführung ist an die von *Blackorby, Primont und Russell* (1978, S. 206f.) angelehnt.

⁷⁰Siehe dazu unter 4.1.3, S. 75.

⁷¹Siehe dazu unter 4.1.3, S. 75f.

Die Aufteilung des Gesamteinkommens M auf die S Untergruppen erfolgt bei homothetischer Separabilitätsannahme unter der Nebenbedingung

$$M^s = P^s(p^s) \cdot Q^s(x^s). \quad (4.52)$$

Hierbei sind sowohl der Preisindex $P^s(p^s)$ als auch der Mengenindex $Q^s(x^s)$ linear homogene Funktionen.⁷²

Zum Beweis der Notwendigkeit von homothetischen Subnutzenfunktionen für die Gleichung (4.52) wird die aus der Dezentralisationsfunktion (4.51) gewonnene Gruppengüternachfrage $\phi^s(p^s, M^s)$ in Gleichung (4.52) eingesetzt:

$$M^s = P^s(p^s) \cdot Q^s(\phi^s(p^s, M^s)) \quad (4.53)$$

bzw.

$$\frac{M^s}{P^s(p^s)} = Q^s(\phi^s(p^s, M^s)). \quad (4.54)$$

Die Multiplikation des Gruppeneinkommens M^s mit einem konstanten Faktor k zeigt die Linearhomogenität von (4.54) in M^s :

$$\frac{k \cdot M^s}{P^s(p^s)} = Q^s(\phi^s(p^s, k \cdot M^s)) = k \cdot Q^s(\phi^s(p^s, M^s)). \quad (4.55)$$

Da Q^s linearhomogen in ϕ^s ist, folgt gemäß (4.55) die Linearhomogenität von ϕ^s in M^s . Somit ist $U^s(x^s)$ eine homothetische Funktion.⁷³

Die Annahme homothetischer Separabilität ist des Weiteren hinreichend für die Nutzung von Preis- und Mengenindizes zur Bestimmung der optimalen Gruppenausgaben. Die homothetischen Präferenzordnungen der Subnutzenfunktionen bei gleichzeitiger schwacher Separabilität erlauben eine äquivalente Nutzendarstellung mittels linearhomogener Subnutzenfunktionen $\bar{U}^s(x^s)$.⁷⁴ Die Nutzenfunktion (4.50) wird zu

$$\Psi(U^1(x_*^{(1)}), \dots, U^S(x_*^{(S)})) = G(\bar{U}^1(x_*^{(1)}), \dots, \bar{U}^S(x_*^{(S)})) \quad (4.56)$$

für $x_* \sim x_*$ und mit $G^s[U^s(x^s)] = \bar{U}^s(x^s)$, so dass $\bar{U}^s(k \cdot x^s) = k \cdot \bar{U}^s(x^s)$ gilt.⁷⁵ Werden die linearhomogenen Subnutzenfunktionen $\bar{U}^s(x^s)$ nun unter Nutzung

⁷²Auf die notwendige Homogenität der Preisindexfunktion vom Grade 1 in p^s ist bereits unter 4.1.3 eingegangen worden. Siehe dazu Gleichung (4.3), S. 76, und die nachfolgenden Erläuterungen.

⁷³Zu dieser Schlussfolgerung siehe A.16, S. 209. Die Linearhomogenität der Nachfrage $x^s = \phi^s(p^s, M^s)$ im Gruppeneinkommen M^s impliziert durch den Ursprung gehende lineare Engelkurven bzw. eine Einkommenselastizität von 1.

⁷⁴Siehe dazu auch die Ausführungen zu Gleichung (4.1). G stellt hier den präferenzordnungs-erhaltenden neuen Nutzenindikator dar.

⁷⁵Gleichzeitig gilt $\Psi > G$ für den Fall, dass die Güterkombination x_* vom Haushalt höher bewertet wird als x_* ($x_* \succ x_*$) und umgekehrt.

der Dezentralisationsfunktion (4.51) in ihre entsprechende indirekte Subnutzenfunktionsform gebracht, so folgt

$$U(x) = G(\bar{U}^1(\phi^1(p^1, M^1)), \dots, \bar{U}^S(\phi^S(p^S, M^S))) \quad (4.57)$$

bzw.

$$\mathcal{N}(M, p) = G\left(\frac{M^1}{P^1(p^1)}, \dots, \frac{M^S}{P^S(p^S)}\right). \quad (4.58)$$

Der hier genutzte Zusammenhang

$$\frac{M^s}{P^s(p^s)} = \bar{U}^s(\phi^s(p^s, M^s)) \quad (4.59)$$

gilt nur für linearhomogene (Sub-) Nutzenfunktionen und ist unter A.17 auf Seite 210 näher erläutert. Die Gleichung (4.60) zeigt, dass homothetische Separabilität hinreichend für die Nutzung von linearhomogenen Preis- und Mengenindizes zur Bestimmung der optimalen Gruppenausgaben ist:

$$M^s = P^s(p^s) \cdot \bar{U}^s(\phi^s(p^s, M^s)) = P^s(p^s) \cdot Q^s(x^s). \quad (4.60)$$

Der Mengenindex $Q^s(x^s)$ aus Gleichung (4.52) entspricht genau der Subnutzenfunktion $\bar{U}^s(\phi^s(p^s, M^s))$. Die Gruppenausgabenbestimmung erfolgt somit grundsätzlich durch die Lösung der Optimierungsaufgabe:

$$\max U(x) = U(Q^1(x^1), \dots, Q^S(x^S)) \quad \text{mit} \quad \sum_{s=1}^S P^s(p^s)Q^s(x^s) = M. \quad (4.61)$$

Blackorby u.a. beschreiben in ihrem 1970 erschienen Artikel *Homothetic separability and consumer budgeting* eine theoretische Methode, wie die genannten Indizes so bestimmt werden können, dass das Ergebnis der two-stage budgeting Optimierung exakt mit der direkten Optimierung übereinstimmt.⁷⁶ In einem ersten Schritt erfolgen S Optimierungen zur Bestimmung der jeweiligen Güternachfrage in den S Gruppen:

$$\max \bar{U}^s(x^s) \quad \text{mit} \quad \sum_{i=1}^{l^s} p_i^s x_i^s = M^s. \quad (4.62)$$

Die Lösung der Optimierungsaufgabe (4.62) liefert S vorläufige Mengenindizes $\tilde{Q}^s(x^s)$. Diese werden zur Bestimmung der Preisindizes mittels (4.52) verwandt:

$$P^s(p^s) = \frac{M^s}{\tilde{Q}^s(x^s)}. \quad (4.63)$$

⁷⁶Vgl. *Blackorby, Lady, Nissen und Russell* (1970, S. 469f.).

Im Anschluss daran erfolgt dann die eigentliche two-stage budgeting Optimierung (4.61) mit der modifizierten Nebenbedingung $\sum_{s=1}^S P^s(p^s)\tilde{Q}^s(x^s) = M$. Die exakte Übereinstimmung der gerade beschriebenen Budgetierungsstrategie mit der direkten Methode ist dann gegeben, wenn die Bedingungen erster Ordnung von (4.62) und (4.61) mit der modifizierten Nebenbedingung zusammen die Bedingung erster Ordnung der direkten Optimierung ergeben. Dies lässt sich wie folgt zeigen:

Die Bedingungen erster Ordnung der direkten Methode lauten:⁷⁷

$$\frac{\frac{\partial U(x)}{\partial x_i}}{\frac{\partial U(x)}{\partial x_j}} = \frac{p_i}{p_j} \quad \text{für alle } i, j \in L. \quad (4.64)$$

Aus der Optimierung von (4.62) folgen⁷⁸

$$\frac{\partial \bar{U}^s(x^s)}{\partial x_i^s} = \lambda^s p_i = \frac{\partial \tilde{Q}^s(x^s)}{\partial x_i^s} \quad \text{für alle } i \in x^s \text{ und für alle } s \in S \quad (4.65)$$

und aus (4.61) mit der modifizierten Nebenbedingung folgen

$$\frac{\frac{\partial U(x)}{\partial Q^s(x^s)}}{\frac{\partial U(x)}{\partial Q^t(x^t)}} = \frac{P^s(p^s)}{P^t(p^t)} \quad \text{für alle } s, t \in S. \quad (4.66)$$

Die Gleichungen $\frac{\partial U(x)}{\partial x_i^s} = \frac{\partial U(x)}{\partial Q^s(x^s)} \frac{\partial Q^s(x^s)}{\partial x_i^s}$ und $\frac{\partial U(x)}{\partial x_j^t} = \frac{\partial U(x)}{\partial Q^t(x^t)} \frac{\partial Q^t(x^t)}{\partial x_j^t}$ folgen aus der Ableitung von (4.61) nach x_i^s bzw. x_j^t mit $(i \in s)$ und $(j \in t)$. Das Substituieren von $\frac{\partial U(x)}{\partial Q^s(x^s)}$ und $\frac{\partial U(x)}{\partial Q^t(x^t)}$ in Gleichung (4.66) durch $\frac{\frac{\partial U(x)}{\partial x_i^s}}{\frac{\partial Q^s(x^s)}{\partial x_i^s}}$ bzw. $\frac{\frac{\partial U(x)}{\partial x_j^t}}{\frac{\partial Q^t(x^t)}{\partial x_j^t}}$ führt somit zu

$$\frac{\frac{\partial U(x)}{\partial x_i^s}}{\frac{\partial U(x)}{\partial x_j^t}} = \frac{P^s(x^s) \frac{\partial Q^s(x^s)}{\partial x_i^s}}{P^t(x^t) \frac{\partial Q^t(x^t)}{\partial x_j^t}} \quad \text{für alle } i \in x^s, j \in x^t \text{ und für alle } s, t \in S. \quad (4.67)$$

Diese angepasste Form der Bedingung erster Ordnung (4.66) wird nun mit (4.65) zusammengeführt, d.h. $\frac{\partial Q^s(x^s)}{\partial x_i^s}$ wird durch $\frac{\partial \tilde{Q}^s(x^s)}{\partial x_i^s}$ ersetzt:

$$\frac{\frac{\partial U(x)}{\partial x_i^s}}{\frac{\partial U(x)}{\partial x_j^t}} = \frac{P^s(x^s) \lambda^s p_i}{P^t(x^t) \lambda^t p_j} \quad \text{für alle } i \in x^s, j \in x^t \text{ und für alle } s, t \in S. \quad (4.68)$$

⁷⁷Zur Bedingung erster Ordnung siehe 3.2.1, S. 51ff.

⁷⁸Vgl. bezüglich des Zusammenhangs auf der rechten Seite nochmals die Gleichungen (4.57) bis (4.61).

Der Beweis der exakten Übereinstimmung mit der direkten Methode ist erbracht, wenn (4.68) mit (4.64) übereinstimmt. Das Gleichsetzen der Bedingungen führt zu

$$\frac{p_i}{p_j} = \frac{P^s(x^s)\lambda^s p_i}{P^t(x^t)\lambda^t p_j} \quad \text{für alle } i \in x^s, j \in x^t \text{ und für alle } s, t \in S \quad (4.69)$$

bzw.

$$1 = \frac{P^s(x^s)\lambda^s}{P^t(x^t)\lambda^t} \quad \text{für alle } s, t \in S. \quad (4.70)$$

Gemäß Gleichung (4.59) entspricht $P^s(x^s)$ genau $\frac{M^s}{\bar{U}^s(\phi^s(p^s, M^s))}$, und $\bar{U}^s(\phi^s(p^s, M^s))$ ist linearhomogen in M^s . Die Anwendung der *Eulerschen* Homogenitätsrelation führt somit zu⁷⁹

$$1 = \frac{\frac{M^s}{M^s \frac{\partial \bar{U}^s(\phi^s(p^s, M^s))}{\partial M^s}} \lambda^s}{\frac{M^t}{M^t \frac{\partial \bar{U}^t(\phi^t(p^t, M^t))}{\partial M^t}} \lambda^t} \quad \text{für alle } s, t \in S. \quad (4.71)$$

Der Lagrangemultiplikator λ^s der Optimierung (4.62) entspricht gemäß Envelope-Theorem genau $\frac{\partial \bar{U}^s(\phi^s(p^s, M^s))}{\partial M^s}$,⁸⁰ was die Richtigkeit von (4.69) und somit die Übereinstimmung der Methoden beweist. Q.E.D

Homothetische Präferenzordnungen in den Untergruppen, die mit linearhomogenen Subnutzenfunktion abgebildet werden können, generieren durch den Koordinatenursprung verlaufende, lineare Engelkurven.⁸¹ Inferiore Güter innerhalb einer Untergruppe sind somit bei dieser Modellierung ausgeschlossen. Vielmehr besitzen alle Güter einer Gruppe eine Gruppeneinkommenselastizität von 1:

$$\varepsilon_{x_i M^s} = \frac{\frac{\partial x_i^s}{\partial M^s} \cdot M^s}{x_i^s(M^s)} = 1. \quad (4.72)$$

Die durch die Annahme der homothetischen Separabilität implizierten Restriktionen der *Hickschen* Intergruppensubstitutionseffekte unterscheiden sich von den unter 4.1.4 auf Seite 80 beschriebenen Einschränkungen bei blockadditiver Modellierung. Bei beiden Separabilitätsannahmen erfolgt die Reaktion der Güter aus Gruppe s auf Preisänderungen in Gruppe t nur über den Weg der Anpassung der optimalen Gruppenausgaben M^s . Für \mathcal{S}_{ij} mit $(i \in s, j \in t, s \neq t)$ gilt somit

$$\mathcal{S}_{ij} = \frac{\partial x_i^s}{\partial p_j} = \frac{\partial x_i^s}{\partial M^s} \frac{\partial M^s}{\partial p_j} \quad \text{für } (i \in s, j \in t, s \neq t). \quad (4.73)$$

⁷⁹Siehe A.15, S. 209.

⁸⁰Siehe A.12, S. 206f.

⁸¹Siehe dazu A.16, S. 209, und die Abbildung A.10, S. 211.

Aus der Symmetrie der *Slutsky*-Matrix $\mathcal{S}(p, M)$ folgt $\mathcal{S}_{ij} = \mathcal{S}_{ji}$ bzw. $\frac{\partial x_i^{\mathcal{H}}}{\partial p_j} = \frac{\partial x_j^{\mathcal{H}}}{\partial p_i}$.⁸²

$$\frac{\partial x_i^{\mathcal{M}}}{\partial M^s} \frac{\partial M^s}{\partial p_j} = \frac{\partial x_j^{\mathcal{M}}}{\partial M^t} \frac{\partial M^t}{\partial p_i} \quad \text{für } (i \in s, j \in t, s \neq t) \quad (4.74)$$

und somit

$$\frac{\frac{\partial M^s}{\partial p_j}}{\frac{\partial x_j^{\mathcal{M}}}{\partial M^t}} = \frac{\frac{\partial M^t}{\partial p_i}}{\frac{\partial x_i^{\mathcal{M}}}{\partial M^s}} \quad \text{für } (i \in s, j \in t, s \neq t). \quad (4.75)$$

Die linke Seite von (4.75) ist unabhängig von i , und die rechte Seite ist unabhängig von j . Daher ist (4.75) unabhängig von i und j und kann durch eine für $s \neq t$ definierte Funktion ν^{st} bzw. ν^{ts} repräsentiert werden:

$$\frac{\frac{\partial M^s}{\partial p_j}}{\frac{\partial x_j^{\mathcal{M}}}{\partial M^t}} = \frac{\frac{\partial M^t}{\partial p_i}}{\frac{\partial x_i^{\mathcal{M}}}{\partial M^s}} = \nu^{st} = \nu^{ts} \quad \text{für } (i \in s, j \in t, s \neq t). \quad (4.76)$$

Aus (4.76) folgt durch Multiplikation mit $\frac{\partial x_j^{\mathcal{M}}}{\partial M^t}$

$$\frac{\partial M^s}{\partial p_j} = \nu^{st} \frac{\partial x_j^{\mathcal{M}}}{\partial M^t} \quad \text{für } (j \in t, s \neq t), \quad (4.77)$$

wodurch (4.73) in

$$\mathcal{S}_{ij} = \frac{\partial x_i^{\mathcal{H}}}{\partial p_j} = \nu^{st} \frac{\partial x_i^{\mathcal{M}}}{\partial M^s} \frac{\partial x_j^{\mathcal{M}}}{\partial M^t} \quad \text{für } (i \in s, j \in t, s \neq t) \quad (4.78)$$

umgeformt werden kann. Aus (4.78) folgt dann mit $\mu^{st} = \frac{\nu^{st}}{\frac{\partial M^s}{\partial M} \frac{\partial M^t}{\partial M}}$ ⁸³

$$\mathcal{S}_{ij} = \frac{\partial x_i^{\mathcal{H}}}{\partial p_j} = \mu^{st} \frac{\partial x_i^{\mathcal{M}}}{\partial M} \frac{\partial x_j^{\mathcal{M}}}{\partial M} \quad \text{für } (i \in s, j \in t, s \neq t). \quad (4.79)$$

Es wurde unter 4.1.4 auf Seite 80 gezeigt, dass im Falle einer blockadditiven Modellierung $\mu^{st} = -\frac{\lambda}{\frac{\partial \lambda}{\partial M}}$ gilt. Der Faktor μ^{st} ist folglich unter der Annahme starker Separierbarkeit unabhängig von den Gruppen s und t . Anders verhält es sich beim two-stage budgeting unter homothetischer bzw. schwacher Separabilität. Hier kann μ^{st} mit den Gruppenpaaren variieren.⁸⁴

⁸²Siehe dazu Eigenschaft E2^S, S. 61.

⁸³Siehe die Gleichungen (4.41) und (4.42), S. 86.

⁸⁴*Goldman* und *Uzawa* (1964, S. 392ff.) haben gezeigt, dass die beiden Formen der *Slutsky*-Effekte $\mathcal{S}_{ij} = \mu^{st} \frac{\partial x_i^{\mathcal{M}}}{\partial M} \frac{\partial x_j^{\mathcal{M}}}{\partial M}$ bzw. $\mathcal{S}_{ij} = \mu \frac{\partial x_i^{\mathcal{M}}}{\partial M} \frac{\partial x_j^{\mathcal{M}}}{\partial M}$ sowohl notwendig als auch hinreichend für schwache bzw. starke Separierbarkeit sind. Auch *Pearce* (1961, S. 506) leitet die Gleichung (4.79) für den Fall der schwachen Separierbarkeit her. Der hier gewählte Weg orientierte sich an dem von *Gorman* (1970a, S. 24). Letzterer ist nach Auffassung des Verfassers der eingängigste Weg und wurde wahrscheinlich deshalb auch von *Deaton* und *Muellbauer* (1980b, S. 128f.) genutzt.

Um eine Interpretation des Faktors ν^{st} bzw. μ^{st} und somit eine Aussage über das Vorzeichen von \mathcal{S}_{ij} ($i \in s, j \in t, s \neq t$) zu ermöglichen, werden zunächst die *Slutsky*-Effekte der *Hicksschen* Aggregate $Q^s(x^s)$ für ($s \neq t$) bestimmt.⁸⁵

$$\mathcal{S}_{st}^{Agg} = \frac{\partial Q^s(P^1, \dots, P^s, U^0)}{\partial P^t} = \frac{\partial \left(\frac{M^s}{P^s} \right)}{\partial P^t} = \frac{1}{P^s} \frac{\partial M^s}{\partial P^t} \quad (s \neq t). \quad (4.80)$$

Aus Gleichung (4.77) folgt durch Multiplikation mit p_j und anschließende Summation über alle $j \in t$

$$\sum_{j=1^t}^t p_j \frac{\partial M^s}{\partial p_j} = \nu^{st} \sum_{j=1^t}^t p_j \frac{\partial x_j^{\mathcal{M}}}{\partial M^t} \quad \text{für } (j \in t, s \neq t) \quad (4.81)$$

und daher, unter Nutzung der Eigenschaft E2.1 ^{$\varepsilon^{\mathcal{M}}$} *Marshallscher* Nachfragekurven⁸⁶ ($\sum_{j=1^t}^t p_j \frac{\partial x_j^{\mathcal{M}}}{\partial M^t} = 1$),

$$\sum_{j=1^t}^t p_j \frac{\partial M^s}{\partial p_j} = \nu^{st} \quad \text{für } (j \in t, s \neq t). \quad (4.82)$$

Aus der Ableitung der auf Seite 76 definierten Preisaggregationsfunktion (4.2) nach p_j folgt $\frac{\partial M^s}{\partial p_j} = \frac{\partial M^s}{\partial P^t} \frac{\partial P^t}{\partial p_j}$ und somit aus (4.82):

$$\sum_{j=1^t}^t p_j \frac{\partial M^s}{\partial P^t} \frac{\partial P^t}{\partial p_j} = \frac{\partial M^s}{\partial P^t} \sum_{j=1^t}^t p_j \frac{\partial P^t}{\partial p_j} = \nu^{st} \quad \text{für } (j \in t, s \neq t). \quad (4.83)$$

Die Preisindizes sind homogen vom Grade 1 in den jeweiligen p , woraus gemäß der *Eulerschen* Homogenitätsrelation $\sum_{j=1^t}^t p_j \frac{\partial P^t}{\partial p_j} = P^t$ folgt.⁸⁷ Der Faktor ν^{st} entspricht demnach in Verbindung mit (4.80)

$$\frac{\partial M^s}{\partial P^t} P^t = \nu^{st} = \mathcal{S}_{st}^{Agg} P^s P^t \quad \text{für } (s \neq t). \quad (4.84)$$

Für die *Hicksschen* Substitutionseffekte für Güter aus unterschiedlichen Gruppen gilt somit im Falle homothetischer Separabilität:

$$\mathcal{S}_{ij} = \frac{\partial x_i^{\mathcal{H}}}{\partial p_j} = \mathcal{S}_{st}^{Agg} P^s P^t \frac{\partial x_i^{\mathcal{M}}}{\partial M^s} \frac{\partial x_j^{\mathcal{M}}}{\partial M^t} \quad \text{für } (i \in s, j \in t, s \neq t). \quad (4.85)$$

⁸⁵Die *Slutsky*-Effekte sind die partiellen Ableitungen der Lösungsmengenindizes aus der dualen Aufgabe zu Gleichung (4.61), S. 91, nach den Preisindizes. Die Mengenindizes entsprechen gemäß Gleichung (4.52), S. 90, $Q^s = \frac{M^s(P^1, \dots, P^s, M)}{P^s}$.

⁸⁶Siehe dazu vor allem die Herleitung von E2.1 ^{$\varepsilon^{\mathcal{M}}$} , S. 55.

⁸⁷Siehe Gleichung (4.4), S. 77.

Die kompensierte Preisreaktion eines Gutes in Gruppe s auf eine Preisänderung in einer anderen Gruppe t ist im Hinblick auf das Vorzeichen nur abhängig von der Substitutionsbeziehung \mathcal{S}^{Agg} der gewählten Gütergruppen, da sowohl die Preisindizes P^s und P^t als auch die Anstiege der linearen Gruppen-Engelkurven $\frac{\partial x_i^M}{\partial M^s}$ und $\frac{\partial x_j^M}{\partial M^t}$ positiv sind.⁸⁸ Güter aus unterschiedlichen Gruppen sind daher unter der Annahme homothetischer Separabilität im *Hicksschen* Sinne:

- **Substitute**, wenn die Gruppen bzw. die *Hicksschen* Aggregate Substitutionsgüter sind.

$$\mathcal{S}_{ij} > 0 \quad \text{mit} \quad (i \in s, j \in t, s \neq t),$$

wenn

$$\mathcal{S}_{st}^{Agg} > 0 \quad \text{mit} \quad (s, t \in S, s \neq t).$$

- **Komplementäre Güter**, wenn die Gruppen bzw. die *Hicksschen* Aggregate komplementäre Güter sind.

$$\mathcal{S}_{ij} < 0 \quad \text{mit} \quad (i \in s, j \in t, s \neq t),$$

wenn

$$\mathcal{S}_{st}^{Agg} < 0 \quad \text{mit} \quad (s, t \in S, s \neq t).$$

4.1.6 Two-stage budgeting unter der Annahme additiver Separabilität mit homothetischen Subnutzenfunktionen

In den beiden vorangegangenen Abschnitten 4.1.4 und 4.1.5 wurden die Vor- und Nachteile zweier grundsätzlicher Modellierungen des two-stage budgeting analysiert. Bei einer Kombination dieser beiden two-stage budgeting Modellierungen besitzt die Nutzenfunktion die Form

$$U(x) = F \left[\sum_{s=1}^S \mathcal{K}^s [U^s(x^s)] \right] \quad \text{linearhom. Fkt. } U^s(x^s); \text{ str. konkave Fkt. } \mathcal{K}^s. \quad (4.86)$$

Dabei repräsentieren die Bereichsnutzenfunktionen $\mathcal{K}^s [U^s(x^s)]$ mit $s = 1, \dots, S$ homothetische Präferenzen, und die Funktion F ist wie in Gleichung (4.1) streng monoton steigend. \mathcal{K}^s sichert die notwendige Krümmungseigenschaft der Summanden, d.h. die strenge Konkavität der Subnutzenfunktionen.⁸⁹ Die Nutzenfunktion (4.87) des *Cobb-Douglas*-Typs ($\alpha_s > 0$) besitzt beispielsweise die Struktur von (4.86):

$$U(x) = \prod_{s=1}^S U^s(x^s)^{\alpha_s} = \prod_{s=1}^S (e^{\ln U^s(x^s)})^{\alpha_s} = e^{[\sum_{s=1}^S \alpha_s \ln U^s(x^s)]}. \quad (4.87)$$

⁸⁸Für Letzteres siehe Gleichung (4.72), S. 93.

⁸⁹Die Formulierung "notwendige Krümmungseigenschaft" ist wegen der theoretisch möglichen Fälle 2 und 3 nicht ganz korrekt. Siehe dazu S. 84.

Die Subnutzenfunktionen $U^s(x^s)$ seien im Beispiel (4.87) linearhomogen. Die linke Seite erfüllt die Anforderungen des two-stage budgeting und wirkt zunächst wie die unter 4.1.5 beschriebene Modellierung. Die Struktur entspricht aber gleichzeitig der unter 4.1.4 beschriebenen additiven Separabilitätsannahme. Die wegen der Eindeutigkeitsforderung notwendige strenge Konkavität der Subnutzenfunktionen wird im rechten Teil von (4.87) durch den natürlichen Logarithmus sichergestellt. Die Funktion F entspricht in diesem Beispiel $e^{[\cdot]}$.

Eine two-stage budgeting Modellierung der Form (4.86) bewirkt, dass sowohl Güter aus unterschiedlichen Gruppen als auch die Gütergruppen als solche nur in einer Substitutionsbeziehung zueinander stehen können:⁹⁰

$$S_{ij} > 0 \quad \text{mit} \quad (i \in s, j \in t, s \neq t)$$

und

$$S_{st}^{Agg} > 0 \quad \text{mit} \quad (s, t \in S, s \neq t).$$

Neben diesen Restriktionen besitzen alle Güter eine Gruppeneinkommenselastizität von 1.⁹¹ Durch die strenge Konkavität der Subnutzenfunktion sind zudem inferiore Gruppen ausgeschlossen.⁹²

Ein Vergleich der Modellierung (4.86) mit der allgemeinen blockadditiven Modellierung (4.20) zeigt, dass der Zusammenhang (4.44) hier zusätzlich für die *Hicks*-Aggregate $Q^s(x^s)$ mit den entsprechenden linearhomogenen Preisindizes $P^t(p^t)$ ($s, t \in S$) gilt.⁹³

$$\frac{\partial Q^s}{\partial P_t} = \left(-\frac{\lambda}{\frac{\partial \lambda}{\partial M}} \frac{\partial Q^t}{\partial M} - Q^t \right) \frac{\partial Q^s}{\partial M} \quad \text{für} \quad (s, t \in S; s \neq t) \quad (4.88)$$

Der Proportionalitätsfaktor $\left(-\frac{\lambda}{\frac{\partial \lambda}{\partial M}} \frac{\partial Q^t}{\partial M} - Q^t \right)$ zwischen *Marshall*scher Preis- und Einkommensreaktion der *Hicks*-Aggregate ist äquivalent zu (4.44) nur vom preisindexverändernden Aggregat Q^t abhängig. Des Weiteren gilt äquivalent zu Gleichung (4.40) für die *Slutsky*-Effekte der *Hicks*-Aggregate:⁹⁴

$$S_{st}^{Agg} = \frac{\partial Q^s}{\partial P_t} + \frac{\partial Q^s}{\partial M} \cdot Q^t = -\frac{\lambda}{\frac{\partial \lambda}{\partial M}} \frac{\partial Q^s}{\partial M} \frac{\partial Q^t}{\partial M} \quad \text{für} \quad (s, t \in S; s \neq t) \quad (4.89)$$

⁹⁰Vgl. dazu die Seiten 85 und 96 sowie A.16, S. 209. Homothetische Subnutzenfunktionen generieren lineare Engelkurven, d.h. u.a. $\frac{\partial x_i}{\partial M^s} > 0$ für alle $i \in s$ mit $s = 1, \dots, S$.

⁹¹Siehe dazu wiederum A.16, S. 209, und die Abbildung A.10, S. 211.

⁹²Siehe dazu Fall 1, S. 84.

⁹³Die Subnutzenfunktion $U^s(x^s)$ in (4.20), S. 81, entspricht in (4.86) genau $\mathcal{K}^s[U^s(x^s)]$. Da die linearhomogenen Subnutzenfunktionen $U^s(x^s)$ gemäß Gleichung (4.60), S. 91, im Falle homothetischer Separabilität genau den $Q^s(x^s)$ entsprechen, gilt $\mathcal{K}^s[U^s(x^s)] = \mathcal{K}^s[Q^s(x^s)]$. Die Funktion \mathcal{K}^s erfüllt alle Forderungen an eine Nutzenfunktion für *Hicks*-Aggregate, da sie lediglich eine monotone Transformation einer alle Anforderungen erfüllenden Nutzenfunktion ist.

⁹⁴Sowohl die Gleichung (4.88) als auch die Gleichung (4.89) basieren auf der Vereinfachung (4.22), S. 81.

Aus der Eigenschaft E3^S der *Slutsky*-Matrix ($\sum_{t=1}^S P^t \mathcal{S}_{st}^{Agg} = 0$)⁹⁵ folgt für \mathcal{S}_{ss}^{Agg} :

$$P^s \mathcal{S}_{ss}^{Agg} = -P^1 \mathcal{S}_{s1}^{Agg} - \dots - P^{(s-1)} \mathcal{S}_{s(s-1)}^{Agg} - P^{(s+1)} \mathcal{S}_{s(s+1)}^{Agg} - \dots - P^S \mathcal{S}_{sS}^{Agg} \quad (4.90)$$

bzw. unter Anwendung von (4.89) und der Herleitung von E2.1^{ε^M} auf S. 55:

$$\mathcal{S}_{ss}^{Agg} = \frac{\partial Q^s}{\partial P^s} + \frac{\partial Q^s}{\partial M} \cdot Q^s = \frac{1}{P^s} \frac{\lambda}{\frac{\partial \lambda}{\partial M}} \frac{\partial Q^s}{\partial M} \left(1 - P^s \frac{\partial Q^s}{\partial M} \right). \quad (4.91)$$

Mittels der Gleichungen (4.89) und (4.91) kann durch Umwandlung in Elastizitätenform der Vorteil der hier beschriebenen Modellierung verdeutlicht werden. Aus (4.89) folgt durch geschickte Multiplikation mit $\frac{Q^s}{Q^s}$, $\frac{M}{M}$ und $\frac{P^t}{P^t}$ nach einigen Umformungen:

$$\varepsilon_{st}^{\mathcal{M}} = -\varepsilon_{sM}^{\mathcal{M}} \frac{P^t Q^t}{M} \left(1 + \frac{\lambda}{\frac{\partial \lambda}{\partial M} M} \varepsilon_{tM}^{\mathcal{M}} \right) \quad \text{für } (s, t \in S; s \neq t). \quad (4.92)$$

Aus (4.91) folgt äquivalent zur obigen Umformung:

$$\varepsilon_{ss}^{\mathcal{M}} = \frac{\lambda}{\frac{\partial \lambda}{\partial M} M} \varepsilon_{sM}^{\mathcal{M}} - \varepsilon_{sM}^{\mathcal{M}} \frac{P^s Q^s}{M} \left(1 + \frac{\lambda}{\frac{\partial \lambda}{\partial M} M} \varepsilon_{sM}^{\mathcal{M}} \right) \quad \text{für } (s \in S). \quad (4.93)$$

Sowohl die Kreuzpreis- als auch die Eigenpreiselastizitäten der Mengenindizes Q^s bezüglich der Preisindizes P^s ($s = 1, \dots, S$) sind bei der blockadditiven Modellierung mit homothetischen Präferenzen Funktionen der $(S - 1)$ unabhängigen Einkommenselastizitäten⁹⁶ und eines Skalars ς (hier $\frac{\lambda}{\frac{\partial \lambda}{\partial M} M}$).⁹⁷ Die Modellierung ermöglicht somit die Bestimmung der Preiselastizitäten trotz geringer Preisvariation in den Daten, obgleich eine derartige Messung mehr die Strukturannahme als die Daten nutzt.⁹⁸ Die Wirkungen einer blockadditiven Struktur auf die Elastizitätsbeziehungen der *Hicks*-Aggregate entsprechen selbstverständlich denen einer in den Einzelgütern additiven Struktur.⁹⁹ Wird bei den Subnutzenfunktionen eine additive Struktur angenommen, so können die Gleichungen (4.92) und (4.93) entsprechend modifiziert angewandt werden:

$$\varepsilon_{ij}^{\mathcal{M}} = -\varepsilon_{iM^s}^{\mathcal{M}} \frac{p_j x_j}{M^s} \left(1 + \frac{\lambda^s}{\frac{\partial \lambda^s}{\partial M^s} M^s} \varepsilon_{jM}^{\mathcal{M}} \right) \quad \text{für } (x_i, x_j \in x^s; i \neq j) \quad (4.94)$$

⁹⁵Siehe dazu unter 3.3.4, S. 61.

⁹⁶Es existieren nur $(S - 1)$ unabhängige Einkommenselastizitäten der S *Hicks*-Aggregate Q^s . Vgl. dazu E2.1^{ε^M}, S. 55.

⁹⁷Die Formulierung Skalar ς ist der Tatsache geschuldet, dass es sich nur bei Modellierungen mit einer linearen Funktion F um den reziproken Wert der Einkommenselastizität des Lagrangemultiplikators $\left(\frac{\lambda}{\frac{\partial \lambda}{\partial M} M} \right)$ handelt. Ist F in (4.86) eine nichtlineare, streng monoton steigende Funktion, so gelten die beschriebenen Beziehungen grundsätzlich weiter. Die genannte Interpretation des Skalars ist jedoch nicht mehr möglich. Vgl. dazu S. 86 und *Deaton* und *Muellbauer* (1980b, S. 141).

⁹⁸Vgl. *Deaton*, A. (1986, S. 1817f.).

⁹⁹Siehe Gleichung (4.61), S. 91.

$$\varepsilon_{ii}^{\mathcal{M}} = \frac{\lambda^s}{\frac{\partial \lambda^s}{\partial M^s} M^s} \varepsilon_{iM}^{\mathcal{M}} - \varepsilon_{iM^s}^{\mathcal{M}} \frac{p_i x_i}{M^s} \left(1 + \frac{\lambda^s}{\frac{\partial \lambda^s}{\partial M^s} M^s} \varepsilon_{iM}^{\mathcal{M}} \right) \quad \text{für } (x_i \in x^s). \quad (4.95)$$

Die den Gleichungen (4.94) und (4.95) zugrunde liegende Subnutzenfunktion hat dabei die Struktur $U^s(x^s) = F \left[\sum_{k=1}^{l^s} U_k^s(x_k^s) \right]$ bzw. $U^s(x^s) = \sum_{k=1}^{l^s} U_k^s(x_k^s)$.¹⁰⁰

Die Reduktion der zu schätzenden Parameter eines Nachfragesystems durch die Annahme additiver Präferenzstrukturen wird durch starke Restriktionen des Systems erkauft. Der Budget-Anteil $\frac{P^s Q^s}{M}$ bzw. $\frac{p_i x_i}{M^s}$ eines Gutes¹⁰¹ wird mit steigender Güterzahl im Allgemeinen immer kleiner, so dass der hintere Teil der Gleichung (4.95) und sämtliche Kreuzpreiselastizitäten (4.94) gegen Null streben.¹⁰² Für die Eigenpreiselastizitäten folgt daraus die Näherung¹⁰³

$$\varepsilon_{ii}^{\mathcal{M}} \simeq \frac{\lambda^s}{\frac{\partial \lambda^s}{\partial M^s} M^s} \varepsilon_{iM}^{\mathcal{M}} \quad \text{für } (x_i \in x^s) \quad (4.96)$$

bzw. bei nichtlinearer Transformation F

$$\varepsilon_{ii}^{\mathcal{M}} \simeq \varsigma \varepsilon_{iM}^{\mathcal{M}} \quad \text{für } (x_i \in x^s). \quad (4.97)$$

Die empirische Prüfung der Näherung (4.97) mit additiven Modellen hat gezeigt, dass die Proportionalitätsbeziehung selbst für additive Systeme mit wenig Gütern, also mit relativ hohen Budget-Anteilen, eine bemerkenswert gute Approximation liefert. Allerdings konnte die Beziehung (4.97) einer empirischen Prüfung mit nichtadditiven Modellen nicht standhalten.¹⁰⁴

Die Verzerrung der Schätzergebnisse durch eine additive Modellierung wird von *Deaton* als derartig stark eingestuft, dass er zu dem Schluss kommt: „... if the price to be paid for the theoretical consistency of demand models is the necessity

¹⁰⁰*Houthakker, H.S.* (1960, S. 246) nutzt den letzteren Nutzenfunktionstyp zur Herleitung der Wirkungen additiver Separabilität bzw. additiver Präferenzen. *Frisch, R.* (1959, S. 185ff.) hingegen erhält die Gleichungen (4.94) und (4.95) als Spezialfälle einer allgemeingültigen Elastizitätsbeziehung, wenn die Güter want-independent sind. Güter sind gemäß *Frisch* want-independent, wenn $\frac{\partial^2 U^s(x^s)}{\partial x_i^s \partial x_j^s} = 0$ gilt. Siehe hierzu die Gleichung (A.50), S. 219. Wie schon oben erwähnt, muss bei einer nichtlinearen Transformation F der Term $\left(\frac{\lambda}{\frac{\partial \lambda}{\partial M} M} \right)$ in (4.94) und (4.95) durch den Skalar ς ersetzt werden.

¹⁰¹Im Folgenden wird wegen der prinzipiellen Wirkungsgleichheit nicht mehr zwischen *Hicks*-Aggregaten und Einzelgütern unterschieden.

¹⁰²Vgl. *Deaton, A.* (1974, S. 340).

¹⁰³Ein ähnlicher proportionaler Zusammenhang wurde schon im Jahre 1910 von *Pigou* beschrieben. Die Gleichung (4.96) hat daher unter dem Namen *Pigou's-Law* Eingang in die Literatur gefunden. Vgl. *Pigou, A.C.* (1910, S. 638f.).

¹⁰⁴Vgl. *Deaton, A.* (1974, S. 343f.) und *Deaton, A.* (1975, S. 270), aber auch *Theil, H.* (1975, S. 199).

of assuming additive preferences, then the price is too high.“¹⁰⁵ Trotzdem wird die Annahme additiver Präferenzen in der Praxis sehr häufig genutzt.¹⁰⁶ Dies ist zweifellos auf die durch starke restriktive Annahmen erkaufte Reduzierung der zu schätzenden Parameter zurückzuführen.

Im Übrigen wurde durch die Annahme additiver Präferenzen auch versucht *Frischs* „money flexibility“ bzw. „flexibility of the marginal utility of money“¹⁰⁷ $\left(\frac{\partial \lambda}{\partial M} M\right)$ zu quantifizieren. Die Bestimmung des Skalars ζ ist für diese Zielsetzung aber nur dann geeignet, wenn die Konsumenten Nutzenfunktionen der Form (4.86) mit einer linearen Transformation F besitzen. Diese Annahme ist jedoch empirisch nicht nachprüfbar, da monoton steigende Transformationen der Nutzenfunktion keinen Einfluss auf die Nachfragefunktionen haben. *Deaton* nennt daher diese Annahme und somit alle Schätzungen „entirely baseless“.¹⁰⁸

4.2 Möglichkeiten der Spezifizierung

Im Kapitel 3 wurden allgemeine theoretische Erkenntnisse der Mikroökonomie bezüglich der Güternachfrage eines Haushaltes vorgestellt. Es wurde gezeigt, dass bei einer unterstellten *rationalen Präferenzordnung* des Haushaltes bestimmte Restriktionen bezüglich der funktionalen Modellierung gelten. Ein Nachfragesystem ist demnach *theoretisch plausibel*, wenn es aus einer Nutzenfunktion, die der Annahme A4¹⁰⁹ genügt, ableitbar ist. Eine weitere Möglichkeit der Bestimmung eines theoretisch plausiblen Nachfragesystems wird durch die in der Abbildung 3.3 aufgezeigten Wechselbeziehungen geboten.¹¹⁰ Eine funktionale Spezifizierung hat, um als Abbildung einer rationalen Präferenzordnung zu gelten, nur die Nullhomogenität der *Marshall*-Nachfragekurven bei gleichzeitiger Symmetrie und negativer Semidefinitheit der *Slutsky*-Matrix sicherzustellen.¹¹¹ Eine erschöpfende Darstellung aller theoretisch plausiblen, funktionalen Spezifizierungen von Nachfragesystemen ist nicht möglich. Die folgenden Ausführungen beschränken sich daher auf die Darstellung von Nachfragefunktionsklassen, die einer im Jahre 1981

¹⁰⁵*Deaton, A.* (1974, S. 346).

¹⁰⁶Eines der gemäß *Deaton, A.* (1986, S. 1787) wohl am häufigsten geschätzten additiven Nachfragesysteme ist das so genannte LES (Siehe dazu 5.2, S. 119ff.). Die von *Brown* und *Heien* (1972, S. 737-747) entwickelte Verallgemeinerung des LES, der so genannte *S-Branch Utility Tree*, ist ein frühes Beispiel für die Nutzung additiver Präferenzen auf der 1. Stufe des two-stage Budgeting.

¹⁰⁷*Frisch, R.* (1932, S. 15).

¹⁰⁸*Deaton, A.* (1986, S. 1818).

¹⁰⁹Die Annahme A4 findet sich auf S. 49. Insbesondere müssen die Eigenschaften der *Slutsky*-Matrix gelten. Des Weiteren wird wie in Kapitel 3 von einer linearen Budgetbeschränkung ausgegangen.

¹¹⁰Siehe Abbildung 3.3, S. 58.

¹¹¹Vgl. *Pollak, Wales* (1978, S. 349).

von *Gorman* entwickelten Charakterisierung genügen:¹¹²

$$x_i^{\mathcal{M}} = \sum_{r=1}^R a_{ir}(p) G^r(M) \quad i = 1, \dots, L \quad (4.98)$$

bzw. in Matrixform:

$$\begin{pmatrix} x_1^{\mathcal{M}} \\ \vdots \\ x_i^{\mathcal{M}} \\ \vdots \\ x_L^{\mathcal{M}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}(p) & \cdots & a_{1r}(p) & \cdots & a_{1R}(p) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{i1}(p) & \cdots & a_{ir}(p) & \cdots & a_{iR}(p) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{L1}(p) & \cdots & a_{Lr}(p) & \cdots & a_{LR}(p) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G^1(M) \\ \vdots \\ G^r(M) \\ \vdots \\ G^R(M) \end{pmatrix} \quad (4.99)$$

kurz:

$$x^{\mathcal{M}} = A(p) \cdot G(M). \quad (4.100)$$

Die durch (4.98) beschriebenen *Marshall'schen* Nachfragefunktionen sind theoretisch konsistent und ermöglichen des Weiteren die exakte Aggregation der Nachfrage, so dass auch eine Schätzung der Modellparameter mit aggregierten Haushaltsdaten möglich ist.¹¹³ Die bei konstanten Preisen vom Einkommen abhängigen Nachfragekurven x_i des Systems (4.98) haben unter dem Namen *Gorman Engel curves* Eingang in die wirtschaftswissenschaftliche Literatur gefunden. Sie sind linear in Funktionen $G^r(M)$ des Einkommens M , wobei die Koeffizienten $a_{ir}(p)$ Funktionen der Güterpreise sind. Sehr viele in der empirischen Praxis verwendete Systeme sind Teil des allgemeinen Systems (4.98).¹¹⁴ *Gorman* zeigt in seinem Artikel, dass ein derartiges, theoretisch plausibles Nachfragesystem höchstens den Rang 3 haben kann, wobei unter dem Rang eines Nachfragesystems der Rang der $L \times R$ Koeffizientenmatrix der $a_{ir}(p)$ verstanden wird. Des Weiteren beschreibt er die möglichen Funktionsformen $G^r(M)$ des Einkommens, die ein theoretisch plausibles Nachfragesystem bietet, falls $A(p)$ den Rang 3 besitzt.¹¹⁵

Im Folgenden werden diese Eigenschaften zunächst näher beschrieben, um im Anschluss daran eine Einordnung und Gruppierung empirisch verwendeter Systeme als Spezialfälle des allgemeinen Systems (4.98) vorzunehmen.

¹¹²Vgl. *Gorman, W.M.* (1981, S. 7).

¹¹³Vgl. *Nicol, C.J.* (2001, S. 263).

¹¹⁴Ein möglicher Grund hierfür ist die Tatsache, dass die Nutzung bzw. die Existenz von Mikrodatensätzen erst neueren Datums ist. Die ersten Schätzungen von Nachfragesystemen basierten ausschließlich auf aggregierten Daten. Nur wenn die Aggregation der Nachfrage möglich ist, können die theoretischen Ergebnisse aus Kapitel 3 auf die Makro-Ebene übertragen werden. Vgl. dazu *Lewbel, A.* (1990, S. 289) oder *Lewbel, A.* (1991, S. 715). In einer Studie jüngerer Datums prüft *Lewbel* die Einschränkung dieser Modellierung und kommt zu dem Schluss: „Empirical estimates of this [rationales Rang-4-System ohne die *Gorman'sche* Aggregationseinschränkung] systems Engel curves generally confirm the results found in previous studies that demand appear to be rank three, although there is some evidence for the possibility of rank four.“ *Lewbel, A.* (2003, S. 133).

¹¹⁵Vgl. *Gorman, W.M.* (1981, S. 7ff.).

4.2.1 *Gormansche* Nachfragesysteme vollen Ranges

Die formale Beweisführung zum maximalen Rang der Koeffizientenmatrix $A(p)$ von (4.100) und der möglichen Funktionen des Einkommens $G^r(M)$ ist sehr komplex und soll daher hier nicht wiedergegeben werden.¹¹⁶ Im Folgenden wird statt dessen nur der Ansatz und das Ergebnis von *Gormans* Theorem genannt¹¹⁷ und gegebenenfalls die theoretische Plausibilität an ausgewählten Beispielen bestätigt. Dies geschieht in der Hoffnung, dem Leser einen Einblick in die grundsätzliche Idee dieser Thematik zu vermitteln.

Ein Blick auf die Abbildung 3.3 auf Seite 58 verdeutlicht den aus (4.98) folgenden Zusammenhang:

$$x_i^M(p, \mathcal{A}(p, \bar{U})) = x_i^H(p, \bar{U}) = \sum_{r=1}^R a_{ir}(p) G^r(\mathcal{A}(p, \bar{U})) = \frac{\partial \mathcal{A}(p, \bar{U})}{\partial p_i} . \quad (4.101)$$

Gorman zeigt in seinem Artikel, dass aus den Lösungsbedingungen für die L partiellen Differentialgleichungen (4.101) die genannte Bedingung des maximalen Ranges 3 für $A(p)$ folgt. Des Weiteren beschreibt er die möglichen Funktionen, die sich für $G^r(M)$ bieten, in allgemeiner Form.¹¹⁸ Aufbauend auf diesen Ergebnissen gelingt *Lewbel* die umfassende Beschreibung aller möglichen so genannten „Full Rank Demand Systems“. Unter dieser Bezeichnung versteht *Lewbel* alle Nachfragesysteme der Form (4.98) in denen R , also die Anzahl der Summanden in (4.98), gerade dem Rang von $A(p)$ entspricht.¹¹⁹ Derartige Nachfragesysteme zeichnen sich durch eine sparsame Nutzung der Parametern $a_{ir}(p)$ aus.¹²⁰ Die durch die Engelkurven aufgespannte lineare Hülle des Nachfragesystems wird bei „Full Rank Demand Systems“ von einer minimalen Parameteranzahl (Vektorenanzahl) determiniert. Die gewünschte Einkommensflexibilität des Systems kann folglich nicht mit weniger Parametern abgebildet werden.

4.2.2 Rang-1-Nachfragesysteme

Rang-1-Nachfragesysteme von vollem Rang, also mit nur einem Summanden in (4.98), entsprechen der allgemeinen Form

$$x_i^M = a_{i1}(p) G^1(M) \quad i = 1, \dots, L. \quad (4.102)$$

¹¹⁶Der Beweis erstreckt sich über 12 Seiten. Vgl. dazu *Gorman, W.M.* (1981, S. 9 bis S. 20).

¹¹⁷Auf eine allgemeine Ergebnisdarstellung wird wiederum verzichtet. Statt dessen wird die von *Arthur Lewbel* im Jahre 1990 beschriebene „Full Rank“ Beschränkung genutzt. Vgl. *Lewbel, A.* (1990, S. 289-300).

¹¹⁸Bei der Beweisführung wird mit der logarithmierten Form von (4.101) argumentiert, vgl. *Gorman, W.M.* (1981, S. 9), und die für ein theoretisch plausibles Nachfragesystem notwendige Symmetrie der *Slutsky*-Matrix verwandt, vgl. ebd., S. 11.

¹¹⁹Vgl. *Lewbel, A.* (1990, S. 290). Die Anzahl der durch (4.98) beschriebenen Güternachfrage beträgt für diese Definition notwendiger Weise mindestens drei ($L > 2$).

¹²⁰Vgl. *Missong, M.* (2004, S. 98).

Aus der Budgetgleichung des Haushalts folgt bei Division durch M :

$$\frac{p_1 x_1^M}{M} + \dots + \frac{x_L x_L^M}{M} = 1. \quad (4.103)$$

Das Einsetzen von (4.102) und anschließendes Differenzieren von (4.103) nach M führt zu:

$$\frac{p_1 a_{11} (G_M^1 M - G^1)}{M^2} + \dots + \frac{p_L a_{L1} (G_M^1 M - G^1)}{M^2} = 0. \quad (4.104)$$

Da die Gleichung (4.104) für alle Preisvektoren p erfüllt sein muss, folgt daraus die Bedingung

$$\frac{\partial G^1(M)}{\partial M} M - G^1(M) = 0. \quad (4.105)$$

Die allgemeine Lösung dieser homogenen Differentialgleichung erster Ordnung lautet:¹²¹

$$G^1(M) = k \cdot M \quad \text{mit } (k \neq 0), \text{ aber ansonsten beliebiger Konstante.} \quad (4.106)$$

Für (4.102) folgt daraus:

$$x_i^M = a_{i1}(p) \cdot k \cdot M \quad i = 1, \dots, L \quad (4.107)$$

bzw.

$$x_i^M = a_{i1}(p) \cdot M \quad i = 1, \dots, L, \quad (4.108)$$

wenn die Konstante k von $a_{i1}(p)$ absorbiert wird. Die Nachfrage nach Gütern in einem Rang-1-Nachfragesystem ist folglich proportional zum Einkommen. Die Engelkurven sind durch den Ursprung gehende Geraden und die Nutzenfunktion ist homothetisch. Somit entspricht die ein Rang-1-System generierende indirekte Nutzenfunktion $\mathcal{N}(p, M)$ ¹²²

$$\mathcal{N}(p, M) = \mathcal{K} \left(\frac{M}{P(p)} \right), \quad (4.109)$$

wobei $P(p)$ homogen vom Grade 1 in p und \mathcal{K} eine monoton steigende Funktion ist. Für die *Marshall'schen* Nachfragefunktionen eines Rang-1-Systems gilt dann gemäß Roys Identität:

$$x_i^M = \frac{\frac{\partial P(p)}{\partial p_i}}{P(p)} \cdot M \quad i = 1, \dots, L. \quad (4.110)$$

¹²¹Nach der Umformung von (4.105) zu $\frac{\partial G^1(M)}{G^1(M)} = \frac{1}{M}$ müssen beide Seiten bezüglich M integriert werden: $\int \frac{\frac{\partial G^1(M)}{\partial M}}{G^1(M)} dM = \int \frac{1}{M} dM$. Daraus folgt: $\int \frac{1}{G^1(M)} dG^1(M) = \int \frac{1}{M} dM$ bzw.: $\ln G^1(M) + k_1 = \ln M + k_2$. Weiteres Umformen führt zu: $e^{\ln G^1(M)} = e^{\ln M} \cdot e^{(k_2 - k_1)}$ und somit zu (4.106) mit $k = e^{(k_2 - k_1)}$ als beliebiger Konstante.

¹²²Siehe dazu A.16, S. 209. Die Symmetrie der *Slutsky*-Matrix ist daher gewährleistet. Siehe dazu A.17, S. 210ff. Die notwendige Nullhomogenität von $\mathcal{N}(p, M)$ ist durch die Linearhomogenität von $P(p)$ gesichert. Siehe bezüglich der Nullhomogenität von $\mathcal{N}(p, M)$ die Eigenschaft E1^N, S. 57.

4.2.3 Rang-2-Nachfragesysteme

Rang-2-Nachfragesysteme von vollem Rang, also mit nur zwei Summanden in (4.98), entsprechen der allgemeinen Form:

$$x_i^M = a_{i1}(p) G^1(M) + a_{i2}(p) G^2(M) \quad i = 1, \dots, L. \quad (4.111)$$

Eine umfassende Beschreibung derartiger Nachfragesysteme wurde bereits im Jahre 1975 von *John Muellbauer* vorgenommen.¹²³ Die von *Muellbauer* so genannten PIGL- und PIGLOG-Nachfragesysteme¹²⁴ haben die Form:

PIGL:

$$x_i^M = \frac{\partial P(p)}{\partial p_i} \cdot M - P(p)^{1-k} \frac{\partial \Lambda(p)}{\partial p_i} M^k \quad i = 1, \dots, L \quad (4.112)$$

mit der indirekten Nutzenfunktion

$$\mathcal{N}(p, M) = \mathcal{K} \left(\frac{\left(\frac{M}{P(p)} \right)^{1-k}}{1-k} + \Lambda(p) \right) \quad (4.113)$$

mit ($k \neq 1$), aber ansonsten beliebiger Konstante. Die indirekte Nutzenfunktion (4.113) ist ein Spezialfall der *Generalized Gorman Polar Form*.¹²⁵ Die monoton steigende Funktion $\Gamma(\cdot) = \frac{(\cdot)^{1-k}}{1-k}$ in (4.113) verdeutlicht des Weiteren, dass nicht durch den Ursprung gehende, lineare Engelkurven, wie in Abbildung 4.4 auf S. 88 dargestellt, für den Fall ($k = 0$) folgen. Somit ist beispielsweise das unter 5.2 näher erläuterte Linear Expenditure System (LES), auch quasihomothetisches Nachfragesystem genannt, ein Spezialfall der PIGL-Klasse. Zusammenfassend können also für die PIGL-Klasse die beiden Einkommensfunktionen für (4.111)

$$G^1(M) = M \quad (4.114)$$

und

$$G^2(M) = M^k \quad \text{mit } (k \neq 1) \quad (4.115)$$

festgehalten werden. Der Nachweis, dass derartige Einkommensfunktionen mit den entsprechenden Koeffizienten $a_{i1} = \frac{\partial P(p)}{\partial p_i}$ und $a_{i2} = -P(p)^{1-k} \frac{\partial \Lambda(p)}{\partial p_i}$ auch die modifizierte lineare Budgetrestriktion¹²⁶

$$\sum_{i=1}^L (p_i a_{i1} [G_M^1 M - G^1] + p_i a_{i2} [G_M^2 M - G^2]) = 0 \quad (4.116)$$

¹²³Vgl. *Muellbauer, J.* (1975, S. 526).

¹²⁴PIGL steht für **P**rice **I**ndependent **G**eneralized **L**inearity und das LOG in PIGLOG für die Logarithmusfunktion. Siehe hierzu die Gleichungen (4.121) und (4.122).

¹²⁵Vgl. dazu die Gleichung (4.17), S. 79, und die Gleichung (4.48), S. 89. Unter A.18, S. 214, findet sich der Nachweis der *Slutsky*-Symmetrie derartiger Nachfragesysteme.

¹²⁶Vgl. dazu die Herleitung von Gleichung (4.105), S. 103.

erfüllen, gelingt, obgleich nicht sofort ersichtlich, ohne große Schwierigkeiten. Die Funktion $P(p)$ ist linearhomogen und die Funktion $\Lambda(p)$ homogen vom Grade 0 in p . Das Einsetzen der Einkommensfunktionen (4.114) und (4.115) und ihrer Ableitungen führt zu:

$$\sum_{i=1}^L (p_i a_{i1} [M - M] + p_i a_{i2} [k M^{k-1} M - M^k]) = 0 \quad (4.117)$$

$$\sum_{i=1}^L p_i a_{i2} [k M^k - M^k] = 0 \quad (4.118)$$

$$\sum_{i=1}^L p_i a_{i2} = 0, \quad (4.119)$$

Einsetzen des Koeffizienten $a_{i2} = -P(p)^{1-k} \frac{\partial \Lambda(p)}{\partial p_i}$ zu

$$-P^{1-k} \sum_{i=1}^L p_i \Lambda_{p_i} = 0. \quad (4.120)$$

Da die Funktion $\Lambda(p)$ homogen vom Grade 0 in p ist, gilt gemäß der *Eulerschen* Homogenitätsrelation $\sum_{i=1}^L p_i \Lambda_{p_i} = 0$.¹²⁷

PIGLOG:

$$x_i^{\mathcal{M}} = \left(\frac{\frac{\partial P(p)}{\partial p_i}}{P(p)} + \frac{\partial \Lambda(p)}{\partial p_i} \ln P(p) \right) M - \frac{\partial \Lambda(p)}{\partial p_i} M \ln M \quad i = 1, \dots, L \quad (4.121)$$

mit der indirekten Nutzenfunktion

$$\mathcal{N}(p, M) = \mathcal{K} \left(\ln \left(\ln \frac{M}{P(p)} \right) + \Lambda(p) \right). \quad (4.122)$$

Die indirekte Nutzenfunktion (4.122) ist wiederum ein Spezialfall der *Generalized Gorman Polar Form*. In (4.122) entspricht die monoton steigende Funktion $\Gamma(\cdot)$ aus der Gleichung (4.17) auf der Seite 79 bzw. aus der Gleichung (4.48) auf der Seite 89 gerade $\Gamma(\cdot) = \ln(\ln(\cdot))$. Die PIGLOG-Klasse generiert folglich nichtlineare Engelkurven.¹²⁸ Zusammenfassend können also für die PIGLOG-Klasse die beiden Einkommensfunktionen für (4.111)

$$G^1(M) = M \quad (4.123)$$

¹²⁷Siehe A.15, S. 209.

¹²⁸Vgl. neben Gleichung (4.121) auch Seite 87f.

und

$$G^2(M) = M \ln M \quad (4.124)$$

festgehalten werden. Der Nachweis, dass derartige Einkommensfunktionen mit den entsprechenden Koeffizienten $a_{i1} = \left(\frac{\frac{\partial P(p)}{\partial p_i}}{P(p)} + \frac{\partial \Lambda(p)}{\partial p_i} \ln P(p) \right)$ und $a_{i2} = -\frac{\partial \Lambda(p)}{\partial p_i}$ die modifizierte lineare Budgetrestriktion¹²⁹ erfüllen, entspricht inhaltlich dem der PIGL-Klasse.¹³⁰ Ein sehr populärer Vertreter der PIGLOG-Klasse ist das so genannte Almost Ideal Demand System (kurz AID-System).¹³¹

4.2.4 Rang-3-Nachfragesysteme

Rang-3-Nachfragesysteme von vollem Rang, also mit genau drei Summanden in (4.98), entsprechen der allgemeinen Form

$$x_i^M = a_{i1}(p) G^1(M) + a_{i2}(p) G^2(M) + a_{i3}(p) G^3(M) \quad i = 1, \dots, L. \quad (4.125)$$

Nachfragesysteme dieser Form sind die eigentliche Neuerung des Artikels von *Gorman* aus dem Jahre 1981. Er nennt drei mögliche, theoretisch plausible Spezifizierungen:

Verallgemeinert Quadratisch:

$$\begin{aligned} x_i^M &= \left(\frac{-\frac{\partial \Lambda(p)}{\partial p_i} P(p)^\tau + \Lambda(p)^2 P(p)^\tau \frac{\partial H(p)}{\partial p_i}}{\tau} \right) M^{1-\tau} \\ &+ \left(\frac{\frac{\partial P(p)}{\partial p_i}}{P(p)} + 2\Lambda(p) \frac{\partial H(p)}{\partial p_i} \tau^{-1} \right) M \\ &+ \left(\frac{\frac{\partial H(p)}{\partial p_i}}{P(p)^\tau} \tau^{-1} \right) M^{1+\tau} \quad i = 1, \dots, L, \end{aligned} \quad (4.126)$$

wobei die Funktion $H(p)$ genau wie die schon beschriebene Funktion $\Lambda(p)$ homogen vom Grade 0 ist. $P(p)$ ist wie oben dargestellt eine linearhomogene Funktion und der Parameter τ steht für eine von Null verschiedene Konstante. Die indirekte Nutzenfunktion

$$\mathcal{N}(p, M) = \mathcal{K} \left(\frac{-1}{\left(\frac{M}{P(p)} \right)^\tau + \Lambda(p)} - H(p) \right) \quad (4.127)$$

¹²⁹Vgl. Gleichung (4.116).

¹³⁰Siehe S. 105.

¹³¹Vgl. *Deaton, A. und Muellbauer, J.* (1980a, S. 313). Die genannten Entwickler dieses Nachfragesystems verwendeten im Artikel das unglückliche Akronym AIDS. Dieses ist daher häufig in der einschlägigen Literatur zu finden.

generiert Nachfragekurven der Form (4.126). Diese Beschreibung der Nachfragefunktionen nebst dazugehöriger indirekter Nutzenfunktion ist jedoch nicht die allgemeinste Darstellung dieser Klasse. Die oben beschriebene Spezifizierung entspricht für $\tau = 1$ der von *Howe, Pollak* und *Wales* aus dem Jahre 1979.¹³² *Van Daal* und *Merkies* gelang im Jahre 1989 eine allgemeinere Darstellung der Nachfrage. Sie ergänzten in der Gleichung (4.126) den Zähler des Koeffizienten vor $M^{\tau-1}$ (also $a_{i1}(p)$) um $\left[\Upsilon(H)P(p)^\tau \frac{\partial H(p)}{\partial p_i} \right]$ mit $\Upsilon(H)$ als beliebiger differenzierbarer Funktion einer Veränderlichen.¹³³ Es gelang jedoch nicht, eine allgemein gültige indirekte Nutzenfunktion zu bestimmen. Statt dessen beschreiben *Van Daal* und *Merkies* die für den Spezialfall $\Upsilon(H) = \kappa$ und $\tau = 1$, mit κ als beliebiger Konstante, geltende indirekte Nutzenfunktion

$$\mathcal{N}(p, M) = \mathcal{K} \left(\psi \left[\frac{-1}{\left(\frac{M}{P(p)} \right)^\tau + \Lambda(p)} \right] - H(p) \right), \quad (4.128)$$

die im Ansatz einer bereits 1987 von *Lewbel* beschriebenen Funktion ähnelt.¹³⁴ *Lewbel* war es wiederum, der 1990 die Einschränkung $\tau = 1$ aufhob und endgültig die indirekte Nutzenfunktion (4.128) für $\tau \neq 0$ definierte. Die Funktion ψ entspricht sowohl in der Darstellung von *Van Daal* und *Merkies* als auch im 1990er Artikel von *Lewbel*:¹³⁵

$$\psi(t) = \int_0^t \frac{1}{1 + \kappa z^2} dz. \quad (4.129)$$

In der empirischen Praxis wird nach Kenntnis des Verfassers ausschließlich mit der Annahme $\Upsilon(H) = 0$ gearbeitet, so dass die Gleichungen (4.126) und (4.127) völlig hinreichend, wenn auch nicht von größtmöglicher Allgemeinheit sind.¹³⁶

Ein populärer Vertreter der hier betrachteten Modellierung ist das Quadratic Expenditure System (QES). Es folgt für den Fall $\tau = 1$ und wird ausführlich unter 5.3 auf Seite 131 beschrieben.

Quadratisch Logarithmisch:

$$\begin{aligned} x_i^{\mathcal{M}} &= \left(\frac{-\frac{\partial H(p)}{\partial p_i}}{\Lambda(p)} (\ln P(p))^2 - \frac{\frac{\partial \Lambda(p)}{\partial p_i}}{\Lambda(p)} \ln P(p) + \frac{\frac{\partial P(p)}{\partial p_i}}{P(p)} \right) M \\ &+ \left(\frac{\Lambda(p) - 2\frac{\partial H(p)}{\partial p_i} \ln P(p)}{\Lambda(p)} \right) M \ln M \end{aligned} \quad (4.130)$$

¹³²Vgl. *Howe, Pollak* und *Wales* (1979, S. 1233f.).

¹³³Vgl. *Van Daal, Merkies* (1989, S. 1439). Die Autoren arbeiteten allerdings wie *Howe, Pollak* und *Wales* mit dem Fall $\tau = 1$.

¹³⁴Vgl. *Lewbel, A.* (1987, S. 1453). Die Funktion (4.128) entspricht einer Mischung aus dem von *Lewbel* dargestellten Case v und Case vi.

¹³⁵Vgl. *Lewbel, A.* (1990, S. 292) und *Van Daal, Merkies* (1989, S. 1443).

¹³⁶Vgl. beispielsweise *Pollak, Wales* (1992, S. 31).

$$+ \left(\frac{-\frac{\partial H(p)}{\partial p_i}}{\Lambda(p)} \right) M (\ln M)^2 \quad i = 1, \dots, L.$$

Die indirekte Nutzenfunktion

$$\mathcal{N}(p, M) = \mathcal{K} \left(\frac{\Lambda(p)}{\ln \left(\frac{M}{P(p)} \right)} - H(p) \right), \quad (4.131)$$

welche Nachfragekurven der Form (4.130) generiert, ist äquivalent zu den Ausführungen zu (4.127), wiederum nicht die allgemeinste Darstellung. Analog kann die allgemeine Darstellung der quadratisch logarithmischen Klasse durch das Hinzufügen des Terms $\left[-\Upsilon(H)\Lambda(p)\frac{\partial H(p)}{\partial p_i} \right]$ zum Koeffizienten vor M gewonnen werden. Für die schon bekannte Annahme $\Upsilon(H) = \kappa$ folgt dann die indirekte Nutzenfunktion:¹³⁷

$$\mathcal{N}(p, M) = \mathcal{K} \left(\psi \left[\frac{\Lambda(p)}{\ln \left(\frac{M}{P(p)} \right)} \right] - H(p) \right). \quad (4.132)$$

Das so genannte Quadratische AID-System (QUAIDS) ist ein Vertreter dieser Klasse.¹³⁸

Trigonometrisch: Die Darstellung dieser Klasse von Rang-3-Systemen erfolgt nur aus Gründen der Vollständigkeit. Ein in der empirischen Praxis mit dieser Spezifikation geschätztes Modell ist dem Verfasser nicht bekannt.¹³⁹ Die *Marshall*-Nachfragefunktionen besitzen für $i = 1, \dots, L$ die Form

$$\begin{aligned} x_i^M &= \frac{\frac{\partial P(p)}{\partial p_i}}{P(p)} + \frac{\frac{\partial H(p)}{\partial p_i}}{\tau \Lambda(p)} M \\ &+ \left(\frac{-\frac{\partial H(p)}{\partial p_i}}{\tau \Lambda(p)} \cos(\tau \ln P(p)) - \frac{\frac{\partial \Lambda(p)}{\partial p_i}}{\tau \Lambda(p)} \sin(\tau \ln P(p)) \right) M \sin(\tau \ln M) \\ &+ \left(\frac{-\frac{\partial H(p)}{\partial p_i}}{\tau \Lambda(p)} \sin(\tau \ln P(p)) - \frac{\frac{\partial \Lambda(p)}{\partial p_i}}{\tau \Lambda(p)} \cos(\tau \ln P(p)) \right) M \cos(\tau \ln M) \end{aligned} \quad (4.133)$$

mit der dazugehörigen indirekten Nutzenfunktion:

$$\mathcal{N}(p, M) = \mathcal{K} \left(\frac{-\Lambda(p) \left[\cos(\tau \ln(\frac{P(p)}{M})) \right]}{1 + \sin(\tau \ln(\frac{P(p)}{M}))} + H(p) \right). \quad (4.134)$$

¹³⁷Siehe bezüglich der Funktion ψ die Gleichung (4.129), S. 107.

¹³⁸Vgl. beispielsweise *Banks, Blundell und Lewbel* (1997, S. 528).

¹³⁹*Lewbel, A.* (1990, S. 296) bemerkt hierzu: „Note that Gorman's theorem [vgl. *Gorman, W.M.* (1981, S. 7-29)] does not prove existence. In particular, equation .. [hier: (4.133)] only shows that trigonometric models could exist, and the forms it could take on if they do exist.“

4.2.5 Theoretische Plausibilität von Rang-3-Systemen

Die Nullhomogenität der jeweiligen indirekten Nutzenfunktionen $\mathcal{N}(p, M)$ ist durch die Linearhomogenität von $P(p)$ und die Nullhomogenität von $H(p)$ und $\Lambda(p)$ gesichert.¹⁴⁰ Die *Marshall'schen* Nachfragefunktionen folgen durch Nutzung von *Roys-Identität*.¹⁴¹ Der Nachweis, dass derartige Systeme die Bedingung der *Slutsky-Symmetrie* und die der Budgetrestriktion erfüllen, wird sich im Folgenden auf das **Verallgemeinert Quadratische System** beschränken. Das Prinzip der Nachweisführung ist ohne Einschränkung auch auf die anderen beiden Rang-3-Spezifizierungen anwendbar. Unter Nutzung der *Slutsky-Gleichung* folgt aus (4.126) nach umfangreichen Umformungen der *Hickssche* Preiseffekt $\frac{\partial x_i^{\mathcal{H}}}{\partial p_j}$ eines **Verallgemeinert Quadratischen Systems**:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial x_i^{\mathcal{H}}}{\partial p_j} = & -\Lambda_{ij} \frac{M^{1-\tau} P^\tau}{\tau} + P_{ij} \frac{M}{P} + \Lambda_i \Lambda_j \frac{(1-\tau) P^{2\tau} M^{1-2\tau}}{\tau^2} & (4.135) \\
& + H_{ij} \left(\frac{2\Lambda M + M^{1-\tau} \Lambda^2 P^\tau + M^{1+\tau} P^{-\tau}}{\tau} \right) \\
& + H_i H_j \left(\frac{(1-\tau) (\Lambda^4 P^{2\tau} M^{1-2\tau} + 2\Lambda^3 P^\tau M^{1-\tau} + \Lambda^2 M)}{\tau^2} \right) \\
& + H_i H_j \left(\frac{4\Lambda^2 M + 2\Lambda^3 M^{1-\tau} P^\tau + 2\Lambda M^{1+\tau} P^{-\tau}}{\tau^2} \right) \\
& + H_i H_j \left(\frac{(1+\tau) (M\Lambda^2 + M^{1+\tau} 2\Lambda P^{-\tau} + M^{1+2\tau} P^{-2\tau})}{\tau^2} \right) \\
& + (\Lambda_i P_j + \Lambda_j P_i) \left(\frac{-P^{\tau-1} M^{1-\tau}}{\tau} \right) \\
& + (H_i P_j + H_j P_i) \left(\frac{2\Lambda M P^{-1} + \Lambda^2 P^{\tau-1} M^{1-\tau} + M^{1+\tau} P^{-\tau-1}}{\tau} \right) \\
& + (H_i \Lambda_j + H_j \Lambda_i) \left(\frac{(\tau-1) (P^{2\tau} \Lambda^2 M^{1-2\tau} - 2\Lambda P^\tau M^{1-\tau} + M)}{\tau^2} \right).
\end{aligned}$$

Die in Brüchen dargestellten Faktoren beinhalten nicht die Güterindizes i und j . Die *Slutsky-Symmetrie* $\frac{\partial x_i^{\mathcal{H}}}{\partial p_j} = \frac{\partial x_j^{\mathcal{H}}}{\partial p_i}$ ist somit sichergestellt.¹⁴² Der Nachweis, dass derartige Einkommensfunktionen mit den entsprechenden Koeffizienten auch die modifizierte lineare Budgetrestriktion¹⁴³

$$\sum_{i=1}^L p_i a_{i1} [G_M^1 M - G^1] + p_i a_{i2} [G_M^2 M - G^2] + p_i a_{i3} [G_M^3 M - G^3] = 0 \quad (4.136)$$

¹⁴⁰Siehe zur Nullhomogenität von $\mathcal{N}(p, M)$ die Eigenschaft $E1^{\mathcal{N}}$, S. 57.

¹⁴¹Siehe dazu 3.3.2, S. 59.

¹⁴²Vgl. dazu auch A.8, S. 200f.

¹⁴³Vgl. dazu wiederum die Herleitung von Gleichung (4.105), S. 103.

erfüllen, gelingt wie folgt:¹⁴⁴

$$\sum_{i=1}^L p_i a_{i1} [-\tau M^{1-\tau}] + p_i a_{i2} [M - M] + p_i a_{i3} [\tau M^{1+\tau}] = 0 \quad (4.137)$$

bzw.:

$$[\tau M^{1-\tau}] \sum_{i=1}^L p_i a_{i1} = [\tau M^{1+\tau}] \sum_{i=1}^L p_i a_{i3}. \quad (4.138)$$

Das Einsetzen der jeweiligen Koeffizienten a_{i1} und a_{i3}

$$[\tau M^{1-\tau}] \sum_{i=1}^L p_i \left(\frac{-\Lambda_i P^\tau + \Lambda^2 P^\tau H_i}{\tau} \right) = [\tau M^{1+\tau}] \sum_{i=1}^L p_i \left(\frac{H_i}{P^\tau \tau} \right) \quad (4.139)$$

und anschließende Vereinfachung führt zu:

$$[-M^{1-\tau} P^\tau] \sum_{i=1}^L p_i \Lambda_i - [M^{1-\tau} P^\tau] \Lambda^2 \sum_{i=1}^L p_i H_i = \left[\frac{M^{1+\tau}}{P^\tau} \right] \sum_{i=1}^L p_i H_i. \quad (4.140)$$

Die Modellierung erfüllt somit die lineare Budgetrestriktion, da für die über den Güterindex i laufenden Summen $\sum_{i=1}^L p_i \Lambda_i = \sum_{i=1}^L p_i H_i = 0$ gilt.¹⁴⁵

4.2.6 Rang 3 als Maximum: ein Beispiel

Ein theoretisch plausibles Nachfragesystem der Form (4.98) hat, wie eingangs erwähnt, maximal den Rang 3. Dies soll im Folgenden an einem Beispiel verdeutlicht werden. Es seien vier Einkommensfunktionen $G^1 = M^0 = 1$, $G^2 = M$, $G^3 = M^2$ und $G^4 = M^3$ angenommen. Das Nachfragesystem hat dann die Form:

$$x_i^M = a_{i1}(p) + a_{i2}(p)M + a_{i3}(p)M^2 + a_{i4}(p)M^3 \quad i = 1, \dots, L. \quad (4.141)$$

Es soll nun gezeigt werden, dass bei einem theoretisch plausiblen System die $L \times 4$ Koeffizientenmatrix $A(p)$ höchstens den Rang 3 besitzen kann. Unter Nutzung der *Slutsky*-Gleichung folgt aus (4.141) der *Hicks*sche Preiseffekt $\frac{\partial x_i^H}{\partial p_j}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_i^H}{\partial p_j} &= \frac{\partial a_{i1}}{\partial p_j} + a_{i2} a_{j1} + M \left(\frac{\partial a_{i2}}{\partial p_j} + a_{i2} a_{j2} + 2a_{i3} a_{j1} \right) \\ &+ M^2 \left(\frac{\partial a_{i3}}{\partial p_j} + a_{i2} a_{j3} + 2a_{i3} a_{j2} + 3a_{i4} a_{j1} \right) \\ &+ M^3 \left(\frac{\partial a_{i4}}{\partial p_j} + a_{i2} a_{j4} + 2a_{i3} a_{j3} + 3a_{i4} a_{j2} \right) \\ &+ M^4 (2a_{i3} a_{j4} + 3a_{i4} a_{j3}) + M^5 (3a_{i4} a_{j4}). \end{aligned} \quad (4.142)$$

¹⁴⁴Mit den Einkommensfunktionen $G^1(M) = M^{1-\tau}$, $G^2(M) = M$ und $G^3(M) = M^{1+\tau}$.

¹⁴⁵Die Funktionen $H(p)$ und $\Lambda(p)$ sind homogen vom Grade 0 in p . Siehe dazu A.15, S. 209.

Die *Slutsky*-Symmetrie $\left(\frac{\partial x_i^{\mathcal{H}}}{\partial p_j} = \frac{\partial x_j^{\mathcal{H}}}{\partial p_i}\right)$ verlangt die Symmetrie der jeweiligen Koeffizienten in (4.142). Für den Term hinter M^4 bedeutet das:

$$(2a_{i3}a_{j4} + 3a_{i4}a_{j3}) = (2a_{j3}a_{i4} + 3a_{j4}a_{i3}). \quad (4.143)$$

Aus (4.143) folgt nach kurzer Vereinfachung:

$$a_{i4}a_{j3} = a_{j4}a_{i3} \quad (4.144)$$

bzw.:

$$\frac{a_{i4}}{a_{i3}}a_{j3} = a_{j4}. \quad (4.145)$$

Die 4. Spalte der $A(p)$ Matrix des Systems (4.141) muss demnach proportional zur 3. Spalte sein, um die Anforderung der *Slutsky*-Symmetrie zu erfüllen.¹⁴⁶

¹⁴⁶Das aufgezeigte Beispiel entspricht inhaltlich dem Erklärungsansatz von *Pollak, Wales* (1992, S. 33f.).

Kapitel 5

Ausgewählte funktionale Formen

Wie bereits aus dem vorangegangenen Kapitel 4 geschlossen werden kann, existiert keine für alle Fragestellungen gleich optimale Modellstruktur und Modellspezifizierung. Die Wahl der adäquaten funktionalen Form ist vielmehr von vielfältigen Faktoren abhängig. *Robert A. Pollak* und *Terence J. Wales* meinen deshalb:

„... we do not believe that there is a single, “one-size-fits-all” functional form that is ideal for all applications. Instead, we believe that the characteristics that make a particular functional form suitable for one application may well make it inappropriate for another.“¹

Die Wahl der konkreten funktionalen Form des Nachfragesystems wird zu einem großen Teil durch die vorhandenen Daten bestimmt. Zeitreihendaten über den Güterkonsum besitzen im Normalfall eine große Variation der Güterpreise bei begrenzter Variation der Einkommen. Im Gegensatz dazu bieten Querschnittsdatensätze über das Konsumverhalten der Haushalte bei geringer oder aber überhaupt keiner Preisvariation meist eine große Einkommensvariation. Die im Folgenden beschriebenen Ansätze ermöglichen die empirische Schätzung eines Nachfragesystems bei vergleichsweise geringer Preisvariation. Sie sind somit insbesondere für Querschnittsdatensätze geeignet, obgleich beispielsweise das QES ursprünglich für Zeitreihendaten genutzt wurde.² Die grundlegende Überlegung, aus Querschnittsdaten ein komplettes Nachfragesystem zu schätzen, ist denkbar einfach. Unter der Annahme der Abwesenheit von regionalen Preisunterschieden werden bei den Haushalten die Einkommens-Güterkonsum-Verhältnisse erfasst. Es wird davon ausgegangen, dass sich die Haushalte nur in ihrem Einkommen, nicht aber in ihren Präferenzordnungen unterscheiden. Aus den verschiedenen Einkommenssituationen bei gegebenem Preisniveau dieses künstlichen Haushalts erfolgt dann die Schätzung der Parameter. In Kapitel 6 erfolgt eine Beschreibung

¹*Pollak, Wales* (1992, S. 23).

²Nach Kenntnis des Verfassers nutzten als erste *Howe, Pollak* und *Wales* (1979, S. 1231-1247) diese Spezifizierung.

der Möglichkeiten, demographische Unterschiede der Haushalte bei der Schätzung der Systeme zu berücksichtigen. Die Einschränkungen durch die Annahme der strengen Gleichheit der Präferenzordnungen können dadurch abgemildert werden. Nur demographisch ähnliche Haushalte haben dann identische Präferenzen.

Bei den hier näher beschriebenen Systemen handelt es sich jeweils um Spezialfälle der unter 4.2 genannten Rang-1-, Rang-2- und Rang-3-Nachfragesysteme.

5.1 Das proportionale Ausgabensystem PES

Das proportionale Expenditure- bzw. Ausgabensystem ist als Rang-1-System kein eigenständig genutztes Nachfragesystem der empirischen Praxis. Es dient vielmehr als Baustein für flexiblere Nachfragesysteme wie beispielsweise für das im Abschnitt 5.2 beschriebene LES. Dennoch soll hier kurz auf den Aufbau, die Eigenschaften und die mögliche Schätzung eines solchen Systems eingegangen werden. Diese Vorgehensweise dient zum einen der Komplettierung dieses Kapitels und ermöglicht zum anderen eine bessere Einordnung der in der Praxis genutzten Systeme. Des Weiteren wird hier anhand eines Beispiels aufgezeigt, dass nicht jede Spezifizierung mittels Querschnittsdaten geschätzt werden kann.

5.1.1 Aufbau eines PES

Unter 4.2.2 wurde durch Gleichung (4.110) bereits die Nachfrage eines derartigen Systems mit

$$x_i^{\mathcal{M}} = \frac{\partial P(p)}{\partial p_i} \cdot M \quad i = 1, \dots, L \quad (5.1)$$

beschrieben.³ Die theoretische Anforderung an die Funktion $P(p)$ ist nur ihre Linearhomogenität. Zwei Konkretisierungen dieser Funktion sollen hier betrachtet werden.

Wird die Funktion $P(p)$ mit

$$P(p) = p_1^{\alpha_1} \cdots p_i^{\alpha_i} \cdots p_L^{\alpha_L} = \prod_{i=1}^L p_i^{\alpha_i} \quad \text{mit} \quad \alpha_i > 0 \quad \text{und} \quad \sum_{i=1}^L \alpha_i = 1 \quad (5.2)$$

konkretisiert, folgen die Nachfragekurven:

$$x_i^{\mathcal{M}} = \frac{\alpha_i}{p_i} M \quad i = 1, \dots, L. \quad (5.3)$$

Durch Multiplikation mit p_i folgen daraus die Ausgaben M_i für Gut i :

$$M_i = p_i x_i^{\mathcal{M}} = \alpha_i M. \quad (5.4)$$

³Vgl. S. 103.

Ein Haushalt teilt sein Einkommen M somit proportional auf die einzelnen Güter auf. Diese Aufteilung $\frac{M_i}{M} = \alpha_i$ ist unabhängig vom Einkommensniveau.

Eine allgemeinere Möglichkeit $P(p)$ zu konkretisieren ist

$$P(p) = \left(\sum_{i=1}^L \alpha_i^{\frac{-1}{\rho-1}} p_i^{\frac{\rho}{\rho-1}} \right)^{\frac{\rho-1}{\rho}} \quad \text{mit} \quad -\infty < \rho < 1. \quad (5.5)$$

Der Parameter ρ unterliegt dieser Beschränkung, da sonst die Annahme über die Form der Nutzenfunktion A4 verletzt würde.⁴ Für die Parameterfestlegung $\rho = 0$ folgt aus (5.5) die spezielle Form (5.2).⁵ Diese allgemeinere Bestimmung von $P(p)$ führt zu den Nachfragefunktionen

$$x_i^M = \frac{\alpha_i^{\frac{-1}{\rho-1}} p_i^{\frac{\rho}{\rho-1}}}{\sum_{i=1}^L \alpha_i^{\frac{-1}{\rho-1}} p_i^{\frac{\rho}{\rho-1}}} M \quad \text{mit} \quad -\infty < \rho < 1. \quad (5.6)$$

Durch Multiplikation mit p_i folgen daraus wiederum die Ausgaben M_i für Gut i :

$$M_i = p_i x_i^M = \frac{\alpha_i^{\frac{-1}{\rho-1}} p_i^{\frac{\rho}{\rho-1}}}{\sum_{i=1}^L \alpha_i^{\frac{-1}{\rho-1}} p_i^{\frac{\rho}{\rho-1}}} M. \quad (5.7)$$

Auch in diesem allgemeineren Fall teilt ein Haushalt sein Einkommen M proportional auf die einzelnen Güter auf. Diese Aufteilung ist wiederum unabhängig vom Einkommensniveau. Allerdings variiert der Ausgabenanteil des Gutes i hier mit unterschiedlichen Preisvektoren. Es gilt:

$$\frac{M_i}{M} = \frac{\alpha_i^{\frac{-1}{\rho-1}} p_i^{\frac{\rho}{\rho-1}}}{\sum_{i=1}^L \alpha_i^{\frac{-1}{\rho-1}} p_i^{\frac{\rho}{\rho-1}}}. \quad (5.8)$$

5.1.2 Eigenschaften eines PES

Die ein PES generierende direkte Nutzenfunktion

$$\mathcal{K} \left(\left[\sum_{i=1}^L \alpha_i x_i^\rho \right]^{\frac{1}{\rho}} \right) \quad (5.9)$$

ist in der einschlägigen Literatur unter dem Namen CES-Nutzenfunktion bekannt. CES steht für *Constant Elasticity of Substitution*. Die monoton steigende Transformation $\mathcal{K}(\cdot)$ wird dabei allgemein vernachlässigt. Dieser Funktionstyp wurde

⁴Siehe dazu A4, S. 49.

⁵Siehe dazu A.23, S. 228ff., und die folgenden Ausführungen zur CES unter 5.1.2.

1961 von *Arrow, Chenery, Minhas* und *Solow* ursprünglich als Produktionsfunktion entwickelt und mit dem Namen CES versehen.⁶ Eine Nutzenfunktionsvariante dieses Typs wurde bereits 1936 von *Bergson* verwendet. *Bergson* nutzt die monotone Transformation $\left[\left(\sum_{i=1}^L \alpha_i x_i^\rho \right)^{\frac{1}{\rho}} \right]^\rho = \sum_{i=1}^L \alpha_i x_i^\rho$ von (5.9) mit der Parameter einschränkung ($0 < \rho < 1$).⁷ Nutzenfunktionen des Typs (5.9) werden daher auch oft als *Bergson*-Nutzenfunktionen bezeichnet.⁸

Ein Spezialfall der CES-Nutzenfunktion ist die *Cobb-Douglas*-Nutzenfunktion. Diese folgt für $\rho = 0$ und als Ergebnis dieser Parameterfestlegung werden die in Abschnitt 5.1.1 zu Beginn beschriebenen Nachfragekurven $x_i^M = \frac{\alpha_i}{p_i} M$ generiert, wenn zusätzlich die Bedingung $\sum_{i=1}^L \alpha_i = 1$ erfüllt ist. Dieser aus der Festlegung $\rho = 0$ folgende Spezialfall ist aus der allgemeinen CES-Funktion (5.9) nicht sofort ersichtlich. Der Nachweis dieses Zusammenhangs findet sich unter A.24 auf S. 230.⁹ Ergänzend dazu wird an dieser Stelle kurz die Wirkung verschiedener ρ aufgezeigt und die bereits in Gleichung (5.6) beschriebene Einschränkung $-\infty < \rho < 1$ begründet.

Die *Elasticity of Substitution* beschreibt die Form bzw. die Krümmung der Indifferenzkurven der Nutzenfunktion und entspricht bei der CES-Funktion:¹⁰

$$\sigma = \frac{d \ln \left(\frac{x_j}{x_i} \right)}{d \ln \left(\frac{U_i}{U_j} \right)} = \frac{1}{1 - \rho}. \quad (5.10)$$

Die Auswirkungen verschiedener ρ auf die Krümmung werden in Abbildung 5.1 skizziert. Die in Kapitel 3 getroffene Annahme A4 verlangt die strenge Quasikonkavität der Nutzenfunktion.¹¹ Diese Annahme wird sowohl bei $\rho \geq 1$ als auch bei $\rho = -\infty$ verletzt, da in diesen Fällen die Bessermenge nicht streng konvex ist.

Bei den CES-Nutzenfunktionen handelt es sich um additiv separable Funktionen, die lineare, durch den Koordinatenursprung verlaufende Engelkurven generieren. Eine Modellierung inferiorer Güter ist somit im PES nicht möglich. Die indirekte Nutzenfunktion eines PES entspricht gemäß (4.109)

$$\mathcal{N}(p, M) = \mathcal{K} \left(\frac{M}{\left(\sum_{i=1}^L \alpha_i^{\frac{-1}{\rho-1}} p_i^{\frac{\rho}{\rho-1}} \right)^{\frac{\rho-1}{\rho}}} \right) \quad \text{mit} \quad -\infty < \rho < 1. \quad (5.11)$$

⁶Vgl. *Arrow, Chenery, Minhas* und *Solow* (1961, S. 226).

⁷Vgl. *Bergson, A.* (1936, S. 45).

⁸Vgl. beispielsweise *Pollak, R.A.* (1971, S. 402).

⁹*Arrow, Chenery, Minhas* und *Solow* nennen drei verschiedene Methoden, den Zusammenhang allgemein nachzuweisen. Sie verweisen dabei auch auf die unter A.24 gewählte direkte Anwendung der *L'Hôpital* Regel. Vgl. *Arrow, Chenery, Minhas* und *Solow* (1961, S. 231).

¹⁰Siehe dazu beispielsweise *Hoy, M.* u.a. (1996, S. 450).

¹¹Siehe A4, S. 49.

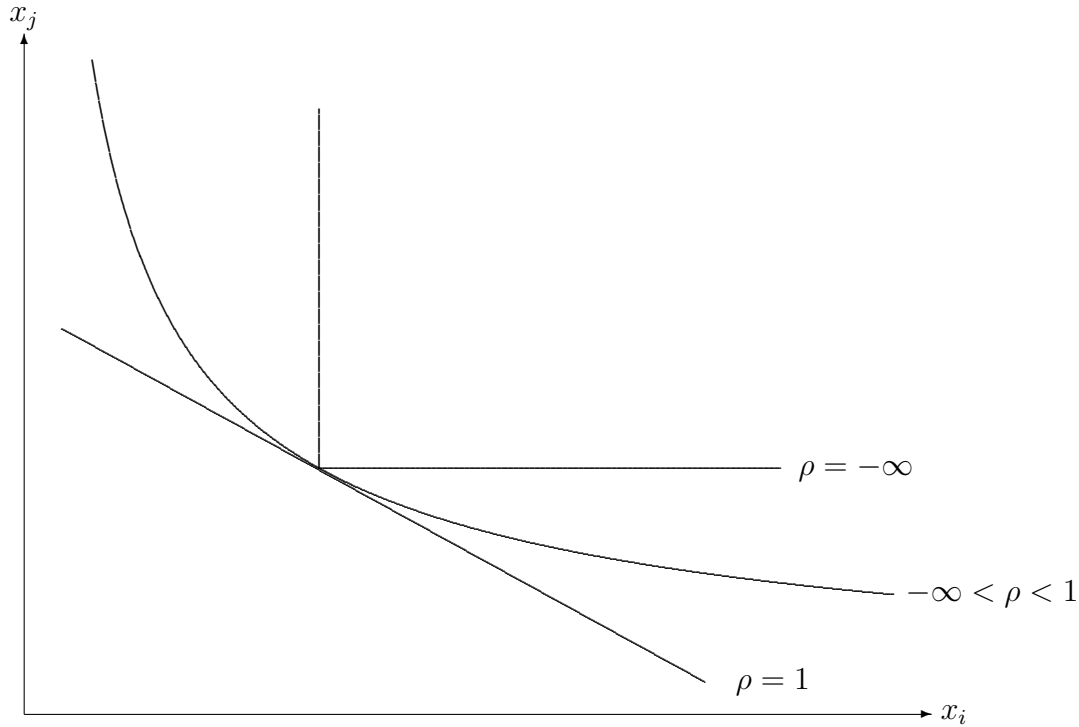


Abbildung 5.1: Ausgewählte Indifferenzkurven von CES-Nutzenfunktionen (Quelle: Eigene Darstellung).

Die monoton steigenden Transformationen $\mathcal{K}(\cdot) = (\cdot)^\rho$ für $0 < \rho < 1$, $\mathcal{K}(\cdot) = -(\cdot)^\rho$ für $-\infty < \rho < 0$ und $\mathcal{K}(\cdot) = \ln(\cdot)$ für $\rho = 0$ wandeln sowohl die direkte als auch die indirekte Nutzenfunktion so um, dass die Lagrangemultiplikatoren mit den Lagrangemultiplikatoren unter 4.1.4 und 4.1.6 vergleichbar sind.¹² Ein mit diesen Funktionen umgewandeltes System besitzt den negativen Lagrangemultiplikatorquotienten

$$-\frac{\lambda}{\frac{\partial \lambda}{\partial M}} = (1 - \rho)M \quad (5.12)$$

mit dem, äquivalent zur Gleichung (4.89), die kompensierten Kreuzpreiseffekte dieses Systems bestimmt werden können.¹³ Der *Hicks*sche Substitutionseffekt entspricht:¹⁴

$$\frac{\partial x_i^{\mathcal{H}}}{\partial p_j} = (1 - \rho)M \frac{\partial x_i^{\mathcal{M}}}{\partial M} \frac{\partial x_j^{\mathcal{M}}}{\partial M} > 0 \quad (i \neq j) \quad \text{mit} \quad -\infty < \rho < 1. \quad (5.13)$$

¹²Siehe 4.1.4, S. 80ff., und 4.1.6, 96ff.

¹³Die Gleichung (4.89) findet sich auf S. 97.

¹⁴Mit $\frac{\partial x_i^{\mathcal{M}}}{\partial M} = \frac{\alpha_i^{\frac{-1}{\rho-1}} p_i^{\frac{1}{\rho-1}}}{\sum_{i=1}^L \alpha_i^{\frac{-1}{\rho-1}} p_i^{\frac{1}{\rho-1}}}$ aus Gleichung (5.6).

Die Abhängigkeit dieses Effekts vom Parameter ρ kann auch in der Abbildung 5.1 nachvollzogen werden. Beispielsweise strebt für den Grenzfall $\rho \rightarrow -\infty$ der kompensierte Kreuzpreiseffekt gegen unendlich. Unabhängig von der konkreten Parameterausprägung des ρ ist der kompensierte Kreuzpreiseffekt immer positiv, da inferiore Güter ausgeschlossen sind. Somit ist mit einem PES auch keine Modellierung von komplementären Gütern im *Hicksschen* Sinne möglich. Der *Hickssche* Eigenpreiseffekt $\frac{\partial x_i^H}{\partial p_i}$ entspricht gemäß (4.91)¹⁵ in Verbindung mit (5.12)

$$\frac{\partial x_i^H}{\partial p_i} = x_i \frac{(\rho - 1)}{p_i} \left(1 - \frac{\alpha_i^{\frac{-1}{\rho-1}} p_i^{\frac{\rho}{\rho-1}}}{\sum_{i=1}^L \alpha_i^{\frac{-1}{\rho-1}} p_i^{\frac{\rho}{\rho-1}}} \right) < 0 \quad \text{mit} \quad -\infty < \rho < 1. \quad (5.14)$$

Ein PES erfüllt somit immer die Forderung $\frac{\partial x_i^H}{\partial p_i} < 0$ theoretisch konsistenter Systeme, wenn die ρ -Bedingung erfüllt wird.

Die *Marshallschen* Kreuzpreiseffekte $\frac{\partial x_i^M}{\partial p_j}$ ($i \neq j$) können aus der Ableitung von (5.6) nach p_j bestimmt werden:

$$\frac{\partial x_i^M}{\partial p_j} = - \frac{M \left(\frac{\rho}{\rho-1} \right) \left(\frac{p_i p_j}{\alpha_i \alpha_j} \right)^{\frac{1}{\rho-1}}}{\left(\sum_{i=1}^L \alpha_i^{\frac{-1}{\rho-1}} p_i^{\frac{\rho}{\rho-1}} \right)^2} \begin{cases} > 0 & : & 0 < \rho < 1 \\ = 0 & : & \rho = 0 \\ < 0 & : & \rho < 0 \end{cases}. \quad (5.15)$$

Der Effekt ist, wie aus (5.13) wegen des *Slutsky*-Zusammenhangs zu erwarten war, in seinem Vorzeichen vom Parameter ρ abhängig. Für den *Cobb-Douglas*-Fall, der aus $\rho = 0$ folgt, kompensiert der Einkommenseffekt exakt den *Hicksschen* Substitutionseffekt.

Der *Marshallsche* Eigenpreiseffekt $\frac{\partial x_i^M}{\partial p_i}$ ist erwartungsgemäß in seinem Vorzeichen eindeutig und folgt wiederum aus der Ableitung von (5.6) oder alternativ aus der *Slutsky*-Gleichung mit $-\infty < \rho < 1$:

$$\frac{\partial x_i^M}{\partial p_i} = x_i \left[\frac{(\rho - 1)}{p_i} \left(1 - \frac{\alpha_i^{\frac{-1}{\rho-1}} p_i^{\frac{\rho}{\rho-1}}}{\sum_{i=1}^L \alpha_i^{\frac{-1}{\rho-1}} p_i^{\frac{\rho}{\rho-1}}} \right) - \frac{\alpha_i^{\frac{-1}{\rho-1}} p_i^{\frac{1}{\rho-1}}}{\sum_{i=1}^L \alpha_i^{\frac{-1}{\rho-1}} p_i^{\frac{\rho}{\rho-1}}} \right] < 0. \quad (5.16)$$

5.1.3 Schätzung eines PES

Wie eingangs unter 5.1 erwähnt findet das PES in seiner Reinform in der empirischen Praxis keine Anwendung. Dennoch soll an dieser Stelle die Frage der Identifizierung der PES-Parameter im Mittelpunkt stehen. Die Beschreibung und Lösung der Identifikationsproblematik bietet einen anschaulichen Überblick über die Datensatzanforderungen. Es wird gezeigt, dass unterschiedliche Modellierungen unterschiedliche Datensätze benötigen, um geschätzt werden zu können.

¹⁵Die Gleichung (4.91) findet sich auf S. 98.

Ein PES besitzt in seiner allgemeinen Darstellung $L + 1$ Parameter. Neben dem ρ sind dies die L Größen α_i , welche die gesuchten, im vorangegangenen Abschnitt 5.1.2 beschriebenen Anpassungsreaktionen eines rational handelnden Haushalts exakt determinieren. Durch die aus der Budgetrestriktion folgende Bedingung $\sum_{i=1}^L \alpha_i = 1$ reduziert sich die Anzahl der freien Parameter auf L . Ein Querschnittsdatensatz über das Nachfrageverhalten von H Haushalten ermöglicht bei oberflächlicher Betrachtung die vollständige Schätzung der L Parameter eines linearen Mehrgleichungsmodells der Form¹⁶

$$M_{ih} = p_i x_{ih}^{\mathcal{M}} = \Theta_{2i} M_h + u_{ih} \quad i = 1, \dots, L \text{ und } h = 1, \dots, H \quad (5.17)$$

mit den additiven Störtermen u_{ih} . Unter 5.2.3 wird ausführlich nachgewiesen, warum eine derartige Schätzung nicht möglich ist. Es können nur $(L - 1)$ Parameter bestimmt werden. Für das PES bedeutet das zwangsläufig, dass nur der *Cobb-Douglas*-Sonderfall, mit der Festlegung des ρ auf Null, identifiziert werden kann. Aus den $(L - 1)$ Θ_{2i} könnten $(L - 1)$ α_i bestimmt werden. Der verbleibende Parameter α_L würde dann durch $\alpha_L = 1 - \sum_{i=1}^{L-1} \alpha_i$ bestimmt. Diese grundlegende Vereinfachung bzw. funktionale Einschränkung findet sich auch in dem im nächsten Abschnitt 5.2 beschriebenen LES wieder. Für alle anderen Versionen ($\rho \neq 0$) der aus CES-Nutzenfunktionen folgenden Nachfragesysteme sind Datensätze mit einer deutlich höheren Preisvariation notwendig. Eine berühmte Nutzung des CES-Ansatzes mit $\rho \neq 0$ in der empirischen Nachfrageanalyse ist der von *Brown* und *Heien* als Verallgemeinerung des LES entwickelte, so genannte *S-Branch Utility Tree*.¹⁷ Derartige Systeme können nur mit Zeitreihendaten identifiziert werden. Ein Vergleich der unterschiedlichen Abhängigkeit der Nachfragefunktionen in den Gleichungen (5.3) und (5.6) von den Preisen verdeutlicht dies nochmals für den einfachen, direkten Anwendungsfall.¹⁸

5.2 Das lineare Ausgabensystem LES

Das lineare Expenditure- bzw. Ausgabensystem ist als Spezialfall der PIGL-Klasse ein Rang-2-System. Zunächst werden der Aufbau und die Eigenschaften einer derartigen Spezifizierung beschrieben, um im Anschluss die Methoden der Schätzung der Parameter eines solchen Systems zu analysieren.

¹⁶Vgl. hierzu die folgenden Ausführungen zu Gleichung (5.35), S. 125.

¹⁷Vgl. *Brown* und *Heien* (1972, S. 737-747).

¹⁸Die Gleichungen finden sich auf S. 114 bzw. 115.

5.2.1 Aufbau eines LES

Aus der allgemeinen Nachfrage der PIGL-Klasse¹⁹ folgt für $k = 0$ die Nachfrage

$$x_i^{\mathcal{M}} = \frac{\frac{\partial P(p)}{\partial p_i}}{P(p)} \cdot M - P(p) \frac{\partial \Lambda(p)}{\partial p_i} \quad i = 1, \dots, L \quad (5.18)$$

mit der indirekten Nutzenfunktion (*Gorman Polar Form*):²⁰

$$\mathcal{N}(p, M) = \mathcal{K} \left(\frac{M}{P(p)} + \Lambda(p) \right) = \mathcal{K} \left(\frac{M}{P(p)} - \frac{f(p)}{P(p)} \right). \quad (5.19)$$

Im LES werden die linearhomogenen Funktionen $P(p)$ und $f(p)$ durch

$$P(p) = p_1^{\alpha_1} \cdots p_i^{\alpha_i} \cdots p_L^{\alpha_L} = \prod_{i=1}^L p_i^{\alpha_i} \quad \text{mit} \quad \alpha_i > 0 \quad \text{und} \quad \sum_{i=1}^L \alpha_i = 1 \quad (5.20)$$

bzw.

$$f(p) = p_1 \beta_1 + \cdots + p_i \beta_i + \cdots + p_L \beta_L = \sum_{i=1}^L p_i \beta_i \quad (5.21)$$

konkretisiert. Für $\frac{\partial \Lambda(p)}{\partial p_i}$ folgt gemäß Quotientenregel ($\Lambda(p) = -\frac{f(p)}{P(p)}$):

$$\frac{\partial \Lambda(p)}{\partial p_i} = -\frac{f_i P - f P_i}{P^2} = -\frac{f_i}{P} + \frac{f P_i}{P P} = -\frac{\beta_i}{P} + \frac{\sum_{i=1}^L p_i \beta_i}{P} \frac{\alpha_i}{p_i}. \quad (5.22)$$

Die Nachfragefunktion des Gutes i im LES entspricht somit:

$$x_i^{\mathcal{M}} = \frac{\alpha_i}{p_i} M + \beta_i - \frac{\alpha_i}{p_i} \sum_{i=1}^L p_i \beta_i = \frac{\alpha_i}{p_i} \left(M - \sum_{i=1}^L p_i \beta_i \right) + \beta_i. \quad (5.23)$$

Durch Multiplikation mit p_i folgen daraus die Ausgaben M_i für Gut i :

$$M_i = p_i x_i^{\mathcal{M}} = \alpha_i \left(M - \sum_{i=1}^L p_i \beta_i \right) + p_i \beta_i. \quad (5.24)$$

Der Parameter β_i repräsentiert im LES eine Art Mindestkonsummenge des Gutes i , die unabhängig vom Einkommen nachgefragt wird. Über diesen Mindestkonsum hinausgehende Nachfrage kann der Haushalt nur mittels des so genannten Überschusseinkommens bedienen. Das Überschusseinkommen ist das Einkommen, welches nach Bezahlung aller Mindestkonsummengen übrig bleibt $\left(M - \sum_{i=1}^L p_i \beta_i \right)$. In einem LES sind die für Gut i verwendeten Ausgabenanteile α_i an diesem Überschusseinkommen konstant, also unabhängig von der Einkommenshöhe. Ein Haushalt teilt folglich sein Einkommen nach Deckung der Mindestkonsummengen proportional auf die einzelnen Güter auf.

¹⁹Siehe Gleichung (4.112), S. 104.

²⁰Vgl. dazu A.17, S. 210ff.

5.2.2 Eigenschaften eines LES

Die beschriebene, einem LES zugrundeliegende Haushaltsstrategie wird auch bei einem Blick auf die die Nachfrage (5.23)²¹ generierende direkte Nutzenfunktion deutlich:²²

$$U(x) = \mathcal{K} \left(\prod_{i=1}^L (x_i - \beta_i)^{\alpha_i} \right). \quad (5.25)$$

Die enge Beziehung zu einer herkömmlichen *Cobb-Douglas*-Nutzenfunktion ist unverkennbar. Durch die Verschiebung des Koordinatenursprungs um die Mindestkonsummengen wird der den *Cobb-Douglas*-Nutzenfunktionen inhärente Nachteil einer empirisch unhaltbaren Einkommenselastizität von 1 behoben. Die Nutzenfunktion ist stattdessen homothetisch bezüglich des so genannten *bliss point* $(\beta_1, \dots, \beta_i, \dots, \beta_L)$.²³ Dieser *Punkt des Glücks* unterliegt als Vektor zunächst keiner theoretischen Nicht-Negativitätsrestriktion. Erfolgt jedoch die Interpretation dieser LES-Parameter als Mindestkonsummenge, so muss die Annahme $\beta_i \geq 0$ getroffen werden.²⁴ In der untenstehenden Abbildung 5.2 sind die Indifferenzkurven und die Mindestmengen eines solchen Systems dargestellt.

Die aus einem derartigen System folgenden Engelkurven haben den jeweils konstanten und positiven Anstieg $\frac{\alpha_i}{p_i}$. Die für die theoretische Konsistenz eines LES notwendige Eigenschaft $\alpha_i > 0$ macht eine Modellierung von inferioren Gütern in diesem Modellrahmen unmöglich.²⁵ In Abbildung 5.3 sind beispielhaft

²¹Die Gleichung (5.23) findet sich auf S. 120.

²²Eine Nutzenfunktion der Form (5.25) wird in der einschlägigen Literatur oftmals als *Stone-Geary*-Nutzenfunktion bezeichnet. Einige Autoren verwenden hingegen den Begriff *Klein-Rubin*-Nutzenfunktion. *Klein, L.R.* und *Rubin, H.* waren nach Kenntnis des Verfassers die Ersten, die Nachfragen der Form (5.24) beschrieben. Sie versäumten jedoch die Nennung der zugehörigen Nutzenfunktion. Vgl. dazu *Klein, Rubin* (1947, S. 86). Im Jahre 1950 reagierte *Geary, R.C.* auf den *Klein-Rubin*-Artikel mit einer Veröffentlichung, in der er erstmals die Nutzenfunktion (5.25) beschreibt. Vgl. dazu *Geary, R.C.* (1950, S. 65). In beiden Artikeln werden die Mindestmengen wie folgt $(\beta_i = -\gamma_i)$, also beispielsweise mit $U(x) = \mathcal{K} \left(\prod_{i=1}^L (x_i + \gamma_i)^{\alpha_i} \right)$ dargestellt, was darauf hindeutet, dass sowohl *Klein* und *Rubin* als auch *Geary* diese Parameter nicht als Mindestmengen interpretierten. Der Erste, der den Begriff Linear Expenditure System in Verbindung mit (5.24) und (5.25) nannte und diese Spezifizierung empirisch anwendete, war im Jahre 1954 *Richard Stone*. Er war es auch, der die Interpretation der β_i als Mindestkonsummengen (basic consumption) und die des Überschusseinkommens (supernumerary income) einführte. Vgl. dazu *Stone, R.* (1954, S. 511ff.).

²³Siehe dazu die Abbildung 5.2, S. 122, und die Ausführungen zu Abbildung A.9, S. 209.

²⁴Vgl. dazu *Pollak, Wales* (1978, S. 350). Sie betrachten die Vorzeichen der β_i als empirische Fragestellung. Zur theoretischen Konsistenz der Nutzenfunktion genügt $(x_i - \beta_i) > 0$ bzw. $x_i > \beta_i$. Andernfalls wäre $\frac{\partial x_i^H}{\partial p_i}$ positiv, was gegen eine Eigenschaft der *Slutsky*-Matrix verstößt. Vgl. dazu die Eigenschaft E1^S, S. 61, die Ausführungen zu $\frac{\partial x_i^H}{\partial p_i}$, S. 64, und die Gleichung (5.31), S. 124.

²⁵Siehe dazu Gleichung (5.20), S. 120, Gleichung (5.26), S. 122, und Abbildung 5.3, S. 123. Ein negativer Parameter α_i widerspräche der Annahme A4, S. 49. Eine steigende Gütermenge des Gutes x_i würde zu sinkendem Nutzen führen.

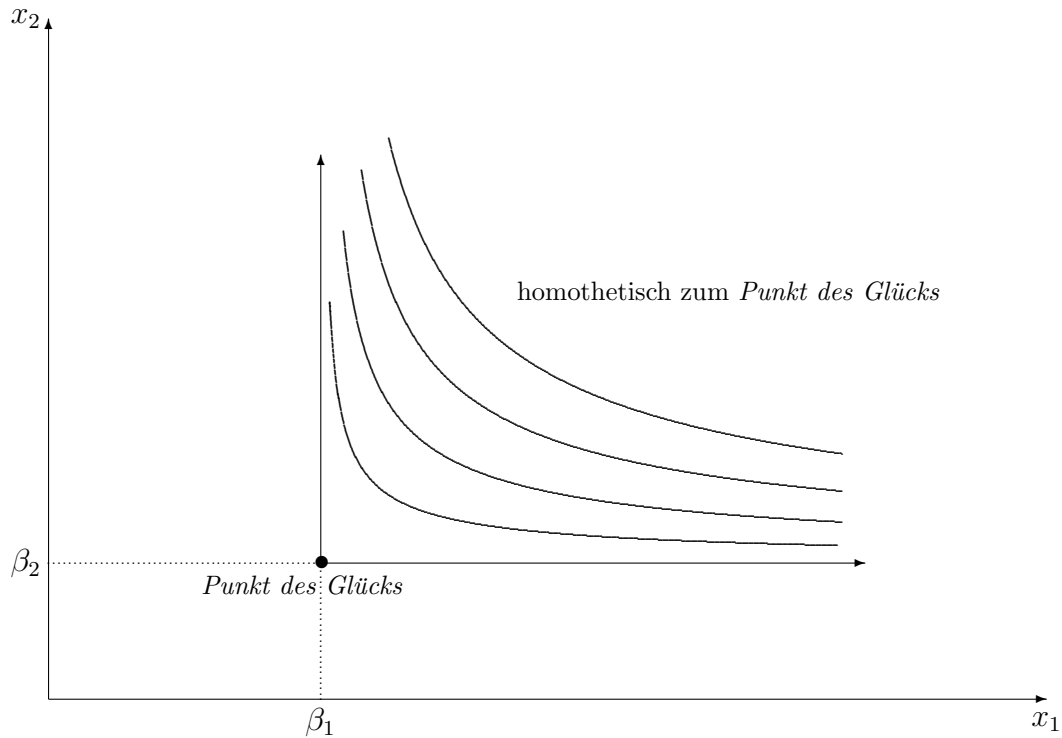


Abbildung 5.2: Indifferenzkurven eines LES (Quelle: Eigene Darstellung).

vier Engelkurven eines LES skizziert. Der in der Abbildung schattierte Bereich verdeutlicht, dass es sich bei der Modellierung mit einem LES um einen lokalen Ansatz handelt.²⁶ Im schattierten Bereich existieren unsinnige Güternachfragen, wie beispielsweise eine positive Nachfrage bei Nulleinkommen oder einer negative Güternachfrage bei einem Einkommen, das nicht zur Deckung der Mindestnachfrage ausreicht.

Die Eigenschaft der Additivität derartiger Nutzenfunktionen wird durch die beschriebene Verschiebung des Koordinatenursprungs nicht berührt. Additive Präferenzordnungen wurden bereits unter 4.1.4 und 4.1.6 ausführlich beschrieben.²⁷ Dort wurde aus Gründen der Vereinfachung die Nutzenfunktion (5.25) durch die monoton steigende Transformation $\mathcal{K}(\cdot) = \ln(\cdot)$ in die dieselben Nachfragefunktionen generierende Nutzenfunktion

$$U(x) = \sum_{i=1}^L \alpha_i \ln(x_i - \beta_i) \quad (5.26)$$

²⁶Siehe dazu auch Abbildung 4.4, S. 88 mit der entsprechenden Erläuterung.

²⁷Siehe S. 80ff. und S. 96ff.

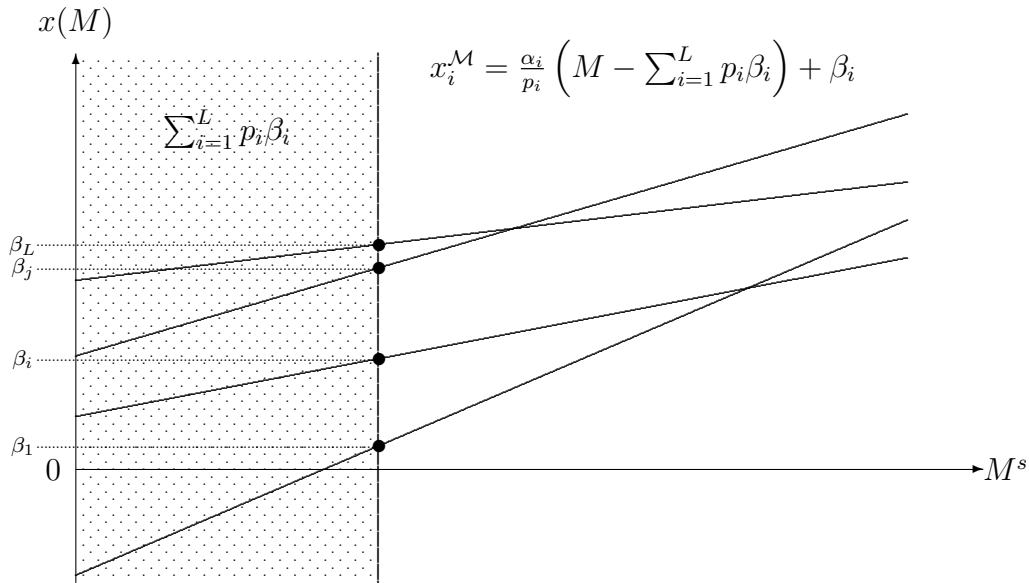


Abbildung 5.3: Lineare Engelkurven eines LES (Quelle: Eigene Darstellung).

umgewandelt. Für die indirekte Nutzenfunktion gilt dann:

$$\mathcal{N}(p, M) = \ln \left(\frac{M}{\prod_{i=1}^L p_i^{\alpha_i}} - \frac{\sum_{i=1}^L p_i \beta_i}{\prod_{i=1}^L p_i^{\alpha_i}} \right). \tag{5.27}$$

Diese Umformungen erleichtern das Verständnis, da die aus der Optimierung von (5.26) bzw. aus der Ableitung von (5.27) nach dem Einkommen folgenden Lagrangemultiplikatoren mit den Lagrangemultiplikatoren unter 4.1.4 und 4.1.6 vergleichbar sind.²⁸ Ein mit diesen Funktionen bestimmtes System besitzt den Lagrangemultiplikator

$$\lambda = \left(M - \sum_{i=1}^L p_i \beta_i \right)^{-1}. \tag{5.28}$$

Der positive²⁹ *Hicksschen* Substitutionseffekt entspricht somit, äquivalent zur Gleichung (4.89)³⁰, im modellierten Bereich³¹

$$\frac{\partial x_i^{\mathcal{H}}}{\partial p_j} = \left(M - \sum_{i=1}^L p_i \beta_i \right) \frac{\partial x_i^{\mathcal{M}}}{\partial M} \frac{\partial x_j^{\mathcal{M}}}{\partial M} > 0 \quad (i \neq j). \tag{5.29}$$

²⁸Siehe S. 80ff. und 96ff.

²⁹Inferiore Güter sind wegen $\alpha_i > 0$ nicht möglich.

³⁰Siehe S. 97.

³¹Der modellierte, theoretisch konsistente Bereich ist für $M > \sum_{i=1}^L p_i \beta_i$ definiert.

Bei Nachfragesystemen mit einer LES-Spezifizierung ist folglich der empirische Nachweis einer *Hicksschen* Substitutionsbeziehung zwischen zwei Gütern völlig wertlos, da hier das positive Vorzeichen von $\frac{\partial x_i^{\mathcal{H}}}{\partial p_j}$ bereits durch die Modellierung determiniert ist. Werden die konstanten Anstiege der Engelkurven $\frac{\partial x_i^{\mathcal{M}}}{\partial M}$ und $\frac{\partial x_j^{\mathcal{M}}}{\partial M}$ mit den entsprechenden LES-Parameter $\frac{\alpha_i}{p_i}$ und $\frac{\alpha_j}{p_j}$ beschrieben, folgt wegen $\frac{\alpha_j}{p_j} \left(M - \sum_{i=1}^L p_i \beta_i \right) = (x_j - \beta_j)$:

$$\frac{\partial x_i^{\mathcal{H}}}{\partial p_j} = \frac{\alpha_i}{p_i} (x_j - \beta_j) > 0 \quad (i \neq j). \quad (5.30)$$

Die direkten *Hicksschen* Preiseffekte $\frac{\partial x_i^{\mathcal{H}}}{\partial p_i}$ sind bei theoretisch konsistenten Systemen zwangsläufig negativ.³² Für ein theoretisch konsistentes LES gilt daher:³³

$$\frac{\partial x_i^{\mathcal{H}}}{\partial p_i} = \frac{\alpha_i - 1}{p_i} (x_i - \beta_i) < 0. \quad (5.31)$$

Die Gleichung (5.31) verdeutlicht die zur theoretischen Konsistenz notwendige Bedingung $(x_i - \beta_i) > 0$, da $\alpha_i < 1$ gilt.

Für die *Marshallischen* Kreuzpreiseffekte $\frac{\partial x_i^{\mathcal{M}}}{\partial p_j}$ ($i \neq j$) gilt bei Geltung der Annahme der Nicht-Negativität für die Mindestmengen im LES.³⁴

$$\frac{\partial x_i^{\mathcal{M}}}{\partial p_j} = -\frac{\alpha_i}{p_i} \beta_j < 0 \quad (i \neq j). \quad (5.32)$$

Die direkten *Marshallischen* Preiseffekte folgen aus der umgeformten Gleichung (4.91) oder direkt aus der Ableitung von Gleichung (5.23) nach p_i :³⁵

$$\frac{\partial x_i^{\mathcal{M}}}{\partial p_i} = -\frac{\alpha_i}{p_i} \left(\frac{M - \sum_{i=1}^L p_i \beta_i}{p_i} + \beta_i \right) < 0. \quad (5.33)$$

Die ein Nachfragesystem umfassend beschreibenden L^2 Preiselastizitäten $\frac{\partial x_i^{\mathcal{M}}}{\partial p_j}$ und L Einkommenselastizitäten $\frac{\partial x_i^{\mathcal{M}}}{\partial M}$ sind in einem LES Funktionen von $2L - 1$

³²Siehe dazu unter Kapitel 3 die Eigenschaft $E1^S$ auf S. 61 und die Ausführungen zu $\frac{\partial x_i^{\mathcal{H}}}{\partial p_i}$ auf S. 64.

³³Die Beziehung folgt aus der Anwendung der *Slutsky*-Gleichung auf (5.23), S. 120, oder alternativ aus (4.91), S. 98.

³⁴Der *Marshallische* Preiseffekt folgt direkt aus der Ableitung von Gleichung (5.23) nach p_j . Alternativ kann natürlich auch die *Slutsky*-Gleichung mit der Gleichung (5.29) bzw. Gleichung (5.30) angewandt werden.

³⁵Vgl. dazu (4.91), S. 98, und (5.23), S. 120.

unabhängigen Parametern, die es zu schätzen gilt.³⁶ Diese starke Reduktion der zu schätzenden Parameter ist ein klarer Vorteil des LES. Eine LES-Modellierung schränkt jedoch gleichzeitig die möglichen Ausprägungen der Preis- und Einkommenselastizitäten ein. Die Additivität der Präferenzordnung und die Linearität der Engelkurven sind somit sowohl Segen als auch Fluch eines linearen Ausgabensystems. Die Kreuzpreiseffekte streben bei einem System mit vielen Gütern gegen Null, was Gleichung (4.94) belegt.³⁷ Eine Modellierung von inferioren Gütern ist ausgeschlossen und die Bestimmung der direkten Preiseffekte als Funktionen der LES Parameter ist mit besonderer Vorsicht zu betrachten. Wie Gleichung (4.97)³⁸ zeigt, beruht die Bestimmung von $\frac{\partial x_i^M}{\partial p_i}$ auf einer durch die Annahmen implizierten, ungefähren Proportionalität zu den L Einkommenselastizitäten. Dies erlaubt, wie noch unter 5.2.3 gezeigt wird, die Schätzung bei geringer Preisvariation. Bei der Beurteilung der Aussagekraft der Ergebnisse muss dieser Zusammenhang immer Berücksichtigung finden. Es kann im strengen Sinne nicht von einer Messung der Preiselastizitäten gesprochen werden.

5.2.3 Schätzung eines LES

Die zu schätzenden Parameter eines LES sind bei gegebenen Preisen p_i die jeweiligen Mindestausgaben für die L Güter ($p_i\beta_i$) und die marginalen Budgetanteile α_i . Zur Veranschaulichung sei hier nochmals die Gleichung (5.24)³⁹ wiederholt:

$$M_i = p_i x_i^M = \alpha_i \left(M - \sum_{i=1}^L p_i \beta_i \right) + p_i \beta_i. \quad (5.34)$$

Ein Querschnittsdatensatz über das Nachfrageverhalten von H Haushalten ermöglicht bei oberflächlicher Betrachtung die vollständige Schätzung der $2L$ Parameter eines linearen Mehrgleichungsmodells der Form⁴⁰

$$M_{ih} = p_i x_{ih}^M = \Theta_{1i} + \Theta_{2i} M_h + u_{ih} \quad i = 1, \dots, L \text{ und } h = 1, \dots, H \quad (5.35)$$

mit den additiven Störtermen u_{ih} .⁴¹ Mit einer eindeutigen Identifizierung dieser Parameter könnten die LES Parameter

$$\alpha_i = \Theta_{2i} \quad (5.36)$$

³⁶Neben L unabhängigen β_i besitzt ein LES nur $L-1$ unabhängige α_i , da $\sum_{i=1}^L \alpha_i = 1$ gelten muss.

³⁷Die Gleichung (4.94) findet sich auf S. 98. Der Budgetanteil $\frac{p_i x_i}{M}$ strebt dort mit steigender Güteranzahl gegen Null.

³⁸Siehe S. 99.

³⁹Siehe S. 120.

⁴⁰Die einzelnen Gleichungen stehen über die jeweiligen Haushalte in Verbindung. Eine Einzelschätzung würde zu einem Informationsverlust führen und die hier genutzten Ergebnisse der Nachfragetheorie könnten nicht implementiert werden. Das Mehrgleichungsmodell (5.35) ist ein Spezialfall eines *Seemingly Unrelated Regressions* Modells (SUR).

⁴¹Die Unabhängigkeit der Θ von den Haushaltsindizes h verdeutlicht die eingangs des Kapitels 5 erwähnte, grundlegende Annahme der identischen Präferenzordnungen der Haushalte.

und

$$p_i \beta_i - \alpha_i \sum_{i=1}^L p_i \beta_i = \Theta_{1i} \quad (5.37)$$

ermittelt werden. Den L -fachen Θ_{1i} und L -fachen Θ_{2i} stünden nur $2L - 1$ unabhängige LES-Parameter gegenüber. Eine eindeutige Bestimmung aller Θ_{1i} und Θ_{2i} ist jedoch nicht möglich. Aus der Budgetrestriktion

$$\sum_{i=1}^L p_i x_i = \sum_{i=1}^L M_i = M \quad (5.38)$$

folgt die Singularität der Kovarianz-Matrix Ω der Fehlerterme, was die Schätzung der Parameter des obigen SUR-Modells mit Kleinste-Quadrat- oder Maximum-Likelihood-Schätzmethoden unmöglich macht. Im Folgenden sollen dieses Problem und seine Lösung im Mittelpunkt stehen.

Die Annahme normalverteilter u_{ih} mit dem Mittelwert Null und einer über die H Haushalte, nicht aber über die L Güter konstanten Varianz ist in der empirischen Nachfrageanalyse üblich:

$$u_{ih} \sim N(0, \sigma_i^2) \quad i = 1, \dots, L. \quad (5.39)$$

Zusätzlich wird angenommen, dass die Fehlerterme unterschiedlicher Haushalte unkorreliert sind. Eine Korrelation der Störterme ein und desselben Haushalts wird jedoch zugelassen:⁴²

$$E[u_{ih} u_{jh^*}] = \begin{cases} \sigma_{ij} & : h = h^* \quad \forall i, j \\ 0 & : h \neq h^* \quad \forall i, j \end{cases} \quad (5.40)$$

Die Kovarianz-Matrix Ω der Fehlerterme des Systems (5.35) entspricht demnach

$$E[uu^T] = \Omega = \begin{bmatrix} \sigma_{11} I_H & \sigma_{12} I_H & \cdots & \sigma_{1L} I_H \\ \sigma_{21} I_H & \sigma_{22} I_H & \cdots & \sigma_{2L} I_H \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sigma_{L1} I_H & \sigma_{L2} I_H & \cdots & \sigma_{LL} I_H \end{bmatrix} \quad (5.41)$$

mit der H -dimensionalen Einheitsmatrix I_H und dem $(LH \times 1)$ -dimensionalen Spaltenvektor der Störterme $u = (u_1^T, u_2^T, \dots, u_i^T, \dots, u_L^T)^T$ aus den H -dimensionalen Spaltenvektoren der Einzelgleichungsstörterme u_i . Die Kovarianz-Matrix Ω ist also das Kronecker-Produkt aus der Fehlermatrix Σ eines Haushalts und der $(H \times H)$ -Einheitsmatrix:

$$\Omega = \Sigma \otimes I_H = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1L} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \cdots & \sigma_{2L} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sigma_{L1} & \sigma_{L2} & \cdots & \sigma_{LL} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (5.42)$$

⁴² σ_i^2 entspricht σ_{ii} .

Die Matrix Σ ist bei Geltung der Budgetgleichung (5.38) singular, woraus gemäß (5.42) die Singularität der Matrix Ω folgt. Dass die Gleichung (5.38) die Singularität der zum Gleichungssystem (5.35) gehörenden Matrix Σ impliziert, rührt daher, dass bei Geltung der Budgetgleichung die Summe der Störterme eines Haushalts h gleich Null ist:

$$\sum_{i=1}^L u_{ih} = 0. \quad (5.43)$$

Bevor die Beziehung (5.43) nachgewiesen wird, soll kurz die Auswirkung auf Σ skizziert werden. Die Summe der i -ten Zeile von Σ entspricht wegen (5.43) Null:

$$\begin{aligned} \sigma_{i1} + \dots + \sigma_{iL} &= E[u_{ih}u_{1h}] + \dots + E[u_{ih}u_{ih}] + \dots + E[u_{ih}u_{Lh}] \quad (5.44) \\ &= E[u_{ih}u_{1h} + \dots + u_{ih}u_{ih} + \dots + u_{ih}u_{Lh}] \\ &= E[u_{ih}(u_{1h} + \dots + u_{ih} + \dots + u_{Lh})] \\ &= E[u_{ih} \sum_{i=1}^L u_{ih}] \\ &= E[0] = 0. \end{aligned}$$

Die Spalten sind folglich linear abhängig, was die Singularität von Σ beweist. Die Beziehung (5.43) bewirkt demnach die Nichtinvertierbarkeit von Ω , wodurch eine Schätzung des Systems (5.35) unmöglich wird.⁴³ Dass beim einzelnen Haushalt h die Summe der Störterme u_{ih} Null sein muss, ist intuitiv nachvollziehbar, da andernfalls die Budgetbeschränkung verletzt werden würde. Formal lässt sich dies wie folgt zeigen.⁴⁴ Zunächst wird die Summe über alle L Gleichungen des Systems (5.35)⁴⁵ für einen Haushalt gebildet und anschließend die Budgetbeschränkung (5.38)⁴⁶ angewandt:

$$\sum_{i=1}^L M_{ih} = M_h = \sum_{i=1}^L \Theta_{1i} + \sum_{i=1}^L \Theta_{2i} M_h + \sum_{i=1}^L u_{ih}. \quad (5.45)$$

Die Division durch M_h führt zu

$$1 = \frac{1}{M_h} \sum_{i=1}^L \Theta_{1i} + \sum_{i=1}^L \Theta_{2i} + \frac{1}{M_h} \sum_{i=1}^L u_{ih}. \quad (5.46)$$

⁴³Bei der Schätzung von SUR-Modellen ist die Invertierbarkeit der Matrix der Störterme des Systems zwingend erforderlich. Vgl. hierzu beispielsweise *Greene, W.H.* (2003, S. 340ff.).

⁴⁴Eine ähnliche Nachweisführung ist in *Ronning, G.* (1992, S. 315f.) zu finden. *Ronning* zeigt den Zusammenhang mittels Budgetanteilsleichungen.

⁴⁵Siehe S. 125.

⁴⁶Siehe S. 126.

Die Gleichungen (5.45) bzw. (5.46) gelten für beliebige M_h . In einem ersten Schritt wird der Erwartungswert von (5.46) mit $M_h = \infty$ gebildet:

$$\begin{aligned} 1 &= 0 \cdot \sum_{i=1}^L \Theta_{1i} + \sum_{i=1}^L \Theta_{2i} + 0 \cdot E \left[\sum_{i=1}^L u_{ih} \right] \\ 1 &= \sum_{i=1}^L \Theta_{2i}. \end{aligned} \quad (5.47)$$

Wird der Erwartungswert mit $M_h = 1$ gebildet, folgt unter Nutzung von (5.47) und der Annahme (5.39)⁴⁷:

$$\begin{aligned} 1 &= \sum_{i=1}^L \Theta_{1i} + 1 + E \left[\sum_{i=1}^L u_{ih} \right] \\ 0 &= \sum_{i=1}^L \Theta_{1i} + \sum_{i=1}^L E [u_{ih}] \\ 0 &= \sum_{i=1}^L \Theta_{1i}. \end{aligned} \quad (5.48)$$

Aus den aus der Budgetbeschränkung hergeleiteten Restriktionen für die Parameter $1 = \sum_{i=1}^L \Theta_{2i}$ und $0 = \sum_{i=1}^L \Theta_{1i}$ folgt aus (5.45) die zu beweisende Beziehung (5.43):

$$\begin{aligned} M_h &= M_h + \sum_{i=1}^L u_{ih} \\ 0 &= \sum_{i=1}^L u_{ih}. \end{aligned} \quad (5.49)$$

Das Mehrgleichungssystem mit L Gleichungen ist nicht schätzbar, da es nicht den vollen Rang besitzt. Die Lösung des Problems liegt im Weglassen einer Gleichung und der Schätzung des $(L - 1)$ Restsystems. *Barten* zeigt in einem 1969 erschienenen Artikel, dass die Schätzergebnisse von der Auswahl der weggelassenen Gleichung unabhängig sind, wenn das System mit der Maximum-Likelihood-Methode geschätzt wird.⁴⁸ Eine Schätzung dieses verkürzten Systems liefert jedoch nur jeweils $(L - 1)$ Schätzer für Θ_{2i} und für Θ_{1i} . Ersteres ist wegen der Beziehungen (5.36) und (5.47) kein Problem.⁴⁹ Der L -te LES Parameter α_i kann eindeutig aus den $(L - 1)$ Θ_{2i} bestimmt werden. Eine Identifikation der L Mindestmengenparameter β_i ist jedoch mit den verbleibenden $(L - 1)$ Θ_{1i} unmöglich. Um dieser Unterbestimmung zu begegnen sind grundsätzlich zwei Alternativen denkbar. Beide Möglichkeiten werden im Folgenden kurz vorgestellt.

⁴⁷Siehe S. 126.

⁴⁸Vgl. *Barten, A.P.* (1969, S. 25ff.).

⁴⁹Siehe S. 125 und S. 128.

ELES

Ein in der Praxis oft genutzter diesbezüglicher Lösungsvorschlag von *Lluch* bzw. *Howe* umgeht das Problem durch eine a priori Festlegung einer Mindestmenge.⁵⁰ Der Ansatz von *Lluch* versucht durch die Maximierung einer intertemporalen additiven Nutzenfunktion die Spar-Konsum-Entscheidung eines Haushalts endogen zu erklären. Als Ergebnis dieser Optimierung präsentiert er das ELES.⁵¹ Die Erweiterung des Optimierungsproblems um das Sparen begründet dabei den Namen **Extended Linear Expenditure System**. *Howe* greift die Idee auf und zeigt, dass das ELES auch aus einer nichttemporalen Maximierung einer *Stone-Geary*-Nutzenfunktion folgt, wenn diese die Ersparnis als Gut enthält und die Mindestmenge der Ersparnis auf Null festgelegt wird. Die bisherige inhaltliche Äquivalenz von Einkommen und Konsumausgaben wird hier zwangsläufig aufgehoben. Die Festlegung der Ersparnismindestmenge $\beta_{L+1} = 0$ ist nicht unproblematisch. Zum einen entzieht sie sich jeglicher empirischen Überprüfung, zum anderen ist die Betrachtung von Ersparnis als Gut äußerst fragwürdig.⁵² Dennoch soll hier kurz die eindeutige Parameteridentifikation des ELES-Ansatzes aufgezeigt werden. Das Gut $L + 1$ wird als Ersparnis festgelegt und die Nutzenfunktion⁵³

$$U(x) = \sum_{i=1}^{L+1} \alpha_i \ln(x_i - \beta_i) \quad (5.50)$$

unter der Budgetbeschränkung $\sum_{i=1}^{L+1} p_i x_i = M$ maximiert. Es folgt wie beim herkömmlichen LES:

$$C_i = p_i x_i^M = \alpha_i \left(M - \sum_{i=1}^L p_i \beta_i \right) + p_i \beta_i \quad \text{mit } i = 1, \dots, L \quad (5.51)$$

und

$$S = p_{L+1} x_{L+1}^M = \alpha_{L+1} \left(M - \sum_{i=1}^L p_{L+1} \beta_{L+1} \right) \quad (5.52)$$

mit $\sum_{i=1}^L C_i + S = C + S = M$. In der $L + 1$ Nachfragegleichung für das Sparen S fällt der Summand $p_{L+1} \beta_{L+1}$ wegen der a priori Festlegung $\beta_{L+1} = 0$ weg. Das Gesamtsystem aus (5.51) und (5.52) besitzt wiederum nicht den vollen Rang. Anders verhält es sich bei dem L -Gleichungen umfassenden Subsystem (5.51). Eine Schätzung dieses Systems liefert $2L$ Schätzer. Den L -fachen Θ_{1i} und L -fachen Θ_{2i} stehen jetzt L unabhängige α_i und L unabhängige Mindestmengen β_i

⁵⁰Vgl. *Lluch, C.* (1973, S. 21ff.) und *Howe, H.*(1975, S. 305ff.). Eine praktische Anwendung dieses Ansatzes erfolgte in Deutschland beispielsweise durch *Merz, J.* (1983b, S. 359ff.).

⁵¹Vgl. *Lluch, C.* (1973, S. 28).

⁵²Vgl. *Missong, M.* (2004, S. 176).

⁵³Vgl. dazu (5.26), S. 122.

gegenüber. Eine Identifikation des verbleibenden Parameters des Gesamtsystems gelingt durch die Beziehung⁵⁴

$$\alpha_{L+1} = 1 - \sum_{i=1}^L \Theta_{2i}. \quad (5.53)$$

Die Aussagen zur Identifikation der Parameter des Gesamtsystems entsprechen mathematisch denen, die in den genannten Artikeln von *Lluch* und *Howe* getroffen werden. Das ELES wird von ihnen jedoch abweichend von den obigen Gleichungen in kompakterer Form definiert.⁵⁵

$$C_i = p_i x_i^M = c \hat{\alpha}^i \left(M - \sum_{i=1}^L p_i \beta_i \right) + p_i \beta_i \quad \text{mit } i = 1, \dots, L. \quad (5.54)$$

Der ELES Parameter c entspricht dabei der marginalen Konsumneigung und folgt aus der marginalen Sparneigung α_{L+1} mit $c = 1 - \alpha_{L+1} = \sum_{i=1}^L \alpha_i$. Für die anderen ELES Parameter $\hat{\alpha}^i$ gilt $\hat{\alpha}^i = \frac{\alpha_i}{c}$ und somit $\sum_{i=1}^L \hat{\alpha}^i = 1$. Das eigentliche ELES besitzt also $L - 1$ unabhängige $\hat{\alpha}^i$, einen Parameter c für die marginale Konsumneigung und L unabhängige Parameter für die Mindestmengen β_i . In der Summe sind es also wiederum $2L$ unabhängige Parameter, die eindeutig mit den geschätzten $2L$ Θ s identifiziert werden können.

Zweites Preis-Regime

Die andere Möglichkeit, das Unterbestimmungsproblem zu lösen, liegt in der Nutzung eines zweiten Querschnittsdatensatzes. Dieser Datensatz muss vom ersten Datensatz abweichende Preisinformationen enthalten. Die eindeutige Identifikation der Mindestmengen beruht dann auf der Annahme ihrer Konstanz. Die Mindestmengen zum Zeitpunkt t_0 mit dem dazugehörigen Preisvektor p^0 sind also mit denen im Zeitpunkt t_1 mit dem Preisvektor p^1 identisch ($\beta_i^{t_0} = \beta_i^{t_1} = \beta_i$). Die Identifikation aller β_i gelingt bereits durch die Bestimmung zweier Gleichungen der Form (5.35)⁵⁶ aus dem zweiten Datensatz. Für zwei Güter r und s resultiert dann aus den Datensätzen t_0 und t_1 ein Gleichungssystem der Form:⁵⁷

$$\begin{pmatrix} \Theta_{1r}^{t_0} \\ \Theta_{1r}^{t_1} \\ \Theta_{1s}^{t_0} \\ \Theta_{1s}^{t_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_r^{t_0} & 0 & -\Theta_{2r}^{t_0} & 0 \\ p_r^{t_1} & 0 & 0 & -\Theta_{2r}^{t_1} \\ 0 & p_s^{t_0} & -\Theta_{2s}^{t_0} & 0 \\ 0 & p_s^{t_1} & 0 & -\Theta_{2s}^{t_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_r \\ \beta_s \\ \sum_{i=1}^L p_i^{t_0} \beta_i^{t_0} \\ \sum_{i=1}^L p_i^{t_1} \beta_i^{t_1} \end{pmatrix}. \quad (5.55)$$

⁵⁴Siehe dazu Gleichung (5.58), S. 131.

⁵⁵Vgl. *Lluch, C.* (1973, S. 28) und *Howe, H.* (1975, S. 307).

⁵⁶Siehe S. 125.

⁵⁷Siehe dazu die Gleichungen (5.36) und (5.37) auf den Seiten 125 und 126. Die Ausführungen zur Identifikation der LES-Parameter sind an die von *Kohn, K.* und *Missong, M.* (2003, S. 427) angelehnt.

Die Koeffizientenmatrix dieses Systems besitzt bei unterschiedlichen Preisvektoren den vollen Rang und kann somit invertiert werden. Linksseitiges Multiplizieren mit der Inversen führt zu

$$\begin{pmatrix} p_r^{t_0} & 0 & -\Theta_{2r}^{t_0} & 0 \\ p_r^{t_1} & 0 & 0 & -\Theta_{2r}^{t_1} \\ 0 & p_s^{t_0} & -\Theta_{2s}^{t_0} & 0 \\ 0 & p_s^{t_1} & 0 & -\Theta_{2s}^{t_1} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \Theta_{1r}^{t_0} \\ \Theta_{1r}^{t_1} \\ \Theta_{1s}^{t_0} \\ \Theta_{1s}^{t_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_r \\ \beta_s \\ \sum_{i=1}^L p_i^{t_0} \beta_i^{t_0} \\ \sum_{i=1}^L p_i^{t_1} \beta_i^{t_1} \end{pmatrix}. \quad (5.56)$$

Die Mindestausgaben $\sum_{i=1}^L p_i^{t_1} \beta_i^{t_1}$ im Zeitpunkt t_1 können somit mittels zweier Datensätze bestimmt werden. Hieraus können wiederum sämtliche, über die Zeit konstante Mindestmengen β_i identifiziert werden. Die Bestimmung der Parameter des LES erfolgt dann bei der Nutzung von zwei Datensätzen gemäß der Gleichungen (5.36) und (5.47) mit:

$$\alpha_i = \Theta_{2i} \quad i = 1, \dots, (L-1) \quad (5.57)$$

und

$$\alpha_L = 1 - \sum_{i=1}^{L-1} \Theta_{2i} \quad (5.58)$$

und gemäß (5.37) für $(L-1)$ β_i mit:⁵⁸

$$\beta_i = \frac{\Theta_{1i} + \alpha_i \sum_{i=1}^L p_i \beta_i}{p_i} \quad i = 1, \dots, (L-1). \quad (5.59)$$

Die verbleibende Mindestmenge β_L folgt dann aus der Differenz zwischen den in (5.56) bestimmten gesamten Mindestausgaben und den aus (5.59) folgenden Mindestausgaben für $(L-1)$ Güter:

$$\beta_L = \frac{\sum_{i=1}^L p_i \beta_i - \sum_{i=1}^{L-1} p_i \beta_i}{p_L}. \quad (5.60)$$

5.3 Das quadratische Ausgabensystem QES

Das quadratische Ausgabensystem ist als Spezialfall der *Verallgemeinert Quadratischen Systeme* ein Rang-3-System. Wie beim LES werden zunächst der Aufbau und die Eigenschaften des QES beschrieben, um im Anschluss daran die Identifikation der Parameter eines solchen Systems näher zu untersuchen.

⁵⁸Die Gleichungen (5.36), (5.37) und (5.47) finden sich auf S. 125f. bzw. S. 128.

5.3.1 Aufbau eines QES

Für den Fall $\tau = 1$ folgt aus dem *Verallgemeinert Quadratischen System* (4.126) die Nachfrage

$$\begin{aligned} x_i^{\mathcal{M}} &= \left(\frac{\frac{\partial H(p)}{\partial p_i}}{P(p)} \right) M^2 \\ &+ \left(\frac{\frac{\partial P(p)}{\partial p_i}}{P(p)} + 2\Lambda(p) \frac{\partial H(p)}{\partial p_i} \right) M \\ &+ \left(\Lambda(p)^2 P(p) \frac{\partial H(p)}{\partial p_i} - \frac{\partial \Lambda(p)}{\partial p_i} P(p) \right) \end{aligned} \quad i = 1, \dots, L \quad (5.61)$$

mit der indirekten Nutzenfunktion

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(p, M) &= \mathcal{K} \left(\frac{-1}{\left(\frac{M}{P(p)} \right) + \Lambda(p)} - H(p) \right) \\ &= \mathcal{K} \left(\frac{-1}{\left(\frac{M}{P(p)} \right) - \frac{f(p)}{P(p)}} - \frac{g(p)}{P(p)} \right). \end{aligned} \quad (5.62)$$

Wie beim LES gilt $\Lambda(p) = -\frac{f(p)}{P(p)}$ und die Funktion $H(p)$ wird hier durch $\frac{g(p)}{P(p)} = H(p)$ repräsentiert. Die Funktionen $f(p)$, $P(p)$ und neuerlich $g(p)$ sind linearhomogen in p und werden im QES wie folgt konkretisiert: Die Funktionen $f(p)$ und $P(p)$ sind äquivalent zur Konkretisierung des LES:

$$P(p) = p_1^{\alpha_1} \cdots p_i^{\alpha_i} \cdots p_L^{\alpha_L} = \prod_{i=1}^L p_i^{\alpha_i} \quad \text{mit} \quad \alpha_i > 0 \quad \text{und} \quad \sum_{i=1}^L \alpha_i = 1 \quad (5.63)$$

bzw.

$$f(p) = p_1 \beta_1 + \cdots + p_i \beta_i + \cdots + p_L \beta_L = \sum_{i=1}^L p_i \beta_i. \quad (5.64)$$

Die Funktion $g(p)$ kann entweder mit der λ^{sp} -Spezifikation⁵⁹

$$g(p) = \frac{-\lambda^{sp} \left(\prod_{i=1}^L p_i^{\alpha_i} \right)^2}{\prod_{i=1}^L p_i^{\gamma_i}} \quad \text{mit} \quad \sum_{i=1}^L \gamma_i = 1 \quad (5.65)$$

oder alternativ mit der Σ -Spezifikation

$$g(p) = p_1 \gamma_1 + \cdots + p_i \gamma_i + \cdots + p_L \gamma_L = \sum_{i=1}^L p_i \gamma_i \quad (5.66)$$

⁵⁹Das λ^{sp} steht hier für einen unabhängigen Parameter des Systems und hat nichts mit dem Lagrangemultiplikator oder der Funktion Λ gemein.

konkretisiert werden.⁶⁰ Im Vergleich zu den $2L - 1$ unabhängigen Parametern des LES besitzt ein QES exakt $3L - 1$, also genau L mehr unabhängige Parameter. Je nach gewählter Funktion für $g(p)$ sind das bei der λ^{sp} -Spezifikation $(L - 1)$ -mal γ_i und ein λ^{sp} oder L -mal γ_i bei der Σ -Spezifikation.⁶¹

Um die konkreten Nachfragefunktionen im QES aus (5.61)⁶² zu bestimmen, wird neben $\frac{\partial \Lambda(p)}{\partial p_i}$ aus Gleichung (5.22)⁶³ und $\frac{\partial P(p)}{\partial p_i} = \frac{\alpha_i}{p_i} \prod_{i=1}^L p_i^{\alpha_i}$ noch die Ableitung der Funktion $H(p)$ nach dem Güterpreis p_i benötigt.

Für $\frac{\partial H(p)}{\partial p_i}$ folgt gemäß Quotientenregel ($H(p) = \frac{g(p)}{P(p)}$) für die λ^{sp} -Spezifikation

$$\frac{\partial H(p)}{\partial p_i} = \frac{g_i P - g P_i}{P^2} = \lambda^{sp} \frac{\prod_{i=1}^L p_i^{\alpha_i}}{\prod_{i=1}^L p_i^{\gamma_i}} \left(\frac{\gamma_i}{p_i} - \frac{\alpha_i}{p_i} \right) \quad (5.67)$$

und für die Σ -Spezifikation

$$\frac{\partial H(p)}{\partial p_i} = \frac{g_i P - g P_i}{P^2} = \frac{\gamma_i - \frac{\alpha_i}{p_i} \sum_{i=1}^L p_i \gamma_i}{\prod_{i=1}^L p_i^{\alpha_i}}. \quad (5.68)$$

Die Nachfragekurven des QES entsprechen somit bei der λ^{sp} -Spezifikation

$$\begin{aligned} x_i^{\mathcal{M}} &= \left(\frac{\lambda^{sp}}{\prod_{i=1}^L p_i^{\gamma_i}} \left(\frac{\gamma_i}{p_i} - \frac{\alpha_i}{p_i} \right) \right) M^2 \\ &+ \left(\frac{\alpha_i}{p_i} - \frac{2\lambda^{sp} \sum_{i=1}^L p_i \beta_i}{\prod_{i=1}^L p_i^{\gamma_i}} \left(\frac{\gamma_i}{p_i} - \frac{\alpha_i}{p_i} \right) \right) M \\ &+ \left(\beta_i + \frac{\lambda^{sp} \left(\sum_{i=1}^L p_i \beta_i \right)^2}{\prod_{i=1}^L p_i^{\gamma_i}} \left(\frac{\gamma_i}{p_i} - \frac{\alpha_i}{p_i} \right) - \frac{\alpha_i}{p_i} \sum_{i=1}^L p_i \beta_i \right) \end{aligned} \quad (5.69)$$

bzw. zwecks besserer Interpretation umgeformt

$$\begin{aligned} M_i = p_i x_i^{\mathcal{M}} &= p_i \beta_i + \alpha_i \left(M - \sum_{i=1}^L p_i \beta_i \right) \\ &+ \frac{(\gamma_i - \alpha_i) \lambda^{sp}}{\prod_{i=1}^L p_i^{\gamma_i}} \left(M - \sum_{i=1}^L p_i \beta_i \right)^2. \end{aligned} \quad (5.70)$$

⁶⁰Vgl. *Howe, Pollak und Wales* (1979, S. 1238). Die λ^{sp} -Spezifikation von $g(p)$ in *Pollak, R.A. und Wales, T.J.* (1992, S. 31) enthält einen Vorzeichenfehler.

⁶¹Bei der λ^{sp} -Spezifikation sind wegen der Einschränkung $\sum_{i=1}^L \gamma_i = 1$ nur $(L - 1)$ γ_i unabhängig.

⁶²Siehe S. 132.

⁶³Siehe S. 120.

Aus der Σ -Spezifikation folgen die QES-Nachfragekurven

$$\begin{aligned}
 x_i^{\mathcal{M}} &= \left(\frac{\gamma_i - \frac{\alpha_i}{p_i} \sum_{i=1}^L p_i \gamma_i}{\left(\prod_{i=1}^L p_i^{\alpha_i} \right)^2} \right) M^2 \\
 &+ \left(\frac{\alpha_i}{p_i} + \frac{2 \left(\frac{\alpha_i}{p_i} \sum_{i=1}^L p_i \gamma_i \sum_{i=1}^L p_i \beta_i - \gamma_i \sum_{i=1}^L p_i \beta_i \right)}{\left(\prod_{i=1}^L p_i^{\alpha_i} \right)^2} \right) M \\
 &+ \left(\beta_i + \frac{\gamma_i \left(\sum_{i=1}^L p_i \beta_i \right)^2 - \frac{\alpha_i}{p_i} \sum_{i=1}^L p_i \gamma_i \left(\sum_{i=1}^L p_i \beta_i \right)^2}{\left(\prod_{i=1}^L p_i^{\alpha_i} \right)^2} - \frac{\alpha_i}{p_i} \sum_{i=1}^L p_i \beta_i \right)
 \end{aligned} \tag{5.71}$$

bzw.

$$\begin{aligned}
 M_i = p_i x_i^{\mathcal{M}} &= p_i \beta_i + \alpha_i \left(M - \sum_{i=1}^L p_i \beta_i \right) \\
 &+ \frac{\left(\gamma_i p_i - \alpha_i \sum_{i=1}^L p_i \gamma_i \right)}{\left(\prod_{i=1}^L p_i^{\alpha_i} \right)^2} \left(M - \sum_{i=1}^L p_i \beta_i \right)^2.
 \end{aligned} \tag{5.72}$$

5.3.2 Eigenschaften eines QES

Um die Form der quadratische Engelkurven generierenden indirekten Nutzenfunktion (5.62)⁶⁴ besser einordnen zu können, sei die unter A.17 beschriebene *Gorman Polar Form* (GPF) für die spezielle, monoton steigende Transformation $\mathcal{K}[\cdot] = -[\cdot]^{-1}$ aufgeführt:⁶⁵

$$\mathcal{N}(M, p) = \mathcal{K} \left[\frac{M}{P(p)} - \frac{f(p)}{P(p)} \right] = \frac{-1}{\left(\frac{M}{P(p)} \right) - \frac{f(p)}{P(p)}} \tag{5.73}$$

Die GPF wurde also um den Quotienten $\frac{g(p)}{P(p)}$ zweier linearhomogener Funktionen erweitert. Diese Erweiterung führt jedoch nicht zu der unter A.18 beschriebenen *Generalized Gorman Polar Form* (GGPF).⁶⁶ Die Nutzung des QES als Untergruppennachfragesystem in einer blockadditiven two-stage budgeting Strategie als Spezialfall der GGPF ist daher nicht möglich.⁶⁷

Anders als beim LES ist eine kompakte Darstellung der ein QES generierenden direkten Nutzenfunktion und eine direkte, eingängige Interpretation der

⁶⁴Siehe S. 132.

⁶⁵A.17 findet sich auf S. 210ff.

⁶⁶A.18 findet sich auf S. 214ff.

⁶⁷Vgl. dazu 4.1.3 und 4.1.4, S. 73ff. und S. 80ff.

Systemparameter nicht bzw. nur eingeschränkt möglich.⁶⁸ Die Interpretation der Parameter β_i und der Differenz $\left(M - \sum_{i=1}^L p_i \beta_i\right)$ als Mindestnachfrage bzw. als Überschusseinkommen unterliegt, wie im LES, wiederum der Annahme $\beta_i \geq 0$ und wird daher von *Pollak* und *Wales* auch beim QES abgelehnt.⁶⁹ Unabhängig von dieser ablehnenden Haltung hat sich die genannte Deutung beim LES durchgesetzt, da zum einen zumindest die Ungleichung $x_i > \beta_i$ theoretisch fundiert ist und zum anderen eine derartige Beschreibung durch die Form der direkten Nutzenfunktion gestützt wird.⁷⁰ Beides ist im QES nicht gegeben, so dass hier noch kritischer mit dieser Parameterinterpretation umgegangen werden muss. Dennoch wird in der empirischen Praxis und der einschlägigen Literatur von Mindestausgaben und Überschusseinkommen gesprochen, was die gewählte Darstellungsform (5.70) und (5.72) erklärt. Des Weiteren unterstützt ein u.a. von *Lewbel* genanntes Argument die obige Lesart. Es besteht ein enger Zusammenhang zwischen den Parametern β_i und der Technik des *demographic translating* zur Erfassung soziodemographischer Merkmale eines Haushalts bei der empirischen Nachfrageanalyse. Werden die Parameter β_i in diesem technischen Sinne als Verschiebungsparameter betrachtet, ist eine Mindestausgabendeutung zulässig.⁷¹

Die Parameter α_i und γ_i entbehren jeglicher direkten ökonomischen Interpretation. Es ist daher üblich, die Ergebnisse einer empirischen Schätzung des QES in Form von ökonomischen Kenngrößen zu präsentieren, die aus den geschätzten Parametern berechnet werden. Der Anstieg der Engelkurve $\frac{\partial x_i^M}{\partial M}$ eines QES entspricht bei der λ^{sp} -Spezifikation

$$\frac{\partial x_i^M}{\partial M} = \frac{\alpha_i}{p_i} + 2 \left(\frac{(\gamma_i - \alpha_i) \lambda^{sp}}{p_i \prod_{i=1}^L p_i^{\gamma_i}} \right) \left(M - \sum_{i=1}^L p_i \beta_i \right). \quad (5.74)$$

Für die Σ -Spezifikation gilt diesbezüglich

$$\frac{\partial x_i^M}{\partial M} = \frac{\alpha_i}{p_i} + 2 \left(\frac{\gamma_i - \frac{\alpha_i}{p_i} \sum_{i=1}^L p_i \gamma_i}{\left(\prod_{i=1}^L p_i^{\alpha_i} \right)^2} \right) \left(M - \sum_{i=1}^L p_i \beta_i \right). \quad (5.75)$$

Das Vorzeichen des Anstiegs ist nicht modellendogen festgelegt. Je nach Parameterkonstellation ist er entweder positiv oder negativ.⁷² Eine QES Modellierung ermöglicht somit auch die Abbildung inferiorer Güter. Der Anstieg kann mit steigendem Einkommen absolut zunehmen. Diese höhere funktionale Flexibilität ermöglicht insgesamt eine bessere Anpassung an die empirischen Daten.

⁶⁸Vgl. *Missong, M.* (2004, S. 172).

⁶⁹Vgl. *Pollak, R.A.* und *Wales, T.J.* (1978, S. 351).

⁷⁰Siehe dazu 5.2.2, S. 121ff.

⁷¹Vgl. *Lewbel, A.* (1997, S. 188), aber auch *Missong, M.* (2004, S. 118) und die Ausführungen zu 6.1, S. 143ff.

⁷²Es gilt $(\gamma_i - \alpha_i) \lambda^{sp} \leq 0$ bzw. $\gamma_i - \frac{\alpha_i}{p_i} \sum_{i=1}^L p_i \gamma_i \leq 0$.

Die direkten *Marshallschen* Preiseffekte $\frac{\partial x_i^M}{\partial p_i}$ in einem QES entsprechen

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_i^M}{\partial p_i} &= \frac{\lambda^{sp}(1 + \gamma_i)(\alpha_i - \gamma_i)}{p_i^2 \prod_{i=1}^L p_i^{\gamma_i}} \left(M - \sum_{i=1}^L p_i \beta_i \right)^2 \\ &\quad - \left(\frac{\alpha_i}{p_i^2} + \frac{\lambda^{sp}(\gamma_i - \alpha_i)2\beta_i p_i}{p_i^2 \prod_{i=1}^L p_i^{\gamma_i}} \right) \left(M - \sum_{i=1}^L p_i \beta_i \right) \\ &\quad - \frac{\alpha_i \beta_i}{p_i} \end{aligned} \quad (5.76)$$

bei der λ^{sp} -Spezifikation. Für die Σ -Spezifikation gilt äquivalent dazu:

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_i^M}{\partial p_i} &= \frac{\alpha_i \sum_{i=1}^L p_i \gamma_i - p_i \alpha_i \gamma_i}{p_i^2 \left(\prod_{i=1}^L p_i^{\alpha_i} \right)^2} \left(M - \sum_{i=1}^L p_i \beta_i \right)^2 \\ &\quad + 2\alpha_i M \frac{\alpha_i \sum_{i=1}^L p_i \gamma_i - p_i \gamma_i}{p_i^2 \left(\prod_{i=1}^L p_i^{\alpha_i} \right)^2} \left(M - \sum_{i=1}^L p_i \beta_i \right) \\ &\quad + 2p_i \beta_i \frac{\alpha_i \sum_{i=1}^L p_i \gamma_i - p_i \gamma_i}{p_i^2 \left(\prod_{i=1}^L p_i^{\alpha_i} \right)^2} \left(M - \sum_{i=1}^L p_i \beta_i \right) \\ &\quad - 2\alpha_i \sum_{i=1}^L p_i \beta_i \frac{\alpha_i \sum_{i=1}^L p_i \gamma_i - p_i \gamma_i}{p_i^2 \left(\prod_{i=1}^L p_i^{\alpha_i} \right)^2} \left(M - \sum_{i=1}^L p_i \beta_i \right) \\ &\quad - \frac{\alpha_i}{p_i^2} \left(M - \sum_{i=1}^L p_i \beta_i \right) - \frac{\alpha_i \beta_i}{p_i}. \end{aligned} \quad (5.77)$$

Die *Marshallschen* Kreuzpreiseffekte $\frac{\partial x_i^M}{\partial p_j}$ entsprechen bei der λ^{sp} -Spezifikation

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_i^M}{\partial p_j} &= \frac{(\alpha_i - \gamma_i) \lambda^{sp} \gamma_j}{p_i \prod_{i=1}^L p_i^{\gamma_i} p_j} \left(M - \sum_{i=1}^L p_i \beta_i \right)^2 \\ &\quad + \frac{(\alpha_i - \gamma_i) \lambda^{sp}}{p_i \prod_{i=1}^L p_i^{\gamma_i}} 2\beta_j \left(M - \sum_{i=1}^L p_i \beta_i \right) - \frac{\alpha_i \beta_j}{p_i} \end{aligned} \quad (5.78)$$

und bei der Σ -Spezifikation

$$\frac{\partial x_i^M}{\partial p_j} = \frac{2\frac{\alpha_i}{p_i} \frac{\alpha_j}{p_j} \sum_{i=1}^L p_i \gamma_i}{\left(\prod_{i=1}^L p_i^{\alpha_i} \right)^2} \left(M - \sum_{i=1}^L p_i \beta_i \right)^2 \quad (5.79)$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{2\frac{\alpha_j}{p_j}\gamma_i + \frac{\alpha_i}{p_i}\gamma_j}{\left(\prod_{i=1}^L p_i^{\alpha_i}\right)^2} \left(M - \sum_{i=1}^L p_i\beta_i\right)^2 \\
& + \frac{2\beta_j \left(\frac{\alpha_i}{p_i} \sum_{i=1}^L p_i\gamma_i - \gamma_i\right)}{\left(\prod_{i=1}^L p_i^{\alpha_i}\right)^2} \left(M - \sum_{i=1}^L p_i\beta_i\right) \\
& - \frac{\alpha_i}{p_i}\beta_j.
\end{aligned}$$

Die beiden Spezifikationen ermöglichen jeweils sowohl positive als auch negative Preisreaktionen. Das QES ist also auch hier in seiner Modellstruktur flexibler als das LES, in dem, bei Geltung der Annahme der Nicht-Negativität der Mindestmengen, die Preiseffekte in ihrer Richtung festgelegt waren.⁷³

Die direkten *Hicks*schen Preiseffekte $\frac{\partial x_i^{\mathcal{H}}}{\partial p_i}$ müssen in einem theoretisch konsistenten System immer negativ sein. Die bisherigen Annahmen und Einschränkungen bezüglich der QES Parameter gewährleisteten diese notwendige Bedingung nicht. Für die λ^{sp} -Spezifikation folgt der *Hicks*sche Preiseffekt

$$\begin{aligned}
\frac{\partial x_i^{\mathcal{H}}}{\partial p_i} &= \frac{\alpha_i^2 - \alpha_i}{p_i^2} \left(M - \sum_{i=1}^L p_i\beta_i\right) \\
& + \frac{\lambda^{sp}(\gamma_i - \alpha_i)(3\alpha_i - \gamma_i - 1)}{p_i^2 \prod_{i=1}^L p_i^{\gamma_i}} \left(M - \sum_{i=1}^L p_i\beta_i\right)^2 \\
& + 2 \left(\frac{\lambda^{sp}(\gamma_i - \alpha_i)}{p_i \prod_{i=1}^L p_i^{\gamma_i}}\right)^2 \left(M - \sum_{i=1}^L p_i\beta_i\right)^3.
\end{aligned} \tag{5.80}$$

Für die Σ -Spezifikation folgt entsprechend:⁷⁴

$$\begin{aligned}
\frac{\partial x_i^{\mathcal{H}}}{\partial p_i} &= \frac{\alpha_i^2 - \alpha_i}{p_i^2} \left(M - \sum_{i=1}^L p_i\beta_i\right) \\
& + 2\frac{\alpha_i}{p_i} \sum_{i=1}^L p_i\beta_i \frac{\gamma_i - \frac{\alpha_i}{p_i} \sum_{i=1}^L p_i\gamma_i}{\left(\prod_{i=1}^L p_i^{\alpha_i}\right)^2} \left(M - \sum_{i=1}^L p_i\beta_i\right) \\
& + 2\frac{\alpha_i}{p_i} M \frac{\frac{\alpha_i}{p_i} \sum_{i=1}^L p_i\gamma_i - \gamma_i}{\left(\prod_{i=1}^L p_i^{\alpha_i}\right)^2} \left(M - \sum_{i=1}^L p_i\beta_i\right)
\end{aligned} \tag{5.81}$$

⁷³Vgl. dazu (5.32) und (5.33), S. 124 und S. 124.

⁷⁴Der hier dargestellte Preiseffekt entspricht nicht dem nach Überzeugung des Verfassers von *Missong, M.* fehlerhaft dargestellten Substitutionseffekt. *Missong, M.* (2004, S. 174) wählt die Darstellung in Elastizitätenform, jedoch entspricht beispielsweise *Missongs* Faktor vor dem Term $\left(M - \sum_{i=1}^L p_i\beta_i\right)^3$ genau dem Faktor in (5.81), was die gleichzeitige Korrektheit beider Darstellungen ausschließt.

$$\begin{aligned}
& + \frac{2\frac{\alpha_i}{p_i}\gamma_i + \sum_{i=1}^L p_i\gamma_i \left(\frac{\alpha_i - 3\alpha_i^2}{p_i^2}\right)}{\left(\prod_{i=1}^L p_i^{\alpha_i}\right)^2} \left(M - \sum_{i=1}^L p_i\beta_i\right)^2 \\
& + 2 \left(\frac{\gamma_i - \frac{\alpha_i}{p_i} \sum_{i=1}^L p_i\gamma_i}{\left(\prod_{i=1}^L p_i^{\alpha_i}\right)^2}\right)^2 \left(M - \sum_{i=1}^L p_i\beta_i\right)^3.
\end{aligned}$$

Mittels des reinen, durch Eigenpreisänderungen verursachten Substitutionseffektes $\frac{\partial x_i^h}{\partial p_i}$ und seiner notwendigen Negativitätsanforderung kann die theoretische Validität der empirischen Schätzung überprüft werden. Der hier dargestellte *Hicks*sche Preiseffekt dient somit der Überprüfung der Güte des Ansatzes.

Die *Hicks*schen Kreuzpreiseffekte könnten hier ohne Weiteres mit der *Slutsky*-Gleichung aus den *Marshall*schen Effekten hergeleitet werden. Das Vorzeichen ist bei beiden Spezifikationen unbestimmt. Der durch diese ökonomische Kenngröße erzielte praktische Erkenntnisgewinn ist äußerst begrenzt. Es wird daher hier auf eine Darstellung verzichtet.

5.3.3 Schätzung eines QES

Ein quadratisches Ausgabensystem besitzt unabhängig von der jeweiligen Spezifizierung $(3L - 1)$ unabhängige Parameter. Bei der λ^{sp} -Spezifikation sind dies $(L - 1)$ mal α_i , $(L - 1)$ mal γ_i , L mal β_i und ein λ^{sp} . Bei der Σ -Spezifikation sind dies $(L - 1)$ mal α_i , L mal γ_i und L mal β_i . Wie beim LES scheint die Schätzung des Mehrgleichungssystems

$$M_{ih} = p_i x_{ih}^M = \Theta_{1i} + \Theta_{2i} M_h + \Theta_{3i} M_h^2 + u_{ih} \quad (5.82)$$

mit $i = 1, \dots, L$, $h = 1, \dots, H$ und den additiven Störtermen u_{ih} auf den ersten Blick die Identifikation der Parameter zu ermöglichen. Dieser Eindruck von $3L$ eindeutig identifizierbaren Parametern Θ ist jedoch falsch. Äquivalent zum LES verhindert die Budgetgleichung der einzelnen Haushalte eine eindeutige Bestimmung. Es können nur $(L - 1)$ Gleichungen des Systems (5.82) geschätzt werden. Als Ergebnis dieser Schätzung liefert ein einzelner Querschnittsdatensatz nur $(3L - 3)$ Θ -Schätzer.⁷⁵ Anders als beim LES kommt beim QES nur eine Lösungsmöglichkeit dieser Unterbestimmungsproblematik in Betracht.⁷⁶ Der ELES-Lösungsansatz scheitert vor allem an der mangelnden ökonomischen Interpretation der γ_i . Es kann neben der schon problematischen Festlegung eines β_i auf Null kein Argument für eine a priori Festlegung eines γ_i gefunden werden. Die

⁷⁵Die für die Nichtschätzbarkeit verantwortliche Singularität der Kovarianz-Matrix der Fehlerterme folgt wie beim LES aus der Budgetgleichung der Haushalte. Siehe dazu die Erläuterungen auf den Seiten 125ff.

⁷⁶Die Ausführungen zur Identifikation der QES-Parameter sind an die von *Kohn, K.* und *Missong, M.* (2003 S. 428f.) angelehnt.

Nutzung eines zweiten Querschnittsdatensatzes mit einem anderen Preis-Regime zur Identifikation der Parameter ist daher zwingend erforderlich. Äquivalent zum LES genügt auch hier die Kenntnis über die Engelkurven zweier Güter unter einem zweiten Preis-Regime. Anders als beim LES wird hier keine Konstanz der Mindestmengen β_i über die Zeit angenommen. Beim QES wird die Annahme ($\alpha_i^{t_0} = \alpha_i^{t_1} = \alpha_i$) getroffen, so dass die β_i über die Zeit variieren können. Die Identifikation soll hier am Beispiel der Σ -Spezifikation verdeutlicht werden. Für zwei Güter r und s resultiert aus den Datensätzen t_0 und t_1 ein Gleichungssystem der Form

$$\begin{pmatrix} \Theta_{2r}^{t_0} \\ \Theta_{2r}^{t_1} \\ \Theta_{2s}^{t_0} \\ \Theta_{2s}^{t_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2\Theta_{3r}^{t_0} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -2\Theta_{3r}^{t_1} \\ 0 & 1 & -2\Theta_{3s}^{t_0} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2\Theta_{3s}^{t_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_r \\ \alpha_s \\ \sum_{i=1}^L p_i^{t_0} \beta_i^{t_0} \\ \sum_{i=1}^L p_i^{t_1} \beta_i^{t_1} \end{pmatrix}. \quad (5.83)$$

Zum besseren Verständnis sei hier die erste Gleichung des Systems (5.83) näher erläutert. Aus der Verbindung der Gleichung (5.82) ohne den Fehlerterm u_{ih} und der mit p_i multiplizierten Gleichung (5.71) folgt für den Datensatz t_0 und $i = r$:

$$\begin{aligned} \Theta_{2r}^{t_0} &= \alpha_r + \frac{2 \left(\alpha_r \sum_{i=1}^L p_i^{t_0} \gamma_i^{t_0} \sum_{i=1}^L p_i^{t_0} \beta_i^{t_0} - p_r^{t_0} \gamma_r^{t_0} \sum_{i=1}^L p_i^{t_0} \beta_i^{t_0} \right)}{\left(\prod_{i=1}^L p_i^{t_0 \alpha_i} \right)^2} \quad (5.84) \\ &= \alpha_r + \frac{2 \sum_{i=1}^L p_i^{t_0} \beta_i^{t_0} \left(\alpha_r \sum_{i=1}^L p_i^{t_0} \gamma_i^{t_0} - p_r^{t_0} \gamma_r^{t_0} \right)}{\left(\prod_{i=1}^L p_i^{t_0 \alpha_i} \right)^2} \\ &= \alpha_r - 2 \frac{\left(p_r^{t_0} \gamma_r^{t_0} - \alpha_r \sum_{i=1}^L p_i^{t_0} \gamma_i^{t_0} \right)}{\left(\prod_{i=1}^L p_i^{t_0 \alpha_i} \right)^2} \sum_{i=1}^L p_i^{t_0} \beta_i^{t_0} \\ &= \alpha_r - 2\Theta_{3r}^{t_0} \sum_{i=1}^L p_i^{t_0} \beta_i^{t_0}. \end{aligned}$$

Bei unterschiedlichen Preisvektoren besitzt die Koeffizientenmatrix des Systems (5.83) den vollen Rang und kann somit invertiert werden. Das linksseitige Multiplizieren des Systems mit dieser Inversen determiniert dann α_r , α_s , $\sum_{i=1}^L p_i^{t_0} \beta_i^{t_0}$ und $\sum_{i=1}^L p_i^{t_1} \beta_i^{t_1}$. Die QES-Parameter α_i können anschließend aus den $(L - 1)$ Θ -Schätzern des Datensatzes t^1 mit:⁷⁷

$$\alpha_i = \Theta_{2i}^{t_1} + 2\Theta_{3i}^{t_1} \sum_{i=1}^L p_i^{t_1} \beta_i^{t_1} \quad i = 1, \dots, (L - 1) \quad (5.85)$$

⁷⁷Siehe bezüglich des Zusammenhangs (5.85) die letzte Zeile der Gleichung (5.84).

und

$$\alpha_L = 1 - \sum_{i=1}^{L-1} \Theta_{2i} \quad (5.86)$$

bestimmt werden. Aus dem mit p_i multiplizierten und anschließend umgeformten letzten Term der Gleichung (5.71)⁷⁸ folgt durch die gleiche Vorgehensweise wie bei (5.84):

$$\Theta_{1i}^{t_1} = p_i^{t_1} \beta_i^{t_1} - \alpha_i \sum_{i=1}^L p_i^{t_1} \beta_i^{t_1} + \Theta_{3i}^{t_1} \left(\sum_{i=1}^L p_i^{t_1} \beta_i^{t_1} \right)^2. \quad (5.87)$$

Damit können zunächst, unter Nutzung der gerade bestimmten α_i , $(L-1)$ β_i identifiziert werden:

$$\beta_i^{t_1} = \frac{\Theta_{1i}^{t_1}}{p_i^{t_1}} + \frac{\alpha_i}{p_i^{t_1}} \sum_{i=1}^L p_i^{t_1} \beta_i^{t_1} - \frac{\Theta_{3i}^{t_1}}{p_i^{t_1}} \left(\sum_{i=1}^L p_i^{t_1} \beta_i^{t_1} \right)^2 \quad i = 1, \dots, (L-1). \quad (5.88)$$

Das verbleibende β_L folgt wie beim LES aus

$$\beta_L^{t_1} = \frac{\sum_{i=1}^L p_i^{t_1} \beta_i^{t_1} - \sum_{i=1}^{L-1} p_i^{t_1} \beta_i^{t_1}}{p_L^{t_1}}. \quad (5.89)$$

Es verbleibt die Identifikation der γ_i . Hierzu muss wiederum die Annahme der Konstanz dieser Parameter über die Zeit getroffen werden. Es soll wie bei den α_i ($\gamma_i^{t_0} = \gamma_i^{t_1} = \gamma_i$) gelten. Mit dieser Annahme können, äquivalent zu den Lösungen der Gleichungssysteme (5.55) und (5.83),⁷⁹ aus zwei Datensätzen die Werte für γ_r , γ_s , $\sum_{i=1}^L p_i^{t_0} \gamma_i^{t_0}$ und $\sum_{i=1}^L p_i^{t_1} \gamma_i^{t_1}$ bestimmt werden.⁸⁰

$$\begin{pmatrix} \Theta_{3r}^{t_0} \left(\prod_{i=1}^L p_i^{t_1 \alpha_i} \right)^2 \\ \Theta_{3r}^{t_1} \left(\prod_{i=1}^L p_i^{t_1 \alpha_i} \right)^2 \\ \Theta_{3s}^{t_0} \left(\prod_{i=1}^L p_i^{t_1 \alpha_i} \right)^2 \\ \Theta_{3s}^{t_1} \left(\prod_{i=1}^L p_i^{t_1 \alpha_i} \right)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_r^{t_0} & 0 & -\alpha_r & 0 \\ p_r^{t_1} & 0 & 0 & -\alpha_r \\ 0 & p_s^{t_0} & -\alpha_s & 0 \\ 0 & p_s^{t_1} & 0 & -\alpha_s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_r \\ \gamma_s \\ \sum_{i=1}^L p_i^{t_0} \gamma_i^{t_0} \\ \sum_{i=1}^L p_i^{t_1} \gamma_i^{t_1} \end{pmatrix}. \quad (5.90)$$

Mit diesen Werten ist es nun möglich, die verbleibenden γ_i zu identifizieren. Zunächst werden $(L-1)$ γ_i mittels der $(L-1)$ $\Theta_{3i}^{t_1}$, der schon identifizierten α_i und der Summe $\sum_{i=1}^L p_i^{t_1} \gamma_i^{t_1}$ bestimmt:

$$\gamma_i = \frac{\Theta_{3r}^{t_1}}{p_i^{t_1}} \left(\prod_{i=1}^L p_i^{t_1 \alpha_i} \right)^2 + \frac{\alpha_i}{p_i^{t_1}} \sum_{i=1}^L p_i^{t_1} \gamma_i^{t_1} \quad i = 1, \dots, (L-1). \quad (5.91)$$

⁷⁸Siehe S. 134.

⁷⁹Die Gleichungen (5.55) und (5.83) sind auf S. 130 und S. 139 zu finden.

⁸⁰Siehe bezüglich der Gleichung (5.90) den Faktor vor M^2 in Gleichung (5.71).

Das verbleibende γ_L folgt analog zu β_L aus:

$$\gamma_L^{t_1} = \frac{\sum_{i=1}^L p_i^{t_1} \gamma_i^{t_1} - \sum_{i=1}^{L-1} p_i^{t_1} \gamma_i^{t_1}}{p_L^{t_1}}. \quad (5.92)$$

Im letzten Kapitel 6 sollen neben der Betrachtung zweier spezieller Problemfelder der Nachfragesystemschtzung die Vor- und Nachteile verschiedener Modellierungsansätze gegenübergestellt werden. Dabei fließen die Ergebnisse der beiden vorangegangenen Kapitel 4 und 5 zu gleichen Teilen ein. Die abschließende Betrachtung verfolgt das Ziel, ein optimales Nachfragesystem für dynamische Mikrosimulationsmodelle abzuleiten.

Kapitel 6

Nachfragesysteme für die Mikrosimulation

Im letzten Kapitel werden zunächst zwei spezielle Fragestellungen der empirischen Nachfrageanalyse untersucht. Innerhalb der Reihe praktischer Probleme nimmt neben der Einbindung von demographischen Merkmalen insbesondere das Phänomen des Nullkonsums eine herausragende Stellung ein. Nachdem beide Problemfelder erläutert und jeweils ausgewählte Lösungsansätze präsentiert wurden, erfolgt im dritten Abschnitt dieses Kapitels die Anwendung der bis dahin dargestellten theoretischen Erkenntnisse. Für die Nachbildung von Nachfragereaktionen aus Querschnittsdaten wird ein Modell vorgeschlagen, welches zwar nicht der reinen Lehre der theoretischen Nachfrageanalyse genügt, jedoch den nach Auffassung des Verfassers bestmöglichen Kompromiss darstellt. Anschließend werden die Möglichkeiten der Einbindung des Modells in die dynamische Mikrosimulation beschrieben. Im vierten Teil dieses Kapitels bildet dann eine Zusammenfassung der gesamten Arbeit mit anschließender Schlussfolgerung und einem Ausblick auf mögliche Entwicklungen in diesem Forschungsfeld den Abschluss.

6.1 Demographische Spezifizierung

Wie schon bei der Einführung zum vorangegangenen Kapitel angemerkt, beruht das Grundprinzip der Nachfragesystemschatzung mit Querschnittsdaten auf der Annahme gleicher Präferenzordnungen verschiedener Haushalte. Die Haushalte unterscheiden sich bei dieser prinzipiell für die Parameteridentifikation notwendigen Annahme lediglich in der Einkommensausstattung. Im Folgenden soll zunächst ein Überblick über einige grundlegende Möglichkeiten der Einbindung demographischer Merkmale in Nachfragesysteme gegeben werden. Durch die Einbindung finden über das Einkommen hinausgehende Unterschiede zwischen den Haushalten Berücksichtigung. Die Entschärfung der durch die Annahme gleicher Präfe-

renzordnungen verursachten potentiell negativen Wirkungen auf die Aussagekraft empirisch geschätzter Nachfragesysteme ist das primäre Ziel dieser Vorgehensweise. Eine demographisch determinierte Flexibilisierung lockert sozusagen das enge Korsett gleicher Haushaltspräferenzen und ermöglicht dadurch eine Verbesserung der Güte geschätzter Nachfragesystemparameter.

Die Darstellung der generellen Einbindungsmöglichkeiten demographischer Merkmale in Nachfragesystemen wird anschließend durch eine detailliertere Erläuterung ausgewählter Modellierungsvarianten komplettiert. Die getroffene Auswahl folgt dabei der Maßgabe einer empirischen Eignung für die in Kapitel 5 beschriebenen funktionalen Formen.

6.1.1 Varianten demographischer Spezifizierung

Bei der Einbindung demographischer Merkmale in theoretisch konsistente Nachfragesysteme können generell zwei Verfahrensweisen unterschieden werden. Bei dem ersten möglichen Verfahren erfolgen separate Nachfragesystemsätzungen für Untergruppen der Grundgesamtheit. Die demographischen Merkmale können bei dieser Form der Einbindung auf sämtliche Parameter der Nachfragesysteme einwirken, da als Ergebnis dieses Ansatzes jede Untergruppe ein eigenes Nachfragesystem mit einem Parametervektor besitzt, der jeweils nur aus Daten mit der entsprechenden demographischen Abgrenzung bestimmt wurde. Die problematische Annahme gleicher Haushaltspräferenzen gilt daher bei diesem Verfahren nur für die jeweiligen Untergruppen der Grundgesamtheit. *Pollak* und *Wales* bezeichnen diese Methode als "unpooled estimation".¹

Die zweite generelle Verfahrensweise schränkt im Gegensatz dazu die Wirkung demographischer Unterschiede auf bestimmte Parameter des Systems ein. Um die Idee einer derartigen Einbindung zu skizzieren, soll im Folgenden kurz die so genannte *Gorman-Spezifizierung* erläutert werden. In der empirischen Praxis werden vor allem zwei Spezialfälle dieser allgemeinen Modellierungsmethode angewendet.² Daher erfolgt zusätzlich eine gesonderte Betrachtung der *demographischen Verschiebung* und der *demographischen Skalierung*.

Gorman-Spezifizierung

Bei der *Gorman-Spezifizierung* wirken die demographischen Variablen auf zwei Parametervektoren ein, die dann auf grundlegend unterschiedliche Art in ein theoretisch konsistentes Nachfragesystem integriert werden.³ Der Vektor der D demo-

¹Vgl. *Pollak, Wales* (1981, S. 1533).

²Eine noch allgemeinere Formulierung möglicher Einbindungen demographischer Merkmale in theoretisch konsistente Nachfragesysteme wird von *Lewbel, A.* beschrieben. Er nutzt für die Darstellung eine modifizierte Ausgabenfunktion. Siehe dazu *Lewbel, A.* (1985, S. 3ff.). Die *Gorman-Spezifizierung* und somit ihre beiden Spezialfälle können auch mit dieser Form dargestellt werden. Siehe dazu *Lewbel, A.* (1985, S. 7ff.).

³Vgl. *Gorman, W.M.* (1976, S. 211-243).

graphischen Merkmale sei hierfür definiert als $d = (d_1, \dots, d_r, \dots, d_D)$. Der von diesem und nur diesem Vektor determinierte L -dimensionale Parametervektor der Verschiebung v sei definiert als $v = (v_1, \dots, v_i, \dots, v_L)$, mit $v_i = V^i(d)$.⁴ Der zweite Parametervektor der Skalierung s ist ebenso nur vom Vektor d abhängig. Es gilt der funktionale Zusammenhang $s = (s_1, \dots, s_i, \dots, s_L)$, mit $s_i = S^i(d)$. Die beiden Vektoren v und s werden bei dieser Form der Einbindung demographischer Variablen wie folgt in das theoretisch konsistente Nachfragesystem $x_i^M = x_i^M(p_1, \dots, p_i, \dots, p_L, M)$ eingebettet:

$$\tilde{x}_i^M = v_i + s_i \cdot x_i^M(s_1 p_1, \dots, s_i p_i, \dots, s_L p_L, M - \sum_{i=1}^L p_i v_i). \quad (6.1)$$

Das in dieser Weise kreierte, von demographischen Variablen abhängige neue System \tilde{x}_i^M ist zumindest für v_i 's nahe Null und s_i 's nahe Eins theoretisch konsistent. Anders als bei einer willkürlichen Integration demographischer Variablen erfolgt hier die Einbindung in enger Verflechtung zu den vorhandenen erklärenden Merkmalen p und M . Dadurch können zusätzliche Restriktionen, die die theoretische Konsistenz des Systems sicherstellen, vermieden oder zumindest minimiert werden.⁵ Das modifizierte System 6.1 folgt aus der indirekten Nutzenfunktion

$$\mathcal{N}(p, M) = \mathcal{N}(s_1 p_1, \dots, s_i p_i, \dots, s_L p_L, M - \sum_{i=1}^L p_i v_i) \quad (6.2)$$

bzw. direkten Nutzenfunktion

$$U(x^M) = U\left(\frac{\tilde{x}_1^M - v_1}{s_1}, \dots, \frac{\tilde{x}_i^M - v_i}{s_i}, \dots, \frac{\tilde{x}_L^M - v_L}{s_L}\right). \quad (6.3)$$

Die reverse *Gorman*-Spezifizierung unterscheidet sich von der obigen Integration demographischer Merkmale eines Haushalts durch die umgekehrte Einbindungsreihenfolge der Vektoren s und v . Anders als bei der obigen originalen *Gorman*-Spezifizierung erfolgt hier zunächst die Verschiebung des Koordinatenursprungs durch den Vektor v . Erst im Anschluss werden alle Preise durch den Skalierungsvektor s verändert. Dies führt zu einem System mit der indirekten Nutzenfunktion

$$\mathcal{N}(p, M) = \mathcal{N}(s_1 p_1, \dots, s_i p_i, \dots, s_L p_L, M - \sum_{i=1}^L s_i p_i v_i) \quad (6.4)$$

bzw. mit der direkten Nutzenfunktion

$$U(x^M) = U\left(\frac{\tilde{x}_1^M}{s_1} - v_1, \dots, \frac{\tilde{x}_i^M}{s_i} - v_i, \dots, \frac{\tilde{x}_L^M}{s_L} - v_L\right). \quad (6.5)$$

Die daraus folgenden Nachfragekurven haben dann die Struktur

$$\tilde{x}_i^M = s_i \left(v_i + x_i^M(s_1 p_1, \dots, s_i p_i, \dots, s_L p_L, M - \sum_{i=1}^L s_i p_i v_i) \right). \quad (6.6)$$

⁴Es sei daran erinnert, dass in der Notation dieser Arbeit L für die Anzahl der im Nachfragesystem modellierten Güter steht.

⁵Vgl. Missong, M. (2004, S. 115).

Demographische Skalierung

Der Spezialfall der reinen demographischen Skalierung folgt bei $v = 0$ aus der soeben dargestellten, generellen *Gormanschen* Einbindungsmöglichkeit und wurde zuerst von *Barten* im Jahre 1964 als demographische Modellierung genutzt.⁶ Dieser Spezialfall führt zu einem System mit der indirekten Nutzenfunktion

$$\mathcal{N}(p, M) = \mathcal{N}(s_1 p_1, \dots, s_i p_i, \dots, s_L p_L, M) \quad (6.7)$$

bzw. mit der direkten Nutzenfunktion

$$U(x^M) = U\left(\frac{\tilde{x}_1^M}{s_1}, \dots, \frac{\tilde{x}_i^M}{s_i}, \dots, \frac{\tilde{x}_L^M}{s_L}\right). \quad (6.8)$$

Die daraus folgenden Nachfragekurven haben dann die Struktur

$$\tilde{x}_i^M = s_i \left(x_i^M(s_1 p_1, \dots, s_i p_i, \dots, s_L p_L, M) \right). \quad (6.9)$$

Diese Modellierungsmethode versucht primär über eine Modifikation der Preise demographisch determinierte Unterschiede in den Präferenzordnungen abzubilden.⁷ Zur besseren Interpretation sei zunächst vereinfachend angenommen, dass der Skalierungsvektor s für alle L -Güter identische Elemente besitzt. In diesem Fall können die dann für ein bestimmtes demographisches Profil d gleichen Funktionswerte $s = (s_E, \dots, s_E, \dots, s_E) = S(d)$ als Anzahl *äquivalenter Erwachsener* in einem Haushalt bezeichnet werden.⁸ Entspricht s_E beispielsweise 2, folgt bei dieser Modellierung die Haushaltsnachfrage nach Gut \tilde{x}_i^M durch die Verdopplung der Nachfrage eines solchen *äquivalenten Erwachsenen*. Diese Nachfrage wiederum ist das Ergebnis der Nutzenmaximierung mit verdoppelten Preisen, was gemäß Budgetgleichung einer Einkommenshalbierung des Gesamthaushaltes entspricht. Gedanklich erfolgen also im Beispiel zwei Optimierungen von zwei mit gleichen Präferenzen ausgestatteten Individuen, denen jeweils die Hälfte des Haushaltseinkommens zugeteilt wird. Die beiden so bestimmten identischen Nachfragemengen werden einfach durch Verdopplung zur Haushaltsnachfrage aggregiert.

Wird die für das Verständnis hilfreiche Vereinfachung zugunsten eines mit den Gütern variierenden Vektors s mit $s_i = S^i(d)$ aufgegeben, verbessert sich die Flexibilität der demographischen Modellierung. Die durch den Wegfall der Einkommensreduktionsumschreibung verursachte weniger eingängige Interpretation der s_i ist der dafür zu zahlende Preis. *Pollak* und *Wales* bezeichnen die s_i in diesem allgemeineren Fall als "equivalent adult in the household, measured on a scale appropriate to good i ".⁹ Ihr Interpretationsversuch ist jedoch kaum mehr

⁶Vgl. *Barten, A.P.* (1964, S. 277-292).

⁷Vgl. *Lewbel, A.* (1985, S. 1).

⁸Die Vereinfachung $s = (s_E, \dots, s_E, \dots, s_E) = S(d)$ findet sich auch in *Pollak, Wales* (1981, S. 1535). Die hier gewählte Interpretation durch die Wirkung der s_E auf die Optimierungsrestriktion Einkommen erfolgt dort jedoch nicht.

⁹*Pollak, Wales* (1980, S. 598).

als eine verbale Beschreibung der nach $\frac{\tilde{x}_i^M}{s_i}$ umgeformten Gleichung (6.9). Demnach determiniert die Haushaltspräferenzordnung nicht mehr die bei gegebenen Einkommen und Preisen bevorzugte herkömmliche Güterkombination, sondern vielmehr eine Kombination von mit "commodity specific adults" s_i skalierten Gütern. In eine derartige Optimierungsüberlegung werden die skalierten Preise einbezogen, so dass Haushalte mit unterschiedlichen demographischen Merkmalsvektoren d sich sowohl in den Optimierungsparametern $s_i p_i$ als auch in der Interpretation der dadurch erzielten Optimierungsergebnisse unterscheiden. Ohne den Anspruch auf eine bessere Beschreibung der Methode der demographischen Skalierung erheben zu wollen, sei hier am Beispiel des Vorhandenseins von Kindern im Haushalt skizziert, wie der flexiblere Vektor s auf das jeweilige Nachfragesystem einwirken könnte. Güter wie Spielzeug, die vor allem Kindern zu Gute kommen, würden wahrscheinlich im Nachfragesystem des Haushalts mit Kindern relativ stärker nachgefragt. Um diesen wahrscheinlichen Effekt abzubilden, bietet die Methode zwei möglicherweise in ihrer Wirkung gegenläufige Mechanismen. Ordnet das Merkmal Kinder dem Gut Spielzeug ein s_i mit $0 < s_i < 1$ zu, so stünde der mengenverringernenden Wirkung des Faktors s_i eine möglicherweise durch die fiktive Preissenkung $s_i p_i$ verursachte Erhöhung des zweiten Faktors x_i^M entgegen.¹⁰ Der Gesamteffekt auf die Spielzeugnachfrage \tilde{x}_i^M ist also genauso unsicher wie bei dem entgegengesetzten Fall $s_i \geq 1$. Trotz dieser zwei Wirkungsrichtungen und der damit verbundenen Unsicherheit über die tatsächliche Abhängigkeit des Vektors s von den jeweiligen demographischen Merkmalen erleichtert ein für das gewählte Beispiel angenommener positiver Zusammenhang zwischen der Anzahl der Kinder und der Größe des s_i von Spielzeug das Verständnis des genannten Begriffs "commodity specific adults".

Der, wie soeben beschrieben, selbst in der Richtung unbestimmte funktionale Zusammenhang $s_i = S^i(d)$ wird in der empirischen Praxis in der Regel als linearer Zusammenhang modelliert. Beim so genannten linearen demographischen Skalieren gilt:

$$S^i(d) = s_i = 1 + \sum_{r=1}^D \epsilon_{ir} d_r . \quad (6.10)$$

Bei einer Spezifizierung, in der die ϵ_{ir} nicht mit den Gütern variieren, also ϵ_r , entspricht die Modellierung der oben beschriebenen Vereinfachung mit den äquivalenten Erwachsenen s_E .¹¹

Demographische Verschiebung

Der Spezialfall der reinen demographischen Verschiebung folgt bei $s = 1$ aus der unter 6.1.1 auf S. 144f. dargestellten, generellen Gormanschen Einbindungs-

¹⁰Siehe dazu Gleichung (6.9), S. 146.

¹¹Vgl. Pollak, Wales (1981, S. 1536).

möglichkeit. Dieser Spezialfall führt zu einem System mit der indirekten Nutzenfunktion

$$\mathcal{N}(p, M) = \mathcal{N}(p_1, \dots, p_i, \dots, p_L, M - \sum_{i=1}^L p_i v_i) \quad (6.11)$$

bzw. mit der direkten Nutzenfunktion

$$U(x^{\mathcal{M}}) = U(\tilde{x}_1^{\mathcal{M}} - v_1, \dots, \tilde{x}_i^{\mathcal{M}} - v_i, \dots, \tilde{x}_L^{\mathcal{M}} - v_L). \quad (6.12)$$

Die daraus folgenden Nachfragekurven haben dann die Struktur

$$\tilde{x}_i^{\mathcal{M}} = v_i + x_i^{\mathcal{M}} \left(p_1, \dots, p_i, \dots, p_L, M - \sum_{i=1}^L p_i v_i \right). \quad (6.13)$$

Bei der Verschiebung ist eine lineare Spezifizierung des funktionalen Zusammenhangs $V^i(d)$ in der empirischen Praxis üblich, jedoch wie bei der linearen Skalierung nicht völlig unproblematisch. Laut *Bollino, C. A. et al.* liegt die Restriktivität der linearen Spezifikation vor allem in der dadurch verursachten Konstanz der Grenzeffekte $\frac{\partial V^i(d)}{\partial d_r} = \eta_{ir}$. Insbesondere gilt diese Kritik der mangelnden Flexibilität des Familiengrößen-Grenzeffekts.¹² Beim so genannten linearen demographischen Verschieben wird der Zusammenhang zwischen Verschiebeparameter und demographischen Merkmalen wie folgt modelliert:

$$V^i(d) = v_i = \sum_{r=1}^D \eta_{ir} d_r. \quad (6.14)$$

6.1.2 Demographische Spezifizierung und Querschnittsdaten

Die enge Verwandtschaft der demographischen Verschiebung mit der LES- aber auch der QES-Modellierung ist unverkennbar. Der Nutzen hängt in (6.11) neben den Preisen von einem Einkommen ab, welches um einen durch demographische Eigenheiten des Haushalts determinierten Betrag reduziert wurde.¹³ Im Gegensatz zur demographischen Skalierung wird hier nicht versucht, die demographischen Eigenheiten eines Haushalts über die Preise in das Nachfragesystem einfließen zu lassen. Deshalb ist die Methode der Verschiebung besonders für Modelle, die mit Querschnittsdaten identifiziert werden können, interessant.¹⁴ Querschnittsdaten bieten eine vergleichsweise geringe Variation in den Preisen. Daher

¹²Der Parameter η_{ir} für $r =$ Familiengröße ist unabhängig von etwaigen Veränderungen der Ausprägung dieses demographischen Merkmals. *Bollino, C. A. et al.* nutzen eine quadratische Verallgemeinerung, um die empirische Relevanz dieser Einschränkung abzuschätzen. Vgl. *Bollino, C.A. et al.* (2000, S. 279f.).

¹³Vgl. dazu 5.2, S. 119ff.

¹⁴Modelle, die mit Querschnittsdaten identifiziert werden können, wurden im vorangegangenen Kapitel 5 beschrieben.

nutzen die in Kapitel 5 beschriebenen Modelle vor allem die größere Einkommensvariation. Fließen die demographischen Unterschiede also über den Einkommenskanal in das Nachfragesystem ein, so sind die in Kapitel 5 behandelten Systeme, die schon potentielle Verschiebeparameter besitzen, besonders für eine derartige Nachbildung der Einflüsse demographischer Besonderheiten geeignet.

Zur Verdeutlichung dieses Gedankens ist die demographische Verschiebung eines LES in Abbildung 6.1 dargestellt. Der Unterschied im Nachfrageverhalten von

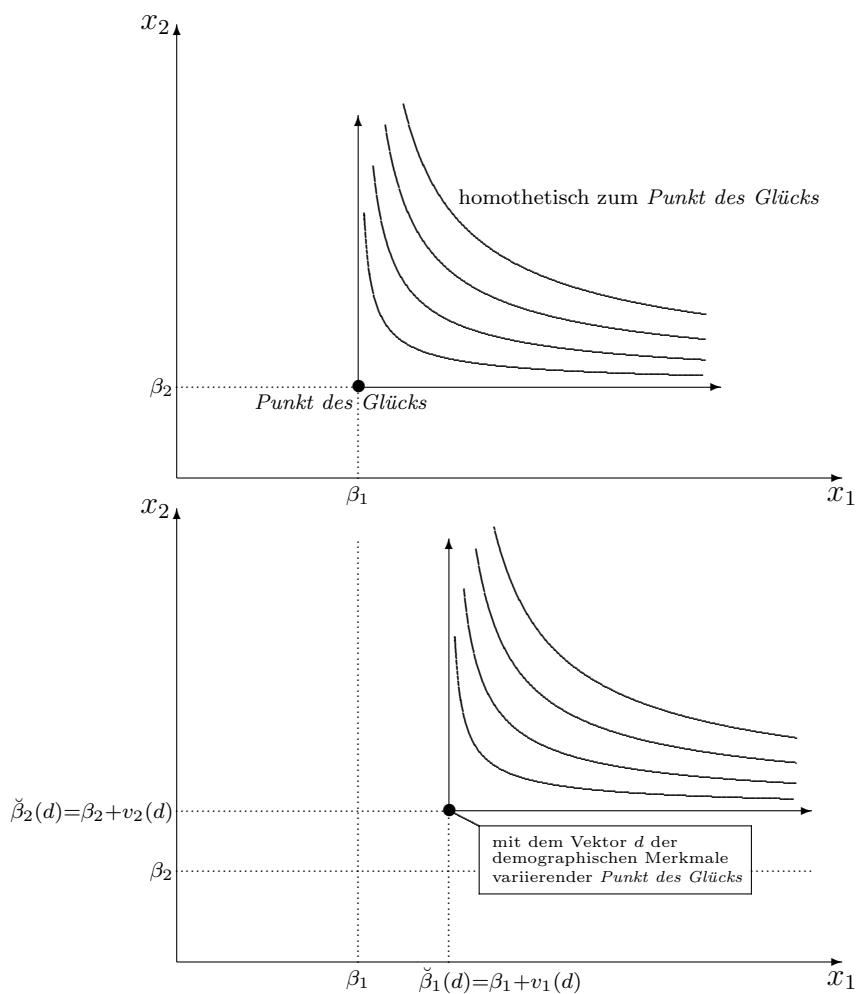


Abbildung 6.1: Demographische Verschiebung eines LES (Quelle: Eigene Darstellung i.A.a. Missong, M. (2004, S. 120)).

Haushalten mit unterschiedlichem soziodemographischen Profil wird durch eine variable Lage des so genannten *Punkt des Glücks* modelliert. Dies ist im Falle einer LES-Modellierung gleichbedeutend mit der soziodemographischen Abhängigkeit des absoluten Gliedes der Engelkurven, was ein Vergleich mit Abbildung 5.3

auf S. 123 verdeutlicht. Die Unterschiede wirken also nur auf die Lageparameter $\check{\beta}_i(d)$ der Engelkurven und nicht auf die Anstiege. Das bedeutet in der Konsequenz, dass die Nachfragereaktion der Haushalte auf Einkommensänderungen ab dem Mindesteinkommen $\sum_{i=1}^L p_i \check{\beta}_i(d)$ unabhängig von etwaigen soziodemographischen Unterschieden ist.

Auch im QES kann die Modellierung der demographischen Einflüsse über die β -Parameter erfolgen.¹⁵ Die eingängige Interpretation der β -Parameter als soziodemographisch veränderliche Mindestmengen ist auch bei diesem Modelltyp möglich. Anders als im LES kann im QES die Nachfragereaktion der Haushalte auf Einkommensänderungen über unterschiedliche soziodemographische Profile variieren. Bei der Anwendung der demographischen Verschiebung im QES sind also sowohl die absoluten Glieder als auch die Anstiege der Engelkurven vom Vektor d der demographischen Merkmale abhängig.¹⁶

Beiden Modelltypen gemeinsam ist die Abhängigkeit der Preisreaktion der Nachfrage von den β -Parametern und somit von den demographischen Merkmalen eines Haushalts. Es handelt sich hierbei jedoch nur um eine scheinbare Flexibilität. Die Preisreaktionen dieser Modelltypen sind nur durch theoretische Überlegungen und Zusammenhänge aus den Einkommensreaktionen abgeleitet worden. Insofern kann durch die Methode der demographischen Verschiebung keine empirisch eigenständige Wirkung demographischer Faktoren auf die Preisreaktionen der Nachfragesysteme LES und QES modelliert werden.

Ob für die demographische Spezifizierung mit Querschnittsdaten der Verschiebungsmethode oder einer "unpooled" Schätzung der Vorzug gegeben wird, ist eine empirische Fragestellung und kann daher nicht theoretisch beantwortet werden. Grundsätzlich bleibt festzuhalten, dass die separaten Nachfragesystemsätzungen für Untergruppen der Grundgesamtheit eine flexiblere Anpassung an die Daten erlauben und somit prinzipiell Vorteile besitzen. Der durch die Aufspaltung des Datensatzes verursachte Nachteil geringerer Fallzahlen muss diesem Vorteil gegenübergestellt werden, so dass ein Mischsystem mit einer demographischen Verschiebung innerhalb größerer Untergruppen am Erfolg versprechendsten sein könnte.

Empirische Tests stützen die obige Aussage der theoretischen Überlegenheit der "unpooled" Schätzung gegenüber der demographischen Skalierung und Verschiebung. So wird z.B. von *Barnes* und *Gillingham* erwartungsgemäß festgestellt, dass „... compared to the unpooled procedure, procedures based on demographic translation and scaling are inadequate representations of the role of demographic variables in the QES demand system analyzed ...“¹⁷. Des Weiteren wurde in zahlreichen Untersuchungen geprüft, welche demographischen Merkmale einen

¹⁵Vgl. bezüglich des Aufbaus eines QES 5.3.1, S. 132ff.

¹⁶Vgl. die Gleichungen (5.69) und (5.71), S. 133f., für die Abhängigkeit der absoluten Glieder und die Gleichungen (5.74) und (5.75), S. 135, für die Abhängigkeit der Anstiege.

¹⁷*Barnes, Gillingham* (1984, S. 596).

signifikanten Einfluss auf die Präferenzen der Haushalte und somit auf ihr Nachfrageverhalten besitzen. Eine der ersten empirischen Arbeiten in diesem Bereich wurde von *Zwick* durchgeführt. Er analysierte mit einem eigens dafür erhobenen, 151 Haushalte umfassenden Datensatz die Einflüsse von Alter, Familiengröße und Bildungsniveau auf eine bestimmte Nahrungsmittelnachfrage. Die Ergebnisse seines einfachen Ansatzes deuteten auf einen starken Einfluss des Alters hin.¹⁸ Dieser frühe spezielle Befund wurde in einer aktuelleren Studie über die Bedeutung des Alters für die Konsumnachfrage verallgemeinernd bestätigt. *Lyssioutou, P.* et al. konstatieren: „In the case of our sample an adequate empirical demand system requires dummies to allow for the behaviour of households with head under 30 to differ from the behaviour of households with head over 30.“¹⁹ Neben dem Alter können weitere einflussreiche Merkmale identifiziert werden. So belegen beispielsweise *Blundell* und *Walker*, dass das Vorhandensein von insbesondere jungen Kindern im Haushalt ein für Nachfragesysteme bedeutendes demographisches Merkmal ist.²⁰ Zusammenfassend kann festgehalten werden, dass es vor allem die Einflüsse der Haushaltgröße mit dazugehöriger Altersausprägung sind, die in empirischen Untersuchungen mit demographischer Spezifizierung betrachtet werden. Allerdings muss bei der Schätzung von Nachfragesystemen für Mikrosimulationsmodelle ein zusätzlicher Aspekt Beachtung finden. Die Entscheidung über die Auswahl und Modellierung demographischer Merkmale darf das Untersuchungsziel nicht außer Acht lassen. Soll beispielsweise die Wirkung einer Reform auf Alleinerziehende analysiert werden, so ist, vorbehaltlich der Datenlage, eine soziodemographische Abgrenzung in dieser Richtung nahezu zwingend vorgegeben.

6.2 Das Problem des Nullkonsums

Das Problem des Nullkonsums wurde bereits in Kapitel 3 kurz angesprochen. Es stellt schon seit geraumer Zeit eine der größten Herausforderungen der empirischen Nachfrageanalyse dar.²¹ Erfasster Nullkonsum ist bei Mikrodatensätzen mit detaillierten Informationen über die Güternachfrage nicht ungewöhnlich. Die Nachfrage eines Haushalts nach der Mehrzahl der Güter ist schließlich generell unregelmäßig.²² An dieser Stelle soll nur cursorisch auf die verschiedenen Ursachen und die Auswirkungen dieses Sonderfalls der Haushaltsnachfrage eingegangen werden, um anschließend einen Überblick über Lösungsansätze zu präsentieren. Auf eine detailliertere Darstellung wird verzichtet, da sich die jeweils optimalen

¹⁸Vgl. *Zwick, C.* (1957, S. 455).

¹⁹*Lyssioutou, P.* et al. (2002, S. 164).

²⁰Vgl. *Blundell, Walker* (1984, S. 67).

²¹Laut *Deaton* ist es „... one of the most pressing in applied demand analysis.“ Vgl. *Deaton, A.* (1986, S. 1809).

²²Siehe dazu beispielsweise die unter 2.3.3, S. 39ff., beschriebenen Konsum-Daten der Einkommens- und Verbrauchsstichprobe und ihre in Abbildung 2.5, S. 38, skizzierte Erhebung.

Lösungen einer generellen, umfassenden Darstellung entziehen. Im Folgenden werden vielmehr grundlegende Strategien vorgestellt, um dem Leser einen Eindruck von den vielfältigen Schwierigkeiten und Lösungsmöglichkeiten zu vermitteln.

6.2.1 Ursachen und Auswirkungen des Nullkonsums

Der in einem Querschnittsdatensatz erfasste Nullkonsum eines Gutes kann verschiedene Gründe haben. In Anlehnung an *Keen* können drei Ursachen für diesen besonderen Typus erhobener Nachfrageinformation unterschieden werden.²³

Als Erstes ist die schon eingangs erwähnte und durch einen zu kurzen Erhebungszeitraum verursachte Nullnachfrage abzugrenzen. Diese Art des Nullkonsums kann besonders bei langlebigen und/oder teuren Konsumgütern angetroffen werden.²⁴ Die Nachfrage nach Automobilen ist ein klassisches Beispiel für diese Form.²⁵ Die Präferenzen für solche Güterarten sind durchaus vorhanden und es erfolgt generell auch eine Nachfrage, jedoch derart unregelmäßig, dass viele Haushalte im Erhebungszeitraum keine Ausgaben tätigen und somit ein Nullkonsum berichtet wird.

Die zweite mögliche Ursache ist das so genannte "misreporting". In diesem Fall enthält der Datensatz fälschlicherweise eine Nachfrage von Null. Diese Fehlinformation folgt aus Mängeln bei der Datenerfassung und ist daher prinzipiell mit der ersten genannten Ursache für Nullkonsum vergleichbar.²⁶

Als dritte und letzte mögliche Ursache stellt der mangelnde Wunsch nach bestimmten Güterarten eine Begründung für das Fehlen einer positiven Nachfrage dar. Der Tabakkonsum kann als Beispiel für diese Form des Nullkonsums genannt werden. Anders als bei den ersten beiden Formen ist der Nullkonsum hier in den Präferenzen der Haushalte verankert. Diese Ursache passt im Gegensatz zu den anderen beiden Ursachen nicht in den bisher dargestellten theoretischen Rahmen der Haushaltsnachfrage. Die den bisherigen Ausführungen zugrunde liegende rationale Präferenzordnung eines Haushalts erfüllt die auf Seite 49 getroffene Annahme A4 einer steigenden streng quasikonkaven Nutzenfunktion in Ω . Nullkonsum ist bei Geltung dieser Eigenschaft jedoch nicht modellierbar.²⁷ Mit dem Verlust der durch die sechs Annahmen²⁸ sichergestellten Gültigkeit der Beziehung $\nabla U(x) = p$ im Lösungsvektor des Optimierungsproblems gehen zahlreiche Eigenschaften der Nachfragesysteme, wie beispielsweise die uneingeschränkte Gültigkeit der *Slutsky*-Beziehung, verloren. Streng genommen können daher bei vorliegendem Nullkonsum der dritten Ursache die bisher genutzten Eigenschaf-

²³Vgl. *Keen, M.* (1986, S. 277).

²⁴Vgl. beispielsweise *Deaton, A.* und *Irish, M.* (1984, S. 60).

²⁵In seiner bahnbrechenden Arbeit über das Problem des Nullkonsums nutzt auch *James Tobin* dieses Beispiel. Vgl. *Tobin, J.* (1958, S. 25).

²⁶Die Ähnlichkeit gilt nur bei rein zufälligem Auftreten einer solchen Fehlerfassung.

²⁷Vgl. dazu die Abbildung 3.2, S. 52, und die zugehörigen Ausführungen unter 3.2.1, S. 51ff.

²⁸Die sechs getroffenen Annahmen finden sich auf den Seiten 48ff.

ten theoretisch konsistenter Nachfragesysteme nicht mehr verwendet werden. Unter anderem ist der problemlose Einsatz der Symmetrieeigenschaft der *Slutsky*-Matrix gefährdet, welcher z.B. für die notwendige Reduktion der empirisch zu schätzenden Parameter genutzt wird. Ein Vergleich mit den Ausführungen zu den in Kapitel 5 beschriebenen ausgewählten funktionalen Formen verdeutlicht diesen Zusammenhang. Die grundsätzlichen theoretischen Schwierigkeiten werden in der einschlägigen Literatur bzw. bei der empirischen Arbeit mit Nachfragesystemen mehrheitlich ignoriert. Auch *Keen*, an dessen Arbeit sich die hier verwendete Dreiteilung der Nullkonsumformen orientiert, beschreibt explizit nur Lösungsansätze für das Problem des unregelmäßigen Konsums.²⁹ Eine seltene Ausnahme bietet die Arbeit von *Wales* und *Woodland*.³⁰ Zwar zielt auch deren Ansatz primär auf die Überwindung der Probleme mit nicht erwartungstreuen, inkonsistenten Parameterschätzern bei vorhandenem Nullkonsum ab, jedoch wird für diese Aufgabe ein modifizierter theoretischer Rahmen genutzt.³¹ Sie entwickeln ein spezielles ökonometrisches Modell, welches auf den *Kuhn-Tucker*-Bedingungen³² fußt. Für die in Kapitel 5 beschriebenen Systeme stellt dieser Weg jedoch keine Lösung dar. Die eher zur Lösung des empirischen Schätzproblems entwickelte Methode kann und will die oben genannten theoretischen Schwierigkeiten der dritten Form des Nullkonsums nicht überwinden. Dies wird insbesondere an der von *Lee* und *Pitt* durchgeführten Umwandlung des *Wales-Woodland*-Modells in das dazugehörige Dual-Problem deutlich.³³ Hier wird eher pragmatisch mit der Nachfrage- theorie hantiert, indem beispielsweise *Roys Identität* trotz der Nullkonsumproblematik Anwendung findet, obwohl die Nutzung derartiger technischer Hilfsmittel aus strenger theoretischer Sicht zwingend die generelle Gültigkeit der Beziehung $\nabla U(x) = p$ verlangt.³⁴ Dieser Umgang mit den von der Nachfrage- theorie bereitgestellten Instrumenten soll keineswegs verurteilt werden. Vielmehr wird für eine Sensibilisierung der Anwender im Umgang mit den Instrumenten plädiert, die unter Umständen zu besseren Entscheidungen beim Lösen der speziellen Probleme des Nullkonsums führt.

Der Fokus der wissenschaftlichen Forschung liegt bis dato auf den durch den Nullkonsum verursachten Komplikationen bei der Anwendung konventioneller statistischer Methoden. Die diesbezüglichen Auswirkungen der Nullnachfrage sollen im Folgenden kurz dargestellt werden, ohne dabei zu sehr auf Details einzu-

²⁹Vgl. *Keen, M.* (1986, S. 277ff.).

³⁰Vgl. *Wales, T.J.* und *Woodland, A.D.* (1982, S. 263ff.). In einer aktuelleren Untersuchung nutzen beispielsweise *Phaneuf, D.J.* u.a. (2000, S. 83ff.) diesen Ansatz, um die Nachfrage nach Erholungsreisen in bestimmte Urlaubsregionen zu schätzen.

³¹Die Auswirkungen des Nullkonsums auf die Güte der Parameterschätzer werden im zweiten Abschnitt von 6.2.1 näher erläutert.

³²Vgl. dazu beispielsweise *Hoy, M.* u.a. (1996, S. 571ff.).

³³Vgl. *Lee, L.* und *Pitt, M.M.* (1986, S. 1237ff.).

³⁴Vgl. dazu 3.3.2, S. 59, mit dem dazugehörigen Nachweis unter A.12, S. 206f.

gehen oder gar einen Anspruch auf Vollständigkeit zu erheben.

Für die Schätzung von Nachfragesystemen aus Querschnittsdaten sind vor allem die in Kapitel 5 beschriebenen funktionalen Formen interessant. Die Problematik wird daher der Einfachheit halber am Beispiel der Schätzung eines PES verdeutlicht. Dazu wird im Folgenden angenommen, dass der wahre Zusammenhang zwischen dem Einkommen und der jeweiligen Güternachfrage linearen, durch den Ursprung verlaufenden Funktionen entspricht. Die Formulierung "wahrer Zusammenhang" bezieht sich dabei auf die grundsätzliche Struktur der Engelkurven. Es gilt, die L Parameter α_i dieser L Engelkurven zu schätzen. Sollte die Beziehung für die Gruppe konsumierender Haushalte gesucht sein, schwankt unter der angenommenen Richtigkeit der PES-Form die empirisch erhobene Güternachfrage x_{ih} (\times) um die in Abbildung 6.2 dargestellte Gerade $x_i^M = \frac{\alpha_i}{p_i} M$. In diesem Beispiel würde die Vernachlässigung der Nullnachfrage (\otimes) einzelner Haushalte zu einer erwartungstreuen, konsistenten Schätzung der Parameter führen. Die Fehler des ökonometrischen Modells $x_i^M = \frac{\alpha_i}{p_i} M + u_{ih}$ erfüllen hier die übliche Annahme normalverteilter u_{ih} mit dem Mittelwert Null und einer über die H Haushalte, nicht aber über die L Güter konstanten Varianz ($u_{ih} \sim N(0, \sigma_i^2)$ $i = 1, \dots, L$). Wird hingegen Nullkonsum beim Gut x_i zugelassen, hat dies negative Auswirkungen

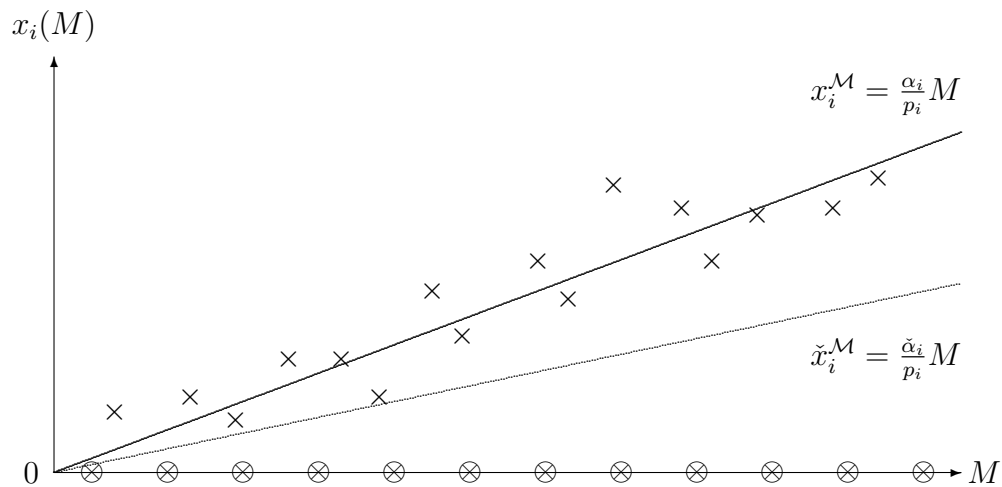


Abbildung 6.2: Auswirkungen des zufälligen Nullkonsums (Quelle: Eigene Darstellung).

gen auf die Güte der Parameterschätzung. Die Ursache des Phänomens wird zur Verdeutlichung in Abbildung 6.2 in idealisierter Weise durch eine unregelmäßige Nachfrage begründet. Nullnachfrage tritt daher unabhängig vom Einkommen auf, was durch die gleichmäßige Verteilung der \otimes auf der Einkommensachse gezeigt werden soll.³⁵ Die Betrachtung der vertikalen Abstände zwischen der unter

³⁵In diesem Beispiel wird auch eine Gleichverteilung des Einkommens angenommen.

Einschluss der Nullkonsumdaten geschätzten punktierten Gerade $\check{x}_i^M = \frac{\check{\alpha}_i}{p_i} M$ und allen empirischen Beobachtungen zeigt die erste durch Nullkonsum verursachte Schwierigkeit. Die Streuung der Fehler bei den einzelnen Gütern ist nicht mehr konstant, sondern erhöht sich mit steigendem Einkommen. Diese als Heteroskedastizität der Fehler u_{ih} bekannte Eigenschaft ist laut *Keen* zumindest bei Nullkonsum der ersten Ursache eine „... theoretical necessity rather than an empirical regularity.“³⁶ An dieser Stelle wird auf die Darstellung der damit verbundenen Schätzprobleme verzichtet. In nahezu jedem Lehrbuch der Ökonometrie finden sich umfassende Ausführungen zu Wirkung und Umgang mit Heteroskedastizität.³⁷

Die zweite generelle Auswirkung auf die Parameterschätzung bei vorhandenen Nullkonsumdaten kann in der Abbildung 6.2 an der Lage der punktierten Geraden nachvollzogen werden. Die Nullkonsumrealisierungen \otimes ziehen die geschätzte Gerade bei Einbeziehung nach unten. Der Parameter α_i wird hier bezüglich des gesuchten Zusammenhangs systematisch unterschätzt. Somit kann durch die fehlerhaften Daten eine korrekte Bestimmung des Parameters nicht mehr erwartet werden.³⁸ Diese zweite Auswirkung ist aber nur dann problematisch, wenn das Ziel der Schätzung in der Bestimmung der Reaktionsparameter unter der Bedingung erfolgten Konsums besteht. Besteht das Untersuchungsziel hingegen in der Bestimmung der Reaktionsparameter, die im Durchschnitt für alle, d.h. für konsumierende und für nicht konsumierende Haushalte gelten, entspricht die punktierte Linie dem wahren Zusammenhang und die Berücksichtigung der rein zufälligen Nullkonsumbeobachtungen wäre zwingend vorgegeben.

Die dritte generelle Auswirkung ist in der Abbildung 6.2 nicht zu erkennen, da dort das Phänomen Nullkonsum als unabhängig vom Einkommen dargestellt wurde. Je nach Untersuchungsziel konnte im Falle der angenommenen reinen Zufälligkeit von Nullkonsum das Problem durch die Berücksichtigung oder das Weglassen der Nullbeobachtungen gelöst werden. Die Schwierigkeiten bei der Anwendung des statistischen Instrumentariums liegen bei der Variante mit Nullkonsumdaten lediglich in der dadurch verursachten Heteroskedastizität. Nullkonsum der dritten oben genannten Ursache ist möglicherweise nicht unabhängig vom Einkommen. In Abbildung 6.4 auf Seite 160 ist ein Beispiel dargestellt, in welchem der Nullkonsum in einer klaren Abhängigkeit zum Einkommen steht. Bei einer einfachen Einbeziehung der Nullbeobachtungen ist eine negative Wirkung auf die Parameterschätzung erkennbar, die Ähnlichkeit mit der in Abbildung 6.2 skizzierten besitzt, obgleich sie in diesem Fall in die andere Richtung verzerrt.³⁹ Mit der oben für die bedingte Schätzung erfolgreich verwendeten Strategie des Weglassens der Nullbeobachtungen gelingt in diesem Fall jedoch keine konsisten-

³⁶*Keen, M.* (1986, S. 279).

³⁷Siehe beispielsweise *Greene, W.H.* (2003, S. 215ff.).

³⁸Die Formulierung „fehlerhafte Daten“ ist in diesem idealisierten Beispiel gerechtfertigt, da der Nullkonsum seine Ursache in der Unregelmäßigkeit der Nachfrage hatte.

³⁹Vgl. in Abbildung 6.4, S. 160, die untere punktierte Gerade.

te, erwartungstreue Schätzung bei der Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate.⁴⁰ In Abbildung 6.3 ist die Ursache für diese Art der Verzerrung skizziert. Die zur Verdeutlichung gewählte Darstellungs- und Argumentationsform folgt ausschließlich heuristischen Überlegungen. Die Abbildung der beiden Dichtefunktionsstypen und ihre graphische Übertragung in die Abbildung 6.4 auf Seite 160 dienen lediglich dem besseren Problemverständnis. Angenommen sei, dass der

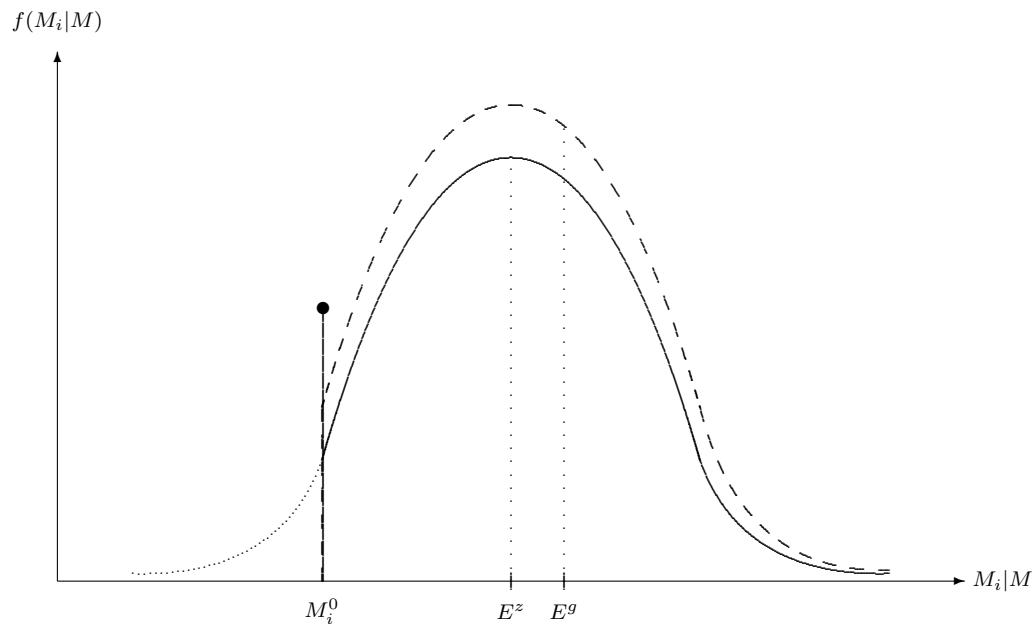


Abbildung 6.3: Dichtefunktion einer gestutzten und zensierten Verteilung (Quelle: Eigene Darstellung).

gesuchte wahre Zusammenhang zwischen dem Einkommen M und den Ausgaben für ein bestimmtes Gut i bekannt ist und dem PES $M_i = \alpha_i M + u_{ih}$ entspricht. Des Weiteren sei angenommen, dass die Nullnachfrage nicht mehr rein zufällig, d.h. im Falle der Abbildung 6.2 nicht mehr unabhängig vom Einkommen, auftritt, sondern in einem funktionalen Zusammenhang mit der Einkommenshöhe steht. Nullkonsum dieser Art entspricht somit im theoretischen Sinne der Randlösung im Falle niedriger Einkommen, also einer Variante der dritten unter 6.2.1 genannten Ursache. Der Haushalt fragt erst ab einem bestimmten kritischen Einkommen M^k ein bestimmtes Gut i nach. Die als bekannt angenommenen so genannten Mindestausgaben M_i^0 für das Gut i stellen im Modell eine untere Grenze bzw. einen Schwellenwert dar.⁴¹ Dieser Schwellenwert schneidet die Dichtefunktion im Beispiel linksseitig ab. Die übliche Annahme der Normalverteilung der Fehler u_{ih} ,

⁴⁰Vgl. in Abbildung 6.4, S. 160, die obere punktierte Gerade.

⁴¹Vgl. Abbildung 6.4, S. 160.

die um den Erwartungswert $E[\alpha_i M + u_{ih}] = E[\alpha_i M] + E[u_{ih}] = E[\alpha_i M] = E^z$ schwanken, ist somit verletzt. Falls die Informationen aus den Nullkonsumdaten genutzt werden, ist die gedankliche Möglichkeit gegeben, die Wahrscheinlichkeit der abgeschnittenen Fläche links von M_i^0 auf den Punkt M_i^0 zu konzentrieren. Zumindest bliebe so die Lage des Erwartungswertes E^z unverändert. Diese so genannte zensierte Verteilung, die dem unter 6.2.2 beschriebenen Tobit-Modell zugrunde liegt, unterscheidet sich jedoch von der gestutzten Verteilung. Letztere ist in der Abbildung 6.3 gestrichelt dargestellt. Das einfache Streichen der Nullkonsumbeobachtungen kommt einer Vernachlässigung der links von M_i^0 liegenden Fläche gleich. Die verbleibende Fläche muss, da der Flächeninhalt unter Dichtefunktionen immer Eins beträgt, hypothetisch angepasst, d.h. vergrößert werden. Die gleichmäßige Vergrößerung bewirkt jedoch eine Verschiebung des Erwartungswertes nach rechts.⁴² Die Verzerrung $E^g - E^z$ ist umso größer, je mehr durch den Schwellenwert links weggeschnitten wird. Die Standardvoraussetzung der Unabhängigkeit des stochastischen Fehlers von der unabhängigen Variable M ist somit nicht mehr erfüllt und der Parameterschätzer α_i daher verzerrt.⁴³

Zusammenfassend kann festgehalten werden, dass das Phänomen des Nullkonsums verschiedene Ursachen haben kann. Neben den Schwierigkeiten, die bei der Nutzung der theoretischen Ergebnisse der Nachfragetheorie entstehen, verursacht er vielfältige Schwierigkeiten bei der Schätzung der Modellparameter. Im folgenden Abschnitt wird daher auf die Handhabung der vorgestellten Probleme näher eingegangen.

6.2.2 Handhabung des Problems Nullkonsum

Eine unüberwindbare Hürde besteht in der mangelnden Fähigkeit, die Art der Ursache für den Nullkonsum zweifelsfrei zu identifizieren.⁴⁴ Somit ist eine unter theoretischen Gesichtspunkten adäquate und optimale Problembehandlung nur schwer möglich. Die theoretische Möglichkeit einer Ausweitung des Erhebungszeitraumes wird in den folgenden Ausführungen nicht berücksichtigt. Eine zeitliche Verlängerung der Datenerfassung hat gewiss das Potential, Nullkonsum der ersten unter 6.2.1 genannten Ursache einzuschränken. Die Erfahrungen der Praxis deuten aber auf eine durch lange Erhebungszeiträume mitverursachte sinkende Teilnahmebereitschaft hin. Dies ist ein sehr hoher Preis für einen solchen Verbesserungsversuch. Bei der EVS wurde deshalb nach 1993 eine Umstellung der Erhebungsmethodik initiiert, die den Zeitraum der Haushaltsbuchführung sogar erheblich verkürzte.⁴⁵ *Ronning* weist des Weiteren auf die Möglichkeit einer Ver-

⁴²Der Erwartungswert der gestutzten Verteilung E^g entspricht dem bedingten Erwartungswert $E[M_i | M_i > M_i^0]$.

⁴³Vgl. dazu wiederum die Abbildung 6.4, S. 160.

⁴⁴Vgl. *Ronning, G.* (1988, S. 72).

⁴⁵Vgl. dazu die Ausführungen zu Abbildung 2.5, S. 38.

schiebung der Haushaltspräferenzen im Zeitablauf hin, wodurch einer Verlängerung des Beobachtungsintervalls zusätzliche Grenzen gesetzt sind.⁴⁶

Abgesehen von dieser problematischen Lösungsmöglichkeit über die zeitliche Komponente bei der Erhebung können generell drei Lösungsansätze identifiziert werden. Zum einen kann die Aggregation der einzelnen Güter zu großen Ausgabengruppen ein Instrument im Umgang mit dem Problem sein. Eine solche Aggregationsstrategie beinhaltet erhebliche Schwächen, welche bereits ausführlich unter 4.1.1 auf den Seiten 68ff. behandelt wurden und daher hier nicht erneut erläutert werden sollen. Ungeachtet dieser Schwächen kann diese Strategie der Problemumgehung als einzige theoretisch konsistente Lösung für die Nullkonsumproblematik der dritten Form angesehen werden. Sie trifft klare Annahmen auf der untersten Güterebene und ermöglicht so die theoretisch einwandfreie Nutzung der Ergebnisse des Modells eines den Nutzen maximierenden Haushalts. Die Vorgehensweise ist daher zumindest aus theoretischer Sicht die sauberste Art im Umgang mit dem Problem. In der praktischen empirischen Forschung muss jedoch ein Kompromiss gefunden werden. Eine Aggregation zu großen Gütergruppen, die solange anhält, bis kein Nullkonsum dieser Aggregate im Datensatz anzutreffen ist, wäre sicherlich genauso suboptimal wie die vollständige Vernachlässigung des Problems und die alleinige Konzentration auf die Problematik der statistischen Methoden. Welcher notwendige Kompromiss zwischen diesen Extrempositionen am Ende gefunden wird, hängt u.a. vom Untersuchungsziel und von der dadurch determinierten Feingliedrigkeit der Güter ab.

Bei speziellen Gütern, wie z.B. bei dem bereits erwähnten Tabak, kann möglicherweise eine Aufspaltung des Datensatzes zum gewünschten Ergebnis führen, indem bei den Nichtrauchern die Existenz des Gutes Tabak einfach vernachlässigt wird. Diese erneute Umgehung des Problems ist als zweiter der hier beschriebenen drei Lösungsansätze nahezu deckungsgleich mit den Grundzügen der bei der demographischen Spezifizierung erläuterten Idee einer "unpooled" Schätzung.⁴⁷ Die Nutzung dieser Variante bei der Schätzung von Nachfragesystemen für dynamische Mikrosimulationsmodelle verursacht jedoch einen Mangel: Übergänge von Mikroeinheiten in den anderen Teil des aufgespaltenen Datensatzes entziehen sich einer modellendogenen Nachbildung. Das Dilemma der unmöglichen Ursachenbestimmung des Nullkonsums tritt hier offen zu Tage. Einerseits wäre eine Aufspaltung des Datensatzes für die Parameterbestimmung aus Querschnittsdaten angemessen. Die Präferenzen der Haushalte unterscheiden sich wahrscheinlich derart stark, dass eine Erklärung der Nachfrageunterschiede über Einkommensunterschiede nicht sinnvoll erscheint.⁴⁸ Andererseits besteht in der Realität natürlich

⁴⁶Vgl. *Ronning, G.* (1988, S. 70).

⁴⁷Die Aufspaltung des Datensatzes als Lösung wird beispielsweise von *Atkinson, Stern* in Zusammenarbeit mit *Gomulka* gewählt. Vgl. *Atkinson et al.* (1980, S. 206).

⁴⁸Es sei daran erinnert, dass die Annahme identischer Präferenzen der Haushalte für die

die Möglichkeit, dass der Nullkonsum die optimale Haushaltsentscheidung bei gegebener Einkommenssituation ist, was dem Nutzen einer Aufspaltung prinzipiell entgegensteht und auch der modellendogenen Erklärung zuträglich wäre.⁴⁹ Im Übrigen kann die Aufspaltung nicht beliebig oft erfolgen, da dadurch einzelne Subdatensätze recht schnell eine für valide Schätzungen unzureichende Größe besitzen. Auch bei diesem zweiten Lösungsansatz ist daher ein Kompromiss zwischen der Aufspaltung in potentiell kleine Subdatensätze homogener Präferenzgruppen und große Subdatensätze mit einer hingenommenen Ungleichheit der Präferenzen unumgänglich. *Heckman* weist zudem auf einen durch die Aufspaltung der Stichprobe verursachten systematischen Schätzfehler hin. Der Fehler wird durch den Verlust der Eigenschaften einer Zufallsstichprobe verursacht, da die Aufspaltung einer klaren Aufgabe folgt und somit nicht zufällig sein kann.⁵⁰ Die verzerrende Wirkung ist mit dem Streichen der Nullnachfragebeobachtungen im unten behandelten *Tobin*-Fall vergleichbar.⁵¹

Der dritte zu nennende Lösungsansatz im Umgang mit Nullkonsum ignoriert die Probleme, die aus der Nichterfüllung der theoretischen Annahmen erwachsen und konzentriert sich primär auf die Schwierigkeiten bei der Anwendung des statistischen Instrumentariums. Als einziger Ansatz setzt er nicht auf eine Umgehung, sondern versucht eine Nachbildung des Phänomens im ökonometrischen Modell. Oben wurde bereits kurz umrissen, dass die Nutzung herkömmlicher statistischer Methoden bei häufigem Nullkonsum suboptimal ist. Wie in den Abbildungen 6.2 auf Seite 154 und 6.3 auf Seite 156 skizziert versagen statistische Methoden, die auf die besonderen Eigenheiten der Stichprobe bei Nullkonsum nicht eingehen.

Ein erstmals von *Tobin* vorgeschlagener Lösungsweg setzt auf eine modellendogene Erklärung des Nullkonsums.⁵² Das Grundprinzip basiert auf der Überlegung, dass sich hinter der beobachtbaren Nachfrage eine latente Variable M_i^{la} verbirgt. Die Idee berücksichtigt die besondere Struktur der Fehler, wie sie in Abbildung 6.3 auf Seite 156 dargestellt wurden, indem die zensierte Dichtefunktion Grundlage der Schätzung wird. Diese Form der Nachbildung, in der notwendiger Weise auch die Ausprägung der erklärenden Variable bei Nullkonsum bekannt ist, wird daher auch zensiertes Tobit-Modell genannt.⁵³ Für die latente Variable wird in der hier gewählten Darstellung wiederum vereinfachend das PES als wahrer

Parameterschätzung aus Querschnittsdaten notwendig ist. Vgl. dazu Kapitel 5, S. 113ff.

⁴⁹*Fry* und *Pashardes* unterscheiden in diesem Zusammenhang beispielsweise in "zero-smokers" und "non-smokers". Vgl. *Fry, Parshades* (1994, S. 503). Die theoretische Unmöglichkeit von Nullkonsum bei Geltung der Annahmen A1 bis A6, vgl. S. 48ff., sei hier einmal vernachlässigt.

⁵⁰Vgl. *Heckman, J.J.* (1979, S. 153ff.).

⁵¹Siehe dazu auch die Ausführungen zu Abbildung 6.3, S. 156. Eine reine Zufallsauswahl ließe hingegen die ursprüngliche Verteilung unverändert.

⁵²Vgl. *Tobin, J.* (1958, S. 24-36).

⁵³Vgl. *Ronning, G.* (1991, S. 126).

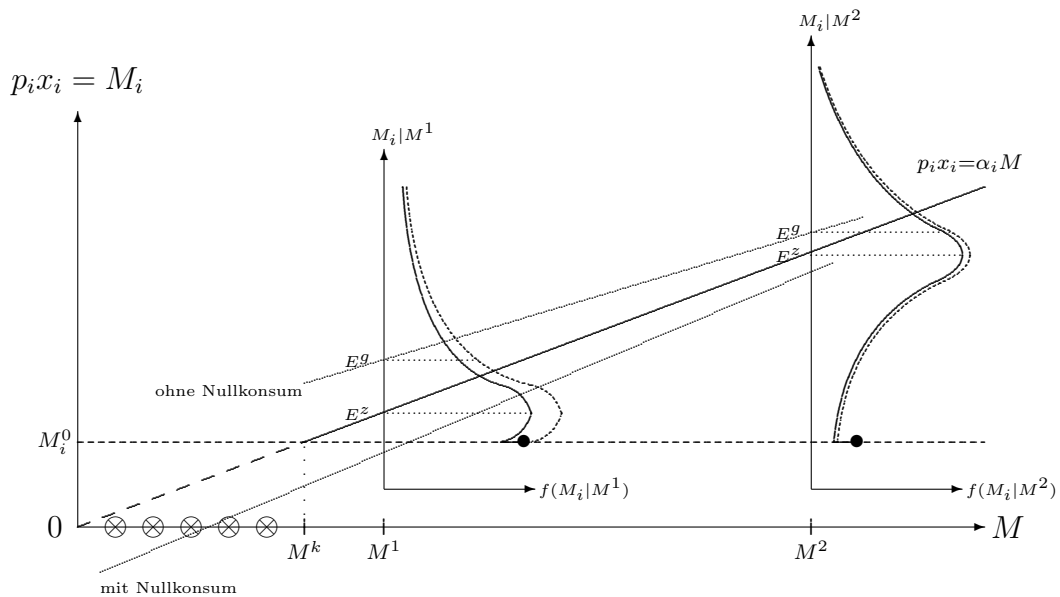


Abbildung 6.4: Nullkonsum im Tobin-Fall (Quelle: Eigene Darstellung).

Zusammenhang angenommen.⁵⁴ Aus der unterstellten linearen Beziehung folgt das Modell für die latente Variable:

$$M_i^{la} = \alpha_i M + u_{ih}. \quad (6.15)$$

Durch die Einbindung der Nullkonsumbeobachtungen durch

$$M_i = \begin{cases} M_i^{la} & \text{falls } M_i^{la} \geq M_i^0 \\ 0 & \text{falls } M_i^{la} < M_i^0 \end{cases} \quad (6.16)$$

kann für das Modell wieder die Standardannahme der Regressionsanalyse, also $u_{ih} \sim N(0, \sigma_i^2)$, getroffen werden. Die Schätzung der Parameter einfacher Tobit-Modelle⁵⁵ erfolgt aufgrund von mittlerweile umfangreich vorhandener Rechnerleistung fast ausschließlich mit der Maximum-Likelihood-Methode.⁵⁶ Zunächst häufig verwendete zweistufige Methoden,⁵⁷ die der Methode der kleinsten Quadrate eine Probit-Analyse vorschalteten,⁵⁸ sind wegen der genannten Rechnerlei-

⁵⁴Vgl. Abbildung 6.4 mit Abbildung 6.2, S. 154.

⁵⁵Im Beispiel sind L -Parameter α_i zu schätzen.

⁵⁶Die entsprechende logarithmierte Likelihood-Funktion findet sich in zahlreichen Ökonometriebüchern. Siehe z.B. *Greene, W.H. (2003, S. 767)*.

⁵⁷Vgl. dazu die Methode von *Heckman, J.J. (1976, S. 475ff.)*.

⁵⁸Mit dem Probit-Modell wird die so genannte "inverse Mills ratio" geschätzt, mit deren Hilfe das unter 6.2.1 beschriebene Problem mit den Fehlertermen behoben wird. Vgl. *Greene, W.H. (2003, S. 784ff.)*.

stungen bei einfachen Modellen selten geworden. Sehr komplexe Modelle werden hingegen immer noch mit zweistufigen Verfahren geschätzt.⁵⁹

Deaton und *Irish* versuchen den *Tobinschen* Ansatz zu erweitern, indem sie ihn um einen zweiten „censoring process that randomly replaces a fraction of the observations generated by the tobit model by zeros“⁶⁰ erweitern. Ziel dieses Vorgehens ist der Versuch, Nullnachfrage der ersten beiden unter 6.2.1 genannten Formen abzubilden.⁶¹ Der Versuch wird allerdings selbst von den Autoren als relativ erfolglos bewertet.⁶²

Keen beschränkt sich in seiner Analyse ausschließlich auf die erste unter 6.2.1 auf Seite 152 genannte Ursache des Nullkonsums. Er entwickelt einen konsistenten Parameterschätzer für diesen Sonderfall, der auf der Methode der Instrumentenvariablen-schätzung beruht⁶³ und von ihm selbst als Spezialfall des Ansatzes von *Deaton* und *Irish* bezeichnet wird. Laut *Keen* ist der Ansatz von *Deaton* und *Irish* wiederum ein Spezialfall des von *Cragg, J.G.* entwickelten „double hurdle model“.⁶⁴ Allen Modellierungen gemeinsam bleibt jedoch die eingangs erwähnte Unfähigkeit, die Ursache des Nullkonsums zu bestimmen. Ein optimaler Umgang mit dem Phänomen ist daher weder gefunden noch in absehbarer Zeit zu erwarten.

6.3 Nachfragesysteme in der Anwendung

„To assume that the representative consumer acts like an ideal consumer is a hypothesis worth testing; to assume that an actual person, the Mr. Brown or Mr. Jones who lives round the corner, does in fact act in such a way does not deserve a moment’s consideration.“⁶⁵

Trotz dieser für die Nutzung von theoretisch konsistenten Nachfragesystemen in dynamischen Mikrosimulationsmodellen ernüchternden Aussage sollen im Folgenden die Möglichkeiten und Grenzen beschrieben werden, die ein solches System für die dynamische Mikrosimulation aufweist. Die Verwendung von Nachfragesystemen folgt dabei der Maxime, dass ein theoretisch konsistentes System, welches in seinen Parametern aus Querschnittsdaten bestimmt wurde, die Leistungsfähigkeit von dynamischen Mikrosimulationsmodellen zumindest nicht verschlechtert und im Vergleich zu willkürlich modellierten Nachfrageanpassungen die bestmögliche Alternative repräsentiert.

⁵⁹Vgl. *Ronning, G.* (1991, S. 130).

⁶⁰*Deaton, A.* und *Irish, M.* (1983, S. 59).

⁶¹Vgl. ebd., S. 60.

⁶²*Deaton, A.* (1986, S. 1809).

⁶³Diese Methode versucht, das Problem der Korrelation zwischen den Störtermen (hier u_{ih}) und der erklärenden Variable (hier M) zu lösen.

⁶⁴Vgl. *Keen, M.* (1986, S. 279) bzw. *Cragg, J.G.* (1971, S. 831ff.).

⁶⁵*Hicks, J. R.* (1956, S. 55).

In einem ersten Schritt werden die möglichen funktionalen Formen beschrieben, die den Anforderungen eines two-stage budgeting Ansatzes genügen und die gleichzeitig mit Querschnittsdaten identifiziert werden können. Dabei werden insbesondere die Auswirkungen alternativer Modellierungen im Fokus stehen. Im Anschluss wird ein modifizierter two-stage budgeting Ansatz vorgestellt, der zumindest aus theoretischer Sicht Vorteile besitzt. Den Abschluss dieses Abschnitts bildet eine Beschreibung der verschiedenen Möglichkeiten, die geschätzten Nachfragerreaktionen eines Haushalts in das dynamische Mikrosimulationsmodell zu integrieren.

6.3.1 Querschnittsdaten und two-stage budgeting

Die optimale Nutzung der in der Bundesrepublik zur Verfügung stehenden Mikrodaten über die Haushaltsnachfrage verlangt eine möglichst flexible funktionale Form des Nachfragesystems.⁶⁶ Die Grenze dieser Flexibilität ist zu einem großen Teil in den Daten selbst verankert. Im Kapitel 5 wurden die mit Querschnittsdaten identifizierbaren Formen vorgestellt, die grundsätzlich für die Anwendung in dynamischen Mikrosimulationsmodellen zur Verfügung stehen. Das Quadratische Ausgabensystem QES ist im Vergleich zu den beiden anderen möglichen Spezifizierungen PES und LES das flexibelste unter den drei Systemen.⁶⁷ Die direkte Schätzung des QES mit den vorhandenen Nachfragedaten aus zwei EVS-Datensätzen ist jedoch aufgrund der Feingliedrigkeit der erhobenen Daten und der damit verbundenen Menge der Güterarten eine nicht zu lösende Aufgabe. In Kapitel 4 wurden daher neben dem Güteraggregationsansatz die Möglichkeiten einer zweistufigen Budgetierungsmethode vorgestellt.⁶⁸ Neben den zwei grundsätzlichen Varianten des two-stage budgeting konnte eine dritte Möglichkeit der Kombination dieser beiden identifiziert werden. Alle drei Formen sind hinsichtlich ihrer Eigenschaften bei vorliegenden Querschnittsdaten zu überprüfen, wobei mit der restriktiven Kombinationsvariante begonnen werden soll.

Das two-stage budgeting unter der Annahme additiver Separabilität mit homothetischen Subnutzenfunktionen ist, wie erwähnt, eine Kombination der beiden noch zu beschreibenden grundsätzlichen Varianten des two-stage budgeting. Dennoch soll mit dieser Form begonnen werden, da sie in gewisser Hinsicht die Flexibilität des Nachfragesystems am stärksten beschränkt. Eine detaillierte Beschreibung dieser speziellen Form der zweistufigen Budgetierung findet sich unter 4.1.6 auf Seite 96ff. Hier soll lediglich die zusammenfassende Darstellung der wichtigsten Eigenschaften erfolgen.

⁶⁶Die vorhandenen Daten wurden unter 2.3, S. 27, beschrieben.

⁶⁷Unter dem Begriff "proportionales Ausgabensystem" und seinem Kürzel PES wird im Folgenden nur die Konkretisierung der Preisfunktion gemäß der Gleichung (5.2), S. 114, verstanden.

⁶⁸Vgl. zum Güteraggregationsansatz 4.1.1, S. 68ff., und zur zweistufigen Budgetierungsmethode 4.1.2, S. 71ff..

Von den drei mit Querschnittsdaten identifizierbaren Nachfragesystemen besitzt sowohl das PES als auch das LES eine additive Struktur. Beide kommen somit prinzipiell für die erste Stufe des Budgetierungsprozesses in Frage.⁶⁹ Da das LES das PES als Spezialfall einschließt, genügt die Betrachtung der Gruppenausgabenoptimierung auf der Grundlage des LES. Innerhalb der Untergruppen erfolgt die Optimierung bei dieser rein hypothetischen Betrachtung mittels des PES. Nur dieses Nachfragesystem genügt der Annahme homothetischer Präferenzen, wie sie bei der hier behandelten Form des two-stage budgeting vorliegen. Trotz der Kombination der besonders unflexiblen Eigenschaften aus den beiden unten beschriebenen grundsätzlichen Varianten findet die hier untersuchte Spezifizierung in der empirischen Praxis häufige Anwendung, wenngleich ihre Struktur nicht immer explizit erwähnt wird. Einer Nachfragesystemspezifizierung durch das in der Praxis wohl am häufigsten verwendete LES wohnt die hier beschriebene Kombination immer dann inne, wenn Güteraggregate bzw. Mengenindizes genutzt werden. Die Verwendung von Mengenindizes in der Nachfragesystemschatzung impliziert die Annahme homothetischer Präferenzen und somit die eines PES auf der zweiten Budgetierungsstufe, d.h. in den Untergruppen. In der Praxis wird in der Regel auf die explizite Schätzung der Nachfragesysteme innerhalb der Untergruppen verzichtet. Stattdessen kommen oft externe Preisindizes⁷⁰ zur Anwendung, mit deren Hilfe Mengenindizes Q^s generiert werden können. Dies geschieht durch eine einfache Division der jeweiligen Gruppenausgaben M^s durch den externen Preisindex.⁷¹

Ansonsten gelten die unter 4.1.6 auf Seite 96ff. beschriebenen Elastizitätsbeziehungen dieser speziellen Form der zweistufigen Budgetierung. Die Eigenschaft des LES, ausschließlich positive Nachfragereaktionen auf Einkommenserhöhungen zuzulassen,⁷² hat hier keine zusätzlichen negativen Auswirkungen auf die Flexibilität. Durch die notwendige strenge Konkavität der Subnutzenfunktionen und die damit verbundene Restriktion $\frac{\partial M^s}{\partial M} > 0$ ist dies vielmehr eine theoretische Notwendigkeit, die durch das LES sichergestellt wird.⁷³

⁶⁹Vgl. bezüglich der additiven Struktur die Ausführungen unter 5.2.2, S. 121ff. Beiden Systemen liegt eine *Cobb-Douglas*-Nutzenfunktion zugrunde, welche die Eigenschaft der additiven Separabilität besitzt. Siehe dazu auch die Ausführungen in der Fußnote 48, S. 82, und 4.1.6, S. 96ff.

⁷⁰Die Bezeichnung "extern" bedeutet in diesem Zusammenhang, dass die Preisinformation bzw. die Indexerstellung nicht unbedingt durch den vorhandenen Datensatz erfolgte. Die verwendeten Preisindizes genügen in der Regel der Forderung nach Homogenität vom Grade 1 bezüglich der Preise in den jeweiligen Untergruppen. Vgl. bezüglich der Nutzung von externen Preisindizes z.B. *Missong, M.* (2004, S. 181f.).

⁷¹Vgl. die Ausführungen zu Gleichung (4.52) auf S. 4.52. Es gilt bei der hier u.a. angenommenen homothetischen Separabilität $M^s = P^s(p^s) \cdot Q^s(x^s)$.

⁷²Der Anstieg der Engelkurve eines LES ist immer positiv ($\alpha_i > 0$). Vgl. 5.2.1, S. 120.

⁷³Vgl. bezüglich der strengen Konkavität der Subnutzenfunktionen den in der Praxis relevanten Fall 1 und die entsprechenden Ausführungen auf S. 84.

Two-stage budgeting unter der Annahme additiver Separabilität wird ausführlich unter 4.1.4 auf Seite 80ff. analysiert und stellt die eine der beiden grundsätzlichen Varianten der zweistufigen Budgetierung dar. Hier wird, wie schon bei der oben beschriebenen Kombinationsform, additive Separabilität zwischen den Subnutzenfunktionen angenommen. Als Nachfragesystem für die erste Stufe kommen demnach wieder das PES und das LES in Betracht, wobei das PES erneut als Spezialfall des LES vernachlässigt werden kann. Für die Optimierung in den einzelnen Untergruppen können, wie unter Punkt 4.1.4 gezeigt, prinzipiell alle Nachfragesysteme verwendet werden, bei denen die dahinter stehende indirekte Nutzenfunktion der *Generalized Gorman Polar Form* entspricht. Das LES genügt diesem Anspruch, so dass auf den ersten Blick eine gleichzeitige Anwendung dieser Nachfragesystemform auf beiden Stufen der Optimierung möglich scheint. Zwar wäre durch diese vermeintliche Option einer Kombination von linearen Ausgabensystemen nicht die vollständige Flexibilität dieser Separabilitätsstruktur gewährleistet. Die Engelkurven in den Untergruppen sind schließlich sowohl linear als auch streng monoton steigend und nutzen somit nicht die erlaubte funktionale Freiheit der aus der *Generalized Gorman Polar Form* abgeleiteten Nachfrage (4.45).⁷⁴ Aber solch eine Kombination wäre immer noch flexibler als die oben beschriebene Variante mit einem PES in den Untergruppen.

Leider trägt der erste, aus der Separabilitätsperspektive gewonnene Eindruck, dass diese Variante den Anforderungen an die theoretische Konsistenz genügt. Die Preisaggregationsfunktion,⁷⁵ also die Funktion, die mittels des Gesamteinkommens M und der linearhomogenen Preisindizes $P^s(p^s)$ die optimalen Gruppenausgaben M^s bestimmt, kann nicht durch das LES abgebildet werden. Das LES nutzt Mengen und Preise bzw. deren Indizes. Die dafür notwendige Gültigkeit der als Nebenbedingung der Optimierung fungierenden Beziehung $M^s = P^s(p^s) \cdot Q^s(x^s)$ ist nur bei homothetischer Separabilität gewährleistet.⁷⁶ Da alle unter Kapitel 5 behandelten funktionalen Formen die Optimierung unter dieser Art von Nebenbedingung leisten, kann nur die im Folgenden behandelte homothetische Separabilitätsannahme das Modell einer erfolgreichen two-stage budgeting Strategie rechtfertigen. Der Ansatz von *Anderson* bleibt somit der einzige dem Verfasser bekannte Versuch, eine ausschließlich mit der additiven Separabilitätsannahme ausgestattete two-stage budgeting Strategie umzusetzen.⁷⁷

Two-stage budgeting unter der Annahme homothetischer Separabilität wird umfassend unter 4.1.5 auf Seite 89ff. beschrieben. Diese zweite der beiden grundsätzlichen Varianten des two-stage budgeting wird im Folgenden unter der Maß-

⁷⁴Die *Generalized Gorman Polar Form* (4.17) findet sich auf S. 79 und die daraus abgeleitete Nachfrage auf S. 87.

⁷⁵Vgl. Gleichung (4.19) auf S. 80.

⁷⁶Siehe zum Beweis, dass homothetische Separabilität für diese Beziehung sowohl hinreichend als auch notwendig ist, die Ausführungen zu Gleichung (4.52) auf S. 90.

⁷⁷Vgl. *Anderson, R. W.* (1979, S. 1209-1230).

gabe der mit Querschnittsdaten identifizierbaren funktionalen Formen kurz vorgestellt und einer kritischen Würdigung unterzogen. Anders als bei den ersten beiden Separabilitätsannahmen wird bei dieser Form keine additive Struktur zwischen den Subnutzenfunktionen unterstellt. Dadurch entfällt die Beschränkung auf das additive LES auf der ersten Stufe. Es ist bei dieser Struktur möglich, die Preisaggregationsfunktion durch ein QES abzubilden. Da das QES sowohl das LES als auch das PES als Spezialfälle enthält, soll auf diese künstliche Beschränkung der Flexibilität nicht weiter eingegangen werden. Im Übrigen wurde die Möglichkeit eines LES bei homothetischen Präferenzen bereits oben für den Fall der Kombination beider grundsätzlicher Separabilitätsannahmen besprochen. Der Preis für die gewonnene Flexibilität auf der ersten Stufe ist erwartungsgemäß die nun notwendige funktionale Form der proportionalen Ausgabensysteme in den Untergruppen. Auch bei dieser Struktur wird in der empirischen Praxis auf die gesonderten Schätzungen der jeweiligen PES in den Untergruppen verzichtet. Wie bei der oben beschriebenen Variante mit dem LES auf der ersten Stufe finden auch hier in der Regel externe Preisindizes Verwendung. Dadurch werden die in den vorhandenen Datensätzen enthaltenen Informationen über die Nachfrage der einzelnen Haushalte in den jeweiligen Untergruppen verschenkt. Allerdings bilden die verwendeten Querschnittsdatsätze häufig die Grundlage für die Erstellung der verwendeten Preisindizes.⁷⁸ Die detaillierten Informationen über die Güternachfrage der Haushalte fließen somit auf Umwegen in die Schätzung des Nachfragesystems ein, wodurch der Methode kein vollständiger Verlust der vorhandenen Untergruppeninformation attestiert werden kann. Im folgenden Punkt 6.3.2 wird der Versuch unternommen, die genannten Nachfrageinformationen der Untergruppen auf direkterem Wege zu nutzen. Zuvor wird jedoch noch auf die durch die Modellierung ermöglichte höhere Flexibilität eingegangen.

Im Hinblick auf die *Hicksschen* Kreuzpreiseffekte lässt sich festhalten, dass die Struktur theoretisch sowohl Komplementär- als auch Substitutionsbeziehungen zwischen Gütern aus verschiedenen Gruppen erlaubt. Allerdings hat diese Möglichkeit mehr akademische als praktische Relevanz. Die Beziehungen entsprechen in ihrem Vorzeichen den jeweiligen *Hicksschen* Substitutionseffekten zwischen den Untergruppen. Daher wäre ein derartiger Zusammenhang gleichbedeutend mit einer entweder alle Güter zwischen zwei Gruppen betreffenden *Hicksschen* Komplementärbeziehung oder alle Güter zwischen zwei Gruppen betreffenden *Hicksschen* Substitutionsbeziehung.⁷⁹

⁷⁸Die Daten der EVS sind, wie unter 2.3.3 beschrieben, Grundlage bei der Erstellung des so genannten Warenkorb und gehen dadurch in verschiedene Preisindizes mit ein. Siehe dazu S. 39ff.

⁷⁹Siehe dazu S. 96 unter 4.1.5. Dass bei der Modellierung mit einem QES auf der ersten Stufe $\mathcal{S}_{st}^{Agg} \leq 0$ mit $(s, t \in S, s \neq t)$ zwischen den S Untergruppen gilt, wurde nicht explizit nachgewiesen. Die *Hicksschen* Kreuzpreiseffekte zwischen den Gruppen können jedoch ohne Weiteres mit der *Slutsky*-Gleichung aus den unter 5.3.2 aufgeführten *Marshallschen* Effekten hergeleitet werden. Dazu ist lediglich der Austausch der Mengen und Preise durch die entsprechenden

Bei der mit einem QES möglichen lokalen Nachbildung von Inferiorität einer Untergruppe kann hingegen schon ein größerer Zuwachs an Flexibilität verzeichnet werden. Der Anstieg der Engelkurven eines QES ist in seinem Vorzeichen unbestimmt und kann daher auch negativ sein.⁸⁰ Bei einer lokalen Betrachtung ist die Abbildung inferioren Verhaltens der Gruppenausgaben M^s trotz der Monotonie der QES-Engelkurven möglich, was ein Vergleich mit Abbildung 4.4 auf Seite 88 verdeutlicht. Dort wurde die generelle Idee der lokalen Betrachtung am Beispiel monoton fallender linearer Engelkurven skizziert. Ob die gewonnene Flexibilität empirisch von Nutzen ist, hängt von der Zuordnung der Güter in die einzelnen Gruppen ab. Für eine Gruppe, die vollständig aus Gütern mit potentiell inferiorer Charakter besteht, ist die Möglichkeit einer negativen Reaktion der Gruppenausgaben auf Einkommenserhöhungen sicher wünschenswert, da das PES in der betroffenen Untergruppe eine gesenkte Nachfrage modellieren würde.

Der größte empirisch relevante Vorteil der Verwendung eines QES als Preisaggregationsfunktion liegt wohl in der erhöhten Flexibilität bei der Steigung der Engelkurven. Die im linearen Ausgabensystem getroffene Annahme, dass Haushalte unabhängig von ihrer jeweiligen Einkommenshöhe immer mit der gleichen absoluten Nachfrageänderung auf eine Einkommensänderung reagieren, ist empirisch nicht haltbar und daher auch einer der größten Kritikpunkte am LES.⁸¹ Die Nutzung eines QES auf der ersten Stufe ermöglicht zumindest eine flexiblere Reaktion über die Gruppenausgaben. Der Erfolg dieser Strategie hängt entscheidend davon ab, ob die Güter in den jeweiligen Gruppen in gleicher Weise auf Änderungen des Einkommens bei gegebener Einkommenshöhe reagieren. Diese Forderung ist im Übrigen genereller Natur. Schon bei den obigen Ausführungen hinsichtlich der Nachbildung von Inferiorität zeigte sich, dass möglichst Güter zu Gruppen zusammengeschlossen werden sollten, die ähnliche Reaktionen bei Einkommensänderungen aufweisen. Diese Erkenntnis ist keinesfalls überraschend, da die Modellierung mit Subnutzenfunktionen erfolgt, denen homothetische Präferenzordnungen zugrunde liegen. Der enge Zusammenhang mit dem Güteraggregationsansatz ist hier deutlich erkennbar.⁸²

Diese dritte Variante des two-stage budgeting mit Querschnittsdaten hat sich als die flexibelste der im theoretischen Sinne als kompromisslos zu bezeichnenden Strukturen erwiesen. Dennoch kann das Ergebnis in Bezug auf die Flexibilität immer noch als unbefriedigend bezeichnet werden. Wird die Forderung nach absoluter theoretischer Konsistenz aufgegeben, ergeben sich Möglichkeiten, wie sie im nächsten Abschnitt dargestellt werden. Ob der dort aufgezeigte Weg empirisch gangbar ist, kann allerdings nicht nachgewiesen werden.

Indizes notwendig.

⁸⁰Vgl. dazu wiederum die Ausführungen unter 5.3.2, S. 134ff.

⁸¹Vgl. z.B. *Blundell, R.* und *Ray, R.* (1984, S. 810) oder *Missong, M.* (2004, S. 205).

⁸²Vgl. dazu 4.1.1, S. 68ff.

6.3.2 Modifizierter two-stage budgeting Ansatz

Trotz der Bemühung, durch eine additive Separabilitätsannahme bei der zweistufigen Budgetierung eine höhere Flexibilität in den Untergruppen zu erreichen, ist es nicht gelungen, ein mit Querschnittsdaten identifizierbares Nachfragesystem in den Untergruppen zu etablieren, welches nicht die Annahme homothetischer Präferenzen impliziert. Im Folgenden wird ein Weg aufgezeigt, diesen Nachteil durch einen Trick auszugleichen. Ob der dafür notwendige, eher pragmatische Umgang mit der reinen Lehre der Nachfragetheorie gerechtfertigt ist, kann nicht zweifelsfrei beantwortet werden. Es gilt aber zu bedenken, dass die gängige Praxis einer Verwendung von externen Preisindizes auch nicht dem grundlegenden theoretischen Prinzip eines seinen Nutzen individuell maximierenden Haushalts entspricht. Insofern wird eine dem theoretischen Ideal nur unzureichend genügende Methode mit einer anderen, wiederum mit theoretischen Mängeln behaftete Methode ersetzt.

Das Ziel, in den S Untergruppen ein flexibleres und gleichzeitig mit Querschnittsdaten identifizierbares Nachfragesystem einzusetzen, kann unter Beibehaltung der grundlegenden Idee einer zweistufigen Budgetierungsstrategie nur indirekt erreicht werden. Der hier vorgeschlagene Ansatz verwendet dazu in einem ersten Schritt lineare Ausgabensysteme in den Untergruppen, was zweifelsfrei die Flexibilität steigert, jedoch, wie oben unter 6.3.1 gezeigt, die two-stage budgeting Strategie streng genommen unmöglich macht. Das Problem liegt in der nun nicht mehr vorhandenen Möglichkeit der Bildung von Mengen- und Preisindizes. Dazu wäre eine homothetische Präferenzordnung nötig, was wiederum die Nutzung proportionaler Ausgabensysteme erfordert. Unter 5.1 und 5.2 auf den Seiten 114ff. und 119ff. wurde gezeigt, dass der grundlegende Unterschied zwischen einem PES und einem LES in der Existenz von so genannten Mindestmengen liegt. Sie sind es, die durch eine Verschiebung des Koordinatenursprungs zum *Punkt des Glücks* nachteilige Eigenschaften der eigentlich homothetischen Nutzenfunktionen entschärfen und so die Flexibilität des Systems erhöhen.⁸³ Der hier vorgestellte modifizierte two-stage budgeting Ansatz beruht nun auf der Idee, diese Verschiebung in gewisser Weise rückgängig zu machen.

Nachdem die Aufteilung der L Güter in S Untergruppen erfolgt ist, wobei sich diese Zuordnung an den oben unter 6.3.1 genannten Kriterien ausrichten sollte, wird in jeder dieser S Gruppen ein LES geschätzt. Die dafür notwendigen Informationen über die jeweiligen S Gruppenausgaben M^s , die S Vektoren der Güterpreise p^s und die S Vektoren der Gütermengen x^s werden beispielsweise durch die EVS bereitgestellt.⁸⁴ Sowohl die Anwendung der unter 6.1.2 auf Seite 148 beschriebenen demographischen Verschiebung als auch eine "unpooled" Schätzung erlaubt die Berücksichtigung demographischer Merkmale der Haushal-

⁸³Die Verschiebung durch die Mindestmengen β_i ist in Abbildung 5.2, S. 122, dargestellt.

⁸⁴Siehe dazu 2.3.3, S. 39.

te. Im Folgenden sei jedoch zugunsten einer einfachen Darstellung des Ansatzes angenommen, dass keine relevanten demographischen Unterschiede zwischen den Haushalten vorliegen. In diesem Fall können genau S mal die Schätzer der LES-Parameter α_i und β_i bestimmt werden.⁸⁵

Bei der Bestimmung dieser Nachfragesysteme liegt vermutlich ein großer Teil der Schwierigkeiten in dem oben beschriebenen Phänomen des Nullkonsums. In den Untergruppen unterliegen die Güter einer vergleichsweise geringen Aggregationsstufe, wodurch die Wahrscheinlichkeit der Nullnachfrage steigt.⁸⁶ Obwohl dieses Phänomen das Potential besitzt, den gesamten Ansatz zu gefährden, soll hier nur auf die unter 6.2.2 auf Seite 157ff. aufgezeigten Möglichkeiten der Handhabung verwiesen werden. Die dort u.a. vorgeschlagene Lösung durch eine Aggregation von Gütern konterkariert natürlich den hier unternommenen Versuch einer möglichst feingliedrigen Nachfragesystemschatzung. Bezüglich des zu schätzenden Zusammenhangs im Falle von Nullkonsum sei an dieser Stelle darauf hingewiesen, dass bei Nachfragesystemen für Mikrosimulationsmodelle stets eine unbedingte Schätzung der Engelkurven erfolgen muss. In der Abbildung 6.2 auf Seite 154 wurden die wahren Zusammenhänge für zwei grundsätzlich verschiedene Fragestellungen skizziert. Zum einen kann der empirische Zusammenhang unter der Bedingung erfolgten Konsums geschätzt werden. Zum anderen wird die durchschnittliche Nachfrage bei gegebenen Einkommen aller Haushalte gesucht. Die erste, bedingte Schätzung würde die für das Mikrosimulationsmodell gesuchten Anpassungsparameter bei unregelmäßig nachgefragten Gütern wahrscheinlich überschätzen. Für die unten im Abschnitt 6.3.3 beschriebene Nachbildung der Reaktionen der Haushalte auf Einkommensänderungen ist daher die unbedingte Schätzung des Systems angemessen.

Mit den im ersten Schritt erfolgreich geschätzten L Parametern β_i können im zweiten Schritt die jeweiligen Ausgaben für die Mindestmengen der Güter in den Untergruppen $\sum_{i=1}^{l^s} p_i \beta_i$ bestimmt werden, wodurch wiederum die Ermittlung des so genannten Überschusseinkommens jeder Untergruppe und somit des Überschusseinkommens insgesamt möglich ist:

$$\hat{M} = M - \sum_{s=1}^S \left(M^s - \sum_{i=1}^{l^s} p_i \beta_i \right) > 0. \quad (6.17)$$

Das gemäß der Gleichung (6.17) um die Ausgaben für die Mindestmengen reduzierte Überschusseinkommen \hat{M} ist nun Grundlage für die eigentliche two-stage budgeting Schätzung. Dahinter steht jetzt die Annahme, dass die Mindestmengen β_i dem Haushalt keinen Nutzen im Sinne des unter Kapitel 3 behandelten

⁸⁵Die Möglichkeiten der Schätzung eines LES aus Querschnittsdaten sind unter 5.2.3, S. 125ff., beschrieben. Bei der hier notwendigen Schätzung sollte auf den Ansatz mit einem zweiten Preis-Regime zurückgegriffen werden. Beispielsweise sind in den beiden EVS 1998 und 2003 die Güter dafür hinreichend gleich erfasst worden. Siehe dazu wiederum 2.3.3, S. 39ff.

⁸⁶Vgl. dazu die Erläuterung zu den Ursachen und Auswirkungen des Nullkonsums unter 6.2.1, S. 152ff.

theoretischen Rahmens spenden, obgleich sie vorher, in dem oben beschriebenen ersten Schritt, mittels genau dieser Theorie geschätzt wurden. Sie sind nicht mehr Teil der Optimierung und können dadurch vernachlässigt werden. Ihr Einfluss besteht in diesem Ansatz lediglich in einer Reduktion des zur Disposition stehenden Einkommens, bevor das (Haupt-)Modell der Nutzenmaximierung zum Tragen kommt. Der Vorteil dieser Methode liegt in der jetzt adäquaten Verwendung der homothetischen Separabilitätsannahme. Der Haushalt optimiert den Nutzen in diesem modifizierten Ansatz mit dem Überschusseinkommen \hat{M} und den durch die LES-Schätzungen determinierten Preis- und Mengenindizes. Nach Abzug der Mindestausgaben verbleiben in diesem theoretischen Rahmen PES-Systeme in den Untergruppen, deren Parameter α_i bereits aus den LES-Schätzungen bekannt sind. Mit diesen Schätzern können die notwendigen Indizes problemlos ermittelt werden, und es gelingt die Bestimmung der Parameter eines QES-Systems als Preisaggregationsfunktion. Allerdings verteilt dieses System hier nur noch Überschusseinkommen \hat{M} auf die Untergruppen. Bevor im nächsten Abschnitt 6.3.3 auf die Möglichkeiten der Nachbildung von Nachfragereaktionen in Mikrosimulationsmodellen mit diesem modifizierten Ansatz eingegangen wird, folgt noch eine Beschreibung der Erstellung der Mengen- und Preisindizes. Des Weiteren werden noch zwei Aspekte der QES-Schätzung auf der ersten Stufe dieser modifizierten zweistufigen Budgetierung behandelt.

Bei der Analyse des Nachfrageverhaltens mit Querschnittsdaten ist der Preisvektor gegeben und wird grundsätzlich als über die Haushalte konstant angenommen. Zur Berechnung der Mengen- und Preisindizes in den jeweiligen S Untergruppen sei der linearhomogene Preisindex einer Gruppe s mit l^s Gütern definiert als

$$\hat{P}^s(p^s) = p_1^{\alpha_1^s} \cdots p_i^{\alpha_i^s} \cdots p_{l^s}^{\alpha_{l^s}^s} = \prod_{i=1}^{l^s} p_i^{\alpha_i^s} \quad \text{mit } \alpha_i^s > 0 \text{ und } \sum_{i=1}^{l^s} \alpha_i^s = 1. \quad (6.18)$$

Die Gewichte α_i^s sind zuvor durch die LES-Schätzung des ersten Schrittes für diese Gruppe bestimmt worden. Dem Mengenindex liegen jetzt keine erhobenen Mengen zugrunde, sondern er wird durch einfache Division der Überschussgruppenausgaben durch den Preisindex bestimmt:

$$\hat{Q}^s(\hat{x}^s) = \frac{M^s - \sum_{i=1}^{l^s} p_i \beta_i}{\prod_{i=1}^{l^s} p_i^{\alpha_i^s}} = \frac{\hat{M}^s}{\hat{P}^s(p^s)}. \quad (6.19)$$

Die geschätzten Überschussmengen \hat{x}^s der Güter in der Gruppe entsprechen dabei $\hat{x}_i^s = \frac{\alpha_i^s}{p_i} \hat{M}^s$ mit $i = 1, \dots, l^s$.

Neben dem schon bekannten Problem des Nullkonsums ist durch den modifizierten Ansatz sogar negativer Konsum auf der ersten Stufe der jetzt folgenden

two-stage budgeting Optimierung möglich. Dieses neue Problem ist immer dann gegeben, wenn der Haushalt zur Deckung der in der jeweiligen Gruppe geschätzten Mindestausgaben empirisch weniger oder im Falle von Nullkonsum genauso viel Einkommen auf die Gruppe s verteilt. Es können dabei generell zwei Fälle unterschieden werden:

Im ersten Fall liegen sämtliche oder die meisten der Gruppenausgaben eines Haushalts unter den geschätzten Mindestausgaben. Dies hätte zur Folge, dass insgesamt ein negatives Überschusseinkommen zu verzeichnen wäre. Es gilt hier:

$$\hat{M} = M - \sum_{s=1}^S \left(M^s - \sum_{i=1}^{l^s} p_i \beta_i \right) < 0 \quad (6.20)$$

bzw.

$$\hat{M} = M - \sum_{i=1}^L p_i \beta_i < 0. \quad (6.21)$$

Für diesen Fall ist die Vernachlässigung dieser Haushaltsdaten bei der Schätzung der Preisaggregationsfunktion möglich und angemessen. Es liegt kein Einkommen vor, für welches eine optimale Verteilungsstrategie auf die Untergruppen gesucht werden müsste. Derartige Haushalte sind so arm, dass sie nicht einmal ihre Mindestausgaben decken können. Im nächsten Abschnitt 6.3.3 werden u.a. die Möglichkeiten einer Nachbildung der Nachfragereaktionen für Haushalte diesen Typs beschrieben.

Der zweite Fall zeichnet sich durch ein zwar positives Gesamtüberschusseinkommen aus, jedoch wurden einzelnen Gütergruppen in der Realität nicht genügend Mittel zur Mindestausgabendeckung zugewiesen. Bei dieser Datenlage kann grundsätzlich ein Versagen des modifizierten Ansatzes für diese Haushalte diagnostiziert werden, da das modifizierte Modell zunächst eine Deckung aller Mindestausgaben annimmt, bevor Überschusseinkommen auf die Gruppen aufgeteilt wird. Dennoch sollten derartige Haushaltsdaten nicht generell, wie im ersten Fall, bei der Schätzung der Preisaggregationsfunktion übergangen werden. Die vorliegenden Daten können vielmehr als künstlicher *Tobin*-Fall in die Schätzung integriert werden.⁸⁷ Diese Integration ist im Grunde genommen eine Manipulation der erhobenen Daten. Faktisch wird einem Haushalt, der in einer bestimmten Untergruppe nicht die notwendigen Mittel für die Deckung der geschätzten Mindestausgaben eingestellt hat, der fehlende Betrag geschenkt. Negative Überschusseinkommen in bestimmten Gruppen werden also durch diese Manipulation künstlich auf Null gesetzt. Dieser erneut sehr pragmatische Umgang mit den Instrumenten

⁸⁷Siehe dazu die Abbildung 6.4, S. 160, und die entsprechenden Ausführungen. Dies impliziert im Übrigen die Annahme, dass mit steigenden Haushaltseinkommen die geschätzten Mindestmengen irgendwann nachgefragt werden. Der wesentliche Unterschied zum klassischen *Tobin*-Fall liegt in der Beobachtbarkeit der latenten Variable. Sie wird, falls negativ, künstlich auf Null gesetzt, da negative Mengen den grundlegenden Annahmen der Nachfragetheorie widersprechen.

ist jedoch vertretbar. Die künstliche Einkommenszuweisung rettet den modifizierten Ansatz. Die Alternative dazu wäre eine vollständige Vernachlässigung dieser Haushaltsdaten, was wiederum eine generelle Überschätzung der Einkommenszuweisung für die betroffene Gruppe zur Folge hätte.⁸⁸ Der Haushalt besitzt schließlich, anders als im ersten Fall, im Prinzip genügend Einkommen. Seine Präferenzordnung ist lediglich so speziell, dass das Modell der Mindestausgaben in diesem Fall eine falsche Spezifikation darstellt. Die Daten dieser besonderen Ausprägung sollten dennoch nicht den Annahmen des modifizierten Modells geopfert werden, auch wenn der dafür zu zahlende Preis in einer Veränderung der Daten liegt. Obgleich es sich um eine Fehlspezifikation des Modells für diese besondere Präferenzordnung handelt, kann aus der individuellen Sicht des einzelnen Haushalts das Prinzip der Mindestausgaben trotzdem Gültigkeit besitzen. Wird dieser Sichtweise gefolgt, handelt es sich bei der Gruppenzuweisung auch um eine Verteilung von Überschusseinkommen. Die Besonderheit der Präferenzordnung der betroffenen Haushalte besteht lediglich darin, dass ihre individuellen Mindestausgaben extrem von denen des geschätzten Modells abweichen. Durch die künstliche Zuweisung von Einkommen wird nur die extreme, nicht mehr durch das Modell abgedeckte Abweichung zurückgeführt. Der Haushalt befindet sich danach am äußersten Rand des vom Modell erfassten Bereichs, wodurch die Extremposition in die Schätzung einfließen kann.

Trotz dieser Probleme ist der hier behandelte Aspekt des Nullkonsums bei der Schätzung der Preisaggregationsfunktion als relativ unproblematisch einzustufen. Dies gilt insbesondere im Vergleich zu den erwarteten Schwierigkeiten mit Nullkonsum bei der LES-Schätzung des ersten Schrittes. Für den Haushaltstyp des oben beschriebenen zweiten Falles von Null- oder Negativkonsum werden im nächsten Abschnitt 6.3.3 die Möglichkeiten einer Nachbildung der Nachfragereaktionen analysiert. Zuvor wird jedoch noch kurz der Frage nach der demographischen Spezifizierung bei der Schätzung der Preisaggregationsfunktion mit einem QES nachgegangen.

Bereits bei der Erstellung der Mengenindizes $\hat{Q}^s(\hat{x}^s)$ für die two-stage budgeting Strategie mit homothetischer Separabilitätsannahme können demographische Besonderheiten der Haushalte einfließen. Ob dies durch eine "unpooled" Schätzung oder durch die Möglichkeiten der demographischen Verschiebung erfolgt, ist eine empirische Fragestellung, die hier nicht beantwortet werden kann. Für die anschließende Schätzung der Preisaggregationsfunktion mit einem QES sind jedenfalls alle notwendigen theoretischen Voraussetzungen grundsätzlich erfüllt. Die Engelkurven des theoretischen Modells bei der hier als Beispiel

⁸⁸Vgl. dazu die Ausführungen zu Abbildung 6.2, S. 154. Eine quadratische Engelkurve kann prinzipiell auch mit einzelnen negativen Ausprägungen einiger Mengenindizes $\hat{Q}^s(\hat{x}^s)$ geschätzt werden. Dieser Weg wird jedoch nicht beschritten, da dadurch sowohl grundlegende Annahmen der Nachfragetheorie als auch die logische Struktur des modifizierten Ansatzes zerstört werden würden.

gewählten Σ -Spezifikation entsprechen

$$\begin{aligned} \hat{M}^s = \hat{P}^s(p^s)\hat{Q}^s(\hat{x}^s) &= \hat{P}^s\beta_s + \alpha_s \left(\hat{M} - \sum_{s=1}^S \hat{P}^s\beta_s \right) \\ &+ \frac{\left(\gamma_s \hat{P}^s - \alpha_s \sum_{s=1}^S \hat{P}^s\gamma_s \right)}{\left(\prod_{s=1}^S \hat{P}^s\alpha_s \right)^2} \left(\hat{M} - \sum_{s=1}^S \hat{P}^s\beta_s \right)^2, \end{aligned} \quad (6.22)$$

wobei die Parameter α_s , β_s und γ_s mit $s = 1, \dots, S$ des Modells mit zwei Querschnittsdatensätzen identifiziert werden können. Fraglich ist jetzt, in welcher Form eine Einbindung demographischer Merkmale erfolgen kann.

Bei einer "unpooled" Schätzung sollten möglichst die gleichen Abgrenzungskriterien wie bei der im ersten Schritt durchgeführten Erstellung der Mengenzinizes gewählt werden. So kann im Prinzip in jeder demographisch abgegrenzten Unterstichprobe eine separate Schätzung mit dem modifizierten two-stage budgeting Ansatz erfolgen.

Als Alternative dazu ist auch die Einbindung über die demographische Verschiebung auf dieser Ebene möglich. Wie unter 6.1.2 auf Seite 148ff. beschrieben, wirkt der demographische Vektor d im Falle der QES-Schätzung nicht nur auf die absoluten Glieder, sondern auch auf die Anstiege von Engelkurven der Form (6.22). Zwar ist auch beim QES die Interpretation der β -Parameter als Mindestmengen üblich, jedoch ist dies streng genommen nicht exakt. Die Einbindung über die β -Parameter des QES steht damit keinesfalls im Widerspruch zur Mindestmengenargumentation des modifizierten Ansatzes. Diese Form der Einflussnahme demographischer Merkmale des Haushalts kann vielmehr ausschließlich als Strategie zur besseren Anpassung an die Daten aufgefasst werden, wodurch sich eine schwer vermittelbare Interpretation der β_s -Parameter als erneute Mindestmenge erübrigt.

6.3.3 Nachbildung der Nachfragereaktion

Die in Querschnittsform vorhandenen Haushaltsdaten haben bei der dynamischen Mikrosimulation vor allem zwei Aufgaben. Zum einen sind sie die Grundlage für die empirische Schätzung des Nachfragesystems und somit für die Bestimmung der Reaktionsparameter eines Haushalts. Zum anderen sind sie, da als Mikrodaten erhoben, zugleich ein Abbild des status quo im Nachfrageverhalten der einzelnen Haushalte im Simulationsmodell. In den folgenden Ausführungen wird der Frage nachgegangen, wie die Reaktionen der einzelnen Mikroeinheiten auf Veränderungen von Einkommen und Preisvektor nachgebildet werden können. Die generelle Strategie der Nachbildung beruht auf der Idee, dass eigentlich dynamische Veränderungen durch komparativ-statische Konzepte hinreichend gut

nachgebildet werden können.⁸⁹

Es wird angenommen, dass sich ein Haushalt vor der fraglichen zu simulierenden Veränderung in seinem durch die individuelle Merkmalsausprägung determinierten persönlichen Optimum befand. Bezüglich der Konsumgüter beeinflussen in dem hier vorgeschlagenen Modell Einkommen, Preise und demographische Merkmale die Nachfrage. Neben den Informationen über die diesbezüglichen individuellen Merkmalsausprägungen enthält der Mikrodatensatz auch die konkrete Aufteilung des verfügbaren Einkommens auf die einzelnen L Güter und somit auch die Verteilung des Einkommens auf die für die Modellschätzung des modifizierten Ansatzes gewählte Abgrenzung der Untergruppen. Falls bei der Schätzung der Parameter des modifizierten Ansatzes den demographischen Unterschieden der Haushalte durch eine entsprechende Aufteilung des Datensatzes Rechnung getragen wird, können jedem Haushalt dieser Unterstichprobe die folgenden Reaktionsparameter zugewiesen werden:

- L Parameter α_i und L Parameter β_i determinieren die geschätzte Güternachfrage in den Untergruppen.
- S Parameter α_s , S Parameter β_s und S Parameter γ_s determinieren die geschätzten S Gruppenausgaben \hat{M}^s , welche über den geschätzten Mindestausgaben in den jeweiligen Untergruppen liegen.

Falls ausschließlich die Methode der demographischen Verschiebung Anwendung findet, existieren die obigen Parameter nur einmal für den gesamten Datensatz, wobei zusätzlich sowohl die β_i als auch die β_s mit dem demographischen Vektor d variieren können.

Mit den Parametern kann jetzt für jeden Haushalt die durch das Nachfragesystem geschätzte optimale Gütermenge berechnet werden. Dazu werden zunächst die jeweiligen Mindestausgaben $\sum_{i=1}^{l^s} p_i \beta_i$ des Haushalts für die S Untergruppen berechnet. Diese können je nach Art der Einbindung demographischer Merkmale zwischen den Haushalten schwanken. Mit diesen Mindestausgaben erfolgt gemäß der Gleichung (6.17) die Berechnung des geschätzten Überschusseinkommens \hat{M} .⁹⁰ Sollte das Einkommen M des Haushalts zu einem negativen Überschusseinkommen führen, endet hier zunächst die vorgeschlagene Standardprozedur der Nachbildung von Anpassungsreaktionen. Haushalte dieses Typs werden im Folgenden mit H^a bezeichnet.⁹¹ Für den zweiten Sonderfall eines insgesamt positiven Überschusseinkommens mit vereinzelt Güterausgaben unter den geschätzten Mindestausgaben kann ebenfalls eine spezielle Prozedur angewendet werden, wobei hier die Abweichung vom Standardverfahren nicht zwingend ist. Haushalte

⁸⁹Vgl. dazu die begriffliche Abgrenzung der dynamischen Mikrosimulation unter 2.1.1, S. 5ff.

⁹⁰Siehe Gleichung (6.17), S. 168.

⁹¹Für die Haushalte H^a gilt $M < \sum_{i=1}^L p_i \beta_i$. Vgl. dazu (6.20) bzw. (6.21), S. 170.

diesen Typs werden im Folgenden mit H^b bezeichnet. Alle restlichen Haushalte mit Ausgaben, die ausnahmslos über den Mindestmengen liegen, erhalten die Bezeichnung H^c . Bei den Haushalten H^b und H^c ist es möglich, das Gruppenüberschusseinkommen \hat{M}^s mittels der Parameter α_s , β_s und γ_s , den Preisindizes P^s und dem positiven Überschusseinkommen \hat{M} zu bestimmen.⁹² Die Verteilung auf die Untergruppen erfolgt gemäß Gleichung (6.22). Anschließend werden mit den Parametern α_i die geschätzten Überschussnachfragen der Güter in den Gruppen bestimmt:

$$M_i - p_i \beta_i = \alpha_i \hat{M}^s \quad \text{mit } i = 1, \dots, l^s. \quad (6.23)$$

Den Haushalten des Typs H^b und H^c können folglich geschätzte Gruppenausgaben und somit geschätzte Ausgaben für Güter in den Gruppen zugeordnet werden.

Nachbildung bei Einkommensänderungen

Die vorgeschlagene Standardprozedur der Nachbildung von Nachfragereaktionen bei positiven Einkommensänderungen ist für Haushalte des Typs H^c in der folgenden Abbildung 6.5 skizziert.⁹³ Im Beispiel ist ein Haushalt mit zwei Gütergruppen, die jeweils aus zwei Gütern bestehen, dargestellt. In der linken Hälfte ist die geschätzte komparativ-statische Reaktion eines Haushalts auf eine Einkommensänderung abgebildet. Die jeweils linken Balken zeigen die mit dem oben beschriebenen Verfahren geschätzten optimalen Ausgaben für ein Gut bei ursprünglichem und die jeweils rechten Balken bei neuem Einkommen. Die im Beispiel positive Differenz bei den Ausgaben für die einzelnen Güter wird im Anschluss in den Mikrodatensatz übertragen. Es erfolgt somit keine Angleichung auf die geschätzte Nachfrage. Die Unterschiedlichkeit der Nachfrage einzelner Haushalte bleibt bei diesem Verfahren bis auf Ausnahmen in der absoluten Betrachtung erhalten. Eine weitere, hier nicht betrachtete Möglichkeit wäre, allen Haushalten die geschätzte Nachfrage zuzuweisen. Dieser radikale Weg zerstört völlig die Streuung der Nachfrage im Datensatz und wird daher nicht empfohlen. Dieses Extrem vermittelt die grundsätzliche Schwierigkeit der Nachbildung. Das Nachfragesystem liefert nur Informationen über die Reaktion eines Durchschnittshaushalts. Es bedarf daher einer sich der empirischen Stützung entziehenden Entscheidung, wie die Haushalte des Datensatzes zu diesem Durchschnitt in Beziehung stehen. Die Ausführungen sind daher mehr als Vorschlag denn als zwingend notwendige Vorgehensweise zu verstehen.

Für Haushalte des Typs H^b kommen zwei Varianten der Nachbildung in Betracht. Bei der ersten Variante wird im Prinzip die gleiche Prozedur wie bei

⁹²Je nach Form der demographischen Spezifizierung sind wiederum entweder alle Parameter oder nur die β_s von den demographischen Merkmalen abhängig.

⁹³Auf den theoretisch möglichen Fall einer inferioren Gütergruppe wird in der Darstellung verzichtet.

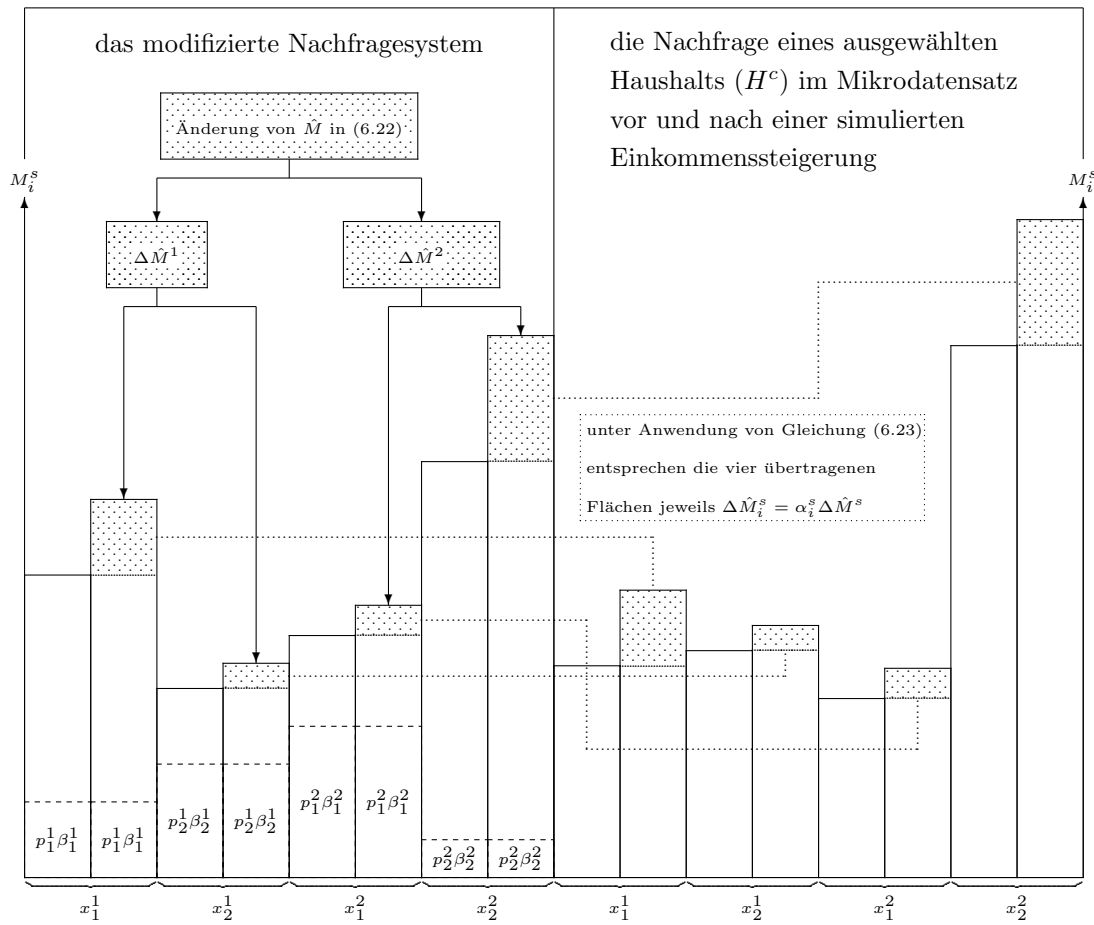


Abbildung 6.5: Modellerte Nachfragereaktionen bei einer Einkommensänderung (Quelle: Eigene Darstellung).

den H^c -Haushalten gewählt. Im Nachfragesystem ist ein positives Überschuss-einkommen vorhanden, welches auf Gruppen bzw. auf Güter verteilt wird. Der Unterschied zum obigen Verfahren besteht lediglich darin, dass auch nach der Übertragung der durch das Nachfragesystem geschätzten positiven Differenz im Mikrodatsatz Ausgaben generiert werden könnten, die weiterhin unter den so genannten Mindestausgaben liegen. Bei der zweiten Variante wird im Gegensatz dazu in einem dem obigen Verfahren vorangestellten Nachbildungsschritt zunächst teilweise, im Extremfall auch vollständig das positive Überschusseinkommen gleichmäßig zur Aufstockung auf die geschätzten Mindestausgaben verwendet. Erst im Anschluss daran wird das eventuell noch vorhandene Resteinkommen nach der obigen Standardprozedur auf den Mikrodatsatz verteilt. Aus theoretischer Sicht sind beide Varianten gleichwertig, wobei die letztgenannte die erfassten Unterschiede im Mikrodatsatz stärker nivelliert und somit einen

diesbezüglich stärkeren Eingriff in die ursprüngliche Datenstruktur darstellt. Des Weiteren verursacht die zweite Variante einen höheren programmieretechnischen Aufwand, so dass die in Abbildung 6.5 skizzierte Standardmethode bei positiven Einkommensänderungen für Haushalte des Typs H^b scheinbar die bessere Methode ist.

Bei einer negativen Entwicklung des Haushaltseinkommens ($\Delta \hat{M} < 0$) könnte die Anwendung der Standardmethode allerdings bei beiden Haushaltstypen zu einer simulierten negativen Nachfrage führen, wobei dieses Problem für Haushalte des Typs H^b wahrscheinlicher ist.⁹⁴ Eine im Nachfragesystem durch die Einkommensenkung verursachte negative Differenz kann prinzipiell größer als die im Mikrodatensatz erfasste Nachfrage sein. Beim Übertrag müssen daher generell Grenzen gesetzt werden, um zumindest die Bildung negativer Ausgabengrößen zu vermeiden. Bevor eine diesbezügliche Methode vorgestellt wird, soll noch kurz auf die Haushalte des Typs H^a bei Einkommenssteigerungen eingegangen werden. Diese Haushalte zeichnen sich durch ein negatives Überschusseinkommen aus, wobei nicht alle Ausgaben für Güter unter den jeweiligen geschätzten Mindestausgaben $p_i \beta_i$ liegen müssen. Bei diesem Typ Haushalt sollte zusätzliches Einkommen in der Simulation zunächst für die vollständige Deckung der Mindestausgaben genutzt werden. Einer anderen Anpassungsmethode liefert das Nachfragesystem keine Basis. Für eventuell vorhandenes Resteinkommen kann dann wieder die obige Standardmethode Anwendung finden. Die simulierten Ausgaben des Haushalts entsprechen dann, bis auf die schon am Anfang über den Mindestausgaben liegenden Ausgaben, exakt den geschätzten Ausgaben.

Negative Einkommensänderungen sind, wie angedeutet, schwieriger nachzubilden, da die natürliche Grenze einer positiven Nachfrage keinesfalls überschritten werden darf.⁹⁵ Für die Simulation einer Verringerung des Einkommens bei Haushalten des Typs H^a sind die Ergebnisse der Nachfragesystemschatzung nicht anwendbar, da sie keine Reaktionsparameter für diesen Bereich enthalten. Zunächst sollten die über den Mindestausgaben liegenden Ausgaben für Güter proportional reduziert werden. Genügt diese einfach nachzubildende Anpassung nicht, können anschließend die Mindestausgaben gleichmäßig reduziert werden.

Bei den Haushalten des Typs H^c liegen alle realisierten Ausgaben über den geschätzten Mindestausgaben $p_i \beta_i$. Wenn die durch die Verringerung des Einkommens verursachte geschätzte Reduktion der Ausgaben für ein Gut i durch die Übertragung in den Datensatz eine Güternachfrage simuliert, die weiterhin über den Mindestausgaben liegt, sind keine Schwierigkeiten bei diesem Haushaltstyp zu erwarten. Führt die zu übertragende Verringerung der Nachfrage jedoch zu Ausgaben unter den Mindestausgaben oder sogar zu negativen Güterausga-

⁹⁴Die Wahrscheinlichkeit simulierter negativer Mengen steigt mit einer geringen realisierten Nachfrage. Haushalte des Typs H^b zeichnen sich gerade dadurch aus, dass sie nicht immer die geschätzten Mindestausgaben getätigt haben.

⁹⁵Die folgenden Ausführungen gelten in Teilen auch für den Fall inferiorer Gütergruppen.

ben, sind grundsätzlich zwei mögliche Nachbildungen denkbar. Für Haushalte des Typs H^c kann zum einen die Mindestmenge $p_i\beta_i$ und zum anderen die Nullausgabe als untere Nachfragegrenze festgelegt werden. Dies kann in Abhängigkeit von der Grenzziehung bedeuten, dass die Nachfrage nicht ausreichend reduziert wird, um die Verringerung des Einkommens insgesamt zu kompensieren. Der verbleibende Betrag muss daher an einer anderen Stelle eingespart werden. Dazu bieten sich zunächst die Ausgaben in der Gütergruppe des betroffenen Gutes an. Genügt die Kürzung nicht, müssen anschließend die Ausgaben in anderen Gruppen reduziert werden. Die durch die notwendige Ausgabenreduktion verursachte Auswirkung auf die Nachfrage anderer Güter ist stark von der gewählten unteren Grenze abhängig. Werden die Mindestausgaben als untere Grenze gewählt, muss potentiell mehr Einkommen bei anderen Gütern eingespart werden. Des Weiteren bewirkt die Wahl der Mindestausgaben als Untergrenze, dass die mögliche Ausgabenreduktion innerhalb der Gruppe kleiner ist als bei einer Entscheidung für die Nullausgaben.⁹⁶ Unabhängig von den Grenzvarianten erfolgt bei den fraglichen Gütern zunächst die maximale Ausgabenreduktion auf die gewählte Untergrenze. Anschließend werden die restlichen Güterausgaben in der Gruppe proportional gekürzt, bis entweder die notwendige Ausgabenreduktion erreicht ist oder aber ein Gut der restlichen Güter erneut die Grenze erreicht. Im letzteren Fall wird die proportionale Kürzung nochmals auf die dann verbleibenden Güter mit Ausgaben über der festgelegten Grenze angewandt. Dieses Verfahren wird solange fortgesetzt, bis die notwendige Ausgabenreduktion erreicht ist oder aber alle Güter innerhalb der Gruppe die Untergrenze erreicht haben. Im letzteren Extremfall werden je nach Grenzziehung dann entweder nur noch die Mindestausgaben oder gar keine Ausgaben mehr für die Gruppe simuliert. Eine eventuell notwendige weitergehende Ausgabenreduktion muss somit außerhalb der Gruppe erfolgen. Die Verteilung dieses Restbetrages kann wieder mit den Informationen aus dem geschätzten Nachfragesystem erfolgen. Wurden z.B. die Ausgaben des Haushalts in der Gruppe u auf die gewählte Untergrenze reduziert, kann der eventuell verbleibende Restbetrag \ddot{M} gemäß der Formel

$$\frac{\Delta\hat{M}^t}{(\sum_{s=1}^S \Delta\hat{M}^s) - \Delta\hat{M}^t} \ddot{M} = \ddot{M}^t \quad (6.24)$$

auf die verbleibenden $(S-1)$ Gruppen t mit $t, u \in S$ und $t \neq u$ verteilt werden.⁹⁷ Dort erfolgt dann eine proportionale Kürzung nach dem oben beschriebenen Verfahren.

Für Haushalte des Typs H^b eröffnen sich ähnliche Möglichkeiten der Nachbildung. Ein Unterschied zur H^c -Prozedur existiert nur dann, wenn als untere

⁹⁶Die Differenz entspricht exakt der Summe der Mindestausgaben in der Gruppe.

⁹⁷Die $\Delta\hat{M}^s$ sind aus dem Nachfragesystem bekannt. Ihre Berechnung erfolgte gemäß Gleichung (6.22), S. 172. Für die verbleibenden $(S-1)$ Gruppen t sei angenommen, dass sie über ausreichende Ausgaben über der für sie geltenden Untergrenze besitzen. Ansonsten müsste die Gleichung (6.24) entsprechend modifiziert werden.

Grenze die Mindestausgaben gewählt werden. Haushalte des Typs H^b zeichnen sich durch realisierte Ausgaben unter den Mindestausgaben aus. Konsequenter Weise müsste der Haushalt erst die Mindestausgaben decken, was die zu simulierende Einkommensenkung in ihrer Höhe verstärkt. Diese Form der Nachbildung würde demnach trotz einer Einkommensenkung Ausgabensteigerungen für bestimmte Güter simulieren.

Die Nachbildungsstrategie mit Nullausgaben als untere Grenze besitzt bezüglich der ursprünglichen Datenstruktur eine geringere Eingriffsintensität als die Strategie mit den Mindestausgaben. Die Unterschiedlichkeit der Nachfrage bei den einzelnen Haushalten bleibt in der Tendenz stärker erhalten. Allerdings werden bei der ersten Methode die Annahmen des der Schätzung zugrunde liegenden modifizierten Ansatzes bei der Übertragung der Ergebnisse vollständig ignoriert. Eine eindeutige oder gar einwandfreie Entscheidung für eine der beiden Untergrenzen ist daher kaum möglich. Es ist vielmehr eine Frage der Nachbildungsphilosophie. Ein gutes Argument für die Methode der simplen Übertragung der komparativ-statischen Änderungen, die nur die natürliche Grenze der Nullnachfrage berücksichtigt, ist sicher die relative Schlichtheit. Neben einem erhöhten programmiertechnischen Aufwand würden durch die Mindestausgabenvariante bei bestimmten Konstellationen der erfassten Nachfrage Reaktionen simuliert, die sowohl in der Höhe als auch in der Richtung ausschließlich durch die Modellannahmen bedingt sind. Wird dieser Argumentation gefolgt, ist daher nur die Vermeidung einer simulierten negativen Nachfrage geboten. Die geschätzten Mindestausgaben sollten vor allem hinsichtlich der Nachbildung bei Haushalten des Typs H^a Verwendung finden, da hier keine Alternativen zu dieser Nachbildungsstrategie existieren. Die Nachbildungsstrategie folgt also dem Grundsatz, lediglich komparativ-statisch determinierte Änderungen zu übertragen und nur im Notfall eine Anpassung an die geschätzten Güternachfragen vorzunehmen.

Nachbildung bei Preisänderungen und demographischen Änderungen

Bevor im ersten Teil dieses Abschnitts kurz die Möglichkeit der Nachbildung von Reaktionen der Haushalte auf Preisänderungen beschrieben wird, sei nochmals daran erinnert, dass die ermittelte Wirkung ausschließlich durch theoretische Annahmen determiniert ist. Die Parameter des Nachfragesystems wurden aus Daten mit relativ wenigen Preisinformationen bestimmt. Dies muss bei der Bewertung der Ergebnisse immer berücksichtigt werden.

Eine Preisänderung Δp_j eines Gutes x_j der Gruppe s wirkt beim modifizierten Nachfragesystem sowohl direkt in der Gruppe als auch indirekt auf alle anderen Gruppen. Letzteres erfolgt über eine Veränderung des Preisindex der Gütergruppe $\Delta P^s(p^s)$ und eine Veränderung des Überschusseinkommens $\Delta \hat{M}$. Für die Bestimmung der komparativ-statischen Reaktion der Nachfrage muss zunächst die

Veränderung der Mindestausgaben in der Gruppe s errechnet werden. Es gilt:

$$\Delta \sum_{i=1}^{l^s} p_i^s \beta_i^s = \Delta p_j^s \beta_j^s. \quad (6.25)$$

Dadurch verändert sich auch das Überschusseinkommen des Haushalts:

$$\Delta \hat{M} = M - \Delta \sum_{i=1}^{l^s} p_i^s \beta_i^s = M - \Delta p_j^s \beta_j^s. \quad (6.26)$$

Das neue Überschusseinkommen $\hat{M} + \Delta \hat{M}$ wird, falls positiv, unter Verwendung des neuen Preisindex $P^s(p^s) + \Delta P^s(p^s)$ mit der Gleichung (6.22) aufgeteilt.⁹⁸ Die so geschätzten neuen Gruppenüberschusseinkommen $\hat{M}^s + \Delta \hat{M}^s$ determinieren im Anschluss mit den entsprechenden Parametern α_i^s die über den Mindestausgaben liegenden Ausgaben für die einzelnen Güter in den Gruppen. Die Übertragung der Änderungen in der Güternachfrage kann dann entsprechend der oben vorgeschlagenen Prozedur bei Einkommensänderungen erfolgen.

Die Abschätzung der Auswirkung von demographischen Veränderungen des Haushalts auf die Güternachfrage ähnelt im Falle angewandter demographischer Verschiebung dem Vorgehen bei Preisänderungen. Eine Änderung des Vektors d der demographischen Merkmale wirkt zum einen auf die l^s β -Parameter in den S Gruppen und zum anderen auf die S β -Parameter, die bei der Verteilung des Überschusseinkommens verwendet werden. Im Unterschied zu einer Preisänderung verursacht die Änderung demographischer Merkmale zunächst die Änderung aller Mindestausgaben in den Gruppen. Für die Veränderung des Überschusseinkommens gilt somit

$$\Delta \hat{M} = M - \Delta \sum_{i=1}^{l^s} p_i^s \beta_i^s = M - \sum_{i=1}^{l^s} p_i^s \Delta \beta_i^s. \quad (6.27)$$

Resultiert aus (6.27) ein positives neues Überschusseinkommen $\hat{M} + \Delta \hat{M} > 0$, wird dieses, wie bei der Preisänderung, mit der Gleichung (6.22) neu aufgeteilt. Der Unterschied zur oben beschriebenen Prozedur besteht lediglich darin, dass statt eines Preisindex sämtliche β -Parameter in (6.22) verändert werden. Die restliche Nachbildung entspricht wieder völlig der beschriebenen Strategie bei einer Preisänderung.

Bei der Nachbildung demographischer Veränderungen im Falle von "unpooled" Schätzungen der Nachfragesysteme springt ein Haushalt im Prinzip von

⁹⁸Die Änderung des für die Verteilung des neuen Überschusseinkommens relevanten Gruppenpreisindex entspricht $\Delta \hat{P}^s(p^s) = \left[p_1^{\alpha_1^s} \cdots (p_j + \Delta p_j)^{\alpha_j^s} \cdots p_{l^s}^{\alpha_{l^s}^s} \right] - \left[p_1^{\alpha_1^s} \cdots p_j^{\alpha_j^s} \cdots p_{l^s}^{\alpha_{l^s}^s} \right]$.

einem Nachfragesystem in ein anderes. Folglich werden die geschätzten Güternachfragen des alten und des neuen Systems verglichen. Die Differenzen beider Schätzungen werden, ähnlich wie in der Abbildung 6.5 auf S. 175 skizziert, übertragen. Da bei dieser Nachbildung das Einkommen konstant bleibt, halten sich hier positive und negative Ausgabenänderungen im Nachfragesystemvergleich die Waage. Die Schwierigkeit besteht nun darin, dass teilweise geschätzte negative Nachfrageänderungen nicht übertragen werden können, da sonst bei bestimmten Gütern negative Nachfragen simuliert werden würden. Dieses durch das Postulat einer nicht negativen Nachfrage verursachte Problem ist keineswegs neu und wurde bereits für den Fall einer negativen Einkommensänderung behandelt. Ein Verweis auf die diesbezüglichen Ausführungen und Lösungsvorschläge soll daher hier genügen.⁹⁹ Sollte der Anwender die dort u.a. erläuterte Nachbildungsstrategie mit den Mindestausgaben als untere Grenze bevorzugen, sind in dem hier beschriebenen Nachbildungsprozess der demographischen Veränderung selbstverständlich die neu ermittelten Mindestausgaben als Grenze zu wählen.

6.4 Schlussbetrachtung

Der letzte Abschnitt dieses Kapitels ist zunächst einer kompakten Darstellung der Ergebnisse der gesamten Arbeit gewidmet. Dieser Zusammenfassung unter 6.4.1 folgt dann unter 6.4.2 der Versuch einer Beantwortung der eingangs dieser Arbeit gestellten zentralen Fragen. Den Abschluss bildet ein kurzer Ausblick auf vielleicht in der Zukunft mögliche Fortschritte in diesem Forschungsfeld.

6.4.1 Zusammenfassung

Im Folgenden wird durch die Zusammenfassung der jeweiligen Inhalte der einzelnen Kapitel versucht, einen komprimierten Überblick über die gesamte Arbeit bereitzustellen.

Mikrosimulation

Nachdem im ersten Kapitel die Ziele und der inhaltliche Aufbau der Arbeit beschrieben wurden, erfolgte im zweiten Kapitel die eigentliche Einführung in das Thema Mikrosimulation. Das Grundkonzept basiert auf der relativ simplen Idee einer direkten Nachbildung der in der Realität vorhandenen Abläufe. Die Gesamtpopulation wird durch einen der Aufgabenstellung angemessenen Mikrodatensatz repräsentiert. Eine zu untersuchende Reform wird simuliert, indem sie, umgewandelt in maschinenlesbare Form, auf diesen Mikrodatensatz einwirkt und ihn somit

⁹⁹Vgl. die Ausführungen auf S. 176ff.

verändert. Die Veränderungen im Datensatz sind Grundlage für die Abschätzung der Auswirkungen der fraglichen Reform.¹⁰⁰

Die Vorteile dieses Instruments liegen zum einen in der großen Anwendungsvielfalt begründet. Kaum ein anderes Mittel der empirischen Wirtschaftsforschung kann so flexibel eingesetzt werden. Zum anderen ist eine extrem detaillierte Auswertung der Wirkung von Reformmaßnahmen möglich. Auch in diesem Bereich ist die Mikrosimulation allen anderen Methoden überlegen.

Die Methode der Mikrosimulation besitzt jedoch auch Nachteile. Eine Grenze der Anwendbarkeit ist in der Güte der zur Verfügung stehenden Datensätze zu finden. Die Anforderungen der Mikrosimulation an die Daten sind extrem hoch, so dass eine möglicherweise notwendige Erstellung adäquater Datensätze sehr kostenintensiv sein kann. Die zweite generelle Beschränkung der Anwendbarkeit liegt in der oft äußerst aufwendigen technischen Nachbildung des Maßnahmenbündels. Auch in diesem Fall sind die Kosten von entscheidender Bedeutung für die Anwendungsentscheidung. Die beiden genannten Ursachen für die sowohl monetären als auch zeitlichen Kosten des Instruments können die Wirtschaftlichkeit der Anwendung verhindern oder die Nutzung gänzlich unmöglich machen.

Um die oben genannten Nachteile zu entschärfen, sind verschiedene Lösungen erläutert worden. Diesbezüglich erfolgt hier zunächst eine an der obigen Struktur der beiden Ursachen orientierte zusammenfassende Darstellung. Sodann werden die vielseitigen Einsatzmöglichkeiten eines Nachfragesystems in diesen zwei Problemfeldern der Mikrosimulation aufgeführt, bevor anschließend kurz die in Deutschland vorhandene Mikrodatenlage beschrieben wird.

Der erste Lösungsansatz dient der Behebung von Problemen, die bei der Anpassung eines vorhandenen Datensatzes an einen für die Mikrosimulation adäquaten Datensatz entstehen. Hier können zwei Anpassungsschwerpunkte unterschieden werden: Der Datensatz muss sowohl ein repräsentatives Abbild der Merkmalsträger aus der Grundgesamtheit sein als auch alle für die Nachbildung der Maßnahme relevanten Merkmale enthalten. Die Erfüllung der durch die Aufgabenstellung determinierten Anforderung an die Aktualität des Datensatzes ist dabei eine Teilaufgabe in beiden Anpassungsschwerpunkten. Mit der in der Abbildung 2.2 auf Seite 14 skizzierten *integrativen Verknüpfung* verschiedener Datensätzen können die Merkmalsträger im Datensatz an die Realität angepasst werden. Für den zweiten Schwerpunkt bei der Anpassung des Datensatzes bieten sich zwei Methoden an. Die oft notwendige Erweiterung der Merkmale im Datensatz kann zum einen durch das so genannte *Matching* erfolgen. Dabei werden, wie in Abbildung 2.3 auf Seite 16 skizziert, die Merkmale aus zwei Datensätzen zusammengeführt. Die Verknüpfung zweier Datensätze über gemeinsame Merkmale generiert dann einen neuen Datensatz, der die Merkmale aus beiden enthält. Zum anderen kann die Erweiterung der Merkmale über Regressionstechniken gelingen. Diese alter-

¹⁰⁰Vgl. dazu nochmals Abbildung 2.1 auf S. 6.

native Methode setzt vorhandene Merkmale in eine funktionale Beziehung zu den neuen Merkmalen. Die Ausprägungen der neuen Merkmale werden somit aus den bereits im Datensatz vorhandenen Ausprägungen berechnet.

Der zweite Ansatz zielt auf die Lösung der Schwierigkeiten bei der Nachbildung der Anpassungsreaktionen ab. Bei der Modellierung des auf den Datensatz einwirkenden Maßnahmenbündels stellt diese Nachbildung eine besondere Herausforderung dar. Der Mikroeinheit wird unter der Verwendung von Anpassungsparametern und Inputgrößen ein Vektor von Outputgrößen zugewiesen.¹⁰¹ Anders als bei *morning-after* Simulationen ist der funktionale Zusammenhang nicht bekannt und muss somit bestimmt werden. Für diese Bestimmung können neben den eigentlichen Mikrodaten auch andere Informationsquellen genutzt werden. Neben dieser sehr datenintensiven Abschätzung der Anpassungsparameter erfordert die anschließende programmiertechnische Implementierung des funktionalen Zusammenhangs in das Mikrosimulationsmodell einen großen Aufwand.

Nachfragesysteme dienen in der Mikrosimulation sowohl zur Erstellung der Datensätze als auch zur Nachbildung der Anpassungsreaktionen. Diese Doppelfunktion ist damit zu begründen, dass die Aufgabenstellung in beiden Bereichen grundsätzlich sehr ähnlich ist. In beiden Fällen erfolgt eine Berechnung der Güternachfrage eines Haushalts. Als Inputfaktoren stehen dafür das für den Konsum bestimmte Haushaltseinkommen, der Preisvektor und gegebenenfalls demographische Merkmale zur Verfügung. Wird das Nachfragesystem für die Erstellung eines adäquaten Datensatzes verwendet, entspricht die berechnete Güternachfrage den gesuchten neuen Merkmalen. Die Anwendung auf dem Gebiet der Nachbildung von Anpassungsreaktionen ist hingegen komplexer, wenngleich auch für diesen Zweck die Güternachfragen gemäß dem geschätzten funktionalen Zusammenhang bestimmt werden. Ein diesbezüglicher kompakter Überblick erfolgt erst auf Seite 188ff. Grundsätzlich bleibt festzuhalten, dass erst mit der Nachbildung von Anpassungen in der Güternachfrage bestimmte Aufgabenstellungen durch die Mikrosimulation bewältigt werden können. Insbesondere für langfristige Prognosen ist eine Abschätzung der jeweiligen Nachfragereaktion eines Haushalts von Bedeutung. Die Vorteile reichen dabei von einer Verbesserung der Auswertungsmöglichkeiten bis hin zur besseren Abschätzung der steuerlichen Aufkommenswirkung einer Reform. Eine Verbesserung des Instruments Mikrosimulation durch ein Nachfragesystem ist damit zweifellos gegeben. Fraglich bleibt nur, ob der zusätzliche Nutzen die mit der Erstellung und Implementierung verbundenen Kosten rechtfertigt.

Grundlage für alle Mikrosimulationsvorhaben ist immer ein Mikrodatensatz. Die Verfügbarkeit von Mikrodaten für die wissenschaftliche Nutzung ist in der Bundesrepublik relativ gut, wenngleich nicht ideal. Für die Schätzung eines Nachfragesystems muss ein Datensatz auf der Haushaltsebene erfasste Informationen

¹⁰¹Vgl. dazu die drei Gleichungssysteme auf S. 19f.

über das Einkommen, detaillierte Konsumausgaben und demographische Merkmale besitzen und dabei eine hinreichende Repräsentativität für die zu untersuchende Gesamtpopulation gewährleisten. Diese Eigenschaften bietet in Deutschland nur die Einkommens- und Verbrauchsstichprobe. Neben diesen besonderen Eigenschaften für Nachfragesysteme hat die EVS ganz allgemein das Potential zum Basisdatensatz für vielfältige mikroanalytische Untersuchungen. Die theoretischen Erörterungen der vorliegenden Arbeit zur Schätzung von Nachfragesystemen gehen daher von der Verfügbarkeit dieser Datensätze aus.

Theorie der Güternachfrage

Die mikroökonomischen Modelle der Haushaltsentscheidung sind die theoretische Basis der in der Arbeit behandelten Nachfragesysteme. Die Nachfrageentscheidung einer Mikroeinheit ist in dieser Modellwelt nur abhängig vom Einkommen und den Güterpreisen. Die Güternachfrage wird dabei unter dem Postulat der Nutzenmaximierung determiniert. Der theoretische Optimierungsprozess liefert ein eindeutiges Ergebnis, wenn die Annahmen A1 bis A6 erfüllt sind. Der Haushalt besitzt demnach eine rationale Präferenzordnung, die durch eine steigende, streng quasikonkave und zweimal differenzierbare Nutzenfunktion nachgebildet werden kann. Des Weiteren sind dem Haushalt sämtliche Preise bekannt und können von ihm nicht beeinflusst werden. Letzteres führt zu einer linearen Budgetbeschränkung.

Aus den Grundannahmen folgen zahlreiche Eigenschaften theoretisch konsistenter Nachfragesysteme. Diese Eigenschaften besitzen einen großen technischen Nutzwert für die empirische Nachfrageanalyse und werden daher regelmäßig angewendet. Die relativ ausführlichen Darstellungen im dritten Kapitel dienen daher, neben dem besseren Verständnis, auch einer kritischen Bewertung dieser häufig genutzten Werkzeuge. Beispielsweise ist die Anwendung von *Roy's Identität* oder der *Slutskysymmetrie* bei strenger Auslegung der Theorie nur dann angemessen, wenn eine innere Lösung des Optimierungsproblems vorliegt. Die Verwendung dieser Eigenschaften bei Nullkonsum ist daher zumindest fragwürdig.¹⁰²

Nachfragesysteme

Vor dem Hintergrund der Datenlage kann die Schätzung eines Nachfragesystems nur unter Anwendung der Erkenntnisse aus der Nachfragetheorie erfolgen. Um der Vielgüterproblematik Herr zu werden, sind neben den für die allgemeine Theorie notwendigen Annahmen weitere strenge Annahmen und somit Restriktionen unabdingbar. Die Beschreibung dieser Restriktionen steht im Mittelpunkt des ersten Teils des vierten Kapitels. Der zweite Teil bietet einen Überblick über die vielfältigen Möglichkeiten der Spezifizierung von Nachfragesystemen.

¹⁰²Vgl. bezüglich des Nullkonsums die Randlösung in Abbildung 3.2, S. 52.

Bei einem System mit L Gütern müssten ohne Einschränkungen auf der theoretischen Ebene L^2 Preiselastizitäten und L Einkommenselastizitäten geschätzt werden. Die in der Realität vorhandene Vielgütersituation kann somit die empirische Bestimmung unmöglich machen. Für die Aufgabe der zwingend notwendigen Reduktion der zu schätzenden Elastizitäten bietet die Theorie zwei Lösungswege. Die erste Lösung besteht aus einer Zusammenfassung einzelner Güter zu großen Güteraggregaten. Dieser Weg ist durch sehr restriktive Annahmen gekennzeichnet. Des Weiteren wird durch die faktische Verringerung der Güteranzahl die Anwendbarkeit des Nachfragesystems für die Mikrosimulation eingeschränkt. Daher sollte der Weg über die Güteraggregation soweit wie möglich vermieden werden. Der zweite Lösungsweg setzt auf die Möglichkeiten einer zweistufigen Budgetierungsstrategie. Für dieses so genannte two-stage budgeting sind Separabilitätsannahmen über die Nutzenfunktion des Haushalts nötig. Im Folgenden wird kurz die eigentliche Strategie der Budgetierung beschrieben. Die jeweilige Nennung der sich mit der Variante der Separabilitätsannahme verändernden Restriktionen bildet den Abschluss des ersten Teils der Zusammenfassung von Kapitel 4.

Die Nachfrageentscheidung eines Haushalts erfolgt im herkömmlichen theoretischen Rahmen unter Kenntnis aller Preise und des Einkommens. Das Strukturmodell der zweistufigen Budgetierung liefert bei gleichem Input und Geltung der Separabilitätsannahmen eine identische Güternachfrage. Der Haushalt verteilt auf der ersten Stufe sein Einkommen auf S Untergruppen. Für die optimale Verteilung genügt dabei die Kenntnis der Gruppenpreisindizes und des Gesamteinkommens. Auf der zweiten Stufe wird die eigentliche Güternachfrage determiniert. Dafür genügen Informationen über das der Gruppe zugewiesene Einkommen und über die Güterpreise in der Gruppe. Die Strategie des two-stage budgeting zerlegt also gedanklich die für die empirische Schätzung zu große Optimierungsaufgabe in zahlreiche kleine Optimierungsaufgaben.

Beim two-stage budgeting unter der Annahme additiver Separabilität besteht zwischen den Subnutzenfunktionen der Untergruppen faktisch eine additive Verknüpfung. Diese Annahme ermöglicht eine größere Flexibilität der Nachfragesysteme in den Untergruppen. Die modellierbaren Reaktionsmöglichkeiten der Gruppenausgaben auf Gesamteinkommensänderungen sind dadurch jedoch eingeschränkt. Eine Einkommenssteigerung führt hier beispielsweise zu einer ausnahmslosen Erhöhung der Zuweisungen an die Gruppen. Eine "inferiore" Gruppe kann aus strenger theoretischer Sicht nicht nachgebildet werden. Die vergleichsweise hohe Flexibilität der Subnutzenfunktionen ermöglicht hingegen die Nachbildung von inferioren Gütern innerhalb der Gruppen. Auch die Nachfragereaktion auf Preisänderungen innerhalb der Gruppe ist in der Richtung offen.¹⁰³ Die block-additive Modellierung schränkt jedoch die möglichen *Hicks*schen Intergruppenpreiseffekte ein. Güter aus unterschiedlichen Gruppen sind strukturbedingt Sub-

¹⁰³Die Subnutzenfunktionen müssen in ihrer indirekten Form lediglich der *Generalized Gorman Polar* Form entsprechen.

stitute, wenn entweder beide normale oder beide inferiore Güter sind. Eine komplementäre Beziehung ist somit nur bei einer entgegengesetzten Einkommensreaktion der beiden Güter möglich. Die restriktiven Wirkungen der Struktur sollten bei der Gruppenzuordnung der Güter und bei der Beurteilung der empirischen Ergebnisse bedacht werden.

Das two-stage budgeting unter der Annahme homothetischer Separabilität bietet eine sehr hohe Flexibilität auf der ersten Stufe. Dafür müssen die Subnutzenfunktionen linearhomogen sein, was die Flexibilität der Haushaltsreaktionen innerhalb der Untergruppen extrem einschränkt. Vor allem die durch die Struktur vorherbestimmte Gruppeneinkommenselastizität von Eins ist empirisch kaum haltbar. Auch bei dieser Separabilitätsannahme ist die Freiheit der *Hicksschen* Intergruppenpreiseffekte stark eingeschränkt. Ob zwei Güter aus unterschiedlichen Gruppen in einer Substitutions- oder Komplementärbeziehung stehen, hängt hier von den jeweiligen Gruppenbeziehungen ab. Der große Vorteil dieser Struktur liegt neben der Flexibilität auf der ersten Stufe in der Möglichkeit, die Aufgabe der Einkommensverteilung auf die Gruppen mit dem herkömmlichen Instrumentarium zu lösen. Nur im Falle homothetischer Separabilität entspricht das Produkt aus Mengen- und Preisindex der Gruppe den Gruppenausgaben. Die optimale Verteilung des Einkommens auf die Gruppen kann somit durch die Optimierung der Mengenindizes bei gegebenen Preisindizes und gegebenen Gesamteinkommen erfolgen.

Die Annahme additiver Separabilität mit homothetischen Subnutzenfunktionen ist die restriktivste mögliche Variante des two-stage budgeting. Diese Struktur geht von einer additiven Verbindung zwischen linearhomogenen Subnutzenfunktionen aus. Eine *Hickssche* Substitutionsbeziehung ist hier sowohl für die Gruppen als auch die Güter aus zwei unterschiedlichen Gruppen vorherbestimmt. Des Weiteren besitzen alle Güter eine Gruppeneinkommenselastizität von Eins. Der Vorteil liegt bei dieser Separabilitätsannahme in der größtmöglichen Reduktion der zu schätzenden Parameter. Sie wird daher in der Praxis recht häufig genutzt.

Im zweiten Teil des vierten Kapitels wurden grundsätzliche Möglichkeiten der funktionalen Spezifizierung von Nachfragesystemen erörtert. Die Analyse beschränkte sich dabei auf so genannte *Gormansche* Nachfragesysteme vollen Ranges. Diese Systeme zeichnen sich dadurch aus, dass sie bei konstanten Preisen linear in Funktionen des Einkommens sind und eine exakte Aggregation der Nachfrage ermöglichen. Letzteres erlaubt die Schätzung der Modellparameter aus aggregierten Haushaltsdaten. Bis auf sehr wenige Ausnahmen werden in der empirischen Praxis nur Rang-2- oder Rang-3-Nachfragesysteme der *Gormanschen* Charakterisierung verwendet, was diese Einschränkung rechtfertigt. Die Darstellung diente somit der verwandtschaftlichen Einordnung der im fünften Kapitel vorgestellten Systeme.

Ergänzend wurde an einem Beispiel gezeigt, dass ein theoretisch plausibles System dieser Form höchstens den Rang 3 besitzen kann. Des Weiteren wurde

die theoretische Plausibilität solcher Rang-3-Systeme überprüft. Unter der Maxime theoretischer Konsistenz zeigen die Ausführungen, dass eine Erweiterung des quadratischen Systems QES auf ein Polynom höherer Ordnung einen Verstoß gegen das Gebot der sparsamen Parameternutzung darstellt und somit nicht sinnvoll ist.

Ausgewählte funktionale Formen

Im fünften Kapitel wurden diejenigen Spezialformen der obigen *Gormanschen* Nachfragesysteme vorgestellt, die mit den in Deutschland vorhandenen Querschnittsdaten der EVS identifiziert werden können. Dabei wurden bei allen drei Systemen der Aufbau, die Eigenschaften und die Schätzung der Parameter analysiert.

Das Proportionale Ausgabensystem PES findet als Rang-1-System in der empirischen Praxis bisher keine direkte Anwendung.¹⁰⁴ In der vorliegenden Arbeit wird nur eine spezielle Form des PES betrachtet. Zwar teilt der Haushalt auch bei der allgemeinen Form sein Einkommen unabhängig vom Einkommensniveau proportional auf die einzelnen Güter auf. Jedoch gilt die Unabhängigkeit dieser Aufteilung vom Preisvektor nur für den Spezialfall. Es wird gezeigt, dass ein PES durch eine indirekte Nutzenfunktion generiert wird, die unter dem Namen CES-Nutzenfunktion in der einschlägigen Literatur bekannt ist. Die oben erwähnte spezielle Form des PES folgt aus einer entsprechenden speziellen Form dieser CES-Nutzenfunktion, welche unter dem Namen *Cobb-Douglas*-Nutzenfunktion bekannt wurde.

Wie der Name schon verrät zeichnet sich das PES durch Engelkurven aus, die durch den Ursprung verlaufen. Alle Güter besitzen demnach eine Einkommenselastizität von 1. Der *Hickssche* Kreuzpreiseffekt ist immer positiv, was eine Nachbildung von im *Hicksschen* Sinne komplementären Gütern unmöglich macht. Die *Marshallschen* Kreuzpreiseffekte sind bei *Cobb-Douglas*-Nutzenfunktionen bekanntlich 0 und der *Marshallsche* Eigenpreiseffekt ist negativ.

Die Parameter des genannten *Cobb-Douglas*-Sonderfalls des PES können problemlos mit einem Querschnittsdatensatz identifiziert werden. Der allgemeine Fall entzieht sich jedoch einer Identifizierung mit Querschnittsdaten.

Das LES ist als Rang-2-System ein in der Praxis sehr häufig genutztes System. Als lineares System besitzt es neben den Anstiegsparametern auch Parameter, die die Abweichungen der Engelkurven vom Koordinatenursprung determinieren. Diese β -Parameter können als Mindestmengen interpretiert werden. Die Ausgaben für ein Gut entsprechen somit beim LES den Ausgaben für die Mindestmenge

¹⁰⁴Das Akronym PES ist eine Kreation des Verfassers und soll die enge Beziehung zu dem bekannten LES und zum QES verdeutlichen.

dieses Gutes und dem durch den entsprechenden Anstiegsparameter α bestimmten Anteil am Überschusseinkommen. Das Überschusseinkommen entspricht dem um sämtliche Mindestausgaben reduzierten Einkommen. Das System besitzt also im Vergleich zum PES pro Gut einen Parameter mehr.

Durch diesen zusätzlichen Parameter ist eine bessere Anpassung an die Daten möglich. Die extrem restriktive Einkommenselastizität von 1 wird vermieden. Der Anstieg der Engelkurven ist jedoch immer positiv, wodurch keine inferioren Güter abgebildet werden können. Wie beim PES ist mit dem LES eine Nachbildung von im *Hicksschen* Sinne komplementären Gütern unmöglich. Die *Marshallschen* Kreuzpreiseffekte sind bei Geltung der Annahme der Nicht-Negativität der Mindestmengen immer negativ, was im Übrigen generell für die *Marshallschen* Eigenpreiseffekte gilt.

Die Schätzung der Parameter eines LES gelingt entweder mit zwei Querschnittsdatensätzen oder durch eine a priori Festlegung einer Mindestmengen-größe. Der erste Weg nutzt die unterschiedlichen Preisinformationen der zwei Datensätze und ist daher methodisch der letztgenannten Möglichkeit vorzuziehen.

Das QES ist als Rang-3-System das flexibelste unter den drei vorgestellten Nachfragesystemen. Neben den schon aus dem LES bekannten α -Parametern und β -Parametern enthalten die Nachfragefunktionen einen dritten Parameter-typ γ .¹⁰⁵ Diese Parameter determinieren die Lage der nun nicht mehr linearen, sondern quadratischen Engelkurven, was eine bestmögliche Anpassung an die Daten gestattet. Die Einschränkung "bestmöglich" bezieht sich dabei auf die Schätzbarkeit des Systems durch Querschnittsdaten.

Das Vorzeichen des Anstiegs dieser quadratischen Engelkurven ist nicht modellendogen festgelegt. Je nach Parameterkonstellation ist der Anstieg entweder positiv oder negativ. Eine QES-Modellierung ermöglicht somit auch die Abbildung inferiorer Güter. Die Kreuz- und Eigenpreiselastizitäten sind bis auf die wegen der theoretischen Konsistenz notwendiger Weise negativen *Hicksschen* Eigenpreiselastizität im Vorzeichen unbestimmt.

Für die Schätzung der Parameter eines QES werden zwei Querschnittsdatensätze benötigt. Wie bei der einen LES-Variante werden auch hier die Informationen eines zweiten Preisregimes zur Identifikation der Parameter genutzt.

Alle drei Formen ermitteln Preisreaktionen der Nachfrage. Diese Reaktionen eines Haushalts werden jedoch mit keiner oder einer äußerst geringen Preisvariation in den Querschnittsdaten bestimmt. Eine Schätzung der Preisreaktionen im klassischen Sinne findet nicht statt, da die Größen eine direkte Folge der getroffenen theoretischen Annahmen sind und aus den empirisch ermittelten Einkommensreaktionen berechnet und nicht etwa eigenständig geschätzt werden. Bei der

¹⁰⁵Die Besonderheit der λ^{sp} -Spezifikation sei in dieser Zusammenfassung vernachlässigt.

Beurteilung der Güte der Ergebnisse wäre das Übersehen dieses Zusammenhangs fatal.

Nachfragesysteme für die Mikrosimulation

Vor der Zusammenfassung der gesamten Arbeit erfolgte in Kapitel 6 die Untersuchung zweier spezieller Problemfelder der empirischen Nachfrageanalyse, bevor ein mögliches Nachfragesystem für Mikrosimulationsmodelle vorgestellt wurde. Des Weiteren wurden Möglichkeiten einer Einbindung von etwaigen Schätzergebnissen in Mikrosimulationsmodelle aufgezeigt.

Die Einbindung demographischer Merkmale der Haushalte in die Nachfragesystemschatzung ist in zweierlei Hinsicht von Bedeutung. Erstens kann dadurch die Anpassung des Modells an die Daten verbessert werden und zweitens ist mit der Einbindung eine Nachbildung der Nachfragereaktionen bei demographischen Veränderungen möglich. Für Nachfragesystemschatzungen mit Querschnittsdaten können generell zwei mögliche Strategien der Einbindung identifiziert werden:

Bei der ersten wird der Datensatz aufgespalten. In den Subdatensätzen befinden sich demographisch ähnliche Haushalte, für die dann jeweils ein eigenes Nachfragesystem geschätzt wird. Diese Strategie der "unpooled" Schätzung erlaubt eine flexible Anpassung an die Daten. Geringere Fallzahlen in den Subdatensätzen und damit verbundene statistische Probleme sind Nachteile der Methode.

Die zweite bei Querschnittsdaten mögliche Strategie lässt den Datensatz unverändert und bindet stattdessen die demographischen Merkmale in das Modell ein. Bei dieser Methode der demographischen Verschiebung haben die demographischen Merkmale nur Einfluss auf die β -Parameter des Nachfragesystems. Die Flexibilität hinsichtlich der Datenanpassung ist somit geringer. Der Vorteil der Methode liegt in der vollen Nutzung der Fallzahlen.

Nullkonsum ist in Mikrodatensätzen nicht ungewöhnlich. Drei mögliche Ursachen für Nullkonsum wurden identifiziert. Neben dem durch einen zu kurzen Erhebungszeitraum oder durch eine fehlerhafte Datenerfassung verursachten Nullkonsum war die dritte Quelle für diese Nachfragesonderform eine spezielle Präferenzordnung, die durch den in Kapitel 3 vorgestellten theoretischen Rahmen nicht abgedeckt ist. Es wurde gezeigt, dass Nullkonsum die Güte der Nachfragesystemschatzung gefährdet und die Anwendung theoretischer Hilfsmittel fragwürdig erscheinen lässt.

Leider ist es nicht möglich, die Art des Nullkonsums zu bestimmen, was eine ursachenadäquate Handhabung des Phänomens verhindert. Trotz dieser Schwierigkeiten wurden mögliche Lösungsansätze vorgestellt. Alle Varianten besitzen Qualitäten, jedoch ist keine der Lösungen ohne Probleme einsetzbar. Wie schon bei der demographischen Spezifizierung ist für das hier gesuchte Nachfragesystem wahrscheinlich eine Kombination der verschiedenen Lösungen optimal. Ein

schlichtes Weglassen der Nullnachfrage ist keinesfalls angemessen, da es zu einer allgemeinen Nachfrageüberschätzung führen würde.

Bei der Nachbildung der Haushaltsnachfrage mit einer two-stage budgeting Strategie gelten, wie in Kapitel 4 beschrieben, besondere Anforderungen an die verwendeten Nachfragesysteme. Als Kandidaten für die Verwendung auf den zwei Stufen des Budgetierungsprozesses kommen nur die unter Kapitel 5 beschriebenen funktionalen Formen in Betracht. Nur bei ihnen können die Parameter mit Querschnittsdaten identifiziert werden. Es wurde gezeigt, dass im Prinzip nur zwei Kombinationen die theoretischen Anforderungen erfüllen und gleichzeitig mit Querschnittsdaten identifizierbare Parameter haben. Auf der zweiten Stufe in den S Untergruppen muss ein PES eingesetzt werden, um auf der ersten Stufe entweder ein LES oder ein QES zu ermöglichen. Die Variante mit dem LES zeichnet sich durch eine Vielzahl theoretischer Restriktionen aus. Sie ist jedoch im Vergleich zur QES-Variante leichter zu schätzen. Die Nutzung eines QES auf der ersten Stufe ist hingegen die flexibelste mit Querschnittsdaten identifizierbare, theoretisch konsistente Kombination. Dennoch kann selbst die flexiblere QES-Variante in Bezug auf die Anwendung in Mikrosimulationsmodellen nur als unbefriedigend bezeichnet werden. Die aus dem PES folgende Einkommenselastizität von 1 in den Untergruppen ist sowohl empirisch unannehmbar als auch hinsichtlich der Nachbildung der Nachfragerreaktionen unzureichend.

Der vorgeschlagene modifizierte Ansatz versucht diese Schwäche zu beheben. Allerdings wird dafür die Forderung nach absoluter theoretischer Konsistenz aufgegeben. In einem ersten Schritt werden mittels eines LES die Mindestausgaben in den Untergruppen geschätzt, die dann vom Einkommen des Haushalts abgezogen werden. Das so ermittelte Überschusseinkommen ist jetzt Ausgangspunkt der eigentlichen Bestimmung der Nachfrage, die mit der theoretisch konsistenten QES-Variante des two-stage budgeting erfolgt. Die Addition der so ermittelten Überschussnachfrage mit der Mindestnachfrage ergibt die geschätzte Gesamtnachfrage des jeweiligen Gutes.¹⁰⁶ Der modifizierte Ansatz nutzt den Unterschied zwischen einem LES und einem PES. Durch den Abzug der Mindestausgaben wird das LES in den Untergruppen im Prinzip in ein PES umgewandelt. Das theoretische Problem bei diesem Vorgehen besteht in der impliziten Annahme, dass im zweiten Schritt nur das Überschusseinkommen Teil der Nutzenmaximierung ist. Bei der Bestimmung der Mindestausgaben wurde schließlich auch der theoretische Rahmen der Nutzenmaximierung genutzt, obwohl in diesem Fall das vollständige Einkommen relevant war.

Für die Nachbildung von Anpassungsreaktionen zahlt sich diese theoretische Schwäche des modifizierten Ansatzes jedoch aus. Die Reaktionen auf Einkom-

¹⁰⁶Die Probleme mit z.B. negativen Überschusseinkommen werden in dieser Zusammenfassung vernachlässigt.

mensänderungen in den Untergruppen ist praktisch nicht mehr zwangsläufig proportional sondern nur noch durch die Linearität eingeschränkt. Zudem besitzt die Verteilung des Überschusseinkommens auf die einzelnen Gruppen die Flexibilität eines QES.

Das Prinzip der Nachbildung beruht auf einem komparativ-statischen Ansatz. Für je zwei durch die zu simulierende Reform determinierten unterschiedlichen Konstellationen beim Haushaltseinkommen, bei den Güterpreisen oder bei den demographischen Merkmalen werden die geschätzten Güternachfragevektoren ermittelt. Die Differenz zwischen diesen Nachfragevektoren entspricht der geschätzten durchschnittlichen Anpassungsreaktion eines Haushalts. Diese Änderung in der durchschnittlichen Nachfrage wird anschließend auf die jeweils im Mikrodatensatz ausgewiesene Haushaltsnachfrage übertragen. Die Übertragung positiver Nachfrageänderungen ist dabei vergleichsweise unproblematisch. Schwieriger wird es bei der Übertragung einer Nachfragereduktion. Hier können als untere Grenze der simulierten Güternachfrage sowohl die Mindestausgaben als auch die Nullausgaben für ein Gut gewählt werden. Die Festlegung der Nullausgaben als untere Grenze besitzt neben einem niedrigeren programmiertechnischen Aufwand den Vorteil einer geringeren Eingriffsintensität und sollte daher trotz des damit verbundenen Widerspruches zum modifizierten Ansatz gewählt werden.

6.4.2 Schlussfolgerungen und Ausblick

Nachdem im Folgenden zunächst Antworten auf die eingangs gestellten Fragen gegeben werden, soll die Arbeit mit einem kurzen Ausblick auf zukünftige Herausforderungen schließen.

- Wann ist die Einbindung eines Nachfragesystems in Mikrosimulationsmodelle sinnvoll und wie kann ein solches System in das eigentliche Mikrosimulationsmodell integriert werden?

Die Einbindung ist immer dann als sinnvoll zu erachten, wenn die mit der Erstellung und Implementierung verbundenen Kosten den durch das Nachfragesystem generierten Nutzen nicht übersteigen. Diese simple Bedingung der Gleichheit von Grenzkosten und Grenznutzen nützt jedoch ohne eine konkrete Kenntnis der Kosten-Nutzen-Relation wenig. Die generellen Kosten eines Mikrosimulationsmodells wurden in Kapitel 2 aufgeführt. Unter anderem wurde dabei auf die Schwierigkeiten beim Erstellen adäquater Datensätze hingewiesen. In diesem Bereich ist auch das erste Anwendungsgebiet eines Nachfragesystems zu finden. Die mit einem Nachfragesystem mögliche Zuordnung einer gegebenenfalls demographisch differenzierten durchschnittlichen Güternachfrage kann komplizierte und eventuell teurere *Matching*-Verfahren überflüssig machen. Das zweite mögliche Anwendungsgebiet liegt in der Nachbildung von Anpassungsreaktionen bei der

Güternachfrage. Wenn eine Simulation aufgrund der Fragestellung ohne eine derartige Nachbildung sinnlos ist oder wenn die Genauigkeit der Prognose nicht den Mindestanforderungen entspricht, muss ein Nachfragesystem implementiert werden. Der Grenznutzen ist in diesem Fall unendlich. Die Erstellung eines Nachfragesystems bei *morning-after* Modellen verursacht hingegen nur Kosten, denen bis auf die mögliche Anwendung in der Datensatzerstellung kein Nutzen gegenübersteht. In beiden Extremfällen ist die Entscheidung für oder gegen ein Nachfragesystem einfach. Bei den dazwischen liegenden Fällen ist eine diesbezügliche Entscheidung allerdings sehr schwierig. Die *ex ante* Bewertung des Nutzens und der Kosten setzt Kenntnisse sowohl über die Eigenschaften und die Wirkungsweise als auch über mögliche Schätzverfahren und damit verbundene Schwierigkeiten voraus. Mit der vorliegenden Arbeit wurde der Versuch unternommen, einen Beitrag zum besseren Verständnis in diesem Bereich zu leisten. Eine Entscheidung für oder gegen die Erstellung und Implementierung eines Nachfragesystems wird dadurch womöglich leichter.

Des Weiteren wird nach Möglichkeiten einer Integration des Nachfragesystems gefragt. Sowohl die Kosten als auch der Nutzen und die Leistungsfähigkeit eines Mikrosimulationsmodells werden hier tangiert. Die vorgeschlagene Methode steht daher in einem engen Zusammenhang zur oben behandelten Fragestellung. Bei der Einbindung in das Mikrosimulationsmodell wird die mit dem Nachfragesystem errechnete komparativ-statische Änderung der Güternachfrage in den Mikrodatensatz übertragen. Dadurch wird versucht, einen eigentlich dynamischen Anpassungsprozess mit dem Vergleich zweier geschätzter und aus theoretischer Sicht optimaler Nachfragesituationen abzubilden. Der komparativ-statische Ansatz liegt allen Nutzungen von Nachfragesystemen in der Mikrosimulation zugrunde. Ob jedoch, wie vorgeschlagen, nur die Änderungen übertragen werden sollten und wie diese Übertragung konkret ausgestaltet wird, bleibt prinzipiell diskussionsfähig. Für den hier vorgeschlagenen Weg spricht die vergleichsweise geringe Eingriffsintensität und die damit verbundene höhere Güte der Simulation. Der Nachteil der Methode liegt in den höheren Kosten. Eine einfache Zuordnung der geschätzten durchschnittlichen Güterausgaben bei gleichzeitiger Vernachlässigung der tatsächlich erhobenen Nachfrageinformationen wäre technisch viel leichter umzusetzen.

- Welche Nachfragesysteme können aus den in Deutschland in Querschnittsform vorhandenen Mikrodatensätzen geschätzt werden und welche theoretischen Eigenschaften besitzen diese Systeme bzw. deren in einem zweistufigen Budgetierungsprozess einsetzbare Kombinationen?

Wie gezeigt, sind die beiden gefundenen, allen theoretischen Anforderungen genügenden Nachfragesystemkombinationen in ihrer Flexibilität und somit in ihrer Leistungsfähigkeit mehr oder weniger stark eingeschränkt. Es wurde daher ein so

genannter modifizierter Ansatz vorgeschlagen, der die empirisch nicht haltbare Einkommensproportionalität in den Untergruppen umgeht und somit ein mit gewissen theoretischen Mängeln behaftetes, aber dennoch brauchbares Instrument für die Mikrosimulation darstellt.

Sowohl der Kompromiss des modifizierten Ansatzes als auch die beiden theoretisch konsistenten Systeme nutzen die von der mikroökonomischen Theorie bereitgestellten Ergebnisse ungeprüft. Die Richtigkeit der Theorie wird nicht in Frage gestellt oder gar untersucht. Sie wird lediglich als Mittel benutzt, um aus den vorhandenen Querschnittsdatensätzen bestmögliche Resultate zu erzielen. Dadurch gelingt auf den ersten Blick Erstaunliches. Ein durch den modifizierten Ansatz relativ flexibles System erlaubt die Nachbildung der Nachfragereaktionen auf Einkommens- und Preisänderungen und kann zusätzlich diesbezügliche Auswirkung durch demographische Veränderungen erfassen. Die Einbindung der demographischen Merkmale kann als insgesamt gelungen angesehen werden, obgleich die Güte der Anpassung des Modells an die Datenlage mit der verwendeten Methode schwankt. Auch die Nachbildung der Einkommensreaktionen ist zumindest theoretisch annehmbar. Das insgesamt positive Fazit darf jedoch nicht über weiterhin bestehende Probleme hinwegtäuschen. Die für die Mikrosimulation von Steuer- und Transfersystemen wichtige Abschätzung der Preisreaktionen beruht lediglich auf theoretischen Zusammenhängen und ist daher nur sehr begrenzt aussagekräftig. Dennoch gilt der Grundsatz, dass die zumindest teilweise theoretisch fundierte Nachbildung allen anderen Nachbildungen vorzuziehen ist. Das im zweiten Kapitel beschriebene Wohlfahrtsmaß der Konsumentenrente unter *Marshall'schen* Nachfragekurven kann neben der genannten generellen Einschränkung bei Abschätzungen von Preisreaktionen nur jeweils innerhalb der Untergruppen und für die erste Stufe des two-stage Budgeting ermittelt werden. Letzteres ist dabei vielleicht noch von gewissem Interesse. Der Abzug der Mindestausgaben im modifizierten Ansatz schränkt die Aussagekraft dieses Instruments der Wohlfahrtsmessung jedoch nochmals ein, so dass eine Berechnung dieses Maßes nur in Ausnahmefällen sinnvoll erscheint.

Die eben beschriebenen Schwierigkeiten und Kritikpunkte sind zugleich Herausforderungen für die Zukunft. Entwicklungen sind besonders von den zur Verfügung stehenden Mikrodatensätzen abhängig. Insbesondere die mangelnde Preisvariation verhindert die Schätzung flexiblerer Nachfragesysteme. Sollte es gelingen Mikrodatensätze mit umfassenden Informationen über die Güternachfrage in einer Panelstruktur zu erheben, könnten entscheidende Fortschritte in diesem Bereich möglich werden. Eine weitere Verbesserung der Datensituation ist allerdings sehr unwahrscheinlich. Vor allem sprechen die immens hohen Kosten einer solchen zudem sehr zeitintensiven Erhebung gegen diese Art der Verbesserung. Auch bei den Datensätzen muss das Gebot der Wirtschaftlichkeit gelten, so dass das vorgeschlagene Nachfragesystem für Mikrodatensätze bei vorhandenen Querschnittsdaten längere Zeit eine gewisse Aktualität behalten könnte.

Anhang A

Erläuterungen und Beweise

A.1 Abstimmungsparadoxon

Ein Haushalt bestehe aus drei Personen (P1, P2, und P3) mit den individuellen Präferenzordnungen

$$P1 : x \succ y \succ z$$

$$P2 : y \succ z \succ x$$

$$P3 : z \succ x \succ y.$$

Die Bestimmung der Haushaltspräferenzordnung erfolgt mittels binärer Vergleiche. Wird zunächst x gegen y zur Abstimmung gestellt, gewinnt $x \succ y$ mit zwei zu einer Stimme. Wird nun y gegen z geprüft, so gilt $y \succ z$. Die Haushaltspräferenzordnung wäre dann:

$$x \succ y \succ z.$$

Wird hingegen in der zweiten Abstimmung x gegen z geprüft, so gilt $z \succ x$. Die Haushaltspräferenzordnung wäre dann:

$$z \succ x \succ y.$$

Die Haushaltspräferenzordnung

$$y \succ z \succ x$$

ergibt sich, wenn zunächst y gegen z und danach z gegen x geprüft wird. Die Präferenzordnung des Haushalts ist folglich abhängig von der Abstimmungsreihenfolge, was eine eindeutige Bestimmung unmöglich macht.

A.2 Eigenschaften einer rationalen Präferenzordnung

A.2.1 Reflexivität

Vollständigkeit impliziert $x \succeq x$ für alle $x \in X$. Es existiert folglich kein x mit der Eigenschaft $x \succ x$. Daher gilt $x \sim x$.

A.2.2 Symmetrie

Angenommen $x \sim y$. Daraus folgt, dass $(x \succeq y) \cap (y \succeq x)$. Dies wiederum impliziert $(y \succeq x) \cap (x \succeq y)$ und somit $y \sim x$.

A.3 Güterraum, Güterbündel und Güterpreise

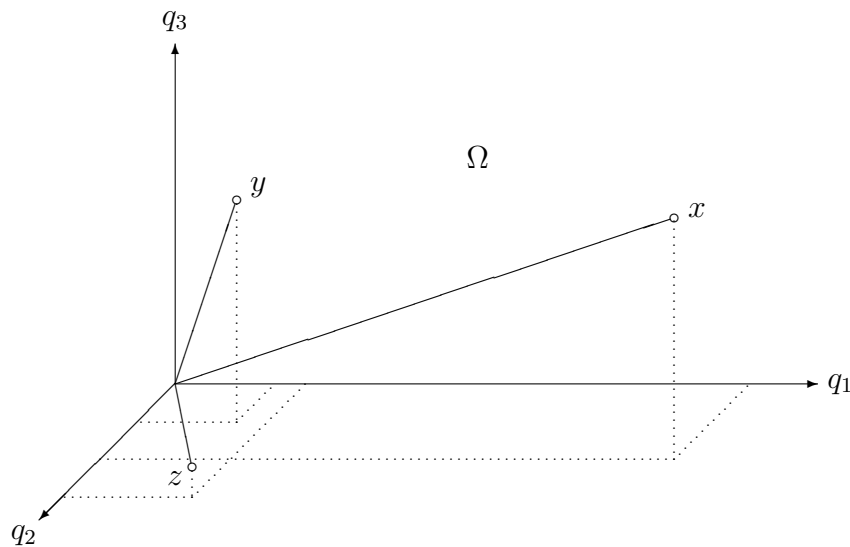


Abbildung A.1: Güterbündel (Quelle: Eigene Darstellung).

Unter dem Begriff Güterbündel wird eine Kombination von Gütern verstanden. Unter Gütern werden sowohl normale Güter als auch Dienstleistungen subsumiert. Güter sind somit am Markt erhältliche Waren mit einem positiven Preis $p_l > 0$. Die Annahme von positiven Preisen ist nicht trivial, da es Situationen geben kann, in denen ein Haushalt für den Konsum eines Gutes bezahlt wird. Ein klassisches Beispiel hierfür ist der Konsum von Verschmutzung.

Es wird angenommen, dass die Anzahl der Güterarten begrenzt ist. Die Anzahl der Güterarten sei definiert als L ($l = 1, \dots, L$), die Menge des einzelnen Gutes sei definiert als $q_l \geq 0$. Ein Güterbündel x kann somit als ein Vektor bzw. Punkt im konvexen Güterraum Ω beschrieben werden, wobei Ω ein L -dimensionaler Teilraum aus R_+^n ist. R_+^n bezeichnet dabei die Menge der n -Tupel nichtnegativer reeller Zahlen:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ q_L \end{pmatrix} \quad \text{mit dem Preisvektor} \quad p = \begin{pmatrix} p_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ p_L \end{pmatrix}.$$

Der Güterraum Ω und drei alternative Güterbündel x , y und z werden für den Fall $L = 3$ in der Abbildung A.1 veranschaulicht.

A.4 Existenz einer Nutzenfunktion

Der Beweis der Existenz einer Nutzenfunktion im Falle der Stetigkeit der Präferenzordnung soll hier für den Sonderfall einer monotonen Präferenzordnung gezeigt werden. Der allgemeine Beweis wäre zu komplex und auch unnötig, da eine streng monotone Präferenzordnung $(x_l \geq y_l) \cap (x \neq y) \Rightarrow (x \succ y)$ angenommen wird (Vgl. A4, S. 49. Die Bedingung bedeutet, dass schon die größere Menge auch nur eines Gutes l im sonst gleichen Güterbündel für die Bevorzugung dieses Bündels durch den Haushalt genügt - kurz gesagt: "mehr ist besser"). Der interessierte Leser findet einen allgemeinen Nachweis beispielsweise in *Lattice Theory* von *G. Birkhoff* (1948). Die hier verwendete Beweisführung orientiert sich an den Ausführungen in *Microeconomic Theory* von *Mas-Colell, Whinston und Green* (1995, S. 47f.).

Es sei Z die Menge der Vektoren in Ω mit der Eigenschaft: $q_1 = q_2 = \dots = q_L$. Des Weiteren sei e ein Vektor der Dimension L mit der einheitlichen Komponente 1. Daher gilt für alle nichtnegativen Skalare ($s \geq 0$): $se \in Z$.

$A(x)$ und $B(x)$ sind gemäß der Stetigkeitsannahme A3 abgeschlossene Mengen. Folglich sind auch die Mengen $A = (se \mid se \succeq x)$ und $B = (se \mid se \preceq x)$ abgeschlossen. Dies wiederum impliziert, dass die Schnittmenge von A und B ungleich der Leeren Menge ist, also $A \cap B \neq \emptyset$. Daher existiert ein Skalar s mit der Eigenschaft $se \sim x$. Des Weiteren gilt durch die Monotonieeigenschaft $(s_1 > s_2) \Rightarrow (s_1 e \succ s_2 e)$. Dies bedeutet, dass genau ein Skalar mit der Eigenschaft $se \sim x$ existiert. Dieser Skalar $s(x)$ entspricht dem Nutzenfunktionswert ($U(x) = s(x)$), was die Existenz der Nutzenfunktion beweist. Abbildung A.2 veranschaulicht die Beweisführung.

Der Beweis der Stetigkeit von $s(x)$ ist vergleichsweise umfangreich. Ein Literaturverweis auf *Microeconomic Theory* von *Mas-Colell, Whinston und Green* (1995, S. 48f.) soll deshalb hier genügen.

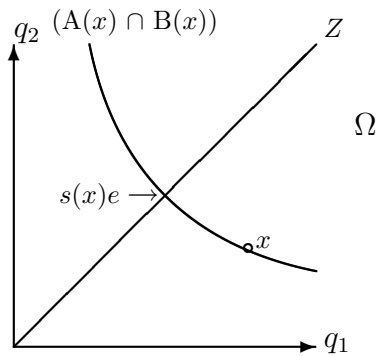


Abbildung A.2: Existenz einer Nutzenfunktion (Quelle: Eigene Darstellung).

A.5 Die Budgetmenge

A.5.1 Beweis der Konvexität

Die Budgetmenge ist wie folgt definiert:

$$B(M, p) = \{x \in \Omega : p^T x \leq M\}.$$

Eine Menge ist per Definition konvex, wenn sie mit je zwei Punkten auch deren Verbindungsstrecke enthält. Formal bedeutet dies für $B(M, p)$

$$x, y \in B(M, p) \Rightarrow (\alpha x + (1 - \alpha)y) \in B(M, p) \quad \text{mit} \quad (0 \leq \alpha \leq 1),$$

also

$$(p^T x \leq M) \cap (p^T y \leq M) \Rightarrow p^T(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq M$$

und somit

$$(p^T x \leq M) \cap (p^T y \leq M) \Rightarrow (\alpha p^T x + (1 - \alpha)p^T y) \leq M.$$

Zu erkennen ist, dass die letzte Aussage wahr und daher $B(M, p)$ konvex ist.

A.5.2 Herleitung der Orthogonaleigenschaft von p

Ein Vektor ist per Definition orthogonal zu einer Ebene, wenn die Multiplikation dieses Vektors mit einem beliebigen Vektor der Ebene Null ergibt. Ein Vektor auf der Budgethyperebene ist formal darstellbar als

$$(x - y) \quad \text{unter der Bedingung} \quad (p^T x = M) \cap (p^T y = M).$$

Aus der Bedingung folgt

$$(p^T x = p^T y), \quad \text{also} \quad (p^T x - p^T y = 0)$$

und somit

$$p^T(x - y) = 0.$$

A.6 Verletzung der Annahmen A4 und A6

In der Abbildung A.3 ist die Nutzenfunktion zwar quasikonkav, jedoch nicht streng quasikonkav, da die Indifferenzkurve der Nutzenfunktion zwischen a und b einen linearen Verlauf hat. Alle Güterbündel zwischen a und b sind somit gleich optimal. Eine eindeutige Bestimmung der optimalen q_1, q_2 -Kombination ist folglich unmöglich.

In der Abbildung A.4 ist eine Situation dargestellt, in der dem Haushalt ab einer bestimmten Nachfragemenge c ein Preisnachlass gewährt wird. Die Verletzung der Preisnehmerannahme A6 bewirkt somit, dass die Budgetmenge nicht mehr konvex ist. In dieser beispielhaften Situation ergeben sich zwei optimale Güterbündel.

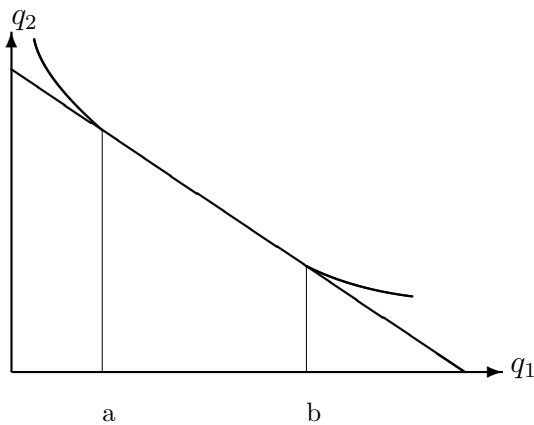


Abbildung A.3: Verletzung der Forderung nach strenger Quasikonkavität (Quelle: Eigene Darstellung).

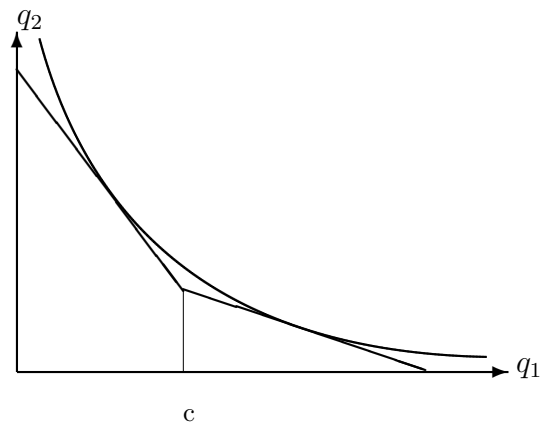


Abbildung A.4: Wirkung einer Verletzung der Annahme A6 (Quelle: Eigene Darstellung).

In der Abbildung A.5 wird nochmals eine Verletzung der Annahme A4 dargestellt, welche nicht sofort ersichtlich ist. In beiden Fällen sind die Indifferenzkurven der Nutzenfunktionen streng konvex zum Ursprung, was die Eindeutigkeitsanforderung an die Optimierungslösung gewährleistet. Dennoch ist die Nutzenfunktion $U^\diamond(x)$ im rechten Teil der Abbildung A.5 im Definitionsbereich Ω nicht streng quasikonkav, da die Bessermenge hier zwar konvex, jedoch nicht streng konvex ist. Zur Verdeutlichung seien nochmals die Definitionen der Konvexitätseigenschaften von Mengen genannt:

- Eine Menge \mathcal{B} ist konvex, wenn gilt: $\forall x, y \in \mathcal{B} \Rightarrow (\alpha x + (1 - \alpha)y) \in \mathcal{B}$ mit $(0 \leq \alpha \leq 1)$.
- Eine Menge ist streng konvex, wenn gilt: $(\alpha x + (1 - \alpha)y)$ mit $(0 < \alpha < 1)$ ist ein innerer Punkt von \mathcal{B} . Ein Punkt z in \mathcal{B} ist ein innerer Punkt, wenn eine ϵ -Umgebung $N_\epsilon(z)$ existiert, so dass $N_\epsilon(z) \subset \mathcal{B}$, mit $N_\epsilon(z) = \{w$

$\in \mathbb{R}^n: D(z,w) < \epsilon\}$, wobei $D(z,w) = |z - w|$ die Distanz der Punkte z und w beschreibt.

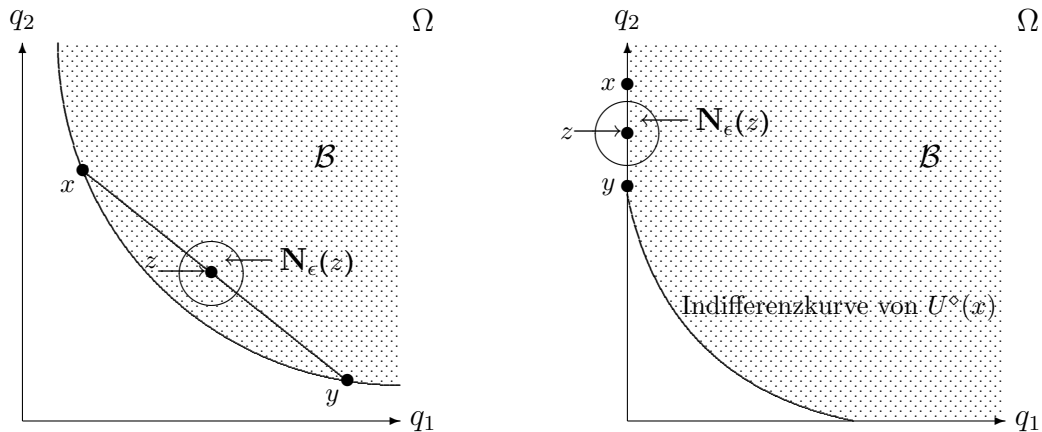


Abbildung A.5: Streng konvexe und nicht streng konvexe Bessermenge (Quelle: Eigene Darstellung).

Es sei nochmals festgehalten, dass $U^\circ(x)$ im obigen Fall durchaus streng quasikonkav sein kann, es jedoch in Ω nicht ist. In A4 wurde aber ausdrücklich dieser Nutzenfunktionstyp für Ω angenommen.

A.7 Eigenschaft des Gradienten

In der Abbildung A.6 ist das Ergebnis der Lagrangemethode dreidimensional dargestellt. Der Preisvektor entspricht im gewählten Beispiel $p = (1, 1)^T$. Der schwächer schattierte Bereich bildet die Höhe C der Nutzenfunktion ab. Die Indifferenzkurve bzw. Niveaulinie der Höhe C ist definiert durch $C = U(q_1, q_2)$, also die Güterkombinationen, welche einen Nutzen von C ergeben. Es seien $g(q_2) = q_1$ und $h(q_1) = q_2$ gerade die Funktionen, die diesen Zusammenhang abbilden.

Es gilt somit die Identität $C \equiv U(q_1, h(q_1))$ bzw. $C \equiv U(g(q_2), q_2)$. Die Identität gemäß der Kettenregel nach q_1 bzw. q_2 differenziert ergibt:

$$0 = \frac{\partial U(x)}{\partial q_1} \cdot 1 + \frac{\partial U(x)}{\partial q_2} \cdot \frac{\partial h(q_1)}{\partial q_1}$$

bzw.

$$0 = \frac{\partial U(x)}{\partial q_1} \cdot \frac{\partial g(q_2)}{\partial q_2} + \frac{\partial U(x)}{\partial q_2} \cdot 1.$$

Diese Gleichungen in Vektorform offenbaren die Orthogonaleigenschaft des Gradienten bezüglich der dazugehörigen Indifferenzkurventangente:¹

$$0 = \left(\frac{\partial U(x)}{\partial q_1}, \frac{\partial U(x)}{\partial q_2} \right) \cdot \left(1, \frac{\partial h(q_1)}{\partial q_1} \right)^T$$

bzw.

$$0 = \left(\frac{\partial U(x)}{\partial q_1}, \frac{\partial U(x)}{\partial q_2} \right) \cdot \left(\frac{\partial g(q_2)}{\partial q_2}, 1 \right)^T .$$

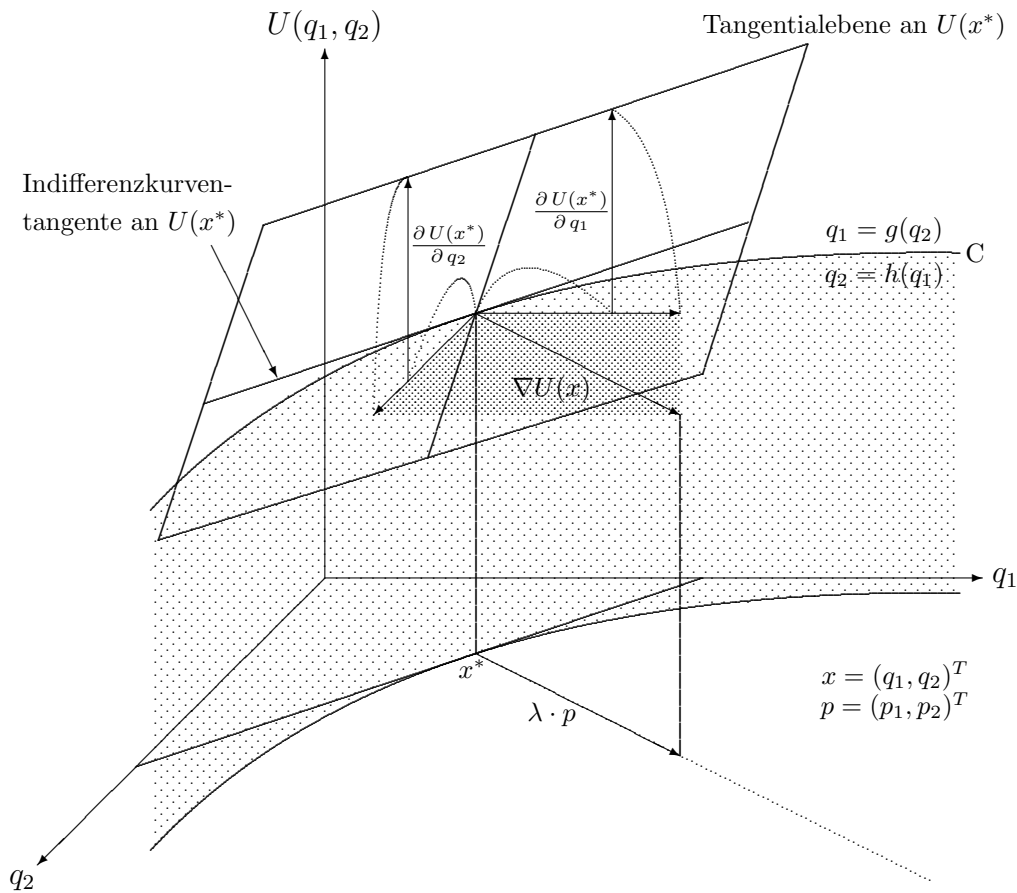


Abbildung A.6: Gradient und Tangentialebene (Quelle: Eigene Darstellung).

Der Richtungsvektor einer Indifferenzkurventangente $\left(1, \frac{\partial h(q_1)}{\partial q_1} \right)^T$ ist zur Verdeutlichung in Abbildung A.7 skizziert. In Abbildung A.6 gilt in $U(x^*)$:

$$0 = (1, 5, 1, 5) \cdot (1, -1)^T .$$

¹Die Herleitung der Orthogonaleigenschaft des Gradienten ist an die Ausführungen in *Kneis, G.* (2000, S. 263) angelehnt. Für die allgemeine Herleitung ($L > 2$) wird auf *Khuri, A.I.* (1993, S. 274) verwiesen.

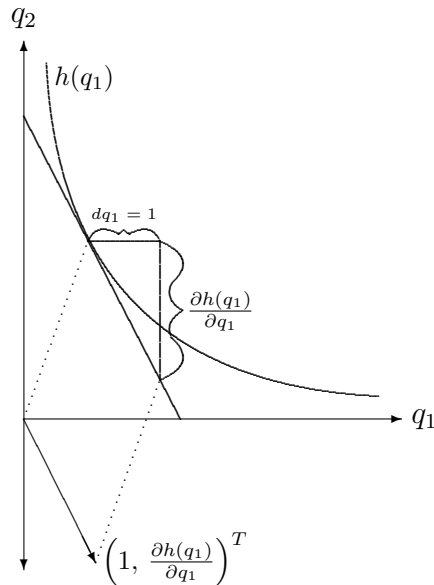


Abbildung A.7: Richtungsvektor der Indifferenzkurventangente (Quelle: Eigene Darstellung).

Des Weiteren gilt:

$$\nabla U(x) > 0,$$

d.h.

$$\frac{\partial U(x)}{\partial q_i} > 0 \quad \text{für } i = 1, \dots, L.$$

Diese Eigenschaft des Gradienten erklärt sich durch die angenommene strenge Quasikonkavität.

$$\frac{\partial U(x)}{\partial q_i} = 0$$

impliziert, dass die Indifferenzkurve in einem bestimmten Intervall parallel zur q_i -Achse verläuft. Ein gerader Verlauf der Indifferenzkurve widerspricht jedoch A4. Zur Verdeutlichung wird auf die Abbildung A.5 in Verbindung mit der Definition von strenger Konvexität unter A.6 auf S. 197 verwiesen.

A.8 Differentiationsreihenfolge

Der *Satz von Schwarz* (in angloamerikanischer Literatur: *Youngs Theorem*) über die Vertauschbarkeit der Differentiationsreihenfolge lautet:

$$\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_j \partial x_i}$$

und gilt, wenn die partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung in einer Umgebung des Punktes x stetig sind. Existieren partielle Ableitungen höherer Ordnung und sind auch diese stetig, kommt es auch in diesem Fall nicht auf die Differentiationsreihenfolge an.

A.9 Spezielle Matrizen

A.9.1 Hesse-Matrix

Die Hesse-Matrix der zweimal partiell differenzierbaren Funktion f im Punkt x ist eine Matrix der Form

$$H_f(x) = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & \cdots & f_{1L} \\ f_{21} & f_{22} & \cdots & f_{2L} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ f_{L1} & f_{L2} & \cdots & f_{LL} \end{pmatrix}.$$

Dabei entspricht f_{ij} ($i, j = 1, \dots, L$) der partiellen Ableitung zweiter Ordnung, also:

$$f_{ij} = f_{x_i x_j} = \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \cdot \left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_i} \right).$$

Bei Gültigkeit des *Satzes von Schwarz* ist die Hesse-Matrix symmetrisch.

A.9.2 Geränderte Hesse-Matrix

Die Geränderte Hesse-Matrix der zweimal partiell differenzierbaren Funktion f im Punkt x ist eine Matrix der Form

$$\bar{H}_f(x) = \begin{pmatrix} 0 & f_1 & f_2 & \cdots & f_L \\ f_1 & f_{11} & f_{12} & \cdots & f_{1L} \\ f_2 & f_{21} & f_{22} & \cdots & f_{2L} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ f_L & f_{L1} & f_{L2} & \cdots & f_{LL} \end{pmatrix}.$$

Dabei entspricht f_i ($i = 1, \dots, L$) der partiellen Ableitung erster Ordnung, also:

$$f_i = f_{x_i} = \frac{\partial f(x)}{\partial x_i}.$$

A.10 Definitheit einer symmetrischen Matrix

Eine quadratische Matrix A (Anzahl der Zeilen = Anzahl der Spalten) ist symmetrisch, wenn gilt: $A^T = A$. Dies bedeutet, dass $a_{ij} = a_{ji}$ ist, wobei a_{ij} dem Element der Matrix A in der i -ten Zeile und j -ten Spalte entspricht. Die folgenden Definitionen gelten ausschließlich für symmetrische Matrizen:

- positiv definite Matrix A : $x^T A x > 0 \quad \forall x \neq 0, x \in \mathbb{R}^n$
- positiv semidefinite Matrix A : $x^T A x \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$
- negativ definite Matrix A : $x^T A x < 0 \quad \forall x \neq 0, x \in \mathbb{R}^n$
- negativ semidefinite Matrix A : $x^T A x \leq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$.

Der durch den Spaltenvektor x und die Matrix A gebildete Ausdruck $x^T A x$ wird **quadratische Form** genannt. Ein Prüfen auf Definitheit ist einerseits durch das Bestimmen der Eigenwerte² λ^E von A möglich. Die quadratische Form ist dann:

- $x^T A x > 0$, wenn $\lambda_i^E > 0$ ($i = 1, \dots, L$),
- $x^T A x \geq 0$, wenn $\lambda_i^E \geq 0$ ($i = 1, \dots, L$),
- $x^T A x < 0$, wenn $\lambda_i^E < 0$ ($i = 1, \dots, L$),
- $x^T A x \leq 0$, wenn $\lambda_i^E \leq 0$ ($i = 1, \dots, L$).

Andererseits kann auf positive und negative Definitheit von A durch Vorzeichenbestimmung der Hauptabschnitts-Determinanten geprüft werden. Dabei gilt:

- A ist positiv definit, wenn:
$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix} > 0 \quad \text{für } k = 1, \dots, L.$$
- A ist negativ definit, wenn:
$$(-1)^k \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix} > 0 \quad \text{für } k = 1, \dots, L.$$

Die Beweise für die beiden Kriterien sollen zur Verdeutlichung für den Fall $x^T A x > 0$ geführt werden. Dazu wird ein zusätzliches Theorem benötigt. Es sei Q die orthogonale $L \times L$ Matrix der Eigenvektoren³ ($Q^T Q = I$). Mit Hilfe der Matrix Q kann A diagonalisiert werden:

$$Q^T A Q = \Lambda^E \quad \text{wobei} \quad \Lambda^E = \begin{pmatrix} \lambda_1^E & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^E & \cdots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_L^E \end{pmatrix}.$$

²Die Eigenwerte λ^E einer Matrix A erfüllen jeweils die charakteristische Gleichung $|A - \lambda^E I| = 0$, mit I als quadratischer Einheitsmatrix.

³Jeder Eigenwert besitzt einen Eigenvektor mit der Eigenschaft: $A q_i^E = \lambda_i^E q_i^E$. Die Eigenvektoren sind zueinander orthogonal und werden üblicherweise auf die Standardlänge 1 normiert, $(q_i^E)^T q_j^E = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$, dabei wird δ_{ij} als Kronecker Delta bezeichnet.

Zur Herleitung von $Q^T A Q = \Lambda^E$: Es gilt $A q_i^E = \lambda_i^E q_i^E$. Das Multiplizieren dieser Gleichung mit $(q_i^E)^T$ ergibt:

$$(q_i^E)^T A q_j^E = \lambda_i^E (q_i^E)^T q_j^E = \lambda_i^E \delta_{ij},$$

wobei δ_{ij} das Kronecker Delta ist. Die Beweisführung für $x^T A x > 0$ nutzt Λ^E wie folgt: Es seien x und y beliebige, vom Nullvektor verschiedene Vektoren mit der Eigenschaft $x = Qy$. Daraus folgt, dass:

$$\begin{aligned} x^T A x &= y^T Q^T A Q y \\ &= y^T \Lambda^E y \\ &= \sum_{i=1}^L \lambda_i^E y_i^2. \end{aligned}$$

Daraus folgt, dass $x^T A x > 0$ nur für $\lambda_i^E > 0$ gilt. Wäre ein Eigenwert negativ (z.B. λ_1^E), könnte x so gewählt werden, dass $y_1 = 1, y_2 = 0, \dots, y_L = 0$ die Gleichung $x = Qy$ erfüllt. In diesem Fall wäre $x^T A x = \lambda_1^E y_1^2 < 0$ und somit A nicht positiv definit.

Das Kriterium der Hauptabschnitts-Determinanten kann nun für $x^T A x > 0$ folgendermaßen verdeutlicht werden: Aus $Q^T A Q = \Lambda^E$ mit $(Q^T Q = I)$ folgt zunächst:

$$\begin{aligned} Q^T A Q &= \Lambda^E \\ |Q^T A Q| &= |\Lambda^E| \\ |Q^T| |A| |Q| &= |\Lambda^E| \\ |Q^T| |Q| |A| &= |\Lambda^E| \\ |Q^T Q| |A| &= |\Lambda^E| \\ 1 \cdot |A| &= |\Lambda^E| \\ |A| &= \lambda_1^E \lambda_2^E \dots \lambda_L^E. \end{aligned}$$

Die Determinante der Matrix A entspricht also dem Produkt der Eigenvektoren. Es sei nun x^T ein Vektor mit den ersten k Elementen ungleich Null und $(L - k)$ Elementen gleich Null.

$$x^T = (x_k^T, 0^T)$$

x^T in dieser Form impliziert:

$$x^T A x = (x_k^T, 0^T) \begin{pmatrix} A_{k,k} & A_{L-k,k} \\ A_{k,L-k} & A_{L-k,L-k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_k \\ 0 \end{pmatrix} = x_k^T A_{k,k} x_k,$$

wobei $A_{k,k}$ für die $k \times k$ Teilmatrix von A steht. Ist A positiv definit, gilt:

$$x_k^T A_{k,k} x_k > 0.$$

Aus dem Eigenwertkriterium und $|A| = \lambda_1^E \lambda_2^E \cdots \lambda_L^E$ folgt dann:

$$|A_{k,k}| > 0$$

für ein beliebig gewähltes k . Dies ist aber gerade das Kriterium der Hauptabschnitts-Determinanten.

Soll auf Semidefinitheit durch Determinantenprüfung geschlossen werden, so müssen zusätzlich zu den Hauptabschnitts-Determinanten auch die jeweiligen gewöhnlichen Abschnittsdeterminanten das entsprechende Kriterium erfüllen.⁴

A.11 Krümmungseigenschaften

Die zweimal partiell differenzierbaren Funktion f ist

- konvex, genau dann, wenn $H_f(x)$ positiv semidefinit ist,
- streng konvex, wenn $H_f(x)$ positiv definit ist,
- konkav, wenn $H_f(x)$ negativ semidefinit ist,
- streng konkav, genau dann, wenn $H_f(x)$ negativ definit ist,
- streng quasikonvex, wenn für die geränderte Hesse-Matrix

$$\left| \bar{H}_f^k(x) \right| = \begin{vmatrix} 0 & f_1 & f_2 & \cdots & f_k \\ f_1 & f_{11} & f_{12} & \cdots & f_{1k} \\ f_2 & f_{21} & f_{22} & \cdots & f_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_k & f_{k1} & f_{k2} & \cdots & f_{kk} \end{vmatrix} < 0$$

gilt, mit $k = (1, \dots, L)$ (bei \leq statt $<$ ist f quasikonvex),

- streng quasikonkav, wenn für die geränderte Hesse-Matrix

$$\left| \bar{H}_f^k(x) \right| = (-1)^k \begin{vmatrix} 0 & f_1 & f_2 & \cdots & f_k \\ f_1 & f_{11} & f_{12} & \cdots & f_{1k} \\ f_2 & f_{21} & f_{22} & \cdots & f_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_k & f_{k1} & f_{k2} & \cdots & f_{kk} \end{vmatrix} > 0$$

gilt, mit $k = (1, \dots, L)$. Bei \geq statt $>$ ist f quasikonkav.

⁴Vgl. Hoy, M. u.a. (1996, S. 427ff).

Der Zusammenhang zwischen Definitheit einer Matrix und den Krümmungseigenschaften einer Funktion folgt aus der sich ergebenden quadratischen Form bei der Bildung des totalen Differentials zweiter Ordnung von Funktionen mit mehreren Veränderlichen.⁵ Die Beziehung wird im Folgenden am Beispiel einer streng konkaven Funktion mit zwei Variablen verdeutlicht. Eine zweimal differenzierbare Funktion ist streng konkav, wenn für das totale Differential zweiter Ordnung

$$d(dy) = d^2y < 0 \quad \text{für alle } dx > 0$$

gilt, also die Änderung der Änderung des Funktionswertes negativ ist. Mit anderen Worten **steigt** die Funktion ausgehend von einem Punkt x^0 in \mathbb{R}^n für jede positive x -Änderung ($dx > 0$) **degressiv**. In Abbildung A.8 ist dieser Fall für $y = f(x_1, x_2)$ skizziert.

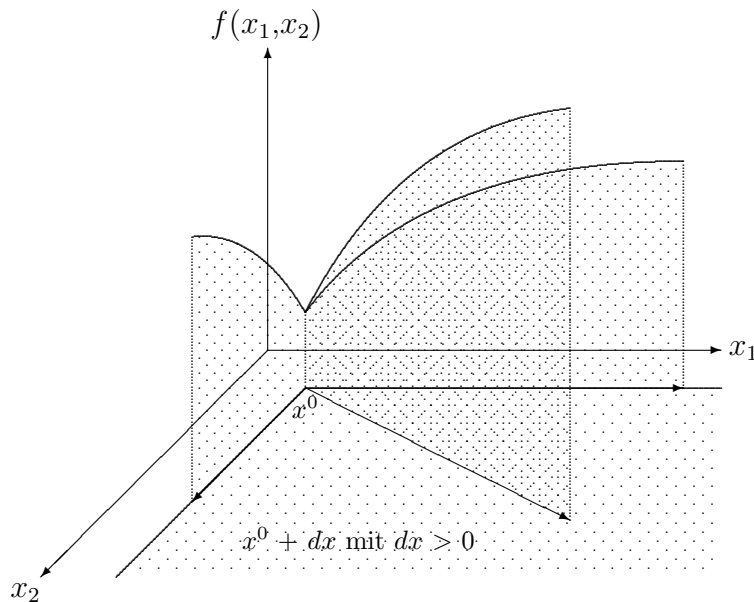


Abbildung A.8: Bewegungen auf einer streng konkaven Funktion $f(x_1, x_2)$ (Quelle: Eigene Darstellung).

Es ist nun zu zeigen, dass $d^2y < 0$ genau dann gilt, wenn die Hesse-Matrix von $f(x_1, x_2)$ negativ definit ist.⁶

$$dy = f_1 \cdot dx_1 + f_2 \cdot dx_2$$

⁵Das totale Differential zweiter Ordnung ist für die Konkavität bzw. Konvexität entscheidend. Bezüglich der genannten Kriterien für quasikonkave und quasikonvexe Funktionen wird auf die einschlägige Literatur verwiesen (beispielsweise: Silberberg, E. (1990, S. 176ff.)).

⁶Bei der Umformung wird der *Satz von Schwarz* genutzt. Vgl. A.8, S. 200.

$$\begin{aligned}
d^2y &= \frac{\partial(dy)}{\partial x_1} \cdot dx_1 + \frac{\partial(dy)}{\partial x_2} \cdot dx_2 \\
&= \frac{\partial(f_1 dx_1 + f_2 dx_2)}{\partial x_1} \cdot dx_1 + \frac{\partial(f_1 dx_1 + f_2 dx_2)}{\partial x_2} \cdot dx_2 \\
&= (f_{11} dx_1 + f_{21} dx_2) \cdot dx_1 + (f_{12} dx_1 + f_{22} dx_2) \cdot dx_2 \\
&= f_{11} dx_1^2 + 2f_{12} dx_1 dx_2 + f_{22} dx_2^2 \\
&= (dx_1 \ dx_2) \cdot \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{12} & f_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dx_1 \\ dx_2 \end{pmatrix} \\
&= (dx_1 \ dx_2) \cdot H_f(x) \cdot \begin{pmatrix} dx_1 \\ dx_2 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Daher gilt

$$d^2y = (dx_1 \ dx_2) \cdot H_f(x) \cdot \begin{pmatrix} dx_1 \\ dx_2 \end{pmatrix} < 0$$

genau dann, wenn $H_f(x)$, wie unter A.10 beschrieben, negativ definit ist.

A.12 Envelope-Theorem

Für eine durch die Lagrangemethode optimierte Funktion f gilt im Optimum f^* bezüglich der exogenen Variablen α_i :

$$\frac{\partial f^*}{\partial \alpha_i} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \alpha_i}.$$

Mittels des Envelope-Theorems ist es möglich, den Effekt der Änderung einer exogenen Variablen auf den optimalen Wert der optimierten Funktion direkt durch die partielle Ableitung der Lagrangefunktion zu bestimmen. Das Theorem soll am Beispiel der indirekten Nutzenfunktion verdeutlicht werden:

$$\mathcal{N}(p, M) = U(q_1^M(p, M), \dots, q_L^M(p, M)).$$

Eine marginale Änderung der exogenen Variable p_i wirkt auf $\mathcal{N}(p, M)$:

$$\frac{\partial \mathcal{N}(p, M)}{\partial p_i} = \frac{\partial U(x)}{\partial q_1^M} \cdot \frac{\partial q_1^M}{\partial p_i} + \frac{\partial U(x)}{\partial q_2^M} \cdot \frac{\partial q_2^M}{\partial p_i} + \dots + \frac{\partial U(x)}{\partial q_i^M} \cdot \frac{\partial q_i^M}{\partial p_i} + \dots + \frac{\partial U(x)}{\partial q_L^M} \cdot \frac{\partial q_L^M}{\partial p_i}.$$

Da für $\mathcal{N}(p, M)$ die notwendige Bedingung der Lagrangeoptimierung erfüllt ist, gilt:

$$\nabla U(x) = \lambda^M \cdot p$$

$$M - p^T \cdot x = 0.$$

Durch das Einsetzen der Gradientengleichung ergibt sich:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{N}(p, M)}{\partial p_i} &= \lambda^{\mathcal{M}} p_1 \cdot \frac{\partial q_1^{\mathcal{M}}}{\partial p_i} + \dots + \lambda^{\mathcal{M}} p_i \cdot \frac{\partial q_i^{\mathcal{M}}}{\partial p_i} + \dots + \lambda^{\mathcal{M}} p_L \cdot \frac{\partial q_L^{\mathcal{M}}}{\partial p_i} \\ &= \lambda^{\mathcal{M}} \left(p_1 \cdot \frac{\partial q_1^{\mathcal{M}}}{\partial p_i} + \dots + p_i \cdot \frac{\partial q_i^{\mathcal{M}}}{\partial p_i} + \dots + p_L \cdot \frac{\partial q_L^{\mathcal{M}}}{\partial p_i} \right).\end{aligned}$$

Aus dem partiellen Differenzieren der Nebenbedingung nach p_i folgt:

$$0 = -p_1 \cdot \frac{\partial q_1^{\mathcal{M}}}{\partial p_i} - p_2 \cdot \frac{\partial q_2^{\mathcal{M}}}{\partial p_i} - \dots - x_i^{\mathcal{M}} - p_i \cdot \frac{\partial q_i^{\mathcal{M}}}{\partial p_i} - \dots - p_L \cdot \frac{\partial q_L^{\mathcal{M}}}{\partial p_i},$$

also

$$-x_i^{\mathcal{M}} = p_1 \cdot \frac{\partial q_1^{\mathcal{M}}}{\partial p_i} + p_2 \cdot \frac{\partial q_2^{\mathcal{M}}}{\partial p_i} + \dots + p_i \cdot \frac{\partial q_i^{\mathcal{M}}}{\partial p_i} + \dots + p_L \cdot \frac{\partial q_L^{\mathcal{M}}}{\partial p_i}.$$

Somit gilt

$$\frac{\partial \mathcal{N}(p, M)}{\partial p_i} = \lambda^{\mathcal{M}} \cdot -x_i^{\mathcal{M}}.$$

Dies entspricht exakt der partiellen Ableitung der Lagrangefunktion des Nutzenmaximierungsmodells $\mathcal{L} = U(x) + \lambda^{\mathcal{M}}(M - p^T x)$ nach p_i :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p_i} = \lambda^{\mathcal{M}} \cdot -x_i^{\mathcal{M}}.$$

A.13 Bemerkung zur Dualität

Die folgenden Ausführungen zur Dualität sind an die Erläuterungen in *Schöler, K. (1999, S. 40f.)* angelehnt.

Die Primalaufgabe sei:

$$\max f(x) \quad \text{unter der Nebenbedingung: } n(x) = M - N(x) = 0,$$

welche mittels der Lagrangemethode gelöst wird. Daher gilt in einer gewissen Umgebung des Maximalpunktes x^* :

$$\mathcal{L}(x^*, \lambda^*) = f_{\max} \geq f(x) + \lambda^*(M - N(x)) = \mathcal{L}(x, \lambda^*).$$

Umformen der mittleren Ungleichung führt zu:

$$M \leq N(x) + \frac{1}{\lambda^*} (f_{\max} - f(x)).$$

Wird hierin für x ein Punkt der Kurve $f(x) = f_{max}$ eingesetzt, so erweist sich M als eine Lösung der dualen Optimierungsaufgabe:

$$\min N(x) \quad \text{unter der Nebenbedingung: } F(x) = f_{max} - f(x) = 0$$

mit der minimalen Lösung an der Stelle x^* .

Ist die primale Aufgabe eine Minimaufgabe, so ist die duale Aufgabe ein entsprechendes Maximierungsproblem.

A.14 Nachweis von $E3^{\mathcal{N}}$ und $E1^{\mathcal{A}}$

Die Linearhomogenität der Ausgabenfunktion ($E1^{\mathcal{A}}$) folgt aus der Tatsache, dass die Minimierung von $p^T x$ das gleiche optimale Güterbündel $x^{\mathcal{H}}$ wie die Minimierung von $sp^T x$ liefert. Der Skalar s stellt lediglich eine Verlängerung des Preisvektors dar, wodurch die Nebenbedingung nicht tangiert wird. Ein Vergleich mit der Abbildung A.6 auf S. 199 verdeutlicht den Zusammenhang. Daher gilt:

$$\mathcal{A}(sp, \bar{U}) = s \cdot p^T x^{\mathcal{H}} = s \cdot \mathcal{A}(p, \bar{U}).$$

Die Eigenschaft $E3^{\mathcal{N}}$ der indirekten Nutzenfunktion kann wie folgt verdeutlicht werden: Es sei $\mathcal{N}(p^A, M^A) \leq \bar{U}$ und $\mathcal{N}(p^B, M^B) \leq \bar{U}$. Die Preisvektor-Einkommen-Kombination (p^C, M^C) sei:

$$(p^C, M^C) = ((\alpha p^A + (1 - \alpha)p^B), (\alpha M^A + (1 - \alpha)M^B))$$

mit $(0 \leq \alpha \leq 1)$. Die indirekte Nutzenfunktion ist quasikonvex bzw. die Schlechtermenge von \mathcal{N} ist konvex, wenn

$$\mathcal{N}(p^C, M^C) \leq \bar{U}$$

gilt. Dies ist aber logisch gleichbedeutend mit

$$\forall x \text{ mit } \{p^C x \leq M^C\} \Rightarrow U(x) \leq \bar{U}$$

bzw.

$$\forall x \text{ mit } \{(\alpha p^A + (1 - \alpha)p^B) \cdot x \leq (\alpha M^A + (1 - \alpha)M^B)\} \Rightarrow U(x) \leq \bar{U}$$

oder

$$\forall x \text{ mit } \{\alpha p^A \cdot x + (1 - \alpha)p^B \cdot x \leq \alpha M^A + (1 - \alpha)M^B\} \Rightarrow U(x) \leq \bar{U}.$$

Dies ist aber wegen der Annahmen

$$\mathcal{N}(p^A, M^A) \leq \bar{U} \quad \text{und} \quad \mathcal{N}(p^B, M^B) \leq \bar{U},$$

die wiederum mit

$$\forall x \text{ mit } \{p^A \cdot x \leq M^A\} \Rightarrow U(x) \leq \bar{U}$$

und

$$\forall x \text{ mit } \{p^B \cdot x \leq M^B\} \Rightarrow U(x) \leq \bar{U}$$

logisch gleichbedeutend sind, eine wahre Aussage, was $E3^{\mathcal{N}}$ beweist.

A.15 Eulersche Homogenitätsrelation

Eine Funktion f heißt homogen vom Grad κ , wenn:

$$f(s \cdot x_1, s \cdot x_2, \dots, s \cdot x_L) = s^\kappa \cdot f(x_1, x_2, \dots, x_L)$$

gilt. Gleichbedeutend mit der Homogenität vom Grad κ ist die *Eulersche* Homogenitätsrelation

$$\sum_{i=1}^L x_i \cdot \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} = \kappa \cdot f(x).$$

A.16 Engelkurven homothetischer Nutzenfunktionen

Homothetische Funktion: Eine Funktion ist homothetisch, wenn sie eine monotone Transformation einer homogenen Funktion ist. Für eine homothetische Funktion $f(x)$ definiert in R_+^n gilt wie für homogene Funktionen:

$$\frac{\frac{\partial f(x)}{\partial x_k}}{\frac{\partial f(x)}{\partial x_l}} = \text{konstant, für proportionale Änderungen von } x.$$

Eine homothetische Nutzenfunktion hat somit auf einer durch den Nullpunkt gehenden Geraden konstante Grenzzraten der Substitution. In Abbildung A.9 ist eine nichthomogene homothetische Funktion dargestellt. Die Nichthomogenität zeigt sich in dieser Darstellung dadurch, dass eine von x^0 ausgehende Verdreifachung des x -Vektors zu einem von $3^k \cdot f(x^0)$ (für ein beliebiges k) abweichenden Funktionswert führt. Es existiert in diesem beispielhaften Fall kein k , für welches $3^k \cdot f(x^0) = f(3x^0)$ gilt.

Die oben beschriebene Eigenschaft konstanter Grenzzraten der Substitution auf einer durch den Koordinatenursprung verlaufenden Geraden hat zur Folge, dass homothetische Nutzenfunktionen ausschließlich den Nullpunkt schneidende lineare Engelkurven generieren. Mit dem Begriff Engelkurve wird in der wirtschaftswissenschaftlichen Literatur der funktionale Zusammenhang zwischen der Nachfragemenge x_i und dem Einkommen M bei konstanten Preisen beschrieben. Die genannte Eigenschaft ($\frac{\partial x_i}{\partial M} = \text{konstant}$) kann anhand der Abbildung A.9 nachvollzogen werden. Die aus den homothetischen Nutzenfunktionen generierten, *Marshall'schen* Nachfragemengen besitzen daher immer eine Einkommenselastizität von 1.⁷

⁷Siehe dazu Abbildung A.10, S. 211.

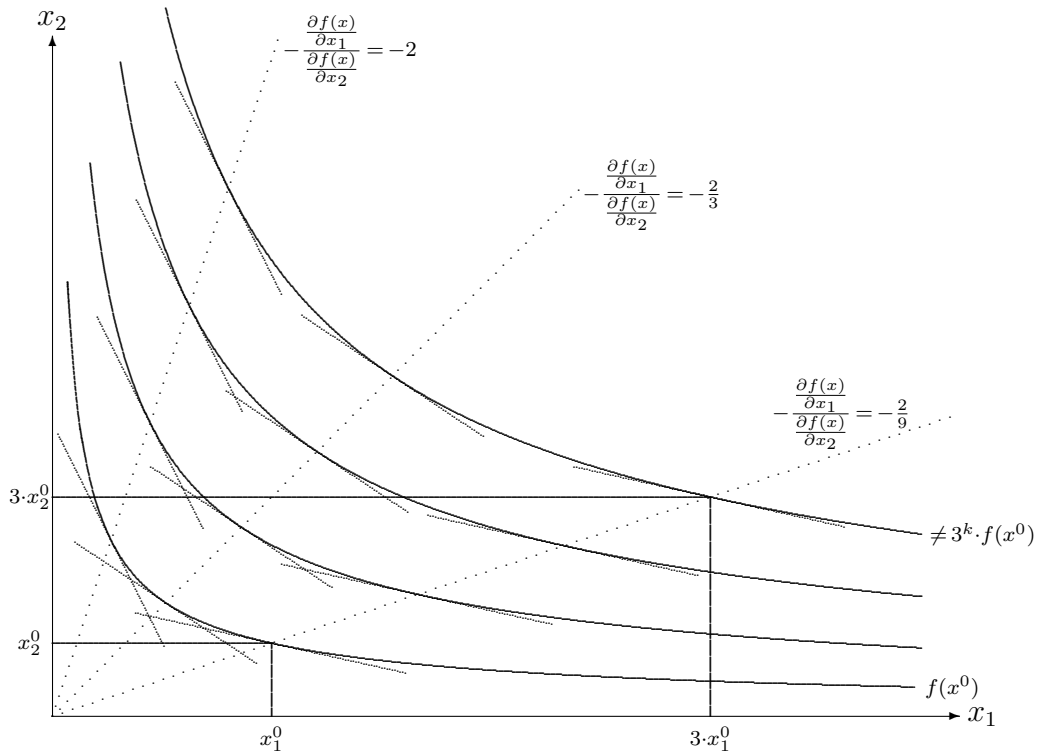


Abbildung A.9: Beispiel einer nichtthomogenen homothetischen Funktion (Quelle: Eigene Darstellung).

A.17 Gorman Polar Form Theorem

Theorem: Jedes theoretisch plausible, im Einkommen lineare Nachfragesystem

$$x_i^M = C^i(p) + B^i(p)M \quad (\text{A.1})$$

hat die Form

$$x_i^M = -P\Lambda_i + \frac{P_i}{P}M = f_i - \frac{P_i}{P}f + \frac{P_i}{P}M. \quad (\text{A.2})$$

Diese Nachfragefunktionen können aus der indirekten Nutzenfunktion (*Gorman Polar Form*)

$$\mathcal{N}(M, p) = \mathcal{K} \left[\frac{M}{P(p)} + \Lambda(p) \right] = \mathcal{K} \left[\frac{M}{P(p)} - \frac{f(p)}{P(p)} \right] \quad (\text{A.3})$$

generiert werden.⁸ Die Funktion $\Lambda(p)$ ist homogen vom Grade 0 und $P(p)$ und $f(p)$ sind homogen vom Grade 1 in p . $f(p)$ entspricht hier $f(p) = -\frac{\Lambda(p)}{P(p)}$ und \mathcal{K} ist eine monoton steigende Funktion.

⁸Vgl. dazu auch A.18, S. 214, bzw. Gleichung (4.45), S. 87, mit $\Gamma_t = 1$.

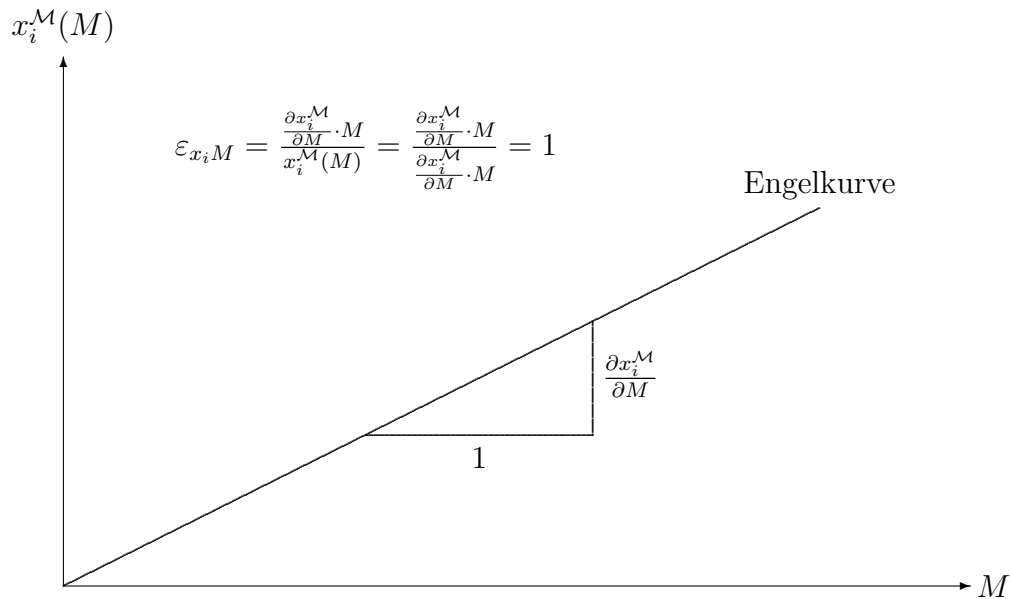


Abbildung A.10: Lineare Engelkurve mit einer Einkommenselastizität von Eins (Quelle: Eigene Darstellung).

Theoretisch plausible, wie in der Abbildung A.10 skizzierte einkommensproportionale Nachfragesysteme

$$x_i^M = B^i(p)M \quad (\text{A.4})$$

haben folglich die Form

$$x_i^M = \frac{P_i}{P}M \quad (\text{A.5})$$

und werden von der indirekten Nutzenfunktion

$$\mathcal{N}(M, p) = \mathcal{K} \left[\frac{M}{P(p)} \right] \quad (\text{A.6})$$

generiert.

Beweis: Die Beweisführung zum obigen Theorem teilt sich in vier Schritte.⁹ Als erstes wird ein mathematischer Hilfssatz aufgestellt und bewiesen. Im Anschluss daran wird die Bestimmung der *Marshall'schen* Nachfragefunktionen (A.2) aus der *Gorman Polar Form* (A.3) durch Nutzung von *Roys Identität* aufgezeigt. In einem letzten Schritt wird zunächst die Existenz einer linearhomogenen Funktion $f(p)$ bewiesen, so dass die Gleichung (A.1) auch als

$$x_i^M = B^i(M - f) + f_i = B^i M - B^i f + f_i \quad (\text{A.7})$$

⁹Die Beweisführung entspricht inhaltlich der von *Pollak* und *Wales* (1992, S. 67ff.).

geschrieben werden kann. Abschließend wird dann die Existenz einer linearhomogenen Funktion $P(p)$ nachgewiesen, die der Bedingung $B^i = \frac{P_i}{P}$ genügt. Die beiden letzten Schritte beweisen die Gleichung (A.2).

Lemma A1: Für ein Nachfragesystem der Form (A.1) gilt:

$$1 = \sum_{i=1}^L p_i B^i \quad (\text{A.8})$$

$$0 = \sum_{i=1}^L p_i C^i \quad (\text{A.9})$$

$$B_j^i = B_i^j \quad (\text{A.10})$$

$$C_j^i + C^j B^i = C_j^j + C^i B^j. \quad (\text{A.11})$$

Beweis Lemma A1: Aus der Budgetbeschränkung

$$M = p_1 x_1^{\mathcal{M}} + \dots + p_L x_L^{\mathcal{M}} \quad (\text{A.12})$$

folgt durch Einsetzen von (A.1):

$$M = \sum_{i=1}^L p_i C^i + M \sum_{i=1}^L p_i B^i. \quad (\text{A.13})$$

Die Ableitung von (A.12) nach M führt zu (A.8) und die Nutzung von (A.8) in (A.12) beweist (A.9). Wegen der *Slutsky*-Symmetrie $\frac{\partial x_i^{\mathcal{M}}}{\partial p_j} = \frac{\partial x_j^{\mathcal{M}}}{\partial p_i}$ eines theoretisch plausiblen Systems folgt unter Anwendung der *Slutsky*-Gleichung aus (A.1):¹⁰

$$C_j^i + C^j B^i + M(B_j^i + B^i B^j) = C_j^j + C^i B^j + M(B_i^j + B^j B^i). \quad (\text{A.14})$$

Die Ableitung von (A.14) nach M führt zu (A.10) und die Nutzung von (A.10) in (A.14) beweist (A.11).

Durch *Roys Identität* $x_i^{\mathcal{M}} = -\frac{\frac{\partial \mathcal{N}(M,p)}{\partial p_i}}{\lambda^{\mathcal{M}}} = -\frac{\frac{\partial \mathcal{N}(M,p)}{\partial p_i}}{\frac{\partial \mathcal{N}(M,p)}{\partial M}}$ folgt die aus (A.3) generierte *Marshall'sche* Nachfragefunktion:¹¹

$$x_i^{\mathcal{M}} = -\frac{\mathcal{K}' \left(-\frac{MP_i}{P^2} - \frac{f_i P - f P_i}{P^2} \right)}{\mathcal{K}' \frac{1}{P}}. \quad (\text{A.15})$$

Kurzes Vereinfachen führt dann zu (A.2).

¹⁰Vgl. 3.3.4, S. 60, zur Herleitung der *Slutsky*-Gleichung und der Symmetrieeigenschaft.

¹¹Vgl. 3.3.2, S. 59, und 3.3.5, S. 66.

Für die letzten beiden Schritte des Beweises wird das so genannte *Frobenius*-Theorem genutzt.¹² Dieses Theorem sichert die Existenz einer vom Vektor p abhängigen Funktion $z(p)$ mit vorgegebenen partiellen Ableitungen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial z(p)}{\partial p_1} &= \varphi^1(p, z(p)) \\ \dots &= \dots \\ \frac{\partial z(p)}{\partial p_i} &= \varphi^i(p, z(p)) \\ \dots &= \dots \\ \frac{\partial z(p)}{\partial p_L} &= \varphi^L(p, z(p)). \end{aligned} \tag{A.16}$$

Sind diese Ableitungen stetig differenzierbar, so existiert eine Funktion $z(p)$, wenn die Bedingung $\frac{\partial^2 z(p)}{\partial p_i \partial p_j} = \frac{\partial^2 z(p)}{\partial p_j \partial p_i}$ ¹³, d.h.

$$\frac{\partial \varphi^i}{\partial p_j} + \frac{\partial \varphi^i}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial p_j} = \frac{\partial \varphi^j}{\partial p_i} + \frac{\partial \varphi^j}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial p_i}, \tag{A.17}$$

also die Integrabilitätsbedingung

$$\frac{\partial \varphi^i}{\partial p_j} + \frac{\partial \varphi^i}{\partial z} \varphi^j = \frac{\partial \varphi^j}{\partial p_i} + \frac{\partial \varphi^j}{\partial z} \varphi^i \tag{A.18}$$

erfüllt ist. Wie in Gleichung (A.7) angekündigt, soll nun die Existenz der Funktion f mit der Form

$$C^i = -B^i f + f_i \tag{A.19}$$

bewiesen werden. Es sei nun die Funktion φ^i definiert als:¹⁴

$$\varphi^i = f_i = C^i + B^i f \tag{A.20}$$

Die Funktion f existiert, wenn die angepasste Bedingung (A.18) erfüllt ist. In diesem Fall gilt:

$$(C_j^i + B_j^i f) + B^i (C^j + B^j f) = (C_i^j + B_i^j f) + B^j (C^i + B^i f) \tag{A.21}$$

bzw.

$$C_j^i + B_j^i f + B^i C^j + B^i B^j f = C_i^j + B_i^j f + B^j C^i + B^j B^i f. \tag{A.22}$$

¹²Benannt nach dem Berliner Mathematiker Ferdinand Georg Frobenius. Das Theorem findet sich beispielsweise in *Berck, Strom, Sydsaeter* (1999, S. 72).

¹³Siehe dazu den *Satz von Schwarz* unter A.8, S. 200f.

¹⁴Die Funktion $f(p)$ entspricht hier der Funktion $z(p)$ aus dem *Frobenius*-Theorem.

Der vierte Term in (A.22) ist eindeutig symmetrisch. Die Symmetrie des zweiten Terms folgt aus (A.10) und die des Restes aus (A.11). Zum Nachweis der Linearhomogenität von $f(p)$ genügt die Multiplikation der Gleichung (A.20) mit p_i und die anschließende Summation über alle i :

$$\sum_{i=1}^L f_i p_i = \sum_{i=1}^L C^i p_i + f \sum_{i=1}^L B^i p_i. \quad (\text{A.23})$$

Die Anwendung von (A.8) und (A.9) führt dann zu

$$\sum_{i=1}^L f_i p_i = f, \quad (\text{A.24})$$

was die Linearhomogenität von $f(p)$ gemäß der *Eulerschen* Homogenitätsrelation belegt.¹⁵

Im letzten Schritt des Beweises sei analog zu (A.20) die Funktion φ^i definiert als:¹⁶

$$\varphi^i = P_i = B^i P. \quad (\text{A.25})$$

Die Anwendung von (A.18) führt hier zu:

$$B_j^i P + B^i B^j P = B_j^i P + B^j B^i P. \quad (\text{A.26})$$

Die wegen (A.10) erfüllte Symmetrie beweist die Existenz einer Funktion $P(p)$, die die Gleichung (A.25) bzw. $B^i = \frac{P_i}{P}$ erfüllt. Das Einsetzen von $B^i = \frac{P_i}{P}$ in Gleichung (A.8) und die anschließende Multiplikation mit P beweist die Linearhomogenität von $P(p)$.¹⁷

$$P = \sum_{i=1}^L p_i P_i \quad (\text{A.27})$$

A.18 *Slutsky-Symmetrie und Generalized Gorman Polar Form*

Die *Generalized Gorman Polar Form* (GGPF)¹⁸

$$\mathcal{N}(M, p) = \mathcal{K} \left[\Gamma \left(\frac{M}{P(p)} \right) + \Lambda(p) \right] = \mathcal{K} \left[\Gamma \left(\frac{M}{P(p)} \right) - \frac{f(p)}{P(p)} \right] \quad (\text{A.28})$$

¹⁵Vgl. A.15, S. 209.

¹⁶Die Funktion $P(p)$ entspricht jetzt der Funktion $z(p)$ aus dem *Frobenius*-Theorem.

¹⁷Vgl. (A.27) mit (A.24).

¹⁸Siehe dazu Gleichung (4.17), S. 79. Die Ergänzung um \mathcal{K} wie in Gleichung (4.48), S. 89, lässt die Ergebnisse unbeeinflusst.

mit den monoton steigenden Funktionen \mathcal{K} und Γ generiert Nachfragefunktionen der Form:¹⁹

$$x_i^{\mathcal{M}} = -\frac{P\Lambda_i}{\Gamma_t} + \frac{P_i}{P}M = \frac{f_i}{\Gamma_t} - \frac{P_i}{P}\frac{f}{\Gamma_t} + \frac{P_i}{P}M \quad \text{mit } (t = \frac{M}{P}). \quad (\text{A.29})$$

Bei Linearität von Γ folgt die Konstanz von $\Gamma_t = c$ und somit die Linearität der Engelkurven.²⁰ Die Funktion $\Lambda(p)$ ist homogen vom Grade 0 und $P(p)$ und $f(p)$ sind homogen vom Grade 1 in p . $f(p)$ entspricht hier $f(p) = -\frac{\Lambda(p)}{P(p)}$. Die Spezifizierung (A.28) erfüllt die Symmetrieeigenschaft der *Slutsky*-Matrix:²¹

$$\frac{\partial x_i^{\mathcal{H}}}{\partial p_j} = \frac{\partial x_j^{\mathcal{H}}}{\partial p_i}. \quad (\text{A.30})$$

Differenzieren von (A.29) nach p_j ergibt

$$\frac{\partial x_i^{\mathcal{M}}}{\partial p_j} = M \frac{P_{ij}P - P_iP_j}{P^2} - \frac{(P_j\Lambda_i + P\Lambda_{ij})\Gamma_t - P\Lambda_i\Gamma_{tt}\frac{-M}{P^2}P_j}{\Gamma_t^2}. \quad (\text{A.31})$$

Differenzieren von (A.29) nach M ergibt

$$\frac{\partial x_i^{\mathcal{M}}}{\partial M} = \frac{P_i}{P} + \frac{P\Lambda_i}{\Gamma_t^2}\Gamma_{tt}\frac{1}{P}. \quad (\text{A.32})$$

Einsetzen von (A.31), (A.32) und der für das Gut j geltenden (A.29) in die *Slutsky*-Gleichung ergibt

$$\frac{\partial x_i^{\mathcal{H}}}{\partial p_j} = \frac{\partial x_i^{\mathcal{M}}}{\partial p_j} + \frac{\partial x_i^{\mathcal{M}}}{\partial M}x_j^{\mathcal{M}} \quad (\text{A.33})$$

und führt zu

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_i^{\mathcal{H}}}{\partial p_j} &= M \frac{P_{ij}P - P_iP_j}{P^2} \\ &\quad - \frac{(P_j\Lambda_i + P\Lambda_{ij})\Gamma_t - P\Lambda_i\Gamma_{tt}\frac{-M}{P^2}P_j}{\Gamma_t^2} \\ &\quad + \left(\frac{P_i}{P} + \frac{P\Lambda_i}{\Gamma_t^2}\Gamma_{tt}\frac{1}{P} \right) \left(M \frac{P_j}{P} - \frac{P\Lambda_j}{\Gamma_t} \right) \end{aligned} \quad (\text{A.34})$$

bzw. für $\frac{\partial x_j^{\mathcal{H}}}{\partial p_i}$ zu

$$\frac{\partial x_j^{\mathcal{H}}}{\partial p_i} = M \frac{P_{ji}P - P_jP_i}{P^2} \quad (\text{A.35})$$

¹⁹Vgl. dazu (4.45) auf S. 87.

²⁰Siehe A.17, S. 210.

²¹Siehe dazu die Eigenschaft E2^S auf S. 61.

$$\begin{aligned}
& - \frac{(P_i \Lambda_j + P \Lambda_{ji}) \Gamma_t - P \Lambda_j \Gamma_{tt} \frac{-M}{P^2} P_i}{\Gamma_t^2} \\
& + \left(\frac{P_j}{P} + \frac{P \Lambda_j}{\Gamma_t^2} \Gamma_{tt} \frac{1}{P} \right) \left(M \frac{P_i}{P} - \frac{P \Lambda_i}{\Gamma_t} \right).
\end{aligned}$$

Es ist die Gleichheit von (A.34) und (A.35) zu zeigen. Die beiden ersten Terme in (A.34) und (A.35) sind gemäß dem *Satz von Schwarz* ($P_{ij} = P_{ji}$) gleich.²² Es verbleibt die Prüfung von

$$\begin{aligned}
& - \frac{(P_j \Lambda_i + P \Lambda_{ij}) \Gamma_t - P \Lambda_i \Gamma_{tt} \frac{-M}{P^2} P_j}{\Gamma_t^2} \\
& + \left(\frac{P_i}{P} + \frac{P \Lambda_i}{\Gamma_t^2} \Gamma_{tt} \frac{1}{P} \right) \left(M \frac{P_j}{P} - \frac{P \Lambda_j}{\Gamma_t} \right) \\
& = \\
& - \frac{(P_i \Lambda_j + P \Lambda_{ji}) \Gamma_t - P \Lambda_j \Gamma_{tt} \frac{-M}{P^2} P_i}{\Gamma_t^2} \\
& + \left(\frac{P_j}{P} + \frac{P \Lambda_j}{\Gamma_t^2} \Gamma_{tt} \frac{1}{P} \right) \left(M \frac{P_i}{P} - \frac{P \Lambda_i}{\Gamma_t} \right).
\end{aligned}$$

Das Auflösen der Klammern und die nochmalige Verwendung des *Satzes von Schwarz* zeigt dann die Gleichheit und beweist damit die Symmetrie.²³

$$\begin{aligned}
& - \frac{P_j \Lambda_i}{\Gamma} - \frac{P \Lambda_{ij}}{\Gamma} - \frac{\Lambda_i \Gamma_{tt} \frac{M}{P} P_j}{\Gamma^2} \\
& + \frac{M P_j P_i}{P^2} + \frac{M P_j \Gamma_{tt} \Lambda_i}{P \Gamma^2} \\
& - \frac{P \Lambda_i \Lambda_j \Gamma_{tt}}{\Gamma^3} - \frac{P_i \Lambda_j}{\Gamma} \\
& = \\
& - \frac{P_i \Lambda_j}{\Gamma} - \frac{P \Lambda_{ji}}{\Gamma} - \frac{\Lambda_j \Gamma_{tt} \frac{M}{P} P_i}{\Gamma^2} \\
& + \frac{M P_i P_j}{P^2} + \frac{M P_i \Gamma_{tt} \Lambda_j}{P \Gamma^2} \\
& - \frac{P \Lambda_j \Lambda_i \Gamma_{tt}}{\Gamma^3} - \frac{P_j \Lambda_i}{\Gamma}.
\end{aligned} \tag{A.36}$$

A.19 Zur Nutzenfunktionsstruktur und Separabilität

Für die Nachweise, dass die unter 4.1.3 auf Seite 73 beschriebenen Eigenschaften der starken und schwachen Separabilität dann und nur dann gelten, wenn die

²²Vgl. A.8, S. 200f.

²³Auf der rechten Seite der Gleichung (A.36) folgt $-\frac{\Lambda_i \Gamma_{tt} \frac{M}{P} P_j}{\Gamma^2} + \frac{M P_j \Gamma_{tt} \Lambda_i}{P \Gamma^2} = 0$ und auf der linken Seite $-\frac{\Lambda_j \Gamma_{tt} \frac{M}{P} P_i}{\Gamma^2} + \frac{M P_i \Gamma_{tt} \Lambda_j}{P \Gamma^2} = 0$.

Nutzenfunktionen die jeweils genannten Strukturen besitzen, wird ein mathematischer Hilfssatz benötigt. Dieser wird zunächst bewiesen, um im Anschluss daran die eigentlichen Beweise zu führen.²⁴

Lemma A2: Es seien $f(x)$ und $g(x)$ stetige, zweimal differenzierbare Funktionen von n Variablen $x = (x_1, \dots, x_n)$. Wenn jede Indifferenzoberfläche verbunden ist und eine Funktion $\lambda(x)$ mit der Eigenschaft

$$f_i(x) = \lambda(x)g_i(x), \quad i = 1, \dots, n \quad \text{für alle } x$$

existiert, dann ist $f(x)$ eine Transformation von $g(x)$. D.h. es existiert eine von einer Variablen t abhängige Funktion $F(t)$, so dass

$$f(x) = F(g(x)), \quad \text{für alle } x$$

gilt.

Für den Beweis von Lemma A2 ist es hinreichend zu zeigen, dass jede x^0, x^1 Vektorkombination, welche die Gleichung $g(x^0) = g(x^1)$ erfüllt, auch die Gleichung $f(x^0) = f(x^1)$ impliziert.

Es sei $x(t)$ ($0 \leq t \leq 1$) ein stetig differenzierbarer Pfad, so dass:

$$x(0) = x^0, x(1) = x^1 \quad \text{und} \quad g(x(t)) = g(x^0) \quad \text{für alle } 0 \leq t \leq 1.$$

$g(x(t)) = g(x^0)$ nach t differenziert ergibt

$$\frac{d}{dt} [g(x(t))] = \sum_{i=1}^n g_i(x(t)) \frac{dx_i(t)}{dt} = 0 \quad \text{für alle } 0 \leq t \leq 1.$$

Gemäß der Annahme aus Lemma A2

$$f_i(x) = \lambda(x)g_i(x), \quad i = 1, \dots, n \quad \text{für alle } x$$

ergibt die Differenzierung der Gleichung $f(x(t)) = f(x^0)$

$$\frac{d}{dt} [f(x(t))] = \sum_{i=1}^n f_i(x(t)) \frac{dx_i(t)}{dt} = 0 \quad \text{für alle } 0 \leq t \leq 1,$$

da

$$\sum_{i=1}^n f_i(x(t)) \frac{dx_i(t)}{dt} = \sum_{i=1}^n \lambda(x)g_i(x(t)) \frac{dx_i(t)}{dt} = \lambda(x) \sum_{i=1}^n g_i(x(t)) \frac{dx_i(t)}{dt} = 0$$

gilt. Folglich ist $f(x(t))$ konstant, also unabhängig von t -Änderungen. Somit gilt:

$$f(x^0) = f(x^1) \quad \text{Q.E.D.}$$

²⁴Die gesamte Beweisführung ist an die Ausführungen von *Goldman* und *Uzawa* (1964, S. 388ff.) angelehnt.

A.19.1 Funktionsstruktur bei starker Separabilität

Es ist offensichtlich, dass die Nutzenfunktionsstruktur

$$U(x) = F(U^1(x^{(1)}) + U^2(x^{(2)}) + \dots + U^S(x^{(S)}))$$

starke Separierbarkeit impliziert. Im Folgenden wird der Umkehrschluss bewiesen, dass die Eigenschaft der starken Separierbarkeit die genannte Funktionsstruktur zur Folge hat.

$U(x)$ sei bezüglich der disjunkten Untergruppen (N_1, \dots, N_S) stark separierbar:

$$\frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{U_i(x)}{U_j(x)} \right) = 0 \quad \text{für alle } i \in N_s, j \in N_t \text{ und } k \notin N_s \cup N_t \text{ (} s \neq t \text{)}.$$

Gemäß der Quotientenregel differenziert ergibt dies:

$$\frac{U_{ik}(x) \cdot U_j(x) - U_i(x) \cdot U_{jk}(x)}{U_j(x)^2} = 0. \quad (\text{A.37})$$

Die Gleichung (A.37) umgeformt und mit $\frac{1}{U_k(x)}$ erweitert ergibt

$$\frac{U_{ik}(x)}{U_i(x) \cdot U_k(x)} = \frac{U_{jk}(x)}{U_j(x) \cdot U_k(x)} \quad \forall i \in N_s, j \in N_t, k \in N_r, (s, t, r \neq s, t)$$

und beweist die Existenz von $\alpha(x)$:

$$\alpha(x) = \frac{U_{ij}(x)}{U_i(x) \cdot U_j(x)} = \frac{U_{ik}(x)}{U_i(x) \cdot U_k(x)} = \frac{U_{jk}(x)}{U_j(x) \cdot U_k(x)}. \quad (\text{A.38})$$

Wird (A.38) umgestellt

$$U_{ij}(x) = \alpha(x)U_i(x)U_j(x) \quad (\text{A.39})$$

und dann gemäß Produktregel nach x_k differenziert, folgt

$$U_{ijk}(x) = \alpha_k(x)U_i(x)U_j(x) + \alpha(x)U_{ik}(x)U_j(x) + \alpha(x)U_i(x)U_{jk}(x). \quad (\text{A.40})$$

Dividiert durch $U_i(x)U_j(x)$ und nach α_k umgestellt ergibt dies

$$\alpha_k(x) = \frac{U_{ijk}(x)}{U_i(x)U_j(x)} - \frac{\alpha(x)U_{ik}(x)}{U_i(x)} - \frac{\alpha(x)U_{jk}(x)}{U_j(x)}. \quad (\text{A.41})$$

Aus der Erweiterung mit $\frac{1}{U_k(x)}$ und der Nutzung der Beziehung (A.38) folgt

$$\frac{\alpha_k(x)}{U_k(x)} = \frac{U_{ijk}(x)}{U_i(x)U_j(x)U_k(x)} - \alpha(x)\alpha(x) - \alpha(x)\alpha(x) \quad (\text{A.42})$$

bzw.

$$\frac{\alpha_k(x)}{U_k(x)} = \frac{U_{ijk}(x)}{U_i(x)U_j(x)U_k(x)} - 2\alpha^2(x). \quad (\text{A.43})$$

Somit existiert eine Funktion $\lambda(x)$, so dass

$$\frac{\alpha_i(x)}{U_i(x)} = \lambda(x) \quad \forall i = 1, \dots, n \text{ und } x. \quad (\text{A.44})$$

Gemäß Lemma A2 existiert daher eine Funktion $\beta(t)$ einer Variablen t mit

$$\alpha(x) = \beta(U(x)) \quad \forall x. \quad (\text{A.45})$$

Es sei nun eine Funktion $F^{-1}(U)$ einer Variablen U definiert als:²⁵

$$F^{-1}(U) = \int_{U_0}^U e^{-\int_{v_0}^v \beta(\omega) d\omega} dv. \quad (\text{A.46})$$

Eine so definierte Funktion $F^{-1}(U)$ erfüllt die folgende Differentialgleichung:²⁶

$$F^{-1''}(U) + F^{-1'}(U)\beta(U) = 0. \quad (\text{A.47})$$

Eine Funktion $v(x)$ sei nun definiert als $v(x) = F^{-1}(U(x))$. Daraus folgt:

$$v_{ij}(x) = F^{-1''}(U(x))U_i(x)U_j(x) + F^{-1'}(U(x))U_{ij}(x). \quad (\text{A.48})$$

Unter Nutzung von A.39, A.45 und A.47 folgt:

$$v_{ij}(x) = \left(F^{-1''}(U(x)) + F^{-1'}(U(x))\beta(U(x)) \right) U_i(x)U_j(x) = 0. \quad (\text{A.49})$$

Da $v_{ij}(x) = 0$ ist, muss $v(x)$ die Form

$$v(x) = U^1(x^{(1)}) + U^2(x^{(2)}) + \dots + U^S(x^{(S)}) \quad (\text{A.50})$$

haben. Wobei $U^s(x^{(s)})$ nur vom Subvektor x^s (für alle $s = 1, \dots, S$) abhängig ist. Q.E.D.

²⁵Es sei an dieser Stelle daran erinnert, dass $F(t)$ als eine monoton steigende Funktion definiert wurde.

²⁶A.47 ist leicht nachprüfbar. Die in A.46 definierte Umkehrfunktion der Transformation $F(U)$ wurde von *Goldman* und *Uzawa* einer von *Samuelson*, *P.A.* (1947, S. 178) definierten Funktion entlehnt.

A.19.2 Funktionsstruktur bei schwacher Separabilität

Eine Nutzenfunktion $U(x)$ erfüllt das Kriterium der schwachen Separierbarkeit bezüglich der disjunkten Untergruppen (N_1, \dots, N_S) , falls sie die Funktionsstruktur

$$U(x) = \Psi(U^1(x^{(1)}), U^2(x^{(2)}), \dots, U^S(x^{(S)}))$$

besitzt. Dies gilt, da

$$\frac{U_i(x)}{U_j(x)} = \frac{U_i^s(x^s)}{U_j^s(x^s)} \quad \text{für } i, j \in N_s$$

unabhängig von jedem x_k ($k \notin N_s$) ist. $\frac{U_i(x)}{U_j(x)}$ mit $i, j \in N_s$ hängt ausschließlich von $x^{(s)}$ ab. Somit existieren Funktionen $\alpha(x)$ und $b^i(x^{(s)})$ für alle $i \in N_s$, so dass

$$U_i(x) = \alpha(x)b^i(x^{(s)}) \quad \text{für alle } i \in N_s \quad (\text{A.51})$$

gilt. A.51 partiell nach $x_j, j \in N_s$, differenziert ergibt:

$$U_{ij}(x) = \alpha_j(x)b^i(x^{(s)}) + \alpha(x)b_j^i(x^{(s)}) \quad \text{für alle } i, j \in N_s. \quad (\text{A.52})$$

Gemäß dem *Satz von Schwarz* gilt für $i, j, k \in N_s$ das Gleichungssystem $U_{ij}(x) = U_{ji}(x)$, $U_{ik}(x) = U_{ki}(x)$ und $U_{kj}(x) = U_{jk}(x)$.²⁷ Daraus folgt die Integrierbarkeitsbedingung:²⁸

$$b^i(b_k^j - b_j^k) + b^j(b_i^k - b_k^i) + b^k(b_j^i - b_i^j) = 0 \quad \forall i, j, k \in N_s, x^{(s)}. \quad (\text{A.53})$$

Unter Anwendung des *Satzes von Stokes*²⁹ bezüglich der Funktion $b^i(x^{(s)})$ existieren daher $U^s(x^{(s)})$ und $\rho^s(x^{(s)})$, so dass

$$b^i(x^{(s)}) = \rho^s(x^{(s)})U_i^s(x^{(s)}) \quad \forall i \in N_s \quad (\text{A.54})$$

gilt. Das Einsetzen der Gleichung (A.54) in Gleichung (A.51) führt zu:

$$U_i(x) = \mu^s(x^{(s)})U_i^s(x^{(s)}), \quad \text{für alle } i \in N_s \text{ mit } \mu^s(x^{(s)}) = \alpha(x)\rho^s(x^{(s)}). \quad (\text{A.55})$$

Unter Nutzung einer Argumentation, die der des Beweises von Lemma A2 auf Seite 216 entspricht folgt daraus, dass

$$U^1(x^{(1)}) = U^1(y^{(1)}), \quad U^2(x^{(2)}) = U^2(y^{(2)}), \dots, \quad U^S(x^{(S)}) = U^S(y^{(S)}) \quad (\text{A.56})$$

und somit

$$U(x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(S)}) = U(y^{(1)}, y^{(2)}, \dots, y^{(S)}). \quad (\text{A.57})$$

Folglich existiert eine Funktion $\Psi(U^1, U^2, \dots, U^S)$ mit S Variablen. Q.E.D.

²⁷Vgl. A.8, S. 200f.

²⁸Die Integrierbarkeitsbedingung in *S.M. Goldman* und *H. Uzawa* (1964, S. 391) ist fehlerhaft und wurde daher vom Verfasser korrigiert.

²⁹Siehe dazu beispielsweise *Heuser, H.* (1991, S. 512ff.).

A.20 Fundamentale Matrixgleichung der Nachfrage

Die Bildung des totalen Differentials der Bedingung erster Ordnung im Nutzenmaximierungsansatz führt zu³⁰

$$\begin{aligned} H_U(x^{\mathcal{M}})dx^{\mathcal{M}} &= p d\lambda^{\mathcal{M}} + \lambda^{\mathcal{M}} dp \\ p^T dx^{\mathcal{M}} + x^{\mathcal{M}T} dp &= dM \end{aligned} \quad (\text{A.58})$$

bzw. in Matrixform zu

$$\begin{pmatrix} H_U(x^{\mathcal{M}}) & p \\ p^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx^{\mathcal{M}} \\ -d\lambda^{\mathcal{M}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \lambda^{\mathcal{M}} I \\ 1 & -x^{\mathcal{M}T} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dM \\ dp \end{pmatrix}. \quad (\text{A.59})$$

$H_U(x^{\mathcal{M}})$ ist dabei die Hesse-Matrix der Nutzenfunktion und I die L -dimensionale Einheitsmatrix. Die Matrixgleichung (A.59) hat unter dem Begriff *Fundamentale Matrixgleichung der Nachfrage* Eingang in die wirtschaftswissenschaftliche Literatur gefunden.³¹

Aus dem L -dimensionalen Lösungsvektor $x^{\mathcal{M}}(M, p)$ und dem Lagrangemultiplikator der Nutzenmaximierung $\lambda^{\mathcal{M}}(M, p)$ folgt durch Bildung des totalen Differentials zudem das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} dx_1^{\mathcal{M}} &= \frac{\partial x_1^{\mathcal{M}}}{\partial M} dM + \frac{\partial x_1}{\partial p_1} dp_1 + \cdots + \frac{\partial x_1}{\partial p_L} dp_L \\ dx_2^{\mathcal{M}} &= \frac{\partial x_2^{\mathcal{M}}}{\partial M} dM + \frac{\partial x_2}{\partial p_1} dp_1 + \cdots + \frac{\partial x_2}{\partial p_L} dp_L \\ \dots &= \dots \\ dx_L^{\mathcal{M}} &= \frac{\partial x_L^{\mathcal{M}}}{\partial M} dM + \frac{\partial x_L}{\partial p_1} dp_1 + \cdots + \frac{\partial x_L}{\partial p_L} dp_L \\ d\lambda^{\mathcal{M}} &= \frac{\partial \lambda^{\mathcal{M}}}{\partial M} dM + \frac{\partial \lambda^{\mathcal{M}}}{\partial p_1} dp_1 + \cdots + \frac{\partial \lambda^{\mathcal{M}}}{\partial p_L} dp_L \end{aligned} \quad (\text{A.60})$$

bzw. in Matrixform:³²

$$\begin{pmatrix} dx_1^{\mathcal{M}} \\ \vdots \\ dx_L^{\mathcal{M}} \\ -d\lambda^{\mathcal{M}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1^{\mathcal{M}}}{\partial M} & \frac{\partial x_1}{\partial p_1} & \cdots & \frac{\partial x_1}{\partial p_L} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial x_L^{\mathcal{M}}}{\partial M} & \frac{\partial x_L}{\partial p_1} & \cdots & \frac{\partial x_L}{\partial p_L} \\ -\frac{\partial \lambda^{\mathcal{M}}}{\partial M} & -\frac{\partial \lambda^{\mathcal{M}}}{\partial p_1} & \cdots & -\frac{\partial \lambda^{\mathcal{M}}}{\partial p_L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dM \\ dp_1 \\ \vdots \\ dp_L \end{pmatrix}. \quad (\text{A.61})$$

³⁰Vgl. zur Bedingung erster Ordnung 3.2.1, S. 51ff.

³¹Vgl. beispielsweise *Barten, Böhm* (1982, S. 410).

³²Die letzte Gleichung wurde dabei mit -1 multipliziert.

Zur Vereinfachung der Darstellung seien die Matrix $X_p^{\mathcal{M}}$ und die Vektoren $x_M^{\mathcal{M}}$ und $\lambda_p^{\mathcal{M}}$ definiert als

$$X_p^{\mathcal{M}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1^{\mathcal{M}}}{\partial p_1} & \cdots & \frac{\partial x_1^{\mathcal{M}}}{\partial p_L} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial x_L^{\mathcal{M}}}{\partial p_1} & \cdots & \frac{\partial x_L^{\mathcal{M}}}{\partial p_L} \end{pmatrix}, \quad x_M^{\mathcal{M}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1^{\mathcal{M}}}{\partial M} \\ \vdots \\ \frac{\partial x_L^{\mathcal{M}}}{\partial M} \end{pmatrix}, \quad \lambda_p^{\mathcal{M}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \lambda^{\mathcal{M}}}{\partial p_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial \lambda^{\mathcal{M}}}{\partial p_L} \end{pmatrix}$$

und $\lambda_M^{\mathcal{M}}$ stehe für $\frac{\partial \lambda^{\mathcal{M}}}{\partial M}$. Somit entspricht (A.61):

$$\begin{pmatrix} dx^{\mathcal{M}} \\ -d\lambda^{\mathcal{M}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_M^{\mathcal{M}} & X_p^{\mathcal{M}} \\ -\lambda_M^{\mathcal{M}} & -\lambda_p^{\mathcal{M}T} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dM \\ dp \end{pmatrix}. \quad (\text{A.62})$$

Einsetzen des Gleichungssystems (A.62) in die Fundamentale Matrixgleichung der Nachfrage (A.59) führt zu:

$$\begin{pmatrix} H_U(x^{\mathcal{M}}) & p \\ p^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_M^{\mathcal{M}} & X_p^{\mathcal{M}} \\ -\lambda_M^{\mathcal{M}} & -\lambda_p^{\mathcal{M}T} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \lambda^{\mathcal{M}} I \\ 1 & -x^{\mathcal{M}T} \end{pmatrix}. \quad (\text{A.63})$$

Die Lösung von (A.63) erfolgt mittels der Inversen³³ von $\begin{pmatrix} H_U(x^{\mathcal{M}}) & p \\ p^T & 0 \end{pmatrix}$:

$$\begin{pmatrix} H_U & p \\ p^T & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{p^T H_U^{-1} p} \begin{pmatrix} (p^T H_U^{-1} p) H_U^{-1} - H_U^{-1} p p^T H_U^{-1} & H_U^{-1} p \\ p^T H_U^{-1} & -1 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.64})$$

Aus dem linksseitigen Multiplizieren der Matrixgleichung (A.63) mit der Inversen (A.64) folgt dann:³⁴

$$\lambda_M^{\mathcal{M}} = \frac{1}{p^T H_U^{-1} p} \quad (\text{A.65})$$

$$x_M^{\mathcal{M}} = \frac{H_U^{-1} p}{p^T H_U^{-1} p} = \lambda_M^{\mathcal{M}} H_U^{-1} p \quad \text{bzw.} \quad \frac{x_M^{\mathcal{M}}}{\lambda_M^{\mathcal{M}}} = H_U^{-1} p \quad \text{bzw.} \quad \frac{x_M^{\mathcal{M}T}}{\lambda_M^{\mathcal{M}}} = p^T H_U^{-1} \quad (\text{A.66})$$

$$\lambda_p^{\mathcal{M}T} = -\frac{p^T H_U^{-1}}{p^T H_U^{-1} p} \lambda^{\mathcal{M}} I + \frac{x^{\mathcal{M}T}}{p^T H_U^{-1} p} \quad (\text{A.67})$$

³³Aus Platzgründen wurde $H_U(x^{\mathcal{M}})$ durch H_U ersetzt. Bei der Bildung der inversen Matrix wurde folgende Regel für die Bildung der Inversen einer partitionierten Matrix angewandt: Es sei A eine Matrix der Form: $A = \begin{pmatrix} E & F \\ G & H \end{pmatrix}$ und D sei definiert als $D = H - GE^{-1}F$ unter der Annahme, dass A , E und D nichtsinguläre Matrizen sind. Dann folgt daraus, dass die Inverse von A genau $\begin{pmatrix} E^{-1}(I + FD^{-1}GE^{-1}) & -E^{-1}FD^{-1} \\ -D^{-1}GE^{-1} & D^{-1} \end{pmatrix} = A^{-1}$ entspricht. Beispielsweise nutzt *Phlips, L.* (1983, S. 48) diese Regel bei der Bestimmung der Inversen (A.64). Seine Gleichung enthält jedoch einen kleinen Tippfehler.

³⁴ $H_U^{-1T} = H_U^{-1}$, da H_U und somit H_U^{-1} symmetrisch ist. Siehe dazu A.9.1, S. 201.

$$\begin{aligned}
&= -\lambda^{\mathcal{M}}(\lambda^{\mathcal{M}}p^T H_U^{-1} - x^{\mathcal{M}T}) \\
\lambda_p^{\mathcal{M}} &= -\lambda^{\mathcal{M}}(\lambda^{\mathcal{M}}p^T H_U^{-1} - x^{\mathcal{M}T})^T \\
&= -\lambda^{\mathcal{M}}(\lambda^{\mathcal{M}}H_U^{-1}p - x^{\mathcal{M}}) \\
&= \lambda^{\mathcal{M}}x^{\mathcal{M}} - \lambda^{\mathcal{M}}x_M^{\mathcal{M}} \\
X_p &= \frac{(p^T H_U^{-1}p)H_U^{-1} - H_U^{-1}pp^T H_U^{-1}}{p^T H_U^{-1}p} \lambda^{\mathcal{M}}I - \frac{H_U^{-1}px^{\mathcal{M}T}}{p^T H_U^{-1}p} \quad (\text{A.68}) \\
&= \lambda^{\mathcal{M}}\lambda^{\mathcal{M}}\left(\frac{1}{\lambda^{\mathcal{M}}}H_U^{-1} - H_U^{-1}pp^T H_U^{-1}\right) - \lambda^{\mathcal{M}}H_U^{-1}px^{\mathcal{M}T} \\
&= \lambda^{\mathcal{M}}H_U^{-1} - \lambda^{\mathcal{M}}\lambda^{\mathcal{M}}H_U^{-1}pp^T H_U^{-1} - \lambda^{\mathcal{M}}H_U^{-1}px^{\mathcal{M}T} \\
&= \lambda^{\mathcal{M}}H_U^{-1} - \lambda^{\mathcal{M}}\lambda^{\mathcal{M}}\frac{x_M^{\mathcal{M}}x_M^{\mathcal{M}T}}{\lambda^{\mathcal{M}}\lambda^{\mathcal{M}}} - \lambda^{\mathcal{M}}\frac{x_M^{\mathcal{M}}}{\lambda^{\mathcal{M}}}x^{\mathcal{M}T} \\
&= \lambda^{\mathcal{M}}H_U^{-1} - \frac{\lambda^{\mathcal{M}}}{\lambda^{\mathcal{M}}}x_M^{\mathcal{M}}x_M^{\mathcal{M}T} - x_M^{\mathcal{M}}x^{\mathcal{M}T}.
\end{aligned}$$

Aus der letzten Zeile der Matrixgleichung (A.68) folgt:

$$X_p + x_M^{\mathcal{M}}x^{\mathcal{M}T} = \lambda^{\mathcal{M}}H_U^{-1} - \frac{\lambda^{\mathcal{M}}}{\lambda^{\mathcal{M}}}x_M^{\mathcal{M}}x_M^{\mathcal{M}T}. \quad (\text{A.69})$$

Die linke Seite der Gleichung (A.69) entspricht genau der unter 3.3.4 auf Seite 60ff. hergeleiteten *Slutsky*-Matrix. Somit kann der *Hicks*sche Substitutionseffekt in zwei Komponenten aufgeteilt werden:

$$\mathcal{S}(p, M) = \begin{pmatrix} \mathcal{S}_{11} & \mathcal{S}_{12} & \cdots & \mathcal{S}_{1L} \\ \mathcal{S}_{21} & \mathcal{S}_{22} & \cdots & \mathcal{S}_{2L} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathcal{S}_{L1} & \mathcal{S}_{L2} & \cdots & \mathcal{S}_{LL} \end{pmatrix} = \lambda^{\mathcal{M}}H_U^{-1} - \frac{\lambda^{\mathcal{M}}}{\lambda^{\mathcal{M}}}x_M^{\mathcal{M}}x_M^{\mathcal{M}T} \quad (\text{A.70})$$

bzw.

$$\mathcal{S}_{ij} = \frac{\partial x_i^{\mathcal{M}}}{\partial p_j} + \frac{\partial x_i^{\mathcal{M}}}{\partial M} \cdot x_j^{\mathcal{M}}(p, M) = \lambda^{\mathcal{M}}H_{U_{ij}}^{-1} - \frac{\lambda^{\mathcal{M}}}{\frac{\partial \lambda^{\mathcal{M}}}{\partial M}} \frac{\partial x_i^{\mathcal{M}}}{\partial M} \frac{\partial x_j^{\mathcal{M}}}{\partial M}. \quad (\text{A.71})$$

Die linke Komponente³⁵ $\lambda^{\mathcal{M}}H_{U_{ij}}^{-1}$ wird als spezifischer und die rechte Komponente $-\frac{\lambda^{\mathcal{M}}}{\frac{\partial \lambda^{\mathcal{M}}}{\partial M}} \frac{\partial x_i^{\mathcal{M}}}{\partial M} \frac{\partial x_j^{\mathcal{M}}}{\partial M}$ als allgemeiner Substitutionseffekt bezeichnet.

Eine weitere Erkenntnis aus der Fundamentalen Matrixgleichung ist die folgende Eigenschaft der Inversen von $\begin{pmatrix} H_U(x^{\mathcal{M}}) & p \\ p^T & 0 \end{pmatrix}$ im Nutzenoptimum: Gemäß

³⁵ $H_{U_{ij}}^{-1}$ bezeichnet das Element i,j der Inversen der Hesse-Matrix der Nutzenfunktion.

der Gleichung (A.64) entspricht $\begin{pmatrix} H_U(x^{\mathcal{M}}) & p \\ p^T & 0 \end{pmatrix}^{-1}$

$$\frac{1}{p^T H_U^{-1} p} \begin{pmatrix} (p^T H_U^{-1} p) H_U^{-1} - H_U^{-1} p p^T H_U^{-1} & H_U^{-1} p \\ p^T H_U^{-1} & -1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.72})$$

bzw. unter Nutzung von (A.65)

$$\begin{pmatrix} H_U^{-1} - \lambda_M^{\mathcal{M}} (H_U^{-1} p p^T H_U^{-1}) & \lambda_M^{\mathcal{M}} H_U^{-1} p \\ \lambda_M^{\mathcal{M}} p^T H_U^{-1} & -\lambda_M^{\mathcal{M}} \end{pmatrix}. \quad (\text{A.73})$$

Wegen (A.66) folgt daraus

$$\begin{pmatrix} H_U^{-1} - \lambda_M^{\mathcal{M}} \left(\frac{x_M^{\mathcal{M}} x_M^{\mathcal{M}T}}{\lambda_M^{\mathcal{M}}} \right) & \lambda_M^{\mathcal{M}} \frac{x_M^{\mathcal{M}}}{\lambda_M^{\mathcal{M}}} \\ \lambda_M^{\mathcal{M}} \frac{x_M^{\mathcal{M}T}}{\lambda_M^{\mathcal{M}}} & -\lambda_M^{\mathcal{M}} \end{pmatrix} \quad (\text{A.74})$$

bzw.

$$\begin{pmatrix} H_U^{-1} - \frac{1}{\lambda_M^{\mathcal{M}}} x_M^{\mathcal{M}} x_M^{\mathcal{M}T} & x_M^{\mathcal{M}} \\ x_M^{\mathcal{M}T} & -\lambda_M^{\mathcal{M}} \end{pmatrix}. \quad (\text{A.75})$$

Abschließend wird (A.70) genutzt, um folgende Beziehung zu belegen:

$$\begin{pmatrix} H_U(x^{\mathcal{M}}) & p \\ p^T & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda^{\mathcal{M}}} \mathcal{S}(p, M) & x_M^{\mathcal{M}} \\ x_M^{\mathcal{M}T} & -\lambda_M^{\mathcal{M}} \end{pmatrix}. \quad (\text{A.76})$$

Aus der unter 3.3.5 auf Seite 66 beschriebenen Beziehung zwischen den Lagrange-multiplikatoren ($\frac{1}{\lambda^{\mathcal{M}}} = \lambda^{\mathcal{H}}$) folgt dann:

$$\begin{pmatrix} H_U(x^{\mathcal{M}}) & p \\ p^T & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda^{\mathcal{H}} \mathcal{S}(p, M) & x_M^{\mathcal{M}} \\ x_M^{\mathcal{M}T} & -\lambda_M^{\mathcal{M}} \end{pmatrix}. \quad (\text{A.77})$$

A.21 Krümmung von Subnutzenfunktionen bei blockadditiver Modellierung

Eine additive Aggregation der einzelnen Subnutzenfunktionen zur Gesamtnutzenfunktion schränkt die möglichen Krümmungseigenschaften der Subnutzenfunktionen ein. Dies soll hier an einem Beispiel verdeutlicht werden.³⁶ Die Gesamtnutzenfunktion $U(x)$ ist gemäß Annahme A4 streng quasikonkav. Somit alternieren die Vorzeichen der Hauptabschnitts-Determinanten der im Falle blockadditiver Modellierung blockdiagonalen geränderten Hesse-Matrix.³⁷ Eine solche beispielhafte

³⁶Die Argumentation folgt im Ansatz *Gahvari, F.* (1986, S. 185).

³⁷Siehe dazu A.11, S. 204ff.

geränderte Hesse-Matrix sei hier für den Dreigruppenfall $U^1(x_1, x_2, x_3)$, $U^2(x_4, x_5)$ und $U^3(x_6, \dots, x_L)$ dargestellt:

$$\bar{H}_U(x) = \begin{pmatrix} 0 & U_1 & U_2 & U_3 & U_4 & U_5 & U_6 & U_7 & \cdots & U_L \\ U_1 & U_{11} & U_{12} & U_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ U_2 & U_{21} & U_{22} & U_{23} & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ U_3 & U_{31} & U_{32} & U_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ U_4 & 0 & 0 & 0 & U_{44} & U_{45} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ U_5 & 0 & 0 & 0 & U_{54} & U_{55} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ U_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & U_{66} & U_{67} & \cdots & U_{6L} \\ U_7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & U_{76} & U_{77} & \cdots & U_{7L} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ U_L & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & U_{L6} & U_{L7} & \cdots & U_{LL} \end{pmatrix}.$$

Da auch die Subnutzenfunktionen die Annahme der strengen Quasikonkavität erfüllen, erübrigt sich die Prüfung der Hauptabschnitts-Determinanten in diesem Beispiel bis $k = 3$. Bei dieser Konstellation gilt für $k = 4$:

$$|\bar{H}_U^4(x)| = \begin{vmatrix} 0 & U_1 & U_2 & U_3 & U_4 \\ U_1 & U_{11} & U_{12} & U_{13} & 0 \\ U_2 & U_{21} & U_{22} & U_{23} & 0 \\ U_3 & U_{31} & U_{32} & U_{33} & 0 \\ U_4 & 0 & 0 & 0 & U_{44} \end{vmatrix} > 0. \quad (\text{A.78})$$

Unter Nutzung des Entwicklungssatzes von *Laplace*³⁸ folgt aus (A.78):

$$(-1)U_4U_4 \begin{vmatrix} U_{11} & U_{12} & U_{13} \\ U_{21} & U_{22} & U_{23} \\ U_{31} & U_{32} & U_{33} \end{vmatrix} + U_{44} \begin{vmatrix} 0 & U_1 & U_2 & U_3 \\ U_1 & U_{11} & U_{12} & U_{13} \\ U_2 & U_{21} & U_{22} & U_{23} \\ U_3 & U_{31} & U_{32} & U_{33} \end{vmatrix} > 0. \quad (\text{A.79})$$

Es wird nun angenommen, dass die Determinante

$$\begin{vmatrix} U_{11} & U_{12} & U_{13} \\ U_{21} & U_{22} & U_{23} \\ U_{31} & U_{32} & U_{33} \end{vmatrix} > 0 \quad (\text{A.80})$$

ist. Die Subnutzenfunktion $U^1(x)$ ist somit nicht konkav.³⁹ Daraus folgt

$$U_{44} < 0, \quad (\text{A.81})$$

da die Determinante:

$$\begin{vmatrix} 0 & U_1 & U_2 & U_3 \\ U_1 & U_{11} & U_{12} & U_{13} \\ U_2 & U_{21} & U_{22} & U_{23} \\ U_3 & U_{31} & U_{32} & U_{33} \end{vmatrix} < 0 \quad (\text{A.82})$$

³⁸Siehe dazu beispielsweise *Kneis, G.* (2000, S. 53f.).

³⁹Siehe dazu A.10 und A.11, S. 201ff. und 204ff.

wegen der strengen Quasikonkavität von $U^1(x)$ negativ ist.

Für die Determinante der geränderten Hesse-Matrix $k = 5$ folgt wiederum durch die verlangte strenge Quasikonkavität von $U(x)$:

$$|\bar{H}_U^5(x)| = \begin{vmatrix} 0 & U_1 & U_2 & U_3 & U_4 & U_5 \\ U_1 & U_{11} & U_{12} & U_{13} & 0 & 0 \\ U_2 & U_{21} & U_{22} & U_{23} & 0 & 0 \\ U_3 & U_{31} & U_{32} & U_{33} & 0 & 0 \\ U_4 & 0 & 0 & 0 & U_{44} & U_{45} \\ U_5 & 0 & 0 & 0 & U_{54} & U_{55} \end{vmatrix} < 0. \quad (\text{A.83})$$

Wird der *Laplacesche* Entwicklungssatz hier unter der Verwendung der 1. Spalte genutzt, so folgt nach einigen Vereinfachungen zunächst

$$\begin{aligned} 0 > |\bar{H}_U^5(x)| &= \\ &- U_1 \begin{vmatrix} U_1 & U_2 & U_3 \\ U_{21} & U_{22} & U_{23} \\ U_{31} & U_{32} & U_{33} \end{vmatrix} (U_{44}U_{55} - U_{54}U_{45}) \\ &+ U_2 \begin{vmatrix} U_1 & U_2 & U_3 \\ U_{11} & U_{12} & U_{13} \\ U_{31} & U_{32} & U_{33} \end{vmatrix} (U_{44}U_{55} - U_{54}U_{45}) \\ &- U_3 \begin{vmatrix} U_1 & U_2 & U_3 \\ U_{11} & U_{12} & U_{13} \\ U_{21} & U_{22} & U_{23} \end{vmatrix} (U_{44}U_{55} - U_{54}U_{45}) \\ &+ U_4 \begin{vmatrix} U_{11} & U_{12} & U_{13} \\ U_{21} & U_{22} & U_{23} \\ U_{31} & U_{32} & U_{33} \end{vmatrix} (-U_4U_{55} + U_{54}U_5) \\ &- U_5 \begin{vmatrix} U_{11} & U_{12} & U_{13} \\ U_{21} & U_{22} & U_{23} \\ U_{31} & U_{32} & U_{33} \end{vmatrix} (U_5U_{44} - U_{45}U_4). \end{aligned}$$

Wird bei den ersten drei Termen $(U_{44}U_{55} - U_{54}U_{45})$ und bei den letzten beiden die Determinante ausgeklammert, folgt nach Umformung:

$$-\frac{\begin{vmatrix} 0 & U_4 & U_5 \\ U_4 & U_{44} & U_{45} \\ U_5 & U_{54} & U_{55} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0 & U_1 & U_2 & U_3 \\ U_1 & U_{11} & U_{12} & U_{13} \\ U_2 & U_{21} & U_{22} & U_{23} \\ U_3 & U_{31} & U_{32} & U_{33} \end{vmatrix}} < \frac{\begin{vmatrix} U_{44} & U_{45} \\ U_{54} & U_{55} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} U_{11} & U_{12} & U_{13} \\ U_{21} & U_{22} & U_{23} \\ U_{31} & U_{32} & U_{33} \end{vmatrix}}. \quad (\text{A.84})$$

Die linke Seite der Ungleichung ist gemäß der strengen Quasikonkavitätsannahme positiv. Ist der Nenner auf der rechten Seite positiv, d.h. ist die Subnutzenfunktion $U^1(x)$ nicht konkav, muss der Zähler zwangsläufig auch positiv sein, um die Quasikonkavität der großen Nutzenfunktion $U(x)$ zu gewährleisten. Es folgt also bei Geltung der Annahme (A.80):

$$\begin{vmatrix} U_{44} & U_{45} \\ U_{54} & U_{55} \end{vmatrix} > 0. \quad (\text{A.85})$$

Aus (A.81) und (A.85) folgt aber gerade die Konkavität von $U^2(x)$. Somit kann maximal eine Subnutzenfunktion nicht konkav sein.

Eine blockadditive Modellierung verlangt daher, dass entweder alle Subnutzenfunktionen konkav sind oder genau eine Subnutzenfunktion nicht konkav ist.

A.22 Lagrangemultiplikator und Konkavität

Der Zusammenhang zwischen der Krümmung einer Nutzenfunktion und der Entwicklung des Lagrangemultiplikators bei Einkommensänderungen soll hier aufgezeigt werden. Hierzu wird das Gleichungssystem (A.86) der Bedingung erster Ordnung

$$\begin{aligned} \frac{\partial U(x_1, \dots, x_L)}{\partial x_1} - \lambda^M p_1 &= 0 \\ &\vdots \\ \frac{\partial U(x_1, \dots, x_L)}{\partial x_l} - \lambda^M p_l &= 0 \\ &\vdots \\ \frac{\partial U(x_1, \dots, x_L)}{\partial x_L} - \lambda^M p_L &= 0 \\ M - p_1 x_1 \cdots - p_L x_L &= 0 \end{aligned} \quad (\text{A.86})$$

implizit nach dem Einkommen M differenziert. Daraus folgt das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} U_{11} & \cdots & U_{1L} & -p_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ U_{L1} & \cdots & U_{LL} & -p_L \\ -p_1 & \cdots & -p_L & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial M} \\ \vdots \\ \frac{\partial x_L}{\partial M} \\ \frac{\partial \lambda^M}{\partial M} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.87})$$

und somit gemäß der *Cramerschen* Regel für $\frac{\partial \lambda^M}{\partial M}$:

$$\frac{\partial \lambda^M}{\partial M} = \frac{\begin{vmatrix} U_{11} & \cdots & U_{1L} & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ U_{L1} & \cdots & U_{LL} & 0 \\ -p_1 & \cdots & -p_L & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} U_{11} & \cdots & U_{1L} & -p_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ U_{L1} & \cdots & U_{LL} & -p_L \\ -p_1 & \cdots & -p_L & 0 \end{vmatrix}} = - \frac{\begin{vmatrix} U_{11} & \cdots & U_{1L} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ U_{L1} & \cdots & U_{LL} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} U_{11} & \cdots & U_{1L} & -p_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ U_{L1} & \cdots & U_{LL} & -p_L \\ -p_1 & \cdots & -p_L & 0 \end{vmatrix}}. \quad (\text{A.88})$$

Gemäß der Bedingung zweiter Ordnung der Lagrangemaximierung alterniert die Determinante der so genannten geränderten Hessematrix der Lagrangefunktion im Nenner des obigen Bruchs. Sie besitzt das von der Güterzahl abhängige Vorzeichen $(-1)^L$.⁴⁰ Da die Determinante der Hesse-Matrix der Nutzenfunktion im Zähler des Bruchs bei streng konkaven Funktionen genauso mit $(-1)^L$ alterniert, gilt für streng konkave Nutzenfunktionen $\frac{\partial \lambda^M}{\partial M} < 0$.⁴¹ Im Falle einer linearhomo-

genen Nutzenfunktion gilt $\frac{\partial \lambda^M}{\partial M} = \begin{vmatrix} U_{11} & \cdots & U_{1L} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ U_{L1} & \cdots & U_{LL} \end{vmatrix} = 0$.

A.23 Grenzwert der allgemeinen Funktion $P(p)$ im PES

Die allgemeinere Möglichkeit der PES $P(p)$ -Spezifikation (5.5) auf Seite 115 sei hier nochmals aufgeführt:

$$P(p) = \left(\sum_{i=1}^L \alpha_i^{\frac{-1}{\rho-1}} p_i^{\frac{\rho}{\rho-1}} \right)^{\frac{\rho-1}{\rho}} \quad \text{mit} \quad -\infty < \rho < 1. \quad (\text{A.89})$$

Der Grenzwert der Funktion $P(p)$ für $\rho \rightarrow 0$ kann durch die Betrachtung des Logarithmus der Funktion und die Anwendung der *L'Hôpital'schen* Regel wie folgt bestimmt werden:⁴²

$$\ln P(p) = \frac{\rho-1}{\rho} \ln \sum_{i=1}^L \alpha_i^{\frac{-1}{\rho-1}} p_i^{\frac{\rho}{\rho-1}} = (\rho-1) \frac{\ln \sum_{i=1}^L \alpha_i^{\frac{-1}{\rho-1}} p_i^{\frac{\rho}{\rho-1}}}{\rho}, \quad (\text{A.90})$$

⁴⁰Vgl. beispielsweise *Hoy, M.* u.a. (1996, S. 526) oder *Silberberg, E.* (1990, S. 175f.).

⁴¹Siehe dazu A.10 und A.11, S. 201ff. und 204ff.

⁴²Die *L'Hôpital'sche* Regel findet sich in zahlreichen Formelsammlungen. Vgl. beispielsweise *Berck, Strom, Sydsaeter* (1999, S. 22).

Bildung des Grenzwertes für $\rho \rightarrow 0$:

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \ln P(p) = \lim_{\rho \rightarrow 0} (\rho - 1) \frac{\ln \sum_{i=1}^L \alpha_i^{\frac{-1}{\rho-1}} p_i^{\frac{\rho}{\rho-1}}}{\rho} = (-1) \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\ln \sum_{i=1}^L \alpha_i^{\frac{-1}{\rho-1}} p_i^{\frac{\rho}{\rho-1}}}{\rho}. \quad (\text{A.91})$$

Für den Grenzwert des Bruches auf der rechten Seite von (A.91) wird jetzt die *L'Hôpital* Regel angewendet:

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \ln P(p) = - \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\ln \sum_{i=1}^L \alpha_i^{\frac{-1}{\rho-1}} p_i^{\frac{\rho}{\rho-1}}}{\rho} = - \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial}{\partial \rho} \ln \sum_{i=1}^L \alpha_i^{\frac{-1}{\rho-1}} p_i^{\frac{\rho}{\rho-1}}}{\frac{d}{d\rho} \rho} \quad (\text{A.92})$$

bzw.

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \ln P(p) = - \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial \rho} \ln \sum_{i=1}^L \alpha_i^{\frac{-1}{\rho-1}} p_i^{\frac{\rho}{\rho-1}} = - \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial}{\partial \rho} \sum_{i=1}^L \alpha_i^{\frac{-1}{\rho-1}} p_i^{\frac{\rho}{\rho-1}}}{\sum_{i=1}^L \alpha_i^{\frac{-1}{\rho-1}} p_i^{\frac{\rho}{\rho-1}}}. \quad (\text{A.93})$$

Für den Nenner auf der rechten Seite von (A.93) folgt für $\rho \rightarrow 0$:

$$\sum_{i=1}^L \alpha_i^{\frac{-1}{\rho-1}} p_i^{\frac{\rho}{\rho-1}} \longrightarrow \sum_{i=1}^L \alpha_i.$$

Unter Anwendung der Produktregel folgt für den Zähler auf der rechten Seite von (A.93):

$$-\frac{\partial}{\partial \rho} \sum_{i=1}^L \alpha_i^{\frac{-1}{\rho-1}} p_i^{\frac{\rho}{\rho-1}} = - \sum_{i=1}^L \left(\frac{\alpha_i^{\frac{-1}{\rho-1}} p_i^{\frac{\rho}{\rho-1}} \ln \alpha_i}{(\rho-1)^2} - \frac{\alpha_i^{\frac{-1}{\rho-1}} p_i^{\frac{\rho}{\rho-1}} \ln p_i}{(\rho-1)^2} \right)$$

und somit für $\rho \rightarrow 0$

$$- \sum_{i=1}^L \left(\frac{\alpha_i^{\frac{-1}{\rho-1}} p_i^{\frac{\rho}{\rho-1}} \ln \alpha_i}{(\rho-1)^2} - \frac{\alpha_i^{\frac{-1}{\rho-1}} p_i^{\frac{\rho}{\rho-1}} \ln p_i}{(\rho-1)^2} \right) \longrightarrow \sum_{i=1}^L (\alpha_i \ln p_i - \alpha_i \ln \alpha_i).$$

Der Grenzwert der logarithmierten Funktion $P(p)$ entspricht somit

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \ln P(p) = \frac{\sum_{i=1}^L \alpha_i \ln p_i - \alpha_i \ln \alpha_i}{\sum_{i=1}^L \alpha_i} = \frac{\sum_{i=1}^L \ln \left(\frac{p_i^{\alpha_i}}{\alpha_i^{\alpha_i}} \right)}{\sum_{i=1}^L \alpha_i} = \frac{\ln \prod_{i=1}^L \left(\frac{p_i^{\alpha_i}}{\alpha_i^{\alpha_i}} \right)}{\sum_{i=1}^L \alpha_i}. \quad (\text{A.94})$$

Wegen der Annahme $\sum_{i=1}^L \alpha_i = 1$ folgt der Grenzwert der Funktion $P(p)$ für $\rho \rightarrow 0$ mit

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} P(p) = \prod_{i=1}^L \frac{p_i^{\alpha_i}}{\alpha_i^{\alpha_i}} = \prod_{i=1}^L \frac{1}{\alpha_i^{\alpha_i}} \prod_{i=1}^L p_i^{\alpha_i} = C \prod_{i=1}^L p_i^{\alpha_i}, \quad (\text{A.95})$$

welcher bis auf die Konstante $C = \prod_{i=1}^L \frac{1}{\alpha_i}$ mit der Gleichung (5.2) auf Seite 114 übereinstimmt.⁴³ Q.E.D.

A.24 Cobb-Douglas- und CES-Nutzenfunktion

Die *Cobb-Douglas*-Nutzenfunktion ist ein Spezialfall der CES-Nutzenfunktion für $\rho \rightarrow 0$, was sich wie folgt zeigen lässt:

Analog zum Nachweis unter A.23 wird der Grenzwert der logarithmierten CES-Nutzenfunktion gebildet:

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \ln U(x) = \lim_{\rho \rightarrow 0} \ln \left(\left[\sum_{i=1}^L \alpha_i x_i^\rho \right]^{\frac{1}{\rho}} \right) = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\ln \sum_{i=1}^L \alpha_i x_i^\rho}{\rho}. \quad (\text{A.96})$$

Für den Grenzwert des Bruches auf der rechten Seite von (A.96) wird wiederum die *L'Hôpital* Regel angewendet:⁴⁴

$$\begin{aligned} \lim_{\rho \rightarrow 0} \ln U(x) &= \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial}{\partial \rho} \ln \sum_{i=1}^L \alpha_i x_i^\rho}{\frac{d}{d\rho} \rho} \\ &= \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial \rho} \ln \sum_{i=1}^L \alpha_i x_i^\rho \\ &= \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial}{\partial \rho} \sum_{i=1}^L \alpha_i x_i^\rho}{\sum_{i=1}^L \alpha_i x_i^\rho} \\ &= \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\sum_{i=1}^L \alpha_i x_i^\rho \ln x_i}{\sum_{i=1}^L \alpha_i x_i^\rho} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^L \alpha_i \ln x_i}{\sum_{i=1}^L \alpha_i} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^L \ln x_i^{\alpha_i}}{\sum_{i=1}^L \alpha_i} \\ &= \frac{\ln \prod_{i=1}^L x_i^{\alpha_i}}{\sum_{i=1}^L \alpha_i} \\ &= \ln \left[\left(\prod_{i=1}^L x_i^{\alpha_i} \right)^{\frac{1}{\sum_{j=1}^L \alpha_j}} \right] \end{aligned} \quad (\text{A.97})$$

⁴³Die Konstante kann vernachlässigt werden, da sie im Nachfragesystem des PES wegfällt. Vgl. Gleichung (5.1), S. 114, mit $x_i^M = \frac{C \frac{\partial P(p)}{\partial p_i}}{CP(p)} \cdot M$.

⁴⁴Siehe Fußnote 42.

$$= \ln \prod_{i=1}^L x_i^{\frac{\alpha_i}{\sum_{j=1}^L \alpha_j}}.$$

Der Grenzwert der Funktion CES-Nutzenfunktion

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} U(x) = \prod_{i=1}^L x_i^{\frac{\alpha_i}{\sum_{j=1}^L \alpha_j}}$$

entspricht somit für $\rho \rightarrow 0$ der *Cobb-Douglas*-Nutzenfunktion. Q.E.D.

Literaturverzeichnis

- [1] Anderson, R.W. (1979): *Perfect price aggregation and empirical demand analysis* in: *Econometrica*, vol. 47/5, S. 1209-1230.
- [2] Anton, S. / Brehe, M. / Petersen H.-G. (2002): *Das Konzept der Einfachsteuer im empirischen Test* in: *Reform der Einkommensbesteuerung in Deutschland*, S. 42-121, hrsg. v. Rose, M., Verlag Recht und Wirtschaft, Heidelberg.
- [3] Arrow, K.J. / Chenery, H.B. / Minhas, B.S. / Solow, R.M. (1961): *Capital-Labor Substitution and Economic Efficiency* in: *The Review of Economics and Statistics*, vol. 43/3, S. 225-250.
- [4] Atkinson, A.B. / Stern, N. / Gomulka, J. (1980): *On the switch from direct to indirect taxation* in: *Journal of Public Economics*, vol. 14, S. 195-224.
- [5] Bach, S. / Bartholmai, B. (2000): *Möglichkeiten zur Modellierung hoher Einkommen auf Grundlage der Einkommensteuerstatistik*, DIW-Diskussionspapier Nr. 212, Berlin.
- [6] Banks, J. / Blundell, R. / Lewbel, A. (1997): *Quadratic Engel Curves and Consumer Demand* in: *The Review of Economics and Statistics*, vol. 79/4, S. 527-539.
- [7] Barnes, R. / Gillingham, R. (1984): *Demographic Effects in Demand Analysis: Estimation of the Quadratic Expenditure System Using Microdata* in: *The Review of Economics and Statistics*, vol. 66/4, S. 591-601.
- [8] Barten, A.P. (1964): *Family Composition, Prices and Expenditure Patterns* in: *Econometric Analysis for National Economic Planning: 16th Symposium of the Colston Society*, S. 277-292, hrsg. v. Hart, P. / Mills, G. / Whitaker, J. K., Butterworth, London.
- [9] Barten, A.P. (1969): *Maximum Likelihood estimation of a complete system of demand equations* in: *European Economic Review*, vol. 1 (Fall 1969), S. 7-73.

- [10] Barten, A.P. / Böhm, V. (1982): *Consumer Theory* in: Handbook of Mathematical Economics, vol. II, S. 381-427, hrsg. v. Arrow, K.J. / Intriligator, M.D., North-Holland, Amsterdam.
- [11] Becker, I. / Frick, J.R. / Grabka, M.M. / Hauser, R. / Kruse, P. / Wagner, G.G. (2002): *A Comparison of the Main Household Income Surveys for Germany: EVS and SOEP* in: Reporting on Income Distribution and Poverty. Perspectives from a German and an European Point of View, S. 55-90, hrsg. v. Becker, I. / Hauser, R., Springer-Verlag, Heidelberg.
- [12] Berck, P. / Strom, A. / Sydsaeter, K. (1999): *Economists Mathematical Manual*, Springer, Berlin.
- [13] Birkhoff, G. (1948): *Lattice Theory*, American Mathematical Society, New York.
- [14] Bishop, R.L. (1943): *Consumer's Surplus and Cardinal Utility* in: The Quarterly Journal of Economics, vol. 57/3, S. 421-449.
- [15] Bizer, J. (1992): *Forschungsfreiheit und informationelle Selbstbestimmung: gesetzliche Forschungsregelungen zwischen grundrechtlicher Förderungspflicht und grundrechtlichem Abwehrrecht*, Nomos, Baden-Baden.
- [16] Blackorby, C. / Lady, G. / Nissen, D. / Russell R.R. (1970): *Homothetic Separability and Consumer Budgeting* in: Econometrica, vol. 38/3, S. 468-472.
- [17] Blackorby, C. / Primont, D. / Russell R.R. (1978): *Duality, Separability and Functional Structure: Theory and Economic Applications*, North-Holland, New York.
- [18] Blackorby, C. / Russell R.R. (1997): *Two-stage budgeting: An extension of Gormans theorem* in: Economic Theory, vol. 9/1, S. 185-193.
- [19] Blackorby, C. / Primont, D. / Russell R.R. (1998): *Separability: A Survey* in: Handbook of utility theory, Volume 1 Principles, hrsg. v. Barbera, S. u.a., Kluwer Academic Publishers, Dordrecht u.a.
- [20] Blien, U. (2003): *Die Re-Identifikationsproblematik bei wirtschaftlichen Einzeldaten* in: Anonymisierung wirtschaftsstatistischer Einzeldaten, S. 60-68, hrsg. v. Statistisches Bundesamt, Schriftenreihe Forum der Bundesstatistik, Band 42, Wiesbaden.
- [21] Bliss, C.J. (1975): *Capital Theory and the Distribution of Income*, American Elsevier, New York.

- [22] Blundell, R. (1988): *Consumer Behaviour: Theory and Empirical Evidence* in: *Economic Journal*, vol. 98/389, S. 16-65.
- [23] Blundell, R. / Ray, R. (1984): *Testing for Linear Engel Curves and Additively Separable Preferences Using a New Flexible Demand System* in: *Economic Journal*, vol. 94/376, S. 800-811.
- [24] Blundell, R. / Walker, I. (1984): *A Household Production Specification of Demographic Variables in Demand Analysis* in: *Economic Journal*, vol. 94, Supplement: Conference Papers., S. 59-68.
- [25] Bollino, C.A. / Perali, F. / Rossi, N. (2000): *Linear Household Technologies*, in: *Journal of Applied Econometrics*, vol. 15/3, S. 275-287.
- [26] Bork, C. / Petersen, H.-G. (1997): *Ein Vergleich möglicher Datensätze zur Eignung für steuerpolitische Simulationsrechnungen*, Finanzwissenschaftliche Diskussionsbeiträge der Universität Potsdam Nr. 20, Potsdam.
- [27] Bork, C. (2000): *Steuer, Transfers und private Haushalte*, Peter Lang, Frankfurt a.M.
- [28] Brunner J.K. / Petersen, H.-G. (1990): *Introduction* in: *Simulation Models in Tax and Transfer Policy*, S. 11-18, hrsg. v. Brunner J.K. / Petersen, H.-G., Campus, Frankfurt a.M., New York.
- [29] Bundesministerium für Arbeit und Sozialordnung (2001): *Lebenslagen in Deutschland - Daten und Fakten - Materialband zum ersten Armuts- und Reichtumsbericht der Bundesregierung* in: Bundesdrucksachen Nr. 14/5990, Bonn.
- [30] Burk (Bergson), A. (1936): *Real Income, Expenditure Proportionality, and Frisch's „New Methods of Measuring Marginal Utility“* in: *The Review of Economic Studies*, vol. 4/1, S. 33-52.
- [31] Cragg, J.G. (1971): *Some Statistical Models for Limited Dependent Variables with Application to the Demand for Durable Goods* in: *Econometrica*, vol. 39/5, S. 829-844.
- [32] Creedy, J. / Duncan, A. (2002): *Behavioural Microsimulation with Labour Supply Responses* in: *Journal of economic surveys*, vol. 16, S. 1-39.
- [33] Creedy, J. / Duncan, A.S. / Harris, M. / Scutella R. (2002): *Microsimulation Modelling of Taxation and the Labour Market - The Melbourne Institute Tax and Transfer Simulator*, Edward Elgar, Cheltenham / Northampton.
- [34] Deaton, A. (1974): *A reconsideration of the empirical implications of additive preferences* in: *Economic Journal*, vol. 84/334, S. 338-348.

- [35] Deaton, A. (1975): *The measurement of income and price elasticities* in: European Economic Review, vol. 6/3, S. 261-273.
- [36] Deaton A. (1986): *Demand analysis* in: Handbook of econometrics, Volume 3, Kapitel 30, S. 1768-1839, hrsg. v. Griliches, Z. / Intriligator, M.D., North-Holland, Amsterdam.
- [37] Deaton, A. / Irish, M. (1984): *Statistical Models for Zero Expenditures in Household Budgets* in: Journal of Public Economics, vol. 23, S. 59-80.
- [38] Deaton, A. / Muellbauer, J. (1980): *An Almost Ideal Demand System* in: The American Economic Review, vol. 70/3, S. 312-326.
- [39] Deaton, A. / Muellbauer, J. (1980): *Economics of Consumer Behavior*, Cambridge University Press, Cambridge.
- [40] de Lathouwer, L. (1996): *Microsimulation in Comparative Social Policy Analysis: A Case-Study of Unemployment Schemes for Belgium and The Netherlands* in: Microsimulation and Public Policy, S. 69-91, hrsg. v. Harding, A., North-Holland, Amsterdam.
- [41] Deutsches Institut für Wirtschaftsforschung (2006): *Übersicht über das SOEP*, <http://www.diw.de/deutsch/sop/uebersicht/index.html>, Berlin.
- [42] Dooley, P. C. (1983): *Consumer's Surplus: Marshall and His Critics* in: The Canadian Journal of Economics, vol. 16/1, S. 26-38.
- [43] Dupuit J. (1969[1844]): *On the measurement of the utility of public works* in: Readings in Welfare Economics, S. 255-283, hrsg. v. Arrow, K.J. / Scitovsky T., Allen & Unwin, London.
- [44] Engelhard, M. / Schmidt, K. / Winkler, R. (1997): *Mikrodaten - Bundesrepublik Deutschland. Mikrozensus 1995 - Dokumentation und Datenaufbereitung*, ZUMA-Technischer Bericht 97/20, Mannheim.
- [45] Frick, J.R. (2005): *Introduction to the German Socio-Economic Panel*, <http://www.diw.de/gsoep>, Berlin.
- [46] Frick, J.R. / Grabka, M.M. (2003): *Missing Income Data in the German SOEP: Incidence, Imputation and its Impact on the Income distribution*, DIW-Diskussionspapier Nr. 376, Berlin.
- [47] Frisch, R. (1932): *New Methods of measuring marginal utility*, Mohr, Tübingen.
- [48] Frisch, R. (1959): *A complete scheme for computing all direct and cross demand elasticities in a model with many sectors* in: Econometrica, vol. 27/2, S. 177-196.

- [49] Fry, V. / Pashardes P. (1994): *Abstention and Aggregation in Consumer Demand: Zero Tobacco Expenditures* in: Oxford Economic Papers, New Series, vol. 46/3, S. 502-518.
- [50] Gahvari, F. (1986): *A note on additivity and diminishing marginal utility* in: Oxford Economic Papers, New Series, vol. 38/1, S. 185-186.
- [51] Galler, H.P. (1986): *Comment zu Views on Microanalytic Simulation Modeling* in: Microanalytic Simulation Models to Support Social and Financial Policy, S. 27-29, hrsg. v. Orcutt, G.H. / Merz, J. / Quinke, H., North-Holland, Amsterdam.
- [52] Galler, H.P. (1990): *Microsimulation of Tax-Transfer Systems* in: Simulation Models in Tax and Transfer Policy, S. 279-299, hrsg. v. Brunner J.K. / Petersen, H.-G., Campus, Frankfurt a.M., New York.
- [53] Galler, H.P. (1994): *Politikanalyse mit Mikrosimulationsmodellen - die Frankfurter Modelle* in: Mikroanalytische Grundlagen der Gesellschaftspolitik, Band 1, S. 113-135, hrsg. v. Hauser R. / Hochmuth, U. / Schwarze, J., Akademie-Verlag, Berlin.
- [54] Geary, R.C. (1950): *A Note on "A Constant-Utility Index of the Cost of Living"* in: The Review of Economic Studies, vol. 18/1, S. 65-66.
- [55] Goldman, S.M. / Uzawa, H. (1964): *A note on separability in demand analysis* in: Econometrica, vol. 32/3, S. 387-398.
- [56] Gorman, W.M. (1959): *Seperable utility and aggregation* in: Econometrica, vol. 27/3, S. 469-481.
- [57] Gorman, W.M. (1965): *Consumer Budgets and Price Indices* in: Collected Works of W.M. Gorman (1995), Volume 1, S. 64-87, hrsg. v. C. Blackorby und A. F. Shorrocks, Clarendon Press, Oxford.
- [58] Gorman, W.M. (1970a): *Two-stage budgeting* in: Collected Works of W.M. Gorman (1995), Volume 1, S. 22-29, hrsg. v. C. Blackorby und A. F. Shorrocks, Clarendon Press, Oxford.
- [59] Gorman, W.M. (1970b): *The Concavity of Additive Utility Fuctions* in: Collected Works of W.M. Gorman (1995), Volume 1, S. 128-135, hrsg. v. C. Blackorby und A. F. Shorrocks, Clarendon Press, Oxford.
- [60] Gorman, W.M. (1976): *Tricks with utility functions* in: Essays in Economic Analysis, S. 211-243, hrsg. v. M. J. Artis und A. R. Nobay, Cambridge University Press, Cambridge.

- [61] Gorman, W.M. (1981): *Some Engel curves* in: The theory and measurement of consumer behaviour - in honour of Sir Richard Stone, S. 7-29, hrsg. A. Deaton, Cambridge University Press, Cambridge.
- [62] Gottschalk, S. (2002): *Anonymisierung von Unternehmensdaten - Ein Überblick und beispielhafte Darstellung anhand des Mannheimer Innovationspanels* in: ZEW: Discussion Paper No.02-23, Mannheim.
- [63] Green, W.H. (2003): *Econometric Analysis*, Pearson Education, Upper Saddle River.
- [64] Hansen, G. (1993): *Quantitative Wirtschaftsforschung*, Vahlen, München.
- [65] Harding, A. (1993): *Lifetime Income Distribution and Redistribution - Applications of a Microsimulation Model*, North-Holland, Amsterdam.
- [66] Harding, A. (2000): *Dynamic Microsimulation: Recent Trends and Future Prospects* in: Microsimulation in Government Policy and Forecasting, S. 29-38, hrsg. v. Gupta, A. / Kapur, V., North-Holland, Amsterdam.
- [67] Harding, A. / Landt, J. / Percival, R. / Sadkowsky, K. (1994): *Reweighting a base population for a microsimulation model* Discussion Paper No. 3, National Centre for Social and Economic Modelling, Faculty of Management, University of Canberra.
- [68] Hausman, J.A. (1981): *Exact Consumer's Surplus and Deadweight Loss* in: The American Economic Review, vol. 71/4, S. 662-676.
- [69] Heckman, J.J. (1976): *The Common Structure of Statistical Models of Truncation, Sample Selection and Limited Dependent Variables and a Simple Estimator for Such Models* in: Annals of Economic and Social Measurement, vol. 5, S. 475-492.
- [70] Heckman, J.J. (1979): *Sample Selection Bias as a Specification Error* in: Econometrica, vol. 47/1, S. 153-62.
- [71] Henderson, A. (1941): *Consumer's Surplus and the Compensating Variation* in: The Review of Economic Studies, vol. 8/2 (Feb.), S. 117-121.
- [72] Heuser, H. (1991): *Lehrbuch der Analysis, Teil 2*, Teubner, Stuttgart.
- [73] Hicks, J. R. (1938): *value and capital*, Oxford University Press, New York.
- [74] Hicks, J. R. (1941): *The Rehabilitation of Consumer's Surplus* in: The Review of Economic Studies, vol. 8/2 (Feb.), S. 108-116.
- [75] Hicks, J. R. (1943): *The Four Consumer's Surpluses* in: The Review of Economic Studies, vol. 11/1 (Winter), S. 31-41.

- [76] Hicks, J. R. (1956): *A revision of demand theory*, Oxford University Press, Oxford.
- [77] Hoschka, P. (1986): *Requisite Research on Methods and Tools for Microanalytic Simulation Models* in: *Microanalytic Simulation Models to Support Social and Financial Policy*, S. 45-54, hrsg. v. Orcutt, G.H. / Merz, J. / Quinke, H., North-Holland, Amsterdam.
- [78] Houthakker, H.S. (1960): *Additive Preferences* in: *Econometrica*, vol. 28/2, S. 244-257.
- [79] Howe, H. (1975): *Development of the extended linear expenditure system from simple saving assumptions* in: *European Economic Review*, vol. 6, S. 305-310.
- [80] Howe, H. / Pollak, R.A. / Wales, T.J. (1979): *Theory and Time Series Estimation of the Quadratic Expenditure System* in: *Econometrica*, vol. 47/5, S. 1231-1248.
- [81] Hoy, M. u.a. (1996): *Mathematics for Economics*, Addison-Wesley, Don Mills.
- [82] Illgen, M. / Münnich, M. (2000): *Einkommen und Einnahmen privater Haushalte in Deutschland* in: *Wirtschaft und Statistik 2/2000*, S. 125-137, hrsg. v. Statistisches Bundesamt, Wiesbaden.
- [83] Kaiser, H. (1990): *Konsumnachfrage, Arbeitsangebot und optimale Haushaltsbesteuerung*, Peter Lang, Frankfurt a.M.
- [84] Kaiser, H. / van Essen, U. / Spahn P.B. (1994): *Allokationswirkungen der deutschen Einkommensteuer* in: *Mikroanalytische Grundlagen der Gesellschaftspolitik*, Band 1, S. 152-175, hrsg. v. Hauser R. / Hochmuth, U. / Schwarze, J., Akademie-Verlag, Berlin.
- [85] Kassella, T. (1994): *Ein Verknüpfungsalgorithmus zur Zusammenführung von Steuerprozeßdaten und Umfragedaten* in: *Mikroanalytische Grundlagen der Gesellschaftspolitik*, Band 2, S. 153-178, hrsg. v. Hauser R. / Ott, N. / Wagner, G., Akademie-Verlag, Berlin.
- [86] Keen, M. (1986): *Zero Expenditures and the Estimation of Engel Curves* in: *Journal of Applied Econometrics*, vol. 1, S. 277-286.
- [87] Khuri, A.I. (1993): *Advanced Calculus with Applications in Statistics*, John Wiley & Sons, New York.
- [88] Klein, L.R. / Rubin, H. (1947): *A Constant-Utility Index of the Cost of Living* in: *The Review of Economic Studies*, vol. 15/2, S. 84-87.

- [89] Kneis, G. (2000): *Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler*, Oldenbourg, München.
- [90] Kneis, G. / Schöler, K. (2003): *Zur Begründung der linearen Nachfragefunktionen in der Haushaltstheorie* in: Jahrbücher f. Nationalökonomie u. Statistik, vol. 223/5, S. 571-580.
- [91] Kohn, K. / Missong, M. (2003): *Estimation of Quadratic Expenditure Systems Using German Household Budget Data* in: Jahrbücher für Nationalökonomie und Statistik, Bd. 222, S. 422-448.
- [92] Kortmann, K. (1982): *Verknüpfung und Ableitung personen- und haushaltsbezogener Mikrodaten*, Campus, Frankfurt a.M., New York.
- [93] Kortmann, K. / Krupp, H.-J. (1977): *Verknüpfung und Generierung von Mikrodaten* in: Die Analyse prozeß-produzierter Daten, S. 109-139, hrsg. v. Müller, P.J., Klett-Cotta, Stuttgart.
- [94] Krug, W. / Nourney, M. / Schmidt, J. (2001): *Wirtschafts- und Sozialstatistik - Gewinnung von Daten*, Oldenbourg, München.
- [95] Krupp, H.-J. (1986): *Potential and Limitations of Microsimulation Models* in: Microanalytic Simulation Models to Support Social and Financial Policy, S. 31-41, hrsg. v. Orcutt, G.H. / Merz, J. / Quinke, H., North-Holland, Amsterdam.
- [96] Kühnen, C. (1999): *Das Stichprobenverfahren der Einkommens- und Verbrauchsstichprobe 1998* in: Wirtschaft und Statistik 2/1999, S. 111-115, hrsg. v. Statistisches Bundesamt, Wiesbaden.
- [97] Kühnen, C. (2001): *Das Stichprobenverfahren der Einkommens- und Verbrauchsstichprobe 1998*, Statistisches Bundesamt, Methodenberichte, Heft 1/2001, Wiesbaden.
- [98] Lee, L. / Pitt, M.M. (1986): *Microeconomic demand systems with binding nonnegativity constraints: The dual approach* in: Econometrica, vol. 54/5, S. 1237-1242.
- [99] Leontief, W. (1936): *composite commodities and the problem of index numbers* in: Econometrica, vol. 4/1, S. 39-59.
- [100] Lewbel, A. (1985): *A Unified Approach to Incorporating Demographic or Other Effects into Demand Systems* in: Review of Economic Studies, vol. 52/1, S. 1-18.
- [101] Lewbel, A. (1987): *Characterizing Some Gorman Engel Curves* in: Econometrica, vol. 55/6, S. 1451-1459.

- [102] Lewbel, A. (1990): *Full Rank Demand Systems* in: International Economic Review, vol. 31/2, S. 289-300.
- [103] Lewbel, A. (1991): *The Rank of Demand Systems: Theory and Nonparametric Estimation* in: Econometrica, vol. 59/3, S. 711-730.
- [104] Lewbel, A. (1996): *Aggregation Without Separability: A Generalized Composite Commodity Theorem* in: The American Economic Review, vol. 86/3, S. 524-542.
- [105] Lewbel, A. (1997): *Consumer Demand Systems and Household Equivalence Scales* in: Handbook of applied econometrics, Vol. II: Microeconomics, S. 167-201, hrsg. v. Pesaran, M.H. / Schmidt, P., Blackwell Publishers Ltd., Oxford.
- [106] Lewbel, A. (2003): *A rational rank four demand system* in: Journal of Applied Econometrics, vol. 18/2, S. 127-135.
- [107] Lewis, G.H. / Michel, R.C. (1990): *Introduction and Overview: Issues and Problems in Microsimulation Modeling* in: Microsimulation Techniques for Tax and Transfer Analysis, S. 1-31, hrsg. v. Lewis, G.H. / Michel, R., The Urban Institute Press, Washington D.C.
- [108] Lluch, C. (1973): *The extended linear expenditure system* in: European Economic Review, vol. 4, S. 21-32.
- [109] Lüttinger, P. / Schimpl-Neimanns, B. / Wirth, H. / Papastefanou, G. (2003): *Mikrodaten (German Microdata Lab): Das Servicezentrum für amtliche Mikrodaten bei ZUMA* in: ZUMA-Nachrichten 52, Jg. 27, S. 153-172.
- [110] Lyssiotou, P. / Pashardes, P. / Stengos, T. (2002): *Age Effects on Consumer Demand: An Additive Partially Linear Regression Model* in: The Canadian Journal of Economics, vol. 35/1, S. 153-165.
- [111] Marshall, A. (1956): *Principles of Economics* 8th Edition, (1920), 10th reprinted, Macmillan Co., London.
- [112] Mas-Colell, A. / Whinston, M.D. / Green, J.R. (1995): *Microeconomic Theory*, Oxford University Press, New York.
- [113] Merz, J. (1983): *FELES: The Functionalized Extended Linear Expenditure System* in: European Economic Review, vol. 23, S. 359-394.
- [114] Merz, J. (1983): *Die konsistente Hochrechnung von Mikrodaten nach dem Prinzip des minimalen Informationsverlustes* in: Allgemeines Statistisches Archiv Bd. 67, S. 342-366, hrsg. v. Rinne, H., Berlin.

- [115] Merz, J. (1986): *Structural Adjustment in Static and Dynamic Microsimulation Models* in: *Microanalytic Simulation Models to Support Social and Financial Policy*, S. 423-446, hrsg. v. Orcutt, G.H. / Merz, J. / Quinke, H., North-Holland, Amsterdam.
- [116] Missong, M. (2004): *Demographisch gegliederte Nachfragesysteme und Äquivalenzskalen für Deutschland*, Duncker & Humblot, Berlin.
- [117] Morey, E.R. (1984): *Confuser [sic!] Surplus* in: *The American Economic Review*, vol. 74/1, S. 163-173.
- [118] Muellbauer, J. (1975): *Aggregation, Income Distribution and Consumer Demand* in: *The Review of Economic Studies*, vol. 42/4, S. 525-543.
- [119] Nicol, C.J. (2001): *The Rank and Model Specification of Demand Systems: An Empirical Analysis Using United States Microdata* in: *The Canadian Journal of Economics*, vol. 34/1, S. 259-289.
- [120] Orcutt, G.H. (1960): *Simulation of Economic Systems* in: *The American Economic Review*, vol. 50/5, S. 893-907.
- [121] Paaß, G. (1979): *Theoretische Überlegungen zur Bewertung und Konstruktion statistischer Matchverfahren*, Interner Bericht: IPES.79.210, GMD-IPES, St. Augustin.
- [122] Paaß, G. (1982): *Statistical Match with Additional Information*, Interner Bericht: IPES.82.0204, GMD-IPES, St. Augustin.
- [123] Paaß, G. / Wauschkuhn, U. (1980): *Experimentelle Erprobung und Vergleichende Bewertung Statistischer Matchverfahren*, Interner Bericht: IPES.80.201, GMD-IPES, St. Augustin.
- [124] Pearce, I.F. (1961): *An exact method of consumer demand analysis* in: *Econometrica*, vol. 29/4, S. 499-516.
- [125] Petersen, H.-G. (1992): *Simulationsmodelle für die Steuer- und Sozialpolitik: Entwicklung und gegenwärtiger Stand* in: *Wirkungsanalyse alternativer Steuer- und Transfersysteme*, S. 13-22, hrsg. v. Petersen, H.-G. / Hüther, M. / Müller, K. , Campus, Frankfurt a.M., New York.
- [126] Petersen, H.-G. (1993): *Finanzwissenschaft I*, 3. Aufl., Kohlhammer, Stuttgart.
- [127] Petersen, H.-G. / Müller, K. (1999): *Volkswirtschaftspolitik*, Vahlen, München.

- [128] Phaneuf, D.J. / Kling, C.L. / Herriges, J.A. (2000): *Estimation and Welfare Calculations in a Generalized Corner Solution Model with an Application to Recreation Demand* in: *The Review of Economics and Statistics*, vol. 82/1, S. 83-92.
- [129] Phlips, L. (1983): *Applied consumption in analysis*, 2.Aufl., Elsevier Science Publishers, Amsterdam.
- [130] Pigou, A.C. (1910): *A method of determining the numerical value of elasticities of demand* in: *Economic Journal*, vol. 20/80, S. 636-640.
- [131] Pollak, R.A. (1971): *Additive Utility Functions and Linear Engel Curves* in: *The Review of Economic Studies*, vol. 38/4, S. 401-414.
- [132] Pollak, R.A. / Wales, T.J. (1978): *Estimation of Complete Demand Systems from Household Budget Data: The Linear and Quadratic Expenditure Systems* in: *The American Economic Review*, vol. 68/3, S. 348-359.
- [133] Pollak, R.A. / Wales, T.J. (1980): *Comparison of the Quadratic Expenditure System and Translog Demand Systems with Alternative Specifications of Demographic Effects* in: *Econometrica*, vol. 48/3, S. 595-612.
- [134] Pollak, R.A. / Wales, T.J. (1981): *Demographic Variables in Demand Analysis* in: *Econometrica*, vol. 49/6, S. 1533-1551.
- [135] Pollak, R.A. / Wales, T.J. (1992): *Demand system specification and estimation*, Oxford University Press, New York.
- [136] Rodgers, W.L. (1984): *An Evaluation of Statistical Matching* in: *Journal of Business & Economic Statistics*, vol. 2, S. 91-102.
- [137] Ronning, G. (1988): *Möglichkeiten und Grenzen der ökonometrischen Nachfrageanalyse* in: *Wirtschaftswissenschaftliches Studium* 17, S. 65-72.
- [138] Ronning, G. (1991): *Mikroökonomie*, Springer-Verlag, Berlin u.a.
- [139] Ronning, G. (1992): *Share equations in econometrics: A story of repression, frustration and dead ends* in: *Statistical Papers*, vol. 33, S. 307-334.
- [140] Ruggles, R. / Ruggles, N.D. (1970): *Macroaccounts and Microdata Sets* in: *Macro- and Microdata Analyses and their Intergration*, S. 314-324, hrsg. v. Ruggles, R. / Ruggles N.D., Edward Edgar, Cheltenham / Northampton.
- [141] Ruggles, R. / Ruggles, N.D. (1974): *A Strategy for Merging and Matching Microdata Sets* in: *Macro- and Microdata Analyses and their Intergration*, S. 192-213, hrsg. v. Ruggles, R. / Ruggles N.D., Edward Elgar, Cheltenham / Northampton.

- [142] Ruggles, R. / Ruggles, N.D. / Wolff, E.N. (1977): *Merging Microdata: Rationale, Practice and Testing* in: Macro- and Microdata Analyses and their Intergration, S. 214-234, hrsg. v. Ruggles, R. / Ruggles N.D., Edward Elgar, Cheltenham / Northampton.
- [143] Särndal, C. E. / Swensson, B. / Wretman, J. (1992): *Model Assisted Survey Sampling*, Springer-Verlag, New York u.a.
- [144] Samuelson, P.A. (1947): *Foundations of economic analysis*, Harvard University Press, Cambridge (Massachusetts).
- [145] Seade, J. (1978): *Consumers Surplus and Linearity of Engel Curves* in: Economic Journal, vol. 88/351, S. 511-523.
- [146] Schöler, K. (1999): *Grundlagen der Mikroökonomik*, Vahlen, München.
- [147] Schwarz, N. (2001): *The German Microcensus* in: Schmollers Jahrbuch 121, S. 649-654, hrsg. v. Wagner, G.G. et al., Duncker & Humblot, Berlin.
- [148] Schwarze, J. (1995): *Simulating German Income and Social Security Tax Payments Using the GSOEP*, Cross-National Studies in Ageing, Project Paper No. 19, Syracuse University, Syracuse.
- [149] Silberberg, E. (1972): *Duality and the Many Consumer's Surpluses* in: The American Economic Review, vol. 62/5, S. 942-952.
- [150] Silberberg, E. (1990): *The Structure of Economics - A Mathematical Analysis*, McGraw-Hill, New York.
- [151] Spahn, P.B. / Galler, H.P. / Kaiser, H. / Kassella, Th. / Merz, J. (1992): *Mikrosimulation in der Steuerpolitik*, Physica, Heidelberg.
- [152] Statistisches Bundesamt (1996): *Knapp 37 Millionen Privathaushalte in Deutschland 1995*, Pressemitteilung des Statistischen Bundesamtes vom 11. Juli 1996, <http://www.destatis.de/presse/deutsch/pm1996/p1900024.htm>, Wiesbaden.
- [153] Statistisches Bundesamt (1997): *Wirtschaftsrechnungen. Einkommens- und Verbrauchsstichprobe 1993. Aufgabe, Methode und Durchführung*, Fachserie 15, Heft 7, Metzler-Poeschel, Stuttgart.
- [154] Statistisches Bundesamt (2001): *Wirtschaftsrechnungen. Einkommens- und Verbrauchsstichprobe 1998 - Aufwendungen privater Haushalte für den Privaten Konsum*, Fachserie 15, Heft 5, Metzler-Poeschel, Stuttgart.
- [155] Statistisches Bundesamt (2002): *Wirtschaftsrechnungen. Einkommens- und Verbrauchsstichprobe 1998. Aufgabe, Methode und Durchführung*, Fachserie 15, Heft 7, www.destatis.de, Wiesbaden.

- [156] Statistisches Bundesamt (2003a): *Verbraucherpreisindex auf Basis 2000*, http://www.destatis.de/presse/deutsch/pk/2003/vpi_2000.pdf, Wiesbaden.
- [157] Statistisches Bundesamt (2003b): *Wägungsschema Verbraucherpreisindex Deutschland*, http://www.destatis.de/download/d/preis/waegung_2000.pdf, Wiesbaden.
- [158] Statistisches Bundesamt (2003c): *Statistik von A bis Z - Mikrozensus*, <http://www.destatis.de/presse/deutsch/abisz/mikrozensus.htm>, Wiesbaden.
- [159] Statistisches Bundesamt (2004): *Wirtschaftsrechnungen. Einkommens- und Verbrauchsstichprobe. Ausgewählte Ergebnisse zu den Einkommen und Ausgaben privater Haushalte 1. Halbjahr 2003*, Themenband, www.destatis.de, Wiesbaden.
- [160] Statistisches Bundesamt (2005a): *Wirtschaftsrechnungen. Einkommens- und Verbrauchsstichprobe 2003 - Einnahmen und Ausgaben privater Haushalte*, Fachserie 15, Heft 4, www.destatis.de, Wiesbaden.
- [161] Statistisches Bundesamt (2005b): *Wirtschaftsrechnungen. Einkommens- und Verbrauchsstichprobe 2003 - Aufwendungen privater Haushalte für den Privaten Konsum*, Fachserie 15, Heft 5, www.destatis.de, Wiesbaden.
- [162] Statistisches Bundesamt (2005c): *Wirtschaftsrechnungen. Einkommens- und Verbrauchsstichprobe 2003. Aufgabe, Methode und Durchführung der EVS*, Fachserie 15, Heft 7, www.destatis.de, Wiesbaden.
- [163] Statistisches Bundesamt (2005d): *Handbuch zur Anonymisierung wirtschaftsstatistischer Mikrodaten*, hrsg. v. Statistisches Bundesamt, Schriftenreihe Statistik und Wissenschaft, Band 4, Wiesbaden.
- [164] Statistisches Bundesamt (2006): *Preise - Verbraucherpreisindizes für Deutschland*, Fachserie 17, Heft 7, www.destatis.de, Wiesbaden.
- [165] Stigum, B.P. (1967): *On certain problems of aggregation* in: *International Economic Review*, vol. 2, S. 349-367.
- [166] Stone, R. (1954): *Linear Expenditure Systems and Demand Analysis: An Application to the Pattern of British Demand* in: *Economic Journal*, vol. 64/255, S. 511-527.
- [167] Strotz, R.H. (1957): *The empirical implications of a utility tree* in: *Econometrica*, vol. 25/2, S. 269-280.

- [168] Strotz, R.H. (1959): *The utility tree - A correction and further appraisal* in: *Econometrica*, vol. 27/3, S. 482-488.
- [169] Theil, H. (1975): *Theory and Measurement of Consumer Demand, Volume 1*, North-Holland, New York.
- [170] Tobin, J. (1958): *Estimation of Relationships for Limited Dependent Variables* in: *Econometrica*, vol. 26/1, S. 24-36.
- [171] United Nations (2000): *Code: 76 - Classifications of Expenditure According to Purpose (COFOG ; COICOP ; COPNI ; COPP)*, Series M, No. 84, United Nations publications, New York.
- [172] Van Daal, J. / Merkies, A.H.Q.M. (1989): *A Note on the Quadratic Expenditure Model* in: *Econometrica*, vol. 57/6, S. 1439-1443.
- [173] von Rosenblatt, B. (2004): *SOEP Methodenbericht zum Befragungsjahr 2004*, <http://www.diw.de/gsoep>, TNS Infratest Sozialforschung, München.
- [174] Wagner, G. (2000): *Selbstorganisation des Wissenschaftssystems würde Datenschutz vereinfachen und Re-Analysen befördern* in: *ZUMA-Nachrichten* 47, Jg. 24, S. 75-88.
- [175] Wales, T.J. / Woodland, A.D. (1983): *Estimation of consumer demand systems with binding non-negativity constraints* in: *Journal of Econometrics*, vol. 21, S. 263-285.
- [176] Wauschkuhn, U. (1979): *Statistische Verknüpfung von Mikrodatenfiles - Bestandsaufnahme der bekannten Verfahren*, Interner Bericht: IPES.79.209, GMD-IPES, St. Augustin.
- [177] Wiegert, R. (2003): *Matching Verfahren und die Re-Identifikation faktisch anonymisierter Einzeldaten* in: *Anonymisierung wirtschaftsstatistischer Einzeldaten*, S. 60-68, hrsg. v. Statistisches Bundesamt, Schriftenreihe Forum der Bundesstatistik, Band 42, Wiesbaden.
- [178] Wilkins, J.G. (2000): *The Tax Policy Analyst's Best Friend* in: *Microsimulation in Government Policy and Forecasting*, S. 29-38, hrsg. v. Gupta, A. / Kapur, V., North-Holland, Amsterdam.
- [179] Zwick, C. (1957): *Demographic Variation: Its Impact on Consumer Behavior* in: *The Review of Economics and Statistics*, vol. 39/4, S. 451-456.
- [180] Zwick, M. (2001): *Individual tax statistics data and their evaluation possibilities for the scientific community* in: *Schmollers Jahrbuch* 121, S. 639-648, hrsg. v. Wagner, G.G. et al., Duncker & Humblot, Berlin.