UNIVERSITÄT POTSDAM

WIRTSCHAFTS- UND SOZIALWISSENSCHAFTLICHE FAKULTÄT

VOLKSWIRTSCHAFTLICHE DISKUSSIONSBEITRÄGE

Gert Kneis und Klaus Schöler

ZUR BEGRÜNDUNG DER LINEAREN NACHFRAGEFUNKTION IN DER HAUSHALTSTHEORIE

Diskussionsbeitrag Nr. 48

Potsdam 2002

Zur Begründung der linearen Nachfragefunktion in der Haushaltstheorie

von

Gert Kneis und Klaus Schöler

Universität Potsdam

Inhalt

*) Die Autoren danken einem unbekannten Gutachter für wertvolle Hinweise.

Adresse der Autoren: Universität Potsdam, Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät, Institut für Mathematik, und Wirtschafts- und Sozialwissenschaftliche Fakultät, Lehrstuhl für Volkswirtschaftslehre, insbesondere Wirtschaftstheorie, Postfach 601553, 14415 Potsdam

1 Einleitung

In vielen Lehrbüchern zur Mikroökonomik werden haushaltsindividuelle (oder konsumentenindividuelle) Nachfragefunktionen angenommen, die bezüglich des zugehörigen Güterpreises linear sind. Sind alle Haushalte hinsichtlich Einkommen und Güternutzen gleich, d.h. wird ein repräsentativer Haushalt unterstellt, so ist ferner auch die Marktnachfragefunktion in diesem Sinne linear. Diese Annahmen haben ganz unzweifelhaft eine Reihe von Vorteilen, die zum einen didaktischer Art sind und viele Kalkulationen erheblich vereinfachen, die zum anderen aber auch eine allgemeine Lösung einiger Fragestellungen erst erlauben. Zum ersten Fall sei als Beispiel angeführt, daß sich die Ermittlung der Konsumentenrente bei linearen Nachfragefunktionen auf die einfache Berechnung der Dreiecksfläche zurückführen läßt; bei nichtlinearen Nachfragefunktionen ist das Flächenintegral der Funktion zu bestimmen. Zum zweiten Fall sei auf die Lösbarkeit von Gleichungssystemen hingewiesen. Beispielsweise kann bei einem homogen Oligopol mit einer beliebigen Anzahl n von Anbietern der Gleichgewichtspreis – unter dem Vorbehalt, daß bestimmte mathematische Restriktionen eingehalten werden – aus einem System linearer Gleichungen (Bedingungen 1. Ordnung von n Anbietern) allgemein ermittelt werden. Sind die Bedingungen 1. Ordnung nichtlinear hinsichtlich der Preise, so wird nur eine numerische Lösung gefunden. Diese Beispiele ließen sich erheblich vermehren.

In fast allen Textbüchern zur Mikroökonomik wird die analytische Herleitung der konsumentenindividuellen Nachfragefunktion bei exogenen Güterpreisen aus Nutzenfunktionen vom Cobb-Douglas-Typ vorgenommen (vgl. z.B. Koutsoyiannis [1979], S. 26 f.; Varian [1994], S. 97 f.; Schöler [1999], S. 31 f. und S. 42 f.). Das Ergebnis des Optimierungsprozesses unter Verwendung einer Ausgabenfunktion und der Nutzenfunktionen vom Cobb-Douglas-Typ liefert immer nichtlineare Nachfragefunktionen. Es sei daran erinnert, daß eine Nutzenfunktion $u = q_1 q_2$ mit den Mengen q der Güter 1 und 2 unter Berücksichtigung der Ausgabenfunktion $y = P_1 q_1 + P_2 q_1$ mit den Preisen P_1 für das Gut 1 (Gut 2 analog) zur unkompensierten Marshallschen Nachfragefunktion $q_1 = y/(2P_1)$ und zur kompensierten Hicksschen Nachfragefunktion $q_1 = (uP_1/P_2)^{0,5}$ führt. Auch andere, der Cobb-Douglas-Funktion ähnliche Nutzenfunktionen werden herangezogen, die Lösungen liegen aber immer in nichtlinearen konsumentenindividuellen Nachfragefunktionen. Damit stellt sich die Frage, wie sich die Lücke zwischen der Verwendung der linearen Nachfragefunktionen und ihrer fehlenden nutzentheoretischen Begründung schließen läßt. Auf diese Frage gibt es zwei Antworten. Zum einen kann man eine lineare Nachfragefunktion als *Approximation* einer tatsächlich konvex oder konkav verlaufenden Funktion verstehen (vgl. Cameron [1998]). Zum anderen kann die Frage gestellt werden, ob es eine Nutzenfunktion gibt, aus der über den Optimierungsprozeß eine lineare Nachfragefunktion hervorgeht (vgl. Alperovich/Weksler [1996]).

Der vorliegende Beitrag widmet sich dieser letzten Frage und ist wie folgt aufgebaut: In Abschnitt 2 wird eine Nutzenfunktion vorgestellt, aus der eine Nachfragefunktion ableitbar ist, die den genannten Anforderungen entspricht. In Abschnitt 3 wird diese Nutzenfunktion entwickelt und in Abschnitt 4 wird ein Resümee gezogen.

2 Ableitung einer linearen Nachfragefunktion

In die Diskussion soll nunmehr eine bestimmte Nutzenfunktion des Haushaltes eingeführt werden, die im nachfolgenden Abschnitt 3 entwickelt wird. In diesem Abschnitt werden die Eigenschaften dieser Funktion und der daraus resultierenden Nachfrage betrachtet. Die streng additive Nutzenfunktion möge

$$u(q_1, q_2) = \int \frac{1 - q_1}{1 - q_1(1 - q_1)} dq_1 + ln(q_2), \quad \text{mit} \quad q_1 \in (0, 1), \quad q_2 \geq 1 \tag{1}$$

lauten und die Ausgabenrestriktion

$$y = q_1 P_1 + q_2 P_2, \quad mit \quad P_1 \in (0, 1). \tag{2}$$

Maximiert man die Nutzenfunktion (1) unter der Nebenbedingung (2) mit Hilfe einer Lagrange-Funktion $\mathcal{L}$, so erhält man die nachfolgenden drei Gleichungen mit den unbekannten Variablen q_1, q_2 und des Lagrange-Multiplikators λ:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{q_1} &= \frac{1 - q_1}{q_1^2 - q_1 + 1} - \lambda P_1 = 0 \\ \mathcal{L}_{q_2} &= \frac{1}{q_2} - \lambda P_2 = 0 \\ \mathcal{L}_{\lambda} &= y - q_1 P_1 - q_2 P_2 = 0 \end{aligned}$$

Die Bedingung zweiter Ordnung für ein Maximum $|\mathbf{H}| > 0$ im Punkt (q_1^*, q_2^*),

$$|\mathbf{H}| = -\mathcal{L}_{q_1 q_1} y_{q_2}^2 + 2\mathcal{L}_{q_1 q_2} y_{q_1} y_{q_2} - \mathcal{L}_{q_2 q_2} y_{q_1}^2,$$

ist mit

$$\frac{P_2^2 q_1(2-q_1)}{(q_1^2-q_1+1)^2}+\frac{P_1^2}{q_2^2}>0,$$

erfüllt, da

$$\mathcal{L}_{q_1q_2}=0,$$
$$\mathcal{L}_{q_1q_1}=-\frac{q_1(2-q_1)}{(q_1^2-q_1+1)^2},$$
$$\mathcal{L}_{q_2q_2}=-\frac{1}{q_2^2}$$

und $y_{q_1}=P_1$, $y_{q_2}=P_2$, $q_1\in(0,1)$ ist. Damit sind die zugehörigen Indifferenzkurven konvex zum Ursprung und die Grenzrate der Substitution nimmt ab. Löst man die drei Gleichungen der Bedingung erster Ordnung nach q_1 auf, so erhält man die hinsichtlich des zugehörigen Güterpreises lineare Nachfragefunktion

$$q_1^*=1-(1/y)P_1. \tag{3}$$

Diese Nachfragefunktion ist homogen vom Grade Null hinsichtlich der Preise und des Einkommens und steht für ein superiores Gut. Die Nachfrage nach dem zweiten Gut kann aus den drei Gleichungen der Bedingung erster Ordnung

$$q_2^*=\frac{y-P_1+P_1^2/y}{P_2} \tag{4}$$

bestimmt werden, wobei diese konvex hinsichtlich des Preises P_2 und nicht homogen vom Grade Null ist. Dividiert man die Einkommensrestriktion (2) durch das Einkommen y, so erhält man die standardisierte Einkommensrestriktion $1=p_1q_1+p_2q_2$ mit $p_1=P_1/y$ und $p_2=P_2/y$. Die Nachfragefunktionen lauten nun $q_1^*=1-p_1$ sowie $q_2^*=(p_1^2-p_1+1)/p_2$. Aus Gründen der Vereinfachung soll weiterhin von der standardisierten Einkommensrestriktion ausgegangen werden. Aus der Nutzenfunktion (1), die streng additiv ist und eine nicht symmetrische Bewertung der Güter 1 und 2 durch den Haushalt zum Ausdruck bringt, folgt also eine lineare Nachfragefunktion für das eine Gut und eine konvexe für das andere. Die zugehörigen kompensierten Nachfragefunktionen sind nicht bestimmbar.

3 Entwicklung der zugehörigen Nutzenfunktion

3.1 Differentialgleichung der Nutzenfunktion

Aufgabenstellung: *Für die Nachfrage q_1 nach einem Gut 1 und die Nachfrage q_2 nach einem Gut 2 mit der standardisierten Restriktion*

$$1 = p_1 q_1 + p_2 q_2 \tag{5}$$

ist eine Nutzenfunktion $u(q_1, q_2)$ mit folgender Eigenschaft gesucht:
Ist (q_1, q_2) der Maximalpunkt des Nutzens unter der Restriktion (5), so gilt dort für die Nachfrage nach dem ersten Gut die Beziehung

$$q_1 = 1 - p_1. \tag{6}$$

Etwas allgemeiner: An Stelle der speziellen Nachfragefunktion (6) wird eine beliebige Linearität mit nicht negativen Konstanten

$$q_1 = \alpha_0 - \alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 \tag{7}$$

im Maximalpunkt gefordert.

Die Lagrange-Funktion des Extremalproblems lautet:

$$\mathcal{L}(q_1, q_2, \lambda) = u(q_1, q_2) + \lambda(1 - p_1 q_1 - p_2 q_2) \tag{8}$$

Hieraus ergeben sich – neben (5) – die notwendigen Bedingungen

$$\frac{\partial u}{\partial q_1} = \lambda p_1, \ \frac{\partial u}{\partial q_2} = \lambda p_2, \ q_1 = \alpha_0 - \alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 \tag{9}$$

und daraus

$$p_2 \frac{\partial u}{\partial q_1} - p_1 \frac{\partial u}{\partial q_2} = 0. \tag{10}$$

(10) stellt eine Gleichung in den Variablen p_1 und p_2 dar, denn q_1 und q_2 sind vermöge des aus den Beziehungen (5) und (7) bestehenden Systems selbst Funktionen dieser Preise. Dieses System besitzt die eindeutige Auflösung

$$p_1 = \frac{-q_2(q_1 - \alpha_0) + \alpha_2}{\alpha_2 q_1 + \alpha_1 q_2}, \quad p_2 = \frac{q_1(q_1 - \alpha_0) + \alpha_1}{\alpha_2 q_1 + \alpha_1 q_2} \tag{11}$$

nach den Preisen. Wird diese Auflösung in (10) eingetragen, so ergibt sich

$$\Big(q_1(q_1-\alpha_0)+\alpha_1\Big)\frac{\partial u}{\partial q_1}+\Big(q_2(q_1-\alpha_0)-\alpha_2\Big)\frac{\partial u}{\partial q_2}=0. \tag{12}$$

(12) ist eine homogene lineare partielle Differentialgleichung erster Ordnung für die gesuchte Nutzenfunktion $u(q_1,q_2)$ als Funktion der Variablen q_1 und q_2.

Bedeutung der Lösungen der Differentialgleichung (12): Zu vorgegebenen positiven Preisen p_1 und p_2 besitzt das System (11) die eindeutige Auflösung

$$q_1^*=\alpha_0-\alpha_1 p_1+\alpha_2 p_2 \quad \textit{und} \quad q_2^*=\frac{1-p_1 q_1^*}{p_2}. \tag{13}$$

Ist dann $u(q_1,q_2)$ eine Lösung der Differentialgleichung[1]*, so ist für die Lagrange-Funktion (8) im Punkt (q_1^*,q_2^*) mit dem Multiplikator $\lambda^*=\dfrac{1}{p_1}\dfrac{\partial u}{\partial q_1}$ die notwendige Bedingung für ein Maximum erfüllt.*

3.2 Allgemeine Lösung für spezielle Parameterwerte

Im Weiteren wird der Spezialfall $\alpha_2=0$ betrachtet, – jetzt kann die Differentialgleichung (12) geschlossen integriert werden. Zusätzlich wird $\alpha_1=1$ angenommen.
Die so vereinfachte Differentialgleichung

$$\frac{q_1(q_1-\alpha_0)+1}{q_1-\alpha_0}\frac{\partial u}{\partial q_1}+q_2\frac{\partial u}{\partial q_2}=0 \tag{14}$$

ist von der Form

$$f(q_1)\frac{\partial u}{\partial q_1}+g(q_2)\frac{\partial u}{\partial q_2}=0. \tag{15}$$

[1]Die Lösungen der Differentialgleichung (12) werden mit der Methode der Charakteristiken (das sind die Indifferenzkurven $u(q_1,q_2)=C$ der Lösungsfunktion, und diese sind für alle Lösungsfunktionen identisch) aufgebaut. Die Indifferenzkurven sind die Lösungen eines (hier nicht linearen) Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen:

$$\frac{dq_1}{dt}=q_1(q_1-\alpha_0)+\alpha_1, \quad \frac{dq_2}{dt}=q_2(q_1-\alpha_0)-\alpha_2$$

Für die Differentialgleichung (15) kann ein spezielles Integral $u_0(q_1, q_2)$ mit Hilfe von unbestimmten Integralen angegeben werden:

$$u_0(q_1, q_2) = \int \frac{dq_2}{g(q_2)} - \int \frac{dq_1}{f(q_1)} = \int \frac{dq_2}{q_2} + \int \frac{\alpha_0 - q_1}{q_1(q_1 - \alpha_0) + 1} dq_1 \qquad (16)$$

Die unbestimmten Integrale können geschlossen ausgewertet werden. Mit den Abkürzungen

$$X = q_1(q_1 - \alpha_0) + 1 = q_1^2 - \alpha_0 q_1 + 1 = \left(q_1 - \frac{\alpha_0}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}\Delta \quad \text{und} \quad \Delta = 4 - \alpha_0^2$$

lautet ein spezielles Integral:

$$u_0(q_1, q_2) = \ln q_2 + \begin{cases} -\frac{1}{2} \ln X + \frac{\alpha_0}{\sqrt{\Delta}} \arctan \frac{2q_1 - \alpha_0}{\sqrt{\Delta}} & \text{für} \quad \Delta > 0 \\ -\ln |q_1 - 1| - \frac{1}{q_1 - 1} & \text{für} \quad \Delta = 0 \\ -\frac{1}{2} \ln |X| + \frac{1}{2} \frac{\alpha_0}{\sqrt{-\Delta}} \ln \left| \frac{2q_1 - \alpha_0 - \sqrt{-\Delta}}{2q_1 - \alpha_0 + \sqrt{-\Delta}} \right| & \text{für} \quad \Delta < 0 \end{cases} \qquad (17)$$

Die Fälle $\Delta > 0$, $\Delta = 0$ und $\Delta < 0$ bedeuten $\alpha_0 < 2$, $\alpha_0 = 2$ bzw. $\alpha_0 > 2$.
Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung (14) ist von der Gestalt

$$u(q_1, q_2) = \phi(u_0(q_1, q_2)), \qquad (18)$$

wobei für die *äußere Funktion* ϕ eine beliebige differenzierbare Funktion ϕ einer Veränderlichen auf dem Wertebereich der Funktion $u_0(q_1, q_2)$ gewählt werden kann.

Satz: *Hat die zweimal differenzierbare Funktion ϕ eine überall positive erste Ableitung, so besitzt die Funktion $u(q_1, q_2) = \phi(u_0(q_1, q_2))$ im Punkt (q_1, q_2) mit*

$$q_1 = \alpha_0 - p_1, \; q_2 = \frac{1 - p_1(\alpha_0 - p_1)}{p_2} \qquad (19)$$

bei vorgegebenen Größen p_1 und p_2 ein Maximum unter der Restriktion

$$p_1 q_1 + p_2 q_2 = 1.$$

B e w e i s . Daß die notwendige Bedingung für ein Extremum erfüllt ist, wurde bereits aus der Differentialgleichung abgeleitet. Es bleibt die hinreichende Bedingung

$$H = -\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial q_1^2}\left(\frac{\partial h}{\partial q_2}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial q_1 \partial q_2}\frac{\partial h}{\partial q_1}\frac{\partial h}{\partial q_2} - \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial q_2^2}\left(\frac{\partial h}{\partial q_1}\right)^2 > 0 \tag{20}$$

für die Lagrange-Funktion

$$\mathcal{L}(q_1, q_2) = \phi(u_0(q_1, q_2)) + \lambda h(q_1, q_2) \text{ mit } \; h = 1 - p_1 q_1 - p_2 q_2 \tag{21}$$

im Punkt (19) zu prüfen.
Die partiellen Ableitungen von $\mathcal{L}$ lauten:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_1} = \frac{\partial u}{\partial q_1} - \lambda p_1 &= \phi'(u_0(q_1, q_2))\frac{\partial u_0}{\partial q_1} - \lambda p_1 \\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_2} = \frac{\partial u}{\partial q_2} - \lambda p_2 &= \phi'(u_0(q_1, q_2))\frac{\partial u_0}{\partial q_2} - \lambda p_2 \\
\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial q_1^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial q_1^2} &= \phi''(u_0(q_1, q_2))\left(\frac{\partial u_0}{\partial q_1}\right)^2 + \phi'(u_0(q_1, q_2))\frac{\partial^2 u_0}{\partial q_1^2} \\
\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial q_1 \partial q_2} = \frac{\partial^2 u}{\partial q_1 \partial q_2} &= \phi''(u_0(q_1, q_2))\frac{\partial u_0}{\partial q_1}\frac{\partial u_0}{\partial q_2} + \phi'(u_0(q_1, q_2))\frac{\partial^2 u_0}{\partial q_1 \partial q_2} \\
\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial q_2^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial q_2^2} &= \phi''(u_0(q_1, q_2))\left(\frac{\partial u_0}{\partial q_2}\right)^2 + \phi'(u_0(q_1, q_2))\frac{\partial^2 u_0}{\partial q_2^2}
\end{aligned}$$

Das ergibt:

$$\begin{aligned}
H &= \phi''(u_0(q_1, q_2))\left[-\left(\frac{\partial u_0}{\partial q_1}\right)^2 p_2^2 + 2\frac{\partial u_0}{\partial q_1}\frac{\partial u_0}{\partial q_2}p_1 p_2 - \left(\frac{\partial u_0}{\partial q_2}\right)^2 p_1^2\right] \\
&\quad + \phi'(u_0(q_1, q_2))\left[-\frac{\partial^2 u_0}{\partial q_1^2}p_2^2 + 2\frac{\partial^2 u_0}{\partial q_1 \partial q_2}p_1 p_2 - \frac{\partial^2 u_0}{\partial q_2^2}p_1^2\right]
\end{aligned}$$

Hierin verschwindet die erste eckige Klammer, da u_0 die Differentialgleichung (10) erfüllt. Mit den partiellen Ableitungen der speziellen Lösung (16)

$$\frac{\partial u_0}{\partial q_1} = -\frac{q_1 - \alpha_0}{q_1(q_1 - \alpha_0) + 1}, \; \frac{\partial^2 u_0}{\partial q_1^2} = \frac{(q_1 - \alpha_0)^2 - 1}{(q_1^2 - \alpha_0 q_1 + 1)^2}, \; \frac{\partial^2 u_0}{\partial q_2^2} = -\frac{1}{q_2^2}, \; \frac{\partial^2 u_0}{\partial q_1 \partial q_2} = 0$$

ergibt sich damit unter Verwendung von (19) schließlich:

$$H = \frac{\phi'(u_0(q_1, q_2))}{q_2^2} \tag{22}$$

Bei positiver Ableitung von ϕ ist folglich H positiv, und damit ist die hinreichende Bedingung für ein Maximum erfüllt.

Ein Beispiel: Multiplikative Verknüpfung der Faktoren q_1 und q_2:
Ein Ansatz $u(q_1, q_2) = h_1(q_1)h_2(q_2)$ bedeutet für die Differentialgleichung (14):

$$\frac{q_1(q_1 - \alpha_0) + 1}{q_1 - \alpha_0} h_1'(q_1)h_2(q_2) + q_2 h_1(q_1)h_2'(q_2) = 0$$

Hier ist eine Trennung der Variablen

$$\frac{q_1(q_1 - \alpha_0) + 1}{q_1 - \alpha_0} \frac{h_1'(q_1)}{h_1(q_1)} = -q_2 \frac{h_2'(q_2)}{h_2(q_2)}$$

möglich, und folglich müssen beide Seiten der Gleichung konstant sein. Daraus ergibt sich eine von zwei Konstanten C und ε abhängende Lösung:

$$u(q_1, q_2) = C \cdot \mathrm{e}^{\varepsilon \int \frac{\alpha_0 - q_1}{q_1(q_1 - \alpha_0) + 1} dq_1} \cdot {q_2}^{\varepsilon} = C\mathrm{e}^{\varepsilon u_0(q_1, q_2)}$$

Eine multiplikative Verknüpfung der Faktoren ist daher durch die spezielle äußere Funktion $\phi(t) = C\mathrm{e}^{\varepsilon t}$ charakterisiert.

3.3 Nutzenfunktion als Lösung einer Anfangswertaufgabe

Für konkrete Beispiele wird neben $\alpha_1 = 1$ und $\alpha_2 = 0$ jetzt zusätzlich $\alpha_0 = 1$ gesetzt. Die im zweiten Abschnitt angegebene Nutzenfunktion stimmt dann mit der in (16) erklärten speziellen Lösung der Differentialgleichung (14) überein.
Die Gesamtheit aller Lösungen $u(q_1, q_2)$ ergibt sich zum einen aus u_0 durch Anwendung einer willkürlichen Funktion $\phi(t)$ in der Form (18). Zum anderen kann die Lösung durch die Vorgabe der Funktionswerte auf einer Anfangsmannigfaltigkeit eindeutig bestimmt werden.

Als einfachstes Beispiel einer solchen Anfangswertaufgabe werden im Folgenden die Werte der Funktion u auf einem Strahl $q_1 = {q_1}^0$ vorgegeben:

$$\textit{Anfangswertaufgabe:}\ u({q_1}^0, q_2) = \varphi(q_2) \quad \text{für} \quad q_2 \geq 0 \tag{23}$$

Zu bestimmen ist jetzt die äußere Funktion ϕ in der Darstellung (18). Für die speziell gewählten Parameter und mit den Abkürzungen

$$F(q_1) = \int \frac{1-q_1}{q_1(q_1-1)+1} dq_1, \;\; F_0 = F(q_1^0)$$

gilt dann auf Grund von (16) für die Lösung der Anfangswertaufgabe:

$$u(q_1^0, q_2) = \phi(u_0(q_1^0, q_2)) = \phi(F_0 + \ln q_2) = \varphi(q_2) \tag{24}$$

Hierdurch ist die äußere Funktion ϕ bereits festgelegt:

$$\phi(t) = \varphi\left(\mathrm{e}^{t-F_0}\right) \tag{25}$$

Die Lösung der Anfangswertaufgabe lautet damit:

$$u(q_1, q_2) = \phi(u_0(q_1, q_2)) = \varphi\left(\mathrm{e}^{F(q_1)-F_0+\ln q_2}\right) = \varphi\left(q_2\, \mathrm{e}^{F(q_1)-F_0}\right) \tag{26}$$

Diese Lösung wird nun in Abhängigkeit von der Anfangsfunktion φ untersucht.

Aus der gewöhnlichen Ableitung

$$\phi'(t) = \varphi'\left(\mathrm{e}^{t-F_0}\right) \mathrm{e}^{t-F_0}$$

und den partiellen Ableitungen (zur Abkürzung ist $s = q_2 \mathrm{e}^{F(q_1)-F_0}$ gesetzt)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial q_1} &= q_2 \mathrm{e}^{F(q_1)-F_0} \varphi'(s) F'(q_1) \\
\frac{\partial u}{\partial q_2} &= \mathrm{e}^{F(q_1)-F_0} \varphi'(s) \\
\frac{\partial^2 u}{\partial q_1^2} &= q_2 \mathrm{e}^{F(q_1)-F_0} \Big(q_2 \mathrm{e}^{F(q_1)-F_0} \varphi''(s) F'^2(q_1) + \varphi'(s)(F'^2(q_1) + F''(q_1)) \Big) \\
\frac{\partial^2 u}{\partial q_2^2} &= \mathrm{e}^{2(F(q_1)-F_0)} \varphi''(s)
\end{aligned}$$

können einige Eigenschaften der Lösung der Anfangswertaufgabe für $q_2 > 0$ abgelesen werden:

1. Die Ableitungen der äußeren Funktion ϕ und der Anfangsfunktion φ besitzen das gleiche Vorzeichen. Insbesondere ist bei steigendem $\varphi(t)$ auch $\phi(t)$ steigend, und wegen des Satzes in 3.2 besitzt damit die Funktion $u(q_1, q_2)$ ein Maximum unter der Restriktion $1 = q_1 p_1 + q_2 p_2$, wobei für den Maximalpunkt (q_1^*, q_2^*) die Beziehung $q_1^* = 1 - p_1$ gilt.

2. Für $\varphi'(q_2) > 0$ sind $\dfrac{\partial u}{\partial q_1}$ (bei $0 \leq q_1 < 1$) und $\dfrac{\partial u}{\partial q_2}$ positiv: der Nutzen steigt also bei festem q_1 bezüglich q_2 und bei festem q_2 bezüglich q_1.

3. Die Ableitung $\dfrac{\partial^2 u}{\partial q_2^2}$ und die Ableitung φ'' der Anfangsfunktion besitzen das gleiche Vorzeichen. Ist dann der Nutzen $u(q_1, q_2)$ auf dem Strahl $q_1 = q_1^0$ wachsend und konkav bezüglich q_2, so trifft dies auch für *jeden* Strahl zu, auf dem q_1 konstant ist.

4. Allein aus dem Vorzeichen von φ'' ist eine Aussage über das Vorzeichen von $\dfrac{\partial^2 u}{\partial q_1^2}$ nicht möglich. Wird zum Beispiel für φ eine Funktion $\varphi(s) = s^\varepsilon$ mit der konstanten Elastizität ε genommen, so lautet die Ableitung:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial q_1^2} = \varepsilon q_2^\varepsilon \mathrm{e}^{\varepsilon(F(q_1)-F_0)} \frac{(1+\varepsilon)(q_1-1)^2 - 1}{(q_1^2 - q_1 + 1)^2}$$

   Hierin wechselt der rechtsstehende Bruch für $\varepsilon > 0$ an der Stelle $\widetilde{q_1} = 1 - \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon}}$ das Vorzeichen. Der Nutzen steigt dann – bei festem q_2 – für $0 \leq q_1 \leq \widetilde{q_1}$ konvex und anschließend konkav.

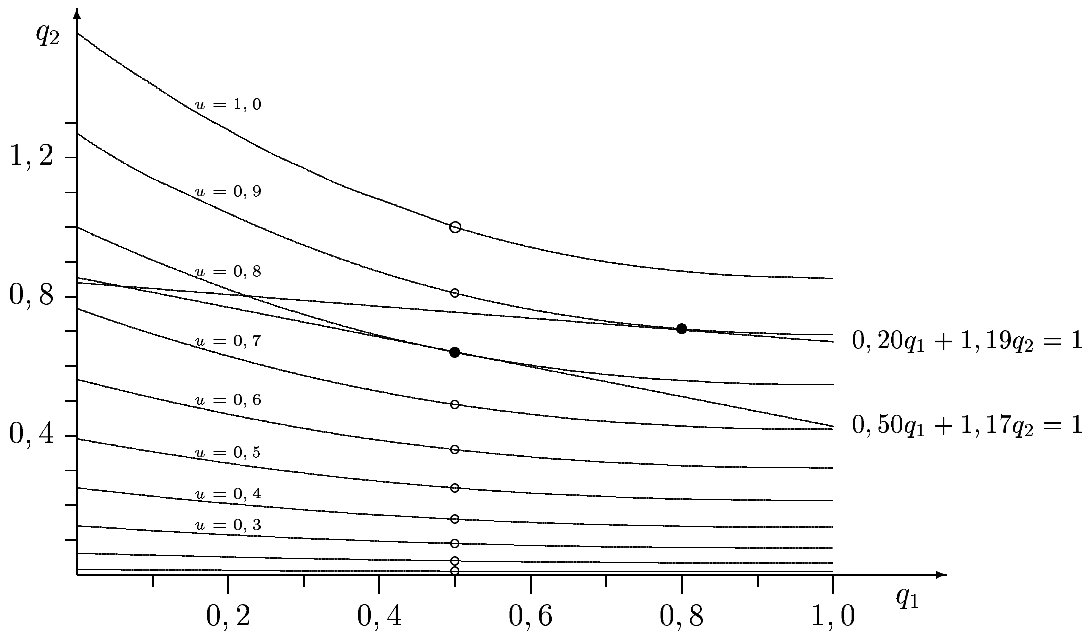

Abbildung 1: Indifferenzkurven der Lösung der Anfangswertaufgabe $u\left(\frac{1}{2}, q_2\right) = \sqrt{q_2}$

In der Abbildung 1 sind einige Indifferenzkurven der Lösung der Anfangswertaufgabe

$$u\left(\frac{1}{2}, q_2\right) = \sqrt{q_2}$$

dargestellt. Darin sind für die beiden Fälle $p_1 = 0,20$ und $p_2 = 1,19$ sowie $p_1 = 0,50$ und $p_2 = 1,17$ die Restriktionen $1 = p_1q_1 + p_2q_2$ und die zugehörigen Extremalpunkte der Nutzenfunktion gemäß (13) eingetragen.

4 Schlußbetrachtung

Das Anliegen dieses Beitrags ist es, die Frage zu prüfen, ob für die in der Haushalts- und Preistheorie oft verwendeten linearen Nachfragefunktionen eine nutzentheoretische Fundierung möglich ist. In Abschnitt 2 wird ein Beispiel für eine solche, in Abschnitt 3 noch zu entwickelnde Nutzenfunktion eines Haushaltes gegeben, aus der – wie leicht nachvollzogen werden kann – eine lineare Nachfragefunktion folgt. Die Herleitung einer Nutzenfunktion mit diesen Eigenschaften erbringt in Abschnitt 3 ein überraschendes Ergebnis: Nicht nur *eine* Nutzenfunktion, sondern – wie gezeigt wurde – eine *Klasse von Nutzenfunktionen* hat die geforderten Eigenschaften. Dabei wird auch deutlich, daß in einer Zwei-Güter-Welt immer dann, wenn die Nachfrage nach dem einen Gut linear vom Preis abhängig ist, die Nachfrage nach dem zweiten Gut in einem Preis-Mengen-Diagramm konvex zum Ursprung verläuft. Sind alle Konsumenten hinsichtlich des Einkommens und der Wertschätzung der Güter unterschiedslos, d.h. sind die Nutzenfunktionen hinsichtlich Funktionstyp und Parameterwerten identisch, so ist auch die aggregierte Marktnachfrage nach einem Gut linear und nach dem zweiten nicht linear. Daraus folgt für die Preistheorie, daß in einem mikroökonomischen Totalmodell nicht alle Nachfragefunktionen linear sein können. Auch in einem partialanalytischen Modell der monopolistischen Konkurrenz kann es keine - wie häufig angenommen - Darstellung der Nachfrage nach den unterschiedlichen Gütern durch lineare Nachfragefunktionen geben.

Unser Beitrag entwickelt über eine partielle lineare Differentialgleichung eine Lösung, wobei die eindeutige Festlegung der Nutzenfunktion durch die Vorgabe auf einer Anfangsmannigfaltigkeit erfolgt. Daraus ergibt sich ein ganz konkreter allgemeiner Fall mit einer qualitativen Beschreibung der Lösung. Hierin besteht der

Unterschied zum Modell von Alperovich/Weksler [1996], das über eine gewöhnliche lineare Differentialgleichung zu einer speziellen Nutzenfunktion führt. Es zeigt sich, daß sich die Begründung linearer Nachfragefunktionen nicht notwendigerweise in dem trivialen Approximationsargument von Cameron [1998] erschöpfen muß.

5 Zusammenfassung

Ziel dieses Beitrags ist es, die oft verwendeten linearen Nachfragefunktionen nutzentheoretisch zu fundieren. Die Herleitung einer Nutzenfunktion mit diesen Eigenschaften erbringt ein überraschendes Ergebnis: Nicht nur *eine* Nutzenfunktion, sondern eine *Klasse von Nutzenfunktionen* hat die geforderten Eigenschaften. Dabei wird auch deutlich, daß in einer Zwei-Güter-Welt immer dann, wenn die Nachfrage nach dem einen Gut linear vom Preis abhängig ist, die Nachfrage nach dem zweiten Gut in einem Preis-Mengen-Diagramm konvex zum Ursprung verläuft.

6 Summary

The intention of this paper is to find a utility function for the often used linear demand functions. The derivation of a utility function with such properties leads to a surprising result: Not only *one* utility function, but a *class of utility functions* has the required properties. It also gets clear that in a world of two goods one demand function is linear with respect to the price, and the demand for the second good is described by a convex function in the price-quantity-diagram.

Literatur

Alperovich, G./Weksler, I. [1996], A Class of Utility Functions Yielding Linear Demand Functions, *American Economist*, 40, 20 – 23.

Cameron, S. [1998], Why Are Those Linear Demand Curves in the Textbooks? *The Indian Journal of Economics*, 79, 273–275.

Koutsoyiannis, A. [1979], *Modern Microeconomics*, 2. Aufl., London.

Schöler, K. [1999], *Grundlagen der Mikroökonomik*, München.

Varian, H. R. [1994], *Mikroökonomie*, 3. Aufl., München, Wien.

Bisher erschienene Diskussionsbeiträge:

Nr. 1 **Eickhof, Norbert/Martin Franke:** Die Autobahngebühr für Lastkraftwagen, 1994.

Nr. 2 **Christoph, Ingo:** Anforderungen an eine standortgerechte Verkehrspolitik in der Bundesrepublik Deutschland, 1995.

Nr. 3 **Franke, Martin:** Elektronisches Road Pricing auf den Autobahnen, 1995.

Nr. 4 **Franke, Martin:** Die Reduktion der CO_2-Emissionen durch Zertifikate?, 1995.

Nr. 5 **Eickhof, Norbert:** Marktversagen, Wettbewerbsversagen, staatliche Regulierung und wettbewerbspolitische Bereichsausnahmen, 1995.

Nr. 6 **Eickhof, Norbert:** Die Industriepolitik der Europäischen Union, 1996.

Nr. 7 **Schöler, Klaus:** Stadtentwicklung im Transformationsprozeß - Erkenntnisse aus der deutschen Entwicklung, 1996.

Nr. 8 **Hass, Dirk/Klaus Schöler:** Exportsubventionen im internationalen räumlichen Oligopol, 1996.

Nr. 9 **Schöler, Klaus:** Tariffs and Welfare in a Spatial Oligopoly, 1996.

Nr. 10 **Kreikenbaum, Dieter:** Kommunalisierung und Dezentralisierung der leitungsgebundenen Energieversorgung, 1996.

Nr. 11 **Eickhof, Norbert:** Ordnungspolitische Ausnahmeregelungen - Rechtfertigungen und Erfahrungen -, 1996.

Nr. 12 **Sanner, Helge/Klaus Schöler:** Competition, Price Discrimination and Two-Dimensional Distrubution of Demand, 1997.

Nr. 13 **Schöler, Klaus:** Über die Notwendigkeit der Regionalökonomik, 1997.

Nr. 14 **Eickhof, Norbert / Dieter Kreikenbaum:** Reform des Energiewirtschaftsrechts und kommunale Bedenken, 1997.

Nr. 15 **Eickhof, Norbert:** Konsequenzen einer EU-Osterweiterung für den Gemeinsamen Markt und Anpassungserfordernisse der Gemeinschaft, 1997.

Nr. 16 **Eickhof, Norbert:** Die Forschungs- und Technologiepolitik der Bundesrepublik und der Europäischen Union - Herausforderungen, Maßnahmen und Beurteilung -, 1997.

Nr. 17 **Sanner, Helge:** Arbeitslosenversicherung, Lohnniveau und Arbeitslosigkeit, 1997.

Nr. 18 **Schöler, Klaus:** Die räumliche Trennung von Arbeit und Wohnen - Kritik einer populären Kritik -, 1997.

Nr. 19 **Strecker, Daniel:** Innovationstheorie und Forschungs- und Technologiepolitik, 1997.

Nr. 20 **Eickhof, Norbert:** Die Neuregelung des Energiewirtschaftsrechts, 1998.

Nr. 21 **Strecker, Daniel:** Neue Wachstumstheorie und Theorie der strategischen Industrie- und Handelspolitik -Fundierte Argumente für forschungs- und technologiepolitische Maßnahmen?-, 1998.

Nr. 22 **Schirmag, Toralf/Klaus Schöler:** Ökonomische Wirkungen der Universitätsbeschäftigten auf die Stadt Potsdam und das Umland, 1998.

Nr. 23 **Ksoll, Markus:** Ansätze zur Beurteilung unterschiedlicher Netzzugangs- und Durchleitungsregeln in der Elektrizitätswirtschaft, 1998.

Nr. 24 **Eickhof, Norbert/Dieter Kreikenbaum:** Die Liberalisierung der Märkte für leitungsgebundene Energien, 1998.

Nr. 25 **Eickhof, Norbert:** Die deutsche und europäische Forschungs- und Technologiepolitik aus volkswirtschaftlicher Sicht, 1998.

Nr. 26 **Sanner, Helge:** Unemployment Insurance in a General Equilibrium Framework with Firms Setting Wages, 1998.

Nr. 27 **Never, Henning:** Vielfalt, Marktversagen und öffentliche Angebote im Rundfunk, 1998.

Nr. 28 **Schöler, Klaus:** Internationaler Handel und räumliche Märkte - Handelspolitik aus Sicht der räumlichen Preistheorie -, 1999.

Nr. 29 **Strecker, Daniel:** Forschungs- und Technologiepolitik im Standortwettbewerb, 1999.

Nr. 30 **Schöler, Klaus:** Öffentliche Unternehmen aus raumwirtschaftlicher Sicht, 1999.

Nr. 31 **Schöler, Klaus:** Wohlfahrt und internationaler Handel in einem Modell der räumlichen Preistheorie, 1999.

Nr. 32 **Wagner, Wolfgang:** Vergleich von ringförmiger und sektoraler Stadtstruktur bei Nachbarschaftsexternalitäten im monozentrischen System, 1999.

Nr. 33 **Schulze, Andreas:** Die ordnungspolitische Problematik von Netzinfrastrukturen – Eine institutionenökonomische Analyse -, 1999.

Nr. 34 **Schöler, Klaus:** Regional Market Areas at the EU Border, 2000.

Nr. 35 **Eickhof, Norbert/Henning Never:** Öffentlich-rechtlicher-Rundfunk zwischen Anstaltsschutz und Wettbewerb, 2000.

Nr. 36 **Eickhof, Norbert**: Öffentliche Unternehmen und das Effizienzproblem – Positive und normative Anmerkungen aus volkswirtschaftlicher Perspektive -, 2000.

Nr. 37 **Sobania, Katrin**: Von Regulierungen zu Deregulierungen – Eine Analyse aus institutionenökonomischer Sicht -, 2000.

Nr. 38 **Wagner, Wolfgang**: Migration in Großstädten - Folgen der europäischen Osterweiterung für mitteleuropäische Stadtstrukturen, 2000.

Nr. 39 **Schöler, Klaus:** Vertikal verbundene Märkte im Raum, 2000.

Nr. 40 **Ksoll, Markus:** Einheitliche Ortspreise im Stromnetz und Wettbewerb in der Elektrizitätswirtschaft, 2000.

Nr. 41 **Sanner, Helge:** Regional Unemployment Insurance, 2001.

Nr. 42 **Schöler, Klaus:** Zweistufige Märkte bei zweidimensionaler räumlicher Verteilung der Nachfrage, 2001.

Nr. 43 **Isele, Kathrin:** Institutioneller Wettbewerb und neoklassische Modelle, 2001.

Nr. 44 **Sanner, Helge:** Bargaining Structure and Regional Unemployment Insurance, 2001.

Nr. 45 **Sanner, Helge:** Endogenous Unemployment Insurance and Regionalisation, 2001.

Nr. 46 **Ksoll, Markus:** Spatial vs. Non-Spatial Network Pricing in Deregulated Electricity Supply, 2001.

Nr. 47 **Ksoll, Markus/Klaus Schöler:** Alternative Organisation zweistufiger Strommärkte – Ein räumliches Marktmodell bei zweidimensionaler Verteilung der Nachfrage, 2001.

Nr. 48 **Kneis Gert/Klaus Schöler**: Zur Begründung der linearen Nachfragefunktion in der Haushaltstheorie, 2002.

Nr. 49 **Westerhoff, Horst-Dieter:** Die Zukunft der Gemeinsamen Agrarpolitik angesichts der EU-Erweiterung, 2002.

Nr. 50 **Wagner, Wolfgang:** Subventionsabbau um jeden Preis? Wohlfahrtswirkungen von Subventionen im Transportsektor, 2002.

Nr. 51 **Isele, Kathrin:** Fusionskontrolle im Standortwettbewerb, 2003.

Nr. 52 **Eickhof, Norbert:** Globalisierung institutioneller Wettbewerb und nationale Wirtschaftspolitik, 2003.

Nr. 53 **Schulze, Andreas:** Liberalisierung und Re-Regulierung von Netzindustrien – Ordnungspolitisches Paradaxon oder wettbewerbsökonomische Notwendigkeit? –, 2003.

Nr. 54 **Schöler, Klaus/Wolfgang Wagner**: Freizeitbewertung und städtische Bevölkerungsverteilung – Theoretische und empirische Ergebnisse –, 2003.

Nr. 55 **Sanner, Helge**: Imperfect Goods and Labor Markets, and the Union Wage Gap, 2003.

Nr. 56 **Sanner, Helge**: Imperfect Goods and Labor Markets, Regulation, and Spillover Effects, 2003.

Nr. 57 **Holzer, Verena L**.: Überblick über die Energiepolitik der Europäischen Union, 2003.

Nr. 58 **Westerhoff, Horst-Dieter**: Hightech und Infrastruktur **–** Die Entwicklung der Geoinformationsbranche-, 2003.

Nr. 59 **Wagner, Wolfgang**: Simulationen von sozialer Segregation im monozentrischen Stadtsystem, 2003.

Nr. 60 **Wagner, Wolfgang**: Mietpreisbindung für Wohnungen und ihre Wirkung auf die soziale Segregation, 2003.