Institut für Mathematik
Lehrstuhl für Didaktik der Mathematik

Das Lehrpotential von Schulbuchlehrtexten im Fach Mathematik

Dissertation zur Erlangung des akademischen Grades

doctor rerum naturalium (Dr. rer. nat.)

in der Wissenschaftsdisziplin ‚Didaktik der Mathematik'

eingereicht an der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät

der Universität Potsdam

von Ekaterina Kaganova

Mai 2015

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung

Erste Annäherung

„Und nun möchte ich, dass ihr euch einmal selbst erarbeitet, wie ihr diese Gleichung lösen könnt. Lest dazu bitte in eurem Schulbuch auf Seite 3.“ Solche, vielleicht auch knappere Sätze wie z. B. „Zur Übung, Buch raus, Seite 3, Nr. 3a-e.“ oder „Wer das jetzt noch nicht verstanden hat, der liest bitte zuhause noch einmal nach, Lehrbuch, Seite 3.“ kennt wohl fast jeder, der sich noch an seinen eigenen Mathematikunterricht erinnern kann. Das Schulbuch ist ein etablierter Bestandteil des Mathematikunterrichts und die meisten Erwachsenen schreiben ihm und seinem Inhalt eine gewisse Autorität und eine Bedeutsamkeit zu, die sich auch aus der einst selbst erlebten Nutzung ergibt; immer beginnend mit dem rituellen unterrichtlichen Akt des Bücheraufschlagens, mit dem sich diese Wertzuschreibung über die Jahre als Schüler habitualisiert (vgl. Höhne 2003, S. 71ff.).

Das Mathematikschulbuch wird dabei von Lehrenden als Nachschlagewerk, als Aufgabensammlung, als eine (selbstständige) Erarbeitung neuen Stoffes unterstützendes Lehrmedium etc. zum Einsatz gebracht und gegebenenfalls von Lernenden als solches genutzt. Kein Mathematikunterricht ohne Mathematikschulbuch: Lehrer nutzen es, um ihren Unterricht vorzubereiten und/oder zu gestalten; Schüler, um in selbigem zu lernen und zu bestehen, vielleicht sogar aus eigenem Interesse; Eltern, um sich darüber zu informieren, was ihr Kind eigentlich können soll und wie sie ihm gegebenenfalls helfen können.

Neben diesen kollektiven Zugangsweisen lässt sich auch aus einer systemischen, soziologischen Perspektive auf das Schulbuch schauen. Die darin enthaltenen Informationen erscheinen dann als wichtiges und richtiges, als obligatorisch zu lernendes und gesellschaftlich akzeptiertes Wissen; Schulbücher sind markante gesellschaftliche Produkte, an deren Entwicklung zahlreiche Akteure unterschiedlicher Institutionen und sozialer Bereiche (Politik, Verwaltung, Wissenschaft, Wirtschaft) mitwirken.[1] Damit ist ein Schulbuch auch ein „Resultat vielfältiger Verhandlungen und Kompromisse“ (Ullmann 2008, S. 251) und stellt ein gesellschaftlich kontrolliertes Instrument zur Steuerung und Beeinflussung des Unterrichtsgeschehens dar. In dieser Hinsicht spiegelt es gesellschaftlich akzeptiertes bzw. erwünschtes Lehren und Lernen und stellt einen bedeutenden Indikator dafür dar, welche gesellschaftlichen Interessen hinsichtlich des schulischen Lernens jeweils dominieren.

Die Verwendung des Schulbuches – aus welcher Perspektive man es auch betrachtet – ist dabei eng an die Überzeugung gekoppelt, dass man durch seinen Einsatz mit oder auch ohne begleitende Lehrpersonen etwas lehren kann und dass letztlich die Schüler als die eigentlichen Adressaten aus ihm (selbstständig) etwas lernen, d.h. Wissen erwerben können. Die dabei zugrundeliegende Annahme, dass das Lernen von (mathematik-)unterrichtlichen Inhalten wirklich selbstständig möglich sein soll, ist natürlich angreifbar; gleichwohl steht sie

[1] Zur Rolle des Schulbuchs im soziologischen Kontext vgl. beispielsweise Haggarty und Pepin 2002, S. 568ff., Höhne 2003, S. 34, Valverde et al. 2002, S. 2ff., Ullmann 2008, S. 251ff.

im Einklang mit den Absichtserklärungen vieler Autoren(-kollektive), die sich auf den Einführungsseiten eines Schulbuchs zur intendierten Nutzungsweise äußern, wobei auf der Mikroebene in der Regel zwischen den Aufgaben und den Lehrtexten als den zwei zentralen Textsorten differenziert wird.[2] Beide Textsorten haben ihren jeweils eigenen Zweck: Die Aufgaben dienen vornehmlich dazu, das (im Unterricht) erworbene, also bereits bekannte Wissen anzuwenden und zu vertiefen. Die primäre Funktion der Schulbuchlehrtexte besteht demgegenüber vorrangig darin, den Schülern im Wesentlichen den selbstständigen Erwerb neuen Wissens zu ermöglichen. So erwähnen Schulbuchautoren bei den Nutzungshinweisen häufig, dass die Schüler die Lehrtexte (zuhause) lesen können, falls sie im Unterricht gefehlt oder etwas nicht verstanden haben. Die Frage, inwiefern Schüler aus den Mathematikschulbüchern tatsächlich selbstständig neues Wissen erwerben können, erscheint folglich insbesondere im Hinblick auf die *Lehrtexte* als sinnvoll. Was und wie (gut) lehren Mathematikschulbuchlehrtexte bzw. was und wie (gut) können adressierte Schüler selbstständig aus ihnen lernen? Im Folgenden werden diese beiden Dimensionen unter dem Begriff ‚Lehrpotential' von (Mathematik-)Schulbuchlehrtexten zusammengefasst.

Die Frage nach dem Lehrpotential von (Mathematik-)Schulbuchlehrtexten erscheint nicht nur hinsichtlich der (konkreten) Lehr-Lern-Prozesse relevant, sondern sie ist darüber hinaus auch aus der schon angedeuteten soziologischen Perspektive bedeutsam. Aufgrund der Tatsache, dass Schulbücher naturgemäß inhaltlich wesentlich konkreter gestaltet sind als Rahmenlehrpläne und im Vergleich zu diesen unmittelbar im Unterricht eingesetzt werden, dürften sie das Unterrichtsgeschehen viel stärker beeinflussen, wodurch sie eine Mediator-Rolle zwischen gesellschaftlich Gewolltem und dem konkreten Unterricht spielen (vgl. Valverde et al. 2002, S. 9ff.). Damit transportieren sie also nicht nur das gesellschaftlich Akzeptierte und Gewollte, sondern sie spiegeln in gewisser Hinsicht auch das tatsächlich im Unterricht (typischerweise) Stattfindende. Insgesamt sind Schulbücher aus dieser Perspektive Indikatoren dafür, was und wie im Mathematikunterricht gelehrt werden sollte und wie tatsächlich gelehrt wird. Die Schulbuchlehrtexte verweist dabei insbesondere auf die Phasen der Einführung neuen Lernstoffs. Die Lehrpotentiale von Schulbuchlehrtexten im Sinne des anhand ihres Einsatzes von den Schülern Verstehbaren und Lernbaren gewinnen im skizzierten soziologischen Kontext eine besondere Bedeutung.

Mathematikdidaktische Schulbuchforschung und das Lehrpotential von Mathematikschulbuchlehrtexten – ein Fazit

Angesichts der eben skizzierten Bedeutung von Schulbuchlehrtexten und Schulbüchern im Allgemeinen für das Unterrichtsgeschehen und den Lernerfolg von Schülern verwundert es, dass mathematikdidaktische Forschung bisher wenig Interesse an ihnen zeigt. Dies gilt insbesondere für den deutschsprachigen Raum. Im Zeitraum zwischen 1980 und 2014 sind in der Zeitschrift ‚Journal für Mathematik-Didaktik' (JMD), die als „das offizielle Organ der GDM

[2] Rezat nutzt die von den Autoren auf den Einführungsseiten zur (didaktischen) Funktion ihrer Texte gegebenen Hinweise, um einzelne Textsorten zu kategorisieren (vgl. Rezat 2009a, S. 69–110).

[Gesellschaft für Didaktik der Mathematik]" gilt,[3] von insgesamt 714 publizierten Artikeln lediglich vier (!) eindeutig der Schulbuchforschung zuzuordnen,[4] wobei drei dieser Artikel von einem Autor – Rezat – verfasst wurden (vgl. Rezat 2008, Rezat 2009b, Rezat 2011, Meyer und Voigt 2008). Des Weiteren existiert im Rahmen der GDM kein Arbeitskreis, der sich mit Mathematikschulbüchern befasst, und in den letzten Jahrzehnten wurde im deutschsprachigen Raum nur eine äußerst geringe Anzahl von mathematikdidaktischen Monographien publiziert, die in einem engeren Zusammenhang mit der Schulbuchforschung stehen.

Im Rahmen der internationalen mathematikdidaktischen Forschung wird den Schulbüchern zwar mehr Aufmerksamkeit geschenkt, verglichen aber mit anderen Bereichen ist die Schulbuchforschung auch hier eindeutig unterrepräsentiert und befindet sich erst am Anfang ihrer Entwicklung (vgl. Fan et al. 2013).[5] In den wenigen vorhandenen Arbeiten dominieren zwei Bereiche:[6]

1. Schulbuchbenutzung; d.h. die Frage, wie Schüler und/oder Lehrer Mathematikschulbücher einsetzen,
2. Schulbuchanalyse; d.h. die Frage, welche Qualität und welche Charakteristika bzw. Spezifika Mathematikschulbücher aufweisen und wie man diese analysieren kann.

Der Untersuchungsgegenstand des Lehrpotentials von Mathematikschulbuchlehrtexten gehört zum letztgenannten Bereich. Dabei ist davon auszugehen, dass das anhand der Lehrtexte Lernbare und Verstehbare ein zentrales Kriterium für Mathematikschulbücher ist und dass es die Schulbuchqualität entscheidend beeinflusst. Im Folgenden werden zentrale Richtungen des Forschungszweiges der Schulbuchanalyse skizziert, wobei eine Konzentration auf die Beiträge erfolgt, die hinsichtlich der Lehrpotentiale von Schulbuchlehrtexten relevant sind. Die Beiträge, die sich ausschließlich mit der Analyse von Aufgaben in den Mathematikschulbüchern beschäftigen, werden dementsprechend vernachlässigt.[7]

Bei einem relativ hohen Anteil der Beiträge, die versuchen, das Charakteristische bzw. das Spezifische der Mathematikschulbücher zu erfassen, konzentrieren sich die Autoren primär auf Merkmale der Schulbuchoberfläche; wie etwa die Art und die jeweilige Häufigkeit der vorkommenden Textsorten (beispielsweise Lehrtext, Beispiel, Aufgabe), die Länge der einzelnen Textsorten, die Themen, die Länge und die Sequenzierung einzelner Kapitel sowie die Anzahl und die Relevanz von Abbildungen (vgl. beispielsweise Mayer et al. 1995,

---

[3] Vgl. http://didaktik-der-mathematik.de/de/veroeffentlichungen.html, Stand: 24.04.14.

[4] Des Weiteren werden im Rahmen der JMD zwei Monographien, die sich mit Schulbüchern beschäftigen, vorgestellt (vgl. Lehmann 1987, Hayen 1990).

[5] Einen Überblick über die aktuelle internationale mathematikdidaktische Schulbuchforschung liefert Fan 2013 und Fan et al. 2013.

[6] Etwa 90% der englischsprachigen Beiträge zur mathematikdidaktischen Schulbuchforschung sind diesen Bereichen zuzuordnen (vgl. Fan 2013, S. 635).

[7] Die erwähnten Beiträge von Rezat sowie seine Dissertation (vgl. Rezat 2009a) sind im Wesentlichen dem erstgenannten Bereich – Schulbuchnutzung – zuzuordnen. Der erwähnte Beitrag zur Schulbuchforschung in JMD von Meyer und Voigt analysiert Einstiegsaufgaben, anhand derer eine Beweisidee entwickelbar ist (vgl. Meyer und Voigt 2008).

Valverde et al. 2002, Carter et al. 1997). Zumeist handelt es sich dabei um ländervergleichende Untersuchungen. Des Weiteren gibt es umfangreiche Beiträge, die die sprachlichen Merkmale lexikalisch-grammatikalisch-syntaktischer Natur von Mathematikschulbüchern und in ihnen enthaltenen Lehrtexten untersuchen (vgl. beispielsweise Österholm und Bergqvist 2013). Für den hier vorliegenden Forschungszusammenhang ist zentral, dass die Erforschung typographisch-inhaltlicher und sprachlicher Merkmale der Schulbuchoberfläche kaum (differenzierte) Auskunft darüber liefern kann, was anhand der Schulbücher lernbar ist und insbesondere inwiefern Schulbücher (selbstständiges) Lernen ermöglichen.

Es gibt Versuche, das Charakteristische von Mathematikschulbüchern jenseits der Schulbuchoberfläche zu erfassen. Diese Beiträge nehmen jedoch entweder einen spezifischen Lernstoff oder eine spezifische mathematische Denkweise bzw. Kompetenz – z.B. das Begründen – in den Blick. Zur erstgenannten Gruppe gehören beispielsweise die Arbeiten von Dole und Schield, die hinsichtlich des ‚proportionalen Denkens' (proportional reasoning) lernstoffspezifische Kategorien bzw. Lehrziele entwickeln und anschließend die entsprechenden Lehrtexte und (!) Aufgaben nach diesen Kategorien auf einer dreistufigen Skala beurteilen (vgl. Dole und Shield 2008).[8] Diese und andere lernstoffspezifische Schulbuchanalysen sind auf spezifische Schulbuchkapitel anwendbar; sie erfassen im Wesentlichen, inwiefern ein Schulbuch normativ gesetzten Lehrzielen entsprechen kann. Das anhand der Lehrtexte *tatsächlich* Lernbare wird dabei nicht in den Blick genommen.

Ähnliche Einschränkungen gelten im Hinblick auf Beiträge, die untersuchen, inwiefern Schulbücher eine spezifisch mathematische Denkweise – wie etwa das Begründen oder das Problemlösen – fördern (vgl. beispielsweise Fan und Zhu 2007, Stylianides 2009, Stacey und Vincent 2009). Dabei werden typischerweise zunächst mögliche Begründungen bzw. Problemlösungen klassifiziert und anschließend die in Schulbuchlehrtexten präsentierten – und gegebenenfalls die in Aufgaben geforderten – Begründungen und Problemlösungen den entwickelten Klassen zugeordnet. Auf diese Weise kann man das Potential von Schulbüchern für die Förderung des begründenden bzw. problemlösenden Denkens erfassen und beschreiben. Vor dem Hintergrund des hier verfolgten Forschungsansatzes ist es jedoch nicht zufriedenstellend, dass die kompetenzspezifischen Beurteilungskriterien bzw. -klassen wiederum lediglich auf bestimmte Lehrtexte anwendbar sind – nämlich auf die, in denen sich das fragliche Denken manifestiert. Damit erlauben auch solche Kriterien lediglich ein fragmentarisches Erfassen des anhand der Schulbuchlehrtexte Lernbaren.

Des Weiteren gibt es Versuche, allgemeine – also lernstoff- und kompetenzunspezifische – Kriterien zur Schulbuchbeurteilung, die auch über die Schulbuchoberfläche hinausweisen, zu entwickeln (vgl. beispielsweise Glatfeld 1981a, Lauter 1992, van Dormolen 1986). Allerdings

[8] Dole und Schield unterscheiden folgende lernstoffspezifischen Lehrziele (‚specific curriculum content goals'), die als Beurteilungsfolie für Schulbuchkapitel dienen, in denen Proportionalität behandelt wird: 1. Additive and multiplicative comparison is contextualised, 2. Common multiplicative structures and proportional thinking highlighted, 3. Effective use of a range of representation, 4. Related fraction ideas are explicitly connected (vgl. Dole und Shield 2008, S. 23–24).

sind diese Beiträge weniger analytisch, sondern vorrangig normativ ausgerichtet. Sie richten sich mit vorgestellten Beurteilungsdimensionen für die Qualität von Schulbüchern an die Lehrer und beinhalten (ungewichtet) unterschiedliche, für die Lehrer relevante Aspekte eines Schulbuchs. Dabei werden die einzelnen Kategorien im Grunde lediglich mitgeteilt, also kaum aus einer übergeordneten Theorie entwickelt und kaum erläutert. Lehrtexte und insbesondere die Frage, inwiefern man aus ihnen lernen kann, stellen lediglich eine von vielen Kategorien dar. Wie man im Einzelnen analysieren kann, inwiefern Schüler anhand der Lehrtexte selbstständig lernen können, wird dabei nicht weiter erläutert.[9] Dormolen entwickelt ebenfalls ein Beurteilungsverfahren für die Lehrer und widmet sich dabei explizit den Mathematikschulbuchlehrtexten (vgl. van Dormolen 1986). Als Analysekategorien, die in Übereinstimmung zu den bereits erwähnten qualitätsbestimmenden Kriterien nicht aus einer übergeordneten (Lern-)Theorie entwickelt, sondern mehr oder weniger plausibel zusammengestellt werden, nennt Dormolen folgende:

- Correctness of the content,
- Cursory and conceptual preparation,
- Adaption to the student's abilities.

Damit benennt Dormolen zwar textsortenspezifische Kategorien, die er zudem relativ ausführlich erläutert, allerdings wird auch mit diesem Verfahren das dem jeweiligen Lehrtext innewohnende Lern- und Verstehbare nicht umfassend – sondern lediglich im Rahmen der genannten Kategorien und damit stark fragmentarisch – erfasst.

Im Rahmen von Beiträgen, die vorrangig zu Evaluationszwecken verfasst wurden und die sich primär an Lehrkräfte richten, wurde auch versucht, die ‚Verständlichkeit' eines Mathematik(-schulbuch-)lehrtextes zu erfassen. Dabei dominierte im deutschsprachigen Raum in den siebziger und achtziger Jahren das im Rahmen der psychologischen Verstehensforschung entwickelte ‚Hamburger Verständlichkeitskonzept' (vgl. Langer et al. 1974), das als Beurteilungsinstrument hinsichtlich der Verständlichkeit von Mathematikschulbuchlehrtexten eingesetzt wurde (vgl. beispielsweise Götz 1981).[10] Die Verständlichkeit eines Lehrtextes umfasst demnach vier Dimensionen: Einfachheit der sprachlichen Formulierung, Gliederung/Ordnung, Kürze/Prägnanz sowie zusätzliche Stimulanz. Demnach wird ein Schulbuchlehrtext von Experten/Lehrern beurteilt, indem sie hinsichtlich jeder Dimension eine Bewertung auf einer fünfstelligen Skala (von positiv bis negativ) vornehmen. Auf diese

[9] So unterscheidet Glatfeld vier Dimensionen zur Beurteilung von Schulbüchern: inhaltliche Gestaltung, didaktisch-methodische Aufbereitung, Aufmachung und Lehrerband. Die ersten drei Dimensionen sind in weitere Unterdimensionen differenziert, die wiederum mehrere Leitfragen beinhalten. Der ‚Lehrtext' stellt dabei eine Unterkategorie im Rahmen der didaktisch-methodischen Aufbereitung eines Schulbuches dar und beinhaltet u.a. folgende Leitfragen: „Besteht für den Schüler die Möglichkeit, selbstständig Texte nachzuarbeiten und selbstständig Sachverhalte (kleineren Umfangs) zu erarbeiten? Erfordert das Lesen des Textes vom Schüler aktive Arbeit, d.h. ist der Text informativ und problemorientiert? Gibt es übersichtliche Zusammenfassungen und Musterlösungen?" (Glatfeld 1981a, S. 152).

[10] Das Hamburger Verständlichkeitskonzept wird im Rahmen der Schulbuchforschung nichtmathematischer Fächer bis heute angewendet. So beurteilt beispielsweise Rottensteiner Geschichtsbücher u.a. mit Hilfe dieses Konzepts (vgl. Rottensteiner 2012, S. 152ff).

Art wird einem (Schulbuch-)Lehrtext in einer zwar praktikablen, aber doch vornehmlich intuitiven und pauschalen Weise die Einfachheit versus Kompliziertheit der sprachlichen Formulierung, die Ordnung versus Unübersichtlichkeit, die Kürze versus Weitschweifigkeit sowie das Vorhandensein zusätzlicher Stimulanz und damit Verständlichkeit versus Unverständlichkeit bescheinigt.[11] Das Verfahren eignet sich dazu, pragmatisch orientierte Aussagen bezüglich der Verständlichkeit eines Lehrtextes zu treffen, es erlaubt aber nicht, das von Schülern Verstehbare und Lernbare (methodisch kontrolliert) zu erfassen und ist damit im Hinblick auf die Analyse von Lehrpotentialen nicht hilfreich.

Nach diesem Überblick ist übergreifend zu konstatieren, dass der mathematikdidaktische Forschungszweig, der das Charakteristische bzw. Spezifische von Mathematikschulbüchern und deren Qualität zu erfassen versucht, sich primär Schulbüchern in ihrer Gesamtheit zuwendet. Dabei werden häufig typographisch-inhaltliche und sprachliche Merkmale der Schulbuchoberfläche erfasst oder es werden spezifische Schulbuchausschnitte, in denen ein bestimmter Lernstoff enthalten ist bzw. in denen sich eine bestimmte Denkweise manifestiert, unter Anwendung lernstoff- bzw. kompetenzspezifischer didaktischer Kategorien analysiert. Allgemeine Analysekategorien, die jenseits der Schulbuchoberfläche liegen und die sich auf das Lehrpotential eines beliebigen Mathematikschulbuchlehrtextes beziehen, werden primär im Rahmen von für Lehrkräfte entwickelten Verfahren eingeführt. Die genannten Analysekriterien werden dabei nicht aus einer übergeordneten (Lern-)Theorie hergeleitet; sie erlauben bestenfalls einen intersubjektiven Abgleich unter Plausibilitätsgesichtspunkten, nicht aber ein wissenschaftlich fundiertes Urteil auf der Grundlage eines methodisch kontrollierten Vorgehens. Mit Hilfe der beschriebenen Ansätze lässt sich das aus den Lehrtexten Lernbare und Verstehbare – wenn überhaupt – lediglich fragmentarisch erfassen. Wenn man bedenkt, dass das Lehrpotential der Schulbuchlehrtexte ein zentrales Charakteristikum von Mathematikschulbüchern darstellt, ist mit diesem Überblick eine Leerstelle in der mathematikdidaktischen Forschung angezeigt, zu deren Schließung die hier vorgelegte Arbeit einen Beitrag leisten will.

Die weitgehende Abwesenheit der Lehrpotentialanalysen von Mathematikschulbuchlehrtexten im Rahmen der mathematikdidaktischen Schulbuchforschung verweist insbesondere auf ein erhebliches empirisches Defizit: Wir wissen wenig darüber, inwieweit Mathematikschulbuchlehrtexte in ihrer Struktur und in ihrem Inhalt so konstituiert sind, dass Schüler aus ihnen selbstständig lernen können. Darüber hinaus besteht in diesem Forschungszusammenhang ein theoretisch-methodologisches Defizit; die Größe ‚Lehrpotential eines Mathematikschulbuchlehrtextes' ist bisher im Rahmen der mathematikdidaktischen Schulbuchforschung nicht einmal ansatzweise konzipiert. Einzelne für das Lernen relevante Lehrtextaspekte, die die Spezifik dieser Textsorte berücksichtigen und außerhalb der sprachlichen Ebene liegen – wie beispielsweise die Kohärenz oder die Gliederung – werden zwar vereinzelt (wie z.B. im Rahmen der Untersuchungen nach dem

[11] Zu kritischen Anmerkungen bezüglich des Hamburger Konzepts siehe Glatfeld 1981b, S. 35ff. und Keitel et al. 1980, S. 91ff.

Hamburger Verständlichkeitskonzept) benannt und bewertet, jedoch kaum theoretisch fundiert und nicht in Beziehung zum Lernen gesetzt. Um das anhand eines Lehrtextes Lernbare und Verstehbare als eine textimmanente Größe zu konzipieren, ist es zunächst notwendig, die Rolle eines Lehrtextes für das kognitive Lernen systematisch zu betrachten. Die umfassendsten Überlegungen im deutschen Sprachraum liefern diesbezüglich Otte, Keitel und Seeger (vgl. Keitel et al. 1980). Die Autoren konzentrieren sich insbesondere auf das komplizierte Verhältnis zwischen externem Text – also den Zeichen auf dem Papier – und der kognitiven Tätigkeit, die sie auslösen. Allerdings bleibt die Konzeption beider Ebenen vage und skizzenhaft, sie ist insbesondere kaum in eine übergeordnete Text- bzw. Lerntheorie eingebettet.[12]

Insgesamt erscheint der wissenschaftliche Stand bezüglich der Lehrpotentiale von Mathematikschulbuchlehrtexten im Rahmen der mathematikdidaktischen Schulbuch-forschung in mehrfacher Hinsicht defizitär. Bislang sind kaum theoretische Ansätze entwickelt worden, die die Rolle von (Schulbuch-)Lehrtexten beim selbstständigen Lernen (beliebiger mathematikhaltiger Inhalte) konzipieren. Mit diesem theoretischen Defizit geht auch ein methodologisches einher: Es liegt kein begründetes Analyseinstrumentarium vor, mit dem das aus einem Lehrtext Lernbare und Verstehbare (methodisch kontrolliert) erfasst werden kann. Daraus resultiert auch, dass systematische Lehrpotentialanalysen von Schulbuchlehrtexten (im Fach Mathematik) bislang nicht vorliegen, so dass wir wenig darüber wissen, was und wie Mathematikschulbuchlehrtexte lehren, sowie darüber, was und wie Schüler aus ihnen lernen können. Folglich wissen wir auch kaum, inwiefern Mathematikschulbücher – in Übereinstimmung mit ihrer sozial vermittelnden Bedeutung – von Schülern tatsächlich als wertvoll erlebt werden (können).[13]

Die bisherigen Überlegungen zusammenfassend lässt sich im Hinblick auf den Forschungsgegenstand des Lehrpotentials von Mathematikschulbuchlehrtexten sowohl eine theoretische als auch ein methodologische und empirische Leerstelle in der mathematikdidaktischen Schulbuchforschung konstatieren. Vor dem Hintergrund der Bedeutung (der Lehrpotentiale) von Schulbuchlehrtexten als Indikatoren für das gesellschaftlich akzeptierte bzw. gewollte und das tatsächliche Lehren und Lernen erscheint diese mehrdimensionale Leerstelle als ein gravierendes Defizit.

[12] Die erste Textebene bestimmen die Autoren wie folgt: „Unter Text 1 [verstehen wir] die gegebene externe Textebene: der Text als Zeichenfolge, als Fakten und Information, darüber hinaus als Zeichenmodell.“ (Keitel et al. 1980, S. 80). Dabei bleibt unklar, was jeweils unter ‚Information‘ und ‚Fakten‘ verstanden wird und inwiefern sie mit einer ‚Zeichenfolge‘ eine Einheit bilden. Die Konzipierung der zweiten Textebene – der kognitiven Tätigkeit beim Lesen eines Textes – wird ebenfalls kaum systematisch vollzogen. Damit bleibt auch das Verhältnis zwischen externem Text und der kognitiven Tätigkeit, die er beim Leser auslösen kann, unbestimmt. Die später erschienenen Beiträge von Otte zu dieser Thematik weisen diesbezüglich ebenfalls eine fragmentarische Qualität auf (vgl. Otte 1983, Otte 1986).

[13] Empirische Studien zur Nutzungsweise von Mathematikschulbüchern durch Schüler liefern Hinweise darauf, dass Schüler selten selbstständig Lehrtexte lesen (vgl. Rezat 2011, Rezat 2009a, Zimmermann 1992). Dies kann als Indiz dafür gelten, dass Lehrtexte von Schülern für das Lernen als wenig hilfreich empfunden werden und dass es ihnen kaum oder nicht gelingt, Lehrtexte zum Zweck des Wissenserwerbs zu nutzen.

Diese Aussage ist auch angesichts der Tatsache, dass die Forschungslage bezüglich des Lehrpotentials von Schulbuchlehrtexten in der Schulbuchforschung für andere Unterrichtsfächer sowie im Rahmen der allgemeinen Schulbuchforschung ähnlich ist, nicht zu relativieren. Für die Größe ‚Lehrpotential eines Schulbuchlehrtextes' liegt im gesamten Spektrum der Schulbuchforschung bislang keine Konzeption vor. Schwerpunktmäßig werden vielmehr im Rahmen vornehmlich deskriptiv und/oder normativ angelegter Schulbuchuntersuchungen ‚fertige' und größtenteils textsortenunspezifische sprachliche und/oder didaktische Kategorien angewendet (vgl. beispielsweise Rottensteiner 2012, Scheller 2010).[14]

Das Vorhaben

Mit dieser Arbeit wird der Versuch unternommen, die beschriebenen Leerstellen zu reduzieren, indem zunächst das Konstrukt ‚Lehrpotential eines Mathematikschulbuchlehrtextes' als eine lernstoffunspezifische, intersubjektive, textinterne und möglichst analytisch zugängliche Größe konzipiert und anschließend systematisch erfasst wird. Dabei soll die theoretische Konzeption nicht einzelne (mehr oder weniger) plausible Kriterien umfassen, die dann in eine diskrete (Bewertungs-)Skala (gut/schlecht bzw. erfüllt/nicht) münden, wie dies vermehrt bei bislang vorliegenden kriteriengeleiteten Analysen von (Mathematik-)Schulbuchlehrtexten der Fall ist; vielmehr soll das zu entwickelnde Verfahren eine methodisch kontrollierte und differenzierte Beschreibung des Lehrpotentials eines Schulbuchlehrtextes – d.h. des anhand des Lehrtextes Lernbaren und Verstehbaren – erlauben.

Ein solches Vorhaben ist von vornherein mit zahlreichen Schwierigkeiten verbunden. Insbesondere ist es angesichts der in der Unterrichtsforschung vorherrschenden konstruktivistischen Ansätze fraglich, ob das Lehrpotential eines Lehrtextes als eine *textinterne* Größe überhaupt sinnvoll konzipierbar ist. So schreibt beispielsweise Rezat: „Der Sinn des Textes ist keine textimmanente Eigenschaft, sondern entsteht erst in der Interaktion des Lesers mit dem Text" (Rezat 2009a, S. 5). Um fundiert entscheiden zu können, inwiefern das anhand eines (Lehr-)Textes Verstehbare und Lernbare als Textimmanentes und intersubjektiv Gültiges angenommen werden kann, ist der Zusammenhang zwischen einem Lehrtext einerseits und dem Lernen des Schülers andererseits genau zu betrachten. Dabei spielt das Verhältnis zwischen externem Text – also den Zeichen auf dem Papier – und dem, was die Textrezeption in den Köpfen der (adressierten) Leser bewirkt, eine zentrale Rolle. Insbesondere ist dabei wesentlich, inwiefern anhand der Zeichen *gelernt* werden kann. Damit ist die Notwendigkeit einer Lerntheorie angezeigt, in der u.a. die Spezifika der Lernquelle (schriftlicher, informierender Text in einem Schulbuch)

[14] Einen relativ umfassenden Überblick über die allgemeine Schulbuchforschung und ihre Methoden liefern Knecht et al. 2014 und Nicholls 2003. Neben der erwähnten kriteriengeleiteten Analyse dominiert bei der Erforschung von Schulbüchern gesellschaftswissenschaftlicher Fächer im deutschsprachigen Raum die Inhaltsanalyse, die mit zahlreichen erkenntnistheoretischen Problemen verbunden ist. Insbesondere werden in ihrem Rahmen die Rezipienten/Schüler kaum systematisch berücksichtigt, so dass die Frage, was von Schülern anhand eines Lehrtextes verstehbar und lernbar ist, nicht beantwortet werden kann. Zur Kritik der Inhaltsanalyse im Rahmen der Schulbuchforschung siehe Höhne 2003, S. 29–35.

systematisch berücksichtigt werden. Eine solche Konzeption des Zusammenhangs zwischen Lehrtext und Lernen befindet sich an der Schnittstelle mindestens zweier Wissenschaftszweige: der Kognitionspsychologie und der Sprachwissenschaften, insbesondere der Textlinguistik. Erst auf der Grundlage einer interdisziplinären Lern-Text-Theorie erscheint das anhand eines Lehrtextes Verstehbare und Lernbare diskutierbar.

Um das Vorhaben einer theoretischen Fundierung und einer nachfolgenden empirischen Analyse des Lehrpotentials von mathematischen Schulbuchlehrtexten zu realisieren, werden im folgenden zweiten Kapitel zunächst die für diese Arbeit maßgeblichen Begriffe präzisiert. Auf dieser Grundlage wird in einem nächsten Schritt die Rolle eines Lehrtextes beim Lernen theoretisch fundiert (vgl. Kap. 3). Dabei wird zunächst eine allgemeine Lerntheorie skizziert (vgl. Kap. 3.1); als deren Grundlage dient primär die im Rahmen der Kognitionspsychologie entwickelte Schematheorie, die eine übergeordnete Theorie der menschlichen Kognition darstellt. Nach der lerntheoretischen Einführung des Schema-Begriffs als einem organisierten Baustein des (deklarativen) Wissens wird in Kapitel 3.2 die Spezifik der Lernquelle (ein schriftlicher Text) systematisch berücksichtigt. Das Lernen aus Lehrtexten wird dabei als kognitive Lehrtextverarbeitung aufgefasst, in deren Vollzug der Leser Schemata aktiviert und belegt und damit mehr oder weniger intakte mentale Modelle konstruiert, die wiederum zu Veränderungen der Schemata führen. Die jeweilige Spezifik eines Lehrtextes legt im Prozess der Textverarbeitung beim Leser die mehr oder weniger leichte Konstruktion von Modellen nahe. Auf der Grundlage der Beschreibung des Zusammenhangs zwischen einem Lehrtext als jeweils spezifisches Angebot zur Modellkonstruktion und der Lehrtextverarbeitung als deren Vollzug wird im vierten Kapitel die Größe ‚Lehrpotential eines Schulbuchlehrtextes' entwickelt. Dabei wird das Hilfskonstrukt eines ‚Modellschülers', der über lernoptimale Voraussetzungen und das Wissen über alle Inhalte der im jeweiligen Schulbuch vorangegangenen Lehrtexte verfügt, eingeführt. Er dient in der Untersuchung als Konstrukt, in dem sich das Lehrpotential eines Lehrtextes als das Lernen des Modellschülers zeigt. Das Lehrpotential eines Schulbuchlehrtextes kann so als Ergebnis der Lehrtextverarbeitung durch den Modellschüler bestimmt werden; es ist die Gesamtheit der vom Lehrtext nahegelegten intakten Modelle und der entsprechender Schemaveränderungen auf Seiten des Modellschülers. Aus diesen theoretischen Überlegungen wird im Folgenden ein allgemeines analytisches Verfahren zur Bestimmung des Lehrpotentials eines Schulbuchlehrtextes abgeleitet, das im Prinzip auf alle Schulbuchlehrtexte – also nicht nur im Fach Mathematik – anwendbar ist (vgl. Kap. 4.2). Im daran anschließenden fünften Kapitel findet eine Konkretisierung des entwickelten theoretischen Rahmens in Bezug auf *Mathematik*schulbuchlehrtexte statt, indem zunächst (abstraktionshohe) schulmathematische Schemata des Modellschülers konzipiert werden (vgl. Kap. 5.1). Dabei werden zwei Schematypen unterschieden: das AUFGABE- und das MATHEMATISCHE-ELEMENT-Schema. Im Folgenden werden auf dieser Grundlage einzelne Aspekte des Lehrpotentials von Mathematikschulbuchlehrtexten präzisiert und das entwickelte theoretisch-methodische Instrumentarium bei der Analyse eines kurzen Lehrtextes – eines ‚Kastens' – veranschaulicht (vgl. Kap. 5.2 und 5.3).

Das sechste Kapitel widmet sich der empirischen Arbeit; hier wird das Lehrpotential von vier (aktuellen) Mathematikschulbuchlehrtexten der Jahrgangsstufen 6 und 7 zu teilweise verschiedenen Inhaltsbereichen analysiert. Dabei wird mit dem entwickelten methodischen Instrumentarium in extensiver Weise untersucht, welches Lehrpotential die jeweiligen Schulbuchlehrtexte haben, d.h. inwiefern der Modellschüler anhand dieser Texte lernen kann. In diesem Zusammenhang steht die Frage, ob das AUFGABE- oder das MATHEMATISCHES-ELEMENT-Schema eine (leichtere) sinnvolle Ausdeutung der jeweiligen (Gesamt-)Lehrtexte erlaubt, im Mittelpunkt. Darüber hinaus wird die Leistungsfähigkeit der entwickelten Untersuchungsmethodik in der analytischen Praxis überprüft.

Im siebenten Kapitel werden die analytischen Ergebnisse zusammengefasst, abstrahiert, teilweise pointiert und in einem soziologischen Kontext interpretiert. Dabei werden auf der Grundlage der zentralen empirischen Ergebnisse weiterführende Aussagen zum Lehrpotential von Mathematikschulbuchlehrtexten und in diesem Zusammenhang auch zum Widerspruch zwischen normativen Zielvorgaben im Sinne ‚mathematischer Allgemeinbildung‘ einerseits und Zielrealisationen in der Unterrichtspraxis andererseits getroffen sowie Querverbindungen zu weiteren Elementen des Mathematikunterrichts – insbesondere zu fragend-entwickelnden Unterrichtsgesprächen in Einführungsphasen – hergestellt. Im abschließenden achten Kapitel werden die zentralen theoretischen, methodologischen und empirischen Ergebnisse dieser Arbeit zusammengefasst.

2. Begriffliche Klärungen

In diesem Kapitel erfolgt eine nähere Bestimmung einiger für diese Arbeit zentraler Begriffe. Im ersten Unterkapitel werden die einzelnen Bestandteile des ‚Lernens aus (Schulbuch-)Lehrtexten' geklärt, indem zunächst auf die Termini ‚Schulbuch', ‚Lehrtext', sowie ‚Schulbuchlehrtext' und anschließend auf den Lernbegriff eingegangen wird. Im zweiten Unterkapitel wird der für diese Arbeit zentrale Begriff ‚Wissen' betrachtet, indem die für das ‚Lernen aus mathematischen Lehrtexten' relevanten Wissensarten differenziert und erläutert werden.

2.1. Lernen und (Schulbuch-)Lehrtext

Schulbuch, Lehrtext und Schulbuchlehrtext

Ein Schulbuch ist zunächst „ein […] für den Unterricht verfasstes Lehr-, Lern- und Arbeitsmittel […], [das] einen systematischen Aufbau des Jahresstoffs einer Schule [enthält]" (Wiater 2003, S. 12). Schulbücher bestehen aus Texten unterschiedlicher Art, dabei soll unter einem Text zunächst ein schriftliches Gebilde sprachlicher Zeichen, die nicht nur dem System der ‚natürlichen' Sprache angehören, sondern bei denen es sich auch um Bilder, mathematische und typographische Zeichen handeln kann, verstanden werden. Alle Texte, die sich in einem Schulbuch befinden, werden Schulbuchtexte genannt. Ein Titelbild, eine Randnotiz, ein Inhaltsverzeichnis, ‚Themenseiten', ein Verzeichnis mathematischer Symbole usw. sind aus dieser Sicht Schulbuchtexte. Es handelt sich also um ganz unterschiedliche Texte mit verschiedenen Funktionen und verschiedenen sprachlichen, typographischen und inhaltlichen Merkmalen. Aus sprachwissenschaftlicher Sicht handelt es sich um unterschiedliche Textsorten, wobei unter einer Textsorte eine Menge von Texten verstanden wird, die bestimmte relevante gemeinsame Merkmale aufweisen und sich dadurch von anderen Textsorten abgrenzen lassen (vgl. Heinemann und Heinemann 2002, S. 142).[15] Die relevanten Textmerkmale beziehen sich im Wesentlichen auf vier Dimension: situativer Kontext, inhaltliche Dimension, Textfunktion und sprachliche Gestalt eines Textes (vgl. Adamzik 2004, S. 58–59). Aus dieser Perspektive können alle Schulbuchtexte aufgrund ihres gleichen situativen Kontextes zur Textsorte ‚Schulbuchtext' gezählt werden.

In dieser Arbeit geht es um Schulbuchlehrtexte, das heißt um Lehrtexte, die sich in einem Schulbuch befinden. Sie stellen eine Untermenge der Schulbuchtexte dar und bilden in ihrer Gesamtheit ebenfalls eine eigene Textsorte.[16] Im Folgenden soll diese spezifische Textsorte anhand der oben benannten Dimensionen näher charakterisiert werden, indem ihre gemeinsamen Textmerkmale durch die Abgrenzung zu anderen Schulbuchtextsorten herausgearbeitet werden.

[15] Eine mögliche Kategorisierung einzelner Textsorten im Rahmen eines mathematischen Schulbuches stellt Rezat vor; vgl. Rezat 2009a, S. 69–110.

[16] Im Folgenden werden mit dem Begriff ‚Lehrtext' sowohl die Textsorte selbst als auch deren einzelne Vertreter bezeichnet.

Textfunktion

„Der Terminus ‚Textfunktion' bezeichnet die in einem Text mit bestimmten, konventionell geltenden, d.h. in der Kommunikationsgemeinschaft verbindlich festgelegten Mitteln ausgedrückte Kommunikationsabsicht des Emittenten. Es handelt sich also um die Absicht des Emittenten, die der Rezipient erkennen soll" (Brinker et al. 2014, S. 97). Die Textfunktion ist einerseits von der ‚wahren Absicht' des Autors und andererseits von der Wirkung, die der Text auf den Leser ausübt, zu unterscheiden. Die Textfunktion erfasst, die „Art des kommunikativen Kontakts" (Brinker et al. 2014, S. 98), die mit sprachlichen Mitteln ausgedrückt wird.

Die Textfunktion eines Lehrtextes ist *das Vermitteln neuen Wissens,* d.h. es wird mit sprachlichen Mitteln signalisiert, dass der Autor sich an einen ‚Nichtwissenden' wendet. Dabei ist die Absicht erkennbar, dass der Leser sich *neues Wissen aneignen* und nicht etwa das bereits bekannte Wissen festigen beziehungsweise auffrischen soll. Aufgrund dieses Merkmals wird ein Lehrtext von den meisten Textsorten, die in einem (mathematischen) Schulbuch auftauchen, wie etwa Übungsaufgaben, Testseiten, Inhaltsverzeichnissen usw. abgegrenzt. Gleichzeitig wird eine Ähnlichkeit zwischen einem Lehrtext und einer Einstiegsaufgabe sichtbar – beide dienen dazu, dass der Leser zu neuem Wissen gelangt. Allerdings wird mit einem Lehrtext das rezeptive Lernen, mit einer Einstiegsaufgabe hingegen das entdeckende Lernen angestrebt.[17]

Inhaltliche Dimension

Ein Lehrtext zeichnet sich in Übereinstimmung mit seiner Textfunktion dadurch aus, dass er den „vollständige[n] Inhalt von dem, was gelernt werden soll, in seiner fertigen Form" (Ausubel et al. 1980, S. 47) enthält. Dies stellt ein unterscheidendes Merkmal zu den Einstiegsaufgaben dar, bei denen der „Hauptinhalt dessen, was gelernt werden soll, nicht gegeben ist, sondern vom Schüler entdeckt werden muß, bevor er ihn sinnvoll in seine kognitive Struktur einverleiben kann" (Ausubel et al. 1980, S. 47–48).[18] Mathematische Lehrtexte zeichnen sich des Weiteren dadurch aus, dass ihre Inhalte mathematischer Natur sind.

Sprachliche Gestalt

Ein Lehrtext weist eine gewisse Länge auf und hat aufgrund typographischer Zeichen einen deutlichen Anfang und ein deutliches Ende. Im Gegensatz zu einem Musterbeispiel, das wie ein Lehrtext wissensvermittelnd und inhaltlich ‚vollständig' ist, enthält ein Lehrtext mehrere sprachlich zusammenhängende, ‚ausformulierte' natursprachliche Sätze, die sequenziell angeordnet sind.[19]

---

[17] Zum rezeptiven und entdeckenden Lernen vgl. Ausubel et al. 1980, S. 47–50.

[18] Ausubel hat bei zitierten Merkmalen nicht nur Lehrtexte/Einstiegsaufgaben im Blick, sondern in einem allgemeineren Sinne alle Kommunikationsarten, mit denen rezeptives/entdeckendes Lernen angestrebt wird.

[19] Sprachlich zusammenhängende Sätze werden in der Linguistik als ‚kohäsiv' oder ‚grammatisch kohärent' bezeichnet. Dabei sei an dieser Stelle angemerkt, dass ein sprachlicher Zusammenhang weder notwendig noch

Damit ist ein Schulbuchlehrtext ein spezifischer Lehrtext, der sich in einem Schulbuch befindet und alle eben genannten Eigenschaften aufweist. Man kann zwei Arten der Schulbuchlehrtexte unterscheiden: die obligatorischen und die fakultativen. Erstere zeichnen sich dadurch aus, dass im Schulbuch aufgrund der Überschriften und typographischen Hinweise und verbunden mit Erläuterungen auf den Einführungsseiten explizit signalisiert wird, dass die Inhalte der Lehrtexte zu obligatorischen Unterrichtsinhalten zu zählen sind. Die fakultativen Schulbuchlehrtexte, wie etwa ‚Themenseiten', beinhalten demgegenüber ergänzende, weiterführende Unterrichtsinhalte. In dieser Arbeit wird das Lehrpotential obligatorischer Schulbuchlehrtexte untersucht.

In Mathematikschulbüchern tauchen neben den erwähnten Textsorten oft auch die sogenannten ‚Kästen' auf. Auf der inhaltlichen und sprachlichen Ebene weist ein Kasten die Merkmale eines Lehrtextes auf; er enthält ‚den Hauptinhalt dessen, was gelernt werden soll in seiner fertigen Form' und besteht in der Regel aus mehreren sprachlich zusammenhängenden Sätzen. Allerdings ist ein Kasten im Gegensatz zu einem ‚klassischen' Lehrtext eingerahmt und vergleichsweise kurz. Aufgrund seiner Kürze signalisiert er, dass der Autor sich an einen Leser wendet, der sich weniger neues Wissen aneignen soll, sondern eher das bereits bekannte Wissen auffrischen bzw. festigen soll. Dieser Hinweis auf die Kommunikationsabsicht bzw. auf die Textfunktion ist allerdings recht vage, so dass angenommen werden kann, dass einige Schüler, insbesondere wenn sie im Unterricht gefehlt haben, die Kästen auch zum Zwecke der Wissensaneignung nutzen. In gewisser Hinsicht kann man also einen Kasten als einen besonderen Lehrtext betrachten, der primär auf der sprachlich-typographischen Ebene Spezifika gegenüber ‚klassischen Lehrtexten' aufweist.

Lernen aus (Lehr-)Texten als spezifisches kognitives Lernen

Wenn die Frage gestellt wird, inwiefern ein Schüler aus einem Lehrtext selbstständig lernen kann, dann ist zu präzisieren, welches Lernen man ‚im Blick' hat. Der psychologische Lernbegriff ist sehr breit angelegt und umfasst den Prozess und das Produkt „des Neuerwerbs oder [der] Veränderung psychischer *Dispositionen*, d.h. Bereitschaft und Fähigkeit, bestimmte seelische oder körperliche Leistungen zu erbringen" (Edelmann 2000, S. 278, Hervorhebung im Original). Lernen führt – und das ist sein definitorisches Merkmal – zu „relativ überdauernden Veränderungen im Organismus, [die dazu führen, dass] der Lerner sich anders verhalten, anders denken, anders wollen, anders handeln **kann**" (ebd.). Ein so verstandener Lernbegriff umfasst vielfältige Erscheinungen, die relativ dauerhafte Veränderungen des Verhaltens, Denkens bzw. Wissens, der Emotionen und Einstellungen sowie

hinreichend dafür ist, dass eine Satzfolge als ein sinnvoller Text bzw. als eine Einheit verstanden wird. Der folgende Text veranschaulicht, dass Kohäsion bezüglich der Herstellung einer sinnvollen Ganzheit nicht ausreichend ist: „Ich habe eine alte Freundin in Hamburg getroffen. Dort gibt es zahlreiche öffentliche Bibliotheken. Diese Bibliotheken wurden von Jungen und Mädchen besucht. Die Jungen gehen oft in Schwimmbäder. Die Schwimmbäder waren im letzten Jahr mehrere Wochen geschlossen. Die Woche hat 7 Tage usw. usw." (Brinker et al. 2014, S. 41). Die recht schwierigen Fragen, was eine ‚sinnvolle Ganzheit' ist und welche Textmerkmale notwendig sind, damit aus einer ‚sinnlosen Satzfolge' eine ‚sinnvolle' wird, spielen in dieser Arbeit eine zentrale Rolle und werden im Laufe der Ausführungen zum Teil beantwortet.

des Handelns beinhalten. Im Rahmen der Lernpsychologie wurden entsprechend unterschiedliche Lernformen, die in unterschiedliche Lerntheorien eingebettet sind, modelliert.[20] In dieser Arbeit werden ausschließlich die *Veränderungen auf der Ebene des Wissens* betrachtet; eventuell mögliche relativ dauerhafte Veränderungen des automatisierten Handelns, des Verhaltens sowie der Emotionen und Einstellungen, die aufgrund des Lesens eines Lehrtextes beim Lernenden auftreten können, werden weitgehend aus den Betrachtungen ausgeschlossen.

Die Prozesse des Wissenserwerbs sowie deren Ergebnisse werden im Rahmen der kognitiven Lerntheorien differenziert modelliert. Lernen wird dabei im Gegensatz zu behavioristischen Lerntheorien, die sich eher den Veränderungen der Emotionen und des Verhaltens widmen, nicht als passive Anpassung des Organismus an seine Umwelt, sondern als eine primär vom Subjekt gesteuerte Tätigkeit konzipiert. Bezogen auf den Wissenserwerb heißt das, dass „unser Wissen [kein] abgeleitetes Produkt [ist], das sich aus den objektiven Reizinformationen, die wir wahrnehmen und verarbeiten und den Mechanismen des Gedächtnisses eindeutig vorhersagen lässt" (Hasselhorn und Gold 2009, S. 60). Entsprechend wird der „aktive und vom lernenden Individuum selbst kontrollierte Charakter des Wissenserwerbs" (Hasselhorn und Gold 2009, S. 60) in kognitiven Lerntheorien betont. Des Weiteren läuft das kognitive Lernen unter Beteiligung des Bewusstseins ab und unterscheidet sich dadurch vom ‚impliziten Lernen', wie beispielsweise dem ‚unbewussten' Erwerb der Muttersprache (vgl. Winkel et al. 2006, S. 211–213).

Das kognitive Lernen kann in einer ersten Näherung wie folgt skizziert werden: Etwas aus der Umwelt des Subjektes (Information) wirkt auf das Subjekt ein und aktiviert dabei bestimmtes (Vor-)Wissen. Mit Hilfe dieses Vorwissens wird die Information *mental verarbeitet*. Dieser Prozess kann vorerst als eine Interaktion neuer Information mit dem vom Lernenden bereits Gewussten metaphorisch angedeutet werden (vgl. Ausubel et al. 1980). Die Information findet also auf der Grundlage des bereits Gewussten Eingang ins Mentale, dabei wird sie individuell selegiert, interpretiert und akzentuiert. Falls nun im Laufe dieses Prozesses Veränderungen des aktivierten Vorwissens auftreten, die vielfältiger Art sein können, und falls diese Veränderungen darüber hinaus relativ dauerhaft sind, d.h. auch im inaktiven Zustand bestehen, findet Wissensaneignung, also Lernen, statt. Damit können die zentralen Begriffe zunächst wie folgt festgehalten werden:

1. Lernen ist der Prozess der mentalen Informationsverarbeitung, die in eine Veränderung des Vorwissens mündet.
2. Das Lernergebnis ist die Gesamtheit der im Zuge einer Informationsverarbeitung vollzogenen relativ dauerhaften Veränderungen des (Vor-)Wissens.

Das Lernen aus (Lehr-)Texten zeichnet sich durch die Spezifik der Informationsquelle aus. Die Information ist mit Hilfe schriftlicher sprachlicher Zeichen festgehalten und liegt nicht etwa

[20] Einen Überblick über unterschiedliche Lernformen und Theorien liefern beispielsweise Edelmann 2000, Seel 2003 und Winkel et al. 2006.

als Vorführung einer Handlung oder als mündliche Diskussion vor. Diese Spezifik der Informationsquelle sollte bei der Modellierung des passenden Lernprozesses, d.h. der kognitiven Informationsverarbeitung berücksichtigt werden.

Bevor nun die theoretischen Grundlagen des kognitiven Lernens aus Lehrtexten skizziert werden, sollen zunächst der für diese Arbeit zentrale Begriff ‚Wissen' genauer beleuchtet und die im Lehr- und Lernkontext relevanten Wissensarten differenziert werden. Diese Ausführungen dienen der Generierung eines Beschreibungsinstrumentariums, das im weiteren Vorgehen begriffliche Klarheit sichern soll.

2.2. Wissen und Wissensarten

Der Begriff ‚Wissen' ist im Alltagsverständnis sehr umfangreich angelegt; Wissen kann ein Mensch, aber auch eine generationenübergreifende Gruppe von Menschen eines Kulturkreises (‚Wissen der alten Griechen') oder auch eine bestimmte Berufsgruppe ‚besitzen'. Wissen ist in den Köpfen der Menschen, aber auch in fixierter Form (Bücher, digitale Medien) gespeichert. Menschen können etwas ganz sicher wissen, aber auch etwas meinen oder glauben (unsicheres Wissen) und schließlich etwas kaum oder gar nicht wissen. Und wenn jemand sagt, dass er etwas ganz sicher weiß, dann ist er davon überzeugt, dass das von ihm Gewusste wahr ist. All diese Facetten des Alltagsverständnisses fließen in Konzeptualisierungen des Wissensbegriffs im Rahmen unterschiedlicher wissenschaftlicher Forschungsrichtungen ein, wodurch der alltägliche Wissensbegriff jeweils präzisiert, aber auch in seinem Umfang erweitert wird. Insbesondere Philosophie, Soziologie und Psychologie widmen sich dem Phänomen ‚Wissen'.[21] Die philosophische Betrachtungsweise zeichnet sich dadurch aus, dass die ‚Wahrheit' des Wissens eine wesentliche Rolle spielt, das Wissen ist hier demzufolge eng mit dem Begriff der ‚Erkenntnis' verbunden. Die psychologischen Konzeptionen betrachten eher das Wissen des einzelnen Menschen, unabhängig davon, wie ‚wahr' es ist. Soziologen verstehen ‚Wissen' demgegenüber nicht primär als ein ‚subjektives', sondern als ein vorwiegend ‚kollektives' Phänomen (Knoblauch 2005, S. 349). Des Weiteren spielt der Begriff auch in den Sprachwissenschaften zunehmend eine Rolle; oft wird er in psychologischer Prägung, wie etwa in der kognitiven Linguistik, gebraucht. In der erziehungswissenschaftlichen Diskussion schließlich wird der Terminus ‚Wissen' zwar oft verwendet, es finden sich hier jedoch nur vereinzelte Versuche, „Wissen als grundlegendes Konzept fruchtbar zu machen" (Höhne 2003, S. 106).[22]

An dieser Stelle werden die im Rahmen dieser Arbeit relevanten Wissensarten beschreibend und kontrastierend umrissen.

[21] Einen knappen Überblick ausgewählter Konzeptualisierungen des Wissensbegriffs liefern Steindorf 1985, S. 13–19 und Antos 2005.

[22] Einen Überblick über ‚Wissen als erziehungswissenschaftliche Kategorie' liefert Höhne 2003, S. 105–129.

Individuelles versus gesellschaftliches Wissen

In Anlehnung an eine soziologisch orientierte Betrachtungsweise wird in dieser Arbeit zwischen ‚individuellen' und ‚gesellschaftlichen Wissensvorräten' unterschieden (vgl. Luckmann 2002). Das gesellschaftliche Wissen zeichnet sich dadurch aus, dass es sozial relevant und gesellschaftlich akzeptiert ist. Es wird von mehreren Gesellschaftsmitgliedern geteilt und liegt oft in einer manifestierten Form (Bücher) vor. Sowohl das Schulwissen, also das Wissen, das in den Schulen vermittelt wird, als auch das Schulbuchwissen können als gesellschaftliches Wissen gedacht und theoretisch konzipiert werden.[23] Die soziologische Sicht auf Schulbuchlehrtexte wird in dieser Arbeit weitgehend vernachlässigt; lediglich auf der Ebene möglicher Schlussfolgerungen, die die vorliegende Untersuchung nahelegt, wird diese Perspektive skizzenhaft einbezogen (vgl. Kap. 7.2).

Beim ‚Lernen aus Lehrtexten' wird individuelles Wissen verändert, daher wird im Folgenden diese Wissensart genauer betrachtet. Zunächst soll unter individuellem Wissen wie erwähnt der „relativ dauerhafte Inhalt des Gedächtnisses" (Gruber und Stamouli 2009, S. 34), genauer des Langzeitgedächtnisses, verstanden werden. Aus kognitionstheoretischer Sicht sind diese Inhalte kognitive Zustände, die aus kognitiven Prozessen (wie Informationsverarbeitung, sowie rationalem Denken) resultieren (vgl. Seel 1991, S. 10). Es wird ein weiter Wissensbegriff zugrunde gelegt, der unbegründete Gedächtnisinhalte nicht ausschließt. Dementsprechend werden auch Sachverhalte, deren ‚Wahrhaftigkeit' nicht aus der inneren Begründbarkeit bzw. Einsicht, sondern beispielsweise aus dem Glauben an die Autorität der Quelle des Wissens (Buch, Lehrer, Eltern) resultiert, nicht als Glauben, sondern als Wissen betrachtet.[24]

Im Folgenden werden unterschiedliche im Lehr- und Lernkontext relevanten Wissensarten individuellen Wissens überblicksartig dargestellt.[25] Damit wird der Umfang des Wissensbegriffs präzisiert und ein differenziertes begriffliches Instrumentarium generiert. Dabei ist grundsätzlich anzuerkennen, dass die Grenzen zwischen den einzelnen Wissensarten individuellen Wissens unabhängig von ihren Unterscheidungskriterien stets fließend sind, die einzelnen Arten sind damit nicht disjunkt.

Schulwissen versus Alltagswissen

Subjektive Wissensbestände können nach dem institutionellen Ort ihres Erwerbs differenziert werden. Schulwissen ist dasjenige, das in der Institution ‚Schule' erworben wird. Einen großen Teilbereich der konträren Wissensart, also des Nichtschulwissens, bildet

[23] Eine Theorieskizze zum Schulwissen als einem gesellschaftlichen Wissen, die innerhalb der deutschsprachigen Mathematikdidaktik aufgrund einer sehr ausführlichen Rezension von Seeger et al. 1989 recht verbreitet ist, liefert Chevallard 1985. Höhne konzipiert das Schulbuchwissen als ein spezifisches gesellschaftliches Wissen, das er als ‚soziokulturell' bezeichnet; vgl. Höhne 2003.

[24] Innerhalb der Kognitionspsychologie variiert der Wissensbegriff; so benutzt Seel einen im oben genannten Sinne engen Wissensbegriff und schließt damit Geglaubtes aus dem Wissen aus; vgl. Seel 1991, S. 11.

[25] Zu relativ umfassenden Überblicken unterschiedlicher Wissensarten im Bereich der Psychologie vgl. Jong und Ferguson-Hessler 1996 und im Bereich der Sprachwissenschaften Heinemann und Viehweger 1991, S. 93–111.

das Alltagswissen, d.h. das Wissen, das außerhalb jeglicher gesellschaftlicher Institutionen erworben wurde. Schulmathematisches (individuelles) Wissen ist ein spezifisches Schulwissen, also Wissen, das im Rahmen des Mathematikunterrichts angeeignet wird. Folglich wird aus mathematischen Schulbuchlehrtexten schulmathematisches Wissen erworben.

Prozedurales, deklaratives und konzeptuelles Wissen

Im Rahmen der kognitiven Psychologie wird das individuelle Wissen nach seinem jeweiligen Zweck differenziert. Dies führt u.a. zu der weit verbreiteten dualen Einteilung des Wissens in prozedurales und deklaratives Wissen.[26] Während die Gedächtnisinhalte, die zum Bereich des deklarativen Wissens gezählt werden, Fakten, allgemeine Zustände, Prozesse usw. *repräsentieren*, dienen die prozeduralen Wissensbestände innerhalb des Systems als „Anweisung für den Vollzug eines Prozesses und sind ausführbar“ (Schnotz 1994, S. 36). Das Wissen *über* Prozeduren, Handlungen und Verfahren wird aus dieser Pespektive als deklarativ betrachtet. Wenn jemand weiß, wie etwas getan werden soll, aber nicht in der Lage ist, diese Handlung auszuführen, so besitzt er deklaratives Wissen, nicht aber prozedurales Wissen bezüglich dieser Handlung.[27] Wenn jemand dagegen bestimmte Handlungen erfolgreich ausführen kann, wie etwa Skifahren oder Schnürsenkel zubinden, die Handlungsschritte aber nicht direkt verbalisieren kann, weil sie ihm unbewusst sind, dann besitzt er prozedurales, nicht aber deklaratives Wissen. So verstandenes prozedurales Wissen stellt automatisierte Fertigkeiten bzw. Routinen dar, die für den Anwender schwer verbalisierbar sind.[28] Sie werden langsam und mühsam erworben, können aber anschließend schnell und effizient genutzt werden. Das deklarative Wissen wird dagegen relativ schnell und leicht erworben, die Nutzung dieses Wissen erfolgt jedoch langsam und ist fehleranfällig (vgl. Schnotz 1994, S. 40).

Der Bereich des schulmathematischen Wissens wird von zahlreichen Didaktikern ebenfalls in einer dualen Form kategorisiert, erwartungsgemäß sind auch hier Grenzziehungen, Bezeichnungen und Klassifikationskriterien uneinheitlich.[29] Manche Autoren betonen das Unbewusste und Automatisierte des prozeduralen Wissens (beispielsweise Stern et al. 2010, S. 525, Haapasalo und Kadijevich 2000). So zählt Stern zum prozeduralen Wissen ausschließlich „automatisiert ablaufende Verhaltensprogramme, die durch ausdauernde Übung erworben werden“ (Stern et al. 2010, S. 525), also das unbewusste Wissen. Als Beispiele werden von ihr der Dreisatz und der Zehnerübergang bei schriftlicher Subtraktion genannt. Nicht automatisierte Regeln, Kalküle und Algorithmen zählen in ihrer Klassifikation zum deklarativen Wissen. Andere Autoren (beispielsweise Vollrath 2001, S. 48, Skemp 1987, S. 196) zählen zum prozeduralen Wissen, das im deutschsprachigen Raum auch als

[26] Deklaratives Wissen wird manchmal auch als konzeptuelles Wissen bezeichnet.

[27] Die hier vorgestellte Differenzierung, die ursprünglich aus der Forschung zur künstlichen Intelligenz stammt, hat kürzlich eine Verschiebung erfahren, so dass in der Psychologie und Didaktik das bewusste Wissen *über* Handlungen bzw. Prozesse ebenfalls oft zum prozeduralen Wissen gezählt wird; vgl. beispielsweise Jong und Ferguson-Hessler 1996.

[28] Vgl. beispielsweise Anderson 2012, sowie Mietzel 2007.

[29] Einen umfassenden Überblick über solche Klassifikationen, die manchmal eine drei- oder auch eine viergliedrige Einteilung aufweisen, liefert Haapasalo und Kadijevich 2000.

Verfahrenswissen bezeichnet wird (vgl. Vollrath 2001), auch die bewussten und nicht automatisierten Regeln und Verfahren.

In dieser Arbeit wird der Begriff prozedural im engen Sinne gebraucht; zu dieser Wissensart werden also ausschließlich die automatisierten Fertigkeiten und Routinen gezählt, die für den Handelnden oft schwer verbalisierbar sind. Das bewusste, also deklarative Wissen über Handlungen wird als Handlungswissen bezeichnet. Diese Wissensart umfasst die bewussten Kenntnisse der Handlungsschritte sowie der Bedingungen, unter welchen die Handlungen auszuführen sind.[30] Die zum Handlungswissen konträre Wissensart, also das deklarative Wissen über Nichthandlungen, wird als konzeptuell bezeichnet. Dieses Wissen kann im Gegensatz zum Handlungswissen nicht ausgeführt und nicht automatisiert werden. Das schulmathematische Handlungswissen umfasst dementsprechend bewusste Kenntnisse über die Handlungen, die im Mathematikunterricht benötigt werden. Dazu zählen sowohl die Kenntnisse der Handlungsschritte, etwa der Kalküle und Algorithmen, aber auch der typographischen Gestaltung einer ‚Lösung', sowie die Kenntnisse, unter welchen Bedingungen die entsprechenden Handlungen auszuführen sind, beispielsweise die Kenntnisse typischer Aufgabenstellungen.

Beim ‚Lernen aus Lehrtexten' werden in dieser Untersuchung nur die Veränderungen des deklarativen Wissens betrachtet. Die Frage, ob und inwiefern beim ‚Lesen' eines Lehrtextes auch prozedurales Wissen, also gewisse automatisierte Fertigkeiten, verändert werden können, wird dagegen vernachlässigt.

Um Wissensarten zu klassifizieren und zu beschreiben, kann man Wissensinhalte nicht nur bezüglich ihrer Handlungsbezogenheit differenzieren, sondern auch nach weiteren ‚Inhalten' der Wissensbestände, indem man die Bezugswelt des Wissens klassifiziert.

Sprach-, Meta- und Weltwissen

Im Hinblick auf das ‚Lernen aus (Lehr-)Texten' ist insbesondere das Wissen über die Sprache und über das (eigene) Wissen relevant.

Sprachwissen

Eine notwendige Voraussetzung, um Texte lesen und verstehen zu können, ist das Vorhandensein von Sprachwissen. Dieses wird von den Sprachwissenschaftlern in der Regel in Abgrenzung zum Weltwissen gebraucht. Es besteht kein Konsens bezüglich der Frage, was im Einzelnen zum sprachlichen Wissen zu zählen ist und inwiefern diese duale Kategorisierung sinnvoll ist.[31] Relativ einheitlich wird zum sprachlichen Wissen im engen Sinn ‚grammatisches' und ‚lexikalisches' Wissen gezählt.

[30] Manche Psychologen bezeichnen das Wissen darüber, ‚wann etwas zu tun ist', als konditionales Wissen; vgl. beispielsweise Dubs 2009, S. 222–224.

[31] Kritische Betrachtungen bezüglich einer Trennung zwischen Sprach- und Weltwissen liefern Busse 1992, S. 151ff. und Ziem 2008, S. 117–142.

Das grammatische Wissen wird bei Heringer wie folgt beschrieben:

„Das grammatische Wissen besteht in der Kenntnis der grammatischen Regeln, die charakterisieren, welche Wortkombinationen, welche Konstruktionen zulässig sind und wie sie zu verstehen sind. Hierzu gehören insbesondere die Analyse der Wortformen, die Abfolge der Zeichen im Satz, die Beziehungen zwischen ihnen und die Verwendungs- und Deutungsmöglichkeiten von Strukturwörtern, die den grammatischen Aufbau kennzeichnen." (Heringer 1989, S. 6)

Grammatisches Wissen wird oft in nicht disjunkte Teilkomponenten zerlegt, wie etwa syntaktisches, morphologisches, Wortarten- und graphematisches Wissen (vgl. etwa Busse 1992, S. 152, Nussbaumer 1991, S. 159). Dieses Wissen führt insbesondere zum Erkennen der sogenannten Kohäsionsmittel, d.h. der Mittel, die den Zusammenhang zwischen einzelnen Sätzen und Teiltexten mit Hilfe sprachlicher Mittel anzeigen. Dazu zählen insbesondere die unterschiedlichen Möglichkeiten, einen Referenzträger im Text wiederaufzunehmen.[32]

Das lexikalische Wissen[33] umfasst das „Wissen über die Beziehbarkeit von sprachlichen Zeichen auf Objekte und Ereignisse (sei es einer realen Welt oder einer Textwelt)" (Busse 1992, S. 152). Nach Heringer „besteht [dieses Wissen] in der Kenntnis der Bedeutung der Lexeme. Dazu gehört nicht nur, welche Bedeutung die Lexeme in Isolation haben, sondern auch, in welchen Konstruktionen und Sätzen sie verwendbar sind und welche ihrer möglichen Bedeutungen dann realisiert ist" (Heringer 1989, S. 6).

Neben diesen beiden Wissensbereichen werden weitere Wissensbestände ausdifferenziert, die zum Sprachwissen im weiten Sinn zählen; insbesondere Wissen darum, wie ‚typische' Texte im weitesten Sinne aufgebaut sind und in welchen Situationen sie benutzt werden (Wissen über Vertextungsmuster, stilistisches Wissen, Textsorten-Wissen, sprachliches Interaktionswissen).[34]

Der überwiegende Teil des sprachlichen Wissens ist prozedural, meistens kann man eine Sprache automatisch und unbewusst ‚richtig' produzieren und rezipieren. Schließlich kann man von einer gewissen Intersubjektivität des sprachlichen Wissens ausgehen, sonst wäre sprachliche Kommunikation nicht möglich.

Metawissen

Neben Sprachwissen ist im Rahmen der Lehr- und Lernprozesse auch das Metawissen, also Wissen über das eigene Wissen und den Wissenserwerb, relevant. In diesen Bereich fallen sämtliche Gedächtnisinhalte, die sich sowohl auf die eigenen kognitiven Prozesse als auch

---

[32] Eine ausführliche Darstellung der Formen der Wiederaufnahmen findet man in Brinker und Ausborn-Brinker 2010, S. 26ff., außerdem in Rickheit und Schade 2000, S. 275ff., Nussbaumer 1991, S. 106ff. und Adamzik 2004, S. 139.

[33] Die Bezeichnung ist nicht einheitlich, so wird in diesem Zusammenhang auch vom ‚Bedeutungswissen', ‚referentiellem Wissen', ‚semantischem Wissen' und ‚mentalem Lexikon' gesprochen.

[34] Eine ausführliche Darstellung des sprachlichen Wissens im weiten Sinn findet man in Busse 1992, S. 151ff. und Nussbaumer 1991, S. 160ff.

die kognitiven Produkte beziehen. Wenn Lernen als Handlung aufgefasst wird, dann enthält das Metawissen ein vielfältiges prozedurales und deklaratives (Handlungs-)Wissen, wozu auch die sogenannten Lernstrategien zählen. Hasselhorn/Gold definieren die Lernstrategien als „Prozesse bzw. Aktivitäten, die auf ein Lern- oder Behaltensziel ausgerichtet sind und die über die obligatorischen Vorgänge bei der Bearbeitung einer Lernanforderung hinausgehen“(Hasselhorn und Gold 2009, S. 90).[35] Dazu zählen Tätigkeiten wie beispielsweise das Erstellen einer Mind-Map oder das Schreiben einer Zusammenfassung. Zum Metawissen zählt aber auch konzeptuelles Wissen, wie etwa die Kenntnisse und Überzeugungen über den eigenen Wissenstand und die Lernfähigkeiten (‚Mathematische Texte verstehe ich sowieso nicht‘), die mit den Lernstrategien eng verknüpft sind.

Weltwissen

‚Weltwissen‘ fungiert als Gegenbegriff zu Sprach- und Metawissen und ist sehr vielfältig. So wäre das Wissen über das persönlich Erfahrene, das *autobiographische Wissen bzw. Erfahrungswissen* eine Subart des Weltwissens. In diesen Bereich fallen alle Erfahrungen, die ein Mensch zu einem bestimmten Zeitpunkt an einem benennbaren Ort gesammelt hat. Davon kann ein Wissen unterschieden werden, das nicht aufgrund der Erfahrungen gewonnen, sondern von den anderen (Eltern, Büchern, Lehrern) übernommen wurde. Schütz nennt dieses Wissen ‚sozial abgeleitet‘ (vgl. Schütz 2003, S. 188); es dürfte im Vergleich zum Erfahrungswissen zumindest in einer modernen Gesellschaft weit größer sein. Bei aller Unterschiedlichkeit des individuellen Weltwissens kann wohl davon ausgegangen werden, dass Menschen in einem Kulturkreis viele Erfahrungen teilen und dass ihr ‚sozial abgeleitetes Wissen‘ viele Gemeinsamkeiten aufweist, so dass eine große Teilmenge des individuellen Weltwissens intersubjektiv sein dürfte.

Zur inhaltsbezogenen Einteilung des schulmathematischen Wissens

Bisher wurden die Inhalte des deklarativen schulmathematischen Wissens bezüglich ihrer Handlungsbezogenheit in Handlungswissen versus konzeptuelles Wissen differenziert. Im Rahmen der Mathematikdidaktik werden oft weitere Binnenstrukturierungen vorgenommen. Das (schul-) mathematische Wissen wird im Rahmen der Mathematikdidaktik oft im Kontrast zum nicht mathematischen Wissen (meist Alltagswissen genannt) konzipiert und nicht selten in weitere Subarten, beispielsweise wie folgt unterteilt:[36]

- Wissen über Begriffe
- Wissen über Sachverhalte
- Wissen über Verfahren
- Metamathematisches Wissen.

[35] Der Begriff ‚Strategie‘ im Gegensatz zu beispielsweise ‚Lernvorgehen‘ betont das definitorische Merkmal ‚Zielgerichtetheit‘.

[36] Vgl. Vollrath 2001, S. 47-49.

Dabei muss angemerkt werden, dass das ‚mathematische Wissen' eher als normatives Schul- bzw. Vermittlungswissen (gesellschaftliches Wissen) und nicht als individuelles Schülerwissen gedacht wird. Aus kognitionspsychologischer Sicht ist demgegenüber entscheidend, wie das individuelle Wissen des Lernenden organisiert und ‚inhaltlich differenziert' ist. Diese subjektive Organisation kann von den ‚fachlichen' Kategorien entscheidend abweichen. Ob und inwiefern das individuelle Schülerwissen sich bezüglich der oberen Kategorien sinnvoll beschreiben und diskutieren lässt, ist eine offene Frage. In Kapitel 5.1 wird eine mögliche Organisation des individuellen schulmathematischen Wissens aus kognitionspsychologischer Sicht ausführlich diskutiert.

Damit sind die zentralen übergreifenden gedanklichen Kategorien dieser Untersuchung umrissen. Im Folgenden wird nun der Blick auf das Lernen aus Lehrtexten gelenkt.

3. Theoretische Grundlagen des Lernens aus Lehrtexten

Wenn man sich der Frage zuwendet, was aus einem mathematischen Schulbuchlehrtext von adressierten Schülern wie gut selbstständig lernbar ist, dann muss zunächst geklärt werden, wie und mit welchem Ergebnis Menschen aus (Schulbuch-)Lehrtexten lernen und welche Rolle dabei den Texten zukommt. In diesem Kapitel werden die theoretischen Grundlagen des Lernens aus Lehrtexten aus kognitionspsychologischer Sicht erläutert. Dies geschieht in zwei Schritten; zunächst wird im ersten Unterkapitel eine allgemeine Lerntheorie skizziert (Kap. 3.1), anschließend wird diese in Bezug auf das Lernen aus Lehrtexten präzisiert und erweitert (Kap. 3.2).

Da kognitives Lernen (aus Lehrtexten) als eine Veränderung des deklarativen Wissens bestimmt wurde, ist zunächst eine Theorieskizze bzw. Modellierung dieser Wissensart notwendig, denn sie bildet die Grundlage einer allgemeinen Lerntheorie. Man kann innerhalb der Kognitionspsychologie zwei miteinander eng verwandte Ansätze unterscheiden, die menschliche Kognition bzw. (deklaratives) Wissen modellieren: semantische Netzwerke und Schemata.[37] Da die psychologisch orientierte Textverstehensforschung zum großen Teil von der Theorie kognitiver Schemata ausgeht, wird dieser Ansatz aufgegriffen und in Bezug auf Lehrtexte weiterentwickelt.[38]

3.1. Lernen aus schematheoretischer Sicht

Die schematheoretische Sicht auf menschliche Kognition und auf das Lernen ist streng genommen keine geordnete, zusammenhängende Theorie, sondern ein theoretischer Rahmen mit bestimmten Grundannahmen, der von verschiedenen Autoren auf unterschiedliche Weise spezifiziert wird. Der Schema-Begriff wurde bereits 1932 von dem Psychologen Frederic Bartlett im Rahmen seiner Gedächtnistheorie eingeführt (Bartlett 1932). Der Kognitionswissenschaftler Marvin Minsky entwickelte in den siebziger Jahren des 20. Jahrhunderts eine allgemeine kognitionswissenschaftliche Schema-Theorie, die ein Grundmodell zur Erklärung der Struktur des menschlichen Denkens und Erkennens darstellt (Minsky 1975). Der Linguist Charles Fillmore übernimmt diesen Vorschlag mit leichten Modifikationen und begründet damit die sogenannte Frame-Semantik.[39] Beide Theorien werden vielfach zitiert und weiterentwickelt.[40] Auch im Rahmen des Mathematiklernens wurden in der Folge Schemata aufgegriffen.[41]

Die Schematheorie ist in der Forschung umstritten; die stärksten Vorwürfe richten sich auf Defizite in der theoretischen Grundlegung und eine damit verbundene „problematische Ver-

[37] Der Ansatz der ‚semantischen Netzwerke‘ geht auf Aebli zurück; vgl. Aebli 1994. Er wurde auch im Bereich des Mathematiklehrens und –lernens aufgegriffen, beispielsweise hat von Drollinger-Vetter auf diesem Ansatz beruhend die Unterrichtsqualitätsmerkmale formuliert, die das Verstehen eines konkreten Konzepts im Mathematikunterricht wirksam anleiten und unterstützen; vgl. Drollinger-Vetter 2011.
[38] Eine ausführliche Darstellung dieser Forschungsrichtung findet man in Schnotz 1994, S. 171–184.
[39] Eine zugängliche Einführung in die Frame-Semantik liefert Busse 2009, S. 80–90.
[40] Zur Entwicklung der Schemata-Forschung siehe Busse 2009, S. 80–84, Ziem 2008, S. 13–22; zum Schema-Begriff im Rahmen unterschiedlicher Forschungszweige Konerding 1993, S. 20–80.
[41] Vgl. beispielsweise Skemp 2009, c1987, Hasemann 1986.

einfachung“ (Ziem 2008, S. 265).[42] Allerdings bestehen diese Probleme auch beim Konzept der ‚semantischen Netzwerke‘ in ähnlicher Weise. Aufgrund der Komplexität menschlicher Kognition ist davon auszugehen, dass jede (psychologische) Modellierung zwangsläufig eine Vereinfachung darstellt und dass eine gewisse Vagheit der jeweils eingeführten theoretischen Größen vermutlich unvermeidlich ist. Das schematheoretische Fundament bietet trotz der genannten Einschränkungen eine differenzierte Modellierung und Erklärung für viele Phänomene in den Bereichen des Textverstehens und des Textlernens und ist daher für die anstehende Untersuchung gewinnbringend.

Die Schematheorie wird hier nur soweit skizziert, wie es bezüglich einer theoretischen Grundlegung des Lehrpotentials eines Mathematikschulbuchlehrtextes notwendig ist. Dabei wird auf zahlreiche Autoren zurückgegriffen, die im Wesentlichen den Wissenschaftsdisziplinen der (kognitiven) Psychologie und der (kognitiven) Linguistik angehören.

Das Schema als eine Einheit des deklarativen Wissens

Der Kognitionspsychologie liegt die erkenntnisleitende Annahme zugrunde, dass sämtliches deklaratives Wissen nicht chaotisch und willkürlich in unseren ‚Köpfen‘ vorhanden, sondern in einer spezifischen Weise organisiert und geordnet ist. Das Konstrukt ‚Schema‘ trägt dieser Annahme Rechnung. Allerdings sind die Bestimmungen des Schema-Begriffs – falls er überhaupt expliziert wird – sehr divergent. So betrachtet Seel Schemata als „Bausteine der Organisation […] des deklarativen Gedächtnisses“ (Seel 1991, S. 51), sie sind „keine ‚gewußten Gegenstände‘, die bloß angerufen zu werden brauchen, sie sind unserem Wissen implizit“ (ebd.). Ein Schema bündelt kognitive Inhalte bezüglich einer „Sachverhaltsklasse“ (Schnotz 1994, S. 62). Manchmal wird es als „generische (d.h. die Gattung betreffende) [versus spezifische E.K.] Wissensstruktur“ (Steiner 1996, S. 201) bezeichnet. Ziem definiert Schemata als „kognitive Datenstrukturen, in denen individuelle Erfahrungen unterschiedlicher Inhaltsbereiche zu typischen Erfahrungen auf verschiedenen Ebenen der Abstraktion und Komplexität verallgemeinert zusammengefasst sind“ (Ziem 2008, S. 256). Nach Schnotz „repräsentieren [Schemata] die typischen Sachverhalte bzw. zu erwartende Zusammenhänge aus einem bestimmten Realitätsbereich“ (Schnotz 1994, S. 61).

An dieser Stelle erfolgt keine ausführliche Diskussion unterschiedlicher Schemabegriffsbestimmungen, da dies vom eigentlichen Anliegen zu weit wegführen würde.[43] Stattdessen werden zunächst die Merkmale eines Schemas an einem konkreten und zugänglichen Alltagsbeispiel veranschaulicht, um anschließend den Begriff im Rahmen dieser Untersuchung festzulegen.

[42] Konerding schreibt dazu: „Eine systematische Klärung dazu, was Frames tatsächlich sind, d.h. welchen ontologischen oder methodischen Status sie einnehmen und wie sie im Einzelnen beschaffen sein sollen, steht trotz fortgesetzter Debatte immer noch aus.“ (Konerding 1993). Einen Überblick der im Rahmen der schematheoretischen Forschung offenen Fragen liefert Ziem 2008, S. 265.

[43] Konerding setzt sich kritisch und ausführlich mit unterschiedlichen Schemabegriffsbestimmungen auseinander; vgl. Konerding 1993, S. 6–80.

Ein kognitives Schema kann als „interne Beschreibung von Sachverhalten oder Sachverhaltsklassen“ (Schnotz 1994, S. 62) interpretiert werden. So ist beispielsweise das KINDERGEBURTSTAGSSCHEMA-Schema[44] eine allgemeine Beschreibung dessen, was zu einem konkreten Kindergeburtstag gehört, nämlich ein Geburtstagskind und Gäste, die spielen, essen und trinken. Eine Geburtstagsfeier hat eine bestimmte Dauer und findet meistens dann statt, wenn ein Kind Geburtstag hat. Diese allgemeinen Merkmale bzw. Aspekte eines Sachverhalts werden als Leerstellen bezeichnet, die mit konkreten Werten bzw. kognitiven Inhalten gefüllt sind. Es gibt konstante und variable Werte, wobei unter den variablen Einträgen meist die typischen, die im Folgenden Standardwerte genannt werden, hervorgehoben sind. So weisen die aufgezählten Leerstellen des KINDERGEBURTSTAGS-Schemas folgende Belegungen (Werte) auf:

- Geburtstagskind: ein Kind im Alter von 0 bis 18 Jahren (variabler Eintrag), wobei die Altersspanne zwischen 2 und 13 Jahren einen Standardwert darstellt,
- Gäste: Freunde, Bekannte und Verwandte des Geburtstagskindes (variabler Eintrag), wobei Freunde, die ebenfalls Kinder sind, als Standardwert fungiert,
- Spiele: alle möglichen (Kinder-)Spiele (variabler Eintrag), die klassischen Kinderspiele wie Topfschlagen, Blinde Kuh usw. stellen dabei die Standardwerte dar,
- Essen: alle Speisen (variabler Eintrag), Geburtstagstorte ist ein Standardwert,
- Trinken: nichtalkoholische Getränke (variabler Eintrag), Limonade als Standardwert,
- Dauer: 2 bis 4 Stunden als Standardwert,
- Notwendige Bedingung: ein Kind hat Geburtstag (konstanter Eintrag).

Leerstellen bündeln damit kognitive Inhalte, die sich auf einen bestimmten Aspekt der Sachverhaltsklasse beziehen. In der Konzeptualisierung eines Schemas treten also zwei zentrale Größen auf: kognitive Inhalte und Leerstellen. An Letztere ‚docken‘ sich jeweils die kognitiven Inhalte an und werden dadurch organisiert und gebündelt. Die Inhalte einer Leerstelle sind allerdings ebenfalls von (anderen) Leerstellen organisiert und gebündelt. So sind die Inhalte der Geburtstagskind-Leerstelle des KINDERGEBURTSTAGS-Schemas sehr vielfältig und umfangreich. Zu ihnen gehört das Wissen über das Aussehen, das Verhalten, Gewohnheiten usw. eines (typischen) Kindes, die jeweils von den entsprechenden Leerstellen niederer Ordnung gebündelt werden. Aussehen, Verhalten, Gewohnheiten eines Kindes stellen damit jeweils untergeordnete Leerstellen dar, die eine Teilmenge der Inhalte der übergeordneten Leerstelle – in diesem Fall der Geburtstagskind-Leerstelle – an sich binden. Die Inhalte einer Leerstelle werden also von Leerstellen niederer Ordnung organisiert. Den Leerstellen der zweiten Ordnung sind weitere Leerstellen untergeordnet, so sind der Aussehen-Leerstelle die Hautfarbe-, Haarfarbe-, Körperpropositionen- usw. Leerstellen untergeordnet. Auf diese Art und Weise entstehen kaskadenartige, strukturierte Gebilde aus Leerstellen, wobei an jede Leerstelle konkrete – meistens variable – kognitive Inhalte ‚angedockt‘ sind. Die Leerstellen niederer Ordnung zeichnen sich dadurch aus, dass sie gegen-

[44] Die Sachverhaltsklasse, die in einem Schema beschrieben bzw. erfasst wird, wird in dieser Arbeit in Großbuchstaben geschrieben.

über übergeordneten Leerstellen einen geringeren Variationsbereich der dazugehörigen kognitiven Inhalte aufweisen. Eine übergeordnete Leerstelle subsumiert gewissermaßen alle Inhalte der untergeordneten Leerstellen.

Ein Schema wird in dieser Abhandlung als eine Gesamtheit strukturierter Leerstellen mit jeweiligen Werten bestimmt. Damit werden auch die kognitiven Inhalte, also das eigentlich Gewusste – im Gegensatz zu Seel, der, wie aus den angeführten Zitaten ersichtlich wird, die gewussten Gegenstände nicht als Komponenten eines Schemas betrachtet –, als Bestandteile der Schemata anerkannt. Eine Leerstelle bündelt Inhalte, die sich auf einen Aspekt der übergeordneten Sachverhaltsklasse beziehen. Diese Inhalte werden wiederum von Leerstellen niederer Ordnung organisiert, so dass eine mit Werten belegte Leerstelle gleichzeitig als ein (Sub-)Schema betrachtet werden kann.[45] Anders formuliert; eine Leerstelle wird von einem Schema gefüllt.[46]

Zwei besondere Einbettungsbeziehungen der Schemata

Schemata sind also ineinander eingebettet, indem ein Schema eine Leerstelle eines anderen Schemas füllt. Zwei Einbettungsbeziehungen sind besonders markant, weil sie bei zahlreichen Schemata vorkommen; Einbettung aufgrund der Füllung der Unterkategorie-Leerstelle und Einbettung aufgrund der Füllung der Bestandteile-Leerstelle. So kann eine Kindergeburtstagsfeier als eine spezifische Geburtstagsfeier und diese wiederum als ein spezifisches Ereignis betrachtet werden. GEBURTSTAGSFEIER, sowie EREIGNIS sind ebenfalls kognitive Schemata, also ein Gefüge von Leerstellen mit bestimmten Inhalten. So weist das EREIGNIS-Schema unter anderem folgende Leerstellen auf: wesentliche Mitspieler/ Interaktionspartner, wesentlichen Phasen (Teilereignisse), Dauer, Funktionen, Voraussetzungen, Folgen, ähnliche Ereignisse.[47] Die Schemata bilden damit eine Abstraktionshierarchie, da ein und derselbe Sachverhalt auf unterschiedlichen Abstraktionsebenen repräsentiert werden kann. Die Einbettungsbeziehungen beruhen dabei auf einer ist-ein-Relation; die hierarchisch niederen Schemata füllen jeweils die Unterkategorie-Leerstelle des übergeordneten Schemas. DACKEL → HUND → TIER → LEBEWESEN stellt ein weiteres Beispiel für Schemata dar, die jeweils die Unterkategorie-Leerstelle des übergeordneten Schemas füllen und damit eine Abstraktionshierarchie bilden.[48] Das Besondere an diesen Hierarchien ist die Äquivalenz möglicher Leerstellen der einzelnen (Sub-)schemata. Das übergeordnete Schema ‚vererbt' an seine UNTERKATEGORIEN dieselben Leerstellen.[49] So treffen die Leerstellen des EREIGNIS-Schemas auch auf das KINDERGEBURTSTAGS-Schema zu. Die untergeordneten Schemata weisen jedoch im Vergleich zu den hierarchiehöheren Schemata jeweils eine geringere Variabilität möglicher Leerstellenfüllungen auf.

---

[45] Vgl. beispielsweise Busse 2009, S. 84.

[46] Aus diesem Grund und weil der Bezugsgegenstand eines Schemas in dieser Arbeit großgeschrieben wird, müsste konsequenterweise auch der Gegenstand, auf den sich eine Leerstelle bezieht, großgeschrieben werden. Aus Lesbarkeitsgründen wird dies allerdings in dieser Arbeit nicht konsequent eingehalten.

[47] Konerding listet wesentliche Leerstellen des EREIGNIS-Schemas auf; vgl. Konerding 1993, S. 435–439.

[48] Vgl. Schnotz 1994, S. 66, sowie Ziem 2008, S. 204.

[49] Vgl. Ziem 2008, S. 202–205 und Seel 2003, S. 53.

Des Weiteren können die einzelnen Schemata aufgrund einer Teil-Ganzes-Relation ineinander eingebettet sein, d.h. die untergeordneten Schemata füllen die Bestandteile-Leerstelle des übergeordneten Schemas. Beispielsweise sind KINDERSPIELE, ESSEN und TRINKEN in das übergeordnete KINDERGEBURTSTAGS-Schema als ihre Bestandteile eingebettet. Aufgrund der Teil-Ganzes-Beziehung entstehen ebenfalls Hierarchien. HENKEL → TASSE → GESCHIRR → ESSEN → KINDERGEBURTSTAG ist ein Beispiel für solch eine Komplexionshierarchie; die untergeordneten Schemata füllen jeweils die Bestandteile-Leerstelle des übergeordneten Schemas. „Die übergeordneten Schemata einer solchen Hierarchie repräsentieren einen Sachverhalt als Ganzes in globaler Form. Sie spielen gewissermaßen die Rolle von „Generalisten“, während die untergeordneten Schemata die Rolle von „Spezialisten“ für bestimmte Einzelheiten spielen“ (Schnotz 1994, S. 66).

Dynamik und Stase der Schemata

Schemata sind veränderbar, gleichzeitig muss man ihnen aber doch eine gewisse Stabilität zuschreiben, sie sind weder flüchtig noch starr. Für Schemata gilt, was Busse zur Wechselbeziehung zwischen Stase und Dynamik von Wissen allgemein feststellt. Wissen sei

„kein statisches Etwas, keine feste gegebene und temporär unveränderliche Struktur, die man wie einen vorgegebenen Gegenstand in quasi eingefrorener Perspektive stillhalten und deskriptiv erfassen kann.“ (Busse 2005, S. 52)

Auf der anderen Seite erschöpfe sich Wissen ebenso wenig in „reine[r] Dynamik“ oder „flüchtige[n] Bewegung“ (ebd.), so dass man von einer „unaufhebbaren Oszillation zwischen Stase und Dynamik“ (Ziem 2008, S. 261) ausgehen muss. Schnotz formuliert den Charakter der Schemata wie folgt:

„[Die Schemata] bilden dynamische offene Systeme, die zur Selbstorganisation offen sind, mit ihrer Umwelt kommunizieren, Strukturen dieser Umwelt durch bestimmte Aktivationsmuster abbilden und sich in Abhängigkeit von den dabei gemachten Erfahrungen in zusammenhängender Weise verändern.“ (Schnotz 1994, S. 93)

Schemata entstehen aufgrund gemachter Erfahrungen, sie sind dynamisch und veränderbar, wobei die abstraktionshöheren Schemata stabiler als die untergeordneten sein dürften (vgl. Ziem 2008, S. 263).

Funktionale Relevanz der Schemata im Rahmen der menschlichen Kognition

Schemata sind die meiste Zeit inaktiv. In Abhängigkeit von einwirkenden Daten und der kognitiven Anforderung wird eine bestimmte schematische Konstellation – d.h. einige ineinander geschachtelte Leerstellen bzw. Subschemata mit jeweiligen (Standard-)Werten im Rahmen eines oder mehrerer Schemata – aktiviert, die die Denk- und kognitiven Verarbeitungsprozesse leitet und organisiert. Daher stellen die nicht aktivierten Schemata ein Aktivierungspotential dar, das recht variabel und anpassungsreich ist.

Insbesondere leiten und organisieren Schemata die kognitive Informationsverarbeitung. Dabei erfüllen sie drei zentrale Funktionen: aufmerksamkeitssteuernde Funktion, Integrationsfunktion sowie Inferenzfunktion (vgl. Seel 2003, S. 56).

Zur aufmerksamkeitssteuernden Funktion

Schemata, insbesondere ihre Leerstellen, können als Erwartungsstrukturen aufgefasst werden. Ist einmal ein Schema aktiviert, erwartet und ‚sucht' ein Subjekt in den Umweltdaten, wozu auch Texte zählen, konkrete Belegungen der zentralen Leerstellen und wendet sich verstärkt solchen Daten zu, die als Werte aktivierter Leerstellen interpretiert werden können.[50] „Detailinformationen gehen immer dann verloren, wenn sie [...] für ein aktiviertes Schema irrelevant sind" (Ziem 2008, S. 263). Schemata formieren aber die Erwartungen und damit Aufmerksamkeitssteuerung nicht nur während, sondern oft auch bereits vor einer Informationsverarbeitung. Der Linguist Heinemann schreibt in Bezug auf die Textrezeption:

> „Das Schema-Wissen bildet […] die Grundlage für das Verstehen von Texten: Schemata formieren Erwartungshaltungen des Hörers [auch des Lesers E.K.] vor der eigentlichen Textrezeption, sie bilden verschiedene Rahmen/frames/ für das Verstehen, so daß der Hörer [oder Leser E.K.] nur die Informationen aufnimmt, die für bereits gespeicherte Schemata relevant sind" (Heinemann und Viehweger 1991, S. 71).

Zur Integrationsfunktion

Des Weiteren stellen Schemata die Interpretationsgrundlage bzw. ‚Verstehensvorlage' bezüglich einströmender Daten dar. Umweltdaten werden als konkrete Werte aktivierter Leerstellen interpretiert. Beim Verarbeiten des Satzes ‚Otto isst Suppe' wird das ESSEN-Schema aktiviert, wobei die Essender-Leerstelle durch den Wert ‚Otto' und die Speisen-Leerstelle durch den Wert ‚Suppe' ausgefüllt werden (vgl. Schnotz 1994, S. 61). Das Gleiche geschieht nicht nur beim Verarbeiten geschriebener natursprachlich kodierter Informationen, sondern auch beim Betrachten eines Bildes oder einer Situation. „Schemata [wirken] bei der Enkodierung neuer Information als kohärenz- und verständniserzeugender Rahmen, der die Integration der zu verarbeitenden Information erleichtert" (Seel 2003, S. 56). In einer grundsätzlichen Erweiterung dieser Aussage spricht vieles dafür, dass die Schemata eine Integration einströmender Daten in ein individuelles Wissenssystem nicht nur erleichtern, sondern sie überhaupt erst ermöglichen.

Zur Inferenzfunktion

Schemata befähigen schließlich auch zu „sinnvollen und bedeutungshaltigen Schlußfolgerungen" (Seel 2003, S. 56) und Ergänzungen, indem die interpretierten Daten durch zahlreiche gespeicherten Standardwerte, also typische Werte angereichert werden, wobei solche Ersatzannahmen „so lange als gültig angesehen werden, wie keine anderslautende Information vorliegt" (Schnotz 1994, S. 62). Beim Lesen des Satzes ‚Otto isst Suppe' wird beispielsweise die Instrumenten-Leerstelle hypothetisch mit dem Standardwert ‚Löffel' ausgefüllt, solange nichts Gegenteiliges vorliegt. Solche „plausiblen Annahmen bezüglich

[50] Vgl. beispielsweise Seel 2003, S. 56 und Schnotz 1994, S. 61.

nicht explizit genannter [oder gezeigter E.K.] Gegebenheiten“ (ebd.), die ein Subjekt bei kognitiver Informationsverarbeitung vollzieht, werden als Inferenzen bezeichnet.

Kognitive Informationsverarbeitung lässt sich also aus schematheoretischer Sicht als eine meistens unbewusste ‚Suche‘ nach einem Schema beschreiben, dessen Leerstellen auf die vorliegenden Daten ‚passen‘, d.h. mit ihnen belegbar sind. Wie dieser Prozess abläuft und welche Verarbeitungsergebnisse dabei möglich sind, wird in Bezug auf die kognitive Verarbeitung von Lehrtexten an späterer Stelle genauer betrachtet. Im positiven Fall, d.h. falls es einem Subjekt gelingt, ein zu den Umweltdaten passendes Schema zu finden bzw. zu konstruieren, entsteht im Ergebnis der kognitiven Informationsverarbeitung ein Schema, dessen Leerstellen mit konstanten konkreten Werten belegt sind, wobei einige Werte aus den empirischen Daten generiert und die anderen aufgrund von Ersatzannahmen inferiert sein können. Die vorliegende Information hat in diesem Fall für das Subjekt ‚Sinn‘, er hat sie ‚einverleibt‘ und in sein geistiges Eigentum überführt.

Weiterhin kann angenommen werden, dass Denkprozesse, die sich auf deklaratives Wissen beziehen – also auch der Prozess des Erinnerns – schemageleitet sind.[51] Was, wie, in welcher Art und Weise erinnert wird, hängt unter anderem von der schematischen Einbettung kognitiver Inhalte ab, also davon, an welchen Leerstellen im Rahmen welcher Schemata ein kognitiver Inhalt als Wert wie stark angedockt ist. Aus dieser Perspektive stellen Leerstellen im Rahmen eines Schemas Denkkategorien bzw. Denkvorlagen dar. Außerdem beeinflussen kognitive Schemata auch das, was von dem Erinnertem mitgeteilt wird, was also ein Subjekt für mitteilungswürdig hält.

Das mentale Modell als ein aktiviertes und mit konstanten Werten belegtes Schema

Wie oben bereits eingeführt wurde, werden bei Prozessen der Informationsverarbeitung und Denkprozessen bestimmte Schemata aktiviert und mit konstanten konkreten Werten belegt. Solch ein aktiviertes und mit konstanten Werten belegtes Schema wird im Folgenden als mentales Modell eines Gegenstands bezeichnet.[52]

Ein Modell unterscheidet sich von einem Schema dadurch, dass jeweils nur eine begrenzte Anzahl möglicher Leerstellen aktiviert wird und dass diese ausschließlich mit konstanten

---

[51] Vgl. Seel 2003, S. 56, Steiner 1996, S. 201, sowie Schnotz 1994, S. 82.

[52] Der Begriff ‚mentales Modell‘ ist sehr vieldeutig, da er im Rahmen unterschiedlicher Wissenschaftszweige und entsprechend unterschiedlicher Perspektiven und Fragestellungen bestimmt wurde; vgl. Edelmann 2000, S. 160. ‚Modelle‘ in schematheoretisch orientierten Ansätzen werden stets als mit konstanten Werten belegte Schemata bestimmt, allerdings variiert der Umfang des Begriffs. So wird oft das ‚bildhafte‘ (analoge Repräsentationsform) der Modelle betont bzw. als definitorisches Merkmal der Modelle bestimmt; vgl. beispielsweise Schnotz 1994. Seel betont den Zweck der Modelle, nämlich, dass sie zur subjektiven Erklärung bzw. ‚subjektiven Plausibilität‘ der weltlichen Phänomene dienen und hat dadurch recht komplexe, meist verfestigte Modelle im Blick; vgl. Seel 1991. Oft – und insbesondere in der Textverstehensforschung – fällt die Konzentration fast ausschließlich auf die Modelle, die bei der Verarbeitung eines Textes, d.h. bei neuer Information entstehen; die bereits vorhandenen verfestigten mentalen Modelle werden hingegen aufgrund des Forschungsinteresses vernachlässigt; vgl. Brewer 1987, Schnotz 1994, Kintsch 1998. In dieser Arbeit wird der Begriff im weiten Sinne benutzt; er umfasst all die genannten Varianten, wobei die Konzentration auf die Modelle gerichtet wird, die im Zuge einer Informationsverarbeitung konstruiert werden.

Werten gefüllt sind. Die konstanten Werte werden wiederum von Leerstellen unterschiedlicher Ordnung gebündelt. So bündeln Leerstellen höherer Ordnung mehrere konstante Werte, während die Leerstellen niederer Ordnung einen ‚Andockplatz' für einzelne wenige kognitive Werte bieten. Dadurch belegt ein konkreter Wert mehrere ineinander eingebettete Leerstellen. Die mit zahlreichen konstanten kognitiven Inhalten belegten Leerstellen höherer Ordnung stellen übergeordnete Modelle dar, während die untergeordneten gefüllten Leerstellen die entsprechenden Submodelle konstituieren.

Ein mögliches KINDERGEBURTSTAG-Modell soll angedeutet werden. Die Struktur des Modells wird dabei durch Einrückungen veranschaulicht.[53]

KINDERGEBURTSTAG
- [1] ANWESENDE
  - [1.1] GEBURTSTAGSKIND
    - [1.1.] ALTER ‚6 Jahre'
    - [1.2.] NAME ‚Gabriel'
    - [1.3.] AUSSEHEN ‚…'
    - …
  - [1.2] ELTERN
    - …
  - [1.3] FREUNDE
    - …
- [2] SPIELE
  - [2.1] ERSTES SPIEL
    - [2.1.1] GEWINNER
      - ….
    - [2.1.2] VERLIERER
      - …
    - [2.1.3] ABLAUF
      - ….
    - …
  - …
- …

Die Ordnung aktivierter Leerstellen ist in der Grafik anhand der Nummerierung und Einrückung veranschaulicht; die Leerstellen erster Ordnung werden mit einer einstelligen Nummer, die der zweiten Ordnung mit einer zweistelligen usw. notiert. In der Grafik wurden zwei (von vielen anderen möglichen) Leerstellen bzw. Submodelle erster Ordnung angegeben: ANWESENDE und SPIELE. Jedes der Submodelle ist aufgrund der Leerstellen zweiter Ordnung in weitere Submodelle zerlegt. So ist das ANWESENDE-Modell in GEBURTSTAGSKIND-, ELTERN- und FREUNDE-Submodelle zerlegt, entsprechend ist auch das zweite Modell erster Ordnung (SPIELE) in weitere Submodelle zerlegt, wobei in der

[53] Die vorliegende Form einer grafischen Veranschaulichung wurde von der Autorin entwickelt. Die Grundidee, dass die untergeordneten Einheiten aufgrund der Nummerierung, grafischer Einrückung und Sequenzierung kenntlich gemacht werden, hat die Autorin dem Textlinguisten Schröder entliehen, der diese Form in einem anderen Kontext benutzt – und zwar, um die Struktur eines Textes zu veranschaulichen (vgl. Schröder 2003, S. 40). Die Struktur aktivierter Leerstellen kann auch anhand eines ‚Baumdiagramms' veranschaulicht werden. Es wird sich im weiteren Verlauf der Abhandlung zeigen, dass eine sequenzielle Anordnung der Leerstellen im Hinblick auf die Modelle, die im Zuge einer (Lehr-)Textverarbeitung konstruierbar sind, gewinnbringend ist.

graphischen Darstellung lediglich das erste Submodell (vgl. [2.1]) angegeben ist. Die Modelle der zweiten Ordnung sind wiederum ausdifferenziert. So sind die Struktur und Inhalte des GEBURTSTAGSKIND-Modells (vgl. [1.1]) in der Grafik angedeutet; es besteht unter anderem aus drei belegten Leerstellen bzw. Submodellen: ALTER, NAME und AUSSEHEN. Die Grundeinheit eines Modells ist eine Leerstelle, die einen einzigen konkreten Wert beinhaltet. Im Beispiel sind das die ALTER- und NAME-Leerstellen, deren konkrete Belegung in Anführungszeichen angegeben ist.

Im Zuge einer Informationsverarbeitung findet Modellbildung und – wie später noch erläutert wird – Schemataveränderung statt. Modellbildung ist ein Prozess, bei dem die aktivierten Leerstellen mit empiriebasierten und inferierten konstanten Werten belegt werden. Es ist jedoch durchaus möglich, dass im Zuge einer Informationsverarbeitung einige Leerstellen zwar aktiviert, aber nicht mit konkreten Werten belegt werden können, weil die vorliegende Information diese Daten nicht liefert und die hierfür notwendigen kognitiven Inhalte nicht in den Wissensbeständen des Subjekt vorhanden sind. Solche aktivierten und nicht belegten Leerstellen werden im Folgenden als offen bezeichnet. Sie entsprechen den offenen Fragen des Subjekts an die vorliegende Information (vgl. Schnotz 1994, S. 68). Ob aktivierte Leerstellen offen oder belegt sind, ist – wie später noch erläutert wird – bezüglich des Lernens aus einer vorliegenden Information entscheidend.

Ein Modell, das im Rahmen einer Informationsverarbeitung konstruiert wird, ist damit ein strukturiertes Gebilde aus aktivierten und (teilweise) belegten über- und untergeordneten Leerstellen mit jeweils konkreten Inhalten. Ein (konkretes) Modell lässt sich also im Wesentlichen charakterisieren, indem man die Inhalte, die bestimmte aktivierte Leerstellen belegen, sowie die Struktur aktivierter Leerstellen beschreibt. Die Spezifika der Modelle, die im Zuge einer Lehrtextverarbeitung gebildet werden, werden in Kapitel 3.2.2 erläutert und präzisiert.

Modalität der Inhalte eines Modells

Die Frage bezüglich der Repräsentationsform des Wissens und Denkens, also bezüglich der ‚Symbole' anhand derer das (aktivierte) Wissen mental repräsentiert ist, ist eine der zentralen im Rahmen der Kognitionspsychologie.[54] Da das kognitive Lernen den Erwerb des deklarativen Wissens fokussiert und dieser – wie später noch erläutert wird – sich stets auf der Grundlage aktivierter Wissensbestände vollzieht, wird im Folgenden ausschließlich auf die Modalität aktivierter deklarativer kognitiver Inhalte eingegangen, die passiven (und prozeduralen) Gedächtnisinhalte werden dagegen aus den folgenden Betrachtungen ausgeschlossen.

Das, was einem Individuum ‚durch den Kopf geht', setzt vermutlich eine mentale Codierung anhand der Benutzung eines Zeichensystems, also eine Repräsentationsform voraus.[55] Doch welche Symbolsysteme, unter welchen Bedingungen und auf welche Art und Weise beim

[54] Grundsätzliche Skepsis bezüglich der Annahme der Kognitionswissenschaften, dass das Wissen *modal* im kognitiven System *repräsentiert* ist, äußert Oberauer 2000.
[55] Zum Begriff Zeichensystem (auch Zeichencode) siehe Stöckl 2006.

Denken und im Zuge der Informationsverarbeitung benutzt werden, ist ein komplexes Problem.[56] Im Rahmen der Kognitionspsychologie werden im Wesentlichen zwei „Medien des Denkens“ (Seel 1991, S. 14) unterschieden: die symbolische und die analoge Repräsentation.[57] Die beiden Repräsentationsformen divergieren bezüglich der eingesetzten Zeichensysteme. Symbolisch repräsentierte Sachverhalte, die metaphorisch mit ‚innerem Sprechen‘ angedeutet werden können, werden anhand von Symbolzeichen codiert, dabei haben „Symbolzeichen […] eine arbiträre Struktur und sind mit dem Bezeichnetem durch eine Konvention verknüpft“ (Schnotz und Dutke 2004, S. 72). Beispiele für Symbolzeichen sind Wörter und Sätze natürlicher Sprache, aber auch formal-mathematische Ausdrücke wie Terme. Die analog repräsentierten Sachverhalte, die als ‚innere Bilder‘ bezeichnet werden können, sind anhand ikonischer Zeichen codiert, die im Gegensatz zu den Symbolzeichen keine arbiträre Struktur besitzen, sondern „vielmehr mit dem bezeichneten Gegenstand durch Ähnlichkeit oder abstraktere strukturelle Gemeinsamkeiten verknüpft [sind]“ (ebd.).[58] Beispiele für analoge Repräsentationen sind (innere) Bilder, Grafiken sowie geometrische Darstellungen.

Die kognitiven Inhalte, die aktivierte Leerstellen belegen, sind vermutlich modal, also mit Hilfe unterschiedlicher Zeichen codiert. Modelle können damit symbolisch (inneres Sprechen), analog (innere Bilder) oder auch multimodal sein, d.h. also sowohl symbolhafte als auch analoge Elemente enthalten. Bezüglich der Faktoren, die die Auswahl des jeweiligen Codes beeinflussen, schreibt Seel in einer recht allgemeinen Weise:

„Welches Symbolsystem ein modellschaffendes System [Individuum E.K.] in einer bestimmten Situation benutzt, ist abhängig von den Erfahrungen, die es bislang mit der Anwendung und Nutzung von Symbolsystem in anderen, ähnlichen Situationen gemacht hat.“ (Seel 1991, S. 181).

---

[56] Eine ausführliche Diskussion möglicher ‚Formate der Wissensrepräsentation“ findet man in Seel 1991, S. 157–178. Eine kurze Darstellung der ‚Imagery-Debatte‘ sowie die Grundzüge einer ‚multimodalen Theorie‘ findet man in Engelkamp 2006, S. 186–209.

[57] Vgl. beispielsweise Schnotz und Dutke 2004, S. 72–73, Seel 2003, S. 57–62, Edelmann 2000, S. 146–152.

[58] In Anlehnung an Bruner (vgl. Bruner 1974) wird häufig, insbesondere auch in der Mathematikdidaktik eine dritte Repräsentationsform genannt, nämlich die enaktive bzw. handlungsmäßige (vgl. dazu Edelmann 2000, S. 152–153, Seel 2003, S. 57–58, Drollinger-Vetter 2011, S. 81). Dabei wird zum Teil nicht deutlich unterschieden, ob die ‚interne mentale‘ oder ‚externe‘ – d.h. in der äußeren Umwelt des Individuums stattfindende – Repräsentation gemeint ist. Handlungen können ausgeführt werden, wie beispielsweise das Anlegen eines Gemüsebeets (vgl. Edelmann 2000, S. 152) oder das Ergänzen einer Papierfigur (vgl. Drollinger-Vetter 2011, S. 81). Aus der Sicht eines Wissenden (!) wird dadurch eventuell ein Gegenstand handelnd extern repräsentiert; Einpflanzen von Gemüse oder ‚Satz des Pythagoras‘. Was ist aber eine interne enaktive Repräsentation eines Sachverhalts? Ist das eine Vorstellung einer konkreten Handlung? Worin bestünde dann ein Unterschied zu ‚bewegten inneren Bildern‘, also zu einer analogen Repräsentation? Welches Zeichensystem liegt einer enaktiven internen Repräsentation zugrunde? Und welche Bedingungen sind notwendig – mit anderen Worten: Was muss ein Individuum wissen, damit eine vorgestellte Handlung etwas anderes außer sich selbst repräsentiert, also nicht nur lediglich das Zerlegen einer Papierfigur, sondern den ‚Satz des Pythagoras‘? Insbesondere im Rahmen der mathematikdidaktischen Forschung erfordern diese Fragen eine ernsthaften Zuwendung, die bislang (zu) wenig stattfindet. So schreibt Drollinger-Vetter, eine interne Repräsentation meinend: „Eine enaktive Darstellung des Satzes [des Pythagoras E.K.] wäre zum Beispiel ein Zerlegungsbeweis mit Hilfe des Papiers“ (Drollinger-Vetter 2011, S. 81). Die oben gestellten Fragen werden dabei weder gestellt noch diskutiert.

Die aktivierten Leerstellen dürften dagegen eher amodal sein, sie sind dem Subjekt ‚unbewusst'.

Nachdem Grundzüge der Schematheorie als allgemeine Theorie menschlicher Kognition skizziert wurden, soll nun der Blick insbesondere auf das Lernen, also auf Wissensveränderung gelenkt werden.

Lernen als Veränderung der Schemata im Zuge einer Modellbildung

Kognitives Lernen wurde bisher als Informationsverarbeitung betrachtet, die zur Veränderung des (deklarativen) (Vor-)Wissens führt. Als Lernergebnis wurde entsprechend die Gesamtheit der im Rahmen einer Informationsverarbeitung vollzogenen Veränderungen bezeichnet. Aus schematheoretischer Perspektive lässt sich eine Veränderung des Vorwissens als Veränderungen der Schemata präzisieren. Ein Lernergebnis besteht demzufolge aus einzelnen vollzogenen Veränderungen der Schemata und ihrer Strukturkonstituenten. Es werden in einer vergröberten Differenzierung drei Arten einer Schemaveränderung unterschieden: erstens die Verfestigung bzw. Schwächung vorhandener Schemata, zweitens die Umstrukturierung vorhandener Schemata und drittens die Entstehung neuer Schemata bzw. einzelner Strukturkonstituenten. Im Folgenden werden diese Veränderungsarten erläutert.

Verfestigung und Schwächung vorhandener Schemata und einzelner Strukturkonstituenten

Es wurde bereits dargestellt, dass Schemata sich aufgrund gemachter Erfahrungen ausbilden. Wenn von einem Subjekt bestimmte Erfahrungen immer wieder gemacht werden, verfestigen sich entsprechende Schemata, wodurch sie künftig leichter und schneller mental ‚verfügbar' sind (vgl. Ziem 2008, S. 341). Im Einzelnen kann sich ein bestimmter konstanter Wert bzw. ein Schema mit Standardwerten im Rahmen eines übergeordneten Schemas verfestigen und damit zu einem Standardwert werden. So wird beispielsweise Topfschlagen weit häufiger bei Kindergeburtstagen gespielt als Skat. Deswegen kann sich TOPFSCHLAGEN als ein Standardwert der Spiele-Leerstelle im KINDERGEBURTSTAGSFEIER–Schema verfestigen. Bei jeder Passung der gespeicherten Werte zu den Umweltdaten wird der entsprechende Wert verfestigt und ist dadurch in Zukunft leichter und schneller aktivierbar bzw. erinnerbar und inferierbar. Doch nicht nur bestimmte Werte können sich kognitiv verfestigen, sondern auch die Leerstellen.[59] Werden Umweltdaten oft als Belegungen einer bestimmten Leerstelle interpretiert, erhöht dies die kognitive Präsenz dieser Leerstelle im Vergleich zu den anderen Leerstellen (vgl. Ziem 2008, S. 342). In Analogie zu den Werten könnte man sie als Standardleerstellen bezeichnen. So ist eine Opfer-Leerstelle in einem WOHNUNGSBRAND-Schema verfestigt, nicht aber bei einem KINDERGEBURTSTAGS-Schema.

Die „Subsumption eines Sachverhalts unter ein bestimmtes kognitives Schema [erhöht] dessen Stärke" (Schnotz 1994, S. 88). Das verfestigte Schema bzw. Leerstelle ist leichter

[59] Ziem führt Gründe an, warum das Theorem kognitiver Verfestigung als „realistisch" gelten darf; vgl. Ziem 2008, S. 348–356.

aktivierbar und kann „sich gegenüber anderen, konkurrierenden Schemata dementsprechend [besser] behaupten“ (ebd.). Eine Folge solcher Verfestigungsprozesse ist die Robustheit der entsprechenden Schemata und ihrer Strukturkonstituenten gegenüber möglichen Veränderungen (vgl. Seel 2003, S. 54).

Es kann angenommen werden, dass mit einer Verfestigung bestimmter Schemata und ihrer Bestandteile stets auch eine Schwächung aktivierter konkurrierender, jedoch auf die Umweltdaten nicht passender Schemata und ihrer Bestandteile einhergeht. Wenn ein bestimmtes Schema aufgrund der Umweltdaten aktiviert wird, sich aber letztendlich für die Interpretation der Situation als irrelevant oder unpassend erweist, wird sein Aktivierungspotential schwächer. Bei einer mehrmaligen Wiederholung dieser Erfahrung werden das entsprechende Schema bzw. einzelne Leerstellen oder Werte gelöscht, d.h. vergessen.

Die Verfestigung bzw. Schwächung von Schemata sowie ihrer einzelnen Bestandteile kann als eine recht minimale Veränderung des Vorwissens betrachtet werden. Schemata sowie ihre Strukturkonstituenten können aber nicht nur verfestigt bzw. geschwächt werden, sondern auch weitgehender verändert werden.

Umstrukturierung vorhandener Schemata und einzelner Strukturkonstituenten

Konkrete kognitive Inhalte bzw. Schemata können neue oder zusätzliche ‚Verankerungen‘, d.h. Leerstellen finden. Dies geschieht in radikaler Form, wenn ein Schema ihre Oberkategorie wechselt. Seel nennt das ‚radikale Veränderung von Konzepten‘ (vgl. Seel 2003, S. 248). Diese tritt ein, „wenn Sachverhalte, die bislang einer bestimmten semantischen Kategorie zugerechnet wurden, einer neuen Kategorie zugewiesen werden müssen, die in ihrer Art grundlegend verschieden ist von der alten“ (ebd.). Wenn ein Schüler lernt, dass Wärme eher ein Vorgang als eine Materialeigenschaft ist (vgl. ebd.), dann findet solch eine konzeptuelle Veränderung statt. Schematheoretisch gedeutet hieße das, dass bestimmte Schemata ihre Einbettungen in der Abstraktionshierarchie wechseln, d.h. sie ‚wandern‘ zu einem anderen, bereits vorhandenen (abstraktionshöheren) Schema. Solche Veränderungen geschehen selten abrupt, sondern sie sind eher langwierig und schleichend. In einer solchen Transferphase wird WÄRME demzufolge eine Zeit lang sowohl als Vorgang als auch als Materialeigenschaft betrachtet, sie belegt also die Unterkategorie-Leerstelle sowohl im Rahmen des MATERIALEIGENSCHAFT- als auch im Rahmen des VORGANG-Schemas. Aber nicht nur die Inhalte der Unterkategorien-Leerstellen können ihren Andockungsort verlassen, sondern auch Inhalte anderer Leerstellen, wie beispielsweise die Eigenschaften eines GEGENSTANDES. So wächst neben der ursprünglichen Erkenntnis, dass die Erde flach ist, die konkurrierende Erkenntnis, dass sie rund ist. Schematheoretisch gesprochen: Der konstante kognitive Inhalt ‚flach‘, der ursprünglich die Eigenschaften-Leerstelle der ERDE belegt, verlässt die Leerstelle. Stattdessen wird er durch den Inhalt ‚rund‘ ersetzt und gleichzeitig findet dabei der Wert ‚rund’ eine neue zusätzliche ‚Verankerung‘ im kognitiven System.

Diese Veränderungsart zeichnet sich dadurch aus, dass im Grunde keine neuen kognitiven Inhalte bzw. Schemata entstehen. Neu ist lediglich die Einbettung bzw. Verankerung bereits vorhandener kognitiver Inhalte im Rahmen vorhandener Schemata bzw. Leerstellen. Schemata werden umstrukturiert, wenn die kognitiven Inhalte bzw. (Sub-)Schemata ihre Leerstellenanbindung ändern, wodurch die zulässigen Variationsbereiche einzelner Schemaleerstellen eingeschränkt, erweitert oder revidiert werden (vgl. Schnotz 1994, S. 88).

Entstehung neuer Schemata und einzelner Strukturkonstituenten

Schemata können nicht nur umstrukturiert, sondern auch neu konstruiert werden. Wenn ein Subjekt erkennt, dass ‚Bruchzahlen stets in Dezimalzahlen umwandelbar sind', dann ist das eine neue EIGENSCHAFT DER BRUCHZAHLEN, also ein neuer kognitiver Inhalt bzw. ein neues (Sub-)Schema im Rahmen des bereits vorhandenen EIGENSCHAFTEN-DER-BRUCHZAHLEN-Schemas, wodurch das ursprüngliche Schema erweitert wird. Neue Schemata entstehen stets auf der Grundlage bereits vorhandener, indem mehrere voneinander unabhängige, vorhandene Schemata im Rahmen eines neuen Schemas zusammengeschlossen werden.[60] Daher ist die Grenze zwischen der Umstrukturierung vorhandener Schemata und Entstehung neuer fließend. Einen verbreiteten Fall stellt das Konstruieren übergeordneter Schemata dar. „Es entsteht ein neues, übergeordnetes Schema, das bereits vorhandene Schemata unter sich subsumiert bzw. zu einer Einheit zusammenfaßt" (Schnotz 1994, S. 88–89). Die Einbettung ursprünglicher Schemata in einem übergeordneten Schema geschieht primär aufgrund einer Abstraktionshierarchie oder einer Komplexionshierarchie. Im ersten Fall ist das subsumtive Schema ein neues abstraktionshöheres Konzept, das die untergeordneten Schemata als spezifische Fälle begreift. Im zweiten Fall werden ursprünglich unzusammenhängende Gegenstände als Bestandteile eines neuen übergeordneten Ganzen begriffen.

In diesem Zusammenhang ist auch die Entstehung einer neuen Leerstelle denkbar, falls im Rahmen eines Sachverhalts ein neuer Aspekt auftaucht, wie etwa bei duftenden Tassen (Entstehung der Geruch-Leerstelle im TASSE-Schema).

Die beschriebenen Arten der Schemaveränderungen sind nicht trennscharf; im Zuge einer kognitiven Informationsverarbeitung finden mehrere starke und schwache Veränderungen der ursprünglichen Schemata gleichzeitig statt. Bei jeder Aktivierung eines Schemas im Zuge einer Informationsverarbeitung unterliegt es einer Veränderung, indem es geschwächt/verfestigt, meistens umstrukturiert und erweitert wird, d.h. bei jeder Informationsverarbeitung wird gelernt. Allerdings variieren die Lernprozesse im Umfang der vollzogenen Schemaveränderungen, wobei als minimale Veränderung eine ausschließliche Verfestigung bzw. Schwächung eines Schemas und seiner Strukturkonstituenten anzusehen ist. Diese Lernart wird in der Alltagssprache nicht als Lernen, sondern eher als Festigung des Bekannten bezeichnet.

Ein Lernergebnis als Gesamtheit der im Zuge einer Informationsverarbeitung vollzogenen Veränderungen dokumentiert damit im Einzelnen, welche Schemata bzw. Strukturkonstituenten verfestigt und geschwächt wurden, welche kognitiven Inhalte, Leerstellen und

[60] Die Ursprünge kognitiver Schemata sind laut Piaget die sensomotorischen bzw. die enaktiven Schemata; vgl. Piaget und Inhelder 1983.

(Sub-)Schemata neu sind und wie die ursprünglichen Schemata umstrukturiert wurden. Diese Veränderungen vollziehen sich auf der Grundlage der im Zuge einer Informationsverarbeitung konstruierten Modelle. Schnotz formuliert diesen Sachverhalt wie folgt:

„Diese Konfiguration kognitiver Schemata [die der vorliegenden Situation am nächsten kommt E. K.], deren Leerstellen aktuell durch spezifisch empirische Daten ausgefüllt sind [also Modell im Sinne dieser Untersuchung E.K.], wird dann zur Grundlage für die Modifikation vorhandener und die Entstehung neuer Schemata." (Schnotz 1994, S. 88)

Folglich sind die vollzogenen Veränderungen sowohl von Inhalten und Strukturen aktivierter (noch nicht veränderter) Schemata als auch von den Inhalten und Strukturen der im Zuge einer Informationsverarbeitung konstruierten Modelle determiniert. Dabei kann angenommen werden, dass die Strukturen und Inhalte der konstruierten Modelle mit den Inhalten und Strukturen der modifizierten Schemata korrespondieren. Die vollzogenen Veränderungen werden also sichtbar, wenn man die aktivierten ursprünglichen Schemata mit den konstruierten Modellen bezüglich ihrer Inhalte und Strukturen vergleicht.

Nachdem die allgemeinen Grundlagen des kognitiven Lernens aus schematheoretischer Sicht skizziert wurden, sollen nun die Spezifika der Informationsquelle – Lehrtext – in die Untersuchung einbezogen werden.

3.2. Kognitive Lehrtextverarbeitung (als Lernen)

In der Alltagsprache spricht man vom ‚Lesen eines Textes'. Diese einheitliche Bezeichnung überdeckt, dass es unterschiedliche Arten des Lesens gibt und dass es sich dabei um einen höchst komplexen mentalen Prozess handelt. Allein die Tatsache, dass sich mit dem ‚Textverstehen' sowohl Psychologen als auch Sprachwissenschaftler beschäftigen, zeugt von der Vielschichtigkeit des Gegenstandes. In dieser Untersuchung wird eine schematheoretische Perspektive eingenommen; dabei stützt sich die Autorin primär auf die Theorieskizze des Psychologen Schnotz, der sich vorrangig auf die Verarbeitung wissensvermittelnder Texte, also Lehrtexte im Sinne dieser Arbeit bezieht (Schnotz 1994, Schnotz und Dutke 2004, Schnotz 1996, Schnotz 2006). Hinsichtlich verschiedener Aspekte werden die von Schnotz gelegten Grundlagen weiterentwickelt und unter anderem auch unter Einbeziehung von Erkenntnissen aus der Disziplin der Textlinguistik angereichert bzw. präzisiert.

Zunächst wird die Lehrtextverarbeitung ohne Berücksichtigung möglicher (Vor-)Wissensveränderungen betrachtet, indem auf die textexternen Einflussfaktoren (Kap. 3.2.1) sowie auf den Prozess und mögliche Ergebnisse der kognitiven Lehrtextverarbeitung (Kap. 3.2.2) eingegangen wird. Dabei werden unter anderem die Spezifika der Modelle, die im Zuge einer Lehrtextverarbeitung konstruiert werden, herausgearbeitet. Schließlich wird in Kapitel 3.2.3 die Lehrtextverarbeitung unter einer Lernperspektive betrachtet.

Die nachfolgenden Erläuterungen beziehen sich primär auf die Verarbeitung eines Lehrtextes. Andere Textsorten, wie insbesondere literarische Werke (z.B. Gedichte, Romane), appellative Texte (z.B. Aufgaben, Instruktionen), Gefühle mitteilende Alltagstexte (z.B. Liebesbriefe) und argumentative Texte werden aus der Betrachtung weitgehend ausgeschlossen, auch wenn viele der nachfolgenden Erläuterungen auf diese Textsorten zutreffen mögen.

3.2.1. Lehrtextverarbeitung als intentional gesteuerter Prozess

Der wichtigste Einflussfaktor für die kognitive Verarbeitung eines Lehrtextes sind die individuellen Voraussetzungen des Lesers. Zu ihnen gehört insbesondere das *Vorwissen* des Lesers, das in unterschiedliche Wissensarten differenziert werden kann; wie etwa Alltagswissen, thematisches (i.e.S. mathematisches) Wissen, Sprachwissen und metakognitives Wissen (vgl. Kap. 2.2). Neben den Wissensbeständen sind bestimmte *Fähigkeiten* des Lesers relevant, wie etwa allgemeine Merk- und Behaltensfähigkeit, Konzentrationsfähigkeit und Denkfähigkeiten. Über diese kognitiven Voraussetzungen hinaus spielen *motivationale und affektive Disposition* des Lernenden eine zentrale Rolle.[61] Dabei müssen grundsätzliche Voraussetzungen von den im unmittelbaren Verarbeitungsprozess aktivierten unterschieden werden (vgl. Schnotz 1994, S. 207). Die ersteren sind kognitive und emotionale Ressourcen des Lesers bzw. Lernenden. Im konkreten Verarbeitungsprozess wird jeweils nur ein Bruchteil dieser Ressourcen aktiviert bzw. genutzt. Das Aktivierte kann dabei die vorhandenen Ressourcen nicht über-, sehr wohl aber unterschreiten. Salopp gesagt: Oft wird ein Text oberflächlicher verarbeitet als man es eigentlich aufgrund der eigenen Fähigkeiten könnte. Die Aktivierung und damit der Grad der Ausschöpfung von Ressourcen erfolgt aufgrund bewusster und unbewusster Entscheidungen des Lesers, ist also im gewissen Grade von der Kontrolle und dem Willen des Lernenden abhängig (vgl. Schnotz 1994, S. 48).

Die individuellen Voraussetzungen werden unter anderem von der Situation, in der sich der Leser befindet, beeinflusst. Zahlreiche situative Merkmale beeinflussen, welche Lernvoraussetzungen wie ausschöpfend im Verarbeitungsprozess aktiviert werden, so z.B. Lautstärke, Zeitdruck, vorherige und folgende Tätigkeiten des Lesers usw. Des Weiteren sind die tatsächlichen oder vom Leser vermuteten Anforderungen an das Lesen relevant.[62]

Die genannten Faktoren bestimmen die Zielsetzung, die der Leser beim Lesen verfolgt und damit einhergehend die Verarbeitungsstrategie, d.h. die Art und Weise, wie der Leser den Textverarbeitungsprozess gestaltet und gewichtet. Schnotz unterscheidet bezüglich der Lehrtexte die Behaltens- von der Verstehensstrategie. Die erstere ist mit dem Ziel verbunden, „eine möglichst genaue Wiedergabe der Textinformation“ (Schnotz 1994, S. 199) zu ermöglichen, und zeichnet sich dadurch aus, dass memorierende Techniken zum Einsatz kommen. Die Verstehensstrategie kommt zum Einsatz, wenn „anschließend sog. Verständnisfragen zu beantworten sind oder das Gelernte bei der Lösung von inhaltsspezifischen Aufgaben eingesetzt werden soll“ (Schnotz 1994, S. 199). Der Leser verarbeitet dabei den Text nicht selektiv. Er versucht, den gesamten Text zu verstehen, d.h. mit seinem Vorwissen in Einklang zu bringen. Die Lesestrategien werden gesteuert und kontrolliert von

[61] Eine Übersicht zahlreicher motivationaler und affektiver Bedingungen des Lernens findet man in {Seel 2000 #156: 76-109}. Zum Zusammenhang zwischen Textlernen und thematischem Interesse vgl. Schiefele 1996.
[62] Eine Zusammenfassung psychologischer Studien bezüglich des Einflusses der Aufgabenorientierung auf das Verarbeitungsergebnis findet man bei Schiefele 1996, S. 126–127.

metakognitiven Strategien. Diese umfassen das deklarative und prozedurale Wissen über die eigenen Lernprozesse und den Wissensstand (vgl. Schnotz 1994, S. 205-209). Des Weiteren kann ein Leser beim Verarbeiten eines Lehrtextes Aktivitäten einsetzen, die über die obligatorischen Vorgänge bei der Verarbeitung eines Lehrtextes hinausgehen, wie beispielsweise das schriftliche Zusammenfassen oder die Mind-Map-Erstellung (vgl. Kap. 2.2). Diese zusätzlichen Aktivitäten werden als Lernstrategien bezeichnet.[63]

Lehrtextbearbeitung ist somit ein zielgerichteter und strategischer Prozess. Der Leser mit seinen konkreten individuellen Voraussetzungen verfolgt in einer konkreten Situation ein bestimmtes Leseziel und verwendet den Text als Grundlage zum Erreichen entsprechender Ziele. Er entscheidet sich bewusst oder unbewusst für eine aus seiner Sicht dazu geeignete Strategie und für ein entsprechendes Maß der Nutzung seiner kognitiven Ressourcen (wie z.B. Anstrengungsbereitschaft). Das folgende Beispiel soll die erwähnten Phänomene in Bezug auf einen Schulbuchlehrtext veranschaulichen: Wenn ein Schüler eine bestimmte Hausaufgabe nicht lösen kann (Lernsituation) und den Text mit der Absicht liest, Lösungsverfahren zu dieser Aufgabe zu erhalten (Leseziel), dann entscheidet er sich eher für eine selektive Textverarbeitung, in der vorrangig der für das Lösen der vorliegenden Aufgaben relevanten Information Aufmerksamkeit gewidmet wird (Verarbeitungsstrategie). Und je nachdem, wie bedeutsam für ihn eine erfolgreiche Hausaufgabenbearbeitung ist, entscheidet er sich für ein bestimmtes Maß an Anstrengung, die er bereit ist zu investieren (aktivierte Fähigkeiten) und evtl. für zusätzliche Aktivitäten, wie beispielsweise das schriftliche Festhalten der Bearbeitungsschritte (Lernstrategie). Im Verarbeitungsprozess kontrolliert der Schüler anhand metakognitiver Strategien, ob und inwiefern er sein Leseziel erreicht hat.

Welche Rolle kommt nunmehr dem Text in diesem Gesamtgefüge zu? Auch wenn die kognitive Verarbeitung eines Textes und damit das Leseergebnis von vielen textexternen Faktoren beeinflusst werden, spielen textinterne Merkmale dabei ebenfalls eine zentrale Rolle. Die Textdaten beeinflussen nicht nur den Prozess der kognitiven Textverarbeitung, sondern auch das Leseziel und die Verarbeitungsstrategie, denn die ursprünglich gewählten Bearbeitungsziele und –strategien inklusive des beabsichtigten Anstrengungsmaßes sind keine im Laufe des Leseprozesses konstanten Größen, sondern aufgrund bestimmter Textmerkmale veränder- und validierbar. Wenn der Leser merkt, dass er aufgrund bestimmter Besonderheiten des Textes sein Leseziel nicht erreichen kann, dann liegt es für ihn nahe, entweder die Textrezeption zu beenden oder das Ziel den Textgegebenheiten anzupassen. Wenn ein Schüler einen Lehrtext mit dem ursprünglichen Ziel verarbeitet, „den Text verstehen zu wollen“, dieses jedoch nicht erreicht, dann ist es also möglich, dass er zu einem anderen Ziel, wie beispielsweise „das für den Unterricht vermutlich Wichtige auswählen und merken“ wechselt und dabei entsprechende Behaltensstrategien (Memoriertechniken) anwendet. Ebenso denkbar ist die konträre Richtung: Der Leser wird vom Text so ‚mitgerissen‘, dass er seine

[63] Klassifikationen möglicher Verarbeitungs- und Lernstrategien liefern Hasselhorn und Gold 2009, S. 91–95 und Schiefele 1996, S. 123–126. Zur Klassifikation metakognitiver Strategien siehe Hasselhorn und Gold 2009, S. 95.

ursprünglichen Ziele ‚vergisst' und sich auf den Text ‚voll und ganz einlässt'. Textbearbeitung ist damit auch ein adaptiver Prozess (vgl. Schnotz 1994, S. 48).

Die genannten Zusammenhänge sind in Anlehnung an Schnotz (vgl. Schnotz 1994, S. 47) in Abbildung 1 schematisch dargestellt. Dabei wurden nur die obligatorischen Einflussfaktoren skizziert, die weiterführenden Lernstrategien sind in der Darstellung nicht enthalten.

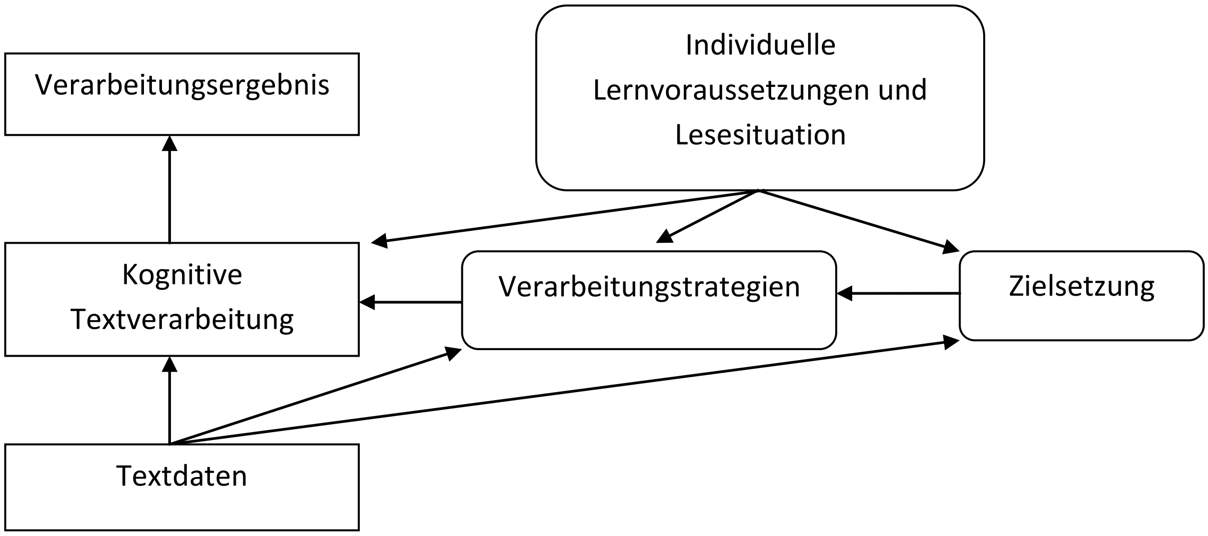


Abbildung 1: Lehrtextverarbeitung als intentional gesteuerter strategischer Prozess

Im folgenden Abschnitt wird nunmehr auf den Prozess und mögliche Ergebnisse der kognitiven Lehrtextverarbeitung eingegangen.

3.2.2. Prozess und Ergebnisse der kognitiven Lehrtextverarbeitung

Der Prozess der kognitiven Lehrtextverarbeitung kann aus schematheoretischer Sicht zunächst als Konstruktion eines Modells des im Text beschriebenen Gegenstandes interpretiert werden. Da ein Modell als ein mit konstanten Werten belegtes Schema bestimmt wurde, beinhaltet eine Modellkonstruktion insbesondere eine unbewusste ‚Suche' nach einem Schema, dessen Leerstellen zu den Textdaten eines Textes passen. Dieser Prozess kann in zwei Stufen unterteilt werden: Erfassen der (sprachlichen) Bedeutung der einzelnen Textdaten und Erfassen des Sinns einzelner Textdaten im Gesamttext. Die erste Stufe bildet dabei die Grundlage für die zweite. Im Folgenden werden die beiden Teilprozesse zunächst in Bezug auf natursprachliche Texte erläutert.

Erfassen der sprachlichen Bedeutung der einzelnen natursprachlichen Textdaten

Schnotz geht davon aus, dass im Prozess der kognitiven Textverarbeitung, der dazu dient, eine mentale Repräsentation des Textgegenstandes zu konstruieren, die Textdaten nicht sofort als Modelle, sondern zunächst in Form von sogenannten ‚Propositionen' mental repräsentiert werden.[64] Propositionen sind „komplexe interne Symbole" (Schnotz 1996, S.

[64] Schnotz nimmt noch eine weitere Verarbeitungsebene, die „als Grundlage für die Bildung der darauf aufbauenden höheren Repräsentationen [dient]" (Schnotz 2006, S. 225), nämlich die ‚Oberflächenebene' an.

975), daher kann „eine propositionale Repräsentation […] als Beschreibung des betreffenden Gegenstands in einer hypothetischen mentalen Sprache angesehen werden, und das Verstehen eines Textes entspricht dann einem Übersetzen der äußeren Sprache in diese hypothetische mentale Sprache“ (ebd.).[65] Dieser Übersetzungsprozess beinhaltet eine syntaktisch-semantische Analyse der vorliegenden Textdaten. Im Zuge der Konstruktion einer propositionalen Repräsentation wird das ‚Gesagte‘ bzw. die ‚Bedeutung‘ einer sprachlichen Einheit erfasst.

„Eine propositionale Repräsentation ermöglicht zu verstehen, was gesagt wird, auch ohne zu verstehen, welcher Sachverhalt gemeint ist.“ (Schnotz 2006, S. 226)

Als Beispiel für einen Sachverhalt, bei dem man das Gesagte, nicht aber das Gemeinte versteht, gibt Schnotz den berühmten Satz von Chomsky an: *„Farblose grüne Ideen schlafen wütend*“ (vgl. Schnotz 2006, S. 226). Der Leser kann diesen Satz sowohl syntaktisch als auch semantisch analysieren Er ‚weiß‘, was getan wird (geschlafen), wer schläft (Ideen), welche Eigenschaften Ideen haben (farblos und grün) und wie geschlafen wird (wütend). Auf der propositionalen Verarbeitungsebene wird also das ‚Gesagte‘ erfasst und mental in Form von inneren Symbolen repräsentiert. Doch was ist das ‚Gesagte‘, das sich im Gegenteil zum ‚Gemeinten‘ konstituiert? Während Schnotz als Psychologe dieser Frage nicht weiter nachgeht, schaut die Sprachwissenschaft, die das ‚Gesagte‘ bzw. ‚sprachlich Bedeutete‘[66] als eine subjektexterne, also als eine intersubjektive Größe konzipiert, hier genauer hin.

Der Linguist Polenz beschreibt den Unterschied zwischen ‚Bedeutetem‘ und ‚Gemeintem‘ wie folgt:

„Es ist ein grundsätzlicher Unterschied zwischen dem, was Wörter und andere Ausdrucksformen bedeuten (lexikalische/usuelle Bedeutung), und dem, was jemand bei ihrer Verwendung im Sprachverkehr mit ihnen meint (aktuelle/okkasionelle Bedeutung). Dies gilt nicht nur für den Extremfall des ironischen Sprechens […]. Der Inhalt einer sprachlichen Äußerung besteht nicht nur aus dem, was die sprachlichen Ausdrucksformen von Wortschatz und Grammatik her als ihre Bedeutungen ‚mitbringen‘, konkreter: Was Sprecher/Verfasser bzw. Hörer/Leser in ihrem Sprachwissen als Bedeutungen gespeichert haben und (mehr oder weniger sorgfältig) anwenden. […] Was man Verstehen oder Rezeption einer Äußerung nennt, ist nicht bloßer ‚Empfang‘ fertiger transportierter Informationseinheiten, […] sondern Ergebnis eines kombinierten Handelns des Rezipierenden, nämlich eine Kombination aus einerseits Anwenden von Sprachwissen (Wiedererkennen von Ausdrucksformen und Bedeutungen) und andererseits Annahmen Machen über das, was der Sprecher/Verfasser mit seinen Äußerungen gemeint hat oder haben könnte. Außer

Die Beschreibung der mentalen Repräsentation der Textoberfläche bleibt allerdings vage; so schreibt er „[in der mentalen Repräsentation der Textoberfläche werden] die spezifischen sprachlichen Formulierungen bzw. die konkreten linguistischen Eigenschaften des Textes erfaßt“ (Schnotz 1994, S. 213).

[65] Zu den Charakteristika und Merkmalen der ‚propositionalen Repräsentation“ vgl. Schnotz 1994, S. 150–160, Kintsch 1998, S. 49–92, Steiner 1996, S. 204–207, Engelkamp 2006, S. 573–575.

[66] Die Begrifflichkeiten, die diesen Sachverhalt erfassen, variieren im Rahmen linguistischer Forschung stark; u.a. finden sich ‚Bedeutung‘, ‚Inhalt‘, ‚Textvordergrund‘, ‚bedeuteter propositionaler Gehalt‘ (Polenz 2008), ‚Inhaltspotential‘ (Scherner 1984), ‚potentieller Sinn der Äußerung in der Sprache‘ (Scholz 2001), ‚implizite Textbasis‘ (van Dijk 1980). Die Kognitionspsychologen sprechen zumeist von ‚propositionaler Textbasis‘.

der Wortschatzkenntnis und Grammatikbeherrschung braucht man zum Verstehen von Gesagtem eine Kenntnis der Person, ihrer Einstellungen und Gewohnheiten, Kenntnis und Einschätzung der Situation und des Kommunikationsablaufs, Wissen von der Welt, in der man lebt und auf bestimmte Weisen nach Regeln miteinander kommuniziert." (Polenz 2008, S. 299ff., hier ohne Hervorhebungen)

Das Bedeutete ist demnach das Ergebnis des Anwendens des Sprachwissens im engen Sinn (vgl. Kap. 2.2); zur (Re-)Konstruktion des vom Autor (vermutlich) ‚Gemeinten' bedarf der Hörer/Leser hingegen weiterer Wissensbestände. Dies sind im Einzelnen u.a. Kenntnisse bzw. Annahmen bezüglich der Kommunikationssituation und des Autors, bestimmtes inhaltliches Wissen sowie Sprachwissen in einem weiten Sinn.

Während Polenz seine Überlegungen auf jegliches sprachliches kommunikatives Handeln bezieht, entwickelt Nussbaumer eine Theorie, die ausschließlich schriftliche (längere) Texte im Blick hat. Der Linguist unterscheidet Text I (das sprachlich Bedeutete) und Text II (das Gemeinte). Text I beschreibt er als ein „sprachliches Gebilde unter dem Zugriff des Sprachwissens allein" (Nussbaumer 1991, S. 174), „ein solcher Text ist eine Sequenz von grammatischen Einheiten, Wortformen und syntaktischen Gebilden, konventionellen Wortbedeutungen und Satzbedeutungen" (Nussbaumer 1991, S. 173). Letztere sind dabei „oft vage und konkretisierungsbedürftig" (Nussbaumer 1991, S. 169), so dass man es „eher mit einem Bedeutungspotential als mit einer voll spezifizierten Bedeutung zu tun" (ebd.) hat. Diese Bedeutungen oder ‚Sätze-an-sich' (vgl. Hörmann 1980, S. 17) sind, wenn man die Intersubjektivität des Sprachwissens im engen Sinne voraussetzt, für alle Leser einer Sprachgemeinschaft in allen textuellen Einbettungen und allen kommunikativen Situationen stets gleich.

Zusammenfassend kann die erste Verarbeitungsstufe wie folgt beschrieben werden: Der Leser erfasst unter dem Zugriff auf das Sprachwissen im engen Sinne Grammatik und Syntax sowie die Bedeutungen einzelner Wörter und Sätze. Dieser Prozess ist flüchtig, vermutlich wird dabei nicht das gesamte lexikalische Bedeutungspotential der einzelnen sprachlichen Einheiten erfasst, sondern nur jenes Bedeutungspotential, das sich in Abhängigkeit des Vortextes dem Leser ‚aufdrängt' (vgl. Hörmann 1980, S. 26). Insgesamt ist das Erschließen der sprachlichen Bedeutung eine notwendige und flüchtige Vorstufe des Erfassens des Sinns der einzelnen sprachlichen Einheiten im Kontext.

Anhand der sprachlichen Analyseprozesse übersetzt der Leser bei natursprachlichen Texten – so die verbreitete Annahme innerhalb der kognitivpsychologisch orientierten Textverstehensforschung – externe Zeichen in interne Symbole, wodurch eine propositionale Repräsentation der Textdaten konstruiert wird. Diese internen Daten dienen schließlich als Grundlage zur Konstruktion eines Modells des Textgegenstandes. In dieser Arbeit wird nicht davon ausgegangen, dass der Leser immer – quasi notwendigerweise – eine Übersetzung der externen in interne Symbole vollzieht, also eine propositionale Repräsentation der einzelnen Sätze konstruiert. Es wird lediglich die Annahme getroffen, dass ein Leser unter bestimmten Bedingungen in der Lage ist, diese zu bilden. Es ist aber auch möglich, dass ein Rezipient von den externen Symbolen auch direkt ‚ohne propositionale Umwege' ein Modell des

Textgegenstandes bildet. Das heißt: Das Ergebnis des Erfassens der sprachlichen Bedeutung wird nicht extra mental repräsentiert, sondern ‚sofort' weiterverarbeitet.

Konstruktion eines Modells als Erfassen des Sinns der einzelnen natursprachlichen Textdaten im Gesamttext

Ausgehend von den sprachlichen Bedeutungen einzelner Textdaten werden bestimmte inhaltsspezifische Schemata aktiviert und belegt. So wird beim Verarbeiten des Satzes ‚Otto isst Suppe' das ESSEN-Schema aktiviert und belegt, indem die Essender- und Speisen-Leerstellen mit konstanten textbasierten Werten belegt werden, wodurch ein ‚kleines' Modell gebildet wird (vgl. Kap. 3.1). Gleichzeitig werden aber auch weitere Leerstellen mit jeweiligen Standardwerten aktiviert (d.h. gewisse (Sub-)schemata, die oft auch konkurrierend sein können), die gewissen Erwartungen an den Text entsprechen. Beispielsweise werden beim Lesen des oberen Satzes die Ort-Leerstelle mit den RESTAURANT und ZUHAUSE-Belegungen, die miteinander konkurrieren, aktiviert (vgl. Schnotz 1994, S. 67). Es handelt sich um Hypothesen, die anhand der weiteren Textdaten bestätigt oder verworfen werden. Die aktivierten Schemata enthalten die in sie eingebetteten Subschemata, wie BESTELLEN und BEZAHLEN bzw. KOCHEN und ABWASCHEN. Es handelt sich dabei um Subhypothesen, die zur Überprüfung der übergeordneten RESTAURANT- bzw. ZUHAUSE-Hypothese dienen.

„So wie eine Theorie überprüft wird, indem man aus ihr bestimmte Einzelhypothesen ableitet und diese mit empirischen Daten konfrontiert, werden kognitive Schemata evaluiert, indem absteigend bestimmte untergeordnete Schemata aktiviert werden, für die dann die Übereinstimmung mit den vorliegenden Daten festgestellt wird." (Schnotz 1994, S. 69)

Wenn diese (Sub-)Hypothesen ‚von unten' (bottom up) durch die Textdaten Bestätigung finden, wird die dazugehörige übergeordnete Hypothese bzw. das entsprechende Schema verstärkt und die konkurrierenden geschwächt bzw. verworfen. Wenn auf den Beispielssatz ‚*Beim Zahlen merkte er, dass er zu wenig Geld bei sich hatte. Er bedauerte, ein so teures Gericht bestellt zu haben*' folgt, dann wird das RESTAURANT-Schema bestätigt und das konkurrierende ZUHAUSE-Schema verworfen (vgl. Schnotz 1994, S. 68). Gleichzeitig werden die Textdaten als Werte des BEZAHLEN-Schemas interpretiert, d.h. das gebildete Modell wird erweitert. In solch einem komplexen Prozess auf- und absteigender, zunächst probeweise vollzogener Schemaaktivierungen bildet sich in der Regel „eine bestimmte Konfiguration aktivierter Schemata […], die einander im Sinne wechselseitiger Resonanz hinsichtlich ihrer Aktivität unterstützen und die sich gegenüber konkurrierenden Schemata durchsetzen" (Schnotz 1994, S. 69–71). Diese Schema-Konfiguration ist aus der Sicht des Lesers die beste Interpretation der Textdaten.

Ein verstehen-wollender Leser hat dabei das Bestreben, ein Schema zu ‚finden' bzw. zu konstruieren, dessen Leerstellen bzw. Subschemata zu möglichst allen Textdaten passen. Insgesamt erscheint die kognitive Textverarbeitung als ein text- und vorwissengeleiteter Prozess.

Ein Modell, das aufgrund einer Textverarbeitung konstruiert wird, soll an einem kleinen Beispieltext veranschaulicht werden. Wir nehmen an, dass ein Leser folgende Textdaten in Form einer SMS bekommt: ‚*Hans kommt nicht zur Konferenz. Er ist krank*'. Der Gesamttext wird im Rahmen eines abstraktionshohen HANDLUNG-Schemas interpretiert, dabei belegt ‚Hans' die Handelnder-Leerstelle, ‚kommt nicht zur Konferenz' die Art-der-Handlung- und ‚er ist krank' die Ursachen-Leerstelle.[67] Die einzelnen Werte sind mental als Submodelle repräsentiert; es sind also mentale ‚Vorstellungen' vom (kranken) Hans sowie der Konferenz. Schließlich denkt der Leser ‚weiter', etwa an die *Folgen* des Nicht-Erscheinens von Hans. Vielleicht muss der Leser nun den Vortrag auf der Konferenz selbst halten oder die Konferenz muss ausfallen. Schematheoretisch gesprochen belegt der Leser weitere aktivierte Leerstellen anhand seines (Vor-)Wissens, wodurch das Modell des im Text beschriebenen Gegenstandes erweitert wird. Solche weiterführenden Inferenzen werden als Elaborationen bezeichnet. Eventuell bleiben einige Fragen offen: Welche Krankheit hat Hans? Wie lange bleibt er krank? Das heißt, es werden einige Leerstellen des KRANKHEIT-Schemas aktiviert, die anhand des Vorwissens sowie der vorliegenden Textdaten nicht belegt werden können. Wie man sieht, greift der Leser bei der Konstruktion eines mentalen Modells auf zahlreiche Wissensbestände zurück, die nicht dem sprachlichen Wissen angehören.[68]

Aus linguistischer Perspektive erfasst der Leser die ‚aktuelle Bedeutung' der ‚Sätze im Kontext' bzw. den ‚gemeinten Sinn' einzelner Wörter, Sätze und schließlich des Gesamttextes.[69] Dies geschieht, indem die einzelnen (lexikalischen) Wort- und Satzbedeutungen unter Zugriff auf sprachliches Wissen im weiten Sinn, das Weltwissen, die Kenntnisse der Kommunikationssituation sowie des Vortextes vereindeutigt, semantisch miteinander und mit den bereits gegebenen Wissenselementen verknüpft und gegebenenfalls ergänzt werden. Nussbaumer bezeichnet solch einen ‚ausgedeuteten' Text, den er als ein sprachliches Gebilde unter Zugriff auf weitere Wissensbestände (versus ausschließlich sprachliches Wissen im engen Sinn) bestimmt, als Text II (vgl. Nussbaumer 1991, S. 174).

Insgesamt erscheint der Prozess einer Lehrtextverarbeitung als schemageleitete Konstruktion eines Modells des Textgegenstandes. Die Schemata werden unter anderem aufgrund der sprachlichen Bedeutungen der Textdaten aktiviert. Das unterstreicht Schnotz, indem er die propositionale Repräsentation der Textdaten als die Grundlage der Modellbildung ansieht. Andererseits – und darauf machen insbesondere die Linguisten aufmerksam – werden Schemata schon vor der Rezeption eines Textes auf der Grundlage der Kenntnisse der jeweiligen kommunikativen Situation aktiviert (vgl. Heinemann und

[67] Vgl. das von Konerding herausgearbeitete HANDLUNG-Schema mit den jeweiligen Leerstellen (vgl. Konerding 1993, S. 472) sowie die ‚Prädikationsklassen' und ‚semantischen Rollen' von Polenz (vgl. Polenz 2008, S. 159–174).

[68] Das sprachliche Mitgeteilte ist dabei rudimentär, man beachte zum Beispiel, dass die semantische Verbindung zwischen den beiden Sätzen sprachlich gar nicht angedeutet ist – wie etwa mit Hilfe eines ‚weil' – und trotzdem gelingt eine zusammenhängende Interpretation beider sprachlicher Äußerungen problemlos.

[69] Auch hier sind die Termini uneinheitlich; ‚semantischer (Text-)Sinn' (Strohner 2006), ‚Texthintergrund', ‚gemeinter propositionaler Gehalt' (Polenz 2008), ‚Verstehen des mit der Äußerung des Satzes Gesagten' (Scholz 2001), ‚explizite Textbasis' (van Dijk 1980).

Viehweger 1991, S. 71). Falls es dem Leser gelingt, die vorliegenden Textdaten als Werte eines intakten Modells zu interpretieren, erlebt er den (Lehr-)Text als sinnhaft.

Misslingen der Konstruktion eines Modells als Beeinträchtigung des Sinnerlebens

Der Prozess der Bildung eines intakten Modells kann misslingen, falls der Leser kein passendes Schema für den Gesamt- bzw. Teiltexte ‚finden' kann, wodurch das Erleben des Sinns eines Textes beeinträchtigt wird. Extrembeispiele bilden ‚sinnlose' Sätze wie der bereits erwähnte Satz ‚*Farblose grüne Ideen schlafen wütend*. ' Wie bereits angemerkt, gelingt dem Leser das Erfassen der Wörterbedeutungen sowie der syntaktisch-grammatikalischen Rolle einzelner sprachlicher Bestandteile. Allerdings gelingt es nicht, ein Schema aufzurufen oder zu konstruieren, dessen Leerstellen zu den vorliegenden Werten passen würden, d.h. die Textdaten passen nicht zu den abgespeicherten Wertebereichen bzw. Leerstellen. So gehört der Wert ‚schlafen' nicht in das IDEEN-Schema, da im Letzteren grundsätzlich eine Tätigkeit-Leerstelle fehlt. Des Weiteren gehört der Wert ‚grün' nicht zur Eigenschaften-Leerstelle des IDEEN-Schemas. Damit gelingt es nicht, ein intaktes mentales Modell des beschriebenen Gegenstandes zu bilden. Ein ähnliches Phänomen kann nicht nur auf der Satzebene, sondern auch auf der Textebene auftreten, wobei es nicht gelingt, ein subsumtives Ganzes zu finden. Dies ist beispielsweise der Fall bei folgenden sprachlich ‚sinnvollen', aber unzusammenhängenden (nicht kohäsiven) Sätzen: „Die Posten dösen. Wie ein Känguru sah sie aus" (Rickheit und Schade 2000, S. 276). Außerdem kann dieses Phänomen auch bei sprachlich zusammenhängenden (kohäsiven) Sätzen auftreten, wie folgendes Beispiel veranschaulicht: „Ich habe eine alte Freundin in Hamburg getroffen. Dort gibt es zahlreiche öffentliche Bibliotheken. Diese Bibliotheken wurden von Jungen und Mädchen besucht. Die Jungen gehen oft in Schwimmbäder. Die Schwimmbäder waren im letzten Jahr mehrere Wochen geschlossen. Die Woche hat 7 Tage usw. usw.".[70] Die einzelnen unelaborierten und unvollständigen Modelle, die aufgrund der einzelnen Sätze gebildet werden können, fügen sich nicht in ein übergeordnetes Modell zusammen, weil kein Schema gefunden werden kann, deren Subschemata zu den vorliegenden Textdaten passen würden. Der Text ‚zerfällt' in einzelne voneinander unabhängige Bestandteile;[71] demzufolge ist das Erleben von Sinn des Textes beeinträchtigt.

Mittelbare und unmittelbare Rolle der Textdaten bei Konstruktion eines Modells

Aus dem bisher Gesagten folgt, dass ein Lehrtext nur dann in seiner Gesamtheit als sinnvoll erlebt werden kann, wenn es dem Leser gelingt, anhand der Textdaten ein intaktes Modell der im Text beschriebenen ‚Sache' zu konstruieren und wenn alle Textdaten zur Modell-

[70] Vgl. Fußnote 19.

[71] Texte unterscheiden sich von ‚sinnlosen' Wort- und Satzfolgen aufgrund eines „inhaltlichen Zusammenhangs". Um dieses Phänomen theoretisch zu fassen, wird zumeist der Begriff ‚Kohärenz' benutzt. Vertreter der Textlinguistik haben lange versucht, die ‚Kohärenz' als ein sprachliches bzw. textinhärentes Merkmal zu bestimmen, was aber größtenteils misslang. Der psychologisch fundierte Kohärenzbegriff zeichnet sich dadurch aus, dass er in Bezug auf die kognitiven Prozesse der Sprachproduktion und –rezeption definiert wird. Einen Überblick über die unterschiedliche Fundierung des Begriffs ‚Kohärenz' im Rahmen der Linguistik und Psycholinguistik liefert Rickheit und Schade 2000, S. 276–283.

bildung beitragen. Dabei kann der Beitrag der Textdaten ein unmittelbarer oder ein mittelbarer sein. Der erstere, der in den vorhergehenden Ausführungen primär erläutert wurde, zeichnet sich dadurch aus, dass die Textdaten als textbasierte Werte aktivierter Leerstellen interpretiert werden, wodurch sie unmittelbar zu den Inhalten des konstruierten Modells beitragen. Darüber hinaus können Lehrtexte einige (metakommunikative) Äußerungen enthalten, die Hinweise bezüglich des zu konstruierenden Modells – im Einzelnen der zu aktivierenden Leerstellen und ihrer Ordnung – liefern. Solche Textdaten dienen mittelbar zur Konstruktion eines Modells und werden bei Passung zwischen den Hinweisen und dem konstruiertem Modell vom Leser als sinnvoll erlebt. Ein Lehrtext wird also nur dann als sinnvoll erlebt, wenn es dem Leser gelingt, alle Textdaten (!) als einen mittelbaren oder unmittelbaren Beitrag zu einem intakten Modell zu interpretieren. Im Umkehrschluss gilt entsprechend: Das Erleben von Sinn eines Lehrtextes ist beeinträchtigt, wenn es nicht gelingt, einzelne Textdaten als Werte oder als Strukturierungshinweise bezüglich eines intakten Modells zu interpretieren.

Propositionale Repräsentation und Modellbildung als unterschiedliche Verarbeitungsarten einzelner Textdaten

Bis hierher wurde die Textverarbeitung als ein Prozess skizziert, bei dem der Leser aufgrund der sprachlichen Bedeutungen der Textdaten, die nicht gesondert mental repräsentiert werden, sowie weiterer Wissensbestände zunächst partielle, wenig elaborierte und unvollständige Modelle bildet, die im Hinblick auf das Ziel, ein intaktes bzw. sinnstiftendes Modell zu konstruieren, im Laufe des Leseprozesses verändert, zusammengefügt, angereichert und umorganisiert werden. Dies ist jedoch nicht immer der Fall. Unter gewissen Bedingungen verzichten Leser auf eine Modellbildung. Sie konstruieren die propositionale Textbasis, d.h. sie übersetzen den Text in die mentale Sprache und repräsentieren dadurch mental sprachliche Bedeutung. Die Verknüpfung der einzelnen Propositionen untereinander entsteht dabei ausschließlich unter Zugriff auf Sprachwissen im engen Sinn. So sind beispielsweise die beiden Propositionen der oberen Hans-SMS lediglich dadurch miteinander verbunden, dass in ihnen der Agent ‚Hans' vorkommt. Die Ursachen-Folge-Beziehung, die – wie oben gezeigt – in einem mentalen Modell hergestellt wird, existiert auf der Ebene der propositionalen Textbasis nicht. Wenn die Textdaten ausschließlich auf diese Art und Weise verarbeitet werden, dann sind die einzelnen Satzinhalte nur rudimentär miteinander verknüpft, d.h. die Verknüpfungen beruhen nur auf sprachlichem Wissen im engen Sinne und sie bestehen daher in der Regel höchstens nur zwischen unmittelbar aufeinanderfolgenden Sätzen. Ein globaler Zusammenhalt im Sinne semantischer Zusammenhänge zwischen größeren Textabschnitten ist dabei nicht gegeben (vgl. Schnotz 2006, S. 228).[72] Der Leser ‚weiß' im Grunde nicht, worum es im Gesamttext geht. Da die propositional repräsentierten Textdaten nicht als Werte kognitiver Schemata interpretiert wurden, sind sie in das Vorwissen des Lesers nicht eingebettet, sondern lediglich angelagert.

[72] In der Textverstehensforschung wird diesbezüglich in der Regel zwischen lokaler und globaler Kohärenz unterschieden (vgl. Schnotz 2006, Graesser C. Arthur et al. 1994, Rickheit et al. 2003, S. 71–72, Rickheit und Strohner 1999, S. 280–283).

Der Leser verarbeitet und versteht den Text nur oberflächlich (vgl. Schnotz 1994, S. 215, Kintsch 1996, S. 506).

Propositionale Verarbeitung wird von einem Leser dann bevorzugt, wenn er von vornherein ein Behaltensziel und eine entsprechende Behaltensstrategie verfolgt (vgl. Schnotz 1994, S. 217–222). Er liest den Text oberflächlich, bildet also eine propositionale Textbasis, beurteilt eventuell, was (nicht) behaltenswert ist und prägt sich die behaltenswerten Propositionen ein. Eine oberflächliche Verarbeitung von Lehrtexten kann nicht nur bei einer spezifischen Behaltens-Zielsetzung auftreten, sondern auch dann, wenn die Bildung eines intakten Modells (zunächst) erschwert ist, um eventuell anschließend eine Modellbildung nachzuholen.[73]

„[Der Leser] stellt den Aufbau eines mentalen Modells zunächst etwas zurück, konzentriert sich vor allem auf die Bildung der propositionalen Textbasis und versucht, diese gut zu memorieren. Eine solche Verarbeitung ermöglicht dem Lernenden zumindest gute Behaltensleistungen und erlaubt ihm gegebenenfalls später eine weitergehende mentale Modellbildung nachzuholen.“ (Schnotz 1994, S. 218)

So ist es wahrscheinlich, dass beim Verarbeiten des oberen kohäsiven, aber ‚sinnlosen‘ ‚Hamburg-Textes‘ der Leser weitgehend darauf verzichtet, zu den einzelnen erwähnten Gegenständen, wie Hamburg, Bibliotheken, Jungen und Mädchen, Schwimmbäder usw. Modelle zu bilden. Vielmehr wird er den Text oberflächlich lesen, in der Hoffnung, dass sich ‚das schon irgendwann mal klären’ wird – durch die Nichterfüllung dieser Erwartung bleibt er am Ende des Leseprozesses jedoch ratlos. Die Textdaten bleiben in diesem Fall propositional repräsentiert und damit oberflächlich verarbeitet.

Eine erschwerte Modellbildung, die gleichbedeutend mit (zunächst) fehlendem (semantischen) Sinn einzelner Textdaten ist, kann dazu führen, dass der Leser die ‚Suche nach dem Sinn‘ aufgibt bzw. aufschiebt und auf einer oberflächlichen Ebene der Textverarbeitung verbleibt. Falls sich auch am Ende des Verarbeitungsprozesses kein Sinnerleben einstellt, d.h. falls kein (intaktes) Modell vom Leser konstruiert werden kann, bleiben die Textdaten oberflächlich verarbeitet. Dies hat, wie später noch erläutert wird, gravierende Folgen bezüglich des Lernens aus einem Lehrtext.

Verarbeitungsarten und -ergebnisse einzelner Textdaten und des Gesamttextes

Die einzelnen Textdaten können also entweder oberflächlich, d.h. ausschließlich aufgrund ihrer Sprachbedeutung, oder tief, d.h. als Leerstellenwerte aktivierter Schemata oder als Strukturierungshinweise bezüglich des zu konstruierenden Modells verarbeitet werden. Ein Gesamttext kann dementsprechend ausschließlich oberflächlich oder ausschließlich tief oder auf eine gemischte Art und Weise, d.h. teilweise oberflächlich und teilweise tief verarbeitet werden. Bei tief verarbeiteten Textdaten ist entscheidend, ob dabei ein zusammen-

[73] Auch beim lauten Lesen wird oft aufgrund der zusätzlichen Anforderung im Vergleich zum stillen Lesen vermehrt oberflächlich gelesen; vgl. Kintsch 1996, S. 506.

hängendes oder mehrere unzusammenhängende Modelle konstruiert werden. Bei unzusammenhängenden Modellen dürfte sich in der Regel eines dieser Einzelmodelle dadurch auszeichnen, dass es die meisten Textdaten des Gesamttextes als Leerstellenwerte enthält. Dieses Modell wird im Folgenden als Hauptmodell bezeichnet. Die Modelle, die entsprechend weniger Textdaten beinhalten, werden als Nebenmodelle bezeichnet.

Sowohl oberflächlich verarbeitete Textdaten als auch einzelne konstruierte Modelle können im Laufe des Leseprozesses vergessen werden, d.h. aus dem Arbeitsgedächtnis ‚gelöscht' werden. Oberflächlich verarbeitete Textdaten sind grundsätzlich vom Vergessen bedroht, da sie nicht in das Vorwissen eingebettet sind. Sie können nur dann behalten werden, wenn sie mit verstärkter Aufmerksamkeit und unter Einsatz von Mnemotechniken eingeprägt werden. Bei unzusammenhängenden Modellen sind insbesondere die Nebenmodelle vom Vergessen bedroht, da die Aufmerksamkeit des Lesers primär auf die Hauptmodelle fällt.

Das Verarbeitungsergebnis einzelner Textdaten lässt sich damit anhand der Verarbeitungsart (oberflächlich/tief) und anhand der Präsenz im Arbeitsgedächtnis (vergessen/nicht vergessen) charakterisieren. Die Verarbeitungsergebnisse einzelner Textdaten konstituieren das Verarbeitungsergebnis eines Gesamttextes. Beispielsweise kann ein mögliches Verarbeitungsergebnis eines Gesamttextes wie folgt beschrieben werden: ausschließlich oberflächlich verarbeitet und teilweise vergessen. Das konträre Verarbeitungsergebnis würden ausschließlich tief verarbeitete und nicht vergessene Textdaten bilden.

Merkmale eines intakten Modells, das im Rahmen einer tiefen Lehrtextverarbeitung konstruiert wird

Das Ergebnis einer ausschließlich tiefen Textverarbeitung ist ein zum Text passendes (Haupt-)Modell mit eventuell vorhandenen Nebenmodellen. Der ‚innere Aufbau' eines zum Text passenden intakten (Haupt-)Modells soll im Folgenden genauer betrachtet werden. Die dazu angestellten Überlegungen führen über die Theorieskizze von Schnotz, der sich recht vage mit Merkmalen eines im Zuge einer Lehrtextverarbeitung konstruierten Modells beschäftigt, hinaus.

In Kapitel 3.1 wurde gesagt, dass ein Modell, das im Rahmen einer Informationsverarbeitung konstruiert wird, ein strukturiertes Gebilde aus aktivierten und (teilweise) belegten über- und untergeordneten Leerstellen mit jeweiligen konstanten Inhalten ist. Ein (konkretes) Modell lässt sich also dadurch charakterisieren, dass man die Inhalte, die bestimmte aktivierte Leerstellen belegen, sowie die Struktur der jeweils aktivierten Leerstellen beschreibt. Nun wird ein konkretes intaktes bzw. sinnstiftendes Modell, das im Zuge einer Lehrtextverarbeitung konstruierbar ist, beschrieben, um Spezifika eines solchen Modells zu erarbeiten. Den Ausgangspunkt bildet folgender Lehrtext.[74]

[74] Der Text wurde von der Autorin aus einem Kindersachbuch entnommen und für die Zwecke dieser Arbeit leicht gekürzt; vgl. Harris und Dennis 2008, S. 41.

(1) Vor etwa 500 000 Jahren lebte der sogenannte Heidelbergmensch in Europa. (2) Er sammelte Nüsse und Früchte, war aber auch ein sehr geschickter Jäger. (3) Die Heidelbergmenschen jagten in Gruppen. (4) Mit ihren einfachen Waffen und ihrer Intelligenz waren sie den Tieren überlegen. (5) Zum Zerteilen ihrer Beute benutzten sie Steinwerkzeuge. (6) Sie konnten sich wahrscheinlich unterhalten, wenn auch nicht so wie der moderne Mensch von heute. (7) 1907 fand man einen Unterkiefer dieser Menschenart bei Heidelberg. (8) Daher erhielt der neue Menschentyp seinen Namen „Heidelbergmensch“.

Die Struktur und Inhalte eines möglichen zum Text passenden sinnstiftenden Modells sind in der Abbildung 2 verkürzt veranschaulicht. Um Missverständnisse zu vermeiden, soll betont werden, dass die aktivierten Leerstellen einem Leser zumeist nicht bewusst sind. Insbesondere werden keine Bezeichnungen der Leerstellen aktiviert, ein Leser braucht sie nicht einmal zu kennen, was bei den Adressaten eines Kinderbuchs durchaus möglich ist.

HEIDELBERGMENSCH
- [1] UMSTÄNDE DER EXISTENZ
  - [1.1] ZEITPUNKT ‚vor etwa 500 000 Jahren‘
  - [1.2] ORT ‚Europa‘
- [2] NAHRUNG
  - [2.1] PFLANZLICHE NAHRUNG
    - [2.1.1.] ART DER NAHRUNG ‚Nüsse und Früchte‘
    - [2.1.2] ART DER BESORGUNG ‚sammeln‘
  - [2.2] TIERISCHE NAHRUNG
    - [2.2.1.] BESORGUNG
      - [2.2.1.1] ART ‚jagen‘
      - [2.2.1.2] VORGEHENSWEISE ‚in Gruppen und mit einfachen Waffen‘
      - [2.2.1.3] ERFOLGSCHANCEN
        - [2.2.1.2.1] HÖHE DER ERFOLGSCHANCEN ‚hoch‘
        - [2.2.1.2.2] GRÜNDE FÜR DIE ERFOLGSCHANCEN ‚Intelligenz und Waffenbesitz‘
    - [2.2.2] ZERTEILEN DER TIERE ‚mit Hilfe der Steinwerkzeuge‘
- [3] SPRACHE ‚war vorhanden‘
- [4] GRUND FÜR DIE BEZEICHNUNG ‚gefunden bei Heidelberg‘

Abbildung 2: Struktur und Inhalte eines zum Lehrtext ‚Heidelbergmensch‘ passenden Modells

Das Modell hat zum Gegenstand den HEIDELBERGMENSCHEN und besteht aus vier Submodellen erster Ordnung: UMSTÄNDE DER EXISTENZ, NAHRUNG, SPRACHE und GRUND FÜR DIE BEZEICHNUNG. Die Struktur der ersten beiden Submodelle ist in der Abbildung bis zu den Grundeinheiten der Modelle dargestellt, wogegen die Struktur der letzten Submodelle aus Übersichtlichkeitsgründen in der Darstellung vernachlässigt wurde. Das erste Submodell UMSTÄNDE DER EXISTENZ [1] besteht aus zwei belegten Leestellen: ZEITPUNKT [1.1] und ORT [1.2], deren konkrete Belegung in Anführungszeichen angegeben ist. Das zweite Submodell NAHRUNG [2] ist relativ reichhaltig; es besteht aus zwei Subsubmodellen

PFLANZLICHE [2.1] und TIERISCHE NAHRUNG [2.2], die wiederum zerlegt sind. Das PFLANZLICHE-NAHRUNG-Modell besteht aus ART DER NAHRUNG [2.1.1] sowie der ART DER BESORGUNG [2.1.2], das TIERISCHE-NAHRUNG-Modell [2.2] aus BESORGUNG (DER NAHRUNG) [2.2.1] und ZERTEILEN DER TIERE [2.2.2]. Es fällt auf, dass die Darstellung eines Modells, das die Grundeinheiten beinhaltet, schnell recht komplex werden kann.

Das beschriebene Modell weist folgende Eigenschaften auf:

- Es gibt einen (!) übergreifenden Gegenstand (Heidelbergmensch), der aufgrund der dazugehörigen Leerstellen alle Werte bündelt und organisiert.[75]
- Alle aktivierten Leerstellen bilden einen sinnvollen Aspekt des übergeordneten Gegenstandes. Da ein HEIDELBERGMENSCH als ein spezifischer VORFAHRE DER MENSCHEN aufgefasst werden kann, erscheinen die Fragen nach den Umständen seiner Existenz, der Nahrung, der Kommunikation und nach den Gründen für die auffallende Bezeichnung als zentrale und sinnvolle Fragen an den Gegenstand. Des Weiteren bildet jede untergeordnete Leerstelle einen sinnvollen Aspekt ihrer übergeordneten Leerstelle, wie beispielsweise das Zerlegen von Tieren einen sinnvollen Aspekt der tierischen Nahrung darstellt.
- Jede Leerstelle des vorliegenden Modells ist mit zu ihr passenden konkreten konstanten Werten, die in diesem Fall alle textbasiert sind, belegt. Die kognitiven Inhalte übergeordneter Modelle können als Zusammenfassungen der Inhalte untergeordneter Modelle aufgefasst werden. So kann der Inhalt des NAHRUNG-Modells in etwa wie folgt beschrieben werden: Die Heidelbergmenschen sammelten Nüsse und Früchte und jagten Tiere. Auch die in der Darstellung angegebenen Inhalte des SPRACHE- und des GRUND-FÜR-DIE-BEZEICHNUNG-Modells stellen größtmögliche Zusammenfassungen kognitiver Inhalte der jeweiligen nicht näher erläuterten Submodelle dar. Gleichzeitig können diese Zusammenfassungen als „Kern des Textinhalts“ bzw. als „größtmögliche Kurzfassung“ (Brinker et al. 2014, S. 52–53) der Textdaten bzw. Teiltexte betrachtet werden, anhand derer die textbasierten Werte der (Sub-)Modelle konstruiert wurden. In unserem Fall stellen die angegebenen Inhalte des NAHRUNG-Modells eine größtmögliche Kurzfassung der Sätze 2 bis 5 dar.[76]

[75] An dieser Stelle wird die Parallele zum textlinguistischen Thema-Begriff sichtbar. Das ‚Textthema‘ wird dabei als „zentrales Referenzobjekt bzw. fokussierter Gegenstand“ bestimmt; vgl. Adamzik 2004, S. 120. Dieser Gegenstand zeichnet sich dadurch aus, dass sich alle Teiltexte auf ihn beziehen und jeweils einzelne Aspekte dieses Gegenstandes behandeln (vgl. Schröder 2003, S. 79–82). ‚Heidelbergmensch‘ ist solch ein Gegenstand und damit Textthema; die Gegenstände der (Teil-)Modelle entsprechen den Teilthemen. Es hat sich als schwierig erwiesen, den ‚fokussierten Gegenstand‘ im Rahmen sprachwissenschaftlicher Theorien zu fundieren, weil dieser ‚Gegenstand‘ im Text nicht einmal explizit genannt werden muss. Es ist stets der Leser, der „seinen“ übergreifenden Gegenstand anhand der einzelnen Textteile und seines Weltwissens konstruiert. Zu kritischer Diskussion der Konzeptualisierung des Textthemas als fokussierter Gegenstand vgl. Lötscher 1987, S. 17–25.

[76] ‚Thema‘ als ‚Kerninformation‘ bzw. als ‚größtmögliche Kurzfassung‘ ist ebenfalls eine verbreitete Konzeptualisierung des Themenbegriffs im Rahmen der Textlinguistik. Da ‚Kurzfassung‘ eher ein psychologisches als ein sprachliches Phänomen ist, ist auch diese Themenbestimmung aus sprachwissenschaftlicher Sicht unzufriedenstellend (vgl. dazu Lötscher 1987, S. 35–46). Insgesamt erscheint das Textthema als ein Phänomen, das einen Text im Verständnis des Lesers ‚zusammenhält‘, größtenteils eine

- Alle sprachlichen Einheiten des Gesamttextes sind im beschriebenen Modell als textbasierte Werte integriert. Es existieren keine Teiltexte, die aus dem Modell ‚herausfallen' würden.
- Das Modell wurde als eine Sequenz aktivierter Leerstellen dargestellt, obwohl man wohl davon ausgehen muss, dass das ‚reale' mentale Modell nicht sequenziell ist. Die Darstellung des beschriebenen Modells zeichnet sich aber dadurch aus, dass die zu einer übergeordneten Leerstelle gehörigen Leerstellen/(Sub-)Modelle unmittelbar nacheinander folgen und dass die Reihenfolge der textbasierten Werte dem Verlauf der entsprechenden Teiltexte entspricht.
- Das beschriebene Modell ist vollständig, d.h. es enthält keine offenen Leerstellen. Allerdings ist es durchaus möglich, dass im Leser Fragen bezüglich der im Text beschriebenen Sache entstehen. Schematheoretisch gesprochen: Es werden Leerstellen aktiviert, die weder mit Textdaten noch mit vorhandenen Wissensbeständen des Lesers belegbar sind. So kann beispielsweise die Kleidung-der-Heidelbergermenschen-Leerstelle offen bleiben; ein solches Modell wäre dann unvollständig.

Die beschriebenen Merkmale scheinen bezüglich eines sinnstiftenden Modells, das anhand eines Lehrtextes konstruierbar ist, zentral zu sein. Nun kann präzisiert werden, welche Merkmale ein Modell aufweisen muss, das mit dem Erleben von Sinn eines Gesamtlehrtextes einhergeht. Ein Modell wird als intakt bzw. sinnstiftend bezeichnet, wenn es die folgenden Merkmale aufweist:

- *Eine intakte Struktur der Leerstellen*
  Eine intakte Struktur liegt nur dann vor, wenn alle aktivierten Leerstellen sich auf einen (!) Gegenstand beziehen und wenn alle aktivierten untergeordneten Leerstellen stets einen sinnvollen Aspekt ihrer übergeordneten Leerstelle bilden. Des Weiteren beinhaltet ein sinnstiftendes Modell alle zentralen Leerstellen in Bezug auf den Gegenstand, also verfestigte Leerstellen.
- *Intakte Belegung der Leerstellen*
  Die Werte bzw. Inhalte der Leerstellen passen zu den Leerstellen, d.h. sie stellen Konkretisierungen der Leerstelle dar. Falls die Struktur intakt belegter Leerstellen ebenfalls intakt ist, können die Inhalte übergeordneter Leerstellen als sinnvolle Zusammenfassungen der untergeordneten Leerstellen sowie der jeweiligen Textabschnitte aufgefasst werden.
- *Integration aller Textdaten*
  Alle (!) Textdaten tauchen im konstruierten Modell entweder unmittelbar als textbasierte Werte oder mittelbar als Leerstellen des Modells auf. Falls nicht integrierbare Textdaten vorhanden sein sollten, werden sie vom Leser entweder im Rahmen

psychologische Größe zu sein; deswegen überrascht es nicht, dass die Textlinguistik erhebliche Schwierigkeiten mit diesem Begriff hat (vgl. Adamzik 2004, S. 118–120).

eines Nebenmodells oder – was eher der Fall sein dürfte, da Nebenmodelle als sinnbeeinträchtigend erlebt werden – oberflächlich verarbeitet.

- *Keine ‚zentralen' offenen Leerstellen*
  Inwiefern offene Leerstellen im Allgemeinen zur Beeinträchtigung des Sinnerlebens des Gesamttextes führen, kann pauschal nicht beantwortet werden. Jedoch kann angenommen werden, dass die Nichtbelegung zentraler Leerstellen das Sinnerleben beeinträchtigt. Wenn beispielsweise im vorliegenden Lehrtext auf die Umstände der Existenz der Heidelbergmenschen nicht eingegangen worden wäre, dann dürfte dies zur Beeinträchtigung des Sinnerlebens des vorliegenden Lehrtextes bei vielen Lesern führen.
- *Eine intakte sequenzielle Darstellung*
  Die Struktur eines sinnstiftenden Modells, das im Zuge einer Lehrtextverarbeitung konstruiert wurde, lässt sich sequenziell darstellen – und zwar derart, dass die zu einer übergeordneten Leerstelle gehörigen Leerstellen niederer Ordnung aufeinander folgen und dass die Sequenz belegter Leerstellen dem Verlauf der entsprechenden Textdaten entspricht.

Kognitive Verarbeitung multimodaler Texte

Bislang wurden ausschließlich natursprachliche Texte betrachtet; viele schriftliche (sogar die meisten) Lehrtexte – und insbesondere auch mathematische Schulbuchlehrtexte – bestehen jedoch nicht nur aus natursprachlichen Zeichen, sondern aus einer Vielzahl unterschiedlicher Zeichen, die nicht zum verbalen Zeichensystem gehören, wie etwa Bilder und formal-mathematische Zeichen (Terme). Sowohl die Linguistik als auch die Kognitionspsychologie haben sich lange Zeit primär auf natursprachliche Texte konzentriert und die ‚multimodalen Texte' aus ihren Betrachungen ausgeschlossen.[77] Mittlerweile wird allerdings aufgrund der vermehrt multimodalen Kommunikationspraxis sowohl in der Linguistik als auch in der kognitionspsychologisch orientierten Textforschung vermehrt von einem weiten Textbegriff, der alle kommunikativen Zeichentypen zulässt, ausgegangen.[78]

In dieser Untersuchung wird ohne weitere Problematisierung davon ausgegangen, dass die Textverarbeitung multimodaler Lehrtexte – also Sprache-Bild-Formel-Lehrtexte – sich im Wesentlichen nicht von der Verarbeitung natursprachlicher Texte unterscheidet. Ausgehend von der kontextunabhängigen konventionellen ‚Bedeutung' einzelner Bilder oder Formeln, also der ‚Bilder/Formeln an sich'[79] wird der ‚(semantische) Sinn' des jeweiligen Bildes oder

[77] Zu den Gründen für das ‚Nichtbeachten' nicht verbaler Zeichensysteme in der Linguistik vgl. Schmitz 1997, S. 1.
[78] In der Kognitionspsychologie vgl. Schnotz und Dutke 2004, Sachs-Hombach 2004, Steiner 1996; in der Linguistik vgl. beispielsweise Sandig 2006; Schröder 1993; Hausendorf und Kesselheim 2008.
[79] Wie im Einzelnen die sprachliche ‚Bedeutung' nichtnatursprachlicher Textdaten theoretisch zu konzipieren ist, worin dabei die Unterschiede zum Verbalen bestehen, wie die dazugehörigen Wissensbestände (multimodales Zeichenwissen im engen Sinn in Analogie zum Sprachwissen im engen Sinn) zu modellieren sind, stellt sehr komplexe Problemlagen dar. Insbesondere ist die theoretische Konzeption der konventionellen Bedeutungen mathematischer Bilder und Formeln höchst komplex und mit mathematikphilosophischen Fragen verbunden, denen sich in erster Linie die Semiotik widmet. Exemplarisch sei auf zwei Sammelbände (Hoffmann

der jeweiligen Formel im Gesamttext konstruiert, indem sie als Werte aktivierter Leerstellen interpretiert werden.[80] Die Modalität der entsprechenden Inhalte des Modells dürfte tendenziell dem Zeichensystem der Textdaten entsprechen, kann aber von diesem abweichen, d.h. ein Leser kann beispielsweise ein Bild in Gedanken in ein ‚inneres Sprechen', also in eine symbolische Repräsentation übersetzen.

Des Weiteren wird davon ausgegangen, dass nichtnatursprachliche (Teil-)Texte genauso wie die verbalen unter bestimmten Bedingungen oberflächlich verarbeitet und mental repräsentiert werden können. Dabei werden sie nicht als Werte aktivierter Schemata interpretiert, sondern sie bleiben von den letzteren und vom Kontext losgelöst und sind damit als ‚Bild/Formel-an-sich' mental repräsentiert (vgl. Kintsch 1996). In der oberflächlichen Repräsentation nichtnatursprachlicher Textdaten dürfte sich entsprechend der propositionalen Repräsentation der verbalen Textdaten ihre ‚sprachliche Bedeutung' manifestieren, wobei die Zeichencodes der oberflächlichen Repräsentation der Modalität der externen Repräsentation entsprechen dürften. Während bei natursprachlichen Textdaten propositionale Repräsentation angenommen wird, dürfte bei Bildern eine analoge Repräsentation vorliegen (vgl. Schnotz und Dutke 2004). Die Bedingungen, unter denen nicht-natursprachliche (Teil-)Texte eher oberflächlich verarbeitet werden, sind die gleichen wie bei natursprachlichen Textdaten: Verfolgung eines Behaltensziels sowie erschwerte Bildung eines Modells.

Ein Zeichencode blieb bislang unerwähnt, nämlich die typographischen Zeichen, die von der psychologischen Textverstehensforschung fast vollständig ignoriert werden. In textlinguistischen Betrachtungen werden sie dagegen mittlerweile als ein nicht zu vernachlässigendes Kommunikationsmittel erkannt und dementsprechend verstärkt systematisch betrachtet.[81] Typographie wird von Linguisten vermehrt als ein „sekundäres Zeichensystem aufgefasst […], das über Form und [kommunikative E.K.] Bedeutung verfügt" (Stöckl 2004b, S. 15).[82] Sie umfasst sowohl das Design der Schriftzeichen (Mikrotypologie) als auch „die gesamte graphisch-räumliche Konzeption" (Stöckl 2004b, S. 12) eines Textformulars (Makrotypologie).[83] Zur Makrotypologie zählen u.a. folgende Elemente: Absätze, typo-

---

2003, Kadunz 2010, c 2010) und das Themenheft zur Semiotik in der Mathematikdidaktik im Journal für Didaktik der Mathematik ({JMD, 2006, Bd. 27, Heft 3/4}) verwiesen. Zu ‚Bedeutung' (nichtmathematischer) Bilder vgl. Muckenhaupt 1986, S. 200, zur Grammatik ‚formal-mathematischer' Ausdrücke und Teiltexte vgl. O'Halloran 2005, S. 94–128 und Maier und Schweiger 1999, S. 28–35; zur Bildgrammatik vgl. Stöckl 2011, S. 48–55, zur Grammatik mathematischer Bilder vgl. O'Halloran 2005, S. 129–157.

[80] Diese These wird aus textlinguistischer Sicht bezüglich (nicht mathematischer) Bilder bestätigt, indem unterschieden wird zwischen dem, „was das Bild zeigt" (Muckenhaupt 1986, S. 200), und dem, „was [der] A[utor] mit einem Bild zeigt" (ebd.), wobei Letzteres vom Verständnis des Gesamttextes abhängt; vgl. Stöckl 2011, S. 55, Stöckl 2004a, S. 97ff. Es ist anzunehmen, dass insbesondere Bilder neben dem erwähnten unmittelbaren auch einen mittelbaren Beitrag zur Modellkonstruktion leisten können.

[81] Zu dieser Entwicklung siehe Spitzmüller 2012, S. 209–212.

[82] Vgl. auch Wehde 2000, S. 64.

[83] Neben dieser verbreiteten Zweiteilung der typographischen Gestaltungsebenen (vgl. Sandig 2006, S. 450ff.; Spitzmüller 2012, S. 214) schlägt Stöckl eine Dreiteilung in Mikro-, Meso- und Makrotypographie vor: „Der Mikrobereich bestünde dann in Schriftdesign und –auswahl, der Mesobereich im Gebrauchen der Schriftzeichen (d.h. Justieren von Zeichenabstand, Wortabstand, Zeilenabstand etc.), und schließlich der

graphische Hervorhebungen – in Schulbuchtexten insbesondere Kästen – sowie die Anordnung und Platzierung der Teiltexte auf einer Seite (vgl. Stöckl 2004b, S. 22). Die Annahme, dass die Leser nicht „durch [das Gewand eines Textes] auf den ‚nackten' Inhalt sehen, [sondern dass die] Textgestalt Einfluss auf die Art und Weise, wie wir Texte lesen" (Spitzmüller 2012, S. 208) hat, wird mittlerweile vermehrt geäußert.[84] Dabei wird die „Visualisierung der Textstruktur" (Spitzmüller 2012, S. 223) als eine der zentralen Funktionen der typographischen Gestaltung betrachtet.[85] Bucher formuliert diesen Sachverhalt wie folgt:

„Auch das Design wird in multimodalen Angeboten als Form des kommunikativen Handelns aufgefasst und in den interaktiven Prozess des Verstehens einbezogen. Es *zeigt an,* wie wichtig ein Beitrag ist, welche Beiträge zusammengehören und welche nicht." (Bucher 2011, S. 151)

Wenn diese Annahmen auf den bereits erarbeiteten theoretischen Rahmen dieser Untersuchung übertragen werden, ergibt sich daraus, dass die typographischen Zeichen ebenfalls zu den Textdaten gehören. Allerdings leisten sie aufgrund der fehlenden konventionellen semantischen Bedeutung keinen unmittelbaren Beitrag zu den Inhalten eines (Haupt-)Modells, sondern sie liefern dem Rezipienten – ähnlich wie meta-kommunikative natursprachliche Äußerungen – Hinweise bezüglich der Struktur dieses Modells. Insofern kann die typographische Gestaltung eines Lehrtextes die Modellbildung erleichtern oder erschweren. Erschwerend wirkt sie, wenn die typographischen Hinweise nicht im Einklang mit der Struktur des anhand der primären Zeichen konstruierten (Haupt-)Modells stehen. In diesem Fall muss der Rezipient mental die typographische Gestaltung ändern bzw. ignorieren, was das Gefühl, ‚den Text richtig verstanden zu haben' beeinträchtigen dürfte.

Textmerkmale, die eine Modellbildung im Zuge einer Lehrtextverarbeitung erschweren

Es wurde erwähnt, dass eine erschwerte Modellbildung, die mit (zunächst) fehlendem (semantischen) Sinn vorliegender Textdaten einhergeht, eine oberflächliche Verarbeitung der vorliegenden Textdaten begünstigt. Dies hat wiederum Folgen in Bezug auf das Lernen. Im Folgenden werden wesentliche Textmerkmale, die eine Modellbildung erschweren können, zusammengetragen.

Falls ein Lehrtext Teiltexte enthält, die weder während noch am Ende des Verarbeitungsprozess in das konstruierte (Haupt-)Modell mittelbar oder unmittelbar integrierbar sind, werden sie vom Leser nicht als sinnhaft erlebt. In diesem Fall „eröffnet der Text [aus der Sicht des Lesers E.K.] eine Nebenspur, einen Holzweg" (Nussbaumer 1991, S. 227). Des Weiteren ist eine Modellbildung des Gesamttextes erschwert, wenn ein Textschritt fehlt bzw. übersprungen wird, den der Rezipient braucht (vgl. ebd.). Der Leser ist in diesem Fall dazu gezwungen, vieles und gegebenenfalls Kompliziertes dazu zu denken. Falls ein Lehrtext

---

Makrobereich im Anordnen von Schriftblöcken zu Textkörpern und deren Kombination mit graphischen und bildlichen Elementen auf einer materialen Oberfläche"; (Stöckl 2004b, S. 12).

[84] Vgl. beispielsweise Spitzmüller 2012, S. 223–234, Hagemann 2007, sowie Antos 2001.

[85] Vgl. beispielweise auch Antos 2001, S. 60. Zu weiteren Funktionen bzw. ‚Wirkungsebenen' der typographischen Gestaltung siehe Dürscheid 2012, S. 221–223.

umfangreiche und/oder komplizierte notwendige Inferenzen erfordert, wird eine tiefe Textverarbeitung erschwert. Ein Text kann auch insofern ‚zu wenig sagen', als er offene Fragen aufwirft, aber keine Möglichkeit ihrer Beantwortung enthält. So werden zwar Leerstellen aktiviert, diese können jedoch weder anhand der Textdaten noch anhand des Vorwissens des Lesers belegt werden. Falls die offenen Leerstellen zentral sind, ist das Erleben von Sinn eines Lehrtextes beeinträchtigt, so dass der Leser an seinem Textverständnis zweifeln dürfte. Des Weiteren spielt in diesem Zusammenhang der Verlauf, also die Sequenzialität eines Textes, eine Rolle. Wenn der Leser das Gefühl hat, dass die Abfolge der Textschritte nicht ‚logisch' ist, ist eine Modellbildung erschwert (vgl. ebd.). Eine Modellbildung ist leichter, wenn der Textverlauf der Struktur des konstruierten (Haupt-)Modells folgt bzw. entspricht. Bei einer nicht passenden Reihenfolge der Teiltexte, falls also die Reihenfolge der Teiltexte der Struktur des (Haupt-)Modells widerspricht, muss der Leser zur Herstellung oder Wahrung des Hauptmodells gedanklich die Reihenfolge von Textabschnitten ändern, was ein Mehr an mentaler Arbeit erfordert (vgl. Schnotz 1994, S. 190–198). Schließlich kann, wie bereits erwähnt, die Nichtpassung der typographischen Gestaltung zur Struktur des (Haupt-)Modells eine Modellbildung erschweren.

Nach diesen Erläuterungen zum Prozess und Ergebnis einer Lehrtextverarbeitung soll nun der Blick auf den Prozess des Lernens gelenkt werden.

3.2.3. Kognitive Lehrtextverarbeitung als Lernen

Bislang wurde die Textverarbeitung ‚an sich' und nicht unter einer Lernperspektive betrachtet; nun soll die Veränderung des Wissens – also das kognitive Lernen – im Zuge einer (Lehr-)Textverarbeitung theoretisch und unter Rückgriff auf die bisherigen Ausführungen diskutiert werden. Zunächst wird betrachtet, zu welchen (Vor-)Wissensveränderungen unterschiedliche Verarbeitungsarten einzelner Textdaten führen.

Sinnvolles versus mechanisches Lernen aus Lehrtexten

Lernen aus schematheoretischer Sicht wurde als Veränderung deklarativer Schemata bestimmt. Tief verarbeitete und nicht vergessene Textdaten führen stets zu einer Modifizierung deklarativer Schemata, d.h. bei einer tiefen Lehr(-teil-)textverarbeitung wird in jedem Fall gelernt. Nun wurde gezeigt, dass Textdaten auch oberflächlich verarbeitet werden können, d.h. sie werden nicht als Werte aktivierter Leerstellen eines Schemas mental repräsentiert, sondern lediglich als vom Kontext losgelöste sprachliche Bedeutungen. Da dabei keine Modellbildung stattfindet, werden die inhaltsspezifischen Schemata nicht modifiziert und bleiben bezüglich ihrer Struktur und Inhalte unverändert. Aus schematheoretischer Sicht wird bei einer oberflächlichen (Teil-)Textverarbeitung, auch wenn die Textdaten eingeprägt werden, nicht gelernt. Auf der anderen Seite besteht ein Unterschied zwischen vergessenen und eingeprägten Textdaten. Im ersten Fall bleibt das, was im ‚Kopf' des Lerners vor dem Leseprozess vorhanden war, auch danach genauso unverändert bestehen. Im zweiten Fall sind nach dem Verarbeitungsprozess neue Gedächtnisinhalte vorhanden, und zwar in Form eingeprägter Sätze, Bilder oder Formeln. Aus dieser

Perspektive bietet es sich an, auch das Einprägen oberflächlich verarbeiteter Textdaten als Lernen – im Gegensatz zum Nicht-Lernen im Falle vergessener Textdaten – zu bezeichnen. Eingeprägte sprachliche Einheiten stellen demnach eine ganz eigene Form des Wissens dar. Sie sind keine im Rahmen unterschiedlicher Schemata organisierten kognitiven Inhalte, sondern starre sprachliche Einheiten, die von dem eigentlichen Wissen, also den Schemata des Lerners, losgelöst sind. Dieses spezifische Wissen soll in Anlehnung an Ausubel als mechanisches Wissen bezeichnet werden. Entsprechend wird eine oberflächliche und einprägende (Teil-)Textverarbeitung als mechanisches Lernen bezeichnet. Als Gegenbegriff dazu wird sinnvolles Lernen benutzt.[86]

Präzisierung zentraler Begriffe

Auf der Grundlage des entwickelten theoretischen Rahmens können nunmehr die für diese Untersuchung zentralen Begriffe präzisiert werden. Lernen aus Lehr(-teil-)texten bezeichnet den Prozess der mit einer Lehr(-teil-)textverarbeitung einhergehenden (Vor-)Wissenserweiterung und -veränderung, die sowohl eine Veränderung inhaltsspezifischer Schemata als auch das Einprägen oberflächlich verarbeiteter Textdaten umfasst. Das mechanische bzw. sinnvolle Lernen aus Lehr(-teil-)texten bezeichnet den Prozess einer oberflächlichen bzw. tiefen (Teil-)Textverarbeitung. Das Ergebnis des Lernens aus Lehrtexten wird als Lernergebnis bezeichnet, es ist die Gesamtheit der im Zuge einer Lehrtextverarbeitung vollzogenen (Vor-)Wissensveränderungen. Einzelne aufgrund einer Teiltextverarbeitung vollzogene Veränderungen stellen Teillernergebnisse dar. Das mechanische (Teil-)Lernergebnis bezeichnet oberflächlich verarbeitete und eingeprägte sprachliche Einheiten. Das sinnvolle (Teil-)Lernergebnis umfasst die Veränderungen der Schemata bzw. ihrer Strukturkonstituenten, die im Rahmen einer tiefen Lehr(-teil-)textverabreitung vollzogen wurden. Dies sind zunächst Verfestigungen und Schwächungen aktivierter Schemata. Des Weiteren sind es Umstrukturierungen vorhandener Schemata bzw. ihrer Strukturkonstituenten, sowie Neuentstehungen einzelner Schemata bzw. Strukturkonstituenten (vgl. Kap. 3.1). Falls ein sinnvolles Lernergebnis vorliegt, falls also alle im Rahmen einer Lehrtextverarbeitung vollzogenen Veränderungen nicht mechanischer Natur sind, muss ein Lehrtext notwendigerweise ausschließlich tief verarbeitet worden sein.

Bezüglich jeder beliebigen Informationsverarbeitung wurde dargestellt, dass vollzogene Veränderungen des (Vor-)Wissens von den konstruierten Modellen determiniert werden (vgl. 3.1). Diese Annahme kann auf das Lernen aus Lehrtexten übertragen werden. Das bedeutet insbesondere, dass die vollzogenen Veränderungen in Form eines sinnvollen Lernergebnisses sichtbar werden, wenn man die Inhalte und die Struktur ursprünglicher Schemata mit den Inhalten und der Struktur des im Zuge einer ausschließlich tiefen Textverarbeitung

[86] Das mechanische Lernen zeichnet sich nach Ausubel dadurch aus, dass es ‚willkürlich und wortgetreu' auf das Gewusste bezogen wird und wortwörtlich gelernt wird (vgl. Ausubel et al. 1980, S. 182). Dagegen ist das ‚sinnvolle Lernen' gezielt auf „relevante etablierte Ideen in der kognitiven Struktur bezogen" (Ausubel et al. 1980, S. 180). Ausubel bezieht sich dabei auf das Lernen aus schriftlichen und mündlichen Texten, wie beispielsweise im Falle eines Lehrervortrags. Insofern kann man die Ausführungen von Ausubel als vereinfachte Variante der vorliegenden theoretischen Grundlegung beider Lernarten auffassen.

konstruierten (Haupt-)Modells vergleicht. Ein mögliches Lernergebnis, das im Zuge der Verarbeitung des erwähnten Lehrtextes ‚Heidelbergmensch' gebildet wird, hängt also vom konstruierten Modell und dem relevantem Vorwissen des Lernenden ab. Wenn man davon ausgeht, dass ein Leser vor dem Verarbeiten des Lehrtextes nichts über die Heidelbergmenschen wusste, aber über ein abstraktionshohes VORFAHRE-HEUTIGER-MENSCHEN-Schema verfügt und das im Kapitel 3.2.2 beschriebene Modell konstruiert, dann kann sein Lernergebnis wie folgt skizziert werden: Es entsteht ein neues HEIDELBERG-MENSCH-Schema, das bezüglich einer Abstraktionshierarchie im VORFAHRE-HEUTIGER-MENSCHEN-Schema eingebettet ist, wodurch das Letztere erweitert wird. Das neu entstandene Schema verfügt über vier Leerstellen mit konstanten Werten. Auf diese Art und Weise werden die vorhandenen Schemata NAHRUNG, JAGEN und SPRACHE erweitert, indem ihnen eine neue zusätzliche Verankerung im neu konstruierten Schema zukommt.

Zur Qualität des mechanischen Lernergebnisses

Aus didaktischer und pädagogisch-psychologischer Sicht ist in Bezug auf Lernen nicht nur entscheidend, ob gelernt wurde, ob also Veränderungen des (Vor-)Wissens vollzogen wurden, sondern auch, welche Qualität das Gelernte bzw. das Lernergebnis hat. Im nächsten Kapitel werden mögliche Qualitätskriterien des erworbenen (mathematischen) Wissens diskutiert. Da sich das mechanische Wissen bezüglich seiner Qualität von sinnvollem Wissen gravierend unterscheidet und dies ein Spezifikum des mechanischen Wissens darstellt, wird die Qualität eines mechanischen Lernergebnisses bereits an dieser Stelle angedeutet.

Das mechanische Lernergebnis ist im Vergleich zu einem sinnvollen Lernergebnis mangelhaft. Zunächst einmal ist eingeprägtes Wissen schwer im Gedächtnis zu behalten und damit zu einem späteren Zeitpunkt auch schwer reproduzierbar. Ausubel schreibt diesbezüglich:

> „Eine wichtige Folge der zusammenhanglosen und isolierten Einverleibung mechanisch gelernter Lernaufgaben in die kognitive Struktur ist es, daß hier – ganz anders beim sinnvollen Lernen – keine Verankerung in etablierte Ideensysteme erreicht wird. Weil das menschliche Gehirn für langfristige wörtliche Speicherung willkürlicher Verbindungen nicht effizient entworfen ist, ist die Zeit, in der mechanisch Gelerntes behalten wird, relativ kurz." (Ausubel et al. 1980, S. 182)

Des Weiteren kann das mechanische Wissen aufgrund der Nichtverankerung im kognitiven System kaum (weiter-)verwendet und damit auch nicht in neuartigen Anforderungssituationen angewendet werden. Beim mechanischen Lernen aus Lehrtexten ist der Lernende nicht in der Lage, verständnisorientierte Fragen zu beantworten oder den Text ‚sinngemäß' zusammenzufassen.[87] Er kann lediglich den Text bzw. einzelne Ausschnitte nahe am Original repetieren, also insbesondere sowohl die zentralen als auch die peripheren Informationen wiedergeben.

Wie bereits dargestellt wurde, tritt bei der Verarbeitung eines Lehrtextes nur dann das Erleben von Sinn bzw. die ‚Erfahrung vom Verstehen' des Gesamttextes ein, wenn die

[87] Vgl. Schnotz 1994, S. 215, Kintsch 1996, S. 506–507.

Textdaten im Rahmen aktivierter Schemata verarbeitet werden. Im Umkehrschluss bedeutet dies, dass in die Schemata nicht eingebettete mentale Einheiten diese Erfahrung nicht ermöglichen. Sie werden auf Seiten des Lerners als sinnlos empfunden, sie sind aus seiner Sicht tendenziell wie ein Fremdkörper in seinem ‚Kopf'.

Die Organisiertheit, Vernetzheit und Elaboriertheit des (Vor-)Wissens prägt die Lernprozesse und -ergebnisse in entscheidendem Maße. Wenn Schemata zahlreich miteinander verknüpft sind, kann die vorliegende Information weitreichend verarbeitet werden, indem zahlreiche Elaborationen und Inferenzen gezogen werden. Ein vernetztes und elaboriertes kognitives System optimiert damit das nachfolgende (sinnvolle) Lernen (vgl. (Ausubel et al. 1980, S. 202). Demgegenüber verändert sich beim mechanischen Lernen das kognitive System nicht. Das Lernen wird nicht optimiert, sondern vielleicht sogar erschwert, weil der Lernende die sogenannten Fremdkörper als ‚mentalen Ballast' trägt.

Des Weiteren widerspricht die Struktur des mechanischen Wissens der Struktur des fachlichen (mathematischen) Wissens, denn die einzelnen mechanischen Wissenseinheiten sind nur rudimentär (aufgrund des sprachlichen Wissens) und lokal miteinander verbunden.

Insgesamt wird das mechanische Wissen und damit ein mechanisches Lernergebnis vom Lernenden als fremd und nicht sinnhaft erlebt. Es ist schwer behaltbar und in neuartigen Anforderungssituationen nicht anwendbar. Es ist nicht in der Lage, nachfolgende Lernprozesse zu optimieren und widerspricht aufgrund der fehlenden Verknüpfung der einzelnen Wissenselemente dem fachlichen Wissen.

Die hier angestellten Überlegungen implizieren auch, dass nur sinnvolles Wissen und entsprechend sinnvolle Lernergebnisse als sinnhaft erlebt und angewendet werden können. Damit kann nur sinnvolles Wissen dem fachlichen Wissen entsprechen. Eine notwendige Voraussetzung, um solch ein qualitativ hochwertiges Wissen zu erwerben, ist eine tiefe Textverarbeitung.

Zusammenfassung des Lernens aus Lehrtexten aus schematheoretischer Sicht

Lernen aus Lehrtexten bezeichnet den Prozess der mit einer Lehrtextverarbeitung einhergehenden (Vor-)Wissenserweiterung und –veränderung. Es wurde zwischen einem mechanischen und einem sinnvollen Lernen aus Lehrtexten unterschieden. Beim sinnvollen Lernen werden aktivierte kognitive Schemata und ihre Strukturkonstituenten verändert; im Einzelnen verfestigt bzw. geschwächt, umstrukturiert und neu gebildet. Grundlage hierfür bilden die anhand der vorliegenden Textdaten und des aktivierten Vorwissens konstruierten Modelle, also mit konstanten Werten belegte aktivierte Schemata. Sinnvolles Lernen aus Lehrtexten zeichnet sich dadurch aus, dass der Lerner die einzelnen Textdaten tief verarbeitet. Dabei strebt der Lerner die Konstruktion eines sinnstiftenden Modells an, das insbesondere eine intakte Struktur aktivierter Leerstellen aufweist und alle Textdaten mittelbar oder unmittelbar integriert. Bei einer gelungenen Konstruktion eines solchen Modells erlebt der Lerner den Lehrtext als sinnvoll.

Das mechanische Lernen geht hingegen mit einer oberflächlichen Lehrtextverarbeitung einher, dabei werden lediglich die isolierten sprachlichen Bedeutungen der Sätze/Bilder/Formeln-an-sich eingeprägt und folglich keine deklarativen Schemata verändert. Das mechanische Wissen ist in qualitativer Hinsicht mangelhaft. Es gibt zwei zentrale Bedingungen für eine oberflächliche Lehr(-teil-)textverarbeitung: zum einen die Zielstellung des ‚bloßen' Behaltens und zum zweiten eine dem Lehrtext selbst innewohnende erschwerte Modellbildung bzw. beeinträchtigte Sinnhaftigkeit. Wenn sich ein Lernender von vornherein das Ziel setzt, einzelne Informationen möglichst wortgetreu zu behalten und nicht, das Dargebotene zu verstehen, dann verarbeitet er den Text tendenziell oberflächlich. Andererseits ‚wechselt' auch ein verstehen-wollender Leser, also einer, der ein sinnstiftendes Modell anstrebt, bei einer erschwerten Einsicht in den Text seine Strategie. Dies ist der Fall, wenn einzelne Textdaten in das konstruierte (Haupt-)Modell nicht integrierbar sind, wenn aktivierte (zentrale) Leerstellen offen bleiben, wenn für die Bildung eines intakten Modells umfangreiche und komplizierte Inferenzen notwendig sind und wenn die Reihenfolge sowie die typographische Gestaltung des Textes nicht zur Struktur des Modells passen.

Die psychologische Perspektive auf das Lernen zeichnet sich dadurch aus, dass sie verstärkt die Lernerperspektive hervorhebt. Das Anliegen dieser Untersuchung ist es jedoch, das Lehrpotential eines Lehrtextes, also das, was anhand eines Lehrtextes von adressierten Schülern lernbar ist, als eine intersubjektive Größe zu konzipieren und analytisch zugänglich zu machen. Damit gerät der Lehrtext selbst in den Mittelpunkt der Betrachtungen. Die dazu notwendige Perspektivenverschiebung vom mit dem Lehrtext arbeitenden Lerner hin zum Potential des Lehrtextes für den Lerner wird im folgenden Kapitel vollzogen.

4. Das Lehrpotential eines Schulbuchlehrtextes

Die entwickelte schematheoretische Sicht auf das Lernen aus Lehrtexten erlaubt nunmehr eine theoretische Konzeption der zentralen Größe dieser Untersuchung ‚Lehrpotential eines (Mathematik-)Schulbuchlehrtextes‘. In diesem Kapitel werden theoretische und methodologische Aspekte des Lehrpotentials eines beliebigen Schulbuchlehrtextes skizziert; dazu wird im ersten Unterkapitel (Kap. 4.1) eine Theorieskizze entworfen, während im zweiten Unterkapitel (Kap. 4.2) zentrale methodologische Aspekte einer Lehrpotentialanalyse thematisiert werden. Mit der in diesem Kapitel eingenommenen weiten Perspektive auf beliebige Schulbuchlehrtexte wird eine im anschließenden fünften Kapitel durchzuführende Fokussierung auf Schulbuchlehrtexte im Fach Mathematik vorbereitet.

4.1. Theoretische Aspekte

Das ‚Lehrpotential eines Schulbuchlehrtextes‘ wurde in einer ersten Näherung als das von adressierten Schülern aus einem Lehrtext sinnvoll Lernbare bezeichnet. Um das ‚Lehrpotential eines Schulbuchlehrtextes’ nunmehr einem direkten analytischen Zugriff zugänglich zu machen, wird es als eine intersubjektive Größe konzipiert, die nicht mehr die Beziehung Lerner-Lehrtext in den Mittelpunkt stellt, sondern im Wortsinne das Potential des Lehrtextes selbst fokussiert. Dazu ist es zweckmäßig, eine theoretisch-analytische Hilfsgröße ‚Modellschüler‘ einzuführen, die es erlaubt, die Lerner-Faktoren im Sinne aller textexternen Faktoren, die das Lernen beeinflussen (vgl. Kap. 3.2.1), konstant zu halten.

Konzeption des ‚Modellschülers‘

Um das anhand eines Schulbuchlehrtextes Lernbare zu erfassen, müssen die lernrelevanten Merkmale des Modellschülers in einer lernoptimalen, aber nicht ‚unrealistischen‘ Ausprägung festgehalten werden. Das heißt, der Modellschüler wird als ein guter, lernwilliger und interessierter Schüler skizziert. Jedoch dürfen seine Lernvoraussetzungen nicht in erheblichem Maße die eines Durchschnittschülers der entsprechenden Jahrgangsstufe übersteigen, denn dann wären die modellierten textexternen Voraussetzungen nicht adäquat. Salopp gesagt ist unser Modellschüler ein guter Lerner, aber kein Genie. Der Modellschüler

- befindet sich in einer lernförderlichen Situation (keine Störungen von außen, kein Zeitdruck, keine einschränkende Aufgabenorientierung, wie etwa das Lösen einer konkreten (Mathematik-)Aufgabe),
- besitzt ein positiv ausgeprägtes motivationales und affektives Dispositionsgefüge, d.h. er ist dem Lernen und dem Fach gegenüber aufgeschlossen, er ist konzentriert, motiviert und interessiert, den Text zu lesen,
- besitzt kein ausgeprägtes Metawissen, wohl aber ein (unbewusstes) Zutrauen in seine Lernfähigkeiten,
- setzt sich als Ziel ‚den Text zu verstehen‘, d.h. er strebt das Gefühl des Verstanden-Habens bzw. das Erleben von Sinn des Gesamttextes an. Damit strebt er ein möglichst sinnhaftes Modell des im Text beschriebenen Gegenstandes an,

- liest nicht selektiv und verarbeitet den Lehrtext ausschließlich tief (Lesestrategie),
- hält (im Gegensatz zu einem ‚realen' Schüler) konsequent an seiner Strategie und Zielsetzung fest und ändert sie nicht im Laufe des Lesens,
- setzt keine weiterführenden Lernstrategien wie etwa schriftliche Zusammenfassungen ein.

Bezüglich des nichtfachlichen Vorwissens des Modellschülers wird allgemein festgelegt, dass sein Alltagswissen sowie das prozedurale Sprachwissen (im engen und weiten Sinne) – eine gewisse Intersubjektivität dieser Wissensbereiche vorausgesetzt – dem der meisten Schüler des deutschsprachigen Kulturkreises der jeweiligen Jahrgangsstufe entspricht.[88]

Das fachliche Vorwissen des Modellschülers ist im Rahmen der Konzeption des Lehrpotentials eines Schulbuchslehrtextes eine zentrale Größe, denn es prägt im entscheidenden Maße die im Zuge einer Lehrtextverarbeitung konstruierbaren (Haupt-)Modelle und die Lernergebnisse. Bezüglich fachlicher Inhalte muss bedacht werden, dass Schulbücher sich dadurch auszeichnen, dass der Jahresstoff systematisch aufgebaut ist (vgl. Kap. 2.1), der Lernstoff also „nach dem Stand wissenschaftlicher Erkenntnis über Entwicklungs- und Lernverläufe [auf einen generalisierten Schüler hin] thematisch strukturiert" (Höhne 2003, S. 164) ist. Da das fachliche Vorwissen ebenfalls lernoptimal konzipiert werden soll, wird recht allgemein festgelegt, dass der Modellschüler alle Inhalte der vorhergehenden Schulbuchlehrtexte kennt; sie sind also als kognitive Inhalte in seinem ‚Kopf' vorhanden und für künftige Lernprozesse verfügbar. Schließlich muss die Organisation der fachlichen kognitiven Inhalte, also die strukturierten Leerstellen inhaltsspezifischer Schemata, konzipiert werden. In Bezug auf schulmathematisches (Vor-)Wissen sind das diejenigen Schemata, die die im Mathematikunterricht erworbenen kognitiven Inhalte organisieren. Es wird davon ausgegangen, dass das individuelle fachliche deklarative Wissen der Schüler eine gewisse Intersubjektivität aufweist, d.h. dass insbesondere die abstraktionshohen Schemata bei vielen Schülern Gemeinsamkeiten aufweisen dürften. Die Konzeption solcher intersubjektiver schulmathematischer Schemata stellt eine Herausforderung dar, die hier zunächst nicht problematisiert und in Kapitel 5.1 erneut aufgegriffen wird. An dieser Stelle soll lediglich davon ausgegangen werden, dass eine Konzeptualisierung der fachlichen (abstraktionshohen) Schemata gelingt, also der Schemata des Modellschülers, bei denen angenommen werden kann, dass sie mit entsprechenden Schemata vieler realer Schüler korrespondieren.

‚Lehrpotential eines Schulbuchlehrtextes' als Lernergebnisse des Modellschülers

Entsprechend unserer Setzungen strebt der Modellschüler beim Verarbeiten eines Schulbuchlehrtextes ein möglichst sinnstiftendes Modell an. Sein Verarbeitungsergebnis des Gesamttextes kann je nach den Besonderheiten des vorliegenden Lehrtextes entweder ein

[88] Vgl. dazu Kap. 2.2, in dem die Annahme getroffen wurde, dass das individuelle Alltags- und Sprachwissen der Menschen eines Kulturkreises und einer Altersgruppe viele Gemeinsamkeiten aufweist und daher bis zu einem gewissen Grad intersubjektiv sein dürfte.

zusammenhängendes Modell oder mehrere unzusammenhängende Modelle sein. Beim Letzteren entsteht in der Regel ein Hauptmodell, das die meisten Textdaten als textbasierte Werte enthält. Da die textexternen Merkmale, insbesondere das fachliche Vorwissen im Sinne der fachlichen Schemata des Modellschülers, festgelegt sind, werden die möglichst sinnstiftenden (Haupt-)Modelle, die anhand eines Lehrtextes konstruierbar sind und die damit vollzogenen kognitiven Veränderungen des Modellschülers lediglich vom Lehrtext determiniert. Die (Haupt-)Modelle und die Lernergebnisse des Modellschülers können damit als intersubjektive Größen, die ausschließlich vom Lehrtext abhängen, betrachtet werden. Möglichst sinnhafte (Haupt-)Modelle, die anhand der Textdaten konstruierbar sind, werden im Folgenden als vom Lehrtext nahegelegt bezeichnet. Die entsprechenden Lernergebnisse werden ebenfalls als naheliegend bezeichnet.

Da ein vom Lehrtext nahegelegtes (Haupt-)Modell möglichst sinnstiftend ist, zeichnet es sich insbesondere durch folgende Merkmale aus:[89]

- Es weist eine intakte Struktur der Leerstellen auf.
- Es weist eine intakte Belegung der Leerstellen auf.
- Es umfasst möglichst viele Textdaten als textbasierte Werte.

Hierbei ist zu bedenken, dass sich bei weniger stringenten Lehrtexten unterschiedliche Schemata als passende Interpretationsvorlagen des Gesamttextes erweisen und folglich mehrere unterschiedliche möglichst sinnstiftende (Haupt-)Modelle von einem Lehrtext nahegelegt werden können. Ein solcher Lehrtext eröffnet gewissermaßen eine Bandbreite naheliegender (Haupt-)Modelle, während er andere gleichzeitig ausschließt.[90] Das heißt: Während ein realer Leser in der Regel tatsächlich anhand eines Textes nur ein (Haupt-)Modell konstruiert, ist dies bei unserem Modellschüler nicht der Fall. Jedes nahegelegte (Haupt-)Modell geht bei ihm mit bestimmten kognitiven Veränderungen, also Verfestigungen, Schwächungen und Umstrukturierungen ursprünglicher aktivierter Schemata, sowie dem Entstehen neuer Schemata einher. Ein vom Lehrtext nahegelegtes Lernergebnis wird dabei sichtbar, wenn man die Struktur und Inhalte eines nahegelegten (Haupt-)Modells mit Strukturen und Inhalten aktivierter Schemata vergleicht (vgl. Kap. 3.2.2). Das heißt ein Lehrtext eröffnet auch eine Bandbreite naheliegender Lernergebnisse. Das ‚Lehrpotential eines Schulbuchlehrtextes' umfasst also alle die Lernergebnisse, die mit nahelegten (Haupt-)Modellen einhergehen und als (Haupt-)Modelle des Modellschülers aufgefasst werden.

Schwierigkeitsgrad der Bildung eines nahegelegten (Haupt-)Modells

Wie bereits dargelegt wurde, kann ein Lehrtext aufgrund bestimmter Textmerkmale eine Modellbildung erschweren (vgl. Kap. 3.2.2); d.h. die von einem Schulbuchlehrtext nahe-

[89] Vgl. die Merkmale eines sinnstiftenden (Haupt-)Modells, das im Zuge einer Lehrtextverarbeitung konstruierbar ist, die im Kapitel 3.2.2. formuliert wurden.
[90] Nussbaumer formuliert einen ähnlichen Gedanken im Bezug auf beliebige Texte, indem er sagt; dass es „zu einem Text I lediglich eine schmale Bandbreite zulässiger Texte II gibt" (Nussbaumer 1991, S. 146).

gelegten (Haupt-)Modelle weisen einen bestimmten Schwierigkeitsgrad ihrer Bildung auf, der – wie sich später zeigen wird – eine zentrale Rolle bezüglich der Wahrscheinlichkeit eines nahegelegten (Haupt-)Modells und des entsprechenden Lernergebnisses spielt. In Kapitel 3.2.2 wurde gesagt, dass eine tiefe Textverarbeitung erschwert ist, wenn der Lehrtext

1. Textdaten beinhaltet, die nicht in ein Hauptmodell integrierbar sind,
2. offene ‚zentrale' Fragen aufwirft,
3. komplizierte Inferenzen erfordert,
4. bezüglich der Reihenfolge der Teiltexte und der typographischen Gestaltung nicht zu der Struktur des (Haupt-)Modells passt.

Demzufolge kann der Schwierigkeitsgrad der Bildung eines nahegelegten (Haupt-)Modells von der spezifischen Ausprägung folgender Merkmale des Lehrtextes bestimmt werden:

1. Integrierbarkeit aller Textdaten in das Hauptmodell,
2. Vorhandensein offener Fragen/Leerstellen,
3. Notwendigkeit komplexer Inferenzen,
4. Passung der Reihenfolge und der typographischen Gestaltung des Lehrtextes zur Struktur des (Haupt-)Modells.

Die oberen Textmerkmale werden im Folgenden als schwierigkeitsgradbestimmend bezeichnet. Anhand der Ausprägung schwierigkeitsgradbestimmender Merkmale eines Lehrtextes lässt sich der Schwierigkeitsgrad der Bildung jedes nahegelegten (Haupt-)Modells differenziert diskutieren. Ein (Haupt-)Modell ist insbesondere dann leicht zu bilden, wenn die fünf Merkmale in folgender Weise ausgeprägt sind: Alle Textdaten sind im Rahmen eines Modells interpretierbar, es bleiben keine (zentralen) Leerstellen offen, es sind keine komplexen Inferenzen notwendig und der Verlauf sowie die typographische Gestaltung des Lehrtextes passen zur Struktur des möglichen Modells. Demgegenüber ist ein naheliegendes (Haupt-)Modell umso schwieriger zu konstruieren, je mehr schwierigkeitsgradbestimmende Merkmale jeweils gegenteilig ausgeprägt sind. Die Bildung eines naheliegenden Hauptmodells ist umso schwerer, je mehr Merkmale gegenteilig ausgeprägt sind.

Eine Analyse der Ausprägung schwierigkeitsgradbestimmender Textmerkmale erlaubt eine differenzierte Beantwortung der Frage, welche Textdaten die Bildung eines möglichst sinnstiftenden (Haupt-)Modells und damit ein sinnvolles Lernergebnis auf welche Art erschweren.

Der Schwierigkeitsgrad jedes nahegelegten (Haupt-)Modells kann sowohl in absoluter als auch in relativer Hinsicht, also im direkten Vergleich unterschiedlicher naheliegender (Haupt-)Modelle, diskutiert werden. Das heißt, dass die naheliegenden (Haupt-)Modelle in der Regel bezüglich ihres Bildungsschwierigkeitgrades abstufbar sein dürften. An den jeweiligen Rändern der Bandbreite naheliegender (Haupt-)Modelle dürften Extrema bezüglich der Bildungsschwierigkeit, also die am schwierigsten bzw. am leichtesten zu konstruierenden naheliegenden (Haupt-)Modelle auftauchen.

Zur Sinnhaftigkeit nahegelegter (Haupt-)Modelle

Da eine erschwerte Modellbildung mit einem beeinträchtigtem Sinnerleben des Gesamt- oder Teiltextes korreliert, kann davon ausgegangen werden, dass schwer zu bildende (Haupt-)Modelle im Regelfall für den Modellschüler gewisse Sinnbeeinträchtigungen aufweisen. Falls einzelne Textdaten in das nahegelegte Hauptmodell nicht integrierbar sind, dann kann unser Modellschüler lediglich mehrere unzusammenhängende Modelle bilden, was bei ihm das Sinnerleben des Gesamttextes beeinträchtigt. Falls der Lehrtext Fragen aufwirft, die anhand der Textdaten und des Vorwissen des Modellschülers nicht beantwortet werden können, ist das konstruierte Hauptmodell unvollständig, d.h. es enthält offene Leerstellen. Je nachdem, wie wichtig die Leerstelle für das Textverständnis des Modellschülers ist, variiert die ‚Größe' und Dringlichkeit der offenen Frage an den Text und damit die Beeinträchtigung des Sinnerlebens. Die Notwendigkeit komplexer Inferenzen wirkt demgegenüber nicht direkt sinnbeeinträchtigend, da davon ausgegangen wird, dass der Modellschüler durch erhöhte kognitive Aktivitäten in der Lage ist, Inferenzen zu vollziehen. Immerhin kann sich der Modellschüler in diesem Fall fragen, warum der Autor des Textes diesen notwendigen Schritt überspringt und ihm überlässt. Wenn diese Frage von ihm nicht beantwortet werden kann, ist mit einer Beeinträchtigung des Sinnerlebens zu rechnen. Und schließlich kann davon ausgegangen werden, dass eine Nichtpassung der Reihenfolge der Teiltexte sowie eine Nichtpassung der typographischen Gestaltung zur Struktur des (Haupt-)Modells zumindest partiell sinnbeeinträchtigend wirken kann. Insgesamt kann festgehalten werden, dass die naheliegenden (Haupt-)Modelle mehr oder weniger sinnstiftend sein können. Insbesondere ist ein naheliegendes (Haupt-)Modell bezüglich der Sinnhaftigkeit dann beeinträchtigt, wenn es nicht alle Textdaten mittelbar oder unmittelbar beinhaltet und wenn zentrale Leerstellen offen bleiben.

Zur Qualität naheliegender Lernergebnisse

Aus pädagogisch-didaktischer Sicht ist nun nicht nur von Interesse, welche Lernergebnisse ein Schulbuchlehrtext nahelegt und wie schwer die entsprechenden Modelle zu bilden sind, sondern auch, welche Qualität diese Lernergebnisse aufweisen können.

Wenn man die Qualität vollzogener kognitiver Veränderungen beurteilen möchte, müssen die Beurteilungskriterien expliziert werden. Aus pädagogisch-psychologischer und allgemeindidaktischer Sicht scheinen die beiden folgenden Gütekriterien des deklarativen Schulwissens bezüglich der Qualitätsbestimmung zentral zu sein: ‚fachliche Passung' und ‚Anwendbarkeit' des Wissens.

‚Fachliche Passung'

Aus allgemeindidaktischer Sicht ist entscheidend, dass erworbenes Wissen ‚richtig' ist. So schreibt Steindorf:

„Die im Unterricht vermittelten Kenntnisse und Erkenntnisse dürfen sachlich *nicht falsch* und in ihrem objektiven Gehalt nicht entstellt oder verkürzt werden. Schulwissen darf wohl unvollständig sein; es muß aber mit den Aussagen der Einzelwissenschaften übereinstimmen.“ (Steindorf 1985, S. 98)

Die Forderung nach ‚Richtigkeit‘ wird in dieser Untersuchung im Vergleich zu Steindorf vorsichtiger formuliert. Das erworbene Wissen darf den Aussagen und der Struktur des normativen fachlichen Wissens nicht widersprechen. Unter normativem fachlichem Wissen wird dabei ein bestimmtes gesellschaftliches Wissen verstanden, das nicht deckungsgleich mit wissenschaftlichem Wissen ist. Wie das normative schulmathematische Wissen und entsprechend die ‚Richtigkeit‘ des im Mathematikunterricht erworbenen Wissens gedacht werden kann, wird im folgenden Kapitel näher erläutert. Zunächst wird auf einer allgemeinen Ebene festgehalten, dass die ‚Widerspruchsfreiheit‘ des erworbenen Wissens (kognitiver Inhalte und ihrer Struktur) im Verhältnis zum normativen fachlichen Wissen (einzelne Aussagen und ihre Ordnung) im Rahmen der allgemeinbildenden Ziele der Schule einen zentralen Qualitätsmaßstab darstellt. Neben dieser fachlichen ‚Passung‘ spielt die Anwendbarkeit des Wissens aus psychologischer und didaktischer Sicht eine wesentliche Rolle.

‚Anwendbarkeit‘

Wissen ist wertvoll, wenn es der Lernende anwenden kann. Um dies zu leisten, muss das Wissen im Gedächtnis *behalten* und in entsprechenden Situationen *aktiviert* werden können. Die Wissensaktivierung umfasst nicht nur das *Wiedererkennen* des Gelernten, sondern auch die *Anwendung des Wissens* in unterschiedlichen Lern- und Anforderungssituationen. Dabei ist entscheidend, ob der Lernende das erworbene Wissen nur im schulischen Kontext und nur bei bestimmten engen Aufgaben- bzw. Fragetypen anwenden kann, indem er es *reproduziert,* oder ob er das Wissen auch in neuartigen (Lern-)Situationen aktivieren und nutzen kann, indem er beispielsweise eine Analogie zum Gelernten herstellen kann und/oder vom erworbenen Wissen ausgehend durch schlussfolgernde Denkprozesse neues Wissen produzieren kann. ‚Wiedererkennen‘, ‚Reproduktion‘ und ‚Transfer des Gelernten‘ stellen somit unterschiedliche Grade der Anwendbarkeit des erworbenen Wissens dar.[91]

Das Phänomen, dass vorhandenes Wissen von Schülern in neuartigen Anforderungssituationen nicht angewendet werden kann, dass also eine Diskrepanz zwischen Wissen und Verhalten besteht (vgl. Gruber und Renkl 2000), ist im Bereich des schulischen Lernens weit verbreitet. Weinert spricht in diesem Zusammenhang von ‚eingekapseltem‘, ‚totem‘ und mit der Ursprungssituation, in der es erworben wurde, ‚verlötetem‘ Wissen (vgl. Weinert 2000, S. 5). Das Problem solch ‚trägen Wissens‘ stellt insbesondere innerhalb der pädagogischen

[91] Stellvertretend für viele Autoren, die in der Anwendbarkeit des Wissens ein entscheidendes Qualitätsmerkmal des Lernergebnisses sehen, sei hier der Allgemeindidaktiker Steindorf angeführt. Er betrachtet ‚Festigkeit und Dauerhaftigkeit‘ als Gütemaßstäbe für erworbenes Wissen und unterscheidet dabei ‚gefestigte‘ Kenntnisse – also solche, die „auf Dauer gespeichert und gegen Störung weiterhin immun sind“ (Steindorf 1985, S. 99) – von ‚flüchtigen und oberflächlichen‘ Kenntnissen. Als weiteres Qualitätsmerkmal des Lernergebnisses führt Steindorf übereinstimmend mit den hier angestellten Überlegungen die ‚Verfügbarkeit und Anwendbarkeit‘ an, womit die ‚Anpassungsfähigkeit‘ des Wissens an neue Anforderungssituationen gemeint ist (vgl. Steindorf 1985, S. 100).

Psychologie einen zentralen Diskussionsgegenstand dar.[92] Aus pädagogischer und bildungstheoretischer Sicht lässt sich argumentieren, dass anwendbares Wissen wertvoller als passives (totes) Wissen ist, denn nur anwendbares Wissen stattet „eine Person mit größeren Freiheiten gegenüber der Umwelt aus" (Seel 2003, S 20), was man als ein grundsätzliches Ziel (schulischen) Lernens auffassen kann. Hochwertiges Wissen ist also dasjenige, das vom Lernenden auf neuartige Situationen übertragen werden kann, geringwertiges ist solches Wissen, das nur wiedererkannt, aber nicht angewendet werden kann.

Die beiden Kriterien ‚fachliche Passung' und ‚Anwendbarkeit' stellen einen Minimalkatalog möglicher Gütekriterien kognitiven Lernens im schulischen Kontext dar, bezüglich derer weitgehend Konsens bestehen dürfte. Die bereits geführte Diskussion zur Qualität des mechanischen Wissens orientierte sich ebenfalls an diesen beiden Kriterien. (vgl. Kapitel 3.2.3). Aufgrund der Nicht-Anwendbarkeit des mechanischen Wissens stellt es ‚totes Wissen' par excellence dar.

Auch für das Lernen aus Schulbuchlehrtexten sind diese beiden Kriterien anwendbar, so dass die Qualität eines naheliegenden Lernergebnisses im Sinne bestimmter vollzogener kognitiver Veränderungen hinsichtlich seiner fachlichen Passung und seiner Anwendbarkeit diskutierbar ist. Bezüglich der Anwendbarkeit der naheliegenden Lernergebnisse dürfte auch die Sinnhaftigkeit der jeweils naheliegenden (Haupt-)Modelle eine Rolle spielen. Die Qualität einzelner von einem Schulbuchlehrtext nahegelegter Lernergebnisse kann entsprechend des Schwierigkeitsgrades ebenfalls sowohl in absoluter als auch in relativer Hinsicht diskutiert werden, so dass manche möglichen Lernergebnisse besser als andere sein dürften. Auch hier können Extrema, also die relativ besten und die relativ schwächsten Lernergebnisse markiert werden.

Zusammenfassend entsteht folgende Theorieskizze: Das Lehrpotential eines Schulbuchlehrtextes wird als die Gesamtheit der von einem Schulbuchlehrtext nahegelegten Lernergebnisse und (Haupt-)Modelle konzipiert. Jedes Lernergebnis geht mit einem naheliegenden (Haupt-)Modell, das als Lehrtextverarbeitungsergebnis eines Modellschülers begriffen wird, einher. Jedes naheliegende (Haupt-)Modell weist einen bestimmten Schwierigkeitsgrad seiner Bildung auf, während jedes Lernergebnis eine bestimmte Qualität bezüglich der fachlichen Passung und der Anwendbarkeit aufweist. Da das (Vor-)Wissen des Modellschülers festgelegt ist, hängt das Lehrpotential eines Lehrtextes ausschließlich von textinternen Merkmalen ab; es ist dem Lehrtext eingeschrieben.

Lehrpotential eines Lehrtextes als Indikator bezüglich des Lernens realer Schüler

Das Lehrpotential eines Lehrtextes erfasst, was und wie gut unser Modellschüler aus einem Lehrtext lernen kann und wie leicht bzw. schwer ihm die entsprechenden Modellbildungen fallen. Die einzelnen Aspekte des Lehrpotentials liefern – eine Korrespondenz der inhalts-

[92] Vgl. beispielsweise Gruber und Renkl 2000, Renkl 1996.

spezifischen Schemata unseres Modellschülers mit den inhaltsspezifischen Schemata (vieler) realer Schüler vorausgesetzt – Hinweise bezüglich des Lernens realer Schüler.

Dabei entsprechen nahegelegte Lernergebnisse den Lernergebnissen realer Schüler, die optimale Lernvoraussetzungen aufweisen, ihre Lesestrategie nicht ändern und den Lehrtext ausschließlich tief verarbeiten. Die Qualität naheliegender Lernergebnisse gibt Hinweise darüber, wie gut verstehen-wollende Schüler mit dem entsprechenden Lehrtext lernen können. Insbesondere markieren die in relativer Hinsicht zu ermittelnden qualitativen Extrema, also die besten und die schwächsten nahegelegten Lernergebnisse die Bandbreite dessen, wie gut reale Schüler mit optimalen Lernvoraussetzungen selbstständig aus einem Lehrtext sinnvoll lernen können. Da viele reale Schüler hinsichtlich ihrer Leseziele, Verarbeitungsstrategien und ihres Vorwissens weniger optimale Voraussetzungen aufweisen als unser Modellschüler, markieren die Lernergebnisse des Modellschülers das Maximum, das reale Schüler aus einem Lehrtext lernen können. [93]

Die am leichtesten zu konstruierenden nahegelegten (Haupt-)Modelle dürften von realen Schülern im Vergleich zu den anderen möglichen (Haupt-)Modellen eher gebildet werden. Diese These beruht auf der Annahme, dass verstehen-wollende Schüler in der Regel ein Minimum an mentaler Arbeit auf sich nehmen, um ein möglichst sinnstiftendes Modell zu konstruieren. Folglich ist davon auszugehen, dass ein naheliegendes (Haupt-)Modell eher unwahrscheinlich ist, wenn ein anderes, leichteres nahegelegtes (Haupt-)Modell existiert. Der relative Bildungsschwierigkeitsgrad nahegelegter (Haupt-)Modelle liefert also Auskunft darüber, welche nahegelegten (Haupt-)Modelle von realen Schülern eher konstruiert werden. Das (Haupt-)Modell, das am leichtesten zu konstruieren ist, kann also als das wahrscheinlichste aufgefasst werden. Entsprechend kann auch das Lernergebnis, das mit diesem (Haupt-)Modell einhergeht, als das wahrscheinlichste sinnvolle Lernergebnis betrachtet werden. Von besonderem Interesse ist die Qualität dieses Lernergebnisses, denn sie liefert Auskunft darüber, wie hochwertig das wahrscheinliche sinnvolle Lernergebnis realer Schüler ist. Des Weiteren ist von Interesse, wie wahrscheinlich das beste bzw. schwächste mögliche Lernergebnis ist. Der relative Schwierigkeitsgrad der Bildung des entsprechenden naheliegenden (Haupt-)Modelle dürfte diesbezüglich wertvolle Hinweise liefern.

[93] Bezüglich der Leseziele und -strategien realer Schüler beim Verarbeiten mathematischer Schulbuchlehrtexte liefert die qualitative empirische Studie von Rezat einige Hinweise. Dort konnten im Wesentlichen drei Leseziele exploriert werden: erstens das Bearbeiten von Hausaufgaben, zweitens das Vertiefen des im Unterricht bereits Behandelten, drittens das ‚Vorarbeiten des Unterrichts' und ‚Nacharbeiten' des verpassten Unterrichts. Die ersten beiden Leseziele waren mit einer selektiven Lesestrategie verbunden. Lediglich das dritte Ziel war mit einem kontinuierlichen Lesen des Schulbuchlehrtextes verknüpft (vgl. Rezat 2009a, S. 201–240). Es fällt auf, dass die dargestellten Ziele unmittelbar dem Zweck ‚erfolgreich im Unterricht sein wollen' dienen. Rezat stellt aber auch eine ‚zweckfreie' Nutzung des Schulbuches fest, nämlich das Lernen aus kognitivem Antrieb, aus bloßer Neugier. Allerdings bezieht sich das ‚interessenmotivierte Lernen' – so die Bezeichnung von Rezat – wesentlich auf das Betrachten von Abbildungen und das Lesen von (Teil-)Texten, die mit der entsprechenden Abbildungen in Verbindung stehen, wie etwa Randspalten. Aus Lehrtexten wurde laut dieser Studie nicht ‚interessenmotiviert gelernt' (vgl. Rezat 2009a, S. 240–246). Insgesamt belegt die Studie, dass zahlreiche Leseziele und -strategien realer Schüler beim Verarbeiten von Mathematikschulbuchlehrtexten nicht lernoptimal sind. Quantitative Aussagen wurden dabei nicht getroffen.

Der absolute Schwierigkeitsgrad der Bildung jedes einzelnen (Haupt-)Modells und dabei insbesondere des am leichtesten zu konstruierenden Modells ist ein Indikator für die Sinnhaftigkeit aller nahegelegten (Haupt-)Modelle und damit für die Wahrscheinlichkeit einer tiefgründigen bzw. oberflächlichen (Teil-)Textverarbeitung durch reale Schüler. Falls alle naheliegenden (Haupt-)Modelle schwer zu konstruieren sind, ist davon auszugehen, dass das Sinnerleben vieler realer Schüler beeinträchtigt sein wird, wodurch sie (Teil-)Texte oberflächlich verarbeiten, was in einem höchstens mechanischen (Teil-)Lernen mündet. In diesem Fall kann ein Lehrtext das sinnvolle Lernen erschweren und das mechanische begünstigen.

Nachdem nunmehr die zentralen theoretischen Größen und ihre Zusammenhänge konzipiert wurden, werden im folgenden Kapitel die für die vorgelegte Untersuchung zentralen methodologischen Aspekte der Lehrpotentialanalyse eines Schulbuchlehrtextes skizziert.

4.2. Methodologische Aspekte

Übersicht über Analysekategorien und notwendige Analyseschritte

Aus dem erarbeiteten theoretischen Rahmen lassen sich die zentralen Schritte der Lehrpotentialanalyse eines Schulbuchlehrtextes ableiten. Es wurde bereits mehrfach erwähnt, dass die nahegelegten (Haupt-)Modelle bzw. Lernergebnisse vom (fachlichen) Vorwissen des Modellschülers abhängen. Das heißt: Es sind Schemata zu konzipieren, die bei der Verarbeitung eines vorliegenden Lehrtextes aktiviert und verändert werden. Weiter wurde gesagt, dass die allgemeinen abstraktionshohen inhaltsspezifischen Schemata des Modellschülers bereits im Vorfeld konzipiert werden müssen. Sie sind von besonderer Relevanz, da sie die Leerstellen auf ihre Unterkategorien, also abstraktionsniedere Schemata vererben. Aufgrund dieser Konzeption erhält man eine theoretische Basis bezüglich der Ermittlung und Beschreibung der Inhalte und Strukturen der von Mathematikschulbuch-lehrtexten nahegelegten (Haupt-) Modelle.

Bei der Analyse eines konkreten Lehrtextes ist nun das spezifische konkrete fachliche Vorwissen des Modellschülers, also die abstraktionsniederen fachlichen Schemata, die beim Verarbeiten des Lehrtextes aktiviert und verändert werden, zu skizzieren. Die Struktur dieser Schemata wird von den abstraktionshohen Schemata abgeleitet, die kognitiven Inhalte sind den relevanten vorherigen Schulbuchabschnitten zu entnehmen.

Nachdem das Vorwissen des Modellschülers konzipiert wurde, wendet man sich dem Lehrtext zu. Zuerst sind seine sprachlichen Merkmalen zu beschreiben, dabei ist auf die typographische Gestaltung des Lehrtextes, die Modalität der Textdaten, die Überschrift(en), die Länge des Lehrtextes sowie auf die zentralen Referenzträger und dementsprechend auf mögliche inhaltliche Blöcke des Lehrtextes einzugehen.

Die eigentliche Lehrpotentialanalyse umfasst im Wesentlichen zwei Schritte; erstens die Ermittlung und Beschreibung jedes naheliegenden (Haupt-)Modells und jedes naheliegenden

Lernergebnisses und zweitens die Ermittlung und Diskussion der extremen (d.h. der am leichtesten bzw. schwierigsten zu konstruierenden und qualitativ besten bzw. schwächsten) naheliegenden Lernergebnisse.

Die Frage, wie man in einer methodisch kontrollierten Art und Weise naheliegende (Haupt-)Modelle ermitteln kann, wird an dieser Stelle noch ein wenig zurückgestellt. Die Beschreibung jedes naheliegenden (Haupt-)Modells umfasst folgende Aspekte: Angabe nicht integrierbarer Textdaten, Explizieren notwendiger umfangreicher Inferenzen, Beschreibung der Struktur aktivierter Leerstellen sowie ihrer Belegung. Die Beschreibung naheliegender Lernergebnisse umfasst vollzogene kognitive Veränderungen, also im Wesentlichen die umstrukturierten ursprünglichen sowie entstandenen neuen Schemata. Dies geschieht aufgrund eines Vergleichs des angenommen aktivierten Vorwissens des Modellschülers und des ermittelnden, beschriebenen (Haupt-)Modells. Von Interesse ist auch das Verhältnis zwischen einem nahegelegtem (Haupt-)Modell und den Textdaten, d.h. die spezifische Ausprägung der schwierigkeitsgradbestimmenden Textmerkmale unter dem jeweiligen Textverständnis. Die entsprechende Beschreibung umfasst folgende Punkte:

1. Integrierbarkeit aller Textdaten in das Hauptmodell: Beschreiben des Umfangs und der Eigenart der gegebenenfalls nicht integrierbaren Teiltexte,
2. Vorhandensein offener Fragen bzw. Leerstellen: Beschreiben aktivierter offener Leerstellen,
3. Notwendigkeit der komplexen Inferenzen: Analyse der Komplexität notwendiger Inferenzen,
4. Passung der Reihenfolge des Lehrtextes zur Struktur des (Haupt-)Modells: Auf der Grundlage eines Vergleichs der Sequenz der Teiltexte mit der Struktur der entsprechenden Submodelle wird begründend beschrieben, welche Teiltexte gegebenenfalls ‚verkehrt' angeordnet sind,
5. Passung der typographischen Gestaltung des Lehrtextes zur Struktur des (Haupt-)Modells: Auf der Grundlage eines Vergleichs der typographischen Gestaltung des Lehrtextes mit der Struktur des nahegelegten (Haupt-)Modells, wird begründend beschrieben, inwiefern und an welchen Stellen eine (Nicht-) Passung vorliegt.

Auf dieser Grundlage werden schließlich auch die Sinnhaftigkeit sowie der absolute Schwierigkeitsgrad der Bildung jedes einzelnen naheliegenden (Haupt-)Modells begründend beschrieben bzw. diskutiert.

Nachdem auf diese Art und Weise jedes naheliegende (Haupt-)Modell bzw. Lernergebnis beschrieben wurde, werden die extremen naheliegenden Lernergebnisse ermittelt. Dies geschieht stets in einer vergleichenden Analyse relevanter Aspekte naheliegender Lernergebnisse. Um in der Bandbreite möglicher Lernergebnisse die am leichtesten und am schwersten zu konstruierbaren zu finden, muss eine Diskussion des relativen Schwierigkeitsgrades der Bildung jedes naheliegenden (Haupt-)Modells geführt werden. Sie basiert auf der (bereits beschriebenen) Ausprägung schwierigkeitsgradbestimmender Textmerkmale. Die besten und die schwächsten naheliegenden Lernergebnisse werden entsprechend im Rahmen einer Diskussion der relativen Qualität jedes naheliegenden Lernergebnisses ermittelt. Diese Diskussion basiert im Wesentlichen auf den Inhalten und Strukturen veränderter Schemata, die im Rahmen der Beschreibung möglicher Lernergebnisse bereits erfasst wurden. Zusätzlich wird auch die Sinnhaftigkeit naheliegender (Haupt-)Modelle berücksichtigt.

Anschließend können einzelne weiterführende Aspekte der extremen naheliegenden Lernergebnisse vertieft diskutiert werden, im Einzelnen scheinen folgende Aspekte relevant zu sein:

- eine (vertiefte) Diskussion der Schwierigkeit der Bildung derjenigen (Haupt-)Modelle, die mit besten/schwächsten möglichen Lernergebnissen einhergehen,
- eine (vertiefte) Diskussion der Qualität der Lernergebnisse, die mit am leichtesten/ schwersten zu konstruierenden (Haupt-)Modellen einhergehen.

Und schließlich ist das Lehrpotential eines Lehrtextes auf der Grundlage vorheriger Schritte integrativ zu beschreiben, indem die Leitfragen einer Lehrpotentialanalyse beantwortet werden: Was und wie gut ist von adressierten Schülern, die optimale Lernvoraussetzungen aufweisen, aus dem Lehrtext selbstständig sinnvoll lernbar? Was und wie gut werden viele verstehen-wollende Schüler wahrscheinlich lernen? An welchen Stellen erschwert der Lehrtext auf welche Art und Weise das sinnvolle Lernen?

Die folgende Übersicht der einzelnen Schritte enthält eine stichpunktartige Darstellung einer Lehrpotentialanalyse eines Schulbuchlehrtextes. Dabei ist der beschriebene Ablauf zwar relativ verbindlich, allerdings können in Abhängigkeit bestimmter Besonderheiten eines Lehrtextes Abweichungen im Ablauf sowie bei einzelnen Analyseschritten auftreten. Das angegebene Gerüst ist also nicht starr und mechanisch abzuarbeiten, sondern als Orientierungspunkt für eine konkrete Analyse zu betrachten und gegebenenfalls flexibel anzuwenden.

Zusammenfassende Darstellung der Analyseschritte

I. *Skizze des relevanten fachlichen Vorwissens des Modellschülers*
Skizze der konkreten fachlichen Schemata, die beim Verarbeiten des Lehrtextes vom Modellschüler aktiviert werden können

II. *Beschreibung formaler sprachlicher Merkmale des Schulbuchlehrtextes*
Beschreibung der Überschrift, typographischer Gestaltung, Modalität der Textdaten, der zentralen Referenzträger, evtl. Kennzeichnung inhaltlicher Blöcke

III. *Beschreibung naheliegender (Haupt-)Modelle und naheliegender Lernergebnisse*
1) Beschreibung eines naheliegenden (Haupt-)Modells und des damit einhergehenden Lernergebnisses

1a) Beschreibung der Charakteristik des naheliegenden (Haupt-)Modells

Angabe nicht integrierbarer Textdaten, Explizieren komplexer Inferenzen, Beschreibung der Struktur und der Inhalte des (Haupt-)Modells

1b) Skizze der vollzogenen kognitiven Veränderungen

Auf der Grundlage einer vergleichenden Betrachtung des angenommenen Vorwissens des Modellschülers (I) und der Charakteristik des (Haupt-)Modells (III. 1a), Beschreibung der im Zuge der Modellbildung vollzogenen kognitiven Veränderungen des Modellschülers

1c) Beschreibung der Ausprägung schwierigkeitsgradbestimmender Textmerkmale unter dem jeweiligen Textverständnis und der Sinnhaftigkeit des naheliegenden (Haupt-)Modells

Auf der Grundlage der Charakteristik des (Haupt-)Modells (III.1a) und der vorliegenden Textdaten (II) Beschreibung der spezifischen Ausprägung folgender Textmerkmale: nicht integrierbare Textdaten, offene Fragen/Leerstellen, Komplexität der notwendigen Inferenzen, Passung der Reihenfolge und der typographischen Gestaltung zur Struktur des (Haupt-)Modells. Folgerungen bezüglich der Sinnhaftigkeit des (Haupt-)Modells und des absoluten Schwierigkeitsgrades der Bildung des naheliegenden (Haupt-)Modells

2-N) Analoge Beschreibung weiterer naheliegender (Haupt-)Modelle und Lernergebnisse 2-N.

IV. *Ermittlung und Diskussion der extremen naheliegenden Lernergebnisse*

1) Ermittlung der am leichtesten/schwierigsten zu konstruierenden naheliegenden (Haupt-)Modelle bzw. Lernergebnisse

Diskussion des relativen Schwierigkeitsgrades der Bildung jedes naheliegenden (Haupt-)Modells anhand einer vergleichenden Analyse der beschriebenen Ausprägung schwierigkeitsbestimmender Textmerkmale bei unterschiedlichen Textverständnissen (III.1c-Nc) mit dem Ziel, die am leichtesten/schwierigsten zu konstruierende (Haupt-) Modelle bzw. Lernergebnisse zu ermitteln.

2) Ermittlung der besten/schwächsten naheliegenden Lernergebnisse

Diskussion der relativen Qualität jedes naheliegenden Lernergebnisses anhand einer vergleichenden Analyse auf der Grundlage der Charakteristik naheliegender Lernergebnisse (III. 1b-Nb) und der Sinnhaftigkeit entsprechender (Haupt-)Modelle (III. 1c-Nc) mit dem Ziel, die besten und schwächsten naheliegenden Lernergebnisse zu ermitteln.

3) Gegebenenfalls eine vertiefende Diskussion der extremen naheliegenden Lernergebnisse

Unter Berücksichtigung der zuvor geführten Diskussionen vertiefende Betrachtungen zu folgenden Aspekte:

- relativer Schwierigkeitsgrad der Bildung der (Haupt-)Modelle, die mit den besten/ schwächsten naheliegenden Lernergebnissen einhergehen,
- absolute und relative Qualität der Lernergebnisse, die mit den am leichtesten/ schwersten zu konstruierenden (Haupt-)Modellen einhergehen.

V. Integrative Lehrtextkennzeichnung

Beantwortung der Leitfragen: Was und wie gut können Schüler mit optimalen Lernvoraussetzungen aus dem vorliegenden Schulbuchlehrtext lernen? Was und wie gut werden viele adressierte Schüler wahrscheinlich lernen? An welchen Stellen und auf welche Art und Weise erschwert der Schulbuchlehrtext sinnvolles Lernen?

Zum methodologischen Vorgehen bei der Ermittlung naheliegender (Haupt-)Modelle

Die naheliegenden (Haupt-)Modelle bilden neben dem Vorwissen des Modellschülers bezüglich des Lehrpotentials eine grundlegende Größe, ihre Ermittlung stellt bei der analytischen Bestimmung des Lehrpotentials eines konkreten Lehrtextes den entscheidenden Schritt dar. Doch wie lassen sich nun anhand eines konkreten Lehrtextes in einer methodisch kontrollierten Art und Weise die naheliegenden (Haupt-)Modelle bestimmen?

Naheliegende (Haupt-)Modelle zeichnen sich dadurch aus, dass sie möglichst sinnstiftend sind, d.h. sie beinhalten möglichst viele Textdaten als textbasierte Werte und weisen eine intakte Struktur sowie eine intakte Belegung aktivierter Leerstellen auf. Für den Prozess der Suche solcher zum Text passender (Haupt-)Modelle gilt, was die Textlinguistik bezüglich der (Teil-)Textthemenbestimmung als einen relativen Konsens ansieht: Es ist keine ‚mechanische' Prozedur, sondern ein hermeneutischer Interpretationsprozess, bei dem die Teiltexte einerseits das Gesamtverständnis des Textes bestimmen und bei dem andererseits die Interpretation der Teiltexte von letzterem abhängt.[94] Im Wesentlichen muss ein integratives sinnvolles Ganzes, das den Gesamttext umfasst, gefunden werden.

Ein ‚gefundenes' naheliegendes (Haupt-)Modell erhebt den Anspruch, bezüglich seiner Intaktheit und der Passung zum Lehrtext intersubjektiv überprüfbar zu sein. Damit dieser Anspruch eingelöst werden kann, muss das Ergebnis der Interpretation derart festgehalten werden, dass sowohl die Intaktheit des (Haupt-)Modells als auch die Beziehung zwischen dem (Haupt-)Modell und den einzelnen Textdaten sichtbar werden.

In dieser Untersuchung wurden bereits mehrere Modelle in einer graphischen Form vorgestellt; diese Notation hat den Vorteil, dass die Intaktheit der Struktur und der Belegung aktivierter Leerstellen unmittelbar in einer graphischen Form sichtbar gemacht werden kann. Daher wird diese Darstellungsform für die Analyse konkreter Lehrtexte beibehalten. Allerdings wird sie insofern erweitert, als die Textdaten, die als Inhalte bestimmter Leerstellen interpretiert wurden, ebenfalls sichtbar gemacht werden. Dabei ist es notwendig, die sprachlichen Einheiten durchzunummerieren, wobei die ‚Größe' der entsprechenden Einheiten (d.h. die Entscheidung über eine Sequenzierung in semantische Einheiten, syntaktische Einheiten [Sätze] oder größere inhaltliche Blöcke) von der Länge des vorliegenden Textes und der Feinheit der angestrebten Analyse abhängt. In der Struktur eines passenden Modells werden dementsprechend die Nummern der dazugehörigen sprachlichen Einheiten hinter den jeweiligen Leerstellen notiert. Solche Strukturen sollen als Text-Modell-Strukturen bezeichnet werden. In der Abbildung 3 ist beispielhaft eine mögliche

[94] Vgl. Brinker et al. 2014, S. 53–54, Lötscher 2008, S. 102.

Text-Modell-Struktur des einfachen Heidelbergmensch-Lehrtextes (vgl. Kap. 3.2.2) dargestellt, wobei in diesem Fall die einzelnen Sätze durchnummeriert und die sprachlichen Einheiten jeweils hinter den Leerstellen erster Ordnung notiert wurden.

HEIDELBERGMENSCH
- [1] UMSTÄNDE DER EXISTENZ (1)
  - [1.1] ZEITPUNKT ‚vor etwa 500 000 Jahren'
  - [1.2] ORT ‚Europa'
- [2] NAHRUNG (2-5)
  - [2.1] PFLANZLICHE NAHRUNG
    - [2.1.1.] ART ‚Nüsse und Früchte'
    - [2.1.2] BESORGUNG ‚sammeln'
  - [2.2] TIERISCHE NAHRUNG
    - [2.2.1.] BESORGUNG ‚jagen'
      - [2.2.1.1] VORGEHENSWEISE ‚in Gruppen und mit einfachen Waffen'
      - [2.2.1.2] ERFOLGSCHANCEN ‚hoch'
    - [2.2.2] ZERTEILEN DER TIERE ‚mit Hilfe der Steinwerkzeuge'
- [3] SPRACHE ‚war vorhanden' (6)
- [4] GRUND FÜR DIE BEZEICHNUNG ‚gefunden bei Heidelberg' (7-8)

Abbildung 3: Text-Modell-Struktur des Lehrtextes ‚Heidelbergmensch'

Solche Text-Modell-Strukturen verbinden die Ebene des (Haupt-)Modells mit der Ebene der Textdaten und visualisieren sowohl die Intaktheit als auch die Passung des (Haupt-)Modells zum Text. An dieser Stelle sei angemerkt, dass die Text-Modell-Strukturen die Intaktheit der Modelle lediglich veranschaulichen können. Die normative Folie, bezüglich derer die Intaktheit eines Modells diskutierbar ist, bilden demgegenüber die (abstraktionshohen fachlichen) Schemata, auf deren Grundlage sich die Textverarbeitung unseres Modellschülers vollzieht.

Die Text-Modell-Strukturen sind auch bei der Ermittlung naheliegender (Haupt-)Modelle hilfreich, denn zu jeder wissensvermittelnden sprachlichen Einheit wird eine im Rahmen des zu konstruierenden Modells bzw. aktivierten Schemas intakte Leerstelle gesucht. Schließlich muss ein Lehrtext solange interpretiert werden, bis auf der Ebene des Modells eine intakte Struktur mit entsprechender Belegung vorliegt und dabei möglichst viele Textdaten als textbasierte Werte im Modell auftauchen.

In Bezug auf die Text-Modell-Strukturen wird Folgendes festgelegt:

1. Bei offenen Leerstellen, d.h. falls die entsprechenden Textdaten fehlen und vom Modellschüler nicht inferierbar sind, wird in Klammern statt einer Nummer ‚fehlender Teiltext' notiert.
2. Die nicht integrierbaren Textdaten sind daran zu erkennen, dass zu ihnen keine im Rahmen des konstruierten Modells passende Leerstelle existiert. Deshalb werden

diese sprachlichen Einheiten nicht als Leerstellenwerte notiert und sie tauchen in der jeweiligen Text-Modell-Struktur nicht auf.

3. Die sequenzielle Darstellung der naheliegenden (Haupt-)Modelle folgt primär der ‚Logik' des Modells und nicht dem Verlauf des Lehrtextes, so dass die Reihenfolge der einzelnen Teiltexte in der Text-Modell-Struktur Veränderungen unterworfen sein kann.

Die Text-Modell-Strukturen stellen damit ein Hilfsinstrument für ein methodisch-kontrolliertes Ermitteln naheliegender (Haupt-)Modelle dar. Darüber hinaus sind sie einer Charakterisierung jeweils naheliegender (Haupt-)Modelle hilfreich, denn fast alle Aspekte solch einer Charakteristik sind unmittelbar an der Text-Modell-Struktur sichtbar; dies gilt sowohl für die Struktur und Belegung aktivierter Leerstellen als auch für die nicht integrierbaren Textdaten. Demgegenüber sind die ‚notwendigen Inferenzen' nicht unmittelbar der Text-Modell-Struktur entnehmbar. Wenn man jedoch einen konkreten Lehrtext und das dazu passende Text-Modell-Struktur parallel betrachtet, werden die inhaltlichen ‚Lücken' im Text ‚sichtbar' und deren ‚Füllung' explizierbar. Da im Rahmen einer Untersuchung des Lehrpotentials eines Lehrtextes lediglich die komplizierteren Inferenzen von Interesse sind, wird in den Analysen nicht auf alle Lücken des Textes eingegangen, sondern lediglich auf die besonders ‚großen'. Es werden also nicht alle Inferenzen expliziert, sondern nur die, die besonders umfangreich sind und/oder (neues) fachliches Wissen erfordern.

Des Weiteren ist aus einer ermittelten Text-Modell-Struktur die Ausprägung einzelner schwierigkeitsgradbestimmender Textmerkmale ersichtlich. So sind die offenen Leerstellen diejenigen, bei denen auf der Textebene ‚fehlender Teiltext' vermerkt ist. Auch die ‚Passung der Reihenfolge des Lehrtextes zur Struktur des (Haupt-)Modells' ist aufgrund der sequenziellen Darstellung der Leerstellen unmittelbar sichtbar. Insgesamt dienen die Text-Modell-Strukturen als Hilfsinstrument sowohl zum Ermitteln als auch zum Beschreiben naheliegender (Haupt-)Modelle.

Nachdem das Lehrpotential eines Schulbuchlehrtextes auf einer allgemeinen Ebene skizziert wurde, konzentriert sich die Untersuchung im weiteren Verlauf auf Schulbuchlehrtexte im Fach Mathematik, wodurch der gesetzte theoretische Rahmen nunmehr gegenstandsbezogen präzisiert werden kann.

5. Das Lehrpotential eines Mathematikschulbuchlehrtextes

In diesem Kapitel wird der zuvor entwickelte theoretische Rahmen in Bezug auf Mathematikschulbuchlehrtexte präzisiert und vertieft. Im ersten Unterkapitel 5.1 wird die grundlegende Größe zur Erfassung des Lehrpotentials eines mathematischen Schulbuchlehrtextes – das allgemeine mathematische (deklarative) (Vor-)Wissen des Modellschülers, also die abstraktionshohen Schemata, die schulmathematische Inhalte organisieren und die beim Lernen aus mathematischen Texten aktiviert und entsprechend verändert werden – konzipiert. Diese Überlegungen erlauben im folgenden Unterkapitel 5.2 eine Präzisierung einzelner Aspekte des Lehrpotentials eines Mathematikschulbuchlehrtextes. Der Fokus fällt dabei insbesondere auf die Merkmale der von einem Mathematikschulbuchlehrtext nahegelegten (Haupt-)Modelle und auf die Qualität der damit einhergehenden Lernergebnisse. Die theoretischen Betrachtungen werden schließlich im Unterkapitel 5.3 mit einer Erprobung des entwickelten theoretisch-analytischen Instrumentariums abgerundet, indem das Lehrpotential eines kurzen mathematischen Schulbuchlehrtextes – eines ‚Kastens' – analysiert wird.

5.1. Das intersubjektive deklarative schulmathematische (Vor-)Wissen

Die Konzeption (abstraktionshoher) schulmathematischer Schemata eines Modellschülers bildet eine wesentliche Grundlage sowohl hinsichtlich einer theoretischer Präzisierung als auch einer analytischen Erfassung und Beschreibung des Lehrpotentials eines mathematischen Schulbuchlehrtextes, also der von einem mathematischen Schulbuchlehrtext nahegelegten (Haupt-)Modelle und Lernergebnisse (vgl. Kap. 4.1). Dabei gilt folgendes Leitprinzip: Die fachlichen Schemata des Modellschülers sollen mit den Schemata (vieler) realer Schüler korrespondieren. Da keine detaillierte kognitionspsychologische Theorie bzw. Modellierung des gesamten deklarativen schulmathematischen Wissens (vieler) realer Schüler existiert, muss hier der Versuch unternommen werden, Grundzüge intersubjektiver abstraktionshoher deklarativer schulmathematischer Schemata zu entwickeln.

Doch inwiefern ist die Annahme der Intersubjektivität solcher Schemata überhaupt gerechtfertigt? Wie bereits angemerkt werden Schemata aufgrund (oft) gemachter Erfahrungen ausgebildet, d.h. die schulmathematischen Schemata bilden sich auf der Grundlage der im Mathematikunterricht gemachten Erfahrungen bezüglich des ‚Lernstoffs' aus. Die Institution Schule im Allgemeinen und so auch der Mathematikunterricht im Speziellen sind in komplexe gesellschaftliche Zwänge und Abhängigkeiten eingebettet und dadurch bis zu einem recht hohen Grad festgelegt. So gibt es zahlreiche gesellschaftliche Randbedingungen (Prüfungsordnungen, Rahmenlehrpläne, Länge der Unterrichtsstunden usw.), die das Handeln der Mathematiklehrer im hohen Maße bestimmen, regeln und entsprechend einschränken.[95] Folglich kann angenommen werden, dass die Erfahrungen, die Schüler bei unterschiedlichen Mathematiklehrern bezüglich des Lernstoffs machen, trotz zahlreicher

[95] Der Soziologe Fend entwickelt – basierend auf einem handlungstheoretischen Ansatz – eine ‚Theorie der Schule', bei der deutlich herausgearbeitet wird, dass Lehrer in einem vom Gemeinwesen bzw. (bildungs-)politischen Institutionen eröffnetem und klar eingegrenztem ‚Handlungsspielraum' agieren (vgl. Fend 2006).

Divergenzen doch viele grundsätzliche Gemeinsamkeiten aufweisen. Daher scheint auch die Annahme plausibel, dass auch ihre (abstraktionshohen) Schemata, die das im Mathematikunterricht erworbene Wissen organisieren, Ähnlichkeiten aufweisen.

Wenn man das schulmathematische (Vor-)Wissen unseres Modellschülers bzw. das intersubjektive schulmathematische Wissen realer Schüler konzipieren möchte, muss die Quelle dieser Schemata, d.h. die typischerweise erwartbaren Erfahrungen bezüglich des ‚Lernstoffs' im Mathematikunterricht expliziert werden. Um sich diesen Erfahrungen zu nähern, werden zunächst mit dem genetischen und dem aufgabenorientierten Unterricht zwei prototypische Unterrichtsformen und die mit ihnen verbundenen typischen allgemeinen Schülererfahrungen beschrieben. Man kann zugespitzt formulieren, dass ersterer den von der Mathematikdidaktik erwünschten, letzterer den von ihr beklagten Prototyp repräsentiert. Es wird die Annahme getroffen, dass der ‚reale' Unterricht sowohl Aspekte des aufgabenorientierten als auch des genetischen Unterrichts in jeweils unterschiedlichen Verhältnissen aufweist, so dass die Schüler in unterschiedlichen Graden sowohl genetische als auch aufgabenorientierte Erfahrungen bezüglich (der Aneignung) mathematischer Unterrichtsinhalte machen. Zunächst erfolgt also eine Annäherung an jeweilige Typik dieser Unterrichtsformen und die damit typischerweise verbundenen Schülererfahrungen, anschließend werden die ‚realen' Unterrichtserfahrungen der Schüler diskutiert und auf dieser Grundlage die entsprechenden intersubjektiven schulmathematischen hierarchiehohen Schemata der Schüler entwickelt.

Genetischer Mathematikunterricht und Schülererfahrungen bezüglich des Unterrichtsstoffs

Der genetische Unterricht, der mit unterschiedlichen Ausprägungen primär von Felix Klein, Otto Toeplitz, Hans Freudenthal, Martin Wagenschein und Alexander Wittenberg im Rahmen der Mathematikdidaktik mitbegründet und gefördert wurde, wird in der einschlägigen Literatur als das normativ Erwünschte diskutiert.[96] Im Folgenden werden in Anlehnung an Wittmann die zentralen Charakteristika des genetischen Unterrichts skizziert.

Genetischer Unterricht zeichnet sich unter anderem durch eine spezifische Sequenzbildung[97] und Unterrichtsgestaltung aus. Die genetische Sequenzbildung „[ist] ausgerichtet an den natürlichen erkenntnistheoretischen Prozessen der Erschaffung und Anwendung von Mathematik" (Wittmann 1981, S. 130) und lässt sich durch folgende Merkmale charakterisieren:

„[-] Anschluß an das Vorverständnis der Adressaten,
[-] Einbettung der Überlegungen in größere ganzheitliche Problemkontexte außerhalb und innerhalb der Mathematik,

[96] Vgl. beispielsweise Wittmann 1981, Lenné 1969, Vollrath 2001, sowie Führer 1997. Einen umfassenden Überblick der ‚Einzelbeiträge zur Ausformulierung der genetischen Methode' liefert Wittmann 1981, S. 131–140.
[97] Der Terminus ‚Sequenzbildung' ist von Wittmann entlehnt; vgl. Wittmann 1981. In der Pädagogik wird in diesem Zusammenhang zumeist der Begriff ‚Artikulation' gebraucht (vgl. beispielsweise Prange 1986, S. 85ff).

[-] Zulässigkeit einer informellen Einführung von Begriffen aus dem Kontext heraus,
[-] Hinführung zu strengen Überlegungen über intuitive und heuristische Ansätze,
[-] durchgehende Motivierung und Kontinuität,
[-] während des Voranschreitens allmähliche Erweiterung des Gesichtskreises und entsprechende Standpunktverlagerungen“ (Wittmann 1981, S. 131; im Original ohne Aufzählungszeichen).

Wittmann konkretisiert die genetische Methode, indem er drei spezifische ‚genetische Aktivitäten‘ herausarbeitet. Bei der Erarbeitung des neuen ‚Stoffs‘ wird zuerst ‚inhaltliche Mathematik entwickelt‘. Dies geschieht aufgrund einer „Auseinandersetzung mit anschaulichen Problemen der Wirklichkeit oder der Mathematik“, im Laufe derer ein „mathematischer Apparat von Begriffen und Verfahren“ entwickelt wird, der „in der Sprache des (der) Problemkontext(s) formuliert“ (Wittmann 1981, S. 140f.) und aus fachlicher Sicht noch unpräzise und unvollständig ist. Das Ziel dieser Aktivität ist, „allgemeine Gesetzmäßigkeiten zu finden, zu formulieren und zu begründen.“ (ebd.) Die anschließende Aktivität, die Wittmann als ‚begrifflich-strukturelle Analyse und logisches Ordnen‘ bezeichnet, umfasst eine begriffliche und sprachliche Präzisierung, Abstraktion sowie eine Strukturanalyse des ‚inhaltlich‘ entwickelten Instrumentariums. Die Tiefe der Abstraktion, der Grad der Präzisierung und des Ordnens hängt dabei im Wesentlichen von der intellektuellen Reife der Schüler ab. Das Ziel dieser Tätigkeit ist ‚Ökonomie und Übersicht‘. Schließlich wird das präzisierte Instrumentarium zur Lösung weiterer inner- und außermathematischer Probleme angewendet (vgl. ebd.).

Da in einem genetischen Unterricht das Verständnis von Mathematik im Vordergrund steht, werden eher offene, problemorientierte, produktive Aufgaben, also jene, bei denen mehrere – nicht bereits vorher erläuterte – Lösungen möglich sind, eingesetzt.[98] Auch die Tests und die Klassenarbeiten enthalten im Rahmen des genetischen Unterrichts unterschiedliche Aufgabenformate, die auf mathematisches Verständnis zielen, wie etwa unterschiedliche (offene) Begründungs- und Argumentationsaufgaben.

Welche typischen Erfahrungen bezüglich einer ‚Stoffeinheit‘ macht nun ein Schüler in solch einem Unterricht? Ein mathematisches Element (Satz, Begriff, Verfahren) wird im genetischen Unterricht, ausgehend von einem zugänglichem Problemzusammenhang, der sowohl inner-, als auch außermathematischer Natur sein kann, entwickelt, d.h. es gibt neben einer Anbindung an das Zugängliche eine Motivation bzw. ein Motiv zur Einführung des jeweiligen Elements. Die Grundlage der Entwicklung eines mathematischen Elements ist dabei die aus dem Problemzusammenhang generierte ‚inhaltliche Mathematik‘, d.h. es handelt sich um einsehbare Sachverhalte.[99] Im Prozess der begrifflich-strukturellen Analyse wird die inhaltliche Mathematik präzisiert und abstrahiert, so dass schließlich ein mathematisches Element entsteht. Das heißt insbesondere, dass ein mathematisches Element etwas ist, dessen Zustandekommen für Schüler einsichtig und einsehbar ist, wodurch es seine

[98] Zu den Merkmalen ‚produktiver‘ Aufgaben siehe Jahnke 2001.
[99] Dies gilt unabhängig davon, ob es sich in der konkreten Unterrichtsgestaltung eher um einen darbietenden oder eher um einen entdeckenden Unterricht handelt.

subjektive Bedeutung für die Schüler gewinnt. In der Phase der begrifflich strukturellen Analyse und des logischen Ordnens wird das präzisierte Element mit anderen mathematischen Elementen in eine Beziehung gesetzt, d.h. ein mathematisches Element ‚bekommt einen bestimmten Platz' im bereits erarbeiteten theoretischen Gebilde. Bei Begriffen sind dies insbesondere die Begriffshierarchien, bei Sätzen und Verfahren entsteht eine (deduktiv) geordnete Struktur, bei der Sätze anhand der bereits begründeten mathematischen Elemente bewiesen/begründet werden. Schließlich trägt ein mathematisches Element in der Regel zur Lösung weiterer inner- und außermathematischer Probleme bei, es eröffnet also Anwendungsmöglichkeiten. Insgesamt machen die Schüler folgende zentrale Erfahrungen bezüglich eines mathematischen Elementes:

Das mathematische Element

- hat ein Motiv,
- ist grundsätzlich einsehbar,
- steht in einer Beziehung zu anderen mathematischen Elementen,
- ist anwendbar.

Nun wird die konträre prototypische Unterrichtsform beschrieben, in der Schüler ganz andere Erfahrungen bezüglich der behandelten Inhalte machen.

Aufgabenorientierter Mathematikunterricht und Schülererfahrungen bezüglich des Unterrichtsstoffs

Der genetische Unterricht wurde primär als konträrer, normativer Pol zum aufgabenorientierten Unterricht entworfen, letzterer wurde allerdings trotz seiner ‚empirischen Realität' theoretisch nur skizzenhaft erfasst.[100] Relativ ausführlich hat Lenné den aufgabenorientierten Mathematikunterricht beschrieben, seine Ausführungen werden im Folgenden aufgegriffen und erweitert.[101]

Im aufgabenorientierten Unterricht wird der Unterrichtsstoff nicht entsprechend der ‚natürlichen erkenntnistheoretischen Prozesse der Erschaffung der Mathematik', sondern nach Aufgabenklassen sequenziert. Lenné beschreibt diese Stofforganisation, die er als ‚Aufgabendidaktik' bezeichnet und als Organisationsprinzip des traditionellen Mathematikunterrichts betrachtet, wie folgt:

„Jedes Teilgebiet ist durch einen Aufgabentypus bestimmt, der systematisch von einfachen zu komplexen Formen hin abgehandelt wird. Komplexe Aufgaben lassen sich dabei als Kombinationen einfacher Aufgaben auffassen. Die einzelnen Gebiete zeigen so in sich eine strenge Systematik. Sie sind jedoch relativ isoliert behandelt. „Anwendungsaufgaben" werden jedem Gebiet *gesondert* zugeteilt, und nur die Reihenfolge der Gebiete wird so festgelegt, daß ein Gebiet möglichst die notwendigen Voraussetzungen für die nächstfolgenden liefert. Gebiete, die einmal behandelt

[100] Kollosche liefert dafür die Begründung, dass Didaktik und Pädagogik primär normativ und nicht deskriptiv denken (vgl. Kollosche 2014, S. 30–40). Als eine Ausnahme ist in diesem Zusammenhang der Pädagoge Gruschka zu nennen, der ‚eine pädagogische Theorie des Unterrichtens auf empirischer Basis' entwickelt (vgl. Gruschka 2013).
[101] Vgl. Lenné 1969, insbesondere S. 34-37; 50-54.

worden sind, gelten insoweit als erledigt; der betreffende Stoff wird als bekannt vorausgesetzt; Querverbindungen anhand übergreifender Ideen oder Strukturen werden – jedenfalls systematisch – kaum grundsätzlich herausgearbeitet. […] Die Mathematik im Ganzen tritt daher dem Schüler weniger als innere ideelle Einheit, sondern vielmehr als eine Sammlung von Aufgabentypen entgegen.“ (Lenné 1969, S. 34–35)

Eine solche Stoffsequenzierung korrespondiert häufig mit einer bestimmten Unterrichtsmethodik. Lenné schreibt dazu:

„In der Aufgabendidaktik werden […] jeweils bestimmte Kenntnisse, Operationen und Methoden vom Lehrer vorgetragen. […] Sodann werden vom Lehrer beziehungsweise Lehrbuch Aufgaben gestellt. Diese Aufgaben werden vom Schüler gelöst. Die Resultate werden vom Lehrer kontrolliert.“ (Lenné 1969, S. 51)

Typischerweise werden im aufgabenorientierten Unterricht geschlossene Aufgaben, deren Bearbeitung im Vorfeld präsentiert wurde, eingesetzt.[102] Dabei können wesentlich zwei Sorten von Aufgaben unterschieden werden, diejenigen, bei denen etwas vorher Präsentiertes und meistens an der Tafel Aufgeschriebenes (Begriffe, Sätze) abgefragt wird und seitens Schüler ‚aufgesagt‘ werden soll und diejenigen, bei denen nach einem vorher vorgegebenen Muster etwas berechnet, gezeichnet oder umgeformt werden soll. Erstere werden im Folgenden als Faktenaufgaben, letztere als Transformationsaufgaben bezeichnet. Warum etwas gerade so und nicht anders transformiert bzw. genannt werden soll, wird entweder gar nicht thematisiert oder nur oberflächlich erklärt und in den Aufgaben höchstens als etwas faktisch Vorliegendes abgefragt. Andere Aufgabenformate wie offene, produktive bzw. problemorientierte Aufgaben werden in einem aufgabenorientierten Unterricht nur partiell und insbesondere nicht in Tests und Klassenarbeiten eingesetzt. Die Wahl einer Aufgabe bzw. einer Aufgabenklasse wird inhaltlich nicht motiviert bzw. begründet, das unterschwellige oder auch offen ausgesprochene Motiv für das ‚Abhandeln‘ einer Aufgabenklasse ist ihre pure Vorgeschriebenheit im Sinne der notwendigen Erfüllung des Rahmenlehrplans und des notwendigen Schreibens der Klassenarbeiten/Vergleichsarbeiten bzw. des Abiturs. Das Motiv für die Behandlung der Aufgaben erschöpft sich damit im Wesentlichen in einem ‚Wir müssen es tun, weil es verlangt/vorgeschrieben ist‘.

Im typischen aufgabenorientierten Unterricht fehlen demzufolge Phasen der Präzisierung, begrifflicher Analyse sowie des logischen Ordnens der entwickelten Theorie. Vielmehr sind die eingeführten Begrifflichkeiten und Sätze entweder sofort in einem Aufgabenmodus präsentiert (Dreisatzaufgaben) oder werden nach vorheriger Erläuterung unmittelbar in entsprechenden Transformationsaufgaben ‚angewendet‘, wie etwa bei den Berechnungen zum Satz des Pythagoras. Der entsprechende Satz mutiert dabei zu einer Antwort auf eine Faktenaufgabe (Wie lautet der Satz des Pythagoras?) und/oder zu einem Bestandteil der

[102] Die Präsentation einer erwünschten Aufgabenbearbeitung kann allein durch den Lehrer geschehen, aber auch – und das dürfte im ‚realen‘ aufgabenorientierten Unterricht der Regelfall sein – in einem sogenannten ‚Lehrer-Schüler-Gespräch‘ ‚erarbeitet‘ werden, wobei dieses Gespräch vom Lehrer stark geleitet und gesteuert wird, so dass man von „einem suggestiv gesteuertem Lehrervortrag aus dem Munde der Schüler“ (Lenné 1969, S. 51) sprechen kann, bei dem die „Schüler lange im Nebel herumstochern, was denn der Lehrer von ihnen will“ (Gruschka 2013, S. 142). Vgl. dazu auch die Ausführungen im Kapitel 7.2.

Bearbeitung passender Transformationsaufgaben, wie etwa zu einer Formel, in die bei den ‚Pythagoras'-Aufgaben die Längen der einzelnen – in der Aufgabenstellung gegebenen – Dreieckseiten eingesetzt werden sollen. Dadurch können die eingeführten Begriffe, Sätze und Verfahren keine von den Aufgaben losgelöste Eigenständigkeit erlangen.

In einem typischen aufgabenorientierten Unterricht erleben die Schüler Mathematik vornehmlich als eine Ansammlung von vorgeschriebenen Aufgabentypen, deren Auswahl gesetzt und damit nicht einsichtig ist und den Schülern daher als willkürlich erscheint. Die Aufgabentypen sind stets lösbar und besitzen eine eindeutige ‚richtige', d.h. vom Lehrer erwünschte Antwort, deren Wahrheit ausschließlich auf der Autorität der Lehrperson (und evtl. dahinterstehender Autoritäten wie beispielsweise Mathematikern) beruht, insbesondere ist die Antwort für die Schüler typischerweise nicht einsichtig. Die Aufgabentypen werden primär als isolierte Einheiten erlebt, die kaum miteinander und mit der Realität außerhalb des Mathematikunterrichts verbunden sind. Mathematik als etwas von Aufgaben Losgelöstes und Eigenständiges wird nicht erlebt. Die Nicht-Einsichtigkeit der Anforderung und damit der Mathematik in Verbindung mit dem unterschwelligen Motiv ‚wir müssen es tun' führt dazu, dass die Aufgaben ihren Sinn und ihre Bedeutung ausschließlich aus der Tatsache schöpfen, dass sie im Mathematikunterricht, der in die Institution Schule eingebunden ist, vorkommen und ihn konstituieren. Sie stellen das Verlangte und das zu Könnende dar, um im Mathematikunterricht eine gute Zensur zu erhalten. Insbesondere gewinnen die Aufgaben ihre Bedeutung nicht aufgrund der Erkenntniskraft, wie dies bei mathematischen Elementen der Fall ist. Außerhalb der schulischen Pflichterfüllung sind die Aufgaben für die Schüler damit im Wesentlichen sinn- und bedeutungslos.

Realer Mathematikunterricht

Realer Unterricht dürfte in der Regel keiner der beschriebenen prototypischen Unterrichtsformen entsprechen, er enthält mehr oder weniger stark ausgeprägte Momente beider Formen. Vielleicht kann man den beschriebenen aufgabenorientierten und genetischen Unterricht als Enden eines Kontinuums auffassen, mit dem sich jeweils konkreter Mathematikunterricht beschreiben lässt. Entsprechend sind die Erfahrungen eines realen Schülers in der Regel nicht so eindeutig, wie dies im Rahmen der prototypischen Unterrichtsformen beschrieben wurde, ein Schüler macht tendenziell mehr oder weniger oft alle der beschriebenen Erfahrungen. Die Erfahrungen der einzelnen Schüler unterscheiden sich also nicht kategorial, sondern eher quantitativ; sie werden jeweils unterschiedlich oft gemacht.

Die Erfahrungen im Rahmen prototypischer Unterrichtsformen determinieren unterschiedliche schulmathematische Schemata; das AUFGABE-Schema versus MATHEMATISCHES -ELEMENT-Schema. Da in einem realen Unterricht beide Erfahrungstypen im unterschiedlichen Ausmaß vorhanden sind, wird angenommen, dass bei den meisten realen Schülern beide Schemata vorhanden sind, allerdings variieren der Verfestigungsgrad und damit die kognitive Präsenz dieser Schemata bei der Informationsverarbeitung bzw. beim Lernen.

Im Folgenden werden die (hierarchiehohen) prototypischen Schemata konzipiert. Dabei wird kein Anspruch auf Vollständigkeit erhoben, die Schemata werden lediglich soweit skizziert, dass ihre jeweilige Spezifik deutlich wird, d.h. es werden jeweils nur die zentralen verfestigten Leerstellen beschrieben. Insbesondere wird auf die Belegung der Bestandteile-Leerstelle eingegangen, da damit die einzelnen Teile, die das übergeordnete Ganze formieren und konstituieren, erfasst werden (vgl. Kap. 3.1).

AUFGABE-Schema und seine Subschemata

Das AUFGABE-Schema ist ein hierarchiehohes Schema, das sich in einem aufgabenorientierten Unterricht ausbildet und verfestigt. Bei Schülern, die ausschließlich aufgabenorientierten Unterricht erleben, dominiert dieses Schema sehr stark und es organisiert die meisten oder gar alle schulmathematischen Wissensinhalte.

Wie bereits ausgeführt wurde, wird Mathematik in einem aufgabenorientierten Unterricht nicht als etwas Eigenständiges, sondern stets als eine Ansammlung unterschiedlicher, eindeutig lösbarer Aufgabenklassen erlebt. Daher sind die mathematischen Begriffe und Sätze in den ‚Köpfen' der Schüler in einer ‚verkümmerten' Form immer als Bestandteil eines vorgeschriebenen Aufgabentypus abgespeichert und erlangen keine gedankliche Eigenständigkeit, d.h. es existieren keine gedanklichen Kategorien für mathematische Objekte, sondern nur für einzelne Aufgaben(-klassen).

Das AUFGABE-Schema weist im Wesentlichen zwei verfestigte Leerstellen auf: Bestandteile und Zweck. Letzterer verweist auf die Frage ‚Wozu dienen die Aufgaben?'.[103] Ihre Beantwortung ist mit einem relativ konstanten, verfestigten Wert belegt, nämlich dem Zweck der Zensurengebung sowohl in den Übungsphasen als auch in den Tests und Klassenarbeiten. Die Bestandteile-Leerstelle beschreibt, aus welchen Teilen sich eine AUFGABE zusammensetzt. Die Belegung dieser Leerstelle besteht aus zwei Subschemata: AUFGABENSTELLUNG und LÖSUNG. Die beiden Subschemata sind aufgrund einer Teil-Ganzes-Relation in das AUFGABEN-Schema eingebettet und spielen damit die Rolle von ‚Spezialisten' (vgl. Kap. 3.1). Eine AUFGABE ist bezüglich ihrer einzelnen BESTANDTEILE unspezifisch, d.h. die entsprechenden Subschemata weisen einen sehr breiten Wertebereich auf. AUFGABEN niederer Abstraktionsstufe, die im Folgenden als spezifische AUFGABEN bezeichnet werden, sind dagegen bezüglich eines oder beider BESTANDTEILE spezifisch. So ist eine RECHEN-AUFGABE eine spezifische AUFGABE, die sich dadurch auszeichnet, dass es etwas zu berechnen gibt (Einschränkung des Wertebereichs der Aufgabenstellung- und Lösung-Leerstellen). Im Folgenden werden zwei spezifische AUFGABEN unterschieden: FAKTEN- und TRANSFORMATIONSAUFGABEN. Eine FAKTENAUFGABE zeichnet sich dadurch aus, dass sie aufgrund des verbalen Reproduzierens bzw. Aufschreibens eines gelernten Faktums erfolgreich bearbeitet werden kann. AUFGABEN, in denen ein mathematischer Satz oder eine Definition richtig reproduziert werden müssen, sind Beispiele für FAKTENAUFGABEN. In

[103] Leerstellen kann man „als Fragen [auffassen], die sich sinnvoll bezüglich eines Bezugsobjektes stellen lassen" (Ziem 2008, S. 304). Vgl. dazu auch die im Kapitel 3.2.2. getroffene Annahme, dass nicht belegte aktivierte Leerstellen im Leseprozess als offene Fragen des Lesers an den Text interpretiert werden können.

einer TRANSFORMATIONSAUFGABE müssen dagegen gegebene Objekte (Zahlen, Terme, graphische Objekte) zunächst transformiert werden, d.h. es muss etwas berechnet, gezeichnet oder umgeformt werden, um zu einer erwünschten Aufgabenlösung zu gelangen.

Das AUFGABE-Schema ist in der Abbildung 4 veranschaulicht. Die Leerstellen sind als Rechtecke, ihre jeweiligen Belegungen als Ovale dargestellt.

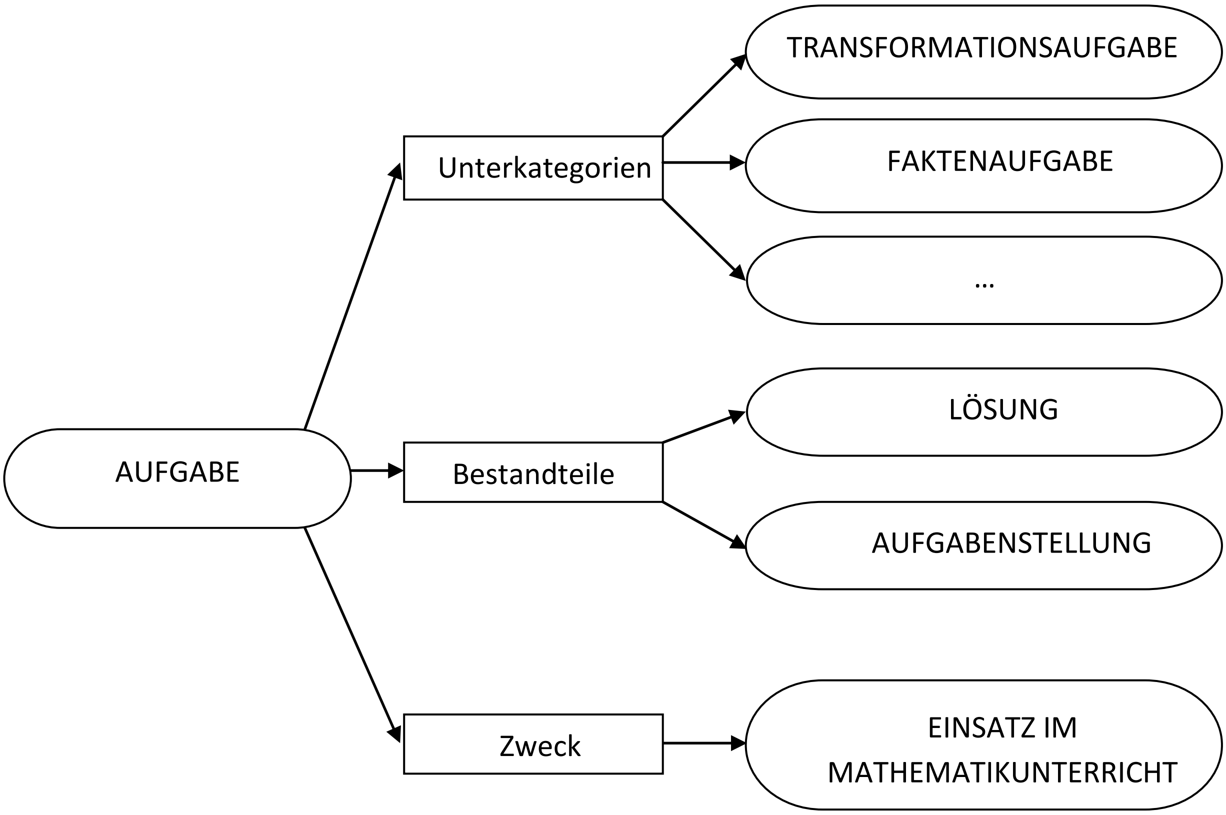


Abbildung 4: Verfestigte Leerstellen und Füllwerte des AUFGABE-Schemas

Die beiden angedeuteten spezifischen AUFGABEN werden nun präzisiert. Da die Leerstellen hierarchiehöherer Schemata sich an die Schemata niederer Abstraktionsstufe vererben, bestehen die spezifischen AUFGABEN ebenfalls aus LÖSUNG und AUFGABENSTELLUNG, allerdings weisen sie unterschiedliche Bestandteile auf. Die LÖSUNG und AUFGABENSTELLUNG einer FAKTENAUFGABE setzt sich damit anders zusammen als die LÖSUNG und AUFGABENSTELLUNG einer TRANSFORMATIONSAUFGABE. Die entsprechenden Belegungen sind in der Tabelle 1 zusammenfassend dargestellt.

Leerstelle	**FAKTENAUFGABE**	**TRANSFORMATIONSAUFGABE**
Bestandteile der AUFGABENSTELLUNG	- FRAGE	- AUSGANGSOBJEKTE - ZIELOBJEKTE - TRANSFORMATIONSART
Bestandteile der LÖSUNG	- ANTWORT	- BEARBEITUNGSSCHRITTE - PRÄSENTATION DER LÖSUNG

Tabelle 1: Belegungen der Bestandteile-**Leerstelle zweier spezifischer AUFGABEN**

Entsprechend vorheriger Erläuterungen besteht eine AUFGABENSTELLUNG einer FAKTEN-AUFGABE aus einer FRAGE,[104] die in weitere Bestandteile unterteilt werden kann; OBJEKTE, die in der FRAGE vorkommen (Dezimalzahl, Kreis, Funktion, Satz des Pythagoras, usw.) und FAKTENART (Definition, Satzangabe, Beweis[105] usw.). Die LÖSUNG einer FAKTENAUFGABE besteht – wie bereits erwähnt – aus einer ANTWORT, die typischerweise kurz ist. Eine TRANSFORMATIONSAUFGABE passt sich dem klassischen Schulmuster ‚gegeben – gesucht' an, ihre AUFGABENSTELLUNG besteht aus dem, was ‚gegebenen' ist (AUSGANGSOBJEKTE), dem, was ‚gesucht' wird (ZIELOBJEKTE) und aus der TRANSFORMATIONSART, d.h. dem Operator, der angibt, was mit den AUSGABENSOBJEKTEN gemacht werden soll (konstruiere, rechne, wandele um, klammere aus usw.). Die LÖSUNG einer TRANSFORMATIONSAUFGABE besteht aus BEARBEITUNGSSCHRITTEN, d.h. den einzelnen Schritten, die notwendig sind, um von den AUSGANGSOBJEKTEN vorschriftsgemäß zu den ZIELOBJEKTEN zu gelangen. Aber nicht nur das Wissen darüber, wie eine AUFGABE zu bearbeiten ist, sondern auch darüber, wie eine erfolgreiche (schriftliche) Aufgabenbearbeitung auszusehen hat, bildet einen typischen Wissensaspekt im Rahmen des TRANSFORMATIONSAUFGABE-Schemas. Aufgrund der untrennbaren Verbundenheit der AUFGABEN mit der schulischen (Bewertungs-)Praxis dürfte das Wissen darüber, welche Bearbeitungsschritte (nicht) aufgeschrieben werden müssen und wie eine Aufgabenbearbeitung (typo-)graphisch zu gestalten ist, für einen Schüler zentral sein. Deshalb wird eine entsprechende verfestigte Leerstelle angenommen; eine LÖSUNG einer TRANSFORMATIONSAUFGABE besteht damit nicht nur aus BE-ARBEITUNGSSCHRITTEN, sondern auch aus der PRÄSENTATION DER LÖSUNG. Bezüglich des BEARBEITUNGSSCHRITTE-Schemas ist anzumerken, dass in seinem Rahmen die Grund-für-die-Geltung-Leerstelle nicht verfestigt ist, da in einem aufgabenorientierten Unterricht die Schüler die Erfahrung, dass Bearbeitungswege begründbar sind, typischerweise nicht machen. Zu beachten ist, dass das AUFGABE-Schema weitere mehr oder weniger verfestigte Leerstellen aufweist, wie beispielsweise Schwierigkeitsgrad einer Aufgabe, zu dieser Aufgabe ähnliche Aufgaben, weitere Lösung(en) usw.

Die Aufgabenobjekte-Leerstelle weist den Standardwert ‚Zeichen ohne ein Bezeichnetes' auf, d.h. typischerweise sind AUFGABENOBJEKTE Symbole, Zeichen, Wörter und Wort-gruppen, mit denen im kognitiven System kein oder ein nicht reichhaltiges BEZEICHNETES verbunden ist. Ein (konkretes) AUFGABENOBJEKT ist damit in der Regel ein recht umfang-armes Schema.

Die einzelnen konkreten AUFGABEN, also mit konkreten Werten belegten AUFGABE-Schemata niederer Abstraktion, werden aufgrund gewisser Gemeinsamkeiten zu spezifischen AUFGABEN wie beispielsweise AUSKLAMMERUNGS-, UMWANDLUNGS-, RECHENAUFGABEN (Zusammenfassung bezüglich einer Gemeinsamkeit der BEARBEITUNGS-

[104] Die Bezeichnung des FRAGE-Schemas soll hier nicht suggerieren, dass es sich bei den AUFGABEN-STELLUNGEN der FAKTENAUFGABEN stets um Fragen im sprachlich-syntaktischen Sinne handelt. Die Aufgabenstellungen können sowohl in einer Frageform (Wie lautet die Definition von…?) oder als Imperativ (Gib die Definition an!) formuliert sein.

[105] Auch Beweise können als FAKTENAUFGABEN aufgefasst werden, wenn sie vorher im Unterricht aufgeschrieben und unverändert in einem Test bzw. in einer Klassenarbeit abgefragt werden.

SCHRITTE) oder auch DEZIMALZAHLENAUFGABEN (Gemeinsamkeit hinsichtlich der AUSGANGS- und ZIELOBJEKTE) usw. mental zusammengefasst. Da ‚offizielle' Bezeichnungen für diese Denkkategorien oft fehlen, erfinden Schüler nicht selten eigene Bezeichnungen, die das Kennzeichnende der jeweiligen Aufgabenklasse begrifflich fassen. Die Verbindungen zwischen den konkreten AUFGABEN sind damit nicht kausaler Natur, sondern bestehen aufgrund der Gleichheit/Ähnlichkeit bestimmter BESTANDTEILE.

Wenn man die Bearbeitung der Transformationsaufgaben als Handlung auffasst, erscheinen die Inhalte des LÖSUNG-Schemas als Handlungsschritte und die Inhalte der AUFGABEN-STELLUNGEN als Bedingungen, unter welchen die entsprechenden Handlungen auszuführen sind. Die Inhalte eines TRANSFORMATIONSAUFGABE-Schemas zeichnen sich also dadurch aus, dass sie primär zum schulmathematischen Handlungswissen zu zählen sind (vgl. Kap. 2.2). Für Wissensinhalte, die nicht ausführbar sind, die also zum konzeptuellen (schulmathematischen) Wissen zu zählen sind, fehlen im Rahmen der TRANSFORMATIONSAUFGABEN die entsprechenden (verfestigten) Leerstellen.

MATHEMATISCHES-ELEMENT-Schema und seine Subschemata

Nunmehr wird das zum AUFGABE-Schema konträre Schema, das sich im genetischen Unterricht ausbildet und verfestigt und das als MATHEMATISCHES-ELEMENT-Schema eingeführt wurde, erläutert.

Die Erfahrungen der Schüler in einem genetischen Unterricht bezüglich des ‚Stoffs' verallgemeinern sich im MATHEMATISCHES-ELEMENT-Schema. Im Vergleich zum AUFGABE-Schema weist ein MATHEMATISCHES-ELEMENT zahlreichere verfestigte Leerstellen auf. Entsprechend der erläuterten typischen Erfahrungen der Schüler können folgende Leerstellen, die bei einem AUFGABE-Schema fehlen, angenommen werden: Motiv(e), benachbarte mathematische Elemente, Anwendungsmöglichkeit(en). Die Motiv(e)-Leerstelle resultiert daraus, dass mathematische Elemente in einem genetischen Unterricht anhand von (zugänglichen) Problemen eingeführt werden. Sie beinhaltet Antwortoptionen auf die Frage ‚Aus welchem Grund wird ein mathematisches Element benötigt?' oder spezifischer formuliert: ‚Welches inner- oder außermathematische Problem bzw. welcher Sachverhalt erfordert die Entwicklung/Einführung eines mathematischen Elements?'. Das heißt, die Motiv-Leerstelle ist typischerweise u.a. mit einem PROBLEM-Schema belegt. Die Benach barte-mathematische-Elemente-Leerstelle resultiert aus der Phase des logischen Ordnens, die dazugehörige Frage lautet: ‚Welche anderen mathematischen Elemente hängen unmittelbar mit einem mathematischen Element zusammen?'. Da im genetischen Unterricht ein mathematisches Element jeweils zur Lösung weiterer Problemstellungen angewendet wird, verfestigt sich auch die entsprechende Anwendungsmöglichkeit(en)-Leerstelle bzw. die Frage ‚Bei welchen außer- und innermathematischen Problemen wird ein mathematisches Element benötigt?'.[106] Diese Leerstelle wird also oft ebenfalls mit einem PROBLEM-Schema

[106] Ein konkretes PROBLEM kann als Wert sowohl der Motiv-, als auch der Anwendungsmöglichkeiten-Leerstelle abgespeichert bzw. interpretiert werden. Die Belegung der Leerstellen ist also oft nicht disjunkt.

belegt. Die Belegung der Zweck-Leerstelle, die ebenfalls zum MATHEMATISCHES-ELEMENT-Schema gehört und Antwortoptionen auf die Frage ‚Wozu dient ein mathematisches Element?' umfasst, ist konstant. Wie bereits erläutert, erschöpft sich die Bedeutung eines MATHEMATISCHEN ELEMENTS nicht im bloßen Vorkommen im Mathematikunterricht, wie dies beim AUFGABE-Schema der Fall ist, sondern sie verwirklicht sich in einem (subjektiven) Erkenntnisgewinn, der daraus resultiert, dass mathematische Elemente als etwas Einsehbares erlebt werden. Folglich wird die verfestigte Zweck-Leerstelle mit ERKENNTNISGEWINN belegt.[107] Des Weiteren weist das MATHEMATISCHES-ELEMENT-Schema die Unterkategorien- und die Bestandteile-Leerstellen auf. Im MATHEMATISCHEN ELEMENT sind drei Subschemata einer abstraktionsniederen Ordnung eingebettet: SATZ, BEGRIFF und VERFAHREN, die alle vom MATHEMATISCHEN ELEMENT ‚vererbten' Leerstellen aufweisen und die zum Teil spezifisch belegt sind. In Abbildung 5 ist das MATHEMATISCHES-ELEMENT-Schema zusammenfassend graphisch dargestellt.

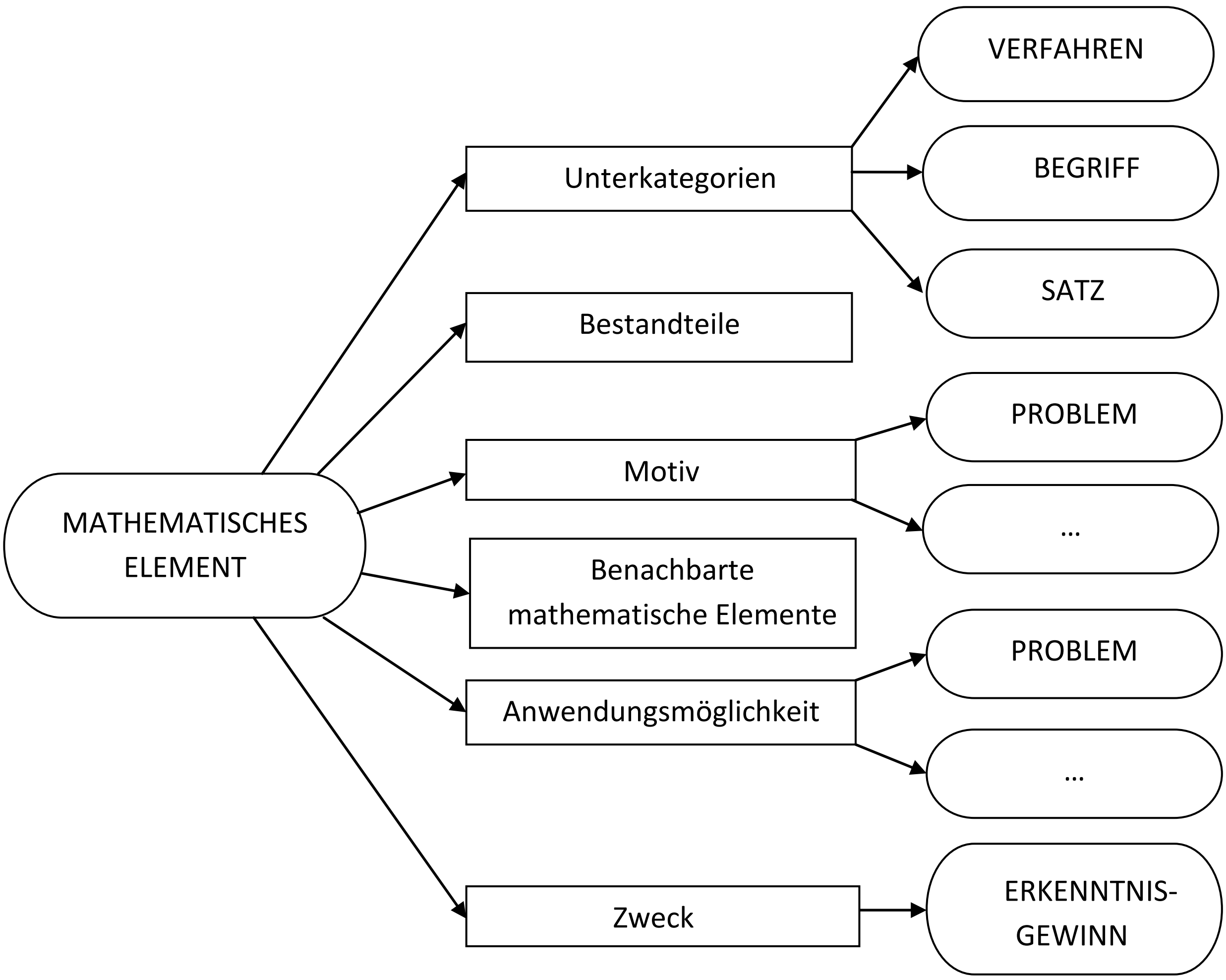


Abbildung 5: Verfestigte Leerstellen und Füllwerte des MATHEMATISCHES-ELEMENT-Schemas

[107] Die abstraktionsniederen, also konkreten MATHEMATISCHEN-ELEMENTE können jedoch einen spezifischeren Zweck aufweisen, wie etwa Alltagsbewältigung, Berufsvorbereitung, usw.

Im Folgenden werden die Subschemata VERFAHREN, BEGRIFF und SATZ erläutert, indem auf die Belegung ihrer Bestandteile-Leerstelle eingegangen wird. Ein SATZ besteht aus einer SATZAUSSAGE, die eine EIGENSCHAFT bestimmter OBJEKTE oder einen ZUSAMMENHANG zwischen bestimmten OBJEKTEN beinhaltet. OBJEKTE können sowohl BEGRIFFE als auch alltägliche (abstrahierte) GEGENSTÄNDE sein. Das Kennzeichnende der SATZOBJEKTE ist, dass sie typischerweise sowohl eine BEZEICHNUNG (Symbol, Wort) als auch – und das im Unterschied zu den AUFGABEOBJEKTEN – das BEZEICHNETE beinhalten. Ein (konkreter) SATZ, der lediglich eine AUSSAGE über eine BEZEICHNUNG, mit der im kognitiven System des Schülers kein BEZEICHNETES verbunden ist, beinhaltet, ist ein untypischer SATZ und wird daher als sinnbeeinträchtigend erlebt. Neben einer SATZAUSSAGE beinhaltet ein SATZ typischerweise auch einen GRUND FÜR SEINE GELTUNG. Dies resultiert daher, dass in einem genetischen Unterricht Mathematik als etwas Einsichtiges erlebt wird und sich dadurch als etwas Einsehbares konstituiert.

Ein VERFAHREN besteht aus VORAUSSETZUNGEN, d.h. SPEZIFISCHEN OBJEKTEN, bei denen das VERFAHREN durchführbar ist. Die OBJEKTE der VERFAHREN sind typischerweise ZEICHEN. Ein weiterer Bestandteil der VERFAHREN ist das ZIEL DES VERFAHRENS. Bei einem konkreten VERFAHREN weiß man bei einer Belegung des ZIELS, was man mit dem Verfahren erreicht. Des Weiteren gehört zu einem Verfahren auch „Wissen, wie es geht“ (Vollrath 2001, S. 52); dieses Wissen ist im Rahmen der VERFAHRENSSCHRITTE abgespeichert. Und schließlich besteht ein VERFAHREN auch aus einem GRUND FÜR DIE GELTUNG DER VERFAHRENSSCHRITTE.

Ein BEGRIFF besteht aus einer BEZEICHNUNG DES BEGRIFFS, die in der Regel eine MATHE-MATISCH-SYMBOLISCHE und eine NATURSPRACHLICHE BEZEICHNUNG umfasst und aus seinen CHARAKTERISTISCHEN MERKMALEN bzw. dem BEZEICHNETEM. Die verfestigten Bestandteile der spezifischen MATHEMATISCHEN ELEMENTE sind in Tabelle 2 zusammengefasst.

BEGRIFF	**SATZ**	**VERFAHREN**
- BEZECHNUNG DES BEGRIFFS - CHARAKTERISTISCHE MERKMALE/BEZEICHNETES	- SATZAUSSAGE - GRUND FÜR DIE GELTUNG DES SATZES	- VORAUSSETZUNGEN - ZIEL - VERFAHRENSSCHRITTE - GRUND FÜR DIE GELTUNG DER VERFAHRENSSCHRITTE

Tabelle 2: Verfestigte Belegungen der Bestandteile-Leerstelle unterschiedlicher MATHEMATISCHER ELEMENTE

In einem unmittelbaren Vergleich zwischen den beiden prototypischen Schemata des schulmathematischen Wissens fällt auf, dass das MATHEMATISCHES-ELEMENT-Schema deutlich reichhaltiger ist, d.h. es weist wesentlich mehr verfestigte Leerstellen auf als das AUFGABE-Schema. Dies resultiert daher, dass im aufgabenorientierten Unterricht die Phasen der problemorientierten Generierung des neuen Stoffs, des Ordnens sowie des Anwendens der Erkenntnisse entfallen, folglich von den Schülern auch keine entsprechenden Erfahrungen gemacht und daher auch keine dazugehörigen Leerstellen ausgebildet werden.

Die Inhalte des MATHEMATISCHES-ELEMENT-Schemas zeichnen sich gegenüber den Inhalten des AUFGABE-Schemas dadurch aus, dass sie hauptsächlich zum konzeptuellen Wissen zuzurechnen sind. Lediglich die Belegung der VERFAHRENSSCHRITTE und der VORAUSSETZUNGEN kann als Handlungswissen betrachtet werden. Alle anderen Füllungen stellen diejenigen kognitiven Inhalte dar, die in der Regel nicht als Handlungen ausführbar sind. Des Weiteren ist im MATHEMATISCHES-ELEMENT-Schema nicht nur das in der Schule erworbene Wissen vorhanden, sondern auch zahlreiche kognitive Inhalte, die eher dem Alltagswissen zugehören. Insbesondere die Anwendungsmöglichkeiten und die Motive, aber auch das Bezeichnete der Objekte eines MATHEMATSCHEN ELEMENTS bilden die ‚Andockorte' für das Alltagswissen. Da diese Leerstellen im AUFGABE-Schema nicht verfestigt sind, sind die Inhalte des AUFGABE-Schemas vom Alltagswissen größtenteils isoliert.

Im Gegensatz zu (konkreten) AUFGABEN sind die einzelnen (konkreten) SÄTZE, VERFAHREN, BEGRIFFE primär nicht aufgrund ihrer Ähnlichkeit/Gleichheit miteinander verknüpft, sondern aufgrund einer ‚inhaltlichen' Verbindung. So kann ein bestimmter SATZ beispielsweise einen anderen SATZ begründen, zu weiteren bestimmten SÄTZEN und VERFAHREN (benachbarte MATHEMATISCHE ELEMENTE) führen und er kann ein (Teil-)Motiv für einen weiteren bzw. ein weiteres SATZ/VERFAHREN/BEGRIFF darstellen. Entsprechende Verbindungen sind nicht nur bezüglich der SÄTZE, sondern auch bezüglich der BEGRIFFE und VERFAHREN vorhanden. Die konkreten MATHEMATISCHEN ELEMENTE füllen also die Leerstellen jeweils anderer MATHEMATISCHER ELEMENTE.

Abschließend wird das PROBLEM-Schema skizziert, da dieses bezüglich der Lehrpotentialanalyse mathematischer Lehrtexte relevant ist. Es wurde erwähnt, dass im genetischen Unterricht Probleme in zahlreichen Phasen des Unterrichts eine Rolle spielen. Aufgrund dieser typischen Erfahrungen wird das entsprechende PROBLEM-Schema ausgebildet. Ein PROBLEM besteht aus einer PROBLEMSTELLUNG und einer PROBLEMBEARBEITUNG, die wiederum aus BEARBEITUNGSSCHRITTEN, einem ERGEBNIS und einem GRUND FÜR DIE GELTUNG DER BEARBEITUNGSSCHRITTE besteht. PROBLEME und MATHEMATISCHE ELEMENTE sind auf eine vielfältige Art und Weise miteinander verwoben. Kognitive Inhalte, die im Rahmen eines PROBLEM-(Sub-)Schemas organisiert sind, sind oft gleichzeitig auch im Rahmen eines MATHEMATISCHES-ELEMENT-(Sub-)Schemas verankert. So ist die Anwendungsmöglichkeit(en)- und die Motiv(e)-Leerstelle eines MATHEMATISCHEN ELEMENTS typischerweise mit einem PROBLEM-(Sub-)-Schema belegbar. Außerdem sind (konkrete) PROBLEMBESTANDTEILE gleichzeitig oft auch als BESTANDTEILE eines (konkreten) MATHEMATISCHEN ELEMENTS verankert. So kann eine Belegung des PROBLEM-BEARBEITUNGSSCHRITTE-Schemas beispielsweise gleichzeitig das VERFAHRENSSCHRITTE-Schema füllen, falls die dazugehörige PROBLEMSTELLUNG allgemein und innermathematisch ist. In anderen Fällen kann eine Belegung der PROBLEMBEARBEITUNGSSCHRITTE beispielsweise gleichzeitig eine SATZAUSSAGE begründen, d.h. die Grund-für-die-Geltung-Leerstelle eines SATZES (teilweise) belegen. Ein PROBLEMERGEBNIS (bzw. seine Belegung) kann gleichzeitig beispielsweise eine SATZAUSSAGE oder CHARAKTERISTISCHE MERKMALE EINES BEGRIFFS darstellen. Des Weiteren sind MATHEMATISCHE ELEMENTE bzw. ihre BESTAND-

TEILE im Rahmen der Grund-für-die-Geltung-der-Bearbeitungsschritte-Leerstelle in einem (konkreten) PROBLEM-Schema eingebettet. Da die Belegungen eines (konkreten) PROBLEM-Schemas oft auch im Rahmen eines (konkreten) MATHEMATISCHES-ELEMENT-Schemas verankert sind, stellen sie in der Regel keine isolierten Einheiten dar.

Das PROBLEM-Schema unterscheidet sich deutlich vom AUFGABE-Schema. Während PROBLEME mit MATHEMATISCHEN ELEMENTEN aufs engste verwoben sind, ist eine AUFGABE in sich geschlossen und weist kaum über sich hinaus. Ihr Zweck besteht nicht darin, etwas zu motivieren, zu entwickeln, zu veranschaulichen, zu begründen oder anzuwenden, vielmehr ist sie Selbstzweck. Das heißt, AUFGABEN sind typischerweise – im Gegensatz zu PROBLEMEN – mit evtl. vorhandenen MATHEMATISCHEN ELEMENTEN kaum verbunden. Damit sind kognitive Inhalte, die im Rahmen des AUFGABE-Schemas organisiert und gespeichert sind, in diesem Schema ‚gefangen' und werden kaum in anderen Schemata verankert. Insbesondere sind die Belegungen der einzelnen AUFGABENLÖSUNGEN – im Gegensatz zu PROBLEMBEARBEITUNGEN – größtenteils lediglich rudimentär miteinander verknüpft. Insofern stellt die ‚Unverknüpftheit' mit MATHEMATISCHEN ELEMENTEN und damit die Isoliertheit der einzelnen AUFGABENLÖSUNGEN ein zentrales Unterscheidungsmerkmal des AUFGABE-Schemas im Vergleich zu einem PROBLEM-Schema dar. Der zweite wesentliche Unterschied betrifft die Einsehbarkeit: AUFGABEN sind im Gegensatz zu PROBLEMEN typischerweise nicht einsehbar. Dies betrifft sowohl die AUFGABENSTELLUNG als auch ihre LÖSUNG. Während eine PROBLEMSTELLUNG für das Subjekt typischerweise zugänglich, einsichtig bzw. sinnhaft ist, stellt eine AUFGABENSTELLUNG eine isolierte und nicht motivierte Frage bzw. Aufforderung dar. Die PROBLEMBEARBEITUNG konstituiert sich ebenfalls – im Gegensatz zu der nicht einsehbaren AUFGABENLÖSUNG – aufgrund ihrer verfestigten Grund-für-die-Geltung-der-Bearbeitungsschritte-Leerstelle als etwas Einsehbares.

‚Reale' Schemata

Aus der Annahme, dass realer Unterricht mehr oder weniger stark ausgeprägte Elemente beider Unterrichtsformen enthält und dass reale Schüler mehr oder weniger oft den Unterrichtsstoff sowohl als eine AUFGABE als auch als ein MATHEMATISCHES ELEMENT erleben, folgt, dass bei den meisten Schülern beide Schematatypen in unterschiedlichem Verfestigungsgrad ausgebildet sind.[108] Daher können manche kognitive Inhalte sowohl in

[108] Es gibt empirische Hinweise darauf, dass das AUFGABE-Schema bei ‚realen' Schülern relativ verfestigt ist. Bauer untersucht die ‚subjektive Deutung der Mathematik' von Schülern einer 11. Klasse, indem er sie fragt ‚Was ist Mathematik?'. Die typischen Schülerantworten können als Indizien des verfestigten AUFGABE-Schemas und des geschwächten MATHEMATISCHES-ELEMENT-Schemas aufgefasst werden. So konstatiert Bauer beispielsweise: „Kreatives Denken, anwendungsbezogenes Denken, umwelterschließendes Problemlösen, autonomes Verhalten mit Freiraum für eigene Entscheidungen – dies sind Aspekte, die den Schülern kaum in den Sinn kommen, wenn sie an Mathematik denken." (Bauer 1988, S. 123). Und weiter: „Die Mathematik ist im Denken der befragten Schüler vorwiegend […] als Ansammlung von Stoffen und von Verhaltensregeln für den schulischen Umgang mit diesen [repräsentiert]" (ebd.). Auch die Nicht-Verknüpftheit individuellen mathematischen Wissens mit der erlebten Wirklichkeit wurde in den Interviews festgestellt: „So darf man wohl davon ausgehen, daß die Mathematik bei den befragten Subjekten oft nur als isolierte, von anderen Erfahrungs- Lebens- und Denkbereichen getrennte kognitive Struktur existiert" (Bauer 1988, S. 124–125).

einem MATHEMATISCHES-ELEMENT-Schema als auch in einem AUFGABE-Schema abgespeichert sein. Beispielsweise kann das Wissen darüber, wie man endliche Dezimalbrüche in gemeine Brüche ‚umwandelt', sowohl als VERFAHRENSSCHRITTE als auch BEARBEITUNS-SCHRITTE spezifischer AUFGABEN abgespeichert sein. Des Weiteren kann angenommen werden, dass die beiden Schematypen (AUFGABE und MATHEMATISCHES ELEMENT) ineinander eingebettet sein können. So ist denkbar, dass ein Schüler beim SATZ DES PYTHAGORAS neben den ‚mathematischen' Wissensaspekten wie der SATZAUSSAGE, einem GRUND FÜR DIE GELTUNG, anderen BENACHBARTEN SÄTZEN (KATHETENSATZ und HÖHEN-SATZ) sowie ANWENDUNGEN DES SATZES in inner- und außermathematischen Problemen auch an spezifische AUFGABEN denkt, die im Rahmen dieser Unterrichtseinheit gestellt und mit Hilfe des SATZES bearbeitet werden können. In diesem Fall kann angenommen werden, dass die spezifische-Aufgaben-Leerstelle im Rahmen eines MATHEMATISCHEN ELEMENTS mehr oder weniger verfestigt ist. SPEZIFISCHE AUFGABEN können also durchaus als Subschemata in einem MATHEMATISCHEN ELEMENT eingebettet sein. Ebenso ist umgekehrt eine Einbettung eines MATHEMATISCHEN ELEMENTS in einer AUFGABE denkbar.

Auf der Grundlage der vollzogenen Konzeptualisierung schulmathematischer Schemata erscheint das Lernen von Schulmathematik als ein Prozess, bei dem im Zuge der Verarbeitung mathematikhaltiger Information AUFGABE- und/oder MATHEMATISCHES ELEMENT-Schemata aktiviert, belegt und verändert werden. Dabei determinieren die Merkmale der jeweils vorliegenden Information sowie der Verfestigungsgrad beider Schematatypen, welches Schema sich als Interpretationsvorlage vorliegender Information durchsetzt und entsprechend verändert wird. Falls die beiden Schemata ungefähr gleich stark verfestigt sind, beeinflussen die Merkmale der dem lernenden Subjekt vorliegenden Information, welches der beiden – oft miteinander konkurrierenden – Schemata ‚siegen' wird; es ist jeweils das Schema, das anhand der vorliegenden Informationsdaten die leichtere Bildung eines möglichst sinnstiftenden Modells ermöglicht. Im Falle eines ungleichen Verfestigungsverhältnisses kann die Information bei der Verarbeitung – wie später noch erläutert wird – ‚verzerrt' werden, d.h. es wird bevorzugt das verfestigte Schema aktiviert und belegt, auch wenn die vorliegende Information im Rahmen des nicht verfestigten Schematyps leichter (durch unkomplizierte kognitive Arbeit) sinnstiftend ausdeutbar ist.

Die vollzogene Konzeption des allgemeinen schulmathematischen Schülerwissens erlaubt nunmehr eine Präzisierung und Vertiefung einzelner Aspekte des Lehrpotentials eines mathematischen Schulbuchlehrtextes. Diese Aspekte stellen gleichzeitig die Lernoptionen dar, die unser Modellschüler in der Aneignung der jeweiligen Inhalte eines Mathematiklehrtextes hat.

5.2. Präzisierung einzelner Größen des Lehrpotentials eines Mathematikschulbuchlehrtextes

Aufgrund der Tatsache, dass bei realen Schülern sowohl das AUFGABE-Schema als auch das MATHEMATISCHES-ELEMENT-Schema in unterschiedlichen Verfestigungsgraden vorhanden sind, wird festgelegt, dass unser Modellschüler ebenfalls über beide Schematatypen verfügt und dass die beiden Schemata in etwa gleich stark verfestigt sind. Im Laufe einer Lehrtext-verarbeitung werden die beiden Schemata konkurrierend aktiviert. In Abhängigkeit von den vorliegenden sprachlichen Textdaten setzt sich ein Schema als die beste Interpretations-vorlage für den Gesamttext durch, wodurch ein möglichst sinnstiftendes (Haupt-)Modell konstruiert wird. Das heißt, es können zwei Arten naheliegender (Haupt-)Modelle in einem mathematischen Schulbuchlehrtext unterschieden werden: das AUFGABE(N)-Modell und das MATHEMATISCHE(S)-ELEMENT(E)-Modell. Ein Mathematikschulbuchlehrtext eröffnet damit eine Bandbreite naheliegender AUFGABE(N)- und/oder MATHEMATISCHE(S)-ELEMENT(E)-Modelle, die mehr oder weniger sinnstiftend sind und entsprechend der allgemeinen Ausführungen jeweils unterschiedliche Schwierigkeitsgrade ihrer Bildung aufweisen.

Die naheliegenden (Haupt-)Modelle korrespondieren mit entsprechenden Lernergebnissen. Mit einem AUFGABE(N)-Modell gehen Verfestigung, Umstrukturierung und Neuentstehung des AUFGABE-Schemas bzw. seiner Subschemata sowie in der Regel eine Schwächung des konkurrierenden MATHEMATISCHES-ELEMENT-Schemas einher. Mit einem MATHEMATISCHE(S)-ELEMENT(E)-Modell gehen entsprechend Verfestigungen, Umstrukturierungen und Neuentstehungen (konkreter) SÄTZE, VERFAHREN UND BEGRIFFE sowie die Schwächung des AUFGABE-Schemas einher. Im Folgenden werden die Struktur der von einem Mathematikschulbuchlehrtext nahegelegten (Haupt-)Modelle sowie die Qualität der entsprechenden nahegelegten Lernergebnisse näher betrachtet.

Präzisierung der Struktur der von einem Mathematikschulbuchlehrtext nahegelegten (Haupt-)Modelle im Rahmen unterschiedlicher Schemata

Die von einem Mathematikschulbuchlehrtext nahegelegten (Haupt-)Modelle sind per Definition möglichst sinnstiftend. Das heißt unter anderem, dass die Struktur aktivierter Leerstellen intakt sein muss, alle Leerstellen müssen also einen sinnvollen Aspekt eines übergeordneten Ganzen bilden (vgl. Kap. 4.1). Wenn das übergeordnete Ganze des Gesamttextes eine (konkrete) AUFGABE oder ein (konkretes) MATHEMATISCHES ELEMENT ist, müssen alle Leerstellen sich auf diese AUFGABE bzw. das MATHEMATISCHE ELEMENT beziehen. So ist beispielsweise folgende Struktur eines naheliegenden Modells bezüglich des genannten Punktes intakt, da jede Leerstelle einen sinnvollen Aspekt eines SATZES bildet.

SATZ

[1] MOTIV
[2] BESTANDTEILE
[3] ANWENDUNGSMÖGLICHKEITEN
[4] BENACHBARTES MATHEMATISCHES ELEMENT

Eine intakte Struktur aktivierter Leerstellen setzt außerdem das Vorhandensein zentraler Leerstellen voraus (vgl. Kap. 4.1 und 3.2.2). Insbesondere ist die Bestandteile-Leerstelle zentral, da sie das übergeordnete Ganze konstituiert; die naheliegenden (Haupt-)Modelle müssen also diese Leerstelle jeweils beinhalten. In Tabelle 3 sind die notwendigen Bestandteile unterschiedlicher naheliegender Modelle zusammenfassend dargestellt. Die Bestandteile-Leerstelle ist jedoch meist nicht die einzige notwendige Leerstelle, in einigen Fällen können aufgrund der ‚Logik' der von einem Lehrtext aktivierten (konkreten) Schemata weitere Leerstellen obligatorisch sein.

Gegenstand des Modells	**Notwendige Leerstellen erster Ordnung**
BEGRIFF	• Bezeichnung • Charakteristische Eigenschaften/das Bezeichnete
SATZ	• Satzaussage • Grund für die Geltung der Satzaussage
VERFAHREN	• Voraussetzungen • Ziel • Verfahrensschritte • Grund für die Geltung der Verfahrensschritte
AUFGABE	• Aufgabenstellung • Lösung

Tabelle 3: Leerstellen intakter schulmathematischer Modelle

Bisher wurden ausschließlich diejenigen naheliegenden Modelle betrachtet, die sich jeweils auf nur einen (!) Gegenstand; auf ein (konkretes) MATHEMATISCHES ELEMENT oder eine (konkrete) AUFGABE beziehen. Allerdings kann auch ein Modell, dessen Gegenstand eine Klasse einzelner Gegenstände ist, bezüglich seiner Struktur intakt sein. Es wurde bereits erwähnt, dass unterschiedliche konkrete AUFGABEN aufgrund der Ähnlichkeit bzw. Gleichheit der einzelnen BESTANDTEILE zu spezifischen AUFGABEN zusammengefasst werden können. Dementsprechend kann der Gegenstand eines naheliegenden (Haupt-)Modells auch spezifische AUFGABEN, also eine Klasse ähnlicher AUFGABEN sein. Die einzelnen konkreten AUFGABEN stellen in diesem Fall Bestandteile der spezifischen AUFGABEN dar. So ist beispielsweise ein DEZIMALZAHLEN-AUFGABEN-Modell, also ein Modell, das ausschließlich aus AUFGABENSTELLUNGEN und LÖSUNGEN mehrerer (konkreter) AUFGABEN besteht, in denen Dezimalzahlen als OBJEKTE vorkommen, bezüglich seiner Struktur intakt.

Kann der Gegenstand eines naheliegenden Modells, also eines Modells mit einer intakten Struktur, auch eine Klasse einzelner (konkreter) MATHEMATISCHER ELEMENTE sein? Anders gefragt: Falls die einzelnen im Lehrtext erwähnten MATHEMATISCHEN ELEMENTE vom Modellschüler nicht als Motive, Anwendungsmöglichkeiten und auch nicht als benachbarte ELEMENTE eines übergeordneten ELEMENTES (SATZES, BEGRIFFS, VERFAHRENS) interpretiert werden können, entstehen dann notwendigerweise unzusammenhängende Modelle, wodurch das Sinnerleben des Modellschülers beeinträchtigt wird oder sind Fälle denkbar, in denen trotz der beschriebenen fehlenden Verbindungen der Gesamttext für den Modellschüler sinnvoll sein kann? Diese Fragen auf einer allgemeinen Ebene zu beantworten, ist kompliziert. In der Regel ist eine Verbindung einzelner (konkreter) SÄTZE, VERFAHREN und/oder BEGRIFFE ausschließlich aufgrund der Gleichheit/Ähnlichkeit ihrer OBJEKTE auf der Grundlage des konzipierten MATHEMATISCHES-ELEMENT-Schemas untypisch und wird daher als sinnbeeinträchtigend erlebt. Wenn der Modellschüler einen Teiltext beispielsweise als ein (neues) VERFAHREN zur Umwandlung der Bruchzahlen in Dezimalbrüche und einen darauffolgenden Teiltext als einen (neuen) SATZ über die Ordnung der Bruchzahlen interpretiert, dann fügen sich diese beiden Modelle nicht zu einem übergeordnetem Modell zusammen, weil einzelne (konkrete) SÄTZE, VERFAHREN und BEGRIFFE eben ein ‚Mehr' an Verbindung aufweisen müssen als nur Ähnlichkeit/Gleichheit ihrer OBJEKTE, um als eine sinnvolle Klasse wahrgenommen zu werden. Es soll jedoch hier nicht ausgeschlossen werden, dass einzelne im Lehrtext vorkommende (konkrete) VERFAHREN, SÄTZE und BEGRIFFE einen noch nicht konzipierten sinnvollen Zusammenhang aufweisen können, so dass der Gegenstand eines bezüglich der Struktur intakten Modells auch eine KLASSE einzelner MATHEMATISCHER ELEMENTE sein kann. Beispielsweise ist ein Modell, das zu einem bestimmten ZIEL alle (!) möglichen VERFAHREN enthält, bezüglich seiner Struktur intakt. Es sind eventuell auch andere Zusammenhänge denkbar. Entscheidend dabei ist, dass das Kennzeichnende der KLASSE, also das Auswahlkriterium einzelner ELEMENTE dem Modellschüler bewusst ist und ihm aufgrund der vorhandenen (fachlichen) Schemata als sinnhaft erscheint. Andernfalls entstehen unzusammenhängende Modelle und das Sinnerleben des Modellschülers ist beeinträchtigt.

Qualität naheliegender Lernergebnisse mathematischer Schulbuchlehrtexte

Zuletzt soll die Kategorie der Qualität naheliegender Lernergebnisse mathematischer Schulbuchlehrtexte präzisiert werden. Als mögliche Qualitätsmaßstäbe wurden auf einer allgemeinen Ebene bereits die ‚Anwendbarkeit' und die ‚fachliche Passung' des erworbenen Wissens bzw. veränderter Schemata erarbeitet (vgl. Kap. 4.1). ‚Richtiges' Wissen wurde dabei als dasjenige betrachtet, das dem fachlichen nicht widerspricht. Wenn nun das fachliche Wissen als normative Folie bezüglich der Qualitätsbestimmung fungiert, dann ist das Konstrukt ‚normatives mathematisches Wissen' zu konkretisieren.

Präzisierung des Qualitätsmaßstabs ‚fachliche Passung'

Normatives mathematisches Wissen ist ein gesellschaftliches, also sozial akzeptiertes und von Experten geteiltes Wissen, wobei die Experten dafür vermutlich weniger die Berufsmathematiker als vielmehr die Mathematikdidaktiker und Lehrer sein dürften. Es ist also ein Wissen, das von diesen gesellschaftlichen Akteuren geteilt wird. Insbesondere unterscheidet es sich recht stark vom ‚fertigen', höchst abstrakten, deduktiv geordneten Wissen der modernen Mathematikwissenschaft. Es beinhaltet sowohl Kenntnisse über den Prozess der Gewinnung mathematischer Erkenntnisse, darüber also, aus welchen Gründen und auf welche Art und Weise sich Menschen mit Mathematik beschäftigen,[109] als auch Kenntnisse über das jeweilige Produkt dieser mathematischen Tätigkeiten. Kennzeichnend für mathematisches (Produkt-)Wissen sind unabhängig von dessen philosophischer Deutung – etwa platonische Ideen, soziale Konstruktionen, naturgesetzlich gegebene Denknotwendigkeiten, abstrahierende Handlungserfahrungen u.a. (vgl. Heymann 1996, S. 214) – die umfangreiche Verwobenheit der mathematischen Sachverhalte (Sätze, Begriffe, Verfahren) mit der erlebten Wirklichkeit,[110] denn sie „ist das Skelett, an das die Mathematik sich festsetzt" (Freudenthal 1973, S. 77), sowie die innermathematische Kohärenz. Letztere meint, dass die einzelnen mathematischen Sachverhalte auf unterschiedlichen Abstraktionsebenen derart geordnet bzw. systematisiert werden können, dass sie eine zusammenhängende Einheit bilden. Die ‚Kohärenz' bzw. die kognitive Einheit der ‚fertigen' modernen Wissenschaftsmathematik stellt im Vergleich zu den anderen Wissenschaftsdisziplinen eine „epistemische Besonderheit" (Heintz 2000, S. 19) dar, die nicht leicht erklärbar ist und nicht nur Mathematiker fasziniert. Die innermathematische Ordnung konstituiert sich jedoch nicht nur auf einer (sehr) hohen Abstraktionsebene, sondern sie ist auch innerhalb der Begriffe und Sätze niederer Abstraktionsgrade herstellbar. Insbesondere kann der Ausgangs- bzw. Zielpunkt der Systematisierung nicht eine Menge von Axiomen sein, sondern der Punkt, „wo man von den Begriffen mit dem bloßen Auge sieht, was sie bedeuten, und von den Sätzen, daß sie wahr sind" (Freudenthal 1973, S. 142). Mathematische Begriffe und Sätze erlauben also oft vielfältiges ‚lokales Ordnen' (vgl. Freudenthal 1973). Die Beziehungshaltigkeit zur erlebten Wirklichkeit und die innermathematische Verwobenheit (Kohärenz) können demzufolge wohl als auszeichnende Wesenszüge des normativen mathematischen (Produkt-)Wissens betrachtet werden.

Wenn Mathematikunterricht allgemeinbildende Ziele verfolgt, wie sie Heymann formuliert hat (im Einzelnen insbesondere Lebensvorbereitung, Stiftung kultureller Kohärenz sowie Weltorientierung [vgl. Heymann 1996]), dann muss von einem qualitativ hochwertigem Lernergebnis gefordert werden, dass das erworbene Wissen dem normativen mathematischen Wissen zumindest nicht widerspricht. Dies bezieht sich zunächst auf die ‚Richtigkeit' des erworbenen mathematischen Wissens, d.h. der einzelnen Wissenselemente (kognitive Inhalte fachlicher Schemata) und ihrer Struktur (Struktur fachlicher Schemata). Aber auch die Adäquatheit des Bildes von Mathematik, also die ‚Richtigkeit' des metamathematischen Wissens, das die Kenntnisse über die Prozesse der Gewinnung mathematischer Erkenntnisse und der ‚Eigenart' des Produkts dieser Tätigkeit beinhaltet, ist ein Qualitätsmaßstab für schulmathematische Lernergebnisse.

[109] Mathematikwissenschaftliche Erkenntnisse entstehen zumeist in Problemzusammenhängen, die innermathematischer und/oder außermathematischer (lebensweltlicher) Natur sind (vgl. beispielsweise Drollinger-Vetter 2011, S. 44–45). So nennt Howson zwei ‚treibende Kräfte hinter der Mathematik': „intellectual challenges and social needs" (Howson 1995, S. 44). Bauer stellt in diesem Zusammenhang zahlreiche, aus normativer Sicht ‚zentrale mathematische Denkprozesse' zusammen (vgl. Bauer 1988, S. 45–53).

[110] Der didaktische Terminus ‚Grundvorstellung', der „fundamentale mathematische Begriffe oder Verfahren und deren Deutungsmöglichkeiten in realen Situationen [charakterisiert]" (Vom Hofe 1995, S. 98) zeugt von dieser Verwobenheit.

Wie bereits ausgeführt wurde, können die von einem mathematischen Schulbuchlehrtext nahegelegten Lernergebnisse in zwei Arten differenziert werden: ‚veränderte AUFGABE(N)' und ‚veränderte(s) MATHEMATISCHE(S) ELEMENT(E)'. Im Folgenden soll die Qualität des Lernergebnisses ‚veränderte AUFGABE(N)' diskutiert werden.

Zur Qualität des Lernergebnisses ‚veränderte AUFGABE(N)'

Ein von einem mathematischen Lehrtext nahegelegtes Lernergebnis, das mit einem AUFGABE(N)-Modell einhergeht, ist in der Regel qualitativ mangelhafter als ein Lernergebnis, das mit einem MATHEMATISCHE(S)-ELEMENT(E)-Modell einhergeht. Es folgt eine Erläuterung und Begründung dieser These.

Das AUFGABEN-Wissen widerspricht zunächst dem normativen mathematischen Wissen, denn das AUFGABE-Schema weist Verknüpfungen (Leerstellen) auf, die nicht adäquat sind. So erscheint eine ausschließliche Verknüpfung einzelner Wissenselemente aufgrund ihrer Gleichheit/Ähnlichkeit als zum fachlichen Wissen unpassend. Eine innermathematische Kohärenz kann auf der Grundlage dieser im Rahmen des AUFGABE-Schemas typischen Verbindung nicht entstehen. Über die mangelhafte Ordnung des AUFGABEN-Wissens hinaus entsprechen die einzelnen Wissenseinheiten bzw. die (Denk-)Kategorien nicht der fachlichen Norm. Mathematische Sätze, Begriffe bzw. Definitionen sowie Verfahren als konstitutive Bestandteile einer mathematischen Theorie finden im Rahmen des AUFGABE-Schemas keine adäquate Entsprechung. AUFGABENOBJEKTE sind im Vergleich zu normativen Wissenseinheiten stark reduziert, verfremdet und verzerrt. Ein BRUCH beispielsweise ist in diesem Schema primär ein ZEICHEN/SYMBOL, das in BRUCH-AUFGABEN vorkommt und dem keine weitere Bedeutung zukommt. Des Weiteren widerspricht die Nicht-Verbundenheit des AUFGABEN-Wissens mit den außerschulischen Wissensbeständen, also auch mit der erlebten Wirklichkeit, dem zweiten Wesenszug des fachlichen Wissens – seiner ‚Verwobenheit mit der Wirklichkeit'. Schließlich ist mit dem AUFGABE-Schema ein verzerrtes Bild von Mathematik verknüpft; denn sie erscheint als eine Ansammlung typischerweise eindeutig regelhaft lösbarer Aufgaben, deren Bearbeitung (von anderen) determiniert und nicht einsehbar ist.

Neben der aus fachlicher Sicht nicht adäquaten Eigenart des AUFGABEN-Wissens begünstigt zusätzlich ein psychologisches Moment die ‚Falschheit' des erworbenen Wissens. Heymann vertritt die These, dass „subjektiv verstandene Mathematik […], als kodifizierbares Wissen, partiell strukturgleich – zumindest aber strukturverwandt – mit Fragmenten der intersubjektiv akzeptierten, offiziellen, ‚objektiven' Mathematik [ist]" (Heymann 1996, S. 214), wobei er mit ‚Verstehen' einen mentalen Prozess, der mit Sinnsuche umschrieben werden kann, bezeichnet. Ein mathematischer Sachverhalt ist subjektiv verstanden, wenn es dem lernenden Subjekt nicht mehr als fremd, sondern als ‚einsichtig', ‚einleuchtend', ‚vernünftig' bzw. als ‚sinnmachend' erscheint. Heymann behauptet nun, dass die „logische Kohärenz der Mathematik […] verhindert, dass das lernende Subjekt bei seinen mathematischen (Re-)Konstruktionen der subjektiven Beliebigkeit verfällt. Das Auftreten von Widersprüchen, (die ‚keinen Sinn machen‘), stellt […] eine Selbstkorrektur des mathematischen Erkenntnisprozesses dar, die nur um den Preis des Verlusts von Verstehen ignoriert werden kann“ (ebd.). Als eine weitreichende Konsequenz dieser Überlegungen stellt Heymann die These auf, dass „das Verstehen von Mathematik [im Prinzip und auf lange Sicht] die ‚Richtigkeit‘ des Verstandenen, die Stimmigkeit der begrifflichen Konstruktion [garantiert]“ (ebd.). Zugespitzt kann diese These wie folgt formuliert werden: Verstandene, also als sinnhaft erlebte Mathematik widerspricht (im Prinzip und auf lange Sicht) nicht dem normativen mathematischen Wissen, da die Unstimmigkeiten/Widersprüche, (die ‚keinen Sinn machen‘), in Verstehensprozessen bemerkbar und daher tendenziell korrigierbar sind. Die entwickelte schematheoretische Grundlage erlaubt eine Differenzierung und Vertiefung dieser Thesen. Das Verstehen von Mathematik im beschriebenen Sinne ist nur im Rahmen des MATHEMATISCHES-ELEMENT-Schemas möglich, denn ein MATHEMATISCHES ELEMENT ist – und dies im Gegensatz zu einer AUFGABE – mental mit den Attributen ‚einsehbar‘ bzw. ‚vernünftig‘ versehen (vgl. die konstante Belegung der Zweck-Leerstelle). Diese Attribute bewirken, dass Verstehensprozesse im Rahmen des MATHEMATISCHES-ELEMENT-Schemas, also auch die Verarbeitung mathematikhaltiger Information, vom ‚natürlichen‘ Bestreben nach Sinn und Einsichtigkeit geleitet werden. Das Verstehen-Wollen bewirkt, dass das lernende Subjekt in seinem ‚Raum des Verstehens‘, d.h. im Rahmen aktivierter (verfestigter) Leerstellen und ihren Belegungen, die von Heymann erwähnten Widersprüche, (die keinen Sinn machen), erkennt und gegebenenfalls korrigiert. Letzteres geschieht durch eine Umorganisation vorhandener MATHEMATISCHER ELEMENTE, so dass das Wissen dem lernenden Subjekt als ‚stimmig‘ erscheint. Das Bemerken der Unstimmigkeiten und ihre Korrektur sind dabei nur möglich, wenn der ‚Raum des Verstehens‘ reichhaltig ist, d.h., wenn das Schema, in dessen Rahmen Mathematik verarbeitet und durchdacht wird, viele verfestigte Leerstellen aufweist. Dies ist beim MATHEMATISCHEN ELEMENT der Fall.

AUFGABEN sind dagegen per se ‚nicht einsichtig‘, ‚nicht einleuchtend‘, ‚unvernünftig‘ bzw. ‚nicht sinnmachend‘ (vgl. den konstanten Wert der Zweck-Leerstelle). Sie besitzen typischerweise keine MOTIVE, keine GRÜNDE FÜR DIE GELTUNG DER BEARBEITUNGSSCHRITTE und keine ANWENDUNGSMÖGLICHKEITEN und stellen damit spezifische Entitäten dar, die den ‚natürlichen‘ Denkkategorien – falls man solche annehmen möchte – widersprechen. Das AUFGABE-Schema ist daher ein Denkrahmen, der das ‚natürliche‘ Bestreben nach Einsichtigkeit und Sinn außer Kraft setzt. Die Nichteinsichtigkeit als auszeichnendes Attribut der AUFGABEN hat die logische Folge, dass in entsprechenden Verstehensprozessen bzw. Informationsverarbeitungsprozessen eventuelle Widersprüche bzw. Unstimmigkeiten kaum auftreten können. Anhand welcher Kriterien soll man die ‚Sinnhaftigkeit‘, die ‚Richtigkeit‘ bzw. die ‚Wahrheit‘ von etwas beurteilen und durchdenken, wenn es per se auf der Voraussetzung der Nicht-Einsichtigkeit und der Sinnlosigkeit basiert? Notwendigerweise können hier lediglich externe Autoritäten wie Lehrer und Schulbuchautoren sowie die hinter ihnen stehenden anonymen Mathematiker bzw. die ‚objektive und wahre‘ Mathematik selbst als einzige und einzig mögliche Garanten für die Richtigkeit der AUFGABEN fungieren.

Des Weiteren ist – wie bereits angemerkt – für das Erkennen eines Widerspruchs ein relativ reichhaltiges Schema notwendig. Da das AUFGABE-Schema aber nur wenige verfestigte Leerstellen aufweist, sind in seinem Rahmen von vornherein nur wenige Leerstellen und entsprechend nur wenige Belegungen aktivierbar und mit der vorliegenden Information verknüpfbar, so dass der vorhandene ‚Raum des Verstehens' zum Bemerken eventueller Unstimmigkeiten nicht ausreicht. In Denkprozessen, die im Rahmen des AUFGABE-Schemas ablaufen, fehlen also größtenteils die von Heymann erwähnten und im Rahmen des MATHEMATISCHES-ELEMENT-Schemas möglichen Selbstkorrekturen. Das Nicht-Bemerken von Unstimmigkeiten bzw. Widersprüchen, also das Fehlen der Selbstkorrektur des mathematischen Erkenntnisprozesses, versperrt den Weg zu einer ‚stimmigen' Umorganisation des Wissens. In dem Moment, in dem ein Schüler die Sinnlosigkeit und Nicht-Einsichtigkeit der AUGABEN akzeptiert, fällt ihm das Nicht-Verstehen der im Unterricht dargestellten Mathematik auch nicht mehr auf, es wird ihm als Nicht-Verstehen nicht bewusst. Er hat vielmehr durchaus das Gefühl, die vorliegende Information verstanden zu haben und erlebt sie als sinnhaft – allerdings in einem (sinnlosen) AUFGABEN-Kontext. Folglich verzichtet er auf ein weiteres Durchdenken bzw. Verarbeiten vorliegender Informationen und damit auf eine eventuelle Korrektur von etwas ‚Falschem'. Die weitreichende Konsequenz ist, dass das vom Lernenden erworbene (AUFGABEN-)Wissen in einem nahezu beliebig großen Maße von der fachlichen Norm abweichen kann. Das AUFGABE-Schema eröffnet damit einen Raum, in dem ‚Falschheiten' nahezu uneingeschränkt und vom Subjekt unbemerkt vorhanden sein können.[111]

Übertragen auf mathematische Schulbuchlehrtexte bedeutet das, dass ein vollständiges und subsumtives AUFGABE(N)-Modell, das im Zuge einer Lehrtextverarbeitung konstruiert wird, von einem Schüler trotz fehlender Einsicht in die dargestellten Sachverhalte – wie etwa die Objekte der Aufgaben, die Begründungen der Bearbeitungsschritte und die Motive einer Aufgabenstellung – als sinnstiftend erlebt wird. Für diesen durchaus verstehen-wollenden Schüler gibt es keinerlei offensichtlichen Anlass für eine weitere Verarbeitung im Sinne weiterführender Elaborationen und gegebenenfalls mentaler Korrekturen des konstruierten Modells. Ein schulmathematischer Lehrtext wird in diesem Fall als subjektiv verstanden bzw. als sinnstiftend erlebt. Diese Sinnstiftung findet jedoch in einem durch das AUFGABE-Schema von vornherein als sinnlos determiniertem Rahmen/Schema statt, die AUFGABEN sind für den Lernenden auf einer textübergeordneten Ebene stets fremd und bleiben mit seinem ‚natürlichen' Denken unverbunden.

Folglich ist das AUFGABEN-Wissen auch bezüglich seiner ‚Anwendbarkeit' mangelhaft. Aufgrund der reduzierten Verbundenheit einzelner (konkreter) AUFGABEN untereinander, der Isoliertheit der Inhalte des AUFGABE-Schemas vom Alltagswissen sowie der von vornherein determinierten ‚Sinnlosigkeit' der AUFGABEN wird das Behalten dieser Inhalte erschwert. Außerdem ist dieses Wissen aufgrund der Nichtreichhaltigkeit des Schemas nur in

[111] Aus dieser Perspektive erscheinen zahlreiche schwerwiegende und robuste Fehler der Schüler im Mathematikunterricht erklärbar.

wenigen Anforderungssituationen aktivierbar, nämlich dann, wenn sich Umweltdaten einer bekannten Aufgabenstellung gleichen oder ähnlich sind. Dies dürfte in der außerschulischen Realität nur selten der Fall sein, so dass das AUFGABEN-Wissen in unterrichtsfernen Anforderungssituationen ebenso selten aktivier- und anwendbar ist. Es ist in dieser Hinsicht ‚totes Wissen' (vgl. Kap. 4.1). Aber auch in schulischen Anforderungssituationen ist dieses Wissen bei neuartigen Aufgaben nicht anwendbar, denn um AUFGABEN-Wissen in neuartigen Aufgabenkontexten nutzen zu können, muss es weitergedacht werden, wozu Verknüpfungen mit anderen kognitiven Inhalten (mathematischer Natur) erforderlich sind. Die BEARBEITUNGSSCHRITTE können aber im Rahmen des AUFGABE-Schemas nur beschränkt weitergedacht werden, da das gesamte Schema wenige Leerstellen aufweist und daher wenige weitere kognitive Inhalte aktivierbar und anknüpfbar sind. Vielmehr müssen die BEARBEITUNSSCHRITTE, um weitergedacht zu werden, als von konkreten AUFGABENSTELLUNGEN losgelöste Verfahren oder als Zusammenhänge zwischen mathematischen Objekten, d.h. als MATHEMATISCHE ELEMENTE betrachtet werden. Falls jedoch das MATHEMATISCHES-ELEMENT-Schema nicht oder nur sehr schwach ausgeprägt ist, ist das Anwenden des AUFGABEN-Wissens in neuartigen Anwendungssituationen kaum möglich.

Schließlich hat ein verfestigtes AUFGABE-Schema weitreichende Folgen bezüglich nachfolgender Lernprozesse, denn es ‚verzerrt' vorliegende mathematikhaltige Informationen, indem es die Aufmerksamkeit und die Inferenzbildung in einer typischen Weise steuert (vgl. Kap. 3.1). Ein aufgabenorientierter Schüler ist bestrebt, die zentralen Leerstellen des AUFGABE-Schemas, also die AUFGABENSTELLUNG und die LÖSUNG zu belegen. Folglich konzentriert er sich primär auf die Informationen, die jeweils als AUFGABENSTELLUNG und als LÖSUNG interpretierbar sind. Weiterreichenden Informationen wird demgegenüber weniger Aufmerksamkeit geschenkt und sie werden nicht oder nur oberflächlich verarbeitet. Insbesondere wird diejenige Information, die sich weder als ein Aspekt noch als ein Bestandteil einer AUFGABE interpretieren lässt, von einem aufgabenorientierten Schüler als sinnlos empfunden und daher höchstens oberflächlich verarbeitet.

Des Weiteren determiniert das verfestigte Schema die Interpretation vorliegender Informationen. Auch wenn die sprachlichen Daten derart vorliegen, dass eine sinnstiftende Interpretation im Rahmen des MATHEMATISCHES-ELEMENT-Schemas leicht(er) ist, also weniger mentale Arbeit erfordert, versucht ein aufgabenorientierter Schüler unter Hinzunahme zusätzlicher mentaler Arbeit der Information AUFGABENSTELLUNGEN und LÖSUNGEN zu ‚entlocken'. Wenn beispielsweise ein Lehrer im Rahmen einer Einführung der Dezimalzahlen folgenden Satz mitteilt: ‚Bruchzahlen sind in Dezimalzahlen umwandelbar', dann interpretiert ein aufgabenorientierter Schüler diese Information nicht als einen mathematischen SATZ, sondern als eine AUFGABENSTELLUNG und bildet folgenden kognitiven Inhalt: ‚Nun kommen Aufgaben, in denen Bruchzahlen (AUSGANGSOBJEKTE) in Dezimalbrüche (ZIELOBJEKTE) umgewandelt (TRANSFORMATIONSART) werden sollen'. Dabei wird primär die SYMBOLISCHE DARSTELLUNG der AUFGABENOBJEKTE und nicht ihr (inhaltlich) BEZEICHNETES, wie etwa ‚(spezifische) Anteile', aktiviert, denn es gehört ja gerade zur Typik der AUFGABE, dass SYMBOLE ohne ein BEZEICHNETES transformiert werden. Nachfolgend erwartet der Schüler ausschließlich die Bearbeitungsschritte und nicht etwa ein Motiv oder eine Anwendungsmöglichkeit für die AUFGABE; auch eine Begründung der Geltung der BEARBEITUNGSSCHRITTE wird nicht erwartet. Entsprechende Leerstellen/Fragen werden also nicht aktiviert/gestellt und sie werden folglich auch nicht selbstständig elaboriert bzw. durchdacht.

Zur Qualität des Lernergebnisses im Rahmen des MATHEMATISCHE-ELEMENT-Schemas

Kontrastierend zu den eben angestellten Überlegungen soll nunmehr der Verarbeitungsprozess eines mathematikorientierten Schülers, der über kein oder ein höchstens schwach ausgebildetes AUFGABE-Schema verfügt, skizziert werden. Er verarbeitet mathematikhaltige Information also ausschließlich im Rahmen des MATHEMATISCHES-ELEMENT-Schemas. Dabei steuern die verfestigten Leerstellen, insbesondere die Bestandteile-Leerstelle seine Aufmerksamkeit sowie die Inferenz- und Elaborationsbildung. Der oben von einer Lehrperson ausgesprochene Satz: ‚Bruchzahlen sind in Dezimalzahlen umwandelbar‘ wird von ihm als eine EIGENSCHAFT DER BRUCHZAHLEN, also als eine SATZAUSSAGE interpretiert. Dabei wird das BEZEICHNETE der BRUCHZAHLEN, also beispielsweise ANTEILE aktiviert, denn die OBJEKTE mathematischer SÄTZE sind typischerweise keine SYMBOLE, sondern GEGENSTÄNDE bzw. BEGRIFFE. (Man beachte, dass sich ein aufgabenorientierter Schüler diese kognitiven Inhalte nicht aneignet.) Aufgrund der Aktivierung des SATZ-Schemas wird bei einem mathematikorientierten Schüler auch der zweite Bestandteil GRUND FÜR DIE GELTUNG DES SATZES aktiviert, d.h. der Schüler erwartet eine entsprechende Information. Falls diese nicht vorliegt, steht er vor einer offenen Frage, die er gegebenenfalls selbstständig anhand seines Vorwissens zu beantworten versucht. Darüber hinaus werden auch weitere Leerstellen, wie Motiv und Anwendungsmöglichkeiten aktiviert und gegebenenfalls durchdacht. Aber auch solche Informationen, die recht deutlich eine Aufgabenbearbeitung thematisieren, also eher zu einem AUFGABE-Schema passen, werden von einem mathematikorientierten Schüler als ein SATZ, BEGRIFF oder VERFAHREN interpretiert. Wenn beispielsweise im Unterricht erklärt wird, wie man Brüche in einen Dezimalbruch umwandelt, dann interpretiert der Schüler diesen Sachverhalt nicht als BEARBEITUNGS-SCHRITTE einer AUFGABE, sondern als ein VERFAHREN. Gleichzeitig schlussfolgert er, dass (bestimmte) Bruchzahlen in Dezimalzahlen umwandelbar sind (BENACHBARTER SATZ), sucht nach GRÜNDEN FÜR DIE GELTUNG DER VERFAHRENSSCHRITTE und denkt über die VORAUS-SETZUNGEN DES VERFAHRENS nach, also darüber, welche Bruchzahlen unter welchen Umständen umwandelbar sind und welche nicht.

Insgesamt sollte bis hierher deutlich geworden sein, dass sich die Verarbeitung gleicher Informationen durch einen aufgabenorientierten und einen mathematikorientierten Lernenden hinsichtlich aktivierter (offener) Leerstellen, konstruierter kognitiver Inhalte, also auch hinsichtlich vollzogener Inferenzen und Elaborationen gravierend unterscheidet. Dementsprechend unterscheidet sich auch das erworbene Wissen, also die Lernergebnisse beider Schüler.

Zusammenfassend kann festgehalten werden, dass beim Lernen von Schulmathematik im Allgemeinen und beim Lernen aus Mathematikschulbuchlehrtexten im Konkreten ein verändertes AUFGABE-Schema im Vergleich zu einem veränderten MATHEMATISCHES-ELEMENT-Schema in der Regel mit einem qualitativ geringwertigeren Lernergebnis verbunden ist. Das veränderte AUFGABE-Schema widerspricht aufgrund der Wissenseinheiten und ihrer Organisiertheit der fachlichen Norm, es erscheint dem Lernenden als fremd und nicht einsichtig und führt zu einem vom Lernenden selbst nicht bemerktem Nicht-Verstehen der Mathematik, wodurch der Weg zu einer (Selbst-)Korrektur des erworbenen Wissens versperrt und folglich eine nahezu beliebige Abweichung von der fachlichen Norm ermöglicht wird. Des Weiteren geht ein verfestigtes AUFGABE-Schema mit einem nicht adäquaten Bild von Mathematik einher; sie erscheint im Wesentlichen als eine Ansammlung stets eindeutig lösbarer Aufgaben, wobei die Richtigkeit der Lösungsschritte auf der Autorität (von Lehrpersonen und Mathematikern) und nicht auf Einsichtigkeit beruht. Darüber hinaus beeinträchtigt ein verfestigtes AUFGABE-Schema die nachfolgenden Lernprozesse gravierend, denn es ‚verzerrt' vorliegende mathematikhaltige Informationen und versperrt mathematikhaltige Inferenzen und Elaborationen. Schließlich ist das AUFGABEN-Wissen auch aus pädagogisch-psychologischer Sicht mangelhaft, weil es aufgrund der Nicht-Einsichtigkeit und Isoliertheit von anderen Wissensbeständen kaum angewendet werden kann.

An dieser Stelle sei im Rückblick auf die oben angestellten Überlegungen auf einen weiteren Unterschied zwischen dem aus einem Lehrtext erworbenen mechanischen Wissen einerseits und einem erworbenen AUFGABEN-Wissen andererseits verwiesen. Beim mechanischen Wissen, das ebenfalls eine sehr geringe Qualität aufweist, ist ein lernendes Subjekt im Prinzip in der Lage, sich seines Unverständnisses gewahr zu werden und unter Anwendung erhöhter kognitiver Arbeit die oberflächlich verarbeiteten sprachlichen Einheiten tief zu verarbeiten. Beim Verarbeiten eines Lehrtextes im Rahmen des (verfestigten) AUFGABE-Schemas kann – wie eben erläutert – das eigene Nicht-Verstehen (der Mathematik) einem Schüler kaum bewusst werden und folglich im Gegensatz zum mechanisch erworbenen Wissen auch nicht korrigiert werden.

Nachdem nunmehr alle für diese Untersuchung notwendigen Aspekte des Lehrpotentials eines mathematischen Schulbuchlehrtextes präzisiert und erläutert wurden, wird das entwickelte theoretische und analytische Instrumentarium erstmals empirisch erprobt.

5.3. Analyse des Lehrpotentials eines ‚Kastens‘

Die anstehende Analyse dient vorrangig einer Veranschaulichung des methodischen Vorgehens und einem ersten Test der entwickelten analytisch-theoretischen Instrumente. Für diese Zielsetzung eignet sich insbesondere ein kurzer Lehrtext, also ein ‚Kasten‘ (vgl. Kap 2.1.). Der Text stammt aus dem Schulbuch ‚Mathematik 6‘ vom Westermann Verlag (Liebau et al. 2004, S. 42) und ist in der Abbildung 6 dargestellt. Bei der Darstellung der Analyse orientiere ich mich an dem in Kapitel 4.2 entwickelten Leitfaden.

Dezimalbrüche

Einen Bruch mit dem Nenner 10, 100, 1000, … kann man als Dezimalbruch schreiben.		
$\frac{5}{10} = 0{,}5$	$\frac{56}{100} = 0{,}56$ $\quad \frac{3}{100} = 0{,}03$	$\frac{307}{1000} = 0{,}307$ $\quad \frac{8}{1000} = 0{,}008$
$1\frac{7}{10} = 1{,}7$ $\quad \frac{23}{10} = 2{,}3$	$2\frac{11}{100} = 2{,}11$ $\quad \frac{416}{100} = 4{,}16$	$2\frac{455}{1000} = 2{,}455$ $\quad \frac{3218}{1000} = 3{,}218$

Abbildung 6: Kasten ‚Dezimalbrüche‘ im Schulbuch ‚Mathematik 6‘ (Liebau et al. 2004, S. 42)

I. Skizze des konkreten relevanten fachlichen Vorwissens des Modellschülers

Das relevante fachliche Vorwissen des Modellschülers wird auf der Grundlage der dem ‚Kasten‘ vorangegangene Inhalte des Schulbuchs skizziert. Der Text gehört zum Unterkapitel ‚Dezimalbrüche‘, welches in das übergreifende Kapitel ‚Gebrochene Zahlen‘ eingebettet ist. Die vorhergehenden Unterkapitel sind laut Inhaltsverzeichnis:

- Bruchteile
- Bruchteile von Größen
- Erweitern und Kürzen.

Der vorliegende ‚Kasten‘ markiert die erste Stelle des Schulbuches, in der der Begriff ‚Dezimalbruch‘ auftaucht. Die zentralen Referenzträger des Textes sind die in den vorherigen Kapiteln behandelte Begriffe ‚Bruch‘ und ‚Nenner‘. Brüche wurden im Kapitel ‚Bruchteile‘ als „Bezeichnungen für Bruchteile“ eingeführt. Dabei gibt der Nenner eines Bruches an, „in wie viele gleich große Teile das Ganze eingeteilt wurde“ (Liebau et al. 2004, S. 39), der Zähler gibt an, „wie viele Teile genommen werden“ (ebd.; vgl. Anhang Abb. 1). Die Kenntnisse der nachfolgenden beiden Unterkapitel sind in Bezug auf den zu analysierenden Kasten von untergeordneter Bedeutung und werden daher an dieser Stelle nicht beschrieben.

Es kann damit angenommen werden, dass der Modellschüler über den BEGRIFF ‚Bruch‘ verfügt, d.h. er hat ein (abstraktes) BRUCH-Schema ausgebildet, das einen spezifischen BEGRIFF darstellt. In der folgenden graphischen Darstellung wird dieses Schema verkürzt angedeutet, indem die zentralen verfestigten Leerstellen und ihre Belegungen skizziert werden.

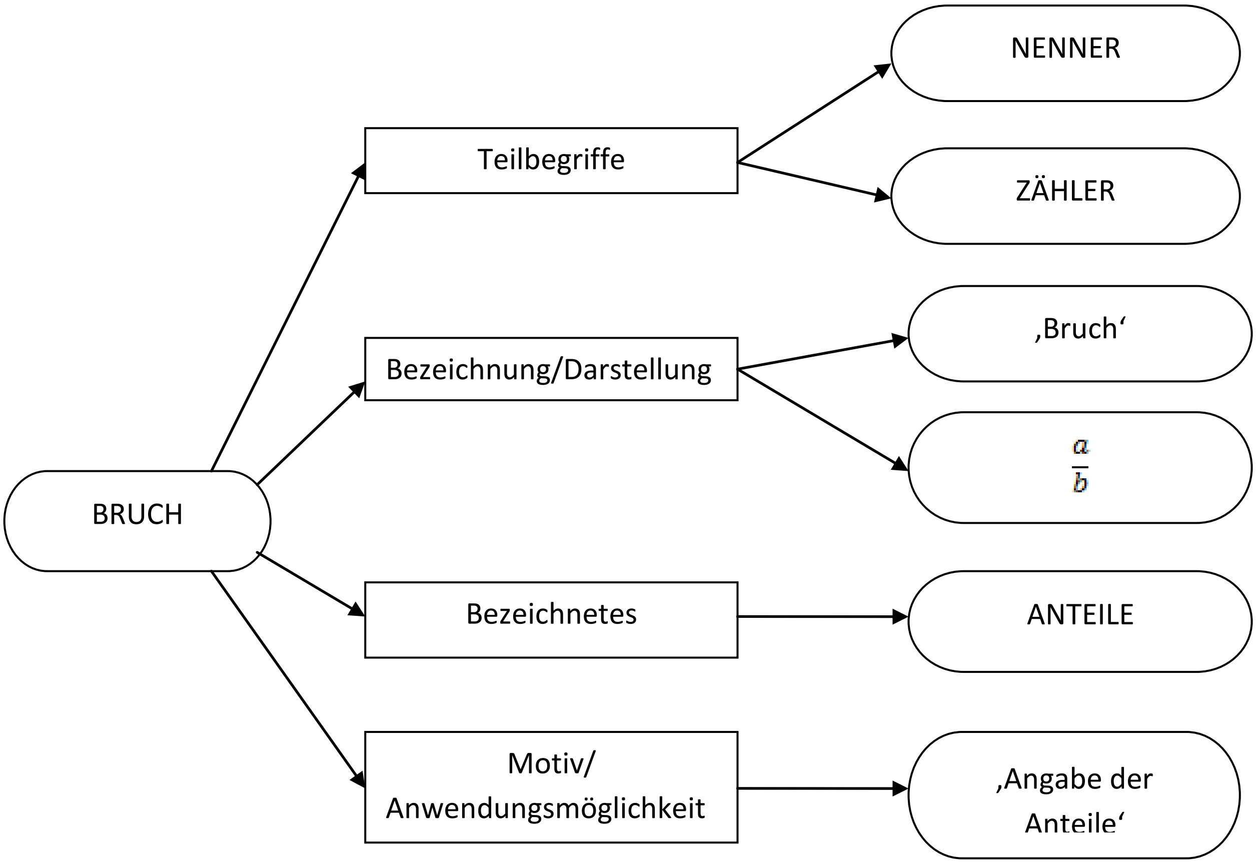


Abbildung 7: BRUCH-Schema des Modellschülers im Rahmen des Schulbuchs ‚Mathematik 6'

BRUCH-Schema des Modellschülers im Rahmen des Schulbuchs ‚Mathematik 6'BRUCH ist also ein (spezifischer) BEGRIFF, der symbolisch in Form zweier untereinander angeordneter und mit einem Strich getrennter natürlicher Zahlen dargestellt wird. Das Bezeichnete der BRÜCHE sind BRUCHTEILE bzw. ANTEILE, wobei Letzteres ein Schema des Alltagswissens ist und das Wissen über die Unterteilung von Ganzheiten in Teile beinhaltet. Des Weiteren besteht ein BRUCH aus einem NENNER und einem ZÄHLER (Teilbegriffe). Das entsprechende NENNER-Schema ist verkürzt in Abbildung 8 angedeutet. Das ZÄHLER-Schema ist entsprechend zu denken.

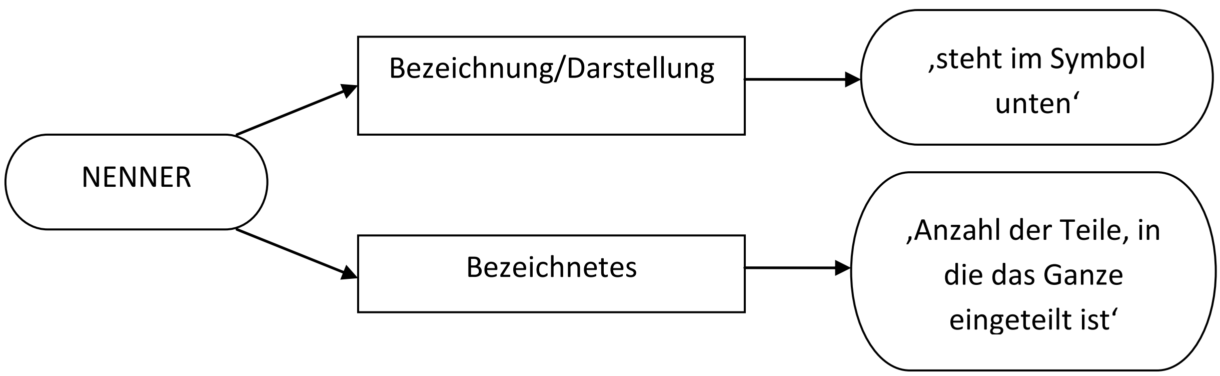


Abbildung 8: NENNER-Schema des Modellschülers im Rahmen des Schulbuchs ‚Mathematik 6'

Über welche Kenntnisse in Bezug auf Dezimalbrüche verfügt der Modellschüler? Oder anders gefragt: Über welche Kenntnisse in Bezug auf Dezimalbrüche verfügen (die meisten) Schüler einer 6. Jahrgangsstufe vor (!) einer systematischen Behandlung dieser Thematik im Unterricht? Hierzu liefert Padberg einige Hinweise; er führte eine empirische Untersuchung durch, in der die Dezimalbruchkenntnisse von 165 Schülern zu Beginn des 6. Schuljahres, also vor einer systematischen Behandlung der Dezimalbrüche im Unterricht, diagnostiziert wurden (vgl. (Padberg 2004). Padberg stellt fest, dass Schüler relativ sicher (alltägliche) konkrete Dezimalzahlen als Maßzahlen von Größen beherrschen, so dass sie entsprechende Längen-, Gewicht- und Geldangaben richtig interpretieren können. Sie haben beispielsweise eine Vorstellung davon, was 3,45€ oder 45,5kg bedeuten. Allerdings ist die Mehrheit der Schüler nicht in der Lage, einen (konkreten) abstrakten Dezimalbruch, also einen Dezimalbruch ohne eine Größeneinheit, zu erklären, zu veranschaulichen oder mit anderen Dezimalbrüchen zu vergleichen. Unter (konkreten) abstrakten Dezimalzahlen kann die Mehrheit der Schüler sich nichts vorstellen. Diese Schwierigkeiten treten auch bei einem sehr einfachen, alltäglichen Dezimalbruch wie 0,5 auf. Padberg schreibt diesbezüglich:

„Die weit überwiegende Mehrzahl der untersuchten Schülerinnen und Schüler verbindet […] Dezimalbrüche noch ganz fest mit konkreten Größeneinheiten und kann daher mit 0,5 ohne Größeneinheit nichts anfangen.“ (Padberg 2004, S. 42)

Ausgehend von diesen Befunden wird angenommen, dass der Modellschüler bislang nur zu einigen konkreten (alltäglichen) Dezimalzahlen in Verbindung mit Größeneinheiten eine Vorstellung entwickelt hat. Dezimalbrüche ohne Größeneinheiten, wie beispielsweise 0,5, 4,67 usw. sind für ihn (noch) bedeutungslose SYMBOLE, mit denen er kein BEZEICHNETES verbindet, es sei denn, er denkt diese Zahlen als Maßzahlen konkreter Größen, wie beispielsweise 0,5cm. Das heißt, ein abstraktes (konkretes) DEZIMALBRUCH-Schema ist beim Modellschüler kaum ausgebildet, insbesondere ist die Bezeichnetes-Leerstelle nicht belegt, d.h. sie weist keinen Wertebereich auf.

II. Beschreibung formaler sprachlicher Merkmale des ‚Kastens‘

Der Text besteht aus einem natursprachlichen Satz (Ausdruck 1) und einem recht umfangreichen formal-mathematischen Teiltext, der 11 Gleichungen enthält (vgl. Abb. 9).

1 Einen Bruch mit dem Nenner 10, 100, 1000, … kann man als Dezimalbruch schreiben.		
2 $\frac{5}{10} = 0{,}5$	5 $\frac{56}{100} = 0{,}56$ 6 $\frac{3}{100} = 0{,}03$	9 $\frac{307}{1000} = 0{,}307$ 10 $\frac{8}{1000} = 0{,}008$
3 $1\frac{7}{10} = 1{,}7$ 4 $\frac{23}{10} = 2{,}3$	7 $2\frac{11}{100} = 2{,}11$ 8 $\frac{416}{100} = 4{,}16$	11 $2\frac{455}{1000} = 2{,}455$ 12 $\frac{3218}{1000} = 3{,}218$

Abbildung 9: Kasten ‚Dezimalbrüche‘ mit durchnummerierten sprachlichen Einheiten (Liebau et al. 2004, S. 42)

Die Gleichungen zwischen einem Bruch mit Nenner 10, 100, 1000 und zugehöriger Dezimalschreibweise sind graphisch in drei Gruppen unterteilt. In der ersten Gruppe befinden sich Brüche mit dem Nenner 10 (Ausdrücke 2-4), in der zweiten mit dem Nenner 100 (Ausdrücke 5-8) und in der dritten mit dem Nenner 1000 (Ausdrücke 9-12). Der natursprachliche Satz trifft eine Aussage über ‚einen Bruch mit dem Nenner 10, 100, 1000,…'. Über diesen Satzgegenstand wird ausgesagt, dass man ihn „als Dezimalbruch schreiben" kann.[112]

Entsprechend der Modalität der Textdaten sowie der typographischen Gestaltung wird der Gesamttext in zwei Teiltexte eingeteilt: Teiltext 1 beinhaltet den ersten Satz (Ausdruck 1), Teiltext 2 die Gleichungen, also die Ausdrücke 2 bis 12.

III. Beschreibung naheliegender Modelle und naheliegender Lernergebnisse

Insgesamt legt der Text folgende Modelle nahe: SATZ, VERFAHREN, BEGRIFF und TRANSFORMATIONSAUFGABE. Zunächst werden sie und die damit einhergehende Lernergebnisse beschrieben.

III. 1) Beschreibung des naheliegenden SATZ-Modells und des entsprechenden Lernergebnisses

III. 1a) Beschreibung der Charakteristik des SATZ-Modells

Aufgrund der Syntax des natursprachlichen Satzes liegt eine Interpretation im Rahmen eines SATZES über ‚Brüche mit dem Nenner 10, 100, 1000,…' nahe. Die SATZAUSSAGE kann in etwa wie folgt angegeben werden „Ein Bruch mit dem Nenner 10, 100, 1000,… ist als Dezimalbruch schreibbar". Teiltext 1 wird dabei als eine allgemeine SATZAUSSAGE interpretiert, Teiltext 2 konkretisiert diese. Der SATZ enthält eine neue Beziehung (schreibbar sein) zwischen BRÜCHEN MIT DEM NENNER 10, 100, 1000, … (ZEHNERBRÜCHE) und DEZIMALBRÜCHEN. Allerdings entstehen bezüglich der SATZOBJEKTE offene Fragen, nämlich nach ihrem jeweils Bezeichneten. Denn ohne ein BEZEICHNETES entsteht lediglich die AUSSAGE, dass bestimmte Symbole, nämlich solche, bei denen über dem Strich eine natürliche Zahl steht und unter dem Strich eine Eins mit Nullen, als andere Symbole (Ziffern mit einem Komma) schreibbar sind, was kein typischer und daher für den Modellschüler kein sinnvoller SATZ ist. Denn warum sollte man eine neue Schreibform für bereits vorhandene Symbole einführen? Des Weiteren wird das Bedürfnis nach einer Begründung des SATZES geweckt. Der ‚Kasten' enthält aber keine Textdaten, die als Belegungen dieser aktivierten Leersten interpretierbar wären.

Kann der Modellschüler die beschriebenen offenen Leerstellen anhand seines Vorwissens inferieren? Das BEZEICHNETE DER BRÜCHE MIT DEM NENNER 10, 100, 1000,… ist inferierbar; der Modellschüler kann aufgrund der Inhalte des vorhandenen BRUCH-Schemas schluss-

[112] Im Rahmen der sogenannten funktionalen Satzperspektive bezeichnet man den Satzgegenstand, über den etwas ausgesagt wird, als *Thema*; die Aussage über den Satzgegenstand wird als *Rhema* bezeichnet. (vgl. Eroms 1986). ‚Ein Bruch mit dem Nenner 10, 100, 1000, …' ist damit das Thema des natursprachlichen Satzes; ‚kann man als Dezimalbruch schreiben' ist entsprechend das Rhema.

folgern, dass BRÜCHE MIT DEM NENNER 10, 100, 1000,… spezifische BRUCHTEILE (ZEHNER-ANTEILE) bezeichnen, und zwar diejenigen, bei denen ein Ganzes in 10, 100, 1000, … Stücke eingeteilt ist. Das BEZEICHNETE DER DEZIMALBRÜCHE ist aber dem Modellschüler unbekannt und auch nicht inferierbar. Damit bleibt die entsprechende Leerstelle offen und das Sinnerleben der SATZAUSSAGE ist stark beeinträchtigt, denn es entsteht lediglich die AUSSAGE ‚Zehneranteile sind auch anders als bisher bekannt – nämlich als Ziffern mit einem Komma – schreibbar'. Da für eine BEGRÜNDUNG DES SATZES das nicht inferierbare BEZEICHNETE DER DEZIMALBRÜCHE notwendig ist, kann auch sie vom Modellschüler nicht inferiert werden. Das naheliegende Modell ist damit an mindestens zwei Stellen offen. Die entsprechende Text-Modell-Struktur ist nachfolgend dargestellt.

SATZ ‚Zehneranteile sind als Dezimalbrüche (Kommazahlen) schreibbar"

[1] SATZAUSSAGE allgemein (Teiltext 1)

[2] SATZAUSSAGE konkret ‚Zehntel sind als Kommazahl mit einer Nachkommastelle, Hundertstel sind als Kommazahl mit zwei Nachkommastellen, Tausendstel sind als Kommazahl mit drei Nachkommastellen … schreibbar'. (Teiltext 2)

[3] BEZEICHNETES DES DEZIMALBRUCHS oder MOTIV FÜR DEN SATZ (fehlender Teiltext)

[4] GRUND FÜR DIE GELTUNG DES SATZES (fehlender Teiltext)

Struktur 1: Vom Kasten ‚Dezimalbrüche' nahegelegtes SATZ-Modell

III. 1b) Skizze der vollzogenen kognitiven Veränderungen

Im Zuge der Modellbildung wird ein neuer SATZ konstruiert, der die neue EIGENSCHAFT ‚schreibbar sein als Dezimalbruch' der ZEHNERANTEILE beinhaltet. Dadurch wird gleichzeitig im Rahmen des ANTEILE-Schemas ein neues ZEHNERANTEILE-Schema konstruiert. Der Schüler hat also gelernt, dass Zehneranteile als Kommazahlen schreibbar sind. Das im SATZ eingebettete neukonstruierte Sub-Schema (abstrakter) DEZIMALBRUCH besteht dabei lediglich aus einer BEZEICHNUNG, die mit dem Wort ‚Dezimalbruch' und dem Wert ‚Ziffern mit einem Komma' belegt ist. Insbesondere bleibt aber die Bezeichnetes-Leerstelle offen. Was Dezimalbrüche sind, kann unser Modellschüler in diesem Fall nicht lernen.

III. 1c) Beschreibung der Ausprägung schwierigkeitsgradbestimmender Textmerkmale und der Sinnhaftigkeit des SATZ-Modells

Der Text enthält keine nicht integrierbaren Textdaten und sein Ablauf entspricht der sequenziellen Darstellung des nahegelegten SATZ-Modells. Die Kapitelüberschrift ‚Dezimalbrüche' entspricht nicht ganz dieser Lesart, denn man würde eher erwarten, dass das primäre SATZOBJEKT ‚Brüche mit dem Nenner 10, 100, 1000, …', dessen Eigenschaft im Text thematisiert wird, in der Überschrift auftaucht. Die typographische Dreiteilung der Terme erleichtert das Erkennen der zentralen Stellung des Nenners bzw. der Anzahl der Nullen, die in Bezug auf die Inferenz der konkreten SATZAUSSAGE wesentlich ist. Die Modellbildung erfordert umfangreiche Inferenzen. Anhand der formal-mathematischen Ausdrücke des Teiltextes 2 muss die Konkretisierung der SATZAUSSAGE, als welche Kommazahlen einzelne

Zehneranteile schreibbar sind, inferiert werden. Hierfür ist es notwendig, die Regelmäßigkeiten zwischen einzelnen Zeichenarten zu sehen. Diese kognitive Arbeit erfordert keine Aktivierung des fachlichen Wissens, allerdings ist sie recht umfangreich, da der Text lediglich anhand der typographischen Gestaltung vage Hinweise liefert, ‚wo' genau man nach Gesetzmäßigkeiten suchen soll. Des Weiteren werden anhand der Textdaten zwei Fragen bzw. Leerstellen aktiviert: das BEZEICHNETE DER SATZOBJEKTE und der GRUND FÜR DIE GELTUNG DES SATZES, für deren Belegung der Lehrtext keine Daten liefert. Das BEZEICHNETE DER BRÜCHE MIT DEM NENNER 10, 100, 1000, … kann vom Modellschüler anhand seines Vorwissens inferiert werden, allerdings nicht die übrigen notwendigen Inhalte. Die Inferenz des BEZEICHNETEN DER BRÜCHE MIT DEM NENNER 10, 100, 1000, …. ist dabei recht kompliziert, da sie im Text mit sprachlichen Mitteln nicht angedeutet wird – man beachte, dass das Wort ‚Anteil' bzw. ‚Bruchteil' im Text nicht auftaucht und so ein relativ umfangreiches Durchdenken des neuen, also noch nicht verfestigten fachlichen Wissens erforderlich ist. Im Einzelnen muss der Schüler die Tatsache, dass Brüche mit Nenner 10, 100, 1000, … spezifische Anteile bezeichnen, sowie das Spezifikum dieser Anteile erkennen.

Insgesamt ist das SATZ-Modell unvollständig, wodurch beim Leser das Gefühl, den SATZ nicht verstanden zu haben, hervorgerufen werden dürfte. Des Weiteren erfordert es umfangreiche und recht komplizierte Inferenzen. Folglich ist das Modell schwer zu konstruieren. Die nicht ganz passende Überschrift verstärkt zusätzlich die Sinnbeeinträchtigung des Modells.

III. 2) Beschreibung des naheliegenden VERFAHREN-Modells und des entsprechenden Lernergebnisses

III. 2a) Beschreibung der Charakteristik des VERFAHREN-Modells

Der Text ist auch als das VERFAHREN ‚Schreiben der Brüche mit dem Nenner 10, 100, 1000,… als Dezimalbruch' sinnvoll ausdeutbar. Der natursprachliche Satz (Ausdruck 1) ist dabei als eine Mitteilung über die Existenz des VERFAHRENS interpretierbar. Die einzelnen Textdaten belegen dabei die Voraussetzung-Leerstelle ‚alle Brüche mit Nenner 10, 100, 1000, …', sowie das Ziel ‚Schreiben als Dezimalbruch'. Die Gleichungen des Teiltextes 2 werden in diesem Fall als VERFAHRENSSCHRITTE ausgedeutet. Dabei sind – ähnlich wie bei der beschriebenen Interpretation des Teiltextes als eine Konkretisierung der SATZAUSSAGE – zahlreiche Inferenzen notwendig. So muss unser Modellschüler ausgehend von konkreten Ergebnissen des ‚Schreibens' erkennen, wie man einen beliebigen Bruch mit einer Zehnerpotenz im Nenner als einen Dezimalbruch schreibt, d.h. er muss eine allgemeine ‚Regel' inferieren, in etwa wie folgt: ‚Zuerst wird der Zähler des Bruchs aufgeschrieben – bei gemischten Brüchen wird zusätzlich zuerst die ganze Zahl aufgeschrieben –, dann die Anzahl der Nullen im Nenner des Bruchs gezählt, im aufgeschriebenen Dezimalbruch/Zähler von rechts nach links die entsprechende Anzahl der Ziffern abgezählt und dort das Komma gesetzt. Falls nicht genug Ziffern vorhanden sind, werden von links Nullen hinzugefügt'. Die entsprechende Text-Modell-Struktur ist nachfolgend abgebildet.

VERFAHREN ‚Schreiben eines Bruchs mit dem Nenner 10,100, 1000,… als Dezimalbruch"

[1] VORAUSSETZUNGEN ‚Bruch mit dem Nenner 10, 100, 1000, …' und ZIEL ‚Schreiben als Dezimalbruch' (Teiltext 1)

[2] VERFAHRENSSCHRITTE 'Schreibe den Zähler auf, zähle die Nullen im Nenner, zähle im aufgeschriebenen Zähler von rechts nach links die entsprechende Anzahl der Stellen, setze dort das Komma' (Teiltext 2)

[3] BEZEICHNETES DES DEZIMALBRUCHS oder MOTIV FÜR DAS VERFAHREN (fehlender Teiltext)

[4] GRUND FÜR DIE GELTUNG DER VERFAHRENSSCHRITTE (fehlender Teiltext)

Struktur 2: Vom Kasten ‚Dezimalbrüche' nahegelegtes VERFAHREN-Modell

Auch im Rahmen dieses Modells werden Leerstellen aktiviert, die mit textbasierten Werten nicht belegbar sind. Da der Modellschüler nicht weiß, was (abstrakte) Dezimalbrüche bedeuten, also das BEZEICHNETE DER DEZIMALBRÜCHE nicht kennt, hat das ZIEL DES VERFAHRENS ‚Schreiben der Zehnerbrüche/Zehneranteile als Dezimalbrüche/Kommazahlen' für den Modellschüler – unabhängig davon, ob er das BEZEICHNETE DER BRÜCHE MIT DEM NENNER 10, 100, 1000, … inferiert oder nicht – keinen Sinn.[113] Denn warum sollte man Zehnerbrüche/Zehneranteile (zusätzlich) anders schreiben als bislang üblich? Ähnlich wie bei der vorherigen Interpretation fehlen das BEZEICHNETE DES DEZIMALBRUCHS oder das MOTIV solch eines (untypischen) VERFAHRENS (vgl. [3]). Wie bereits erläutert, ist Ersteres nicht inferierbar. Das MOTIV kann aufgrund des Alltagswissens über die Dezimalbrüche evtl. in etwa wie folgt inferiert werden: Aufgrund der Präsenz der Dezimalbrüche bei Größenangaben im Alltag und im beruflichen Leben ist es manchmal notwendig (in welchen Situationen?), Zehnerbrüche als Dezimalbrüche zu schreiben. Man sieht, dass dieses MOTIV vage bleibt. Des Weiteren kann die Grund-für-die-Geltung-der-Verfahrensschritte-Leerstelle, die im Rahmen eines VERFAHREN-Modells notwendig ist, weder mit textbasierten noch mit inferierten Werten belegt werden (vgl. [4]).

III. 2b) Skizze der vollzogenen Veränderungen

Im Zuge der Modellbildung wird ein bislang unbekanntes (konkretes) VERFAHREN-Schema konstruiert, dabei ist insbesondere das Sub-Schema VERFAHRENSSCHRITTE für den Modellschüler neu. Falls das BEZEICHNETE DER BRÜCHE MIT DEM NENNER 10, 100, 1000, … nicht aktiviert wird, da der Text zu wenige Hinweise bezüglich dieser Aktivierung liefert, bleibt das bestehende ANTEILE-Schema unverändert und insbesondere mit dem neuen VERFAHREN unverknüpft. Auch hier – ähnlich wie beim beschriebenen Lernergebnis im Rahmen des SATZ-Modells – beinhaltet das neu konstruierte abstrakte DEZIMALBRUCH-Schema, das in das VERFAHREN als ZIELOBJEKT eingebettet ist, lediglich die BEZEICHNUNG. Das BEZEICHNETE DER DEZIMALBRÜCHE bleibt offen. Damit lernt der Modellschüler primär, wie die

[113] Da SYMBOLE ohne ein BEZEICHNETES im Rahmen eines VERFAHRENS als typische OBJEKTE – und dies im Gegensatz zu einem SATZ-Schema – betrachtet werden, stellt sich die Frage/Leerstelle nach dem *Bezeichneten* der BRÜCHE MIT DEM NENNER 10, 100, 1000,… nicht in der Schärfe wie im Rahmen eines SATZ-Modells.

Zeichen für die Zehnerbrüche als Kommazahlen zu schreiben sind, er lernt nicht, was (abstrakte) Dezimalbrüche sind.

III. 2c) Beschreibung der Ausprägung schwierigkeitsgradbestimmender Textmerkmale und der Sinnhaftigkeit des VERFAHREN-Modells

Der Text enthält keine nicht integrierbaren Textdaten und sein Verlauf entspricht der sequenziellen Darstellung des Modells. Allerdings ist die Überschrift – ähnlich wie beim SATZ-Modell – nicht passgenau zum Gegenstand des Modells formuliert. Eine passende Überschrift wäre ‚Schreiben der Brüche mit dem Nenner 10, 100, 1000,… als Dezimalbrüche'. Des Weiteren ist das VERFAHREN-Modell ebenso wie das SATZ-Modell stark unvollständig; es fehlen das BEZEICHNETE DER DEZIMALBRÜCHE und/oder ein MOTIV sowie eine BEGRÜNDUNG DER VERFAHRENSSCHRITTE. Das Inferieren der VERFAHRENSSCHRITTE ist umfangreich, aber nicht kompliziert, da es kaum fachliches Wissen voraussetzt. Insgesamt ist das VERFAHREN-Modell recht schwer konstruierbar und aufgrund seiner Unvollständigkeit deutlich sinnbeeinträchtigt.

III. 3) Beschreibung des BEGRIFF-Modells und des entsprechenden Lernergebnisses

III. 3a) Beschreibung der Charakteristik des BEGRIFF-Modells

Der Text stiftet auch Sinn, wenn man ihn als eine Mitteilung über den BEGRIFF ‚Dezimalbruch' interpretiert, wenn man also annimmt, dass der Autor einen neuen BEGRIFF erklärt. Der erste Satz wird dabei als das BEZEICHNETE DES DEZIMALBRUCHS interpretiert und kann in etwa wie folgt paraphrasiert werden: ‚Ein Dezimalbruch ist eine andere Schreibform für einen Bruch mit dem Nenner 10, 100, 1000…' bzw. ‚Ein Dezimalbruch bezeichnet einen Bruch mit dem Nenner 10, 100, 1000, …'. Teiltext 2 konkretisiert das BEZEICHNETE. Dabei wird ebenfalls die Bezeichnetes-der-Brüche-mit-dem-Nenner-10,-100,-1000,-…-Leerstelle aktiviert und muss aufgrund fehlender Textdaten mit inferierten Werten belegt werden. Der Modellschüler weiß damit, dass es im Text um das ‚Schreiben' der ZEHNERANTEILE geht und dass DEZIMALBRÜCHE entsprechend ZEHNERANTEILE, also spezifische ANTEILE bezeichnen. Die dazugehörige Text-Modell-Struktur lässt sich wie folgt darstellen:

BEGRIFF ‚Dezimalbruch'
> [1] BEZEICHNETES allgemein ‚Ein Dezimalbruch bezeichnet Zehneranteile' (T1)
> [2] BEZEICHNETES konkret ‚Die Zahl vor dem Komma bezeichnet die Anzahl der Ganzen, die erste Nachkommastelle bezeichnet die Anzahl der Zehntel; die beiden ersten Nachkommastellen bezeichnen die Anzahl der Hundertstel; usw.' (T2)

Struktur 3: Vom Kasten ‚Dezimalbrüche' nahegelegtes BEGRIFF-Modell

Bei dieser Lesart ist das BEZEICHNETE DER DEZIMALBRÜCHE nicht nur ein(e) SYMBOL(-KLASSE), sondern ein dem Modellschüler bekannter GEGENSTAND ‚Zehneranteile'. Da dies eine typische/sinnhafte Belegung ist, stellt sich die Frage nach dem Motiv weniger dringlich als beim VERFAHREN oder dem SATZ.

Ausgehend von diesem Modell sind weitere sinnvolle Elaborationen möglich, so kann unser Modellschüler weitere BENACHBARTE SÄTZE schlussfolgern, insbesondere den Zusammenhang zwischen Dezimalbrüchen und Brüchen mit einer Zehnerpotenz im Nenner, also den SATZ, dass ‚Dezimalbrüche und Brüche mit dem Nenner 10, 100, 1000, … das Gleiche (Zehneranteile) bezeichnen'.[114]

III. 3b) Skizze der vollzogenen kognitiven Veränderungen

Auf der Grundlage der beschriebenen Modellbildung wird ein abstraktes DEZIMALBRUCH-Schema, das in ein BEGRIFF-Schema eingebettet ist, konstruiert. Insbesondere wird die ursprünglich offene Bezeichnetes-Leerstelle mit ‚Schreibform für Zehneranteile' belegt. Das neu konstruierte DEZIMALBRUCH-Schema beinhaltet damit das ZEHNERANTEILE-Schema, das als spezifische ANTEILE betrachtet wird, wodurch Ersteres mit dem bereits vorhandenen BRUCH-Schema verknüpft ist. Aus fachdidaktischer Sicht erwirbt der Schüler dabei die globale Sicht auf die Dezimalzahlen, beispielsweise dass 0,23 23 Hundertstel darstellen.[115]

III. 3c) Beschreibung der Ausprägung schwierigkeitsgradbestimmender Merkmale und Sinnhaftigkeit des BEGRIFF-Modells

Der Text enthält auch bei diesem Textverständnis keine nicht integrierbaren Textdaten und erscheint bezüglich seines Verlaufs passend zum Modell. Im Gegensatz zu den bereits diskutierten Modellen unterstützen die Überschrift sowie der globale Aufbau des Schulbuchs diese Lesart, denn dies ist die erste Stelle, in der die Dezimalbrüche im Schulbuch erwähnt werden.

Die Konstruktion des BEGRIFF-Modells erfordert zunächst eine Änderung der sprachlichen Merkmale der Textdaten. Ausgehend von dem natursprachlichen Satz (Ausdruck 1), der eine Aussage über die Brüche mit dem Nenner 10, 100, 1000, … darstellt, muss eine Aussage über die Dezimalbrüche inferiert bzw. geschlussfolgert werden. Das heißt, der syntaktisch-grammatische Aufbau des natursprachlichen Satzes widerspricht dieser Lesart. Des Weiteren erfordert die Modellbildung umfangreiche und komplizierte Inferenzen, dies betrifft insbesondere das notwendige Inferieren des BEZEICHNETEN DER BRÜCHE MIT DEM NENNER

---

[114] Aus fachlicher Perspektive ist dieser Satz falsch, denn die nicht abbrechenden Dezimalbrüche bezeichnen keine Zehneranteile. Allerdings kennt der Modellschüler keine nicht abbrechenden Dezimalbrüche, so dass der vom ihm konstruierte SATZ sich ausschließlich auf die abbrechenden Dezimalbrüche bezieht und daher der fachlichen Norm nicht widerspricht.

[115] Padberg unterscheidet eine globale und eine lokale Sichtweise auf Dezimalbrüche. Global betrachtet bedeuten Dezimalbrüche demnach eine gewisse Anzahl an Zehntel, Hundertstel, Tausendstel,… So bedeuten 0,25 global gesehen 25 Hundertstel. Lokal betrachtet bedeuten Dezimalbrüche demgegenüber eine Summe aus Zehntel, Hundertstel, Tausendstel, … 0,25 ist aus dieser Sicht 2 Zehntel plus 5 Hundertstel (vgl. Padberg 2009, S. 171ff).

10, 100, 1000, …, das einer Aktivierung und Umstrukturierung relativ neuen fachlichen Wissens bedarf. Die vorliegenden Textdaten bieten kaum Hilfestellungen bezüglich dieser kognitiven Leistung. Das BEZEICHNETE der einzelnen konkreten DEZIMALBRÜCHE müssen ausschließlich anhand formal-mathematischer Zeichen konstruiert werden, was recht anspruchsvoll ist. Daher ist das BEGRIFF-Modell recht schwer konstruierbar.

Das BEGRIFF-Modell ist anders als alle bisher beschriebenen Modelle vollständig. Es ist auch das erste Modell, dessen Sinnhaftigkeit nicht beeinträchtigt ist. Lediglich die umfangreichen semantischen ‚Lücken' im ‚Kasten' könnten bewirken, dass der Modellschüler sich fragt, warum der Autor den Text so knapp verfasst.

III. 4) Beschreibung des TRANSFORMATIONSAUFGABE-Modells und des entsprechenden Lernergebnisses

III. 4a) Beschreibung der Charakteristik des TRANSFORMATIONSAUFGABE-Modells

Der ‚Kasten' kann auch als eine Mitteilung über eine geforderte AUFGABE interpretiert werden. Der erste Satz (Ausdruck 1) wird dabei in etwa als ‚Wir schreiben (in nachfolgenden Aufgaben) einen Bruch mit dem Nenner 10, 100, 1000, … als Dezimalbruch' verarbeitet. Er wird also als AUFGABENSTELLUNG ausgedeutet. Der Modellschüler entnimmt diesen Textdaten, dass im gefordertem (recht typischen) Aufgabentyp Brüche mit dem Nenner 10, 100, 1000,… (AUSGANGSOBJEKTE) als Dezimalbrüche (ZIELOBJEKTE) geschrieben (TRANSFORMATIONSART) werden. Dabei wird das BEZEICHNETE DER BRÜCHE MIT DEM NENNER 10, 100, 1000... nicht aktiviert, denn ‚Zeichen ohne ein Bezeichnetes' sind recht typische AUFGABENOBJEKTE. Der Teiltext 2 wird vom Modellschüler als LÖSUNG interpretiert, die aus BEARBEITUNGSSCHRITTEN und PRÄSENTATION DER AUFGABE besteht. Die hierfür notwendigen Inferenzen sind im Wesentlichen die gleichen wie die im Zuge der Konstruktion des VERFAHREN-Modells beschriebenen. Da alle notwendigen Bestandteile einer AUFGABE belegt sind, werden auch keine weiteren Leerstellen aktiviert. Die entsprechende Text-Modell-Struktur ist nachfolgend dargestellt.

TRANSFORMATIONSAUFGABE ‚Schreiben der Brüche mit dem Nenner 10, 100, 1000… als Dezimalbruch'

[1] AUFGABENSTELLUNG ‚Schreibe einen Bruch als Dezimalzahl' (T1)

[2] BEARBEITUNGSSCHRITTE ‚Schreibe den Zähler auf, zähle die Nullen im Nenner, zähle im aufgeschriebenen Zähler von rechts nach links die entsprechende Anzahl der Stellen, setze dort das Komma' und PRÄSENTATION DER AUFGABE (T2)

Struktur 4: Vom Kasten ‚Dezimalbrüche' nahegelegtes TRANSFORMATIONSAUFGABE-Modell

III. 4b) Skizze der vollzogenen kognitiven Veränderungen

Im Zuge der Modellbildung wird eine neue TRANSFORMATIONSAUFGABE konstruiert; in der ein bekanntes OBJEKT ‚Bruch mit Nenner 10, 100, 1000,…‘ und ein neues OBJEKT ‚Dezimalbruch‘ anhand neuer BEARBEITUNGSSCHRITTE miteinander verknüpft werden. Das OBJEKT ‚Bruch mit Nenner 10, 100, 1000,…‘ beinhaltet lediglich die SYMBOLISCHE DARSTELLUNG, das BEZEICHNETE DER BRÜCHE MIT NENNER 10, 100, 1000, … wurde nicht aktiviert und ist dementsprechend kein Bestandteil der TRANSFORMATIONSAUFGABE. Daher ist die (neue) AUFGABE mit dem ursprünglichen ANTEILE-Schema unverknüpft. Ähnlich wie beim VERFAHREN ist das konstruierte abstrakte DEZIMALBRUCH-Schema, das als ZIELOBJEKT der TRANSFORMATIONSAUFGABE betrachtet wird, ein Schema mit belegter BEZEICHNUNG und einem offenen BEZEICHNETEM. Der Modellschüler lernt, wie man Zeichen für Zehnerbrüche als andere Zeichen (Kommazahlen) schreibt. Er lernt insbesondere nicht, was Dezimalzahlen bezeichnen.

III. 4c) Beschreibung der Ausprägung schwierigkeitsgradbestimmender Textmerkmale und der Sinnhaftigkeit des AUFGABE-Modells

Bei der Ausdeutung des ‚Kastens‘ als TRANSFORMATIONSAUFGABE entstehen – genauso wie im Rahmen bereits beschriebener Modelle – keine Schwierigkeiten bezüglich des Textverlaufs und der Integrierbarkeit aller Textdaten in das Modell. Die Überschrift widerspricht nicht dieser Lesart, denn ‚Dezimalbrüche‘ stellen ein kennzeichnendes Merkmal der geforderten (neuen) AUFGABE dar. Außerdem stützt die Aufgabe, die unmittelbar nach dem ‚Kasten‘ auftaucht, diese Lesart, denn ihre Aufgabenstellung entspricht der anhand des Kastens inferierten AUFGABENSTELLUNG; es wird gefordert Brüche mit Nenner 10, 100, 1000, …. als Dezimalbruch zu schreiben.

Die notwendigen Inferenzen sind recht umfangreich, wobei die Inferenz der AUFGABENSTELLUNG nicht schwer ist, sie erfordert kein mathematisches Wissen und man kann sie unmittelbar anhand des ersten Ausdrucks konstruieren. Die Inferenz der BEARBEITUNGSSCHRITTE anhand der formal-mathematischen Zeichen ist – wie bereits im Rahmen des VERFAHRENSSCHRITTE beschrieben – recht umfangreich. Hierzu müssen die Gesetzmäßigkeiten zwischen den einzelnen Zeichen – wie etwa Anzahl der Nullen im Nenner im Verhältnis zur Kommastellung im Dezimalbruch – erkannt und anschließend die allgemeinen BEARBEITUNGSSCHRITTE geschlussfolgert werden. Für diese Inferenz ist jedoch kein Fachwissen notwendig. Schließlich ist das konstruierte Modell vollständig, denn es enthält keine offenen Leerstellen, da die beiden Bestandteile einer TRANSFORMATIONSAUFGABE anhand der Textdaten belegt sind und keine weiteren Leerstellen aktiviert werden.

Insgesamt ist das Modell sinnstiftend, denn es integriert alle Textdaten, ist vollständig und passt sowohl zum Textverlauf als auch zur typographischen Gestaltung. Lediglich die Notwendigkeit umfangreicher Inferenzen bezüglich der BEARBEITUNGSCHRITTE kann sinnbeeinträchtigend wirken und die Modellbildung erschweren.

IV. Ermittlung und Diskussion der extremen naheliegenden Lernergebnisse

IV. 1) Ermittlung der am leichtesten/schwierigsten zu konstruierenden naheliegenden (Haupt-)Modelle bzw. Lernergebnisse

Insgesamt ist der vorliegende Text vom Modellschüler auf vier Arten weitgehend sinnstiftend interpretierbar: als ein SATZ, als ein VERFAHREN, als ein BEGRIFF und als eine TRANSFORMATIONSAUFGABE. Im Folgenden soll darüber nachgedacht werden, welche Modellbildung im Vergleich zu den anderen am leichtesten ist. Dazu wird die Ausprägung schwierigkeitsgradbestimmender Textmerkmale vergleichend betrachtet.

Alle beschriebenen Modelle umfassen alle Textdaten als textbasierte Werte, ihre sequenzielle Darstellung entspricht dem Textverlauf. Allerdings variieren die beschriebenen Modelle bezüglich ihrer typographischen Passung; so widerspricht die Überschrift den SATZ- und VERFAHREN- und entspricht den BEGRIFF- und AUFGABE-Modellen. Das AUFGABE-Modell wird zusätzlich aufgrund der dem ‚Kasten' folgenden Aufgabe gestützt, das BEGRIFF-Modell aufgrund des inhaltlichen Aufbaus des Schulbuchs. Das VERFAHREN- und das SATZ-Modell weisen im Gegensatz zum vollständigen AUFGABE- und BEGRIFF-Modell jeweils zwei offene Leerstellen auf. Schließlich wird die Komplexität notwendiger Inferenzen vergleichend betrachtet. Beim BEGRIFF- und SATZ-Modell ist das Inferieren des BEZEICHNETEN DER BRÜCHE MIT NENNER 10, 100, 1000, … notwendig. Diese Inferenz ist – wie oben erläutert – recht komplex. Beim BEGRIFF-Modell ist zusätzlich das BEZEICHNETE DER DEZIMALBRÜCHE zu schlussfolgern. Die anderen zur Konstruktion eines BEGRIFFS notwendigen Inferenzen sind nicht weniger umfangreich als bei den anderen naheliegenden Modellen. Damit ist das BEGRIFF-Modell hinsichtlich der notwendigen Inferenzen am schwierigsten zu konstruieren. Das VERFAHREN- und AUFGABE-Modell sind dagegen bezüglich notwendiger Inferenzen am leichtesten zu bilden.

Wenn man die Gesamtheit aller spezifisch ausgeprägten schwierigkeitsgradbestimmenden Textmerkmale unter dem jeweiligen Textverständnis vergleichend betrachtet, dann stellt sich das AUFGABE-Modell deutlich als das am leichtesten zu konstruierende dar, denn es ist vollständig, passend zur (typographischen) Gestaltung des Buchs und es erfordert relativ leichte Inferenzen. Das andere vollständige und typographisch passende Modell – der BEGRIFF – verlangt hingegen relativ schwierige Inferenzen und ist daher im Vergleich zum AUFGABE-Modell schwieriger zu konstruieren. Das schwierigste Modell kann in diesem Fall nicht eindeutig bestimmt werden.

IV. 2) Ermittlung der besten/schwächsten naheliegenden Lernergebnisse

Wenn man alle beschriebenen Lernergebnisse vergleichend betrachtet, dann ist das Lernergebnis, das mit dem BEGRIFF-Modell einhergeht, das qualitativ beste. Nur im Zuge der Konstruktion eines BEGRIFFS wird ein abstraktes DEZIMALBRUCH-Schema konstruiert, das im MATHEMATISCHES-ELEMENT-Schema eingebettet ist und bei dem das Bezeichnete der DEZIMALBRÜCHE belegt ist. In allen anderen Fällen ist DEZIMALBRUCH ein abstraktes Sub-Schema, das ausschließlich aus einer BEZEICHNUNG ‚Ziffern mit Komma' besteht. In Abhängigkeit des gebildeten Modells ist es entweder ein ZIELOBJEKT DES VERFAHRENS/ AUFGABE oder ein (unvollständiges) SATZOBJEKT. Ein mathematischer Satz und Verfahren, die nicht definierte Begriffe bzw. Symbole beinhalten, widersprechen jedoch dem normativen mathematischen Wissen. Wenn man davon ausgeht, dass im weiteren Verlauf des Schulbuchs vorausgesetzt wird, dass der Schüler weiß, was Dezimalbrüche sind, dass er also das Bezeichnete kennt, und entsprechend dieser Inhalt in den nachfolgenden Lehrtexten/Kästen nicht expliziert wird, dann ist das konstruierte DEZIMALBRUCH-Schema mit offenem Bezeichnetem im Hinblick auf weiteres Lernen extrem mangelhaft. Des Weiteren erscheinen das VERFAHREN und der SATZ aufgrund des Fehlens des BEZEICHNETEN ihrer OBJEKTE als untypisch und daher als nicht vollständig sinnstiftend; sie sind in der Folge für den Schüler schwer behaltbar, reproduzierbar und transferierbar.

Wie bereits auf einer allgemeinen Ebene erläutert, stellt das Lernergebnis, das mit dem AUFGABE-Modell einhergeht, das schwächste naheliegende Lernergebnis dar (vgl. Kap. 5.2). Im Gegensatz zu unvollständigen SÄTZEN oder VERFAHREN bemerkt der Schüler sein Nicht-Verstehen nicht, er hat keine offenen Fragen und entwickelt dementsprechend auch kein Bedürfnis, das erworbene Wissen zu durchdenken bzw. umzuorganisieren.

Da der Lehrtext kurz ist und alle wesentlichen Aspekte seines Lehrpotentials bereits ausführlich diskutiert wurden, wird an dieser Stelle auf eine vertiefte Diskussion der extremen Lernergebnisse verzichtet. Zusammenfassend kann festgestellt werden, dass das Modell, das mit dem besten Lernergebnis einhergeht (neuer BEGRIFF), hinsichtlich der Komplexität notwendiger Inferenzen am schwierigsten zu bilden ist. Demgegenüber ist das Modell, das mit dem schwächsten Lernergebnis einhergeht (neue TRANSFORMATIONSAUFGABE), eindeutig am leichtesten zu konstruieren. Allerdings ist auch eine Konstruktion des AUFGABE-Modells aufgrund umfangreicher Inferenzen, die bezüglich der BEARBEITUNGSSCHRITTE gezogen werden müssen, in absoluter Hinsicht nicht gerade leicht.

V. Integrative Lehrtextkennzeichnung

Insgesamt wird deutlich, dass der Text in seiner Kürze vage bleibt, denn mindestens vier Modelle werden von ihm nahegelegt. Die sprachlichen Hinweise bezüglich des Gegenstandes, der Inhalte und der Struktur des zu konstruierenden Modells sind gering. Daher sind zur Konstruktion allen naheliegenden Modells umfangreiche Inferenzen notwendig. Dies liegt insbesondere daran, dass die formal-mathematischen Zeichen, die natursprachlich nicht erklärt werden, bezüglich ihrer kommunikativen Rolle vage sind und ihre Interpretation eine erhöh-te mentale Arbeit erfordert.

Aufgrund des hohen Bildungschwierigkeitsgrades aller naheliegenden Modelle kann davon ausgegangen werden, dass viele verstehen-wollende Schüler, die selbstständig aus dem ‚Kasten' lernen, den Text oder seine Teiltexte oberflächlich verarbeiten und damit aus dem Text (teilweise) entweder gar nicht oder höchstens mechanisch lernen. Diejenigen, denen eine ausschließlich tiefe Verarbeitung gelingt, werden eher das am leichtesten zu konstruierende (AUFGABE-)Modell bilden. Das Modell, das mit dem besten Lernergebnis

‚neuer DEZIMALBRUCH-BEGRIFF‘ einhergeht, ist eindeutig schwerer zu konstruieren und wird vom leichteren AUFGABE-Modell ‚überlagert‘, so dass davon auszugehen ist, dass es nur einer Minderheit der Schüler gelingt, dieses zu konstruieren.

Die erste Anwendung des analytisch-theoretischen Rahmens diente neben der Veranschaulichung des Vorgehens einer ersten Erprobung der entwickelten Instrumente. Der wichtigste inhaltliche Befund besteht wohl in der Erkenntnis, dass die Schüler, die über das im Lehrtext (potentiell) enthaltene Wissen nicht verfügen, also anhand des Textes lernen wollen, einige Teiltexte eher oberflächlich verarbeiten. Darüber hinaus liefert die Analyse einen weiteren interessanten Befund: das AUFGABE-Modell ist wesentlich leichter konstruierbar als das in qualitativer Hinsicht beste BEGRIFF-Modell. Im Folgenden wird das Lehrpotential ‚klassischer‘ Lehrtexte, die also keine Kästen sind, analysiert. Vom besonderen Interesse ist dabei die Frage, inwiefern die Schulbuchlehrtexte ebenfalls mangelhafte(s) AUFGABEN-Modelle nahelegen.

6. Analyse des Lehrpotentials ausgewählter Mathematikschulbuchlehrtexte

Nachdem das Konzept ‚Lehrpotential eines mathematischen Schulbuchslehrtextes' entwickelt wurde, soll nun in diesem Kapitel das vorgeschlagene Instrumentarium erprobt und angewandt werden, um u.a. Hypothesen hinsichtlich des Lehrpotentials eines typischen mathematischen Schulbuchlehrtextes zu generieren. Insgesamt werden vier Lehrtexte analysiert. Da die BRUCH- und DEZIMALZAHL-Schemata bereits skizziert wurden, bittet es sich zunächst an, einen Lehrtext auszuwählen, der einen ähnlichen Lernstoff behandelt wie der bereits vorgestellte Kasten. Nach einer ausführlichen Analyse des Lehrtextes ‚Dezimalzahlen, Brüche und Prozente' (Kap. 6.1) werden die Befunde zusammengefasst und auf dieser Grundlage die Fragestellungen bezüglich des weiteren analytischen Vorgehens präzisiert und zugespitzt (Kap. 6.2). In Kapitel 6.3 wird ein weiterer Lehrtext zum Zusammenhang zwischen Dezimalzahlen und Brüchen betrachtet. Schließlich wird in Kapitel 6.4 ein Lehrtext analysiert, der einen anderen Lernstoff beinhaltet. Die analytische Arbeit wird mit der Vorstellung eines kontrastierenden Lehrtextes abgerundet (Kap. 6.5).

6.1. Lehrtext 1: ‚Dezimalzahlen, Brüche und Prozentschreibweise'

Der zuerst zu untersuchende Lehrtext stammt aus dem Schulbuch ‚Interaktiv Mathematik 6' aus dem Cornelsen Verlag (vgl. Pies et al. 2007). Das Schulbuch ist in sechs Kapitel unterteilt; diese sind wiederum in Unterkapitel mit jeweils unterschiedlichen Funktionen gegliedert. Alle sechs Kapitel fangen mit einer ‚Einführung' an. Dies ist jeweils eine Schulbuchseite, die stets ein großes Bild, die Kapitelüberschrift und einige Informationen bezüglich des zu behandelnden Themas enthält. Die ‚Einführung' in das Kapitel ‚Dezimalzahlen' enthält beispielsweise das Bild einer Achterbahn und folgende Information:

„Für Ausflüge in Freizeitparks gibt es manchmal Pauschalangebote. Diese enthalten oft die Fahrtkosten, die Eintrittspreise und einige zusätzliche Leistungen. Sind diese Angebote immer günstiger als die Einzelpreise? Lasst euch beim Recherchieren nicht von den Kommazahlen abschrecken." (Pies et al., S. 105)

Der ‚Einführung' folgt stets der ‚Anlass', der eine Doppelseite umfasst, typographisch aufwendig gestaltet ist und reichhaltige Anregungen beinhaltet. Im Falle der Dezimalzahlen ist der ‚Anlass' die ‚Planung einer Klassenfahrt'. Auf der entsprechenden Doppelseite sieht man unterschiedliche Preisangaben für die Eintritte in Freizeitparks und für Reisen. In der Mitte ist ein Bild platziert, auf dem sich mehrere Kinder über die Kosten der Klassenfahrt unterhalten (Sprechblasen). Dem ‚Anlass' folgen wissensvermittelnde Unterkapitel, die obligatorischen Unterrichtsstoff beinhalten. Sie weisen zwei Textsorten auf; einen Lehrtext und Aufgaben, die sich auf die Inhalte des Lehrtextes beziehen. Die Lehrtexte sind mit Hilfe der Überschrift ‚Wissen' gekennzeichnet; in ihnen wird laut Autoren „der Unterrichtsstoff übersichtlich und zusammenhängend erklärt" (Pies et al. 2007, Klappentext). Darüber hinaus gibt es im Schulbuch ergänzende Unterkapitel, z.B. ‚Methode' oder ‚Projekt'. Jedes Kapitel wird mit einer übergreifenden Aufgabensammlung, einer Testseite und einer Zusammenfassung der zentralen Unterrichtsinhalte abgeschlossen.

Die Titel der einzelnen Kapitel des Schulbuchs sowie der bezüglich des zu analysierenden Lehrtextes relevanten obligatorischen Unterkapitel sind dem Inhaltsverzeichnis entsprechend nachfolgend angegeben.

1. Teilbarkeit
2. Rechnen mit Brüchen
   2.1. Brüche und Verhältnisse
   2.2. Addition und Subtraktion von ungleichnamigen Brüchen
   2.3. Multiplikation von Brüchen
   2.4. Division von Brüchen
3. Geometrie in der Ebene
4. Dezimalzahlen
   4.1. Dezimalzahlen
   4.2. Addition und Subtraktion von Dezimalzahlen
   4.3. Multiplikation und Division von Dezimalzahlen
   4.4. Dezimalzahlen, Brüche und Prozentschreibweise
5. Geometrische Körper
6. Statistik

Der zu analysierende Lehrtext stammt aus dem Kapitel 4.4 und ist nachfolgend abgebildet.

130 DEZIMALZAHLEN **Wissen**

Dezimalzahlen und Brüche sind nur zwei verschiedene Schreibweisen von Zahlen, die auf einem Zahlenstrahl auch zwischen zwei natürlichen Zahlen liegen können.

Viele Dezimalzahlen lassen sich leicht in Brüche umwandeln.

Beispiel

$\underbrace{0{,}125}_{\text{3 Stellen}} = \frac{125}{\underbrace{1000}_{\text{3 Nullen}}} = \frac{1}{8}$ $\underbrace{15{,}24}_{\text{2 Stellen}} = \frac{1524}{\underbrace{100}_{\text{2 Nullen}}} = 15\frac{6}{25}$

BEACHTE
Nicht bei jedem Bruch lässt sich durch Kürzen oder Erweitern der Nenner zu einer Zehnerpotenz machen.

Brüche, deren Nenner eine Zehnerpotenz ist, lassen sich umgekehrt leicht in Dezimalzahlen umwandeln. Auch Brüche, deren Nenner man zu einer Zehnerpotenz erweitern oder kürzen kann, können leicht umgewandelt werden.

Beispiel

$\frac{45}{\underbrace{100}_{\text{2 Nullen}}} = \underbrace{0{,}45}_{\text{2 Stellen}}$ $\frac{3}{20} \overset{\cdot 5}{=} \frac{15}{\underbrace{100}_{\text{2 Nullen}}} = \underbrace{0{,}15}_{\text{2 Stellen}}$ $\frac{8}{40} \overset{:4}{=} \frac{2}{\underbrace{10}_{\text{1 Null}}} = \underbrace{0{,}2}_{\text{1 Stelle}}$

Um beliebige Brüche in eine Dezimalzahl umzuwandeln, fasst man den Bruchstrich als Rechenaufforderung auf.
Das Komma wird gesetzt, wenn das erste Mal eine Null ergänzt wird.

BEACHTE
Die sich wiederholende Zifferngruppe (Periode) wird durch einen Strich darüber gekennzeichnet:
- *$0{,}33\ldots = 0{,}\overline{3}$ (sprich: null Komma Periode drei)*
- *$0{,}833\ldots = 0{,}8\overline{3}$ (sprich: null Komma acht Periode drei)*

Die Periode muss nicht direkt hinter dem Komma beginnen.

Beispiel

$\frac{3}{5} = 3:5 = 0{,}6$
$\begin{array}{r} \underline{0} \\ 30 \\ \underline{30} \\ 0 \end{array}$

$\frac{1}{3} = 1:3 = 0{,}33\ldots$
$\begin{array}{r} \underline{0} \\ 10 \\ \underline{9} \\ 10 \\ \underline{9} \\ 10 \\ \ldots \end{array}$

$\frac{5}{6} = 5:6 = 0{,}833\ldots$
$\begin{array}{r} \underline{0} \\ 50 \\ \underline{48} \\ 20 \\ \underline{18} \\ 20 \\ \ldots \end{array}$

Es kommt vor (Beispiel 2 und 3), dass die Rechnung nicht aufhört, weil immer wieder ein Rest bleibt.

Immer wenn die Division nicht abbricht, wiederholt sich eine gewisse Anzahl von Ziffern bei den Resten. Die sich wiederholende Zifferngruppe heißt *Periode*, die Dezimalzahl heißt *periodisch*.

SCHON GEWUSST?
Das Wort „Prozent" und das Prozentzeichen stammen aus dem Italienischen. Das italienische „pro cento" heißt „von Hundert".

Anteile werden im Alltag oft in Prozent angegeben, z. B. bei Preisnachlässen oder bei Umfragen. Prozentangaben sind eine andere Schreibweise für Hundertstel.

Beispiel

1 %	0,01
10 %	0,1
20 %	0,2
25 %	0,25
50 %	0,5
100 %	1

Abbildung 10: Lehrtext ‚Dezimalzahlen, Brüche und Prozentschreibweise' im Schulbuch ‚Interaktiv Mathematik 6' (Pies et al., S. 130)

I. *Skizze des relevanten fachlichen Vorwissens des Modellschülers*

Die zentralen Referenzträger des Lehrtextes sind – wie beim bereits analysierten Kasten – ‚Brüche' und ‚Dezimalzahlen'. Welche Vorkenntnisse bezüglich dieser beiden Begriffe können angenommen werden? Brüche wurden im Schulbuch im zweiten Kapitel unter unterschiedlichen Perspektiven eingeführt. Im entsprechenden Lehrtext wurde ein Bruch

- als ‚Anteil von Ganzen oder Größen',
- als ‚Operator (Rechenanweisung)',
- als ‚Maßstab',
- sowie als ‚Ergebnis eines Verhältnisses'

präsentiert (vgl. Anhang Abb. 2). Im Lehrtext wurde außerdem ohne eine Begründung mitgeteilt, dass ein ‚Bruchstrich dasselbe bedeutet wie das Divisionszeichen'. Ausgehend von diesen, dem zu analysierenden Lehrtext vorangestellten Schulbuchinhalten wird festgelegt, dass unser Modellschüler über ein abstraktes BRUCH-Schema verfügt, das in der Grundstruktur dem BRUCH-Schema des der Analyse des ‚Kastens' zugrunde gelegten Modellschülers entspricht (vgl. Abb. 7 und 8); es ist in ein BEGRIFF-Schema eingebettet und weist die gleichen verfestigten Leerstellen auf. Im Vergleich zum Modellschüler im Rahmen des Schulbuchs ‚Mathematik 6' weiß unser Modellschüler in diesem Fall mehr über Brüche, d.h. die Belegung des BRUCH-Schemas ist reichhaltiger. So weist insbesondere die Belegung der Bezeichnetes-Leerstelle mehrere Standardwerte (‚Anteil', ‚Operator', ‚Maßstab' und ‚Ergebnis eines Verhältnisses') auf. Des Weiteren weiß der Modellschüler, dass der ‚Bruchstrich durch Divisionszeichen' ersetzbar ist. Dieser kognitive Inhalt ist aber aufgrund einer im Lehrtext fehlenden Begründung des Sachverhalts primär an die symbolische-Darstellung-Leerstelle des BRUCH-Schemas geknüpft und ist mit dem BEZEICHNETEM eines BRUCHS (wie etwa ‚Operator') kaum verbunden.

Nun zum zweiten zentralen Referenzträger des Lehrtextes ‚Dezimalzahl': Im Gegensatz zum analysierten ‚Kasten', in dem die Dezimalzahlen zum ersten Mal im Schulbuch auftauchen, wurden sie im vorliegenden Fall bereits in vorherigen Kapiteln behandelt. Dabei wurden die Dezimalzahlen als Zahlen, die in einer erweiterten Stellenwerttafel darstellbar sind, eingeführt (vgl. den dazugehörigen Lehrtext im Anhang Abb. 3). Des Weiteren wurde anhand konkreter Beispiele mitgeteilt, dass der Zusammenhang zwischen einem Stellenwert und – bei der Betrachtung der Dezimalzahl von links nach rechts – seinem nachfolgendem Stellenwert der gleiche ist wie im Bereich der natürlichen Zahlen; der Stellenwert ist zehnmal so groß wie der nachfolgende. Schließlich wurde erwähnt, dass man „[…] Dezimalzahlen als Summen der einzelnen Stellen schreiben [kann]" (Pies et al. 2007, S. 110). Dieser Mitteilung folgen zwei Gleichungen, die erste von ihnen lautet: „$14{,}15 = 1Z + 4E + 1z + 5h = 10 + 4 + \frac{1}{10} + \frac{5}{100}$" (ebd.). In den nachfolgenden Schulbuchlehrtexten im Rahmen des Kapitels ‚Dezimalzahlen' wurde das Rechnen mit Dezimalzahlen behandelt, dabei wurden alle Regeln ausschließlich auf der symbolischen Ebene formuliert und kein einziges Mal (!) begründet.

Ausgehend von diesen Schulbuchinhalten wird festgelegt, dass der Modellschüler über ein verallgemeinertes DEZIMALZAHL-Schema verfügt. Dabei weiß er, dass DEZIMALZAHLEN spezifische ZAHLEN sind, die in einer erweiterten Stellenwerttafel und als Summe der Brüche mit dem Nenner 10, 100, 1000 darstellbar sind. Im Wesentlichen ist damit die Darstellung-Leerstelle des DEZIMALZAHL-Schemas belegt. Inwiefern verfügt unser Modellschüler aber über eine elaborierte Belegung der Bezeichneten-Leerstelle einer DEZIMALZAHL? Inwiefern kann angenommen werden, dass er über ein verfestigtes und der Norm entsprechendes AUFBAU-DER-DEZIMALZAHLEN-Schema, das als Belegung der Bezeichnetes-Leerstelle betrachtet werden kann, verfügt? Solch ein Schema umfasst das Wissen darüber, dass Dezimalzahlen nach dem gleichen Prinzip (dezimales Stellenwertsystem) aufgebaut sind wie die natürlichen Zahlen, dass sie aber im Vergleich zu diesen kleinere Bündelungseinheiten/ Stellenwerte zulassen. Dieses Wissen/Schema ist jedoch umfangreich und komplex, so dass viele Schüler (auch nach der Behandlung der Dezimalbrüche in der Schule) diesbezüglich über ein der fachlichen Norm nicht entsprechendes Schema verfügen.[116] Im Lehrtext, in dem Dezimalzahlen eingeführt werden, sind diese Kenntnisse lediglich anhand eines graphisch-mathematischen Hilfswerkzeugs ‚Stellenwerttafel' angedeutet. Um aus diesen Textdaten das oben skizzierte Wissen zu schlussfolgern, bedarf es eines umfassenden Stellenwert-verständnisses, also elaborierter und der Norm entsprechender STELLENWERT- und STELLENWERTTAFEL-Schemata. Die nachfolgenden Lehrtexte beinhalten kaum Aktivierungs-potential bezüglich des AUFBAU-DER–DEZIMALZAHLEN-Schemas, denn in ihnen werden die einzelnen Rechenregeln ohne eine Begründung mitgeteilt. Damit wird festgelegt, dass der Modellschüler zwar ‚etwas' über den AUFBAU DER DEZIMALZAHLEN weiß, dieses Schema ist aber nicht verfestigt, vage, sozusagen in einem ‚Schwebezustand' und kann daher relativ schwer aktiviert werden. Des Weiteren wird davon ausgegangen, dass der Modellschüler aufgrund der Mitteilung, dass ‚Dezimalzahlen als Summen der einzelnen Stellen schreibbar sind' über die lokale Sichtweise auf Dezimalzahlen verfügt. Sie ist aber ebenfalls (noch) nicht verfestigt, da sie in den nachfolgenden Lehrtexten nicht aufgegriffen bzw. aktiviert wird. Insgesamt erscheinen BRÜCHE und DEZIMALZAHLEN im Kopf unseres Modellschülers als größtenteils grundverschiedene Zahlen, die miteinander kaum verknüpft sind. BRÜCHE bezeichnen ANTEILE, DEZIMALZAHLEN werden dagegen kaum in einer Verbindung zu den ANTEILEN gebracht. Die letztgenannten werden primär als spezifische ZAHLEN, die aufgrund ihres AUFBAUS eng mit NATÜRLICHEN ZAHLEN verwandt sind, betrachtet.

[116] Padberg beschreibt ausführlich die Komplexität des (dezimalen) Stellenwertsystems (vgl. Padberg 2005, S. 55–62). Die einzelnen von Padberg erwähnten Merkmale des (dezimalen) Stellenwertsystems können als notwendige kognitive Inhalte eines der fachlichen Norm nicht widersprechenden STELLENWERT-Schemas aufgefasst werden. Heckmann führt in diesem Zusammenhang eine umfassende empirische Untersuchung durch, in der das Dezimalbruchverständnis deutscher Realschüler vor und nach der Behandlung der Dezimalbrüche in der Schule anhand schriftlicher Tests und Interviews untersucht wird. Das extrem mangelnde Stellenwertverständnis der Schüler sowohl vor als auch nach der Behandlung der Dezimalzahlen stellt dabei einen zentralen Befund dar. Heckmann resümiert: „Vor der unterrichtlichen Behandlung von Dezimalbrüchen [ist] kaum ein Schüler in der Lage, die Anordnung der Stellenwerte richtig über das Komma fortzusetzen. […] Die meisten Schüler [erkennen] offenbar nicht die fortgesetzte Division durch 10 als erzeugendes Merkmal, sondern richten ihre Aufmerksamkeit auf andere Stellenwerteigenschaften aus dem Bereich der natürlichen Zahlen und übertragen diese fehlerhaft auf die Dezimalen. […] Die beschriebenen Probleme [sind] auch nach der Behandlung der Dezimalbruchrechnung noch immer von großer Bedeutung" (Heckmann 2006, S. 563).

‚Prozente' tauchen im zu analysierendem Lehrtext zum ersten Mal im Schulbuch auf, so dass davon ausgegangen wird, dass der Modellschüler diesbezüglich lediglich über Alltagswissen verfügt, insbesondere verfügt er nicht über ein allgemeines abstraktes PROZENT-Schema, sondern lediglich über einige im Alltag oft vorkommende konkrete PROZENT-Schemata, wie beispielsweise 50% oder 25%.

Nachdem das relevante fachliche Vorwissen des Modellschülers skizziert wurde, werden im Folgenden die sprachlichen Merkmale des Lehrtextes beschrieben und der Gesamttext in Teiltexte gegliedert.

II. Beschreibung formaler sprachlicher Merkmale des Lehrtextes

Der Lehrtext ist typographisch recht komplex; er weist drei Hervorhebungen natursprachlicher Sätze, vier hervorgehobene Beispiel-Kästen mit formal-mathematischen und weiteren Zeichen sowie drei Randnotizen auf. In Abbildung 11 sind die einzelnen sprachlichen Einheiten durchnummeriert, dabei wurden die natursprachlichen Textdaten entsprechend ihrer Syntax indiziert; jeder vollständige Satz wurde mit einer Nummer versehen. Bei den formal-mathematischen Zeichen wurde ebenfalls entsprechend der Syntax jede Gleichung als eine Einheit notiert. Eine Ausnahme bildet der letzte ‚Kasten', der Prozentangaben und Dezimalzahlen beinhaltet; alle seine sprachlichen Einheiten wurden mit einer übergreifenden Nummer versehen (Ausdruck 22). Die Randnotizen wurden ebenfalls unabhängig von ihren syntaktischen Einheiten mit einer einzigen Nummer versehen und sind in die Sequenz des Haupttextes eingebaut (Ausdrücke 10, 19 und 23). Letzteres ist insofern gerechtfertigt, als die Randnotizen sprachlich stets mit einem bestimmten Teiltext des Haupttextes verbunden sind; sie greifen einen der Referenzträger des Haupttextes auf und sind auch in der Nähe des entsprechenden Teiltextes platziert.

Der Lehrtext weist auf der Ebene der Satzbedeutungen eine recht deutliche Einteilung auf, die in Abbildung 11 mit der Teiltextnummerierung und der Unterstreichung der zentralen Referenzträger des jeweiligen Teiltextes veranschaulicht ist. Im ersten typographisch hervorgehobenen natursprachlichen Satz (Ausdruck 1) teilt der Autor mit, dass Dezimalzahlen und Brüche Schreibweisen von spezifischen Zahlen (die auf einem Zahlenstrahl auch zwischen zwei natürlichen Zahlen liegen können) sind. Der darauffolgende Teiltext (Ausdrücke 2-19) bezieht sich explizit auf ‚Umwandlungen' und zeigt auf der typographisch-modalen und inhaltlichen Ebenen eine sich wiederholende Struktur; es wird verbal mitgeteilt, dass sich Dezimalzahlen oder Brüche bzw. ihre Teilmengen jeweils in die andere Schreibweise ‚umwandeln' lassen (Ausdrücke 2, 5-6, 11-12). Dem verbalen Teiltext folgt unter der Überschrift ‚Beispiel' stets ein formal-mathematischer Teiltext in Gestalt mehrerer Gleichungen, bei denen Brüche und Dezimalzahlen einander gleichgesetzt sind (Ausdrücke 3-4, 7-9, 13-15). Der ‚Umwandlungsteiltext' endet mit Mitteilungen zu ‚sich wiederholenden Ziffergruppen' als besondere Ergebnisse der Umwandlungen (Ausdrücke 16-19). Der Lehrtext wird abgeschlossen mit Mitteilungen über ‚Prozente' (Ausdrücke 20-

23). Aufgrund der typographischen Signale und der Satzbedeutungen wird der Lehrtext in folgende Teiltexte eingeteilt:

- Teiltext 1 (Ausdruck 1): Die Aussage darüber, dass ‚Dezimalzahlen und Brüche zwei verschiedene Schreibweisen' spezifischer Zahlen sind,
- Teiltext 2 (Ausdrücke 2-19): Aussagen über die ‚wechselseitige Umwandlung der Brüche und Dezimalzahlen',
- Teiltext 3 (Ausdrücke 20-23): Aussagen über ‚Prozente'.

Der Teiltext 2 weist wiederum folgende Subtexte auf:

- Teiltext 2.1 (Ausdrücke 2-4): Aussagen über die ‚Umwandlung der Dezimalzahlen in Brüche',
- Teiltext 2.2 (Ausdrücke 5-10): Aussagen über die ‚Umwandlung der Brüche, deren Nenner eine Zehnerpotenz ist und der Brüche, deren Nenner man zu einer Zehnerpotenz erweitern oder kürzen kann, in Dezimalzahlen',
- Teiltext 2.3 (Ausdrücke 11-15): Aussagen über die ‚Umwandlung beliebiger Brüche in eine Dezimalzahl',
- Teiltext 2.4 (Ausdrücke 16-19): Aussagen über die ‚Periode und periodische Dezimalzahlen' als besondere Ergebnisse der Umwandlung.

130 DEZIMALZAHLEN **Wissen**

T1

[1] **Dezimalzahlen und Brüche sind nur zwei verschiedene Schreibweisen von Zahlen, die auf einem Zahlenstrahl auch zwischen zwei natürlichen Zahlen liegen können.**

T2.1

[2] Viele Dezimalzahlen lassen sich leicht in Brüche umwandeln.

Beispiel

[3] $\underbrace{0{,}125}_{\text{3 Stellen}} = \frac{125}{\underbrace{1000}_{\text{3 Nullen}}} = \frac{1}{8}$

[4] $\underbrace{15{,}24}_{\text{2 Stellen}} = \frac{1524}{\underbrace{100}_{\text{2 Nullen}}} = 15\frac{6}{25}$

[10] BEACHTE
Nicht bei jedem Bruch lässt sich durch Kürzen oder Erweitern der Nenner zu einer Zehnerpotenz machen.

T2.2

[5] Brüche, deren Nenner eine Zehnerpotenz ist, lassen sich umgekehrt leicht in Dezimalzahlen umwandeln.[6] Auch Brüche, deren Nenner man zu einer Zehnerpotenz erweitern oder kürzen kann, können leicht umgewandelt werden.

Beispiel

[7] $\frac{45}{\underbrace{100}_{\text{2 Nullen}}} = \underbrace{0{,}45}_{\text{2 Stellen}}$

[8] $\frac{3}{20} \overset{\cdot 5}{=} \frac{15}{\underbrace{100}_{\text{2 Nullen}}} = \underbrace{0{,}15}_{\text{2 Stellen}}$

[9] $\frac{8}{40} \overset{:4}{=} \frac{2}{\underbrace{10}_{\text{1 Null}}} = \underbrace{0{,}2}_{\text{1 Stelle}}$

T2.3

[11] **Um beliebige Brüche in eine Dezimalzahl umzuwandeln, fasst man den Bruchstrich als Rechenaufforderung auf.**
[12] **Das Komma wird gesetzt, wenn das erste Mal eine Null ergänzt wird.**

[19] BEACHTE
Die sich wiederholende Ziffergruppe (Periode) wird durch einen Strich darüber gekennzeichnet:
- *$0{,}33\ldots = 0{,}\overline{3}$ (sprich: null Komma Periode drei)*
- *$0{,}833\ldots = 0{,}8\overline{3}$ (sprich: null Komma acht Periode drei)*

Die Periode muss nicht direkt hinter dem Komma beginnen.

Beispiel

[13] $\frac{3}{5} = 3:5 = 0{,}6$
0
30
30
0

[14] $\frac{1}{3} = 1:3 = 0{,}33\ldots$
0
10
9
10
9
10
…

[15] $\frac{5}{6} = 5:6 = 0{,}833\ldots$
0
50
48
20
18
20
…

[16] Es kommt vor (Beispiel 2 und 3), dass die Rechnung nicht aufhört, weil immer wieder ein Rest bleibt.

T2.4

[17] **Immer wenn die Division nicht abbricht, wiederholt sich eine gewisse Anzahl von Ziffern bei den Resten.**[18] **Die sich wiederholende Zifferngruppe heißt *Periode*, die Dezimalzahl heißt *periodisch*.**

[23] SCHON GEWUSST?
Das Wort „Prozent" und das Prozentzeichen stammen aus dem Italienischen. Das italienische „pro cento" heißt „von Hundert".

T3

[20] Anteile werden im Alltag oft in Prozent angegeben, z. B. bei Preisnachlässen oder bei Umfragen.
[21] Prozentangaben sind eine andere Schreibweise für Hundertstel.

[22] Beispiel

1 %	0,01
10 %	0,1
20 %	0,2
25 %	0,25
50 %	0,5
100 %	1

Abbildung 11: Lehrtext ‚Dezimalzahlen, Brüche und Prozentschreibweise' mit durchnummerierten sprachlichen Einheiten (Pies et al. 2007, S. 130)

III. Beschreibung naheliegender (Haupt-)Modelle und naheliegender Lernergebnisse

Aufgrund der Sprachbedeutungen zerfällt der Text in drei recht unabhängige Teiltexte. Inwiefern lassen sich diese Teiltexte sinnvoll, also zusammenhängend ausdeuten? Welche Schemata liefern möglichst textumfassende Interpretationsvorlagen? Der Gesamtlehrtext ist im Wesentlichen auf vier Arten sinnvoll ausdeutbar:

1. als SATZ ‚Brüche und Dezimalzahlen bezeichnen die gleichen Zahlen‘,
2. als SATZ und BEGRIFF ‚Schreibweisen der Anteile‘,
3. als VERFAHREN ‚Wechselseitige Umwandlung der Brüche, Dezimalzahlen und Prozente‘,
4. als AUFGABEN ‚Brüche, Dezimalzahlen und Prozente‘.

Im Folgenden werden die naheliegenden Modelle und die entsprechenden Lernergebnisse ausführlich beschrieben.

III. 1) *Beschreibung des naheliegenden SATZ-Modells und des damit einhergehenden Lernergebnisses*

III. 1a) Charakteristik des SATZ-Modells

Das SATZ-Schema erlaubt eine recht sinnstiftende Interpretation, d.h. ein Modell, dessen Struktur und Belegung intakt sind und das möglichst viele Textdaten integriert. Bei dieser Lesart wird anhand des Lehrtextes ein Modell zum SATZ ‚Brüche und Dezimalzahlen bezeichnen die gleichen Zahlen‘ konstruiert, das aus der SATZAUSSAGE, die anhand des Teiltextes 1 belegt wird, und aus einer umfangreichen und komplex strukturierten BEGRÜNDUNG DES SATZES, deren textbasierten Werte aus dem Teiltext 2 stammen, besteht. Auf der Grundlage dieses Textverständnisses kann der Kerngedanke bzw. die größtmögliche Zusammenfassung der Teiltexte 1-2 wie folgt formuliert werden: Dezimalzahlen und Brüche bezeichnen die gleichen Zahlen, weil sie stets ineinander umwandelbar sind. Teiltext 3 wird als ein den SATZ ergänzender BEGRIFF ausgedeutet. Die entsprechende Text-Modell-Struktur ist nachfolgend abgebildet.

SATZ ‚Brüche und Dezimalzahlen bezeichnen die gleichen Zahlen‘
[1] SATZAUSSAGE (T1)
[2] GRUND FÜR DIE GELTUNG DES SATZES ‚Alle Brüche und alle Dezimalzahlen sind stets ineinander umwandelbar‘ (T2)
[2.1] TEILSATZ ‚Alle nicht periodischen Dezimalzahlen sind in Brüche umwandelbar‘ (T2.1))
[2.1.1] TEILSATZAUSSAGE (2)
[2.1.2] GRUND FÜR DIE GELTUNG DES TEILSATZES ‚Alle nicht periodischen Dezimalzahlen sind stets in Brüche, deren Nenner eine Zehnerpotenz ist, umwandelbar‘ (3-4)
[2.2] TEILSATZ ‚Alle Brüche sind in Dezimalzahlen umwandelbar‘ (T2.2-2.3)
[2.2.1] TEILSATZ ‚Brüche, deren Nenner eine Zehnerpotenz ist und Brüche, deren Nenner man zu einer Zehnerpotenz erweitern oder kürzen kann, sind in Dezimalzahlen umwandelbar‘ (T2.2)
[2.2.2] TEILSATZ ‚Brüche, deren Nenner man nicht zu einer Zehnerpotenz erweitern oder kürzen kann, sind ebenfalls in Dezimalzahlen umwandelbar‘ (T2.3)
[2.3] TEILSATZ ‚Alle periodischen Dezimalzahlen sind in Brüche umwandelbar‘ (T2.4 und fehlender Teiltext)
[2.3.1] MOTIV ‚Existenz besonderer Dezimalzahlen‘(T2.4)
[2.3.2] AUSSAGE und GRUND FÜR DIE GELTUNG DES TEILSATZES (fehlender Teiltext)
[3] Ergänzender BEGRIFF ‚Prozente bezeichnen spezifische Brüche/Dezimalzahlen‘ (T3)
[3.1] MOTIV ‚Prozente tauchen im Alltag auf‘ (20)
[3.2] BEZEICHNETES ‚Prozente bezeichnen spezifische Brüche/ Dezimalzahlen‘ (21-23)

Struktur 5: Vom Lehrtext ‚Dezimalzahlen, Brüche und Prozentschreibweisen‘ nahegelegtes SATZ-Modell

Der erste natursprachliche Ausdruck, dass ‚Dezimalzahlen und Brüche nur zwei verschiedene Schreibweisen von bestimmten Zahlen sind‘, wird hier als ein ZUSAMMENHANG zwischen DEZIMALZAHLEN und BRÜCHEN ausgedeutet; beide bezeichnen die gleichen Zahlen (vgl. [1]). Der Fokus fällt dabei nicht auf die Spezifik dieser Zahlen, dass sie also auf einem Zahlenstrahl auch zwischen zwei natürlichen Zahlen liegen können, sondern auf die Tatsache, dass das Bezeichnete bei den Brüchen und Dezimalzahlen gleich ist. Die Grund-für-die-Geltung-Leerstelle wird anhand des SATZES ‚Alle Brüche und alle Dezimalzahlen sind stets ineinander umwandelbar‘ belegt (vgl. [2]), dessen Werte aus dem Teiltext 2 stammen. Dieser Belegung liegt der allgemeine Gedanke zugrunde, dass Schreibweisen/Zeichen die gleichen Zahlen bezeichnen, wenn sie ineinander ‚umwandelbar‘ sind. Die Struktur des umfangreichen zweiten Teilmodells, also des begründenden SATZES ‚Alle Brüche und alle Dezimalzahlen sind stets ineinander umwandelbar‘, ist recht komplex. Der SATZ besteht aus drei TEILSÄTZEN: ‚Alle nicht periodischen Dezimalzahlen sind umwandelbar‘ (vgl. [2.1]), ‚Alle Brüche sind umwandelbar‘ (vgl. [2.2]) und dem (größtenteils offenen) TEILSATZ ‚Alle periodischen Dezimalzahlen sind umwandelbar‘ (vgl. [2.3]). Die drei TEILSÄTZE sind im Rahmen des übergeordneten SATZES ‚Alle Brüche und alle Dezimalzahlen sind stets ineinander umwandelbar‘ notwendig. Im Folgenden werden die Struktur und die Inhalte der einzelnen TEILSÄTZE erläutert.

Der erste TEILSATZ [2.1] ‚Alle nicht periodischen Dezimalzahlen sind in Brüche umwandelbar‘ besteht im Wesentlichen aus zwei belegten Leerstellen: SATZAUSSAGE [2.1.1] und BEGRÜNDUNG DES SATZES [2.1.2]. Die SATZAUSSAGE wird auf einer abstrakteren Ebene anhand des Ausdrucks 2 und auf einer konkreteren Ebene anhand der formal-mathematischen Ausdrücke, also der Beispielgleichungen (Ausdrücke 3 und 4) generiert. Die Angabe der Quantität der Dezimalzahlen ‚viele‘ muss vom Leser unter Hinzunahme des später folgenden Teiltextes 2.4 rückwirkend mit ‚nicht periodisch‘ konkretisiert werden. Die formal-mathematischen Ausdrücke sind jedoch nicht nur als Konkretisierung der SATZAUSSAGE interpretierbar, sie liefern auch eine BEGRÜNDUNG für die Unwandelbarkeit nicht periodischer Dezimalzahlen, wenn man sie als folgenden kognitiven Inhalt ausdeutet: Nicht periodische Dezimalzahlen sind stets in Brüche, deren Nenner eine Zehnerpotenz ist, umwandelbar. Der Kerngedanke bzw. die größtmögliche Zusammenfassung der kognitiven Inhalte des Teilmodells [2.1] kann damit in etwa wie folgt angegeben werden: Die nicht periodischen Dezimalzahlen sind stets in Brüche umwandelbar, und dies deshalb, weil sie stets in Brüche, deren Nenner eine Zehnerpotenz ist, umwandelbar sind. Der begründende SATZ ist allerdings für den Modellschüler neu, so dass die Frage im Raum steht, warum die (nicht periodischen) Dezimalzahlen stets in solche spezifischen Brüche umwandelbar sind. Die Textdaten liefern bezüglich dieser Leerstelle keine Werte, so dass sie höchstens mit inferierten Werten belegbar ist. Dazu muss der Modellschüler von der ihm bekannten, aber nicht verfestigten lokalen Sichtweise auf die Dezimalzahlen bzw. von dem Aufbau der Dezimalzahlen auf die (neue) globale Sichtweise schließen. In einer verkürzten mathematisch-formalen Schreibweise können die entsprechenden Inferenzen in Bezug auf die erste ‚Beispielgleichung‘ (Ausdruck 3) wie folgt angegeben werden: $0{,}125 = \frac{1}{10} + \frac{2}{100} + \frac{5}{1000} = \frac{10}{1000} + \frac{20}{1000} + \frac{5}{1000} = \frac{125}{1000}$. Da die ‚Zwischenschritte‘ in der ‚Beispielgleichung‘ fehlen und hierfür notwendiges Wissen nicht verfestigt ist, weist die entsprechende Inferenz einen hohen Schwierigkeitsgrad auf. Zusätzlich müssen die inferierten BEGRÜNDUNGEN konkreter Beispielgleichungen vom Modellschüler in Bezug auf alle möglichen (nicht periodischen) Dezimalzahlen verallgemeinert werden, was aufgrund der fehlenden Textdaten ebenfalls schwer ist. Die Text-Modell-Struktur des begründenden SATZES, also des Teilmodells [2.1.2], kann insgesamt wie folgt angegeben werden:

[2.1.2] SATZ ‚Alle nicht periodischen Dezimalzahlen sind in Brüche, deren Nenner eine Zehnerpotenz ist, umwandelbar‘ (3-4)

[2.1.2.1] SATZAUSSAGE (3-4)

[2.1.2.2] GRUND FÜR DIE GELTUNG DES SATZES ‚Jede Dezimalzahl stellt eine Summe einzelner Stellenwerte dar und diese Summe ist stets ein Bruch mit einer Zehnerpotenz im Nenner' (fehlender Teiltext)

Das zweite Teilmodell des übergreifenden SATZES [2] ‚Alle Brüche und alle Dezimalzahlen sind stets ineinander umwandelbar' hat den TEILSATZ ‚Alle Brüche sind in Dezimalzahlen umwandelbar' (vgl. [2.2]) zum Gegenstand. Dieser TEILSATZ ist wiederum in zwei weitere untergeordnete TEILSÄTZE gegliedert: Brüche mit einer Zehnerpotenz im Nenner sowie Brüche, deren Nenner auf eine Zehnerpotenz erweiterbar oder kürzbar ist, sind in Dezimalzahlen umwandelbar (vgl. [2.2.1]) und: Brüche, deren Nenner nicht auf eine Zehnerpotenz erweiterbar oder kürzbar ist, sind in Dezimalzahlen umwandelbar (vgl. [2.2.2]). Die Text-Modell-Struktur des ersten TEILSATZES ist nachfolgend angegeben:

[2.2.1] SATZ ‚Brüche mit einer Zehnerpotenz im Nenner und Brüche, deren Nenner auf eine Zehnerpotenz erweiterbar oder kürzbar ist, sind in Dezimalzahlen umwandelbar' (T2.2)

[2.2.1.1] SATZAUSSAGE (T2.2)

[2.2.1.2] GRUND FÜR DIE GELTUNG DES SATZES ‚Brüche mit einer Zehnerpotenz im Nenner können stets als eine Summe der Brüche mit den Nennern 10, 100, 1000, … dargestellt werden' (fehlender Teiltext)

[2.2.1.3] SATZOBJEKTE *(*fehlender Teiltext)

Die SATZAUSSAGE [2.2.1.1] ist auf einer allgemeinen Ebene anhand der natursprachlichen Ausdrücke 5 und 6 und auf einer konkreten Ebene anhand der Beispielgleichungen (Ausdrücke 7-9) leicht bildbar. Die BEGRÜNDUNG DES TEILSATZES (vgl. [2.2.1.2]) muss analog zum ersten TEILSATZ ausschließlich anhand der formal-mathematischen Textdaten inferiert werden. So sind zunächst die BEGRÜNDUNGEN der konkreten ‚Beispielgleichungen' zu konstruieren, in Bezug auf das erste ‚Beispiel' lautet die verkürzte BEGRÜNDUNG wie folgt: $\frac{45}{100} = \frac{40}{100} + \frac{5}{100} = \frac{4}{10} + \frac{5}{100} = 0{,}45$. Analog zu den vorherigen ‚Beispielen' (Ausdrücke 3-4) fehlen auch hier die begründenden ‚Zwischenschritte', wodurch das Inferieren einer BEGRÜNDUNG stark erschwert wird. Bei den Beispielen 8 und 9 muss zusätzlich inferiert werden, dass sich das Bezeichnete eines Bruchs durch Kürzen oder Erweitern nicht ändert. Schließlich müssen die BEGRÜNDUNGEN konkreter Umwandlungen vom Modellschüler verallgemeinert werden. Insgesamt kann festgehalten werden, dass eine vollständige BEGRÜNDUNG des TEILSATZES [2.2.1] anhand der ‚Beispielgleichungen' schwer zu bilden ist. Des Weiteren entsteht in Bezug auf den SATZ die Frage, welche Brüche so erweiterbar oder kürzbar sind, dass im Nenner eine Zehnerpotenz entsteht.[117] Anders formuliert: Kann man – und falls ja, wie – einem Nenner ‚ansehen', ob er auf eine Zehnerpotenz erweiterbar oder kürzbar ist? Diese Frage nach den SATZOBJEKTEN (aktivierte Leerstelle [2.2.1.3]) wird vom

[117] Aus fachlicher Sicht bezieht sich der SATZ nicht nur auf die im Lehrtext erwähnten Objekte, sondern auch auf die Brüche, die durch das Erweitern und (!) Kürzen auf einen Bruch mit einer Zehnerpotenz im Nenner umformbar sind, wie beispielsweise $\frac{3}{6}$.

Lehrtext nicht beantwortet und wird von unserem Modellschüler kaum selbstständig beantwortet (belegt) werden können; sie bleibt daher offen.

Der zweite TEILSATZ des SATZES [2.2] bezieht sich auf die Umwandelbarkeit der Brüche, deren Nenner nicht auf eine Zehnerpotenz erweiterbar oder kürzbar ist (vgl. [2.2.2]), seine Text-Modell-Struktur ist nachfolgend dargestellt.

[2.2.2] SATZ ‚Brüche, deren Nenner nicht auf eine Zehnerpotenz erweiterbar oder kürzbar ist, sind in Dezimalzahlen umwandelbar' (T2.3)

- [2.2.2.1] SATZAUSSAGE (11, 13-15)
- [2.2.2.2] GRUND FÜR DIE GELTUNG DES SATZES ‚Einen beliebigen Bruch kann man stets als eine Division aufschreiben und das Ergebnis einer Division ist stets eine Dezimalzahl' (T2.3)
  - [2.2.2.2.1] TEILSATZ ‚Einen Bruch kann man stets als eine Division aufschreiben'
    - [2.2.2.2.1.1] TEILSATZAUSSAGE (11-15)
    - [2.2.2.2.1.2] GRUND FÜR DIE GELTUNG DES TEILSATZES (fehlender Teiltext)
  - [2.2.2.2.2] TEILSATZ ‚Das Ergebnis einer Division ist stets eine Dezimalzahl'
    - [2.2.2.2.2.1] TEILSATZAUSSAGE (11-15)
    - [2.2.2.2.2.2] GRUND FÜR DIE GELTUNG DES TEILSATZES *(*fehlender Teiltext)
- [2.2.2.3] SATZOBJEKTE (fehlender Teiltext)

Die SATZAUSSAGE [2.2.2.1] ist anhand des Ausdrucks 11 und der ‚Beispiele' (Ausdrücke 13-15) relativ leicht inferierbar. Anhand der Textdaten ist gleichzeitig eine (allgemeine) BEGRÜNDUNG DES TEILSATZES (vgl. [2.2.2.2]) konstruierbar, nämlich die, dass (alle) Brüche stets als Division aufschreibbar sind und dass das Ergebnis einer Division stets eine Dezimalzahl ist. Doch inwiefern sind diese begründenden SÄTZE für den Modellschüler einsichtig bzw. inwiefern sind ihre Grund-für-Geltung-Leerstellen belegbar? Der Modellschüler weiß, dass der ‚Bruchstrich gleichbedeutend mit dem Divisionszeichen' ist (vgl. Vorwissen des Modellschülers), doch er weiß nicht, warum dies so ist und folglich auch nicht, warum ein Bruch als Division aufschreibbar ist. Dieser Sachverhalt kann also von ihm nicht inferiert werden, die entsprechende aktivierte Leerstelle bleibt offen. Der zweite begründende SATZ, also die Tatsache, dass bei jeder Division eine Dezimalzahl als Ergebnis entsteht, bezieht sich auf zwei Aspekte: Zunächst muss einsehbar sein, dass als Ergebnis einer Divisionsrechnung eine Dezimalzahl entsteht und dann, dass jede Divisionsrechnung tatsächlich lösbar ist. Der zuletzt genannte Aspekt kann anhand der formal-mathematischen Zeichen, also der gezeigten schriftlichen Division (Ausdrücke 13-15) inferiert werden, indem verallgemeinert und abstrahiert wird, dass die mitgeteilten Divisionsschritte stets für alle Zahlen ausführbar sind. Die Einsicht in den erstgenannten Aspekt, dass nämlich bei einer Divisionsrechnung eine Dezimalzahl als Ergebnis entsteht, ist anhand dreier Gleichungen schwer. Warum wird das Komma gesetzt, ‚wenn das erste Mal eine Null ergänzt' wird? Warum darf man eine Null ergänzen? Diese Leerstellen sind anhand des Vorwissens des Modellschülers kaum belegbar und bleiben daher weitgehend offen. Die begründenden SÄTZE ‚Alle Brüche sind als Divisionsrechnung schreibbar' und ‚Das Ergebnis jeder Division ist stets eine Dezimalzahl' bleiben also unbegründet, denn ihre Grund-für-die-Geltung-Leerstelle kann weitgehend weder mit textbasierten noch mit inferierten Werten belegt werden. Des Weiteren entsteht analog zum vorherigen SATZ [2.2.1] die (offene) Frage nach den SATZOBJEKTEN (vgl. [2.2.2.3]).

Die Frage nach der Unwandelbarkeit der ‚besonderen/periodischen' Dezimalzahlen, also des TEILSATZES [2.3] (vgl. Struktur 5), wird aufgrund des Teiltextes 2.4 aufgeworfen, in dem die Existenz der besonderen, also periodischen Dezimalzahlen mitgeteilt wird (vgl. [2.3.1]). Eine sinnvolle BEGRÜNDUNG des textübergreifenden SATZES verlangt eine Beantwortung der Frage, ob auch alle möglichen periodischen Dezimalzahlen in Brüche umwandelbar sind und sie folglich die gleichen Zahlen wie die Brüche bezeichnen. Dass (einige?) periodische Dezimalzahlen in Brüche umwandelbar sind, ist anhand der Textdaten inferierbar; diejenigen periodischen Dezimalbrüche, die aus der Umwandlung der Brüche hervorgehen, sind diesen Brüchen gleich und müssten daher ebenfalls umwandelbar sein. Sind das aber alle möglichen periodischen Dezimalbrüche? Existieren vielleicht weitere besondere periodische Dezimalzahlen, die nicht aufgrund einer Divisionsrechnung entstehen und damit auch nicht in Brüche umwandelbar sein dürften? Bezeichnen also einige periodische Dezimalzahlen vielleicht andere (neue) Zahlen, die von den Brüchen nicht bezeichnet werden? Ob alle möglichen periodischen Dezimalzahlen als Ergebnisse einer Divisionsrechnung aufzufassen sind und ob folglich alle möglichen periodischen Dezimalzahlen in Brüche umwandelbar sind, ist anhand der Textdaten nicht beantwortbar, so dass diese zentralen Leerstellen offen bleiben; ihre Belegung ist vom Modellschüler nicht inferierbar (vgl. [2.3.2]).

Am Ende des Lehrtextes taucht ein Teiltext auf, der sich auf Prozente bezieht (T3). Wie ist dieser Teiltext ausdeutbar und in das bereits konstruierte SATZ-Modell integrierbar? Zunächst wird der Teiltext 3 losgelöst vom Vortext betrachtet. Im Ausdruck 20 wird mitgeteilt, dass Prozente im Alltag oft gebraucht werden und dass sie Anteile bezeichnen. Im folgenden Ausdruck 21 wird das Bezeichnete der Prozente präzisiert: Es handelt sich um Hundertstel. Teiltext 3 ist damit als ein (neuer) BEGRIFF ‚Prozente' ausdeutbar, dessen MOTIV ‚Prozente tauchen im Alltag auf' und BEZEICHNETES ‚spezifische Anteile (Hundertstel)' mitgeteilt werden. Während anhand des Ausdrucks 21 das BEZEICHNETE der PROZENTE in einer allgemeinen Weise belegt wird, erscheint der Kasten (formal-mathematischer Teiltext 22), in dem einige Prozentangaben den entsprechenden Dezimalzahlen gegenübergestellt werden, als Mitteilung des BEZEICHNETEN einiger konkreter PROZENTE. Diese Inferenz ist aufgrund der expliziten Aussagen „1% 0,01 10% 0,1; 20% 0,2 usw." schwer, denn hierzu müssen die Dezimalangaben in Hundertstel ‚übersetzt' werden. Bezüglich des ersten Beispiels ist dazu folgender Gedankengang zu entwickeln: 10% ist gleich (fehlendes Zeichen im Teiltext!) 0,1, also ein Zehntel, also 10 Hundertstel. Die ‚Übersetzung' der Dezimalzahlen in Hundertstel beinhaltet mindestens zwei Stolpersteine; erstens sind die Dezimalzahlen mit einer Nachkommastelle schwer als Hundertstel interpretierbar und zweitens müssen die Dezimalzahlen mit zwei Nachkommastellen global – im Gegensatz zur lokalen Sichtweise – betrachtet werden (0,25 sind 25 Hundertstel und nicht 2 Zehntel plus 5 Hundertstel). Die für unseren Modellschüler neue globale Sichtweise wird jedoch im Vortext – wie bereits erläutert – anhand zweier Gleichungen (Ausdrücke 3 und 4) lediglich vage angedeutet. Insgesamt bleibt unklar, warum im Text nicht die Anteile bzw. Zehnerbrüche den Prozentangaben gegenübergestellt sind, sondern die Dezimalzahlen.

Wie hängt aber der neue BEGRIFF ‚Prozente' mit dem bereits konstruierten SATZ ‚Brüche und Dezimalzahlen bezeichnen die gleichen Zahlen' zusammen? Zur Beantwortung dieser Frage muss eine Verbindung zwischen Brüchen/Dezimalzahlen und den Prozenten gesucht werden. Das BEZEICHNETE der PROZENTE liefert solch eine Verbindung, denn es ist gleichzeitig eine Teilmenge der SATZOBJEKTE. PROZENTE bezeichnen spezifische Anteile und damit spezifische Brüche (mit dem Nenner 100) sowie spezifische Dezimalzahlen (mit höchstens zwei Nachkommastellen). Man beachte, dass solch ein verbindendes BEZEICHNETES im Teiltext 3 nicht explizit enthalten ist und inferiert werden muss. Die Verbindung zwischen dem BEGRIFF und dem SATZ beruht ausschließlich auf der Gleichheit der (Teilmenge der) SATZOBJEKTE und des BEGRIFFSBEZEICHNETEN; solch eine Verbindung ist aber im Rahmen eines MATHEMATISCHES-ELEMENT-Schemas – wie allgemein in Kapitel 5.2 erläutert wurde – sinnbeeinträchtigt. Im Anschluss an einen neuen SATZ erwartet unser Modellschüler Inhalte, die eine (vertiefte) Einsicht in den neuen SATZ ermöglichen – wie etwa (zugängliche) Anwendungsmöglichkeiten des SATZES – und/oder Inhalte, die im Rahmen einer mathematischen Theorie mit dem neuen SATZ benachbart sind, also mit ihm kausal-deduktiv zusammenhängen. All das geschieht bei der Einführung des BEGRIFFS ‚Prozente' nicht. Dies ist verwunderlich: Warum tauchen an dieser Stelle des Lehrtextes ‚Prozente' auf? Was beabsichtigt der Autor damit? Insgesamt erscheint der Teiltext 3 als schwer in das konstruierte SATZ-Modell integrierbar.

III. 1b) Skizze der vollzogenen kognitiven Veränderungen

Mit der SATZ-Modellbildung geht eine Zusammenführung des BRUCH- und des DEZIMALZAHL-Schemas einher. Vor der Textverarbeitung waren die beiden Schemata kaum miteinander verknüpft; das BEZEICHNETE DER DEZIMALZAHLEN wurde primär als SPEZIFISCHE ZAHLEN, die analog zu den natürlichen Zahlen aufgebaut sind, betrachtet. Die BRÜCHE bezeichneten dagegen (beliebige) ANTEILE. Die Tatsache, dass (nicht periodische) DEZIMALZAHLEN spezifische ANTEILE und dadurch zumindest teilweise das Gleiche bezeichnen wie BRÜCHE, war nicht verfestigt, sondern vage und in einem Schwebezustand. Im Zuge der Textverarbeitung wird nun das BEZEICHNETE der BRÜCHE und der DEZIMALZAHLEN erweitert und zusammengeführt, wodurch ein neues elaboriertes VON-DEN-BRÜCHEN–UND-DEZIMALZAHLEN-BEZEICHNETE-ZAHLEN-Schema entsteht,[118] in das die erweiterten DEZIMALZAHL- und BRUCH-Schemata eingebettet sind. Unser Modellschüler lernt den aus fachlicher Sicht zentralen Sachverhalt, dass Brüche und Dezimalzahlen die gleichen Zahlen (Bruchzahlen) darstellen. Des Weiteren lernt er die globale Sicht auf die Dezimalzahlen und

[118] Dieses Schema nähert sich dem fachlichen Begriff ‚Bruchzahl' an.

den Zusammenhang zwischen ihm bereits bekannter lokaler und neu erlernter globaler Sichtweise. Bezüglich des neu konstruierten Sub-Schemas PERIODISCHE DEZIMALZAHL, das als eine spezifische DEZIMALZAHL betrachtet wird, sind zahlreiche Leerstellen offen, so dass ‚mehr Fragen als Antworten' bleiben. Schließlich bildet der Modellschüler anhand des Teilmodells [3] ein abstraktes PROZENT-Schema, wobei SPEZIFISCHE BRÜCHE/ DEZIMALZAHLEN als BEZEICHNETES im Schema eingebettet sind.

III. 1c) Beschreibung der Ausprägung schwierigkeitsgradbestimmender Textmerkmale und der Sinnhaftigkeit des SATZ-Modells

Bereits bei der Beschreibung des SATZ-Modells wurde mehrfach angedeutet, dass es stark sinnbeeinträchtigt und anhand des Lehrtextes nur schwer konstruierbar ist. Ursächlich dafür ist, dass alle relevanten Textmerkmale mit Ausnahme des Textverlaufs derart ausgeprägt sind, dass sie die Modellbildung erschweren. So ist der Teiltext 3 schwer in das Modell integrierbar. Des Weiteren weist der Lehrtext viele große ‚Lücken' auf, die vom Modellschüler anhand seines Vorwissens entweder nur schwer oder gar nicht geschlossen werden können. Offene Leerstellen entstehen bei der BEGRÜNDUNG, warum Brüche als Division schreibbar sind und warum diese Divisionsrechnungen stets eine Dezimalzahl als Ergebnis ‚liefern' (vgl. [2.2.2.2]), sowie insbesondere beim TEILSATZ ‚Alle periodische Dezimalzahlen sind in Brüche umwandelbar' (vgl. [2.3]). Des Weiteren bleibt offen, welche Brüche in Brüche mit einer Zehnerpotenz im Nenner (nicht) erweiterbar oder kürzbar sind (vgl. [2.2.1.3] und [2.2.2.3]).

Einige Lücken des Lehrtextes sind zwar schließbar, allerdings erfordert dies umfangreiche und komplexe Inferenzen. Die entscheidende Lücke befindet sich zwischen dem Teiltext 1 und dem darauffolgenden Teiltext 2: Was hat die Tatsache, dass ‚Dezimalzahlen und Brüche zwei verschiedene Schreibweisen von bestimmten Zahlen sind', mit der Möglichkeit der Unwandelbarkeit beider Schreibformen zu tun? Zunächst muss der Fokus darauf gelenkt werden, dass Dezimalzahlen und Brüche gleiche Zahlen bezeichnen, d.h. zentral ist nicht die im Lehrtext explizit erwähnte Tatsache, dass die Zahlen auf einem Zahlenstrahl auch zwischen den natürlichen Zahlen liegen können, sondern dass es sich bei beiden Schreibformen um die gleichen Zahlen handelt. Des Weiteren ist die Inferenz des notwendigen und im Lehrtext nur implizit vorhandenen Gedankens, dass aus der wechselseitigen Unwandelbarkeit zweier ‚Schreibformen' die Gleichheit des Bezeichneten folgt, nicht einfach. Dass der Teiltext 2 als Begründung für den im Teiltext 1 mitgeteilten Sachverhalts aufzufassen ist, wird mit Hilfe sprachlicher Mitteln nicht unterstützt; so fehlen sprachliche Hinweise, dass es sich um eine kausale Verknüpfung der Inhalte beider Teiltexte handelt. Folglich muss diese Inferenz im Wesentlichen rückwirkend, also nachdem die Teiltexte 2.1 bis 2.4 verarbeitet wurden, vollzogen werden, was sich ebenfalls erschwerend für das Gesamtverständnis des Textes im Rahmen des SATZ-Modells auswirken muss.

Die Inferenz der SATZAUSSAGE ‚Alle nicht periodischen Dezimalzahlen sind in Brüche, deren Nenner eine Zehnerpotenz ist, umwandelbar' (vgl. [2.1.2.1]) muss ausschließlich anhand formal-mathematischer Zeichen vollzogen werden (Ausdrücke 3 und 4), was einen erhöhten kognitiven Anspruch darstellt. Dabei ist die Aufmerksamkeit auf das Ergebnis der ‚Umwandlung' und nicht auf den ‚Umwandlungsprozess' zu lenken; die zusätzlichen Zeichen in den Gleichungen 3 und 4, welche die Anzahl der Nachkommastellen und der Nullen im Nenner hervorheben, unterstützen diese Fokussierung nicht. Des Weiteren ist die Inferenz der BEGRÜNDUNG dieses SATZES (vgl. [2.1.2.2]) kompliziert und umfangreich, denn hierfür muss die nicht verfestigte lokale Sicht auf die Dezimalzahlen aktiviert und weitergedacht werden. Die sprachlichen und typographischen Zeichen bieten diesbezüglich kaum Hilfestellungen. Darüber hinaus ist – wie bereits erläutert – die Inferenz einer (allgemeinen) BEGRÜNDUNG des TEILSATZES ‚Brüche mit einer Zehnerpotenz im Nenner sowie Brüche, deren Nenner auf eine Zehnerpotenz erweiterbar oder kürzbar ist, sind in Dezimalzahlen umwandelbar' (vgl. [2.2.1.2]) kompliziert und umfangreich, da die entsprechenden Textdaten größtenteils fehlen und das hierfür notwendige (Vor-)Wissen nicht verfestigt ist.

Und schließlich entspricht die typographische Gestaltung des Lehrtextes nicht der Struktur des Modells. So passen insbesondere die Hervorhebungen natursprachlicher Ausdrücke nicht zum beschriebenen Modell. Warum ist nur ein begründender TEILSATZ hervorgehoben (Ausdrücke 11-12), während die anderen Bestandteile der BEGRÜNDUNG nicht hervorgehoben sind? Warum ist der zentrale SATZ (Ausdruck 1) auf die gleiche Art hervorgehoben wie der begründende TEILSATZ (Ausdrücke 11-12)? Warum wird der begründende SATZ, also der Teiltext 2, graphisch nicht als eine Einheit präsentiert? Warum ist das CHARAKTERISTISCHE DER PERIODISCHEN DEZIMALZAHLEN (Ausdrücke 17-18) hervorgehoben, während ihre UMWANDELBARKEIT IN BRÜCHE, die zentral ist, fehlt? Erschwerend kommt hinzu, dass die Überschrift ‚Beispiel', die einen Hinweis auf die semantisch-pragmatische Rolle des Teiltextes im Gefüge des Gesamttextes liefert, irreführend ist. Denn der Terminus ‚Beispiel' suggeriert, dass ein vorher mitgeteilter allgemeiner Sachverhalt konkretisiert bzw. veranschaulicht wird. Eine Ausdeutung der entsprechenden formal-mathematischen Teiltexte als BEGRÜNDUNGEN wird damit weiter erschwert.

Insgesamt kann festgehalten werden, dass sich der Lehrtext aufgrund einiger recht schwerwiegender Beeinträchtigungen gegen die beschriebene Ausdeutung sperrt. Folglich ist das beschriebene Modell stark sinnbeeinträchtigt; es erfordert zahlreiche umfangreiche und komplizierte Inferenzen, es ist an zwei zentralen Stellen offen (Unwandelbarkeit der periodischen Zahlen und Begründung der Unwandelbarkeit der Brüche durch Division), es integriert nur schwer den letzten Teiltext und es entstehen Fragen bezüglich der typographischen Gestaltung und der starken Lückenhaftigkeit des Lehrtextes.

Im beschriebenen SATZ-Modell erschien ‚Prozente' als ein mit dem zentralen SATZ recht lose verbundener BEGRIFF und damit als eine (vernachlässigbare) Ergänzung des SATZES. Man kann den Lehrtext auch derart ausdeuten, dass sowohl der SATZ als auch der BEGRIFF konstitutive Bestandteile des konstruierten Modells sind. Im Folgenden wird solch ein

Modell skizziert. Dabei sei vorweggenommen, dass dieses Modell vom Lehrtext zwar angedeutet wird, es jedoch extrem schwer zu konstruieren ist.

III. *2) Beschreibung des nahegelegten SATZ-und-BEGRIFF-Modells ‚Schreibweisen/ Bezeichnungen der Anteile' und des damit einhergehenden Lernergebnisses*

Da im Teiltext 3 recht deutlich eine (neue) Bezeichnungsform für (spezifische) Anteile mitgeteilt wird, könnte man annehmen, dass es im Gesamtlehrtext – also unter Einbeziehung der Teiltexte 1 und 2 – um (unterschiedliche) Bezeichnungen für Anteile geht. Das Verbindende der einzelnen Teiltexte ist damit nicht wie beim besprochenen SATZ-Modell ‚Brüche und Dezimalzahlen', sondern ‚Anteile'. Die größtmögliche Zusammenfassung des Gesamttextes kann bei dieser Lesart wie folgt paraphrasiert werden: Dezimalzahlen bezeichnen genauso wie Brüche alle möglichen Anteile, Prozente bezeichnen dagegen spezifische Anteile (Hundertstel). Der Gegenstand ‚unterschiedliche Bezeichnungen der Anteile' integriert also sowohl den BEGRIFF als auch den SATZ als gleichwertige Bestandteile. Die entsprechende Text-Modell-Struktur des Gesamttextes lässt sich wie folgt darstellen.

SATZ und BEGRIFF ‚Schreibweisen/Bezeichnungen der Anteile'
- [1] SATZ ‚Dezimalzahlen bezeichnen alle möglichen Anteile ' (T1-2)
  - [1.1] SATZAUSSAGE (T1)
  - [1.2] GRUND FÜR DIE GELTUNG ‚Alle Brüche und alle Dezimalzahlen sind stets ineinander umwandelbar' (T2)
- [2] BEGRIFF ‚Prozente bezeichnen spezifische Anteile (Hundertstel)' (T3)
  - [2.1] MOTIV ‚Prozente tauchen im Alltag auf' (20)
  - [2.2] BEZEICHNETES allgemein ‚Prozente bezeichnen Hundertstel' (21, 23)
  - [2.3] BEZEICHNETES konkret ‚1% bezeichnet 1 Hundertstel; 10% bezeichnen 10 Hundertstel, 20% bezeichnen 20 Hundertstel usw.' (22)

Struktur 6: Vom Lehrtext ‚Dezimalzahlen, Brüche und Prozentschreibweisen' nahegelegtes SATZ-und-BEGRIFF-Modell

Der zu konstruierende SATZ [1] ist dem bereits beschriebenen SATZ-Modell bezüglich seiner Inhalte und seiner Struktur ähnlich; so weisen die beiden SÄTZE die gleiche BEGRÜNDUNG auf, nämlich den SATZ ‚Alle Brüche und alle Dezimalzahlen sind stets ineinander umwandelbar'. Allerdings divergieren beide Modelle bezüglich ihrer SATZAUSSAGE; im vorherigen SATZ sind es ‚gleiche Zahlen', die einen Zusammenhang zwischen den Brüchen und Dezimalzahlen stiften, während es im vorliegenden Fall die ‚Anteile' sind. Da die beiden SÄTZE einander in Struktur und Inhalt ähneln, bleiben alle beschriebenen Sinnbeeinträchtigungen des ersten Modells, und dabei insbesondere die eklatante Lückenhaftigkeit der entsprechenden Teiltexte, auch bei dieser Lesart bestehen. Zusätzlich wird die Bildung des Modells ‚Bezeichnungen von Anteilen' durch den Umstand erschwert, dass die Wörter ‚Anteile' und ‚Hundertstel' erstmalig erst am Ende des Lehrtextes – im Teiltext 3 – auftauchen. Das heißt, dass erst am Ende des Lehrtextes das ANTEIL-Schema aktiviert werden kann. Den gesamten Vortext kann man, wie bereits erläutert, einigermaßen sinnhaft auch ohne eine Aktivierung dieses Schemas ausdeuten. Nun muss aus dem konstruierten

SATZ ‚Dezimalzahlen und Brüche bezeichnen die gleichen Zahlen‘ der zusätzliche verbindende Gedanke ‚Dezimalzahlen bezeichnen (genauso wie Brüche) alle Anteile‘ schlussfolgernd gebildet werden. Aufgrund dieser zusätzlichen schweren Inferenz erweist sich dieses Modell im Vergleich zum bereits diskutierten SATZ-Modell als noch schwieriger zu bilden.

Das dieser Lesart entsprechende Lernergebnis umfasst unter anderem alle beschriebenen kognitiven Veränderungen, die mit dem dargestellten SATZ-Modell einhergehen, allerdings reicht es darüber hinaus. Unser Modellschüler lernt im Vergleich zum ersten Lernergebnis mehr. Das (inhaltlich) BEZEICHNETE, also die Tatsache, dass Dezimalzahlen beliebige Anteile bezeichnen, stellte im Rahmen des ersten SATZ-Modells lediglich eine nicht notwendige weiterführende Elaboration dar, so dass dieses (Teil-)Lernergebnis nicht notwendigerweise mit dem beschriebenen SATZ-Modell einhergeht. Im vorliegenden Fall ist dagegen das inhaltlich BEZEICHNETE zentral; der Schüler erweitert sein ANTEIL-Schema, indem das angereicherte DEZIMALZAHL-Schema und ein neu konstruiertes (abstraktes) PROZENT-Schema darin eingebettet werden.

III. 3) Beschreibung des naheliegenden VERFAHREN-Modells und des damit einhergehenden Lernergebnisses

III. 3a) Charakteristik des VERFAHREN-Modells

Der Lehrtext ist auch intakt ausdeutbar, wenn man annimmt, dass er Verfahren, mit denen man Dezimalzahlen, Brüche und Prozente ineinander umwandelt, mitteilt. Das entsprechende Modell umfasst eine Klasse von einzelnen VERFAHREN, die bestimmte ZIEL- und AUSGANGSOBJEKTE – Dezimalzahlen, Brüche und Prozente – aufweisen und stets das ZIEL verfolgen, eine Schreibform (bzw. ein Objekt) in eine andere (bzw. ein anderes) ‚umzuwandeln‘. Da im Lehrtext ein Auswahlkriterium mitgeteilter Verfahren nicht genannt wird, liegt es nahe anzunehmen, dass der Autor alle möglichen (!) Verfahren zur Umwandlung der drei Schreibformen mitteilt. Die Teiltexte 1 und 2 werden als Informationen über die Verfahren zur Umwandlung der Dezimalzahlen in Brüche und der Umwandlung der Brüche in Dezimalbrüche interpretiert. Es werden also beide ‚Umwandlungsrichtungen‘ bedient. Wenn man dieser Logik folgt, dann erwartet man bezüglich der Verfahren, in denen Prozente auftauchen, vier unterschiedliche Verfahren, nämlich die Umwandlung

- der Prozente in Dezimalzahlen,
- der Dezimalzahlen in Prozente,
- der Prozente in Brüche und
- der Brüche in Prozente.

Dies wäre eine vollständige Menge der wechselseitigen Umwandlungen der Brüche, Dezimalzahlen und Prozente. Die Text-Modell-Struktur des entsprechenden nahegelegten Modells ist nachfolgend angegeben.

ALLE MÖGLICHEN VERFAHREN ‚Wechselseitige Umwandlung der Brüche, Dezimalzahlen und Prozente'

- [1] ALLE VERFAHREN ‚Wechselseitige Umwandlung der Brüche und Dezimalzahlen" (T1-2)
  - [1.1] GRUND FÜR DIE EXISTENZ DER VERFAHREN ‚Brüche und Dezimalzahlen bezeichnen die gleichen Zahlen' (T1)
  - [1.2] VERFAHREN ‚Umwandlung nicht periodischer Dezimalzahlen in Brüche' (T2.1)
  - [1.3] ALLE VERFAHREN ‚Umwandlung der Brüche in Dezimalzahlen' (T2.2-2.4)
    - [1.3.1] VERFAHREN ‚Umwandlung der Brüche mit Hilfe des Nullen-Zählens' (T2.2)
    - [1.3.2] VERFAHREN ‚Umwandlung der Brüche mit Hilfe der Division' (T2.3-2.4)
  - [1.4] VERFAHREN ‚Umwandlung periodischer Dezimalzahlen' (fehlender Teiltext)
- [2] ALLE VERFAHREN „Wechselseitige Umwandlung der Prozente und Brüche, sowie der Prozente und Dezimalzahlen" (T3)
  - [2.1] MOTIV „Prozente werden im Alltag gebraucht" (20)
  - [2.2] VERFAHREN „Wechselseitige Umwandlung der Prozente und Brüche" (21-23)
  - [2.3] VERFAHREN „Wechselseitige Umwandlung der Prozente und Dezimalzahlen" (22)

Struktur 7: Vom Lehrtext ‚Dezimalzahlen, Brüche und Prozentschreibweisen' nahegelegtes VERFAHREN-Modell

Das gesamte Modell besteht aus zwei Teilmodellen erster Ordnung: VERFAHREN, die Brüche und Dezimalzahlen als Objekte aufweisen (vgl. [1]) und VERFAHREN, in denen Prozente auftauchen (vgl. [2]). Das erste Teilmodell, das anhand der Teiltexte 1-2 gebildet wird, beinhaltet neben den einzelnen VERFAHREN (vgl. [1.2] - [1.4]) einen GRUND FÜR DIE EXISTENZ DER VERFAHREN (vgl. [1.1]), der anhand des Teiltextes 1 konstruiert wird. Der entsprechende Inhalt lautet zusammengefasst: Dezimalzahlen und Brüche bezeichnen die gleichen Zahlen, daher sind sie ineinander umwandelbar. Im Vergleich zu den bereits erläuterten Ausdeutungen kehrt sich hier die kausale Beziehung um; der erste Teiltext wird nicht als ein SATZ interpretiert, der anhand des nachfolgenden Teiltextes begründet wird, sondern als ein SATZ, der seinerseits das Nachfolgende begründet. Allerdings ist dieser SATZ für den Modellschüler neu, so dass die Frage entsteht, warum Dezimalzahlen und Brüche die gleichen Zahlen bezeichnen. Es wird also die Grund-für-die-Geltung-des-Satzes-Leerstelle aktiviert. Da der nachfolgende Teiltext 2 als Mitteilung über einzelne VERFAHREN und nicht wie in den vorherigen Lesarten als BEGRÜNDUNG interpretiert wird, kann diese aktivierte Leerstelle nicht mit textbasierten und wohl auch nicht mit inferierten Werten belegt werden, sie bleibt offen.

Das erste VERFAHREN bezieht sich auf die ‚Umwandlung nicht periodischer Dezimalzahlen in Brüche' (vgl. [1.2]) und wird anhand des Teiltextes 2.1 konstruiert; die VERFAHRENS-SCHRITTE sind dabei den formal-mathematischen Ausdrücken 3 und 4, also den Beispielgleichungen, zu entnehmen. Die BEGRÜNDUNG DER VERFAHRENSSCHRITTE ist ebenfalls anhand der Gleichungen inferierbar, sie beinhaltet den SATZ, dass Dezimalzahlen stets in Brüche mit einer Zehnerpotenz im Nenner umwandelbar sind. Dieser SATZ ist wie bereits erläutert neu, seine BEGRÜNDUNG muss also aufgrund fehlender Textdaten vom Modellschüler selbstständig inferiert werden, indem ausgehend von der lokalen Sicht auf die Dezimalzahlen auf die globale Sichtweise geschlossen wird (vgl. das Teilmodell [2.1.2] im Rahmen des erläuterten SATZ-Modells). Die Text-Modell-Struktur des ersten VERFAHRENS ist nachfolgend dargestellt:

[1.2] VERFAHREN ‚Umwandlung nicht periodischer Dezimalzahlen in Brüche' (T2.1)

[1.2.1] VORAUSSETZUNGEN ‚nicht periodische Dezimalzahlen' und ZIEL ‚Umwandlung in Brüche' (2)

[1.2.2] VERFAHRENSSCHRITTE ‚Die Ziffern der Dezimalzahl werden im Zähler geschrieben, im Nenner werden eine 1 und so viele Nullen wie die Anzahl der Nachkommastellen geschrieben' (3-4)

[1.2.3] GRUND FÜR DIE GELTUNG DER VERFAHRENSSCHRITTE ‚Alle nicht periodischen Dezimalzahlen sind in Brüche, deren Nenner eine Zehnerpotenz ist, umwandelbar' (3-4 und fehlender Teiltext)

Die ‚Umwandlung der Brüche in Dezimalzahlen' (vgl. [1.3]) beinhaltet zwei einzelne VERFAHREN. Es wird eine ‚leichte' – vgl. das Wort ‚leicht' im Ausdruck 5 – Umwandlung (vgl. [1.3.1]) von einer ‚schweren' Umwandlung (vgl. [1.3.2]) unterschieden. Das leichte VERFAHREN ‚Umwandlung der Brüche mit Hilfe des Nullen-Zählens' wird auf der Grundlage des Teiltextes 2.2 konstruiert und hat als VORAUSSETZUNG ‚Brüche, deren Nenner eine Zehnerpotenz ist und Brüche, deren Nenner zu einer Zehnerpotenz erweitert oder gekürzt werden kann'. Dabei entsteht auch hier analog zum erläuterten textübergreifendem SATZ-Modell die offene Frage nach VERFAHRENSOBJEKTEN (vgl. offene Leerstelle [2.2.1.3] im Rahmen des SATZ-Modells). Die VERFAHRENSSCHRITTE müssen anhand der formal-mathematischen Zeichen, d.h. der Beispielgleichungen (Ausdrücke 7-9) konstruiert werden. Der GRUND FÜR DIE GELTUNG DER VERFAHRENSSCHRITTE muss von unserem Modellschüler selbstständig inferiert werden, dieses Teilmodell stimmt mit der bereits erläuterten BEGRÜNDUNG des entsprechenden SATZES überein (vgl. das Teilmodell [2.2.1.2] im Rahmen des SATZ-Modells).

Das ‚schwere' VERFAHREN zur ‚Umwandlung der Brüche in Dezimalzahlen' ist die ‚Umwandlung mit Hilfe der Division' (vgl. [1.3.2]). Es wird anhand der Teiltexte 2.3 und 2.4 konstruiert, dabei werden die VORAUSSETZUNGEN und das ZIEL anhand der Ausdrücke 11 und 12 belegt. Die VERFAHRENSSCHRITTE sind im Wesentlichen anhand der ‚Beispielrechnungen' bildbar (Ausdrücke 13-15). Die BEGRÜNDUNG DER VERFAHRENSSCHRITTE ist in diesem Fall – im Gegensatz zu den vorherigen VERFAHREN – größtenteils weder mit textbasierten noch mit inferierten Werte belegbar und bleibt daher überwiegend offen (vgl.

offene Leerstellen im Rahmen des zum textübergreifenden SATZ-Modell gehörenden Teilmodells [2.2.2.2]). Schließlich enthält das VERFAHREN auch BESONDERE ERGEBNISSE ‚periodische Dezimalzahlen', die Aktivierung und Belegung dieser Leerstelle erfolgt mit Hilfe des Teiltextes 2.4.

Da unser Modellschüler nun um die Existenz der periodischen Dezimalzahlen weiß, steht er vor der Frage, ob und wie diese in Brüche umwandelbar sind. Diese Frage/Leerstelle (vgl. [1.4]) kann weder mit den Textdaten noch mit Vorwissen belegt werden.

Nunmehr wird das zweite Teilmodell beschrieben: die VERFAHREN, in denen Prozente als Objekte auftauchen (vgl. [2]). Da im Vortext die wechselseitige Umwandlung der Brüche und Dezimalzahlen thematisiert wurde, erwartet man auch in Bezug auf die Prozente eine wechselseitige Umwandlung in Brüche und in Dezimalzahlen. Der Ausdruck 20 wird als MOTIV zur Umwandlung der Prozente in Brüche und Dezimalzahlen interpretiert. Dies kann in etwa wie folgt angegeben werden: ‚Im Alltag werden Prozentangaben benutzt. Wenn man sie in Brüche und/oder in Dezimalzahlen umwandelt, weiß man, was sie angeben und kann diese Angaben verstehen'. Die nachfolgenden Textdaten (Ausdrücke 21-23) dienen zur Belegung der zahlreichen aktivierten Leerstellen; im Einzelnen sind vier VERFAHREN, d.h. die VERFAHRENSSCHRITTE und deren BEGRÜNDUNGEN, zu belegen: 1. Brüche in Prozente, 2. Prozente in Brüche, 3. Dezimalzahlen in Prozente und 4. Prozente in Dezimalzahlen. Die Kürze des Teiltextes steht im starken Kontrast zur Vielzahl aktivierter Leerstellen. Diese können nur anhand umfangreicher und komplizierter inferenzieller Anreicherungen belegt werden.[119]

III. 3b) Skizze der vollzogenen kognitiven Veränderungen

Im Wesentlichen lernt unser Modellschüler bei dieser Lesart, wie die einzelnen Zeichen in andere Zeichen ‚umgewandelt' werden. Die Bezeichnetes-Leerstelle wird lediglich bei den BEGRÜNDUNGEN DER VERFAHRENSSCHRITTE und DER EXISTENZ DER VERFAHREN aktiviert und teilweise belegt. Dass Dezimalzahlen die gleichen Zahlen wie Brüche bezeichnen, bleibt unbegründet, der entsprechende SATZ weist daher im kognitiven System eine recht isolierte Stellung auf. Insbesondere heißt das, dass DEZIMALZAHLEN, BRÜCHE und PROZENTE primär als OBJEKTE der VERFAHREN – also als SYMBOLE in einem übergreifenden VERFAHREN-Schema – eingebettet sind. Sie sind – im Gegensatz zu vorherigen vom Lehrtext nahegelegten Lernergebnissen – nicht aufgrund des gleichen BEZEICHNETEN in einem übergeordneten Schema verankert.

[119] Der ‚sperrige' Teiltext 3 ist nicht nur als VERFAHREN zur ‚Umwandlung der Prozente in Brüche/ Dezimalzahlen' ausdeutbar, sondern auch – analog zum textübergreifendem SATZ-Modell – als ein die VERFAHREN zur ‚wechselseitigen Umwandlung der Brüche und Dezimalzahlen' ergänzender BEGRIFF ‚Prozente'. Das Verbindende zwischen dem BEGRIFF und den VERFAHREN beruht dabei ausschließlich auf der Gleichheit einer Teilmenge der VERFAHRENSOBJEKTE ‚spezifische Brüche/Dezimalzahlen' und des BEGRIFFS-BEZEICHNETEN und ist daher stark sinnbeeinträchtigt. Die Ausdeutung des Teiltextes 3 im Rahmen des textübergreifenden VERFAHREN-Modells als VERFAHREN ist im Vergleich zur möglichen BEGRIFF-Ausdeutung sinnstiftender.

III. 3c) Beschreibung der Ausprägung schwierigkeitsgradbestimmender Textmerkmale und der Sinnhaftigkeit des VERFAHREN-Modells

Alle Textdaten sind in das vorliegende Modell integrierbar. Allerdings weist der Lehrtext auch im Rahmen dieses Modells zahlreiche Lücken auf, die zum Teil nicht schließbar sind. Offene Leerstellen entstehen insbesondere bei der BEGRÜNDUNG DES SATZES ‚Brüche und Dezimalzahlen bezeichnen die gleichen Zahlen (notwendige Leerstelle in [1.1]), beim VERFAHREN zur ‚Umwandlung periodischer Dezimalzahlen' (vgl. [1.4]) sowie bei der BEGRÜNDUNG DES VERFAHRENS ‚Umwandlung der Brüche anhand der Division' (notwendige Leerstelle im [1.3.2]-Teilmodell). Komplizierte und umfangreiche Inferenzen sind an folgenden Stellen notwendig:

- Alle VERFAHRENSSCHRITTE jedes einzelnen VERFAHRENS – es sind insgesamt sieben – müssen anhand sehr weniger sprachlicher, meistens formal-mathematischer Zeichen inferiert werden. Bei den VERFAHREN, in denen Brüche und Dezimalzahlen auftauchen, helfen die ergänzenden Zeichen (Pfeile, farbige Hervorhebungen, Anzahl der Stellen und Nullen), diese Inferenzen zu bilden. Besonders schwierig ist die Bildung der VERFAHRENSSCHRITTE, bei denen Prozente als Objekte auftauchen, was unter anderem an der Kürze des entsprechenden Teiltextes und am Fehlen der entsprechenden gemeinen Brüche im ‚Beispiel' (22) liegt.

- Die BEGRÜNDUNGEN aller VERFAHRENSSCHRITTE müssen ebenfalls ausschließlich aufgrund knapper formal-mathematischer Zeichen inferiert werden. Diese Leistung erfordert die Aktivierung und das Weiterdenken des erst vor kurzem erworbenen Wissens über Dezimalzahlen und Brüche, das nicht verfestigt ist und sich noch im Schwebezustand befindet. Des Weiteren erschwert die Überschrift ‚Beispiel' jeweils die Fokussierung auf BEGRÜNDUNGEN, denn sie lenkt die Aufmerksamkeit lediglich auf die VERFAHRENSSCHRITTE.

- Die Grund-für-die-Existenz-der-Verfahren-Leerstelle (vgl. [1.1]) ist zwar anhand der Textdaten (T1) relativ leicht belegbar, allerdings ist die Aktivierung dieser Leerstelle aufgrund der bereits erwähnten Lücke zwischen Teiltext 1 und Teiltext 2 relativ schwer.

Schließlich fehlt ein übergreifendes MOTIV und/oder eine ANWENDUNGSMÖGLICHKEIT der VERFAHREN: Warum teilt der Autor alle Verfahren mit, in denen Brüche, Dezimalzahlen und Prozente auftauchen? Eine weitere Sinnbeeinträchtigung resultiert aus der Frage, warum solch eine relativ hohe Verfahrensanzahl in solch einer verknappten sprachlichen Form – insbesondere im Fall der Prozente – mitgeteilt wird. Die typographische Gestaltung entspricht zum Teil dem VERFAHREN-Modell; in erster Linie entsprechen die Hervorhebungen der ‚Beispiele' sowie die in ihnen enthaltenden, auf die VERFAHRENS-SCHRITTE verweisenden Zeichen dieser Lesart. Demgegenüber widerspricht die Hervorhebung der Mitteilungen über die periodischen Dezimalzahlen (Ausdrücke 17-18) in Anbetracht des fehlenden entsprechenden Verfahrens dem vorliegenden Modell. Insgesamt kann festgehalten werden, dass das vom Lehrtext nahegelegte VERFAHREN-Modell insbesondere aufgrund seiner Offenheit und der Komplexität der notwendigen Inferenzen recht stark sinnbeeinträchtigt ist.

Alle bisher beschriebenen nahegelegten Modelle sind schwer zu konstruieren und entsprechend stark sinnbeeinträchtigt. Wie verhält es sich nun mit einem AUFGABEN-Modell? Im Folgenden wird zunächst das zum Lehrtext passende AUFGABEN-Modell diskutiert.

III. 4) Beschreibung des naheliegenden AUFGABEN-Modells und des damit einhergehenden Lernergebnisses

III. 4a) Charakteristik des AUFGABEN-Modells

Der Lehrtext kann unter der Annahme ausgedeutet werden, dass eine Menge von Aufgaben vorgestellt wird – und zwar diejenigen, in denen Brüche, Dezimalzahlen und Prozente auftauchen. Die Struktur des vom Lehrtext nahegelegten Modells, das ausschließlich im Rahmen eines AUFGABE-Schemas konstruiert wird, ist in der nachfolgenden Text-Modell-Struktur abgebildet.

AUFGABEN ‚Brüche, Dezimalzahlen und Prozente'
- [1] AUFGABEN ‚Brüche und Dezimalzahlen' (T1-2)
  - [1.1] FAKTENAUFGABE ‚Was sind Dezimalzahlen und Brüche?' (T1)
  - [1.2] UMWANDLUNGSAUFGABEN ‚Dezimalzahlen und Brüche' (T2)
    - [1.2.1] UMWANDLUNGSAUFGABE ‚Umwandlung der Dezimalzahlen in Brüche'(T2.1)
    - [1.2.2] UMWANDLUNGSAUFGABE ‚Umwandlung der Brüche in Dezimalzahlen durch Nullen-Zählen' (T2.2)
    - [1.2.3] UMWANDLUNGSAUFGABE ‚Umwandlung der Brüche in Dezimalzahlen durch Division' (T2.3-2.4)
- [2] AUFGABEN ‚Prozente und Dezimalzahlen' (T3)
  - [2.1] MOTIV ‚Prozente werden im Alltag gebraucht' und BEZEICHNUNG DES NEUEN AUFGABENOBJEKTS ‚Prozente' (20)
  - [2.2] FAKTENAUFGABE ‚Was sind Prozente?' (21)
  - [2.3] UMWANDLUNGSAUFGABE ‚Umwandlung der Prozente in Dezimalzahlen' (22)
  - [2.4] UMWANDLUNGSAUFGABE ‚Umwandlung der Dezimalzahlen in Prozente' (22)

Struktur 8: Vom Lehrtext ‚Dezimalzahlen, Brüche und Prozentschreibweisen' nahegelegtes AUFGABEN-Modell

Das Modell besteht aus 5 (konkreten) UMWANDLUNGSAUFGABEN, also spezifischen TRANSFORMATIONSAUFGABEN (vgl. [1.2.1], [1.2.2], [1.2.3], [2.3] und [2.4]) und zwei FAKTENAUFGABEN (vgl. [1.1] und [2.2]). Die einzelnen AUFGABEN werden in zwei Klassen zusammengefasst; AUFGABEN, in denen Brüche und Dezimalzahlen vorkommen (vgl. [1])

und AUFGABEN, in denen Prozente und Dezimalzahlen vorkommen (vgl. [2]). Da hinsichtlich der Auswahl der AUFGABEN – im Gegensatz zu den VERFAHREN – kein ‚logischer Gang' erwartet wird, überrascht es aus Sicht des Modellschülers, der das AUFGABE-Schema aktiviert hat, nicht, dass ‚Prozente und Brüche' als Aufgaben nicht auftauchen.

AUFGABEN, in denen Brüche und Dezimalzahlen vorkommen, beinhalten eine FAKTEN-AUFGABE (vgl. [1.1]) und drei UMWANDLUNGSAUFGABEN (vgl. [1.2]). Der ‚sperrige' Teiltext 1 wird also als eine ANTWORT im Rahmen einer FAKTENAUFGABE ausgedeutet. Die dazugehörige FRAGE ‚Was sind Dezimalzahlen und Brüche?' muss inferiert werden. Da die FRAGE als recht typisch für FAKTENAUFGABEN erscheint, ist sie anhand des Ausdruckes 1 unschwer inferierbar. Man beachte, dass die komplizierte kausale Inferenz, die bei zuvor vorgestellten Modellen notwendig war, um die Lücke zwischen dem ersten und dem zweiten Teiltext zu schließen, an dieser Stelle entfällt.

Die UMWANDLUNGSAUFGABEN ‚Dezimalzahlen und Brüche' bestehen aus drei einzelnen AUFGABEN: der ‚Umwandlung der Dezimalzahlen in Brüche', der ‚Umwandlung der Brüche in Dezimalzahlen durch Nullen-Zählen' und ‚der Umwandlung der Brüche in Dezimalzahlen durch Division'. Dabei weist jede UMWANDLUNGSAUFGABE ihre notwendigen Bestandteile auf; die AUFGABENSTELLUNG und ihre LÖSUNG, die wiederum aus BEARBEITUNGS-SCHRITTEN und PRÄSENTATION DER AUFGABE besteht.

Die erste UMWANDLUNGSAUFGABE bezieht sich auf die ‚Umwandlung der Dezimalzahlen in Brüche' (vgl. [1.2.1]) und wird anhand des Teiltextes 2.1 konstruiert. Die dazugehörige AUFGABENSTELLUNG ‚Wandle Dezimalzahlen in Brüche um' ist eine typische und kann daher anhand der sprachlichen Äußerung 2 recht leicht inferiert werden. Die BEARBEITUNS-SCHRITTE und die PRÄSENTATION DER AUFGABE müssen den formal-mathematischen Ausdrücken (3 und 4) entnommen werden, hierfür sind – wie bereits bei den VERFAHREN erwähnt – die zusätzlichen Zeichen hilfreich. Die für diese Modellbildung notwendigen Inferenzen sind zwar relativ umfangreich, erfordern aber kaum fachliches Wissen, sie sind also in diesem Sinne nicht kompliziert. Die Text-Modell-Struktur der ersten UMWAND-LUNGSAUFGABE ist nachfolgend angegeben.

[1.2.1] UMWANDLUNGSAUFGABE ‚Umwandlung der Dezimalbrüche in Brüche' (T2.1)
    [1.2.1.1] AUFGABENSTELLUNG ‚Wandle die Dezimalzahlen in Brüche um' (2)
    [1.2.1.2] BEARBEITUNSSCHRITTE ‚Schreibe die Ziffern der Dezimalzahl in den Zähler des Bruchs, zähle die Anzahl der Nachkommastellen, schreibe im Nenner eine 1 und so viele Nullen wie die Anzahl der Nachkommastellen' und PRÄSENTATION DER AUFGABE (3-4)

Man beachte, dass im Gegensatz zum VERFAHREN und zum SATZ eine BEGRÜNDUNG der BEARBEITUNGSSCHRITTE im AUFGABE-Schema nicht verfestigt ist und daher in diesem Fall aufgrund der fehlenden deutlichen sprachlichen Signale nicht aktiviert wird. Damit ist die obere UMWANDLUNGSAUFGABE vollständig belegt – und zwar ohne komplizierte Inferenzen.

Analog dazu sind auch die nachfolgenden UMWANDLUNGSAUFGABEN (vgl. [1.2.2] und [1.2.3]) aufgebaut, wobei die LÖSUNGEN ähnlich wie bei den VERFAHREN den formal-mathematischen Ausdrücken zu entnehmen sind. Der entscheidende Unterschied zu den VERFAHREN-Teilmodellen, die schwer inferierbare oder offene BEGRÜNDUNGEN enthalten, besteht darin, dass die UMWANDLUNGSAUFGABE-Modelle keine Begründung-Leerstelle(n) beinhalten. Damit liegt auch ohne komplizierte und umfangreiche Inferenzen jeweils ein vollständiges (Teil-)Modell vor. Die periodischen Dezimalzahlen werden als BESONDERE AUSGANGSOBJEKTE der UMWANDLUNGSAUFGABE [1.2.3] interpretiert. Der Modellschüler nimmt in diesem Fall also an, dass der Autor den Teiltext 2.4 mitteilt, um ihm zu signalisieren, dass derartige – für ihn bislang außergewöhnliche und unbekannte – Ergebnisse möglich sind. Da die periodischen Dezimalzahlen ausschließlich als spezifische AUSGANGSOBJEKTE der UMWANDLUNGSAUFGABE ‚Brüche in Dezimalzahlen mit Hilfe der Division' begriffen werden, entstehen – im Gegensatz zu den vorher diskutierten naheliegenden Modellen – keine Fragen bezüglich des Bezeichneten und/oder der Umwandelbarkeit der periodischen Dezimalzahlen.

Nunmehr wird das zweite Teilmodell beschrieben, das anhand des Teiltextes 3 konstruiert wird und aus AUFGABEN zu Prozenten und Dezimalzahlen besteht (vgl. [2]). Der erste natursprachliche Ausdruck (20) kann als ein MOTIV zur Behandlung dieser Aufgaben interpretiert werden: Im Alltag werden Prozente gebraucht, daher wandeln wir sie nun in Dezimalzahlen um (vgl. [2.1]). Inwiefern dies ein einsichtiges und adäquates Motiv darstellt, soll an dieser Stelle nicht weiter problematisiert werden. Der Ausdruck 21, in dem mitgeteilt wird, dass Prozente ‚Schreibweisen für Hundertstel sind', kann analog dem Ausdruck 1 als (typische) FAKTENAUFGABE ‚Was sind Prozente?' ausgedeutet werden (vgl. [2.2]). Die sprachlichen Ausdrücke im ‚Kasten' (22) werden schließlich als UMWANDLUNGSAUFGABEN ‚Prozente und Dezimalzahlen' interpretiert (vgl. [2.3] und [2.4]). Die dazugehörige AUFGABENSTELLUNG ‚Wandle Prozente/Dezimalzahlen in Dezimalzahlen/Prozente um' wird aufgrund der vorherigen Text-Logik inferiert und stellt keine komplizierte Inferenz dar. Die Belegung der BEARBEITUNGSSCHRITTE verlangt das Erkennen einer Gesetzmäßigkeit zwischen den dargestellten Zeichen. Die BEARBEITUNGSSCHRITTE für die Umwandlung der Prozente in Dezimalzahlen können wie folgt zusammengefasst werden: ‚100% ist gleich 1, bei sonstigen Prozentangaben schreibe als Ergebnis zunächst eine Null und setze das Komma, schreibe anschließend die Ziffern der Prozentangabe als Nachkommastellen auf, wobei die eventuelle Null am Ende einer Prozentangabe weggelassen wird. Bei einstelligen Prozentangaben muss nach dem Komma eine Null hinzugefügt werden'. Es wird deutlich, dass die notwendigen Inferenzen zwar recht umfangreich sind, jedoch kein Fachwissen erfordern und in diesem Sinne unkompliziert sind. Analog dazu sind auch die BEARBEITUNGSSCHRITTE zur ‚Umwandlung der Dezimalzahlen in Prozente' inferierbar. Allerdings fehlen im Beispielkasten die Gleichheitszeichen, so dass bezüglich der

PRÄSENTATION der AUFGABE die Frage entsteht, warum die typographische Gestaltung der AUFGABENLÖSUNG sich von den vorherigen Aufgabenlösungen der Umwandlungsaufgaben unterscheidet, warum also zwischen den einzelnen Prozentangaben und den entsprechenden Dezimalzahlen das Gleichheitszeichen fehlt. Die einzelnen AUFGABEN der Aufgabenklasse ‚Prozente und Dezimalzahlen' sind in Übereinstimmung mit den AUFGABEN der ersten Aufgabenklasse vollständig, d.h. alle aktivierten Leerstellen sind belegt – und auch hier wieder ohne komplizierten Inferenzen. Man beachte, dass die schwer inferierbare UMWANDELBARKEIT DER PROZENTE IN BRÜCHE, die im Rahmen der VERFAHREN notwendig war, im vorliegenden AUFGABEN-Modell entfällt.

Die Teiltexte, die als FAKTENAUFGABEN interpretiert wurden, sind auch als MATHEMATISCHE ELEMENTE interpretierbar, wodurch gemischte Modelle (im Gegensatz zum reinen AUFGABEN-Modell) konstruiert werden. So kann beispielsweise der erste Ausdruck analog zum VERFAHREN-Modell als (mathematische) BEGRÜNDUNG der EXISTENZ DER BEARBEITUNGSSCHRITTE interpretiert werden. Der Ausdruck 22 kann als eine Erklärung des Begriffs ‚Prozente' interpretiert werden, d.h. als das BEZEICHNETE des BEGRIFFS ‚Prozente', der den UMWANDLUNGSAUFGABEN ‚Prozente und Dezimalzahlen' zugrunde liegt. Diese (mathematischen) Interpretationen der Teiltexte erfordern jedoch im Vergleich zum reinen AUFGABEN-Modell mehr Inferenzen.

III. 4b) Skizze der vollzogener kognitiver Veränderungen

Im Zuge der Konstruktion eines reinen AUFGABEN-Modells lernt der Modellschüler hauptsächlich, wie Dezimalzahlen-, Bruch- und Prozentsymbole wechselseitig umgewandelt werden. Das BEZEICHNETE der DEZIMALZAHLEN, BRÜCHE und PROZENTE wird nicht aktiviert, dementsprechend nicht verfestigt und nicht verändert. Die neu konstruierten Schemata – wie PERIODISCHE DEZIMALZAHLEN und PROZENTE – sind im AUFGABE-Schema als OBJEKTE, also als SYMBOLE ohne ein BEZEICHNETES eingebettet. Unser Modellschüler lernt nicht, dass Brüche und Dezimalzahlen die gleichen Zahlen (bzw. beliebige Anteile) bezeichnen, genauso wenig lernt er, dass Prozente spezifische Anteile bezeichnen.

III. 4c) Beschreibung der Ausprägung schwierigkeitsgradbestimmender Textmerkmale und der Sinnhaftigkeit des AUFGABEN-Modells

Das konstruierte Modell umfasst alle Textdaten und es enthält – im Gegensatz zu den beschriebenen Modellen im Rahmen des MATHEMATISCHES-ELEMENT-Schemas – keine offenen Leerstellen. Die notwendigen Inferenzen, insbesondere im Zusammenhang mit den BEARBEITUNGSSCHRITTEN, sind aufgrund der Kürze sowie der primär formal-mathematischen Modalität der entsprechenden Ausdrücke recht umfangreich, allerdings erfordern sie kein fachliches Wissen. Die typographische Gestaltung des Lehrtextes stützt diese Lesart. So lässt sich das hervorgehobene Wort ‚Beispiel' als ein Hinweis darauf interpretieren, dass im entsprechenden Kasten ‚Beispiele' einer regelhaften AUFGABENLÖSUNG abgebildet sind. Das letzte ‚Beispiel' (22) sprengt diese Logik insofern, als es sich gleichzeitig auf zwei UMWANDLUNGSAUFGABEN (Umwandlung von Prozenten in Dezimalzahlen und von Dezimalzahlen in Prozente) bezieht und daher umfangreichere Inferenzen erfordert. Darüber hinaus entsteht hier bezüglich der normierten PRÄSENTATION der AUFGABE eine Sinnbeeinträchtigung, denn bei den vorfindlichen Beispielen fehlen im Gegensatz zu den darüber angegebenen Beispielen die Gleichheitszeichen. Die Textüberschrift ‚Dezimalzahlen, Brüche und Prozentschreibweise' korrespondiert in besonderer Weise zur Lesart als AUFGABEN-Modell; sie beinhaltet alle Objekte der AUFGABEN(-KLASSE), also tatsächlich das einzig (!) Kennzeichnende dieser Klasse. Die Hervorhebungen natursprachlicher Teiltexte passen allerdings – genau wie im Rahmen der anderen möglichen Modelle – nicht zur Struktur des vorliegenden Modells.

Insgesamt ist das AUFGABEN-Modell vollständig und umfasst alle Textdaten. Es erfordert recht umfangreiche, aber keine komplizierten Inferenzen und widerspricht teilweise der typographischen Gestaltung des Lehrtextes. Insbesondere tauchen bezüglich des ‚Prozente und Dezimalzahlen'-Teilmodells [2] zahlreiche Sinnbeeinträchtigungen auf, die primär aus der Knappheit des Teiltextes 3 und seiner im Vergleich zu den vorherigen Teiltexten vorhandenen Andersartigkeit resultieren. Wieso fehlen im ‚Beispiel' (22) – im Gegensatz zu den vorherigen Beispielen – Zeichen, die das Erkennen der BEARBEITUNGSSCHRITTE erleichtern? Wieso wird in Teiltext 3 im Gegensatz zu den vorherigen Teiltexten natursprachlich nicht erwähnt, dass es um die Umwandlung der Prozente in Dezimalzahlen geht? Ein textumfassendes intaktes AUFGABEN-Modell ist damit anhand des vorliegenden (Gesamt-)Lehrtextes zum Teil sinnbeeinträchtigt und daher teilweise nicht leicht konstruierbar.

IV. Ermittlung und Diskussion der extremen naheliegenden Lernergebnisse

Bereits bei der Beschreibung der einzelnen Modelle war deutlich geworden, dass das AUFGABEN-Modell im Vergleich zu den anderen vom Lehrtext nahegelegten Modellen das mit Abstand *am leichtesten zu bildende* ist. Während alle naheliegenden MATHEMATISCHE(S)-ELEMENT(E)-Modelle stark unvollständig sind und zahlreiche komplizierte Inferenzen erfordern, ist das AUFGABEN-Modell vollständig mit textbasierten oder relativ einfachen inferierten Werten belegt. Dass die notwendigen Inferenzen relativ leicht konstruierbar sind, resultiert unter anderem daraus, dass die zu inferierenden AUFGABENSTELLUNGEN typisch sind. Lediglich die BEARBEITUNGSSCHRITTE stellen recht umfangreiche, jedoch weitgehend unkomplizierte Inferenzen dar. Des Weiteren entfällt bei AUFGABEN die komplizierte notwendige Inferenz, die den Teiltext 1 mit den nachfolgenden Teiltexten kausal verknüpft. Grob gesagt ist bei dieser Lesart das ‚Verstehen' der Bearbeitungsschritte die primäre Schwierigkeit des Lehrtextes. Schließlich passt die typographische Gestaltung des Lehrtextes relativ gut zur Struktur des Modells.

Inwiefern kann eine Abstufung bezüglich des Bildungsschwierigkeitsgrades der naheliegenenden MATHEMATISCHE(S)-ELEMENT(E)-Modelle vorgenommen werden? Bezüglich der Vollständigkeit und der Passung der Reihenfolge des Lehrtextes zur sequenziellen

Darstellung der Modelle bestehen keine gravierenden Unterschiede; alle drei Modelle weisen unbelegte zentrale Leerstellen auf und ihre sequenzielle Darstellung passt zum Textverlauf. Bei der Integrierbarkeit der Textdaten fällt das SATZ-Modell als kritisch auf; während VERFAHREN und ‚Bezeichnungen für Anteile' alle Textdaten integrieren, erscheint beim SATZ-Modell der Teiltext 3 als nur schwer integrierbar. Bezüglich der Notwendigkeit komplizierter Inferenzen erscheint hingegen das ‚Bezeichnungen für Anteile'-Modell als das am schwierigsten zu bildende. VERFAHREN und SATZ unterscheiden sich in dieser Hinsicht nicht gravierend voneinander. Schließlich passt die typographische Gestaltung des Lehrtextes besser zum VERFAHREN-Modell als zu den anderen beiden Modellen. Damit ist insgesamt das VERFAHREN-Modell im Vergleich zu den anderen beiden Modellen leichter zu bilden, das SATZ- und ‚Bezeichnungen für Anteile'-Modell sind die *am schwierigsten zu bildenden* naheliegenden Modelle. Eine eindeutige Abstufung zwischen den beiden ist nicht möglich; das SATZ-Modell integriert schwer den Teiltext 3, während das ‚Bezeichnungen für Anteile'-Modell die Bildung der kompliziertesten Inferenzen erfordert.

Betrachtet man nunmehr die relative Qualität der Lernergebnisse, kann festgehalten werden, dass das Lernergebnis, das mit dem AUFGABEN-Modell einhergeht, bezüglich der fachlichen Passung das schwächste ist. Einen zentralen Mangel bildet dabei die Nichtaktivierung und entsprechend die Nichtveränderung des BEZEICHNETEN der DEZIMALZAHLEN, der PROZENTE sowie der BRÜCHE. Demgegenüber gehen insbesondere das SATZ- und das ‚Bezeichnungen für Anteile'-Modell mit den besten Lernergebnissen einher, denn der im Rahmen der Modelle zentrale Sachverhalt, dass Dezimalzahlen und Brüche das Gleiche bezeichnen, ist auch im Rahmen normativen mathematischen Wissens wesentlich. Beim VERFAHREN widerspricht die Struktur des erworbenen Wissens der fachlichen Norm, denn die zentrale Stellung des Zusammenhangs zwischen Brüchen und Dezimalzahlen geht verloren. Bezüglich der Anwendbarkeit des erworbenen Wissens sind keine eindeutigen Unterschiede bezüglich der vom Lehrtext nahegelegten Lernergebnisse auszumachen; sie sind alle gleichermaßen schwer anwendbar. Das Lernergebnis, das mit dem AUFGABEN-Modell einhergeht, ist – wie bereits auf allgemeiner Ebene erläutert – aufgrund der Nichtreichhaltigkeit des AUFGABE-Schemas schwer anwendbar (vgl. Kap. 5.2). Im vorliegenden Fall sind die Lernergebnisse, die mit den MATHEMATISCHE(S)-ELEMENT(E)-Modellen einhergehen, ebenfalls schwer anwendbar. Dies resultiert aus der starken Sinnbeeinträchtigung, insbesondere aus der Unvollständigkeit der vom Lehrtext nahegelegten MATHEMATISCHE(S)-ELEMENT(E)-Modellen. Salopp gesagt: Unser Modellschüler, der den Lehrtext im Rahmen des MATHEMATISCHES-ELEMENT-Schemas verarbeitet, steht nach dem Lesen des Lehrtextes vor einer Vielzahl offener Fragen und dürfte daher an seinem Textverständnis zweifeln. Das aus dem Lehrtext erworbene Wissen bzw. die im Zuge der Lehrtextverarbeitung veränderten mathematischen Schemata befinden sich in einem vagen Schwebezustand, sie sind schwer behaltbar und aktivierbar. Insgesamt erscheinen also die Lernergebnisse, die mit dem SATZ- und dem ‚Bezeichnungen für Anteile'-Modell einhergehen, aufgrund ihrer fachlichen Passung als die relativ besten. Das Lernergebnis, das mit dem AUFGABEN-Modell einhergeht, erscheint dagegen als das relativ schwächste.

V. Integrative Lehrtextkennzeichnung

Anhand des Lehrtextes sind folgende aus fachlicher Sicht zentrale Inhalte lernbar:

- die Tatsache, dass Dezimalzahlen und Brüche das Gleiche bezeichnen,
- die globale Sichtweise auf die Dezimalzahlen,
- die Tatsache, dass Prozente Hundertstel bezeichnen.

Inwiefern können diese Inhalte von realen Schülern anhand des vorliegenden Lehrtextes tatsächlich gelernt werden? Schüler, die als Leseziel ‚(Haus-)Aufgaben lösen können' verfolgen, werden den Gesamttext selektiv lesen, so dass – falls die zu bearbeitenden Aufgaben ‚Umwandlungsaufgaben' sind – die Teiltexte, die potentiell die oben genannten zentralen Sachverhalte beinhalten — überflogen und nicht eingeprägt werden. Aufgrund der zahlreichen Schwierigkeiten, die entsprechenden Teiltexte (im Rahmen des Gesamttextes) sinnvoll auszudeuten, kann man die Möglichkeit, dass solch ein aufgabenlösen-wollender Schüler von dem Lehrtext motiviert wird und seine Zielsetzung und Lesestrategie ändert, nahezu ausschließen. Die zentralen Sachverhalte werden demnach von aufgabenlösen-wollenden Schülern nicht gelernt.

Bei einem Schüler, der als Leseziel ‚den Lehrtext verstehen wollen' verfolgt, werden in der Regel sowohl das MATHEMATISCHES-ELEMENT- als auch das AUFGABE-Schema bei der Lehrtextverarbeitung konkurrierend aktiviert. Sofern bei dem Schüler das MATHEMATISCHE ELEMENT nicht wesentlich stärker verfestigt ist, wird sich aufgrund der deutlich leichteren Modellbildung das AUFGABE-Schema als passende Interpretationsvorlage für den Gesamttext durchsetzen. Bei dieser Interpretation werden die Teiltexte, aus denen potentiell der Zusammenhang zwischen Brüchen und Dezimalzahlen (Teiltext 1) sowie die Bedeutung der Prozente (Ausdruck 21) lernbar sind, als FAKTENAUFGABEN interpretiert und damit nahezu mechanisch gelernt. Falls der Schüler den UMWANDLUNGSAUFGABEN mehr Aufmerksamkeit schenkt als den FAKTENAUFGABEN – besonders wenn erstere im erlebten Unterricht dominieren –, prägt er sich die FAKTENAUFGABE nicht ein, so dass die entsprechenden zentralen Inhalte gar nicht gelernt werden. Die globale Sichtweise auf die Dezimalzahlen ist in den ‚Beispielgleichungen' versteckt, die aber von dem Schüler als vorgeschriebene AUFGABENLÖSUNG interpretiert werden. Das Bezeichnete-der-Dezimalzahlen-Leerstelle im Allgemeinen und die globale Sichtweise im Speziellen werden damit nicht aktiviert und nicht belegt. Diese Sachverhalte werden also nicht gelernt. Wenn man annimmt, dass bei der überwiegenden Mehrheit der Schüler das MATHEMATISCHES-ELEMENT-Schema nicht stärker ausgeprägt ist als das AUFGABE-Schema, liegt der Befund nahe, dass die meisten realen verstehen-wollenden Schüler die im Lehrtext potentiell enthaltenen zentralen Inhalte nicht lernen werden. Falls in den nachfolgenden Lehrtexten davon ausgegangen wird, dass die entsprechenden Kenntnisse bei den Schülern vorhanden sind, dürfte das Nichtlernen dieser Inhalte auch in Bezug auf künftige Lernanstrengungen folgenreich sein.

Aber auch für die Schüler, bei denen das MATHEMATISCHES-ELEMENT-Schema stärker als das AUFGABE-Schema verfestigt ist und die das Ziel ‚verstehen wollen' verfolgen und damit den Lehrtext nicht selektiv verarbeiten, besteht die Gefahr, dass sie die oben genannten zentralen Sachverhalte nicht lernen. Aufgrund der Abstraktheit und Komplexität des Teiltextes 1 kann davon ausgegangen werden, dass viele Schüler ihn lediglich oberflächlich verarbeiten werden. Um diesen Teiltext rückwirkend tief verarbeiten zu können, muss die komplizierte kausale Verknüpfung zwischen dem ersten Teiltext und den nachfolgenden Teiltexten gelingen. Falls diese misslingt, bleibt der erste Teiltext oberflächlich verarbeitet, wodurch der Zusammenhang zwischen Dezimalzahlen und Brüchen nicht gelernt wird. Das Lernen der globalen Sichtweise auf die Dezimalzahlen setzt voraus, dass die entsprechenden Inferenzen anhand der formal-mathematischen Zeichen gelingen, was wiederum ein verfestigtes, reichhaltiges und der fachlichen Norm entsprechendes Vorwissen bezüglich der Dezimalzahlen erfordert. Das sinnvolle Lernen der Bedeutung der Prozente verlangt, dass der entsprechende Teiltext 3 nicht als VERFAHREN, sondern als BEGRIFF interpretiert wird. Allerdings drängen sich aufgrund des Vortextes, der im Rahmen eines VERFAHREN-Schemas leichter intakt ausdeutbar ist, die VERFAHREN als textübergreifendes Modell auf, so dass die Aufmerksamkeit auf den Umgang mit den Symbolen fällt und das Bezeichnete-der-Prozente-Leerstelle eine untergeordnete Rolle spielt. Ist dies der Fall, ist die neu gelernte Bedeutung der Prozente mental schwer behaltbar. Schließlich sei angemerkt, dass ein mathematik-orientierter Schüler, bei dem das AUFGABE-Schema nicht oder sehr schwach ausgeprägt ist und dem die komplizierten notwendigen Inferenzen aufgrund des fehlenden relevanten Vorwissens und/oder anderer Faktoren misslingen, den Gesamttext auf der sprachlichen Ebene zwar als zusammenhängend, inhaltlich aber als teilweise sinnlos empfinden wird – ähnlich wie dies bei dem erwähnten ‚Hamburg-Text' der Fall ist (vgl. Kap. 3.2.2).

Insgesamt kann festgehalten werden, dass das Lernen der im Lehrtext potentiell enthaltenen zentralen Sachverhalte nur unter folgenden *notwendigen* Bedingungen gelingen kann: Der Schüler

- setzt sich als Leseziel ‚verstehen wollen' und verarbeitet den Lehrtext nicht selektiv,
- verfügt über ein im Vergleich zum AUFGABE-Schema wesentlich verfestigteres MATHEMATISCHES ELEMENT–Schema,
- verfügt über im Vergleich zum VERFAHREN-Schema verfestigtere SATZ- und BEGRIFF-Schemata und
- verfügt über ein verfestigtes, elaboriertes und der fachlichen Norm entsprechendes Vorwissen bezüglich der BRÜCHE und DEZIMALZAHLEN.

Es bedarf also eines Schülers, der von vornherein viel über Brüche und die Mathematik weiß und im Grunde aus nahezu beliebig vagen Lehrtexten qualitativ gute Lernergebnisse erzielen kann. Es ist anzunehmen, dass nur wenige reale Schüler alle genannten notwendigen Bedingungen aufweisen und damit die im Lehrtext potentiell enthaltenen zentralen Sachverhalte sinnvoll lernen können. Ein sinnvolles, nicht aufgabenorientiertes Lernen dürfte für die überwiegende Mehrheit der Schüler anhand des vorliegenden Lehrtextes kaum möglich sein. Der Lehrtext verfehlt seine (didaktische) Funktion und löst den Anspruch der

Autoren, dass „der Unterrichtsstoff [in den Lehrtexten] übersichtlich und zusammenhängend erklärt“ wird (Pies et al. 2007, S. Klappentext), nicht ein.

Was dürften demgegenüber viele reale Schüler aus dem Lehrtext tatsächlich lernen? Diejenigen, die den Lehrtext selektiv verarbeiten und/oder ein relativ verfestigtes AUFGABE-Schema haben, werden den Lehrtext bzw. seine Teile als AUFGABEN interpretieren und daher – das Gelingen der Inferenz der entsprechenden umfangreichen LÖSUNGEN vorausgesetzt – primär den Umgang mit unverstandenen und aus ihrer Sicht bedeutungslosen Symbolen lernen. Der geistige Fokus dieser Schüler liegt nicht auf dem eigentlich ‚Wesentlichen‘, d.h. den aus fachlicher Sicht zentralen Inhalten. Falls die umfangreiche Inferenz der AUFGABENLÖSUNGEN misslingt, erlebt der Schüler den (Teil-)Text als nicht verstanden und lernt im Grunde höchstens die neuen AUFGABENSTELLUNGEN.

Im Wesentlichen führen folgende Textmerkmale dazu, dass sinnvolles Lernen im Rahmen des MATHEMATISCHES-ELEMENT-Schemas anhand des vorliegenden Lehrtextes für eine überwiegende Mehrheit der adressierten Schüler kaum möglich sein dürfte: die große inhaltliche Dichte des Lehrtextes, semantische Lücken zwischen einzelnen Teiltexten, die kaum signalisierte semantisch-kommunikative Rolle der mathematisch-formalen Zeichen (Gleichungen), die unvollständigen bzw. fehlenden und sprachlich kaum signalisierten Begründungen aller (!) neuen Sachverhalte sowie die in Bezug auf die mathematischen Modelle widersprüchliche typographische Gestaltung.

6.2. Diskussion des theoretisch-methodologischen Vorgehens und Präzisierung der Fragestellungen bezüglich weiterer Lehrtextanalysen

An dieser Stelle bietet es sich an, auf der Grundlage der bereits durchgeführten Lehrpotentialanalysen sowie des entwickelten theoretischen Rahmens die Fragestellungen und Zielsetzungen für weitere Lehrtextanalysen zu präzisieren. Bei den bislang durchgeführten Analysen hat sich gezeigt, dass das Ausdeuten der Lehrtexte im Rahmen des MATHEMATISCHES-ELEMENT-Schemas schwierig ist, so dass ein entsprechendes Modell nur mit einer geringen Wahrscheinlichkeit konstruiert wird. Dies ist einigermaßen überraschend und motiviert daher ein zentrales Erkenntnisinteresse für weitere Analysen.

Von besonderem Interesse für die nachfolgenden Lehrtextanalysen sind demnach weniger die (spezifischen) Charakteristika der von einem Lehrtext nahegelegten Modelle und Lernergebnisse, sondern insbesondere die Ausprägung derjenigen Lehrtextmerkmale, die das von realen Schülern tatsächlich Lernbare wesentlich beeinflussen. Solche Merkmale sind die absolute und die relative Bildungsschwierigkeit der naheliegenden (Haupt-)Modelle eines Lehrtextes (vgl. Kap. 4.1). Im Folgenden werden die Auswirkungen beider Textmerkmale auf die Lernergebnisse realer Schüler insbesondere bezüglich des Lernens aus Mathematikschulbuchlehrtexten erläutert.

Zunächst wird auf die Ausprägungen des Textmerkmals ‚absoluter Schwierigkeitsgrad aller naheliegenden (Haupt-)Modelle' sowie auf die entsprechenden Auswirkungen auf das Lernen realer Schüler eingegangen. Falls ein Lehrtext derart gestaltet ist, dass alle von ihm nahegelegten (Haupt-)Modelle schwer zu bilden sind, kann davon ausgegangen werden, dass viele reale Schüler diesen Lehrtext (teilweise) oberflächlich rezipieren und aus ihm (teilweise) höchstens mechanisch lernen. Insbesondere dürfte ein mathematischer Schulbuchlehrtext, der ausschließlich schwer zu bildende (Haupt-)Modelle nahelegt, die (vermutlich zahlreichen) Schüler, die bei der Textverarbeitung das Leseziel ‚(Haus-)Aufgaben bearbeiten' und damit eine selektive Lesestrategie verfolgen, in ihrer Zielsetzung und Strategiewahl bestätigen. Verstehensorientierte Schüler dürften bei solchen Lehrtexten zu einer bezüglich des Lernens ungünstigen Strategie- und Zieländerung bewogen werden. Falls jedoch ein Lehrtext ein in absoluter Hinsicht leicht zu konstruierendes Modell nahelegt, ist davon auszugehen, dass viele Schüler den gesamten Lehrtext im Rahmen dieses Modells tief verarbeiten und damit anhand des Gesamttextes sinnvoll lernen werden. Dies betrifft nicht nur die verstehensorientierten, die in diesem Fall ihre Ziel- und Strategiewahl bestätigt sehen, sondern auch die aufgabenbearbeitungsorientierten Schüler, die aufgrund der Leichtigkeit des zu konstruierenden alternativen Modells eher dazu bewogen werden, ihre selektive Strategie und das Leseziel ‚Aufgaben bearbeiten' zu ändern. Dies trifft wohl insbesondere dann zu, wenn sich das leicht zu konstruierende Modell auf das AUFGABEN-Schema bezieht. Es kann aber auch angenommen werden, dass aufgabenbearbeitungsorientierte Schüler, bei denen das MATHEMATISCHES-ELEMENT-Schema relativ stark ausgeprägt ist, auch dann ihr Leseziel und Strategie ändern, wenn der Lehrtext ein leicht zu bildendes MATHEMATISCHES-ELEMENT-Modell nahelegt. In diesem Fall werden die Schüler vom Lehrtext ‚gelenkt' und lassen sich auf die dargestellte Mathematik ein. Insofern entscheidet die Ausprägung der absoluten Bildungsschwierigkeit aller von einem Lehrtext nahegelegter Modelle darüber, ob zu erwarten ist, dass Schüler überhaupt sinnvoll aus dem (gesamten) Text lernen können.

Bezüglich des Vergleichs mehrerer naheliegender (Haupt-)Modelle wurde die Annahme formuliert, dass das am leichtesten zu konstruierende (Haupt-)Modell von der Mehrheit realer (verstehensorientierter) Schüler gebildet wird (vgl. Kap. 4.1). Die Ausprägung der relativen Bildungsschwierigkeit naheliegender Modelle erlaubt demzufolge Schlussfolgerungen darüber, welches Modell bei einer tiefen (Gesamt-)Textverarbeitung durch reale Schüler gebildet wird. Die Qualität eines Lernergebnisses beim Lernen aus mathematischen Schulbuchlehrtexten hat sich vor dem Hintergrund der theoretischen Überlegungen als determiniert oder wenigstens stark beeinflusst von der Art des konstruierten Modells erwiesen; (reine) AUFGABE(N)-Modelle ziehen in der Regel im Vergleich zu (reinen) MATHEMATISCHE(S)-ELEMENT(E)-Modellen ein schwaches Lernergebnis nach sich (vgl. Kap. 5.2). Das heißt, dass bei mathematischen Schulbuchlehrtexten der relative Schwierigkeitsgrad des naheliegenden (reinen) AUFGABE(N)-Modells[120]

[120] Hier und im Folgenden ist mit ‚naheliegendem AUFGABE(N)-Modell' stets das am leichtesten zu bildende AUFGABE(N)-Modell gemeint.

im Vergleich zu dem (am leichtesten zu konstruierenden) MATHEMATISCHES-ELEMENT-Modell bezüglich der Lernqualität realer Schüler entscheidend ist. Falls ein mathematischer Schulbuchlehrtext so gestaltet ist, dass das naheliegende AUFGABE(N)-Modell eindeutig leichter zu bilden ist als das (am leichtesten zu konstruierende) naheliegende MATHEMATISCHE(S)-ELEMENT(E)-Modell, dann dürften die Schüler, bei denen das AUFGABE-Schema gleich stark oder stärker als das MATHEMATISCHES-ELEMENT-Schema ausgebildet ist, anhand dieses Lehrtextes ein AUFGABE(N)-Modell bilden und damit ein – im Sinne der Darstellung in Kap. 5.2 – qualitativ mangelhaftes AUFGABEN-Wissen erwerben. Falls das AUFGABE(N)-Modell wesentlich leichter zu konstruieren ist, betrifft dies auch die Schüler, bei denen das AUFGABE-Schema schwächer als das MATHEMATISCHES-ELEMENT-Schema ausgebildet ist. Lediglich die Schüler, die stark mathematikorientiert sind, bei denen also von vornherein das AUFGABE-Schema wesentlich schwächer als das MATHEMATISCHES-ELEMENT-Schema ausgebildet ist, sind in der Lage, anhand eines Textes wie dem vorliegenden ein mehr oder weniger textumfassendes MATHEMATISCHE(S)-ELEMENT(E)-Modell zu bilden und damit zu einem qualitativ hochwertigerem Lernergebnis zu gelangen.

Falls ein Lehrtext nun umgekehrt so gestaltet ist, dass das naheliegende AUFGABE(N)-Modell eindeutig schwerer zu bilden ist als das am leichtesten zu konstruierende naheliegende MATHEMATISCHE(S)-ELEMENT(E)-Modell, dürften die Schüler mit relativ stark verfestigtem MATHEMATISCHES-ELEMENT-Schema anhand des Lehrtextes ein mathematisches und damit hochwertigeres (Haupt-)Modell bilden. Dies betrifft zunächst die Schüler, bei denen das MATHEMATISCHES-ELEMENT-Schema dominiert, aber auch – bei starken Unterschieden der beiden Schwierigkeitsgrade – diejenigen, bei denen das MATHEMATISCHES-ELEMENT-Schema untergeordnet ist. Bei ihnen wird die Wahrscheinlichkeit, ein elaboriertes Modell zu konstruieren, durch die Gestaltung des Textes erhöht.

Der absolute Schwierigkeitsgrad der Bildung vom Lehrtext nahegelegter Modelle entscheidet also darüber, ob überhaupt sinnvoll – d.h. Textinformationen in ein Modell integrierend und dadurch (vorhandene) Schemata verändernd – gelernt werden kann. Der relative Schwierigkeitsgrad der Bildung eines vom Lehrtext nahegelegten AUFGABE(N)-Modells im Vergleich zu einem (am leichtesten zu konstruierendem) MATHEMATISCHE(S)-ELEMENT(E)-Modell entscheidet zusätzlich darüber, welches der beiden konträren Modelltypen von realen Schülern eher konstruiert wird – und damit auch, welches Schema verändert wird. Die Ausprägung dieses Textmerkmals beeinflusst also in erheblichem Maße, ob reale Schüler beim (sinnvollen) Lernen aus dem Lehrtext qualitativ mangelhaftes AUFGABEN-Wissen erwerben.

Die beiden analysierten Schulbuchtexte zeigten im Grundsatz die gleiche Ausprägung der beiden zentralen Merkmale; ihre nahegelegten Modelle waren in absoluter Hinsicht schwer zu bilden (absolute Bildungsschwierigkeit) und das nahegelegte (reine) AUFGABEN-Modell war bei beiden Texten eindeutig leichter zu konstruieren als die (reinen) MATHEMATISCHE(S)-ELEMENT(E)-Modelle (relative Bildungsschwierigkeit).

Dieser Befund kann auf mindestens zwei Wegen als nicht aussagekräftig bzw. als bedeutungslos abgewertet werden. Diese beiden grundsätzlichen Einwände sollen hier vorweggenommen werden, um sich anschließend ihnen gegenüber zu positionieren.

Erster Einwand: Bei der Ermittlung der von den Lehrtexten nahegelegten Modelle sind Fehler unterlaufen, so dass eventuell die leichter zu bildenden Modelle ‚übersehen' wurden. Die Fehler resultieren dabei primär aus den vorher recht starr festgelegten schulmathematischen Schemata, im Rahmen derer mathematische Lehrtexte ausdeutet wurden.

Zweiter Einwand: Die Annahme der Existenz eines AUFGABE-Schemas (beim Modellschüler) führt *notwendigerweise* dazu, dass *jeder* mathematische Schulbuchlehrtext sich leicht(er) im Rahmen eines (reinen) AUFGABE-Schemas ausdeuten lässt. Salopp formuliert: Wenn man annimmt, dass der Modellschüler in ‚Aufgaben' denkt, dann ist es nicht verwunderlich, dass er die Lehrtexte eher als Aufgaben statt als ‚echte' Mathematik versteht – dafür ist jedoch nicht de Lehrtext verantwortlich. Folglich wird die Annahme des AUFGABE-Schemas den lernrelevanten Besonderheiten mathematischer Schultexte nicht gerecht. Sie trägt an die Schultexte unzulässigerweise ‚etwas' heran, was nicht in ihnen ist.

Der erste Einwand ist insofern gerechtfertigt, als die im Vorfeld konzipierten schulmathematischen Schemata die Ermittlung der von mathematischen Lehrtexten nahegelegten Modelle tatsächlich stark prägen und möglicherweise auch einschränken. Erschwerend kommt hinzu, dass die konzipierten schulmathematischen Schemata recht starr und wenig ausdifferenziert sind. So sind insbesondere die wenig differenzierte Festlegung der möglichen Unterkategorien eines MATHEMATISCHEN ELEMENTS (SATZ, VERFAHREN und BEGRIFF) sowie die ebenso wenig differenzierte Festlegung der möglichen Unterkategorien von AUFGABEN (TRANSFORMATIONSAUFGABE und FAKTENAUFGABE) hinterfragbar.

Allerdings wurde bei der Ermittlung naheliegender Modelle versucht, sich weniger von diesen Kategorien bzw. Schemata, sondern primär vom Text bzw. den Satzbedeutungen leiten zu lassen. Es wurde weniger ein bereits konzipiertes (zum Lehrtext passendes) Schema, sondern vielmehr ein Gegenstand (im weitesten Sinne), der möglichst den gesamten Lehrtext subsumiert, gesucht. Die ‚Antriebskraft' ging also primär vom Text und weniger von den zuvor konzipierten schulmathematischen Schemata aus. Die Gefahr, dass eventuell ein möglicher, den gesamten Text umfassender Gegenstand ‚übersehen' wurde, bleibt wohl bestehen. Daraus lässt sich jedoch der Verzicht auf den hier verfolgten Ansatz nicht legitimieren, wohl aber die Einladung zur Diskussion weiterer relevanter intersubjektiver Deutungen.

Nun zum zweiten Einwand, dass, sofern man die Existenz des AUFGABE-Schemas annimmt, jeder Mathematikschulbuchlehrtext notwendigerweise ein relativ leicht zu konstruierendes AUFGABE(N)-Modell nahelegt. Diese Vermutung resultiert daher, dass an ein AUFGABE(N)-Modell weniger Anforderungen bezüglich der zu konstruierenden Bestandteile zu stellen sind als an ein MATHEMATISCHE(S)-ELEMENT(E)-Modell. Ausführlicher bedeutet das:

- Da die AUFGABENOBJEKTE der (TRANSFORMATIONS-)AUFGABEN typischerweise Symbole ohne ein Bezeichnetes sind, entfallen bei AUFGABE(N) im Vergleich zu MATHEMATISCHEN ELEMENTEN die meist komplizierten Inferenzen, die das Bezeichnete enthalten, falls im Lehrtext das Bezeichnete nicht oder wenig explizit genannt wird.
- Da BEGRÜNDUNGEN im Rahmen der AUFGABEN nicht verfestigt sind, entfallen beim Fehlen entsprechender Teiltexte diese oft ebenfalls komplizierten Inferenzen.
- Da von der Auswahl der AUFGABEN kaum ‚Logik' erwartet wird und die Gleichheit der AUFGABENOBJEKTE bzw. der TRANSFORMATIOSART als verbindendes Element unterschiedlicher AUFGABEN ausreicht, sind viele Teiltexte, die im Rahmen des MATHEMATISCHES-ELEMENT-Schemas als unzusammenhängend erscheinen, im Rahmen des AUFGABE-Schemas sinnvoll integrierbar. Deswegen entfallen auch viele Sinnbeeinträchtigungen bezüglich der fehlenden MOTIVE für die Zusammenstellung von AUFGABEN.

Ist also tatsächlich jeder Mathematikschulbuchlehrtext leichter als AUFGABE(N)-Modell auszudeuten, solange der Leser über das AUFGABE-Schema verfügt? In Kapitel 6.5 wird ein Lehrtext analysiert, der in absoluter und relativer Hinsicht schwer als AUFGABE(N)-Modell interpretierbar ist. Unabhängig von diesem nachfolgenden ‚empirischen Nachweis' kann man bereits an dieser Stelle auf einer theoretischen Ebene zeigen, dass sich nicht jeder schulmathematische Lehrtext leicht(er) als AUFGABE(N)-Modell ausdeuten lässt. Lehrtexte sind dann eindeutig leicht(er) als AUFGABEN interpretierbar, wenn

- die Belegung zentraler Leerstellen des AUFGABE-Schemas (AUFGABENSTELLUNG und LÖSUNG) anhand der textbasierten und/oder inferierten Werte möglich ist,
- die notwendigen Inferenzen nicht schwer(er) sind.
- das naheliegende AUFGABE(N)-Modell alle bzw. mehr Teiltexte integriert als es im Rahmen eines MATHEMATISCHE(S)-ELEMENT(E)-Modells möglich wäre, sich also alle bzw. die meisten Teiltexte als Bestandteile und sinnvolle Aspekte einer Aufgabenklasse interpretieren lassen,
- der Textverlauf sowie insbesondere die typographische Gestaltung (mehr) zum AUFGABEN-Modell passen.

Es sind unschwer Lehrtexte denkbar, die die eben genannten Merkmale nicht erfüllen. Ein Lehrtext ist insbesondere dann schwer als AUFGABE(N)-Modell interpretierbar, wenn anhand der Textdaten (typische) AUFGABENSTELLUNG(EN) und LÖSUNG(EN) schwer oder gar nicht bildbar sind. Insbesondere sind diejenigen Lehrtexte, die sich leicht als ein (sinnstiftender) SATZ oder BEGRIFF ausdeuten lassen, schwer als AUFGABE(N) interpretierbar. Das heißt, diejenigen Lehrtexte, deren Teiltexte sich mehrheitlich oder vollständig ohne allzu umfangreiche und komplizierte Inferenzen als Bestandteile und sinnvolle Aspekte (Motiv, Anwendungsmöglichkeiten, Zusammengang zu bereits bekannten mathematischen Elementen) eines (neuen) SATZES/BEGRIFFS interpretieren lassen, erfüllen die genannten Merkmale für einen leicht als AUFGABE(N)-Modell ausdeutbaren Lehrtext nicht. Ein vollständiges SATZ-Modell enthält alle notwendigen SATZBESTANDTEILE, also eine SATZAUSSAGE auf einer allgemeinen und konkreten Ebene und eine (zugängliche) BEGRÜNDUNG. Die SATZOBJEKTE sind nicht SYMBOLE ohne ein Bezeichnetes, sondern GEGENSTÄNDE (im weitesten Sinne). Lehrtexte, die leicht als ein (sinnstiftendes) SATZ-Modell ausdeutbar sind, müssen also Teiltexte enthalten, die sich leicht (also insbesondere ohne umfangreiche und komplizierte Inferenzen) als SATZAUSSAGE und BEGRÜNDUNG ausdeuten lassen. Das setzt in der Regel relativ ausführliche Teiltexte voraus, bei denen insbesondere die SATZOBJEKTE – also das jeweils Bezeichnete mathematischer Symbole – explizit benannt werden und einen zentralen Referenzträger des Lehrtextes darstellen. Solche Teiltexte sind schwer als eine FAKTEN-AUFGABE interpretierbar, denn typische FAKTENAUFGABENSTELLUNGEN und –LÖSUNGEN zeichnen sich durch ihre Kürze aus und enthalten typischerweise keine BEGRÜNDUNGEN. Jedoch auch als (typische) TRANSFORMATIONSAUFGABEN sind solche Teiltexte schwer interpretierbar, denn TRANSFORMATIONSAUFGABEN beziehen sich auf Symbole ohne ein Bezeichnetes. Eine entsprechende Argumentation kann auch in Bezug auf Lehrtexte, die leicht zu bildende BEGRIFFE-Modelle nahelegen, geführt werden.[121] Insgesamt kann festgehalten werden, dass die Lehrtexte, die sich leicht im Rahmen eines SATZ- oder BEGRIFF-Modells ausdeuten lassen, schwer als AUFGABEN interpretierbar sind. Die Vermutung, dass jeder mathematischer Schulbuchlehrtext sich notwendigerweise leicht(er) als AUFGABE(N) ausdeuten lässt, kann somit entkräftet werden. Der (relative) Bildungsschwierigkeitsgrad des von einem Lehrtext nahegelegten AUFGABEN-Modells erweist sich erneut und in Einklang mit den theoretischen Vorarbeiten als eine Eigenart des Lehrtextes.

Am Ende dieser Ausführungen soll ergänzend auf den (möglichen) Zusammenhang zwischen dem Bildungsschwierigkeitsgrad der MATHEMATISCHE(S)-ELEMENT(E)-Modelle und dem Bildungsschwierigkeitsgrad der AUGABE(N)-Modelle eingegangen werden. Wie bereits erläutert, geht eine leichte Bildung eines MATHEMATISCHE(S)-ELEMENT(E)-Modells mit einer erschwerten Bildung eines AUFGABE(N)-Modells einher.[122] Gleichermaßen gilt, dass eine leichte Bildung eines AUFGABE(N)-Modells die Bildung eines MATHEMATISCHE(S)-ELEMENT(E)-Modells erschwert.[123] Eine erschwerte Modellbildung eines Modelltyps lässt aber im Allgemeinen keine Aussage bezüglich der Bildungsschwierigkeit des konträren Modelltyps zu. Das heißt, ein Lehrtext, dessen (am leichtesten zu bildendes) naheliegendes MATHEMATISCHE(S)-ELEMENT(E)-Modell in absoluter Hinsicht schwer zu konstruieren ist, muss als AUFGABE(N)-Modell nicht notwendigerweise leicht(er) ausdeutbar sein; sein naheliegendes AUFGABE(N)-Modell kann ebenfalls absolut und relativ gesehen schwer zu bilden sein. Dies gilt entsprechend für die AUFGABE(N); ein schwer zu bildendes

[121] Die Lehrtexte, die sich (in absoluter Hinsicht) leicht als VERFAHREN ausdeuten lassen, nehmen eine Sonderstellung ein, denn sie sind in der Regel auch leicht als (TRANSFORMATIONS-)AUFGABEN ausdeutbar. Insbesondere trifft dies auf die Lehrtexte zu, deren nahegelegtes VERFAHREN-Modell lediglich ausschließlich die einzelnen BESTANDTEILE, also keine MOTIV(E) und keine ANWENDUNGSMÖGLICHKEIT(EN) beinhaltet.

[122] Die VERFAHREN nehmen diesbezüglich eine Sonderstellung ein; ein Lehrtext, der ein leicht konstruierbares VERFAHREN-Modell nahelegt, legt auch ein leicht konstruierbares AUFGABE-Modell nahe.

[123] Bezüglich der VERFAHREN gilt dies nur, wenn das leicht konstruierbare AUFGABE(N)-Modell ausschließlich die BESTANDTEILE einzelner AUFGABEN, also keine BEGRÜNDUNGEN oder sonstige weitere Aspekte beinhaltet.

naheliegendes AUFGABE(N)-Modell korreliert nicht notwendigerweise mit einem leicht(er) zu bildenden mathematischen Modell.

Insgesamt kann festgehalten werden, dass die relative Bildungsschwierigkeit eines naheliegenden (reinen) AUFGABE(N)-Modells in hohem Maße von der Eigenart des Lehrtextes abhängt und dass sie lediglich teilweise mit der Bildungsschwierigkeit eines MATHEMATISCHES-ELEMENT-Modells zusammenhängt. Das Nicht-Berücksichtigen des AUFGABE(N)-Modells im Rahmen der Lehrpotentialanalyse eines Lehrtextes würde dazu führen, dass man Aussagen lediglich bezüglich des sinnvollen (versus mechanischen) Lernens erhielte. Das Lehrpotential bezüglich des AUFGABE(N)-Lernens wäre damit nicht erfasst, womit ein zentraler Aspekt des schulischen Lernens im Fach Mathematik vernachlässigt werden würde.

Die nachfolgenden Analysen können sich demzufolge auf die Ermittlung des absoluten Bildungsschwierigkeitsgrades der naheliegenden (Haupt-)Modelle sowie auf die Ermittlung der relativen Bildungsschwierigkeit des naheliegenden reinen AUFGABE(N)-Modells im Vergleich zu den naheliegenden MATHEMATISCHE(S)-ELEMENET(E)-Modellen konzentrieren. Dabei soll überprüft werden, ob es sich bei der im Falle des ‚Kastens' und des Lehrtextes 1 vorgefundenen erschwerten Bildung aller sinnstiftenden Modelle bei relativ leichter AUFGABE(N)-Modellbildung um Einzelfälle handelt oder ob es Hinweise darauf gibt, dass diese Merkmalsausprägungen auf ein Charakteristikum (typischer) schulmathematischer Lehrtexte verweisen. Dazu wird zunächst ein weiterer Schulbuchlehrtext zum Lernstoff ‚Beziehung zwischen Bruch- und Dezimalzahlen' analysiert.

6.3. Lehrtext 2: ‚An der Kühltheke'

Der zu analysierende Lehrtext stammt aus dem Schulbuch ‚Fokus Mathematik Klasse 6' des Cornelsen Verlags (vgl. Esper und Schornstein 2007). Die Reihenfolge der Behandlung rationaler Zahlen ist im Vergleich zu den vorher analysierten Schulbüchern ausgetauscht; zuerst werden die Dezimalzahlen und dann die gemeinen Brüche thematisiert. Das Kapitel ‚Dezimalzahlen' besteht aus vier obligatorischen Unterkapiteln:

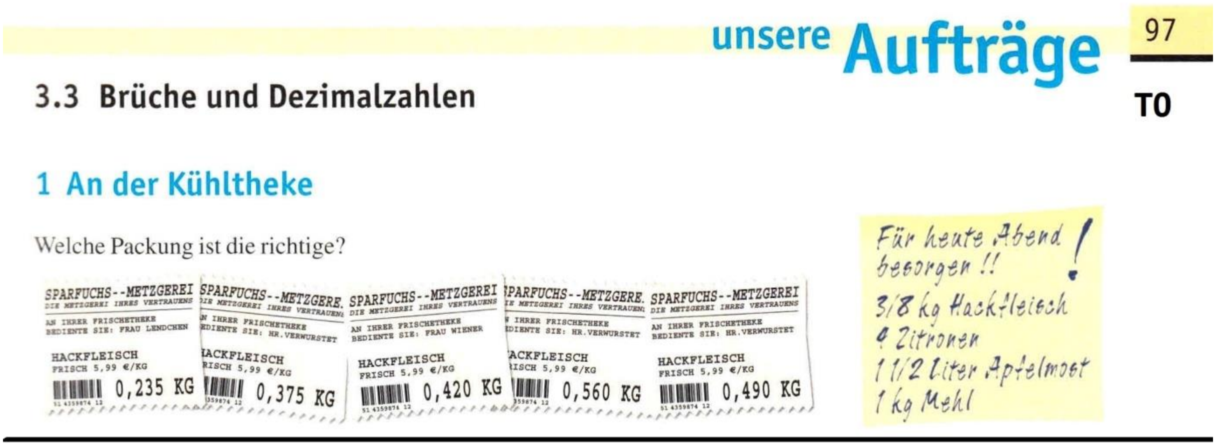
1. Immer genaueres Messen
2. Rechnen mit Dezimalzahlen
3. Division von Dezimalzahlen
4. Dreisatz.

Das nachfolgende Kapitel ‚Rationale Zahlen' beinhaltet ebenfalls vier obligatorische Unterkapitel:

1. Anteile
2. Vergleichen und Ordnen von Brüchen
3. Brüche und Dezimalzahlen
4. Prozentangaben.

Jedes obligatorische Unterkapitel beginnt mit mehreren Arbeitsaufträgen, die jeweils mit einer Nummer und einem Titel gekennzeichnet sind. Den Einstiegsaufträgen folgt stets ein längerer Lehrtext, in dem – und dies im Unterschied zu den Lehrtexten im Schulbuch ‚Interaktiv' – ein Auftrag aufgegriffen und laut Autoren „sorgfältig ausgeführt" wird (Esper und Schornstein 2007, S. Klapptext). Entsprechend ist auch die Überschrift der Lehrtexte gestaltet; in großer Schriftgröße ist stets ‚zum Auftrag…' notiert, abgesetzt folgen Nummer und Titel des jeweiligen Auftrages. Anhand der Lehrtexte sollen Schüler – so die Autoren des Schulbuchs – die wichtigen neuen Begriffe und Zusammenhänge zum Thema kennenlernen oder wiederholen und sich allmählich an die Spezifik mathematischer Texte gewöhnen (vgl. ebd.). Alle Lehrtexte enthalten ‚blaue Kästen', in denen sich laut Ankündigung der Autoren der „Stoff [befindet], den du [der Schüler E.K.] unbedingt lernen musst" (ebd.). Den präsentierten Lehrtexten, die jeweils eine bis zweieinhalb Buchseiten umfassen, folgen stets zahlreiche Aufgaben, die jeweils in verschiedene Kategorien eingeteilt sind: ‚Trainieren', ‚Anwenden' und ‚Vernetzen'.

Der zu analysierende Lehrtext ist nachfolgend abgebildet, wobei die Kennzeichnung der sprachlichen Einheiten sowie der zentralen Referenzträger bereits eingefügt wurde (vgl. Abb. 12). Der Lehrtext gehört zum Kapitel ‚Brüche und Dezimalzahlen', also dem dritten Unterkapitel im Rahmen des übergreifenden Kapitels ‚Rationale Zahlen'. Er bezieht sich laut Überschrift auf den vorhergehenden Auftrag ‚An der Kühltheke' und ist der längste im ganzen Schulbuch; er füllt etwa zweieinhalb Buchseiten.


unsere Aufträge 97

T0

3.3 Brüche und Dezimalzahlen

1 An der Kühltheke

Welche Packung ist die richtige?

zum **Auftrag …**

T1.1

1 An der Kühltheke

[1] Um die richtige Packung zu finden, kannst du die Brüche in Dezimalzahlen oder die Dezimalzahlen in Brüche umwandeln.

T1.2

[3] $\frac{256}{1000} = 0{,}256$

$\frac{13}{10\,000} = 0{,}0013$

$\frac{49}{100} = 0{,}49$

[2] Ist der Nenner eines Bruches bereits eine Zehnerpotenz, also 10, 100, 1000, usw. so ist die Umformung entsprechend den nebenstehenden Beispielen einfach.

[4] Aber auch wenn der Nenner keine Zehnerpotenz ist, kann die Umformung oft ohne Aufwand geschehen.[5] So hat der Bruch $\frac{3}{8}$ keine Zehnerpotenz im Nenner.

[6] Jedoch lässt sich der Bruch durch geeignetes **Erweitern** so ändern, dass im Nenner nun die Zahl 1000 steht.[7] Das geht auch bei anderen Nennern.

[8] Um im Nenner eine Zehnerpotenz zu erhalten, ist natürlich auch das **Kürzen** oder das Kürzen und anschließendes Erweitern möglich.

T1.3

[9] **Beispiele**

Erweitern	Kürzen	Kürzen und Erweitern
$\frac{3}{8} = \frac{3 \cdot 125}{8 \cdot 125} = \frac{375}{1000} = 0{,}375$	$\frac{14}{20} = \frac{14:2}{20:2} = \frac{7}{10} = 0{,}7$	$\frac{3}{75} = \frac{3:3}{75:3} = \frac{1}{25} = \frac{1 \cdot 4}{25 \cdot 4} = \frac{4}{100} = 0{,}04$
$\frac{3}{4} = \frac{3 \cdot 25}{4 \cdot 25} = \frac{75}{100} = 0{,}75$	$\frac{28}{700} = \frac{28:7}{700:7} = \frac{4}{100} = 0{,}04$	$\frac{21}{15} = \frac{21:3}{15:3} = \frac{7}{5} = \frac{7 \cdot 2}{5 \cdot 2} = \frac{14}{10} = 1{,}4$
$\frac{3}{25} = \frac{3 \cdot 4}{25 \cdot 4} = \frac{12}{100} = 0{,}12$		

T1.4

[13]
$$\begin{array}{l}
7 : 16 = 0{,}4375 \\
-\ 0 \\
\quad 70 \\
-\ 64 \\
\quad\ \ 60 \\
\quad -\ 48 \\
\quad\quad 120 \\
\quad -\ 112 \\
\quad\quad\quad 80 \\
\quad\quad -\ 80 \\
\quad\quad\quad\ \ 0
\end{array}$$

[10] Aber nicht immer lässt sich der Nenner so in eine Zehnerpotenz umformen.[11] Eine Methode, die immer zum Ziel führt, ist, den Zähler durch den Nenner zu dividieren.

[12] So lässt sich z. B. der Bruch $\frac{7}{16}$ auch durch die Rechnung $7 : 16 = 0{,}4375$ ohne Erweitern in eine Dezimalzahl umwandeln.

[14] **Brüche können in Dezimalzahlen umgewandelt werden, indem der Zähler durch den Nenner geteilt wird.[15] Der Bruchstrich bedeutet auch „geteilt durch“.[16] Es ist ferner oft möglich, dass der Bruch so gekürzt oder erweitert wird, dass der Nenner eine Zehnerpotenz ergibt.**

T1.5

[17] Bei $\frac{4}{9}$ führt die Rechnung zu dem interessanten Ergebnis: $4 : 9 = 0{,}444\ldots = 0{,}\overline{4}$.

[18] Derartige Dezimalzahlen, bei denen sich die Ziffern nach dem Komma endlos wiederholen, kennst du bereits aus dem Abschnitt „Dividieren von Dezimalzahlen“.[19] Sie heißen **periodische Dezimalzahlen** oder **periodische Dezimalbrüche.**

[20] $\frac{1}{9} = 0{,}\overline{1}$; $\frac{2}{9} = 0{,}\overline{2}$; $\frac{3}{9} = \frac{1}{3} = 0{,}\overline{3}$; …

[21] Ferner gilt: $\frac{33}{99} = 0{,}\overline{23}$ und $\frac{74}{99} = 0{,}\overline{74}$. Schließlich: $\frac{12\,345}{99\,999} = 0{,}\overline{12345}$.

[22] BEACHTE

Da das Dividieren durch Null **nicht** möglich ist, gibt es auch **keinen** Bruch, dessen **Nenner** **Null** ist.

Der Zähler eines Bruchs kann jedoch sehr wohl Null sein:

$\frac{0}{17} = 0 : 17 = 0$

Beispielrechnungen

$$\begin{array}{l}
4 : 9 = 0{,}444\ldots \\
-\ 0 \\
\quad 40 \\
-\ 36 \\
\quad\ \ 40 \\
\quad -\ 36 \\
\quad\quad 40 \\
\quad\ -\ 36 \\
\quad\quad\ \ 40 \\
\quad\quad\ \ \ldots
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l}
23 : 99 = 0{,}2323\ldots \\
-\ 0 \\
\quad 230 \\
-\ 198 \\
\quad\ \ 320 \\
\quad -\ 297 \\
\quad\quad 230 \\
\quad\ -\ 198 \\
\quad\quad\ \ 320 \\
\quad\quad\ \ \ldots
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l}
74 : 99 = 0{,}7474\ldots \\
-\ 0 \\
\quad 740 \\
-\ 693 \\
\quad\ \ 470 \\
\quad -\ 396 \\
\quad\quad 740 \\
\quad\ -\ 693 \\
\quad\quad\ \ 470 \\
\quad\quad\ \ \ldots
\end{array}$$

23 Vielleicht hast du aber zunächst die Dezimalzahlen in Brüche umgeformt.
24 Auf einer der Hackfleischpackungen findest du die Angabe 0,235 kg.
25 0,235 bedeutet:
2 Zehntel (z) + 3 Hundertstel (h) + 5 Tausendstel (t).
27 Die Zahl lässt sich leicht in einen Bruch umwandeln. 28 Wie hier kannst du gegebenenfalls noch kürzen:

$$\frac{235}{1000} = \frac{235:5}{1000:5} = \frac{47}{200}$$

26 2 z = 20 h = 200 t
3 h = 30 t
5 t
235 t = $\frac{235}{1000}$

T1.6

29 **Eine Dezimalzahl wird in einen Bruch umgewandelt, indem man die Ziffern hinter dem Komma in den Zähler schreibt und als Nenner die richtige Zehnerpotenz wählt. 30 Stehen Zahlen ungleich Null vor dem Komma, erhältst du eine gemischte Zahl.**

31 Nenner ≙ 10^Anzahl der Ziffern nach dem Komma

32 **Beispiele**

$0{,}235 = \frac{235}{10^3} = \frac{\cancel{235}^{47}}{\cancel{1000}_{200}} = \frac{47}{200}$; $8{,}12345 = 8\frac{12345}{10^5} = 8\frac{\cancel{12345}^{2469}}{\cancel{100000}_{20000}} = 8\frac{2469}{20000}$

33 Und wie sieht es mit periodischen Dezimalzahlen aus? 34 Lassen sie sich auch als Bruch darstellen? 35 Welchem Bruch entspricht z. B. $0,\overline{71}$? 36 Aus der Umwandlung von Brüchen in Dezimalzahlen, wie wir sie oben gemacht haben, ersiehst du, dass dies der Bruch $\frac{71}{99}$ sein muss. 37 Und $0,\overline{142857}$ ist $\frac{142857}{999999}$.
38 Durch Kürzen erhältst du den Bruch $\frac{1}{7}$. 39 Wenn du nun zur Probe 1 : 7 schriftlich rechnest, ist das Ergebnis wieder $0,\overline{142857}$.

T1.7

40 **Bei der Umwandlung einer periodischen Dezimalzahl in einen Bruch schreibst du die Ziffern der Periode in den Zähler. 41 Besteht die Periode nur aus einer Ziffer, schreibst du eine 9 in den Nenner. 42 Besteht die Periode aus zwei Ziffern, schreibst du 99 in den Nenner, bei drei Ziffern 999 usw.**

43 **Beispiele**

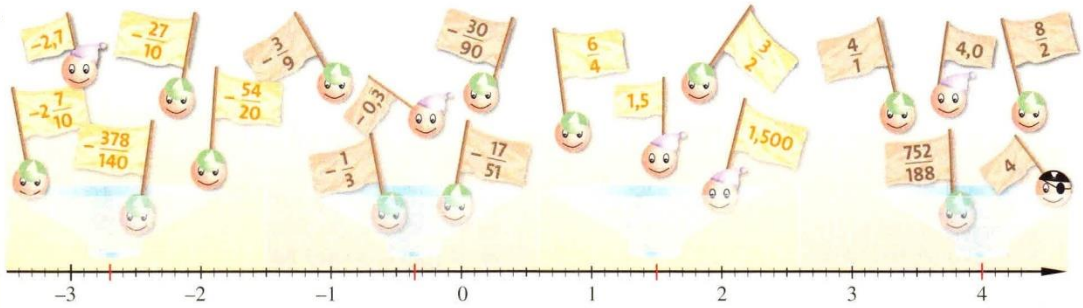
$0,\overline{1} = \frac{1}{9}$; $7,\overline{12} = 7\frac{\cancel{12}^{4}}{\cancel{99}_{33}} = 7\frac{4}{33}$; $0,\overline{123} = \frac{\cancel{123}^{41}}{\cancel{999}_{333}} = \frac{41}{333}$; $25,\overline{1234} = 25\frac{1234}{9999}$

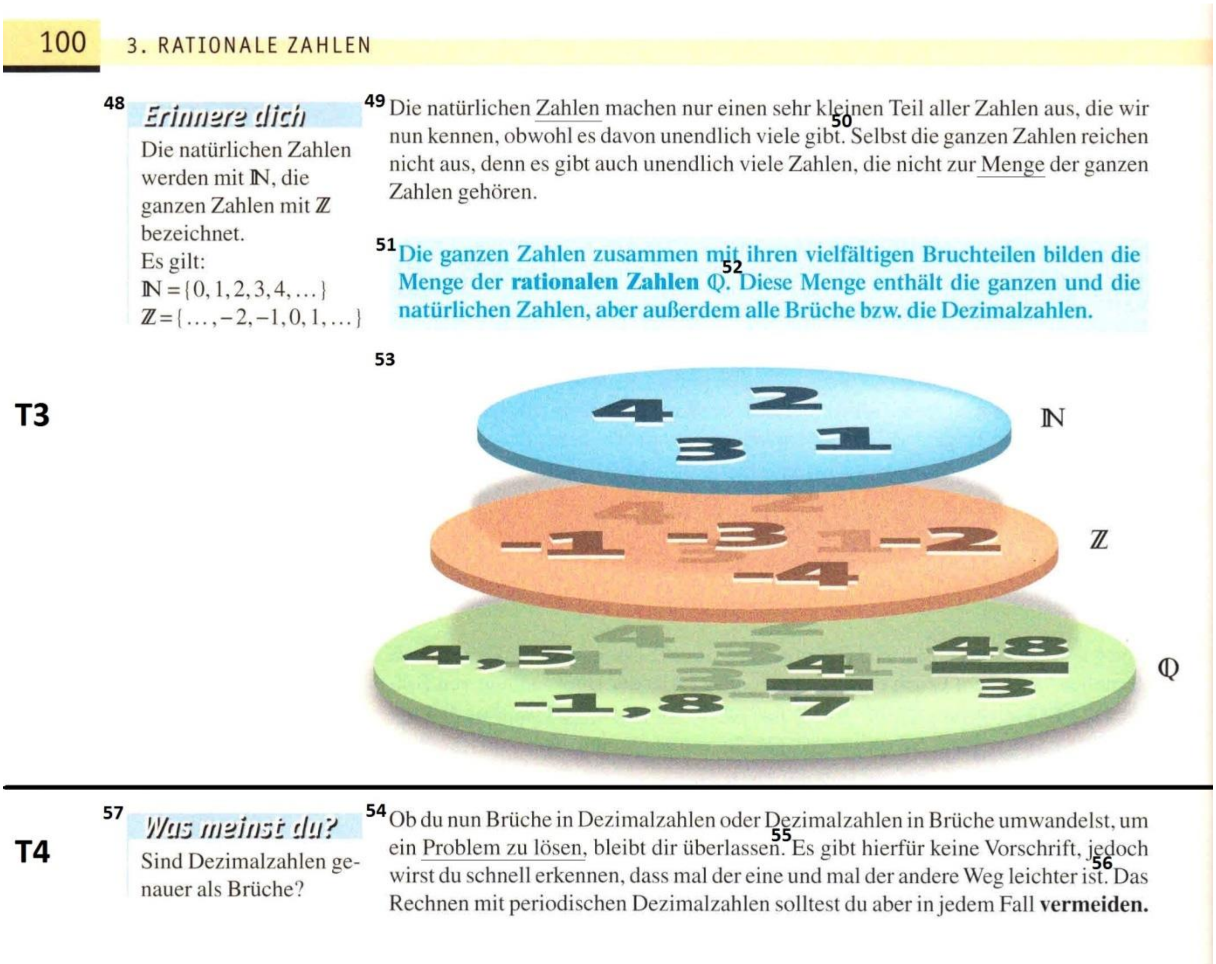
44 BEACHTE
Wenn du genauer wissen willst, warum das Verfahren so funktioniert, bearbeite die Aufgabe 25.

45 Zahlen haben viele verschiedene Darstellungen. 46 Punkte auf der Zahlengeraden können also in Bruch- oder Dezimalschreibweise bezeichnet werden.

T2

47





100 3. RATIONALE ZAHLEN

48 **Erinnere dich**
Die natürlichen Zahlen werden mit $\mathbb{N}$, die ganzen Zahlen mit $\mathbb{Z}$ bezeichnet.
Es gilt:
$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$
$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, \dots\}$

49 Die natürlichen Zahlen machen nur einen sehr kl50einen Teil aller Zahlen aus, die wir nun kennen, obwohl es davon unendlich viele gibt. Selbst die ganzen Zahlen reichen nicht aus, denn es gibt auch unendlich viele Zahlen, die nicht zur Menge der ganzen Zahlen gehören.

51 **Die ganzen Zahlen zusammen mit ihren vielfältigen Bruchteilen bilden die Menge der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$.** 52 **Diese Menge enthält die ganzen und die natürlichen Zahlen, aber außerdem alle Brüche bzw. die Dezimalzahlen.**

T3

53

T4

57 **Was meinst du?**
Sind Dezimalzahlen genauer als Brüche?

54 Ob du nun Brüche in Dezimalzahlen oder Dezimalzahlen in Brüche umwandelst, um ein Problem zu lösen, bleibt dir überlassen. 55 Es gibt hierfür keine Vorschrift, jedoch wirst du schnell erkennen, dass mal der eine und mal der andere Weg leichter ist. 56 Das Rechnen mit periodischen Dezimalzahlen solltest du aber in jedem Fall **vermeiden.**

Abbildung 12: Lehrtext ‚An der Kühltheke' im Lehrbuch ‚Fokus Mathematik Klasse 6' (Esper und Schornstein 2007, S. 97–100)

I. Skizze des relevanten fachlichen Vorwissens des Modellschülers

Dezimalzahlen wurden analog zum Schulbuch ‚Mathematik 6' als Zahlen eingeführt, die in einer erweiterten Stellenwerttafel darstellbar sind (vgl. den dazugehörigen Lehrtext im Anhang Abb. 4). Des Weiteren wurde im entsprechenden Einführungslehrtext unter anderem mitgeteilt, dass Dezimalzahlen auf der Zahlengeraden „zwischen den ganzen Zahlen liegen" (vgl. Esper und Schornstein 2007, S. 11). Ergänzend wurde hinzugefügt, dass man „jede ganze Zahl als Dezimalzahl schreiben [kann]" (ebd.). In den dem Einführungslehrtext folgenden Lehrtexten wurde das Rechnen mit Dezimalzahlen behandelt, dabei insbesondere die Multiplikation und die Division. Die entsprechenden Regeln wurden auf der Grundlage eines Beispiels in den Lehrtexten unter Rückgriff auf den Aufbau der Dezimalzahlen ‚hergeleitet'. Eine lokale und globale Sichtweise auf Dezimalzahlen wurde weder im Einführungslehrtext noch in den darauffolgenden Lehrtexten des Kapitels ‚Dezimalzahlen' als allgemein geltende Sätze formuliert. Im Rahmen der Division der Dezimalzahlen wurden außerdem die periodischen Dezimalzahlen als besondere Ergebnisse, bei denen unendlich viele sich immer wiederholende Nachkommaziffern auftauchen, eingeführt (vgl. Esper und Schornstein 2007, S. 29).

Unter diesen Voraussetzungen kann davon ausgegangen werden, dass unser Modellschüler über ein abstraktes DEZIMALZAHL-Schema verfügt, dessen SYMBOLE in zahlreichen (RECHEN-)VERFAHREN auftauchen. Das BEZEICHNETE der (abstrakten) DEZIMALZAHLEN, also das AUFBAU-DER-DEZIMALZAHLEN-Schema, ist hier im Vergleich zum Modellschüler im Rahmen des Interaktiv-Schulbuchs verfestigter, da im Gegensatz zum Interaktiv-Schulbuch die Herleitungen der Rechenregeln, die das Schema potentiell verfestigen, in den Lehrtexten vorhanden sind. Allerdings wird aufgrund der Komplexität des Schemas und der ‚Kürze' der Herleitungen davon ausgegangen, dass das Schema insgesamt noch recht vage ist (vgl. die entsprechenden Ausführungen bezüglich des Vorwissens des Modellschülers im Rahmen des Lehrtextes 1). Des Weiteren wird davon ausgegangen, dass GANZE ZAHLEN und DEZIMAL-ZAHLEN von unserem Modellschüler weitgehend als voneinander getrennte Einheiten betrachtet werden, d.h. der kognitive Inhalt, dass ganze Zahlen in Dezimalschreibweise darstellbar sind und damit spezifische DEZIMALZAHLEN bilden, ist nicht verfestigt. Diese Annahme wird getroffen, weil die entsprechende Mitteilung im Einführungslehrtext lediglich ergänzenden Charakter hatte – sie war kurz und enthielt insbesondere keine Begründungen.

Brüche wurden im Kapitel ‚Anteile' als Bezeichnungen der ‚Teile eines Ganzen' (vgl. den dazugehörigen Lehrtext im Anhang Abb. 5) eingeführt, wobei „der Nenner eines Bruches [angibt], in wie viele Teile ein Ganzes geteilt wird. Der Zähler gibt an, wie viele Teile davon genommen werden" (Esper und Schornstein 2007, S. 84). Im dazugehörigen Einführungslehrtext wurde in einer Randnotiz erwähnt, wie man Anteile konkreter Größen unter Rückgriff auf kleinere Maßeinheiten ermittelt; so wurde beispielhaft gezeigt, wie man $\frac{3}{4}$ eines Liters, also 750ml, ausrechnet. Bei einigen nachfolgenden Aufgaben sollten dann Anteile konkreter Größen anhand kleinerer Maßeinheiten angegeben werden. Im folgenden Unterkapitel wurde das ‚Vergleichen und Ordnen von Brüchen' behandelt; im entsprechenden Lehrtext wurden die allgemeinen ‚Rechenregeln' für das Kürzen und Erweitern der Brüche anhand der dazugehörigen (inhaltlichen) Grundvorstellungen (Erweitern als Verfeinern, Kürzen als Vergröbern der Einteilung) ‚hergeleitet', indem unterschiedlich eingeteilte Kreissegmente präsentiert und erläutert wurden (vgl. Esper et al. 2007, S. 92–93). Im Anschluss an die Darstellung der Rechenregeln folgt die Mitteilung: „Durch Kürzen und Erweitern ändert sich der Anteil nicht. Bruch und gekürzter bzw. erweiterter Bruch stellen dieselbe Zahl dar" (Esper und Schornstein 2007, S. 93). An keiner Stelle des Lehrtextes ‚Vergleichen und Ordnen von Brüchen' sowie des Lehrtextes ‚Anteile' wurde jedoch die Beziehung zwischen Brüchen und ganzen Zahlen erwähnt. Auch in den dazugehörigen Aufgaben tauchen keine Brüche mit dem Nenner 1 auf.

Ausgehend von diesen Schulbuchinhalten wird hier davon ausgegangen, dass unser Modellschüler über ein BRUCH-Schema verfügt, dessen Inhalte und Struktur dem Schema des Modellschülers im Rahmen des Schulbuchs ‚Mathematik 6' weitgehend entspricht (vgl. Kap. 5.3). Es wird davon ausgegangen, dass das BEZEICHNETE eines BRUCHS ‚Teil eines Ganzen' relativ verfestigt ist. Des Weiteren darf ein VON-ERWEITERTEN-UND-GEKÜRZTEN-BRÜCHEN-GEKENNZEICHNETE-ZAHL-Schema angenommen werden. Da sich dieses Schema dem fachlichen Begriff ‚Bruchzahl' nähert, wird es einfachheitshalber auch als BRUCHZAHL-Schema bezeichnet, auch wenn dieser Begriff im Schulbuch nicht genannt wird und der Modellschüler daher über diesen Terminus nicht verfügt. Der kognitive Inhalt, dass ganze Zahlen als Brüche darstellbar sind, ist beim Modellschüler nicht vorhanden. Das heißt, GANZE ZAHLEN werden vom Modellschüler nicht als spezifische BRÜCHE/BRUCHZAHLEN, sondern als von BRÜCHEN weitgehend unabhängige ZAHLEN betrachtet. Der NENNER eines BRUCHS ist damit (typischerweise) ungleich eins und das BEZEICHNETE der BRÜCHE bzw. der BRUCHZAHLEN und der NATÜRLICHEN ZAHLEN bzw. der GANZEN ZAHLEN ist für den Modellschüler grundverschieden: Im ersten Fall sind es (echte) Anteile, wohingegen es im zweiten Fall Ganzheiten sind. Da in dem hier zu analysierenden Lehrtext erstmalig in diesem Schulbuch die Termini Brüche und Dezimalzahlen zusammengeführt werden, ist davon auszugehen, dass die DEZIMALZAHL- und BRUCH(-ZAHL)-Schemata des Modellschülers ebenfalls weitgehend voneinander isoliert sind. Das heißt auch, dass die globale Sichtweise auf die Dezimalzahlen, also beispielsweise die Tatsache, dass 0,56 56 Hundertstel sind, unserem Modellschüler weitgehend unbekannt ist. Insgesamt bilden die ganzen Zahlen, Brüche und Dezimalzahlen in der Perspektive des Modellschülers verschiedene und vor allem weitgehend unzusammenhängende Zahlenbereiche.

II. *Beschreibung formaler sprachlicher Merkmale des Lehrtextes*

Der Lehrtext weist in formaler Hinsicht starke Ähnlichkeiten mit dem bereits analysierten Lehrtext 1 auf; er ist typographisch recht komplex, enthält Textdaten unterschiedlicher Modalität (natursprachliche, graphische, sowie formal-mathematische Zeichen) und beinhaltet umfangreiche nichtnatursprachliche Teiltexte (Beispielgleichungen, Grafik mit dem Zahlenstrahl, Grafik mit den Zahlenmengen), sowie Randnotizen. Die in der Abbildung 12 dargestellte Nummerierung der sprachlichen Einheiten orientiert sich bei den natursprachlichen Textdaten des Haupttextes an der syntaktischen Struktur; jeder vollständige Satz ist mit einer eigenen Nummer versehen. Die einzelnen nebeneinanderstehenden formal-mathematischen Ausdrücke sind – und dies im Gegensatz zu vorherigen Lehrtexteinteilungen – aufgrund der Länge des Gesamttextes unter einer Nummer zusammengefasst; so sind unter der Nummer 9 alle ‚Beispielgleichungen' vereinigt. Die Randnotizen sind ebenfalls unabhängig von ihrem syntaktischen Aufbau stets mit einer einzigen Nummer versehen, die sich in die Sequenz des Haupttextes einfügen (Ausdrücke 3, 22, 44, 48 und 57). Schließlich wurden die beiden Grafiken (Zahlenstrahl und die Darstellung der Zahlenmengen) jeweils als eine Einheit gekennzeichnet (Ausdrücke 47 und 53).

Da im Lehrtext ein expliziter Bezug auf den Arbeitsauftrag ‚An der Kühltheke' genommen wird, wird dieser Bezugstext als Teiltext 0 gekennzeichnet. Der eigentliche Lehrtext wird aufgrund seiner – in der Abbildung unterstrichenen – zentralen Referenzträger in vier Teiltexte zergliedert. Der erste umfangreiche Teiltext (Ausdrücke 1-44), der in sieben weitere Teiltexte gegliedert ist, bezieht sich auf die wechselseitige ‚Umwandlung der Brüche und Dezimalzahlen'. Im zweiten Teiltext (Ausdrücke 45-47) geht es um ‚verschiedene Darstellungen der Zahlen'. Im darauffolgenden Teiltext 3 wird Bezug auf ‚unterschiedliche

Zahlenmengen' genommen (Ausdrücke 48-53). Und schließlich wird im vierten Teiltext (Ausdrücke 54-57) das ‚Lösen eines Problems' aufgegriffen.

Um die Frage zu beantworten, inwiefern die einzelnen Teiltexte zusammenhängend bzw. sinnvoll ausdeutbar sind, wird im Folgenden jedes vom (Gesamt-)Lehrtext nahegelegte Modell beschrieben und gleichzeitig seine Bildungsschwierigkeit diskutiert, wobei auf die Ausprägung schwierigkeitsgradbestimmender Textmerkmale eingegangen wird. Anschließend werden die vom Lehrtext nahegelegten Lernergebnisse umrissen. Die Reihenfolge der Darstellung einzelner Analyseergebnisse ist damit im Vergleich zu den vorherigen Analysen leicht modifiziert. Diese Änderung resultiert aus der erläuterten zentralen Stellung der einzelnen Bildungsschwierigkeiten naheliegender (Haupt-)Modelle (vgl. Kap. 6.2).

III. *Beschreibung naheliegender Modelle und Diskussion ihres Schwierigkeitsgrades*

Zunächst werden die naheliegenden MATHEMATISCHE(S)-ELEMENT(E)-Modelle und anschließend das/die zum Lehrtext passende(n) AUFGABE(N)-Modell(e) diskutiert. Der erste Ausdruck des Lehrtextes bezieht sich eindeutig auf den Arbeitsauftrag ‚An der Kühltheke' und liefert Hinweise bezüglich seiner Bearbeitung: Man kann die (im Auftrag gegebenen) Brüche in Dezimalzahlen oder die (gegebenen) Dezimalzahlen in Brüche umwandeln. Mit diesem Ausdruck werden also zwei Bearbeitungsmöglichkeiten des Arbeitsauftrages mitgeteilt, wodurch sich die bereits mit der Überschrift geweckte Erwartung bestätigt, dass im folgenden Textverlauf das gestellte Problem bearbeitet wird. Damit wird im Zuge der mentalen Verarbeitung des ersten Ausdrucks (T1.1) und des dazugehörigen Arbeitsauftrages (T0) das PROBLEM-Schema[124] aktiviert und teilweise belegt. Im Ergebnis ist beim Modellschüler das folgende vorläufige (noch unvollständige) Modell ausgebildet:

PROBLEM ‚An der Kühltheke' (T0-1.1)
- [1] PROBLEMSTELLUNG ‚Welche Packung ist die richtige?' (T0)
- [2] PROBLEMBEARBEITUNG (T1.1)
  - [2.1.1] ERSTE MÖGLICHKEIT ‚Umwandlung des im Auftrag gegeben Bruchs in eine Dezimalzahl' (zu erwartender Teiltext)
  - [2.1.2] ZWEITE MÖGLICHKEIT ‚Umwandlung der im Auftrag gegebenen Dezimalzahlen in Brüche' (zu erwartender Teiltext)

Im Rahmen der Problembearbeitung-Leerstelle sind zwei untergeordnete Leerstellen aktiviert und zunächst rudimentär belegt (vgl. [2.1.1] und [2.1.2]). Von den folgenden Teiltexten erwartet nun unser Modellschüler, dass die Belegung dieser aktivierten Leerstellen vervollständigt wird. Bereits an dieser Stelle treten erste Sinnbeeinträchtigungen auf. Es bleibt unklar, warum der Autor bei der ‚Umwandlung der Brüche in Dezimalzahlen' den Plural benutzt, wo doch im Auftrag lediglich eine (!) Gewichtsangabe des Hackfleischs in der Bruchschreibweise auftaucht. Folgerichtig müsste die Mitteilung 1 lauten: ‚Um die

[124] Vgl. die theoretische Konzeption des PROBLEM-Schemas in Kapitel 5.1.

richtige Packung zu finden, kannst du den Bruch $\frac{3}{8}$ in eine Dezimalzahl oder die Dezimalzahlen in Brüche umwandeln'. Des Weiteren wird aus der Sicht des Modellschülers eine mögliche und für ihn zugängliche PROBLEMBEARBEITUNG nicht offeriert. So kann der Modellschüler $\frac{3}{8}$kg anhand kleinerer Maßeinheiten ausrechnen, indem er $\frac{3}{8}$ von 1000g berechnet, im Ergebnis 375g erhält und auf dieser Grundlage dem Einkaufszettel den richtigen Packzettel zuordnen kann (vgl. das fachliche Vorwissen des Modellschülers). Schematheoretisch gesprochen ist beim Modellschüler nach der Verarbeitung des Arbeitsauftrages ein (evtl. unvollständiges) Modell der PROBLEMBEARBEITUNG ‚An der Kühltheke' aktiviert. Dieses wird allerdings vom Lehrtext nicht aufgegriffen, was sinnbeeinträchtigend wirkt.

Inwiefern passen die dem Teiltext 1.1. folgenden Textdaten zum (vorläufigen) PROBLEM-Modell? Zwar können anhand der Textdaten die Belegungen der beiden offenen Leerstellen vervollständigt werden, doch sind viele Textdaten kaum in das ‚An-der-Kühltheke'-PROBLEM-Modell integrierbar. So kann anhand der Teiltexte 1.2 und 1.3 – und dabei insbesondere anhand des ersten Beispiels des Kastens (Ausdruck 9), in dem $\frac{3}{8}$ durch Erweitern in eine Dezimalzahl umgewandelt wird – die Erste-Möglichkeit-der-Problembearbeitung-Leerstelle [2.1.1] teilweise belegt werden. Bemerkenswert ist dabei, dass das ERGEBNIS DER PROBLEMBEARBEITUNG im Teiltext 1.3 – wie übrigens im gesamten Lehrtext – nicht explizit genannt wird. Das heißt, die Tatsache, dass die Packung mit 0,375kg die richtige ist, ist im Lehrtext nicht explizit benannt – sie muss vom Modellschüler schlussfolgernd inferiert werden. Anhand des Teiltextes 1.6. kann die ZWEITE MÖGLICHKEIT DER PROBLEMBEARBEITUNG [2.1.2] teilweise belegt werden. Um eine vollständige PROBLEM-BEARBEITUNG im Rahmen der ZWEITEN MÖGLICHKEIT zu erhalten, muss ausgehend von den Textdaten schlussfolgernd inferiert werden, dass die im Teiltext 1.6 explizit erwähnte Packung mit 0,235kg nicht zum Einkaufszettel passt. Daher muss der Modellschüler, um die passende Packung zu finden, gedanklich die Gewichtsangaben der weiteren Packungen ebenfalls in Brüche umwandeln. Insbesondere muss also inferiert werden, dass 0,375 3 Zehntel, 7 Hundertstel und 5 Tausendstel und damit 375 Tausendstel $\left(\frac{375}{1000}\right)$ sind und dass sich daraus durch Kürzen mit 125 (!) der Bruch $\frac{3}{8}$ und damit die Gewichtsangabe des Hackfleischs auf dem Einkaufszettel ergibt. Diese Inferenz ist sehr umfangreich und erfordert die Anwendung des gerade aus dem Text erworbenen Wissens, was höchst anspruchsvoll ist. Die zentrale Schwierigkeit des AN-DER-KÜHLTHEKE-Modells besteht jedoch – wie bereits erwähnt – in der Tatsache, dass sich die meisten Textdaten des Lehrtextes – die Teiltexte 1.4 und 1.5 sowie Teiltexte 1.7 bis 4 – nicht auf das PROBLEM ‚An-der-Kühltheke' beziehen und daher im Rahmen dieses Modells als überflüssig erscheinen. Der Gegenstand des Lehrtextes ist entgegen der mit der Überschrift verbundenen Erwartungshaltung nicht die Bearbeitung des Problems ‚An der Kühltheke'.

Viele der (vermeintlich) überflüssigen Teiltexte im Rahmen des Teiltextes 1 lassen sich sinnvoll ausdeuten, wenn man die ‚An der Kühltheke'-PROBLEMSTELLUNG verallgemeinert. Die

Problemstellung, die im Lehrtext bearbeitet wird, ist nicht die Wahl der richtigen Packung und damit die Umwandlung der gegebenen Gewichtsangaben, sondern sie lässt sich abstrakter wie folgt formulieren: ‚Wie kann man beliebige Brüche und beliebige Dezimalzahlen wechselseitig umwandeln?‘. Aus dieser Perspektive erscheint dann auch die erwähnte Benutzung des Plurals bei der ‚Umwandlung der Brüche in Dezimalzahlen‘ im Ausdruck 1 wohlgeformt. Das entsprechende, anhand des Teiltextes 1 konstruierte Modell ist aus der folgenden Text-Modell-Struktur ersichtlich.

PROBLEM ‚Wechselseitige Umwandlung der Brüche und Dezimalzahlen‘ (T0-1)
- [1] TEILPROBLEM ‚Umwandlung der Brüche in Dezimalzahlen‘ (T1.2-1.5)
    - [1.1] TEILPROBLEM ‚Umwandlung der Brüche mit einer Zehnerpotenz im Nenner‘ (T1.2)
    - [1.2] TEILPROBLEM ‚Umwandlung der Brüche mit keiner Zehnerpotenz im Nenner‘ (T1.3-1.5)
- [2] TEILPROBLEM ‚Umwandlung der Dezimalzahlen in Brüche‘ (T1.6-1.7)
    - [2.1.] TEILPROBLEM ‚Umwandlung nicht periodischer Dezimalzahlen‘(T1.6)
    - [2.2] TEILPROBLEM ‚Umwandlung periodischer Dezimalzahlen‘ (T1.7)

Struktur 9: Von Teiltexten 0-1 des Lehrtextes ‘An der Kühltheke’ nahegelegtes PROBLEM-Modell

Bemerkenswert ist, dass weder die übergreifende noch die untergeordneten PROBLEM-STELLUNGEN im Lehrtext und im Auftrag (T0) explizit enthalten ist bzw. sind. Sie müssen daher ausgehend von den Textdaten – insbesondere von Teiltext 0 und T1.1. – vom Modell-schüler abstrahierend selbstständig gebildet werden. Diese Inferenz ist aufgrund der schwachen sprachlichen Signale nicht einfach zu konstruieren.

Die textübergreifende PROBLEMSTELLUNG ‚Wie kann man beliebige Brüche und beliebige Dezimalzahlen ineinander umwandeln?‘ fragt nach einem VERFAHREN. Deswegen kann der Teiltext 1 ungeachtet der nachfolgenden Teiltexte sowohl im Rahmen eines PROBLEM- als auch im Rahmen eines VERFAHREN-Schemas sinnvoll verarbeitet werden. Mit dem PROBLEM- und dem VERFAHREN-Modell legt der Teiltext 1 zwei hinsichtlich ihrer Inhalte, Struktur und Sinnbeeinträchtigungen sehr ähnliche Modelle nahe. Daher wird im Folgenden lediglich das VERFAHREN-Modell detailliert dargestellt und auf eine ausführliche Beschreibung des PROBLEM-Modells verzichtet.

Der erste Teiltext ist also ohne Beachtung der nachfolgenden Teiltexte als ALLE MÖGLICHEN VERFAHREN zur wechselseitigen Umwandelbarkeit der Brüche und Dezimalzahlen intakt ausdeutbar. Die entsprechende Text-Modell-Struktur ist nachfolgend abgebildet.

ALLE MÖGLICHEN VERFAHREN ‚Wechselseitige Umwandlung der Brüche und Dezimalzahlen' (T0-1)

- [1] ALLE VERFAHREN ‚Umwandlung der Brüche in Dezimalzahlen' (T1.2-1.5)
  - [1.1] VERFAHREN ‚Umwandlung der Brüche mit einer Zehnerpotenz im Nenner' (T1.2)
  - [1.2] ALLE VERFAHREN ‚Umwandlung der Brüche mit keiner Zehnerpotenz im Nenner' (T1.3-1.5)
    - [1.2.1] VERFAHREN ‚Umwandlung durch Kürzen und/oder Erweitern' (T1.3)
    - [1.2.2] VERFAHREN ‚Umwandlung durch Division' (T1.4-1.5)
- [2] ALLE VERFAHREN ‚Umwandlung der Dezimalzahlen in Brüche' (T1.6-1.7)
  - [2.1] VERFAHREN ‚Umwandlung nicht periodischer Dezimalzahlen' (T1.6)
  - [2.2] VERFAHREN ‚Umwandlung periodischer Dezimalzahlen' (T1.7)

Struktur 10: Vom Teiltext 0-1 des Lehrtextes ‚An der Kühltheke' nahegelegtes VERFAHREN-Modell

Das Modell besteht aus zwei VERFAHRENS(-KLASSEN), die sich hinsichtlich der Umwandlungsrichtung unterscheiden ([1] und [2]). Die erste VERFAHRENSKLASSE ‚Umwandlung der Brüche in Dezimalzahlen' [1] wird aufgrund der AUSGANGSOBJEKTE differenziert: ‚Umwandlung der Brüche mit einer Zehnerpotenz im Nenner' [1.1] und ‚Umwandlung der Brüche mit keiner Zehnerpotenz im Nenner' [1.2]. Das VERFAHREN zur Umwandlung der Brüche mit einer Zehnerpotenz im Nenner [1.1] wird vom Teiltext 1.2 angedeutet; dabei ist es recht schwer konstruierbar, denn die (allgemeinen) VERFAHRENSSCHRITTE müssen ausschließlich anhand konkreter formal-mathematischer Gleichungen inferiert werden (Ausdruck 3). Des Weiteren fehlen im entsprechenden Teiltext Textdaten, die als eine BEGRÜNDUNG dieser VERFAHRENSSCHRITTE interpretierbar sind, so dass diese aktivierte Leerstelle vom Modellschüler selbstständig inferiert werden muss. Diese Leistung kann aufgrund fehlender sprachlicher Zeichen und der Komplexität der erforderlichen Gedanken vom Modellschüler kaum selbstständig erbracht werden. So muss im Hinblick auf die erste Beispielgleichung in etwa Folgendes inferiert werden: $\frac{256}{1000}$ sind 256 Tausendstel, also 200 Tausendstel und 50 Tausendstel und 6 Tausendstel, also 2 Zehntel und 5 Hundertstel und 6 Tausendstel, also 0,256. Die Zerlegung der Tausendstel in größere ‚Bündelungseinheiten' ist für den Modellschüler höchst anspruchsvoll, da die hierfür notwendigen kognitiven Inhalte bei ihm (noch) nicht verfestigt sind. Entsprechend müssen die BEGRÜNDUNGEN der verbleibenden beiden Beispielgleichungen und auf dieser Grundlage eine Verallgemeinerung gebildet werden. Da die globale Sichtweise auf Dezimalzahlen dem Modellschüler weitgehend unbekannt ist und das AUFBAU-DER-DEZIMALZAHLEN-Schema (noch) recht vage ist, ist diese Inferenzbildung für ihn kaum zu bewältigen. Damit bleibt die Begründung-der-Verfahrensschritte-Leerstelle im Rahmen des Teilmodells [1.1] größtenteils offen.

Die nachfolgende VERFAHRENSKLASSE ‚Umwandlung der Brüche ohne Zehnerpotenz im Nenner‘ [1.2] besteht aus zwei Teilmodellen; UMWANDLUNG DURCH KÜRZEN UND/ODER ERWEITERN [1.2.1] und UMWANDLUNG DURCH DIVISION [1.2.2]. Das VERFAHREN zur Umwandlung der Brüche durch Kürzen und/oder Erweitern [1.2.1] ist recht leicht anhand der Textdaten zu bilden: die VERFAHRENSSCHRITTE sind anhand des natursprachlichen Teiltextes (Ausdrücke 4-8) und der Beispiele (Ausdruck 9) auf einer konkreten und einer allgemeinen Ebene – unter der Voraussetzung, dass die umfangreiche Inferenz der VERFAHRENSSCHRITTE der ‚Umwandlung der Brüche mit einer Zehnerpotenz im Nenner‘ gelungen ist – recht leicht vollziehbar. Die BEGRÜNDUNG, warum man erweitern/kürzen muss, ist im Text enthalten: ‚um im Nenner eine Zehnerpotenz zu erhalten‘. Eine BEGRÜNDUNG, warum man Brüche gerade auf diese Weise in Dezimalzahlen umformen darf, muss der Modellschüler auch in diesem Fall aufgrund der fehlenden Textdaten selbstständig inferieren. Allerdings beruht sie auf der (kaum inferierbaren) BEGRÜNDUNG des vorherigen VERFAHRENS [1.1] und auf dem Wissen, dass ein Bruch und seine gekürzte bzw. erweiterte Darstellungsform dieselbe Zahl darstellen. Darüber hinaus ist das VERFAHREN [1.2.1] an einer Stelle offen, denn die Mitteilung ‚nicht immer lässt sich der Nenner in eine Zehnerpotenz umformen‘ (vgl. Ausdruck 10) aktiviert die Voraussetzungen-des-Verfahrens-Leerstelle. Damit ist die Frage aufgeworfen, welche Nenner sich in eine Zehnerpotenz umformen lassen und welche nicht. Für ihre Beantwortung stehen unserem Modellschüler jedoch nicht die entsprechenden Textdaten zur Verfügung.[125] Insgesamt ist das VERFAHREN-Modell [1.2.1] damit an zwei Stellen weitgehend offen: BEGRÜNDUNG und VORAUSSETZUNGEN (DES VERFAHRENS).

Das Konstruieren der VERFAHRENSSCHRITTE des folgenden VERFAHRENS ‚Umwandlung der Brüche durch Division‘ [1.2.2] ist anhand der Textdaten (T1.4) leicht, wenn man den Divisionsalgorithmus im Bereich der natürlichen Zahlen beherrscht. Teiltext 1.5 erscheint in diesem Zusammenhang als eine Ergänzung, in der besondere/interessante ERGEBNISSE des VERFAHRENS thematisiert werden. Dabei entsteht jedoch der (fachlich falsche) Eindruck, dass periodische Dezimalzahlen ausschließlich als Ergebnisse der Umwandlung von Brüchen mit dem Nenner 9, 99, 999, … auftreten würden. Die Pfeile in den Beispielrechnungen (Ausdruck 21) deuten eine BEGRÜNDUNG an, warum die Division nicht abbricht. Eine vollständige BEGRÜNDUNG der VERFAHRENSSCHRITTE, also auch bezüglich der Frage, warum man überhaupt dividieren darf, muss vom Leser selbstständig konstruiert werden – eine Leistung, die unserem Modellschüler aufgrund des fehlenden Vorwissens kaum zuzumuten ist. Damit ist die BEGRÜNDUNG des VERFAHRENS [1.2.2] wie schon bei den vorherigen VERFAHREN schwer inferierbar und bleibt teilweise offen.

Das vierte VERFAHREN ‚Umwandlung nicht periodischer Dezimalzahlen in Brüche‘ [2.1] ist demgegenüber vollständig. Die VERFAHRENSSCHRITTE sind recht leicht anhand der

[125] Die entsprechenden Antwort lautet: Nur diejenigen Nenner ausgekürzter Brüche kann man in eine Zehnerpotenz umformen, die in ihrer Primfaktorenzerlegung ausschließlich aus den Primfaktoren 2 und/oder 5 bestehen.

Textdaten im ‚Kasten' (Ausdrücke 29-32) belegbar. Eine allgemeine BEGRÜNDUNG der VERFAHRENSSCHRITTE muss ausgehend von der BEGRÜNDUNG einer konkreten Rechnung, die anhand der Ausdrücke 25-28 relativ leicht konstruierbar ist, abstrahierend inferiert werden. Hierfür ist allerdings die Aktivierung der nicht verfestigten lokalen Sicht auf die Dezimalzahlen notwendig, wodurch die Inferenzbildung erschwert wird.

Das letzte VERFAHREN [2.2] bezieht sich auf die Umwandlung periodischer Dezimalzahlen. Die VERFAHRENSSCHRITTE sind anhand des Teiltextes 1.7 leicht inferierbar. Die aktivierte Begründung-der-Verfahrensschritte-Leerstelle ist weder anhand des Teiltextes noch anhand des (Vor-)Wissens belegbar. Allerdings wird im Ausdruck 44 explizit auf eine Aufgabe verwiesen, in der dieser Frage nachgegangen werden soll.

Insgesamt kann festgehalten werden, dass die meisten VERFAHRENSSCHRITTE leicht belegbar sind; eine Ausnahme bildet die ‚Umwandlung der Brüche mit einer Zehnerpotenz im Nenner in Dezimalzahlen' [1.1]. Die BEGRÜNDUNGEN der VERFAHRENSSCHRITTE sind anhand der Textdaten und des Vorwissens mehrheitlich entweder nicht oder kaum belegbar ([1.1], [1.2.1], [1.2.2] und [2.2]). Lediglich die BEGRÜNDUNG des VERFAHRENS ‚Umwandlung nicht periodischer Dezimalzahlen' ([2.2]) kann anhand der Textdaten von unserem Modellschüler gebildet werden. Allerdings begründen diese Textdaten lediglich die Geltung einer konkreten Umwandlung – nämlich der von 0,235 in $\frac{47}{200}$. Eine allgemeine BEGRÜNDUNG der VERFAHRENSSCHRITTE muss der Modellschüler hingegen selbstständig inferieren. Des Weiteren bleibt beim VERFAHREN [1.2.1] die Frage/Leerstelle offen, welche Brüche sich so erweitern und/oder kürzen lassen, dass im Nenner eine Zehnerpotenz steht. Zu diesen Sinnbeeinträchtigungen des Modells kommt eine weitere Schwierigkeit: In Anbetracht der inkonsequenten Behandlung des in der Überschrift angekündigten Auftrages entsteht die Frage, warum all diese Verfahren überhaupt mitgeteilt werden. Damit fehlt ein MOTIV zur Behandlung der VERFAHREN. Man könnte es ausgehend vom Auftrag abstrahierend etwa folgendermaßen konstruieren: In Alltagssituationen muss man manchmal Brüche und Dezimalzahlen wechselseitig umrechnen. Doch warum werden in diesem Zusammenhang periodische Dezimalzahlen, die kaum in Alltagssituationen auftauchen, thematisiert? Das MOTIV zur Behandlung der UMWANDLUNG aller *möglicher* Dezimalzahlen bleibt letztlich weitgehend offen.

Zusammenfassend ergibt sich folgendes Bild: Teiltext 1 legt recht deutlich das VERFAHREN-Modell nahe, denn es integriert alle Textdaten und die Struktur des Modells entspricht weitgehend sowohl dem Textverlauf als auch der der typographischen Gestaltung des Lehrtextes; die VERFAHRENSSCHRITTE der einzelnen VERFAHREN sind mit Ausnahme des ersten VERFAHRENS, das aber als ein SONDERFALL des ZWEITEN VERFAHREN betrachtet werden kann, stets hervorgehoben. Allerdings ist das beschriebene Modell teilweise schwer zu konstruieren. Die Hauptschwierigkeiten beruhen auf der Nichteinhaltung der in der Überschrift signalisierten Ankündigung, dass im Lehrtext (hauptsächlich) der Arbeitsauftrag bearbeitet wird; das MOTIV zur Mitteilung der VERFAHREN bleibt ungeklärt. Darüber hinaus sind einige zentrale Leerstellen – die (allgemeinen) BEGRÜNDUNGEN der VERFAHRENS-SCHRITTE fast aller VERFAHREN sowie die VORAUSSETZUNGEN des VERFAHRENS [1.2.1] – offen bzw. vom Modellschüler kaum belegbar. Im Rahmen der Modellbildung sind außerdem teilweise umfangreiche und/oder komplizierte Inferenzen notwendig: VERFAHRENSSCHRITTE des VERFAHRENS [1.1] und folglich des VERFAHRENS [1.2.1], sowie (allgemeine) BEGRÜNDUNG des VERFAHRENS [2.1]. Insgesamt weist damit das vom Teiltext 1 nahegelegte VERFAHREN-Modell einige recht schwerwiegende Sinnbeeinträchtigungen auf.

Wenn man die Folgeüberlegung anstellt, wie man auf der Grundlage des konstruierten VERFAHREN-Modells die nachfolgenden Teiltexte intakt ausdeuten kann, so ist festzustellen, dass sich Teiltext 2, in dem mitgeteilt wird, dass ‚Zahlen verschiedene Darstellungen haben', als ein (neuer) SATZ interpretieren lässt: ‚(Alle uns bekannten) Zahlen sind stets in Bruch- und Dezimalschreibweise darstellbar'. Das Konstruieren der SATZAUSSAGE anhand des Teiltextes 2 liegt allerdings nicht auf der Hand, denn sie ist nicht expliziert. Im Ausdruck 45 wird lediglich mitgeteilt, dass Zahlen viele verschiedene Darstellungen haben. Im nachfolgenden Ausdruck 46 findet ein Wechsel des Referenzträgers statt; aus den ‚Zahlen' werden ‚Punkte auf der Zahlengeraden'. Dieser Wechsel dürfte die Bildung der SATZAUSSAGE ‚Zahlen sind in Dezimal- und Bruchschreibweise darstellbar' eher erschweren. Zusätzlich birgt die Grafik 47 bezüglich der Bildung der SATZAUSSAGE einige Schwierigkeiten, so sind die einzelnen Zahlen anhand *mehrerer* unterschiedlicher Brüche (beispielsweise $\frac{6}{4}$ und $\frac{3}{2}$) dargestellt. In einem anderen Fall erscheinen auch die Dezimalzahlen in einer zweifachen Form (1,5 und 1,500). Durch das Mitteilen unterschiedlicher Brüche und teilweise unterschiedlicher Dezimalangaben einer Zahl werden kognitive Inhalte aktiviert, die hinsichtlich der SATZAUSSAGE, dass jede Zahl sowohl als Bruch als auch Dezimalzahl darstellbar ist, keine Rolle spielen. Dass die Bruch- und (laut Schulbuch) die Dezimalzahldarstellungen nicht eindeutig sind, ist kein Aspekt der SATZAUSSAGE. Lediglich die Darstellung einer Zahl mit *einer* Dezimalzahl und *einem* Bruch wirkt im Rahmen des SATZ-Modells wohlgeformt. In diesem Zusammenhang sind die weiteren (Zahl-)Darstellungen überflüssig.

Anhand eines Beispiels in der Grafik 47, in der die Zahl 4 in unterschiedlichen Darstellungen angegeben ist, sowie mit der Erwähnung der ‚Punkte auf der Zahlengeraden' (Ausdruck 46) wird signalisiert, dass sich die SATZAUSSAGE auf alle dem Modellschüler bekannten Zahlen – also auch auf die ganzen Zahlen – bezieht. Da im Verständnis des Modellschülers BRÜCHE/ BRUCHZAHLEN die GANZEN ZAHLEN nicht umfassen (vgl. das Vorwissen des Modellschülers), enthält der obere SATZ zwei voneinander (zunächst) getrennte TEILSÄTZE:

1. Die nicht ganzen Zahlen (im Verständnis des Modellschülers Bruchzahlen) sind stets sowohl in der Bruch- als auch in der Dezimalschreibweise darstellbar.
2. Die ganzen Zahlen sind sowohl in der Bruch- als auch in der Dezimalschreibweise darstellbar.

Wenn man der Frage nachgeht, in welcher Beziehung die beiden TEILSÄTZE zu den vorherigen VERFAHREN stehen, so ist offensichtlich die Aussage des ersten TEILSATZES eine FOLGE aus den VERFAHREN, der TEILSATZ stellt damit einen zu den VERFAHREN benachbarten SATZ dar. Demgegenüber folgt der zweite TEILSATZ nicht aus den VERFAHREN, da die OBJEKTE der VERFAHREN (im Verständnis des Modellschülers) stets nicht ganze Zahlen sind. Der zweite TEILSATZ steht also mit den VERFAHREN kaum in einem Zusammenhang, das Auftauchen der 4 in der Grafik 46, die im Denken des Modellschülers keine BRUCHZAHL und auch keine ‚richtige' DEZIMALZAHL ist, stört die ‚Logik' des gebildeten (VERFAHREN-)Modells und lässt sich entsprechend schwer integrieren. Die Text-Modell-Struktur bezüglich der Teiltexte 0-2 ist nachfolgend abgebildet.

VERFAHREN ‚Wechselseitige Umwandlung der Brüche und Dezimalzahlen' (T0-2)

[1] BESTANDTEILE (ALLER MÖGLICHER VERFAHREN) ‚Wechselseitige Umwandlung der Brüche und der Dezimalzahlen' (T1)

[2] FOLGE (DER VERFAHREN) ‚Die nicht ganzen Zahlen sind stets in Bruch- und Dezimalschreibweise darstellbar' (T2)

[3] (DIE VERFAHREN) ERGÄNZENDER SATZ ‚Die ganzen Zahlen sind ebenfalls in Bruch- und Dezimalschreibweise darstellbar' – schwer integrierbarer Teiltext (die Darstellung der Zahl 4 in der Grafik 46)

Struktur 11: Von Teiltexten 0-2 des Lehrtextes ‚An der Kühltheke' nahegelegtes VERFAHREN-Modell

Die Aktivierung der Folge-der-Verfahren-Leerstelle [2] ist für unseren Modellschüler schwer zu leisten, denn ein Zusammenhang zwischen den VERFAHREN und den ‚verschiedenen Darstellungen der Zahlen' findet auf der Lehrtextoberfläche keine Erwähnung. So ist u.a. bemerkenswert, dass im Ausdruck 45 keine sprachlichen Hinweise bezüglich einer (kausalen) Verknüpfung auftauchen. Dass ‚Zahlen verschiedene Darstellungen haben', erscheint auf der Textoberfläche als ein von den vorhergehenden Verfahren losgelöster Gedanke. Im nachfolgenden Ausdruck 46 taucht zwar das einen kausalen Zusammenhang signalisierende Adverb ‚also' auf, allerdings bleibt vage, ob sich dieses Adverb auf den vorhergehenden Satz (Ausdruck 45) oder auf den gesamten Vortext (Teiltext 1) bezieht. Des Weiteren ist die Bildung der Kausalbeziehung komplex, weil es eine Zusammenfassung und das weitere Durchdenken fast des gesamten Teiltextes 1 erfordert (vgl. auch die Erläuterungen bezüglich entsprechender Inferenzen bei dem von Lehrtext 1 nahegelegten SATZ-Modell in Kap. 6.1).

Der (TEIL-)SATZ [3] ist für den Modellschüler schwer konstruierbar, denn die sprachlichen Daten, anhand derer die SATZAUSSAGE bildbar ist, liegen lediglich in reduzierter Form vor. Die ganzen Zahlen werden – wie bereits erwähnt – ausschließlich aufgrund eines Beispiels in der Grafik 47 (die unterschiedlichen Darstellungen der 4) sowie des Hinweises auf die ‚Punkte auf der Zahlengeraden' (Ausdruck 46), die sowohl die ganzen als auch die nicht ganzen Zahlen umfassen, signalisiert. In Anbetracht der Tatsachen, dass der (TEIL-)SATZ für den Modellschüler weitgehend neu ist und dass ganze Zahlen im langen Vortext nicht thematisiert werden, sind dies recht schwache Hinweise. Des Weiteren liegt kein offensichtlicher Zusammenhang zu den UMWANDLUNGSVERFAHREN vor, was die Bildung der SATZAUSSAGE zusätzlich erheblich erschwert. Insgesamt kann festgehalten werden, dass die SATZAUSSAGE ‚Ganze Zahlen sind sowohl in der Dezimal- als auch in der Bruchschreibweise darstellbar' anhand der vorliegenden Textdaten außerordentlich schwer zu bilden ist. Zudem fehlt in den Textdaten eine BEGRÜNDUNG des SATZES; sie ist vom Modellschüler auf der Grundlage seines Vorwissens nur schwer zu konstruieren. Weiter erschwerend kommt hinzu, dass die Grafik (47) – wie bereits erwähnt – kaum integrierbare Bestandteile beinhaltet. Wenn es darum geht, an konkreten Zahlen zu veranschaulichen, dass sie stets sowohl in der Bruch- als auch in der Dezimalzahlschreibweise darstellbar sind, dann bleibt unklar, warum zu jeder Zahl *mehrere* unterschiedliche Bruch- und teilweise unterschiedliche Dezimalzahldarstellungen angegeben werden. Und schließlich bleibt die Problematik eines (offenen) MOTIVS*;* es ist unklar, warum eine (vernachlässigbare) FOLGE der VERFAHREN und ein (vernachlässigbarer) ERGÄNZENDER SATZ thematisiert werden, anstatt zahlreiche offene Fragen bezüglich der VERFAHREN aufzugreifen.

Oder ist vielleicht der SATZ das ‚eigentlich Wichtige' und es geht gar nicht um die VERFAHREN? Mit der Annahme, dass der Autor mit dem Gesamttext im Wesentlichen den SATZ ‚Alle Zahlen sind sowohl in der Bruch- als auch in der Dezimalschreibweise darstellbar' erklären bzw. herleiten wollte, ist die Möglichkeit einer anderen Fokussierung eröffnet. Die Thematisierung der einzelnen VERFAHREN würde damit vornehmlich der Begründung bzw. der Herleitung des SATZES dienen. Die Struktur des entsprechenden Modells sieht wie folgt aus.

SATZ ‚Alle Zahlen sind stets in Bruch- und Dezimalschreibweise darstellbar' (T0-2)
- [1] TEILSATZ ‚Alle nicht ganzen Zahlen sind stets in Bruch- und Dezimalschreibweise darstellbar' (T1-2)
  - [1.1] GRUND FÜR DIE GELTUNGS (DES SATZES) ‚Alle Brüche und alle Dezimalzahlen sind stets ineinander umwandelbar' (T1)
  - [1.2] SATZAUSSAGE (T2)
- [2] TEILSATZ ‚Alle ganzen Zahlen sind stets in Bruch- und Dezimalschreibweise darstellbar' (unterschiedliche Darstellungen der Zahl 4 in der Grafik 47)
  - [2.1] SATZAUSSAGE (Teilgrafik 47)
  - [2.2] GRUND FÜR DIE GELTUNG DES SATZES *(fehlender Teiltext)*

Struktur 12: Von Teiltexten 0-2 des Lehrtextes ‚An der Kühltheke' nahegelegtes SATZ-Modell

Das hier vorgestellte Modell ist eindeutig schwieriger zu konstruieren als das zuvor dargestellte VERFAHREN-Modell. So bleiben alle im Rahmen des VERFAHREN-Modells beschrieben Sinnbeeinträchtigungen bezüglich der Vollständigkeit sowie der notwendigen Inferenzen beim SATZ-Modell bestehen. Darüber hinaus enthält die SATZ-Lesart weitere Probleme. So stellt es eine erhöhte kognitive Anforderung dar, dass das anhand des Teiltextes 1 konstruierte VERFAHREN-Modell nach dem Verarbeiten des Teiltextes 2 rückwirkend als BEGRÜNDUNG des SATZES zu reinterpretieren ist. Außerdem verwundern bei der Annahme, dass der SATZ als zentral – und nicht als eine (vernachlässigbare) Folgerung bzw. Ergänzung der VERFAHREN – betrachtet wird, die Lückenhaftigkeit des Übergangs zwischen erstem und zweitem Teiltext sowie die Reduziertheit der sprachlichen Mittel, mit denen die SATZAUSSAGE angedeutet wird. Zumindest eine typographische Hervorhebung des die SATZAUSSAGE beinhaltenden Teiltextes 2 wäre in diesem Zusammenhang zu erwarten. Darüber hinaus fehlen Textdaten, die als BEGRÜNDUNG des ZWEITEN TEILSATZES ([2.2]) interpretierbar sind. Die offene Frage des Motivs bleibt auch bei dieser Lesart bestehen: Die VERFAHREN werden mitgeteilt, um einen TEILSATZ zu begründen bzw. herzuleiten, aber es bleibt unklar, warum der SATZ hier überhaupt mitgeteilt und nicht der im Titel angekündigte Arbeitsauftrag (ausführlich) bearbeitet wird. Fasst man die hier dargestellten Überlegungen zusammen, so wird deutlich, dass sich die Bildung eines von den Teiltexten 1 und 2 nahegelegten SATZ-Modells im Vergleich zum ohnehin schon schwer konstruierbaren VERFAHREN-Modells als noch voraussetzungsreicher und komplizierter darstellt.

Im Hinblick auf den anschließenden dritten Teiltext, der einen Bezug auf Zahlbereiche herstellt, ist nunmehr der Frage nachzugehen, ob und wie er intakt auf der Grundlage der bislang besprochenen Modelle ausdeutbar ist. Im ersten Satz des Teiltextes 3 (Ausdruck 48) erscheinen ‚Zahlen, die wir nun kennen' als zentral, in den folgenden Ausdrücken werden einige Aspekte dieser Zahlen genannt. Allerdings wird das Bezeichnete bzw. die Referenz der ‚Zahlen, die wir nun kennen' im Lehrtext explizit nicht benannt und muss anhand des Vortextes schlussfolgernd inferiert werden; es sind Zahlen, die in der Bruch- und (nicht: oder!) Dezimalschreibweise darstellbar sind. Der dritte Teiltext ist damit als ein neuer BEGRIFF ‚Rationale Zahlen' ausdeutbar; es wird eine neue ZAHLENMENGE eingeführt. Dieser BEGRIFF kann als eine Ergänzung des vorhergehenden SATZES betrachtet werden. Ein entsprechendes bezüglich der Struktur intaktes Modell der Teiltexte 0-3 ist nachfolgend skizziert.

SATZ ‚Alle Zahlen sind stets in Bruch- und Dezimalschreibweise darstellbar' (T0-3)

[1] TEILSATZ ‚Alle nicht ganzen Zahlen sind stets in Bruch- und Dezimalschreibweise darstellbar' (T1-2)

[2] TEILSATZ ‚Alle ganzen Zahlen sind stets in Bruch- und Dezimalschreibweise darstellbar' (die Darstellungen der Zahl 4 in der Grafik 47)

[3] ERGÄNZENDER BEGRIFF ‚Rationale Zahlen' (T3)

[3.1] BEZEICHNETES ‚Zahlen, die in der Bruch- und Dezimalschreibweise darstellbar sind' (fehlender Teiltext)

[3.2] MOTIV FÜR DIE BEGRIFFSEINFÜHRUNG ‚Diese Zahlen bilden in ihrer Gesamtheit eine neue Zahlenmenge, für die wir noch keine Bezeichnung kennen' (49-50)

[3.3] BEZEICHNUNG DES BEGRIFFS ‚Rationale Zahlen' (51)

[3.4] UMFANG DES BEGRIFFS ‚Die rationalen Zahlen umfassen auch die natürlichen und die ganzen Zahlen' (52-53)

Struktur 13: Von Teiltexten 0-3 des Lehrtextes ‚An der Kühltheke' nahegelegtes SATZ-Modell

Das Modell ist sehr schwer zu konstruieren, neben den zahlreichen bereits erwähnten Schwierigkeiten bezüglich der ersten beiden Teilmodelle kommen in Bezug auf dieses dritte Teilmodell weitere Sinnbeeinträchtigungen hinzu. Die zentrale Schwierigkeit besteht – wie bereits angedeutet – in der Konstruktion des BEZEICHNETEN DER RATIONALEN ZAHLEN [3.1]. In den Ausdrücken 49-50 wird das BEZEICHNETE nicht explizit genannt. Unser Modellschüler muss anknüpfend an den Teiltext 2 inferieren, was mit ‚Zahlen, die wir nun kennen' gemeint ist. Ausgehend vom (schwer konstruierbaren) SATZ, dass alle (bekannten) Zahlen in der Bruch- und Dezimalschreibweise darstellbar sind, muss damit der kognitive Inhalt ‚Zahlen, die in der Bruch- und Dezimalschreibweise darstellbar sind, bilden eine (neue) Zahlenmenge' konstruiert werden. Die Inferenz wird indes nicht nur durch das Fehlen entsprechender Textdaten in den Ausdrücken 49-50 erschwert, sondern auch durch den nachfolgenden Kasten und die Grafik (Ausdrücke 51-53). Im Kasten wird mitgeteilt, dass ‚die ganzen Zahlen zusammen mit ihren vielfältigen Bruchteilen die Menge der rationalen Zahlen bilden' (Ausdruck 51). Bemerkenswert ist, dass an dieser Stelle das Wort ‚Bruchteile' zum ersten Mal im Lehrtext auftaucht. Was ist jedoch mit ‚vielfältigen Bruchteilen ganzer Zahlen' gemeint? Der Ausdruck 51 legt nahe, dass ganze Zahlen und ihre vielfältigen Bruchteile zwei disjunkte Mengen sind. Damit sind mit ‚Bruchteilen der ganzen Zahlen' die nicht ganzen Zahlen, also Brüche mit einem Nenner ungleich eins gemeint. Dies muss den Leser verunsichern, denn im Teiltext 2 wurde ja (vage) andeutet, dass ganze Zahlen als spezifische Brüche (also auch als spezifische Bruchteile?) aufgefasst werden können. Der Ausdruck 52 trägt dazu bei, die potenziell gestiftete Verwirrung zu vergrößern: Es wird mitgeteilt, dass die ganzen und die natürlichen Zahlen und außerdem alle Brüche bzw. Dezimalzahlen in der Menge der rationalen Zahlen enthalten sind. Die Aussage legt nahe, dass die aufgezählten Zahlenmengen als disjunkte Teilmengen der rationalen Zahlen aufzufassen sind. Dies widerspricht dem bereits konstruierten (noch vagen) SATZ, dass ganze Zahlen als spezifische Brüche aufgefasst werden können. Auch die Grafik 53 vermag keine Klärung des Sachverhalts zu stiften; die einzelnen Zahlenmengen erscheinen disjunkt, lediglich die Schatten, die auf die untergeordneten Ebenen/Zahlenmengen fallen, signalisieren recht schwach die Nicht-Disjunktion der einzelnen Mengen. Dass in der Grafik keine Brüche mit dem Nenner 1 auftauchen, verstärkt die Interpretation, dass mit ‚Bruchteilen' stets nicht ganze Zahlen gemeint sind und dass folglich ganze Zahlen keine Teilmenge der Brüche darstellen. Die sprachlichen Hinweise des Teiltextes 3 legen damit eine dem bereits konstruierten SATZ eher widersprechende – und aus fachlicher Sicht falsche – Interpretation nahe.

Die Nicht-Disjunktion der einzelnen erwähnten Zahlenmengen ist lediglich anhand äußerst vager sprachlicher Hinweise erkennbar. Damit ist eine im Rahmen des Gesamtlehrtextes konforme Ausdeutung des Teiltextes 3, wie sie in der Struktur 13 dargestellt ist, schwer zu vollziehen. Gleichzeitig wird der bereits konstruierte vage SATZ [2] aufgrund der Vagheit des Teiltextes 3 nicht verfestigt bzw. bestärkt, sondern im Gegenteil eher geschwächt.

Auf der textübergreifenden Ebene verschärft sich in diesem Zusammenhang die Frage nach einem MOTIV*;* es bleibt ungeklärt, warum im Text ein ergänzender, also im Grunde vernachlässigbarer BEGRIFF erwähnt wird, anstatt die in Bezug auf die VERFAHREN und den SATZ offenen Fragen aufzugreifen. Auch dies trägt dazu bei, dass der Teiltext 3 insgesamt im Rahmen des SATZ-Modells als recht schwer integrierbar erscheint.

Folgt man demgegenüber der Annahme, dass der BEGRIFF nicht als Ergänzung, sondern als zentral mit dem Gesamttext eingeführt wird, so wird diese Lesart zunächst durch die typographische Hervorhebung der entsprechenden Textdaten (Ausdrücke 51-52) gestützt. In einem textübergreifenden BEGRIFF-Modell lässt sich der gesamte Vortext als ‚Herleitung' der zu den rationalen Zahlen gehörenden Objekte, also der (Menge der) von den Brüchen und Dezimalzahlen dargestellten Zahlen, ausdeuten. Die größtmögliche Zusammenfassung der Teiltexte 1-3 kann bei einer solchen Lesart in etwa wie folgt paraphrasiert werden: ‚Alle Brüche und alle Dezimalzahlen sind stets ineinander umwandelbar, sie bezeichnen also die gleichen Zahlen. Diese Zahlen bilden in ihrer Gesamtheit eine neue Zahlenmenge, die ‚rationale Zahlen' genannt wird. Sie umfasst auch die (uns bereits bekannten) natürlichen und die ganzen Zahlen. Die dazugehörige Text-Modell-Struktur sieht in etwa wie folgt aus.

BEGRIFF ‚Rationale Zahlen' (T1-3)

[1] HINFÜHRUNG ZUM BEZEICHNETEN (DER RATIONALEN ZAHLEN) ‚Die Brüche und die Dezimalzahlen stellen die gleichen Zahlen dar' (T1-T2)

[2] BEZEICHNETES ‚Zahlen, die in der Bruch- und Dezimalschreibweise darstellbar sind' (fehlender Teiltext)

[3] MOTIV FÜR DIE BEGRIFFSEINFÜHRUNG ‚Diese Zahlen bilden in ihrer Gesamtheit eine neue Zahlenmenge, für die wir noch keine Bezeichnung kennen' (49-50)

[4] BEZEICHNUNG DES BEGRIFFS ‚Rationale Zahlen' (51)

[5] UMFANG DES BEGRIFFS ‚Die rationalen Zahlen umfassen auch die natürlichen und die ganzen Zahlen' (52-53)

Struktur 14: Von Teiltexten 0-3 des Lehrtextes ‚An der Kühltheke' nahegelegtes BEGRIFF-Modell

Bereits beim Betrachten der Struktur dieses Modells wird offensichtlich, dass es extrem schwer zu konstruieren ist. Bezüglich der notwendigen Inferenzen sowie hinsichtlich der Vollständigkeit der einzelnen Teilmodelle bleiben alle Sinnbeeinträchtigungen, die im Rahmen des vorherigen SATZ-Modells erläutert wurden, bestehen. Allerdings weist das BEGRIFF-Modell im Vergleich zum diskutierten SATZ-Modell weitere Sinnbeeinträchtigungen auf. So ist fraglich, warum die Teiltexte 2 und 3, die im Vergleich zum hinleitenden Teiltext 1 das Wesentliche enthalten, so kurz und lückenhaft sind. Die primäre Schwierigkeit besteht allerdings darin, dass das BEGRIFF-Schema erst am Ende des Lehrtextes aktiviert wird und daher der gesamte Vortext bzw. das bis dahin konstruierte SATZ-Modell rückwirkend als HINFÜHRUNG ZUM BEGRIFF bzw. ZUM BEZEICHNETEN DES BEGRIFFS reinterpretiert werden muss. Dies ist mit einem hohen Anspruch verbunden; so muss ausgehend vom SATZ ‚Alle Zahlen sind stets in Bruch- und Dezimalschreibweise darstellbar' geschlussfolgert werden, dass diese Zahlen eine einheitliche (!) Zahlenmenge bilden und dass diese Menge (in ihrer Gesamtheit) neu ist. Die im Prozess der Lehrtextverarbeitung konstruierten VERFAHREN und der SATZ erscheinen damit als (TEIL-)BEGRÜNDUNGEN für die Existenz solch einer Zahlenmenge bzw. ihrer Objekte. Wenn es im Leseprozess keine Indizien dafür gibt, dass es sich hier um eine Begriffseinführung handelt – und es finden sich bis zum Teiltext 3 keinerlei diesbezügliche Hinweise – kann man diese rückwirkende Interpretation ohne wiederholendes Lesen nur schwer vollziehen. Im Rahmen des bereits diskutierten SATZ-Modells mussten lediglich die VERFAHREN als SATZBEGRÜNDUNGEN rückwirkend reinterpretiert werden, im vorliegenden BEGRIFF-Modell muss diese Interpretation nochmals revidiert werden, was die Modellbildung im Vergleich zum SATZ-Modell weiter erschwert.

Am Ende des Lehrtextes erscheint die Mitteilung, dass es beim Lösen der Probleme prinzipiell dem Schüler überlassen ist, Brüche in Dezimalzahlen oder Dezimalzahlen in Brüche umzuwandeln (Ausdruck 54). Bei der Einführung der neuen ZAHLENMENGE – also im Teiltext 3 – wurde die Kenntnis des SATZES ‚Zahlen sind stets sowohl in der Bruch- als auch Dezimalschreibweise darstellbar' in gewisser Weise unterstellt. Aus diesem SATZ folgt aber unmittelbar, dass die ‚Umwandlungsrichtung' egal ist. Warum der Autor diese relativ einfache Schlussfolgerung gesondert mitteilt, während er den zentralen und kognitiv anspruchsvollen SATZ im Impliziten belässt und zahlreiche Fragen bezüglich der VERFAHREN nicht beantwortet, bleibt ebenso offen wie die Antwort auf die Frage, um welche ‚Probleme' es sich hier eigentlich handelt.[126] Wie man sieht, ist dieser Teiltext (T4) im Rahmen eines textübergreifenden MATHEMATISCHES-ELEMENT-Modells nur schwer intakt ausdeutbar und erscheint so als recht überflüssig.

Insgesamt kann festgehalten werden, dass alle naheliegenden MATHEMATISCHE(S)-ELEMENT(E)-Modelle sehr schwer zu konstruieren und damit sinnbeeinträchtigt sind. Sie alle sind unvollständig, insbesondere hinsichtlich der Begründung-Leerstellen. In allen Modellen ist der Teiltext 4 schwer integrierbar. Im Rahmen des VERFAHREN-Modells erscheinen zusätzlich die Teiltexte 2 und 3 als sperrig, beim SATZ-Modell fügt sich der Teiltext 3 schwer ein. Lediglich das BEGRIFF-Modell integriert gut die Teiltexte 2 und 3. Allerdings ist dieses Modell hinsichtlich der Komplexität notwendiger Inferenzen das am schwierigsten zu konstruierende. Außerdem widerspricht die typographische Gestaltung (teilweise) jedem der erläuterten Modelle.

Im folgenden Schritt soll betrachtet werden, inwiefern der Lehrtext im Rahmen des AUFGABE-Schemas intakt interpretierbar ist. Die nachfolgende Text-Modell-Struktur veranschaulicht die Struktur eines naheliegenden (reinen) AUFGABEN-Modells auf der ersten Zerlegungsstufe.

AUFGABEN ‚Dezimalzahlen und Brüche' (T0-4)

[1] TRANSFORMATIONSAUFGABE ‚Umwandlung der gegebenen Brüche und Dezimalzahlen in eine einheitliche Schreibform' (T0-1, T4)

[2] TRANSFORMATIONSAUFGABE ‚Angabe der Punkte auf der Zahlengeraden als (möglichst viele unterschiedliche) Brüche und Dezimalzahlen' (T2)

[3] FAKTENAUFGABE ‚Was sind rationale Zahlen?' (T3, teilweise überflüssige Textdaten)

Struktur 15: Vom (Gesamt-) Lehrtext ‚An der Kühltheke' und dem Einstiegsauftrag nahegelegtes AUFGABEN-Modell

Der Gesamttext wird als DEZIMALZAHLEN-UND-BRÜCHE-AUFGABEN, also als eine Aufgabenklasse interpretiert. Diese Klasse konstituiert sich aufgrund der Gleichheit der AUFGABEN-OBJEKTE, d.h. aufgrund der Tatsache, dass in allen AUFGABEN Dezimalzahlen und (!) Brüche vorkommen. Die erste umfangreiche AUFGABE [1], die anhand des Auftrags sowie der Teiltexte 1 und 4 konstruiert wird, stellt die abstrahierte AUFGABE ‚An der Kühltheke' dar. Ihre AUFGABENSTELLUNG lautet ‚Wandle gegebene Dezimalzahlen und Brüche in eine einheitliche Schreibform um'. Die zweite AUFGABE [2] wird anhand des Teiltextes 2 konstruiert, sie beinhaltet die AUFGABENSTELLUNG ‚Gib die markierten Punkte auf der Zahlengeraden in

[126] Ein Interpretationsangebot dafür, weshalb es im Lehrbuchtext explizit dem Schüler überlassen bleibt, „Brüche in Dezimalzahlen oder Dezimalzahlen in Brüche" umzuwandeln, wird am Ende dieses Kapitels unterbreitet.

der Bruch- und Dezimalschreibweise an‘. Der Teiltext 3 legt schließlich eine FAKTENAUFGABE nahe, die die FRAGE ‚Was sind rationale Zahlen?‘ beinhaltet.

Zunächst wird das erste umfangreiche Teilmodell, also die TRANSFORMATIONSAUFGABE ‚Umwandlung der gegebenen Brüche und Dezimalzahlen in eine einheitliche Schreibform‘, erläutert. Der erste Ausdruck des Lehrtextes deutet (relativ schwach) an, dass im folgenden Text nicht die Lösung der konkreten AUFGABENSTELLUNG ‚An der Kühltheke‘, sondern die LÖSUNG einer verallgemeinerten AUFGABENSTELLUNG mitgeteilt wird (vgl. die entsprechenden Erläuterungen im Rahmen des naheliegenden PROBLEM-Modells). Die verallgemeinerte AUFGABENSTELLUNG muss dabei ausgehend von der konkreten im Teiltext 0 mitgeteilten AUFGABENSTELLUNG selbstständig abstrahierend konstruiert werden. Die nachfolgenden Teiltexte 1 und 4 werden als LÖSUNG dieser AUFGABENSTELLUNG interpretiert. Das entsprechende von den Teiltexten 1 und 4 nahegelegte AUFGABE-Modell ist in der nachfolgenden Text-Modell-Struktur ersichtlich.

[1] TRANSFORMATIONSAUFGABE ‚Umwandlung der gegebenen Brüche und Dezimalzahlen in eine einheitliche Schreibform‘ (T0-1, T4)

- [1.1] AUFGABENSTELLUNG ‚Wandle die gegebenen Brüche und Dezimalzahlen in eine einheitliche Schreibform um‘ (T0-1.1)
- [1.2] LÖSUNG ‚Wandle entweder Dezimalzahlen in Brüche oder Brüche in Dezimalzahlen um‘ (T1.2-1.7, T4)
  - [1.2.1] ERSTE LÖSUNGSMÖGLICHKEIT ‚Umwandlung der Brüche in Dezimalzahlen‘ (T1.2-T1.5)
    - [1.2.1.1] AUSGANGSOBJEKTE 1 ‚Brüche mit einer Zehnerpotenz im Nenner‘ (T1.2)
    - [1.2.1.2] AUSGANGSOBJEKTE 2 ‚Brüche ohne Zehnerpotenz im Nenner‘ (T1.2-1.5)
  - [1.2.2] ZWEITE LÖSUNGSMÖGLICHKEIT ‚Umwandlung der Dezimalzahlen in Brüche‘ (T1.6-1.7)
    - [1.2.2.1] AUSGANGSOBJEKTE 1 ‚Nicht periodische Dezimalzahlen‘ (T1.6)
    - [1.2.2.2] AUSGANGSOBJEKTE 2 ‚Periodische Dezimalzahlen‘ (T1.7)
  - [1.2.3] BEARBEITUNGSSCHRITTE allgemein ‚Die Umwandlungsrichtung ist egal‘ (T4)

Struktur 16: Von Teiltexten 0-1 und 4 des Lehrtextes ‚An der Kühltheke‘ nahegelegtes TRANSFORMATIONSAUFGABE-Modell

Die AUFGABE kann auf zwei Wegen gelöst werden: indem man Brüche in Dezimalzahlen oder indem man Dezimalzahlen in Brüche umwandelt. Damit handelt es sich um zwei LÖSUNGSMÖGLICHKEITEN (vgl. [1.2.1] und [1.2.2]). Die einzelnen LÖSUNGS-MÖGLICHKEITEN sind weiter untergliedert und zwar hinsichtlich der jeweiligen Spezifik der AUSGANGSOBJEKTE. So ist die UMWANDLUNG DER BRÜCHE IN DEZIMALZAHLEN aufgrund der Spezifik der (in der Aufgabenstellung) gegebenen Brüche differenziert (vgl. [1.2.1.1] und [1.2.1.2]). Die ZWEITE LÖSUNGSMÖGLICHKEIT erscheint auf die gleiche Art und Weise, d.h. auf der Grundlage einer Differenzierung der AUSGANGSOBJEKTE – hier in Form der Unterscheidung der Dezimalzahlen in periodisch und nicht periodisch (vgl. [1.2.2.1] und [1.2.2.2]). Teiltext 4 liefert allgemeine Hinweise hinsichtlich der BEARBEITUNGSSCHRITTE. Er kann in etwa wie folgt zusammengefasst werden: ‚Die Umwandlungsrichtung ist egal. Falls jedoch in der Lösung periodische Dezimalzahlen auftauchen, wandle die in der Aufgabenstellung gegebenen Zahlen in Brüche um'.

Das AUFGABE-Modell [1] ist nicht frei von Sinnbeeinträchtigungen, so ist die AUFGABENSTELLUNG im Lehrtext nicht explizit enthalten und muss – wie bereits erwähnt – ausgehend von der ‚An der Kühltheke'-Aufgabe selbstständig gebildet werden. Die in die Lehrtextsequenz ‚eingeschobenen' Teiltexte 2 und 3, die keine Aspekte der AUFGABE [1] darstellen, erschweren das Bilden eines einheitlichen Modells. Ebenso ist die LÖSUNG DER UMWANDLUNG DER BRÜCHE MIT EINER ZEHNERPOTENZ IM NENNER [1.2.1.1] nicht ohne Schwierigkeiten konstruierbar, da sie ausschließlich anhand der formal-mathematischen Ausdrücke (3) inferiert werden muss (vgl. die entsprechende Analyse im Rahmen des VERFAHREN-Modells). Ungeachtet dieser Sinnbeeinträchtigungen ist das AUFGABE-Modell jedoch eindeutig leichter zu konstruieren als die konkurrierenden, vom Teiltext 1 nahegelegten PROBLEM- bzw. VERFAHREN-Modelle. Zur Erinnerung: Im Rahmen des PROBLEM- oder des VERFAHREN-Modells wirken insbesondere folgende Textmerkmale sinnbeeinträchtigend:

- die primäre Bearbeitung einer verallgemeinerten und nicht einer konkreten ‚An der Kühltheke'-PROBLEMSTELLUNG,
- das (teilweise) Fehlen expliziter Textdaten, die als ERGEBNIS DER PROBLEMBEARBEITUNG ‚An der Kühltheke' ausdeutbar sind,
- das Fehlen der für den Modellschüler zugänglichen BEARBEITUNSMÖGLICHKEIT ‚Umwandlung der $\frac{3}{8}$kg in Gramm',
- das häufige Fehlen expliziter Textdaten, die als BEGRÜNDUNGEN für die (TEIL-) PROBLEMBEARBEITUNG bzw. für die einzelnen VERFAHREN interpretierbar sind,
- das Vorhandensein zweier Teiltexte (T2, T3), die sich nicht direkt auf das (verallgemeinerte) PROBLEM ‚An der Kühltheke' bzw. auf die VERFAHREN beziehen lassen.

Im Rahmen des AUFGABE-Modells sind all diese Sinnbeeinträchtigungen entschärft. Der Schulbuchlehrtext dient im Rahmen des AUFGABE-Schemas dazu, die im (Unter-)Kapitel bzw. in der dazugehörigen Unterrichtseinheit vorkommenden AUFGABEN (im Sinne eines Aufgabentyps) – also die jeweiligen (abstrahierten) AUFGABENSTELLUNGEN und ihre LÖSUNGEN – vorzustellen. Solch ein (Denk-)Rahmen sorgt dafür, dass die oben genannten Sinnbeeinträchtigungen im Rahmen des AUFGABE-Modells kaum entstehen können. Zur Begründung: Aufgrund der kommunikativen Lehrtextfunktion im Rahmen des AUFGABE-Schemas verwundert es erstens nicht, dass die im Lehrtext vorgestellte AUFGABENSTELLUNG einen allgemeineren Charakter aufweist als die konkrete AUFGABENSTELLUNG ‚Welche

Packung ist die richtige?'. Zweitens: Die zu der konkreten AUFGABENSTELLUNG gehörige LÖSUNG ist im Rahmen des AUFGABE-Schemas lediglich dann von Bedeutung, wenn sie auch im Hinblick auf die LÖSUNG der verallgemeinerten AUFGABENSTELLUNG relevant ist. Die Tatsache, dass der Packzettel mit 0,375kg zum Einkaufszettel passt, die das ERGEBNIS der konkreten AUFGABE darstellt, ist im Hinblick auf die LÖSUNG der verallgemeinerten AUFGABE jedoch irrelevant – daher wirkt das Fehlen dieser Textdaten auch nicht sinnbeeinträchtigend. Drittens: Das Fehlen einer BEARBEITUNGSMÖGLICHKEIT für die ‚Umwandlung der $\frac{3}{8}$kg in Gramm' wirkt ebenfalls nicht störend, wenn man annimmt, dass diese Möglichkeit nicht für alle (in der folgenden Aufgabensammlung vorkommenden) Vertreter des Aufgabentyps relevant ist, d.h. dass der realitätsbezogene Kontext und damit die Maßeinheiten in den meisten nachfolgenden Aufgaben entfallen und lediglich die Umwandlung der Zahlen und nicht der Größenangaben verlangt wird. Außerdem weisen AUFGABEN typischerweise eine eindeutige BEARBEITUNG/LÖSUNG auf,[127] wodurch der Eindruck der Normalität bezüglich des Fehlens eines (weiteren) zugänglichen Lösungsweges verstärkt wird. Viertens: Da im Rahmen des AUFGABE-Schemas die Begründung-Leerstelle nicht verfestigt ist, wirkt das Fehlen entsprechender Textdaten nicht als sinnbeeinträchtigend. Fünftens: In Anbetracht der Tatsache, dass ein Lehrtext unterschiedliche (zentrale) in der nachfolgenden Aufgabensammlung vorkommende AUFGABEN vorstellt, erscheint es als sinnvoll, dass neben der AUFGABE ‚Umwandlung der Brüche und Dezimalzahlen in eine einheitliche Schreibweise' im Lehrtext weitere AUFGABEN präsentiert werden. Abschließend sei auf eine weitere Sinnbeeinträchtigung, die im Rahmen der textumfassenden MATHEMATISCHE(S)-ELEMENT(E)-Modelle vorkam, hingewiesen. Dort war der Teiltext 4 schwer integrierbar, weil die ‚Gleichwertigkeit der Umwandlungsrichtung' als eine leicht zu vollziehende Schlussfolgerung des SATZES ‚Zahlen sind stets sowohl in der Bruch- als auch in der Dezimalschreibweise darstellbar' erschien. Es entstand die Frage, warum der Autor diese naheliegende Schlussfolgerung gesondert mitteilt, während er zentrale Fragen – wie etwa BEGRÜNDUNGEN der einzelnen vorgestellten MATHEMATISCHEN ELEMENTE – unbeantwortet ließ. Im Rahmen des AUFGABE-Modells entsteht diese Sinnbeeinträchtigung nicht, da der SATZ – wie später noch erläutert wird – gar nicht konstruiert wird und damit die ‚Gleichwertigkeit der Umwandlungsrichtung' als ein tatsächlich neuer und wichtiger Inhalt erscheint. Insgesamt ist also das AUFGABE-Modell, das von den Teiltexten 1 und 4 nahegelegt wird, im Vergleich zu den konkurrierenden MATHEMATISCHE(S)-ELEMENT(E)-Modellen dieser Teiltexte, wesentlich geringer sinnbeeinträchtigt und damit erheblich leichter zu konstruieren.

[127] Vgl. Kap. 5.1.

Die zentrale Schwierigkeit des AUFGABE-Modells [1] besteht darin, anhand der sehr schwachen sprachlichen Hinweise im Ausdruck 1 eine verallgemeinerte AUFGABEN-STELLUNG zu bilden und dementsprechend die Lösung-Leerstelle zu aktivieren, so dass die nachfolgenden Textdaten (des Teiltextes 1) als Belegungen dieser Leerstelle interpretiert werden können. Falls das Inferieren der AUFGABENSTELLUNG anhand des Auftrages und des Ausdruckes 1 misslingt, wird im Verarbeitungsprozess des Teiltextes 1 nicht eine einheitliche TRANSFORMATIONSAUFGABE konstruiert, sondern es werden unterschiedliche, miteinander kaum zusammenhängende UMWANDLUNGSAUFGABEN gebildet. Das entsprechende Modell ist nachfolgend dargestellt.

[1] UMWANDLUNGSAUFGABEN ‚Dezimalzahlen und Brüche' (T1)
- [1.1] UMWANDLUNGSAUFGABE ‚Umwandlung der Brüche mit einer Zehnerpotenz im Nenner in Dezimalzahlen' (T1.2)
- [1.2] UMWANDLUNGSAUFGABE ‚Umwandlung der Brüche in Dezimalzahlen durch Kürzen und Erweitern' (T1.3)
- [1.3] UMWANDLUNGSAUFGABE ‚Umwandlung der Brüche in Dezimalzahlen durch Division' (T1.4 – 1.5)
- [1.4] UMWANDLUNGSAUFGABE ‚Umwandlung der nicht periodischen Dezimalzahlen in Brüche' (T1.6)
- [1.5] UMWANDLUNGSAUFGABE ‚Umwandlung der periodischen Dezimalzahlen in Brüche' (T1.7)

Struktur 17: Vom Teiltext 1 des Lehrtextes ‚An der Kühltheke' nahegelegtes UMWANDLUNGSAUFGABEN-Modell

Insgesamt ist das Modell der ‚getrennten UMWANDLUNGSAUFGABEN' anhand des Teiltextes 1 leicht konstruierbar. Alle AUFGABEN weisen eine einheitliche und für TRANSFORMATIONSAUFGABEN typische AUFGABENSTELLUNG auf: ‚Wandle Brüche/Dezimalzahlen in die jeweils andere Darstellungsform um'. Aufgrund dieser Typik sind die AUFGABEN-STELLUNGEN den Textdaten leicht entnehmbar. Die jeweiligen BEARBEITUNGSSCHRITTE sind analog zu den VERFAHRENSSCHRITTEN den einzelnen Teiltexten zu entnehmen; dabei sind lediglich die BEABRBEITUNGSSCHRITTE der ersten und folglich der zweiten UMWANDLUNGS-AUFGABE – wie bereits bei den entsprechenden VERFAHRENSSCHRITTEN erläutert wurde – relativ schwer zu konstruieren. Im Teiltext 4 wird angedeutet, dass es Aufgaben geben wird, in denen entscheidbar ist, ob Brüche in Dezimalzahlen oder Dezimalzahlen in Brüche umgewandelt werden sollen. Hier findet sich also neben dem (vagen) Ausdruck 1 ein erneuter Hinweis auf den AUFGABENTYP ‚Umwandlung der gegebenen Brüche und Dezimalzahlen in eine einheitliche Schreibform'. Allerdings wird nicht nur im Ausdruck 1, sondern auch im Teiltext 4 keine explizite AUFGABENSTELLUNG mitgeteilt. Um eine einheitliche TRANSFORMATIONSAUFGABE ‚Umwandlung der Brüche und Dezimalzahlen in eine einheitliche Schreibform' (vgl. Struktur 16) zu konstruieren, muss unser Modellschüler nicht nur die AUFGABENSTELLUNG inferieren, sondern darüber hinaus die einzelnen, bereits konstruierten UMWANDLUNGSAUFGABEN ([1.1], [1.2], [1.3], [1.4] und [1.5] in der Struktur 17) rückwirkend als TEILLÖSUNGEN reinterpretieren. Dies ist kognitiv anspruchsvoll. Sofern die Reinterpretationen nicht vollzogen werden, besteht indes die Möglichkeit, die einzelnen konstruierten UMWANDLUNGSAUFGABEN nicht als TEILLÖSUNGEN der übergreifenden TRANSFORMATIONSAUFGABE ‚Umwandlung der Brüche und Dezimalzahlen in eine einheitliche Schreibform', sondern als eigenständige (und zentrale) AUFGABEN zu betrachten. In diesem Fall wird anhand des Teiltextes 4 lediglich eine zusätzliche, teilweise unvollständige AUFGABE konstruiert, die im Vergleich zu den konstruierten UMWANDLUNGSAUFGABEN als (vernachlässigbare) Ergänzung betrachtet werden kann. Insgesamt scheint das aus mehreren AUFGABEN bestehende UMWANDLUNGSAUFGABEN-Modell wesentlich leichter zu konstruieren als das konkurrierende, nur eine übergreifende AUFGABE beinhaltende TRANSFORMATIONSAUFGABE-Modell, denn die Notwendigkeit einer rückwirkenden Reinterpretation der Teiltexte 1.2-1.7. entfällt im Rahmen des erstgenannten Modells.[128]

Nachdem das erste Teilmodell des vom Gesamtlehrtext nahegelegten AUFGABE(N)-Modells ausführlich besprochen wurde, werden nun die beiden verbleibenden Teilmodelle [2] und [3] betrachtet (vgl. Struktur 15). Im Rahmen des AUFGABE-Schemas wird der Teiltext 2 als ein (neuer) Typus einer AUFGABE interpretiert. Die dazugehörige – anhand der Textdaten zu inferierende – AUFGABENSTELLUNG lautet ‚Wandle die gegebenen Punkte auf der Zahlengeraden in Brüche und Dezimalzahlen um' (vgl. [2]). Die AUSGANGSOBJEKTE sind damit ‚Punkte auf der Zahlengeraden'; Brüche und Dezimalzahlen erscheinen als ZIELOBJEKTE. Die AUFGABENSTELLUNG ist vielleicht nicht ganz so typisch wie die vorherigen, aber keineswegs ungewöhnlich; ihre Inferenz dürfte anhand der Textdaten nicht allzu schwer sein. Dabei bleibt die AUFGABENSTELLUNG aufgrund der Grafik 47 teilweise unklar: Sollen die markierten Punkte auf einer Zahlengeraden als möglichst viele unterschiedliche Brüche und Dezimalzahlen dargestellt werden oder ist eine (einzige) Angabe in der Bruchschreibweise und eine (einzige) Angabe in der Dezimalschreibweise ausreichend? Neben dieser (relativ geringfügigen) Offenheit der konstruierten AUFGABENSTELLUNG ist zu konstatieren, dass im Lehrtext die dazugehörigen BEARBEITUNGSSCHRITTE fehlen und nur recht schwer inferierbar sind; hierfür sind umfangreiche Kenntnisse bezüglich der Zahlengeraden und dement-

[128] Falls der Modellschüler im Zuge der Lehrtextverarbeitung ein aus mehreren UMWANDLUNGSAUFGABEN bestehendes Modell (vgl. Struktur 17) konstruiert und Teiltext 4 als eine ergänzende und daher vernachlässigbare AUFGABE ausdeutet, erwartet er in der anschließenden Aufgabensammlung primär die entsprechenden UMWANDLUNGSAUFGABEN, also jene, in denen entweder ausschließlich Brüche oder ausschließlich Dezimalzahlen in die jeweils andere Schreibform umgewandelt werden müssen. Diese Erwartungshaltung wird bemerkenswerterweise bestätigt. Lediglich eine (!) der nachfolgenden elf Trainieren-Aufgaben ist so konstruiert, dass gegebene Brüche und Dezimalzahlen in eine einheitliche Form umgewandelt werden müssen (vgl. Esper und Schornstein Johannes 2007, S. 101, Aufgabe10). Demgegenüber sind acht der Aufgaben zu den UMWANDLUNGSAUFGABEN zu zählen; hier sind Brüche oder Dezimalzahlen in die jeweils andere Schreibform umzuwandeln (vgl. Esper und Schornstein Johannes 2007, S. 100-101, Aufgaben 1-5 und 7-9). Die verbleibenden beiden Aufgaben weisen jeweils eine neuartige, im AUFGABEN-Modell nicht enthaltende Aufgabenstellung auf. Bei der Aufgabe 6 müssen alle Zahlenmengen angegeben werden, zu denen die in der Aufgabenstellung gegebenen Zahlen gehören (vgl. ebd., Aufgabe 6). In Aufgabe 11 müssen alle einstelligen und zweistelligen Zahlen angegeben werden, die ‚im Nenner eines gekürzten Bruches stehen dürfen, damit sich nach der Umwandlung eine abbrechende Dezimalzahl ergibt' (vgl. ebd., Aufgabe 11). Insgesamt entsprechen neun der elf Aufgabenstellungen den anhand des Lehrtextes konstruierten AUFGABENSTELLUNGEN. Im Wesentlichen wird damit in diesem Fall die kommunikative Funktion eines Lehrtextes als ‚Vermittler von Aufgaben' gestützt und verstärkt.

sprechend der Zahlen erforderlich. Damit ist die AUFGABE [2] insgesamt relativ schwer zu bilden. Bemerkenswert ist in diesem Zusammenhang, dass im Rahmen dieses anhand des Teiltextes 2 konstruierten TRANSFORMATIONSAUFGABE-(Teil-)Modells der SATZ ‚Zahlen sind stets in Bruch- und Dezimalschreibweise darstellbar', der im Rahmen der konkurrierenden MATHEMATISCHE(S)-ELEMENT(E)-Modellen notwendig ist, nicht gebildet wird.

Der Teiltext 3 kann als eine FAKTENAUFGABE ‚Was sind rationale Zahlen?' (vgl. [3] in der Struktur 15) interpretiert werden. In der zugehörigen ANTWORT, die im blauen Kasten (Ausdrücke 51-52) enthalten ist, tauchen Brüche und Dezimalzahlen auf, wodurch sich die AUFGABE in die übergeordnete AUFGABENKLASSE sinnvoll einfügt. Der Vortext des Teiltextes 3 (Ausdrücke 48-50) ist in die FAKTENAUFGABE kaum integrierbar, weil er grundsätzlich schwer im Rahmen des AUFGABE-Schemas interpretierbar ist. Damit ist die AUFGABE [3] sinnbeeinträchtigt; einige Ausdrücke erscheinen als überflüssig – und dies, obwohl sie auf der Textoberfläche mit den Textdaten, die als FAKTENAUFGABE interpretiert wurden, zusammenhängen.

Zusammenfassend kann festgestellt werden: Die Teiltexte 1 und 4 sind relativ leicht als ein intaktes AUFGABE(N)-Modell interpretierbar. Diese Interpretation ist wesentlich leichter als die entsprechenden mathematischen Modelle der beiden Teiltexte. Die Teiltexte 2 und 3 sind demgegenüber (in absoluter Hinsicht) nicht so leicht als AUFGABEN interpretierbar. Die typographische Gestaltung des Lehrtextes passt größtenteils zur Struktur der besprochenen möglichen AUFGABEN-Modelle; so beinhalten alle Hervorhebungen (TEIL-)LÖSUNGEN der AUFGABEN. Allerdings sind zwei LÖSUNGEN nicht hervorgehoben, die LÖSUNG der ‚Angabe der Punkte auf der Zahlengerade'-AUFGABE ist im Lehrtext nicht einmal enthalten. Des Weiteren ist die ‚Umwandlung der Brüche mit einer Zehnerpotenz im Nenner in Dezimalzahlen' (Ausdruck 3) nicht hervorgehoben; sie kann allerdings als ein Sonderfall der ‚Umwandlung durch Kürzen und Erweitern', die im Lehrtext hervorgehoben ist (Ausdruck 9), betrachtet werden.

IV. Skizze der naheliegenden Lernergebnisse

Da der Fokus der anstehenden Lehrtextanalyse auf den Bildungsschwierigkeitsgrad der naheliegenden Modelle fällt, werden die naheliegenden Lernergebnisse lediglich skizziert. Die MATHEMATISCHE(S)-ELEMENT(E)-Modelle führen unabhängig vom übergeordneten Gegenstand (VERFAHREN, SATZ, BEGRIFF) zu ähnlichen Lernergebnissen. Die unterschiedliche Akzentuierung einzelner Inhalte dürfte die Aufmerksamkeitssteuerung und daher die Behaltensleistung bzw. den Verfestigungsgrad der einzelnen kognitiven Inhalte beeinflussen. Im Zuge der Bildung eines MATHEMATISCHE(S)-ELEMENT(E)-Modells lernt der Schüler, dass Brüche und Dezimalzahlen die gleichen Zahlen bezeichnen, dass diese Zahlen in ihrer Gesamtheit einen neuen Zahlbereich bilden und dass in diesem Zahlbereich die ganzen und damit die natürlichen Zahlen eingebettet sind. Dadurch werden die ursprünglichen Schemata (BRUCHZAHL, BRUCH, DEZIMALZAHL, NATÜRLICHE ZAHL und GANZE ZAHL) in einem neu konstruierten übergeordneten RATIONALE-ZAHL-Schema eingebettet. Insbesondere wird das bis dahin recht vage BRUCHZAHL-Schema verfestigt und erweitert.

All dies vollzieht sich im Zuge der Bildung eines AUFGABEN-Modells nicht, da das BEZEICHNETE der BRÜCHE und der DEZIMALZAHLEN nicht aktiviert wird und dementsprechend nicht verändert werden kann. Im Wesentlichen wird das Umwandeln der Symbole gelernt. Insbesondere wird kein übergeordnetes Schema konstruiert, das die DEZIMALZAHL-, BRUCH(ZAHL)-, sowie GANZE-ZAHL-Schemata aufnimmt. Im Kopf des Schülers bleiben die einzelnen Zahlen grundverschieden.

V. Integrative Lehrtextkennzeichnung

Das primäre Ziel dieser Lehrpotentialanalyse war es, die Ausprägung der zentralen lernrelevanten Textmerkmale, also die absolute Bildungsschwierigkeit aller naheliegenden (Haupt-)Modelle, sowie die relative Bildungsschwierigkeit der (reinen) naheliegenden AUFGABEN-Modelle im Vergleich zu naheliegenden MATHEMATISCHE(S)-ELEMENT(E)-Modellen zu ermitteln. Im Folgenden werden die diesbezüglich gewonnenen Erkenntnisse systematisiert.

Alle naheliegenden Modelle sind in absoluter Hinsicht schwer zu konstruieren, sie sind demzufolge auch recht stark sinnbeeinträchtigt. Sie weisen schwer integrierbare Textdaten auf und erfordern zahlreiche schwer zu vollziehende Inferenzen. Insbesondere sind die Teiltexte 2 und 3, die aus fachlicher Sicht zentrale Sachverhalte enthalten, schwer intakt ausdeutbar, und dies sowohl im Rahmen naheliegender AUFGABEN- als auch im Rahmen naheliegender MATHEMATISCHE(S)-ELEMENT(E)-Modelle. Daher dürften diese Teiltexte von vielen Schülern als sinnlos empfunden und demzufolge oberflächlich verarbeitet werden, wodurch die in diesen Teiltexten enthaltenen Inhalte entweder nicht oder höchstens mechanisch gelernt werden dürften. Dies gilt unabhängig davon, wie stark das AUFGABE- und das MATHEMATISCHE-ELEMENT-Schema bei den jeweiligen Schülern ausgebildet sind und welche Leseziele und Lesestrategien sie beim Verarbeiten des Lehrtextes verfolgen.

Eine sinnstiftende Interpretation des (Gesamt-)Lehrtextes im Rahmen eines MATHEMATISCHE(S)-ELEMENT(E)-Modells wird primär durch das Fehlen der Textdaten, die als BEGRÜNDUNGEN interpretierbar sind, durch das Nicht-Explizieren der SATZAUSSAGE im Teiltext 2 und des BEZEICHNETEN der RATIONALEN ZAHLEN im Teiltext 3 sowie durch das Nicht-Explizieren der ‚Verknüpfungen' zwischen den einzelnen Teiltexten erster Ordnung verhindert. Des Weiteren fehlen sprachliche Mittel, die eine Wichtung der einzelnen vorgestellten MATHEMATISCHEN ELEMENTE signalisieren; damit bleibt vage, was im Rahmen des Lehrtextes zentral ist.

In Bezug auf die relative Bildungsschwierigkeit der naheliegenden AUFGABEN-Modelle ist die Frage zu beantworten, ob und inwiefern die naheliegenden AUFGABEN-Modelle im Vergleich zu naheliegenden MATHEMATISCHE(S)-ELEMENT(E)-Modellen eindeutig leichter zu konstruieren sind. Die Teiltexte 1 und 4, die gemeinsam etwa $\frac{2}{3}$ der Gesamttextdaten darstellen, sind – wie bereits ausführlich erläutert – eindeutig leichter im Rahmen eines AUFGABE(N)-Modells als im Rahmen der konkurrierenden PROBLEM- bzw. VERFAHREN-Modelle interpretierbar. Damit dürfte eine überwiegende Mehrheit der Schüler, die die schwer ausdeutbaren Teiltexte 2 und 3 oberflächlich verarbeiten, die Inhalte der Teiltexte 1 und 4 im Rahmen des AUFGABE-Schemas verarbeiten und dadurch ausschließlich zu einem AUFGABEN-Lernergebnis gelangen.

Bezüglich des Gesamttextes sind die Unterschiede hinsichtlich der Bildungsschwierigkeit beider Modellarten weniger gravierend, aber doch eindeutig. So sind die AUFGABEN-Modelle – mit Ausnahme der Offenheit bei der AUFGABE ‚Angabe der Punkte auf der Zahlengeraden' – vollständig. Bei naheliegenden MATHEMATISCHE(S)-ELEMENT(E)-Modellen bleiben demgegenüber zahlreiche zentrale aktivierte Leerstellen offen, d.h. sie können vom Modellschüler anhand seines Vorwissens kaum belegt werden. Dies betrifft insbesondere nahezu alle BEGRÜNDUNGEN der VERFAHREN bzw. SÄTZE. Hinsichtlich des Umfangs und der Komplexität der notwendigen Inferenzen sind die naheliegenden AUFGABEN-Modelle ebenfalls leichter zu bilden als die MATHEMATISCHE(S)-ELEMENT(E)-Modelle. So sind aufgrund fehlender Textdaten für eine sinnvolle Ausdeutung der Teiltexte 2 und 3 als SATZ bzw. BEGRIFF zahlreiche umfangreiche Anreicherungen des explizit Mitgeteilten notwendig. Beispielsweise ist die Bildung der SATZAUSSAGE ‚Alle Zahlen sind stets in Bruch- und Dezimalschreibweise darstellbar' anhand des kurzen, vagen und auf der Textoberfläche mit dem vorherigen Teiltext 1 kaum zusammenhängenden Teiltextes 2 höchst anspruchsvoll. Im Vergleich dazu scheint das Konstruieren der zum SATZ konkurrierenden TRANSFORMATIONSAUFGABE ‚Angabe der Punkte auf der Zahlengeraden als Bruch und Dezimalzahl' leichter zu sein, denn dabei entfallen alle komplizierten Inferenzen bezüglich der vom Lehrtext recht schwach angedeuteten Beziehungen zwischen ganzen Zahlen, Brüchen und Dezimalzahlen. Das Gleiche betrifft die Bildung des vom Teiltext 3 angedeuteten BEGRIFF-Modells. Eine sinnvolle Ausdeutung der Textdaten im Rahmen eines BEGRIFF-Modells bedarf eines selbstständigen umfangreichen (Um-)Denkens des bereits vorhandenen und bei der Lehrtextverarbeitung erworbenen ZAHLEN-Wissens. Die Textdaten unterstützen diese Leistung kaum, da sie teilweise dem bereits konstruierten SATZ widersprechen (so erscheinen Dezimalzahlen/Brüche und ganze Zahlen als disjunkte Zahlmengen). Im Vergleich dazu erfordert die Bildung der konkurrierenden FAKTENAUFGABE ‚Was sind rationale Zahlen? ' bis auf die relativ leicht zu inferierende FRAGE keine weiteren Inferenzen, denn die ANTWORT ist explizit im Lehrtext enthalten. Mit Blick auf die MATHEMATISCHE(S)-ELEMENT(E)-Modelle ist festzuhalten, dass hier zahlreiche komplizierte Inferenzen notwendig sind, um die von den Teiltexten 1, 2 und 3 jeweils angedeuteten Inhalte sinnvoll miteinander zu verbinden. Besonders schwierig erscheint die Verknüpfung zwischen den Teiltexten 1 und 2, bei der die einzelnen konstruierten VERFAHREN in Verbindung zur SATZAUSSAGE ‚Alle Zahlen sind stets in Bruch- und Dezimalschreibweise darstellbar' gesetzt werden müssen. Aber auch der recht komplexe ‚Übergang' zwischen dem SATZ und dem BEGRIFF ‚Rationale Zahlen' bleibt im Lehrtext lediglich vage angedeutet. Im Rahmen der

AUFGABEN-Modelle entfallen diese verbindenden Inferenzen weitgehend, da die Verknüpfung zwischen einzelnen Teiltexten bzw. Teilmodellen erster Ordnung ausschließlich auf der Grundlage der Gemeinsamkeit der AUFGABENOBJEKTE konstruiert wird; sie bedarf keiner weiterführenden Gedanken.

Bezogen auf die typographische Gestaltung ist zu konstatieren, dass sie vorrangig zu AUFGABEN-Modellen passt. Im Rahmen des VERFAHREN-Modells stören die Hervorhebungen im Rahmen des Teiltextes 3, beim SATZ-Modell irritiert das Fehlen einer naheliegenden Hervorhebung des Teiltextes 2 und im Rahmen des BEGRIFF-Modells erscheinen die zahlreichen Hervorhebungen im Teiltext 1 nicht sinnvoll motiviert.

Hinsichtlich der Integrierbarkeit der Textdaten können zwischen den Modellarten keine gravierenden Unterschiede festgestellt werden; beide Modelltypen weisen kaum integrierbare Textdaten auf. Die Ausdrücke 48-50 sind schwer in die AUFGABEN-Modelle integrierbar, der Teiltext 4 erscheint dagegen im Rahmen der MATHEMATISCHE(S)-ELEMENT(E)-Modelle als weitgehend überflüssig. Das BEGRIFF-Modell ist hinsichtlich der Integrierbarkeit das beste MATHEMATISCHES-ELEMENT-Modell, denn im Rahmen des SATZ- und des VERFAHREN-Modells sind neben dem Teiltext 4 weitere Teiltexte nur schwer integrierbar. Die AUFGABEN-Modelle sind hinsichtlich der Integrierbarkeit der Textdaten nicht schlechter ausgeprägt als das diesbezüglich beste MATHEMATISCHES-ELEMENT-Modell (BEGRIFF). Auch hinsichtlich der Passung des Textverlaufs zu den einzelnen naheliegenden Modellen sind keine gravierenden Unterschiede zwischen den Modellarten festzustellen; der Textverlauf erscheint mit Ausnahme des Teiltextes 4 als zu allen Modellen recht passend. Insgesamt sind damit die AUFGABEN-Modelle aufgrund ihrer relativen Vollständigkeit, aufgrund der in ihrer Gesamtheit wesentlich leichter zu vollziehenden Inferenzen sowie aufgrund der typographischen Passung eindeutig leichter konstruierbar als die naheliegenden MATHEMATISCHE(S)-ELEMENT(E)-Modelle.

Aus diesem Befund folgt, dass nur (!) diejenigen Schüler, die sich als Leseziel ‚verstehen wollen' setzen und dabei den Willen aufbringen, eine recht umfangreiche mentale Arbeit in die entsprechende Textverarbeitung bzw. Modellbildung zu investieren, die darüber hinaus über ein stark verfestigtes MATHEMATISCHES-ELEMENT-Schema sowie über ein verfestigtes, elaboriertes und der fachlichen Norm entsprechendes Vorwissen bezüglich der Brüche und Dezimalzahlen verfügen, zu einem qualitativ hochwertigen Lernergebnis gelangen können – also einem Lernergebnis, das mit einem naheliegenden MATHEMATISCHE(S)-ELEMENT(E)-Modell einhergeht. Es ist davon auszugehen, dass nur wenige Schüler diese notwendige Kombination an Voraussetzungen aufweisen.

Abschließend sei auf eine bemerkenswerte Beobachtung bezüglich der schwierigen Integrationsfähigkeit des Teiltextes 4 in eines der MATHEMATISCHE(S)-ELEMENT(E)-Modelle zurückgegriffen. Wie oben erläutert, erscheint es zunächst verwunderlich, dass im Text gesondert mitgeteilt wird, dass die ‚Umwandlungsrichtung egal ist'. Diese Verwunderung resultiert aus der Tatsache, dass der Inhalt dieser Mitteilung eine relativ leicht zu vollziehende Schlussfolgerung des SATZES ‚Dezimalzahlen und Brüche bezeichnen die gleichen Zahlen‘ darstellt, während der zentrale SATZ sowie die zahlreichen (im Rahmen der MATHEMATISCHE(S)-ELEMENT(E)-Modelle notwendigen) BEGRÜNDUNGEN im Lehrtext nicht explizit vorhanden sind. Auf der Suche nach einer Erklärung für diese Darstellungsweise drängt sich der Eindruck auf, dass der Autor möglicherweise selbst davon ausgeht, dass die zahlreichen im Rahmen eines MATHEMATISCHE(S)–ELEMENT(E)-Modells notwendigen Inferenzen von den Schülern nicht vollzogen werden können, so dass sie die impliziten Zusammenhänge und insbesondere den die einzelnen Teiltexte verbindenden SATZ ‚Dezimalzahlen und Brüche bezeichnen das Gleiche‘ nicht inferieren und daher nicht verstehen werden. Wenn man von diesem Unverständnis der Leserschaft ausgeht, wird die zentrale Aussage des Teiltextes 4 insofern schlüssig, als hier mit einem gesonderten Hinweis zur Bearbeitung von Problemen/Aufgaben ein Kompensationsversuch für ebendieses Unverständnis unternommen wird. Der Text signalisiert dem Schüler: ‚Falls du nicht alles verstanden hast, ist es nicht so schlimm, verfolge bei der Bearbeitung der Probleme/ Aufgaben einfach den folgenden Hinweis‘. Damit werden gleichzeitig die Inhalte der Teiltexte 2 und 3 abgewertet. Die kommunikative Absicht des Autors erscheint damit insgesamt zutiefst widersprüchlich. Einerseits erwartet man im Rahmen des MATHEMATISCHES-ELEMENT-Schemas von dem Lehrtext, dass er bei den Lesern Verständnis (der dargestellten Mathematik) anstrebt. Diese Intention wird teilweise bestätigt; so zeugt insbesondere die explizite Begründung eines Verfahrens (Ausdrücke 24-28) von diesem Bestreben. Andererseits wird jedoch im Teiltext 4 das Scheitern ebendieser Intention implizit vorweggenommen und das Unverständnis als das zu Erwartende akzeptiert und gebilligt. Mathematik wird letztlich als das (für viele Schüler) Nicht-Verstehbare einschließlich eines kompensatorischen Hinweises im Sinne der Aufgabenorientierung präsentiert – ein bemerkenswerter Befund.

6.4. Lehrtext 3: ‚Telefontarife‘

Auf die bisherige analytische Arbeit zurückblickend fällt auf, dass es bezüglich der Ausprägung zentraler lernrelevanter Merkmale große Übereinstimmungen zwischen dem untersuchten Lehrtext 2 und den zuvor analysierten Texten gibt. Die bislang analysierten Schulbuchtexte sind in absoluter Hinsicht schwer sinnstiftend ausdeutbar und das naheliegende reine AUFGABEN-Modell ist deutlich leichter als die naheliegenden MATHEMATISCHE(S)-ELEMENT(E)-Modelle konstruierbar. Dabei behandeln die bisher analysierten Schulbuchlehrtexte mit dem ‚Zusammenhang zwischen Dezimalzahlen und Brüchen‘ den gleichen Lernstoff. Dieser zeichnet sich u.a. dadurch aus, dass die Objekte, auf die Bezug genommen wird, in früheren Lehrtexten bereits eingeführt wurden. Dies wiederum könnte dazu führen, dass das entsprechende themenbezogene Schülerwissen um das von den mathematischen Symbolen bzw. Begriffen Bezeichnete von den Autoren vorausgesetzt und damit als nicht (mehr) nennenswert erscheint, wodurch eine Lehrtextausdeutung im Rahmen eines MATHEMATISCHE(S)-ELEMENT(E)-Modells erschwert wird. Des Weiteren ist mit den zahlreichen formalen Zusammenhängen zwischen Dezimalzahlen und Brüchen ein Spezifikum des Lernstoffs gegeben, das dazu führen kann, dass die entsprechenden Lehrtexte sich leicht(er) im Rahmen eines AUFGABEN-Modells ausdeuten lassen.

Um zu überprüfen, inwiefern die ermittelten Analyseergebnisse in Bezug auf mathematische Schulbuchlehrtexte lernstoffunabhängig sind, wird im Folgenden ein Lehrtext analysiert, der einen neuen Begriff bzw. ein neues Objekt einführt, so dass eine Thematisierung dessen, was mathematische Symbole bzw. Begriffe bezeichnen, nahezu unvermeidlich ist. Außerdem wird mit der ‚Einführung der linearen Funktionen' nunmehr ein Lernstoff gewählt, der viele nicht formale Aspekte aufweist.

Der Lehrtext stammt ebenfalls aus einem ‚Fokus'-Schulbuch des Cornelsen Verlags, allerdings aus dem Band für die 7. Klasse (vgl. Esper et al. 2008). Formal ist dieses Schulbuch genauso aufgebaut wie im Rahmen der 6. Klasse: Jedes obligatorische Unterkapitel fängt mit mehreren Arbeitsaufträgen an, gefolgt von einem Lehrtext, in dem auf einen der Arbeitsaufträge Bezug genommen wird (vgl. die entsprechenden Ausführungen in Kap. 6.3). Die Erläuterungen der Autoren bezüglich der Lehrtextfunktion, die im Klappentext des Schulbuchs zu finden sind, sind die gleichen wie in der Klasse 6: Es wird jeweils ein Auftrag sorgfältig ausgeführt; dabei sollen die Schüler die wichtigen Begriffe und Zusammenhänge kennenlernen und sich an die mathematischen Texte allmählich gewöhnen (vgl. Esper et al. 2008, S. Klapptext). Der hier zu analysierende Lehrtext stammt aus dem Kapitel ‚Lineare Funktionen' und bezieht sich auf den zuvor gestellten Auftrag ‚Telefontarife'. Das übergreifende Kapitel ‚Mit Funktionen arbeiten' ist das 6. Kapitel des Schulbuchs; es weist folgende obligatorische Unterkapitel auf:

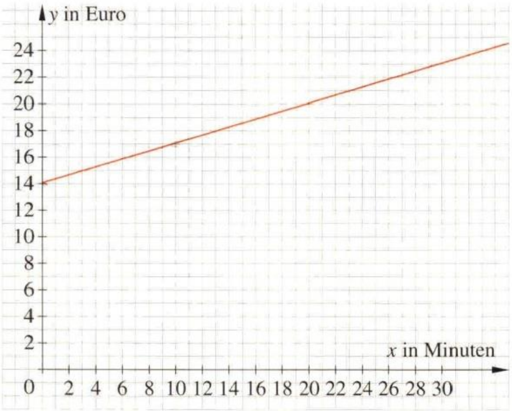
1. Zuordnungen und Funktionen
2. Steigungen berechnen
3. Lineare Funktionen

Im Lehrtext werden teilweise Inhalte des Kapitels 1.1 ‚Proportionalität' aufgegriffen. Die anderen vorhergehenden Kapitel sind bezüglich der Lehrpotentialanalyse des vorliegenden Lehrtextes von untergeordneter Bedeutung. Der Lehrtext mit entsprechendem Arbeitsauftrag ist in Abbildung 13 dargestellt, wobei die sprachlichen Einheiten bereits markiert und die zentralen Referenzträger unterstrichen wurden.

6.3 Lineare Funktionen

1 Telefontarife

Die Grundgebühr beträgt bei Tarif *Active* 14 €. Die Firma rechnet sekundengenau ab. Lea stellt die entstehenden Kosten grafisch dar und wählt als Zeiteinheit Minuten, um nicht so große Zahlen zu erhalten.
Untersucht das Diagramm in Gruppenarbeit und ermittelt die Grundgebühr und den Minutentarif.
Bestimmt den Funktionsterm, mittels dessen der Abrechnungscomputer die Rechnungen erstellt.
Um noch mehr Kunden zu gewinnen, soll der Tarif verändert werden. Erarbeitet in einer Teilgruppe die Veränderung im Diagramm und im Funktionsterm, wenn die Gründgebühr gesenkt wird und in einer anderen Teilgruppe, wenn der Sekundenpreis gesenkt wird. Stellt euch die Ergebnisse gegenseitig vor.



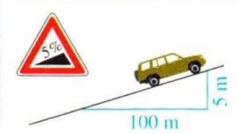
T0

zum Auftrag ...

1 Telefontarife

T1.1

[5] *Erinnere dich*

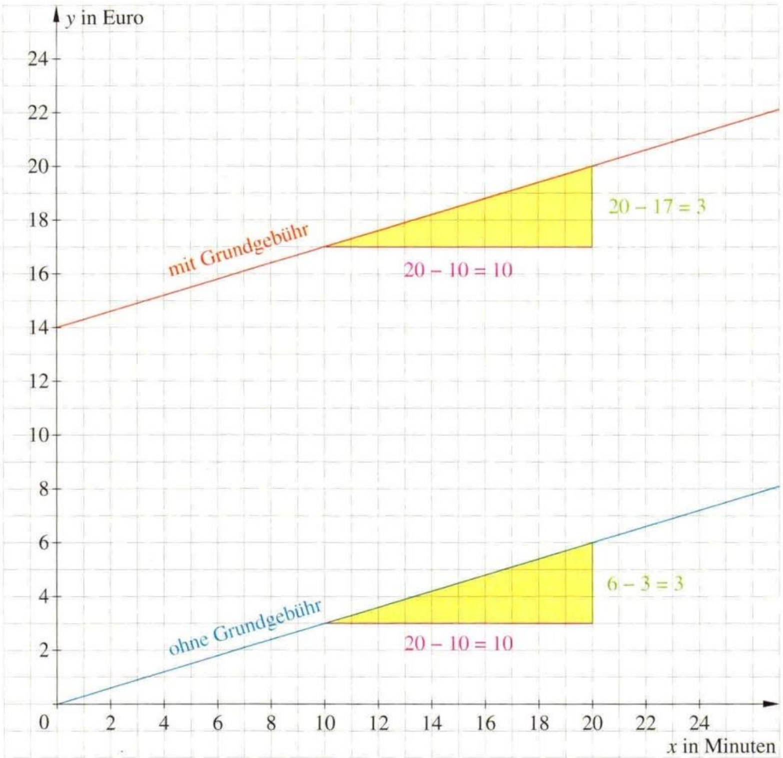


[1] Der Graph der Telefongebühren ist eine Gerade, welche die y-Achse im Wert 14 schneidet.[2] Du kannst also in diesem Fall die Grundgebühren ablesen, indem du den y-Wert für $x = 0$ betrachtest.
[3] Mittels Steigungsdreieck kannst du erkennen, dass die Kosten pro 10 Minuten um 3 €, also pro Minute um 0,30 € steigen.[4] Der Minutentarif beträgt demnach 0,30 €.

T1.2

[6] Werden auch die Kosten ohne Grundgebühr dargestellt, so ergibt sich:

[7]



T1.3

[8] Die beiden Geraden sind parallel.[9] Durch die Grundgebühr wird der Graph um 14 **parallel** zur y-Achse **verschoben**.
[10] Der Tarif ohne Grundgebühr stellt also eine proportionale Funktion dar, da sein Graph eine Gerade durch den Nullpunkt ist.
[11] Im Gegensatz dazu verläuft der Graph mit Grundgebühr durch den Punkt $(0|14)$.
[12] Da die beiden Geraden parallel zueinander sind, ist die Steigung gleich.

T1.4

[17] BEACHTE
Der Wert b lässt sich am einfachsten ermitteln, indem du betrachtest, wo der Graph die y-Achse schneidet. Deshalb wird b auch häufig als y-Achsenabschnitt bezeichnet.

[13] **Lineare Funktionen** werden durch **Geraden** dargestellt.[14] Lineare Funktionen, deren Graphen durch den Ursprung verlaufen, kennst du bereits: Es sind die proportionalen Funktionen.
[15] Der Graph einer beliebigen linearen Funktion entsteht durch **parallele Verschiebung** des Graphen der zugehörigen proportionalen Funktion um einen konstanten Wert b entlang der y-Achse.
[16] Beide Funktionen haben dieselbe Steigung m.

[18] Die Steigung 0,30 wurde im Beispiel ja bereits per Steigungsdreieck bestimmt. [19] Also hat die zum Tarif *Active* gehörende proportionale Funktion die Abbildungsvorschrift $f: x \mapsto 0{,}30x$. [20] Um die tatsächliche Abbildungsvorschrift der Tarif-Funktion t zu bestimmen, muss nun in dem Funktionsterm noch die Verschiebung um 14 nach oben auftauchen: $t: x \mapsto 0{,}3x + 14$. **T1.5**

[21] **Die Abbildungsvorschrift einer linearen Funktion ergibt sich aus der Steigung m und dem y-Achsenabschnitt b:**
$f: x \mapsto mx + b$
[22] **Bei einer proportionalen Funktion ist $b = 0$, bei einer konstanten ist $m = 0$.** **T1.6**

[23] Wie kommst du von der Abbildungsvorschrift zum Graph?
[24] Du kannst zwei Punkte anhand der Abbildungsvorschrift bestimmen oder mit dem Steigungsdreieck arbeiten.
[25] Wenn du dir die Methode mit dem Steigungsdreieck angewöhnst, bist du bald in der Lage, dir den Graphen einer linearen Funktion vorzustellen, wenn du ihre Zuordnungsvorschrift siehst. **T2.1**

Beispiele

T2.2

[26] Verfahren 1: *Punkte bestimmen*

$g: x \mapsto -2x - 1$

1. Wähle zwei x-Werte: z. B. $x = 1$ und $x = -2$
2. Ermittle die zugehörigen y-Werte.
   $g(1) = -2 \cdot 1 - 1 = -2 - 1 = -3$
   $g(-2) = -2 \cdot (-2) - 1 = 4 - 1 = 3$
3. Trage die beiden Punkte in das Koordinatensystem ein: $A(1|-3)$ und $B(-2|3)$
4. Zeichne die Verbindungsgerade: AB

[27] Verfahren 2: *Steigungsdreieck*

$f: x \mapsto \frac{1}{2}x + 3$

1. Beginne im Punkt $(0|b)$ das Steigungsdreieck zu zeichnen: von $P(0|3)$ um 1 nach rechts und um $m = \frac{1}{2}$ nach oben, du erhältst $Q(1|3{,}5)$
2. Zeichne die zugehörige Gerade: PQ

[28] BEACHTE
Du kannst umgekehrt auch die lineare Funktion bestimmen, die durch zwei Punkte, z. B. $C(-4|-3)$ und $D(2|0)$ verläuft.
1. Steigung bestimmen:
$m = \frac{-1-0}{0-2} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}$
2. Achsenabschnitt bestimmen:
Koordinaten von C oder D und Steigung $m = \frac{1}{2}$ in die allgemeine Gleichung $h(x) = mx + b$ einsetzen.
$0 = h(2) = \frac{1}{2} \cdot 2 + b$
$0 = 1 + b$
also $b = -1$
und $h(x) = \frac{1}{2}x - 1$.

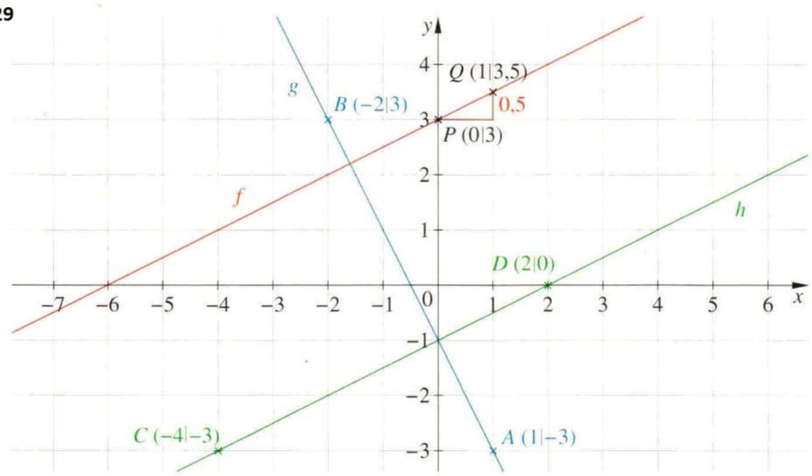
[29]


Abbildung 13: Lehrtext ‚Telefontarife' und dem dazugehörigen Auftrag im Schulbuch ‚Fokus Mathematik Klasse 7' (Esper et al. 2008, S. 167–169)

I. Skizze des relevanten fachlichen Vorwissens des Modellschülers

Der zentrale Referenzträger des Lehrtextes ist ‚Funktion'. Bezüglich des bei unserem Modellschüler aus vorhergehenden Schulbuchinhalten vorhandenen Vorwissens zu

Funktionen findet sich im Lehrtext des Kapitels 1.1 die Einführung der Proportionalität als eine spezifische Zuordnung (vgl. den dazugehörigen Lehrtext ‚Messbecher' im Anhang Abb. 6). Dazu wird eine Situation bzw. eine realitätsbezogene Zuordnung präsentiert: Der Flüssigkeitshöhe in einem Messbecher wird das Flüssigkeitsvolumen zugeordnet. Die Spezifika dieser Zuordnung werden mitgeteilt: „zur doppelten Füllhöhe [gehört] das doppelte Volumen der Flüssigkeit. Der dreifachen Füllhöhe ist das dreifache Volumen der Flüssigkeit zugeordnet". Anschließend wird verallgemeinernd festgelegt: „Zwei Größen A und B sind zueinander proportional, wenn zum doppelten (dreifachen, vierfachen, …) von A das doppelte (dreifache, vierfache, …) von B gehört". Nachfolgend wird im Lehrtext eine Wertetabelle der Volumen-Füllhöhe-Zuordnung angegeben und das Spezifikum der Werte-Paare – sie sind ‚quotientengleich' – mitgeteilt. Schließlich wird der Graph der Volumen-Füllhöhe-Zuordnung gezeigt und verallgemeinernd festgehalten, dass „der Graph einer proportionalen Zuordnung […] eine Halbgerade [ist], die vom Ursprung des Koordinatensystems ausgeht" (Esper et al. 2008, S. 10f.).

Der Begriff ‚Funktion' wird im Lehrtext des Kapitels 6.1 ‚Zuordnungen und Funktionen' als Ausdruck für eindeutige Zuordnungen eingeführt (vgl. den dazugehörigen Lehrtext ‚Grafische Fahrpläne' im Anhang Abb. 7). Dazu wird zuerst eine Zuordnung zwischen ‚realen' Größen vorgestellt: Der Uhrzeit wird die zurückgelegte Entfernung eines Zugs, die in einem Fahrplan verankert ist, zugeordnet. Diese Zuordnung wird mit der umgekehrten (nicht eindeutigen) Zuordnung (Entfernung->Zeit) kontrastiert, um den Unterschied zwischen einer eindeutigen und einer nicht eindeutigen Zuordnung zu veranschaulichen. Anschließend erscheint (recht abrupt) eine abstrahierte Begriffsbestimmung: „Eine Zuordnung, bei der jedem x-Wert **genau ein** y-Wert zugeordnet wird, heißt **Funktion**" (Esper et al. 2008, S. 151). Es folgt eine Vorstellung unterschiedlicher Darstellungsarten einer Funktion. Dies geschieht ausgehend von einer ‚realen' Situation zweier Freunde, die eine Firma gründen und die Vereinbarung treffen, dass der Gewinn/Verlust der Firma unter ihnen gleich aufgeteilt werden soll. Dieser Situation wohnt eine Zuordnung inne, die allerdings im Lehrtext explizit nicht genannt wird; der Firmenbilanz wird die jeweilige persönliche Bilanz zugeordnet, indem die Firmenbilanz halbiert wird.[129] Nachfolgend wird die abstrahierte Zuordnung ‚Halbierung', deren Werte keine ‚realen' Größen, sondern verallgemeinerte x- und y-Werte sind, auf vier unterschiedlichen Arten dargestellt: als Text, symbolisch, als Tabelle und als Graph. Bei der symbolischen Darstellung werden zwei Arten unterschieden: Funktionsgleichung und Abbildungsvorschrift.

Im darauffolgenden Lehrtext, der zum Kapitel ‚Steigungen berechnen' gehört, wird der Begriff ‚Steigung einer Geraden' behandelt, indem hergeleitet wird, dass man die Steigung anhand des Quotienten ‚$\frac{y-Wertunterschied}{x-Wertunterschied}$' ermittelt. Am Ende des Lehrtextes werden die im ersten Kapitel des Schulbuchs eingeführten proportionalen Zuordnungen erneut aufgegriffen und es wird mitgeteilt, dass Geraden durch den Ursprung proportionale Zuordnungen

[129] Der Lehrtext weist an dieser Stelle eine deutliche semantische Lücke zwischen der Situation und der dargestellten abstrahierten Funktion ‚Halbierung' auf.

darstellen und dass ihre ‚Zuordnungsvorschrift'[130] $f: x \to m \cdot x$ lautet, wobei m die Steigung dieser Geraden ist (vgl. (Esper et al. 2008, S. 161).

Ausgehend von diesen Schulbuchinhalten wird für die bevorstehende Analyse festgelegt, dass unser Modellschüler über ein allgemeines (noch nicht verfestigtes) FUNKTION-Schema verfügt, dessen zentrale Leerstellen mit entsprechenden Belegungen in der folgenden Abbildung dargestellt sind.

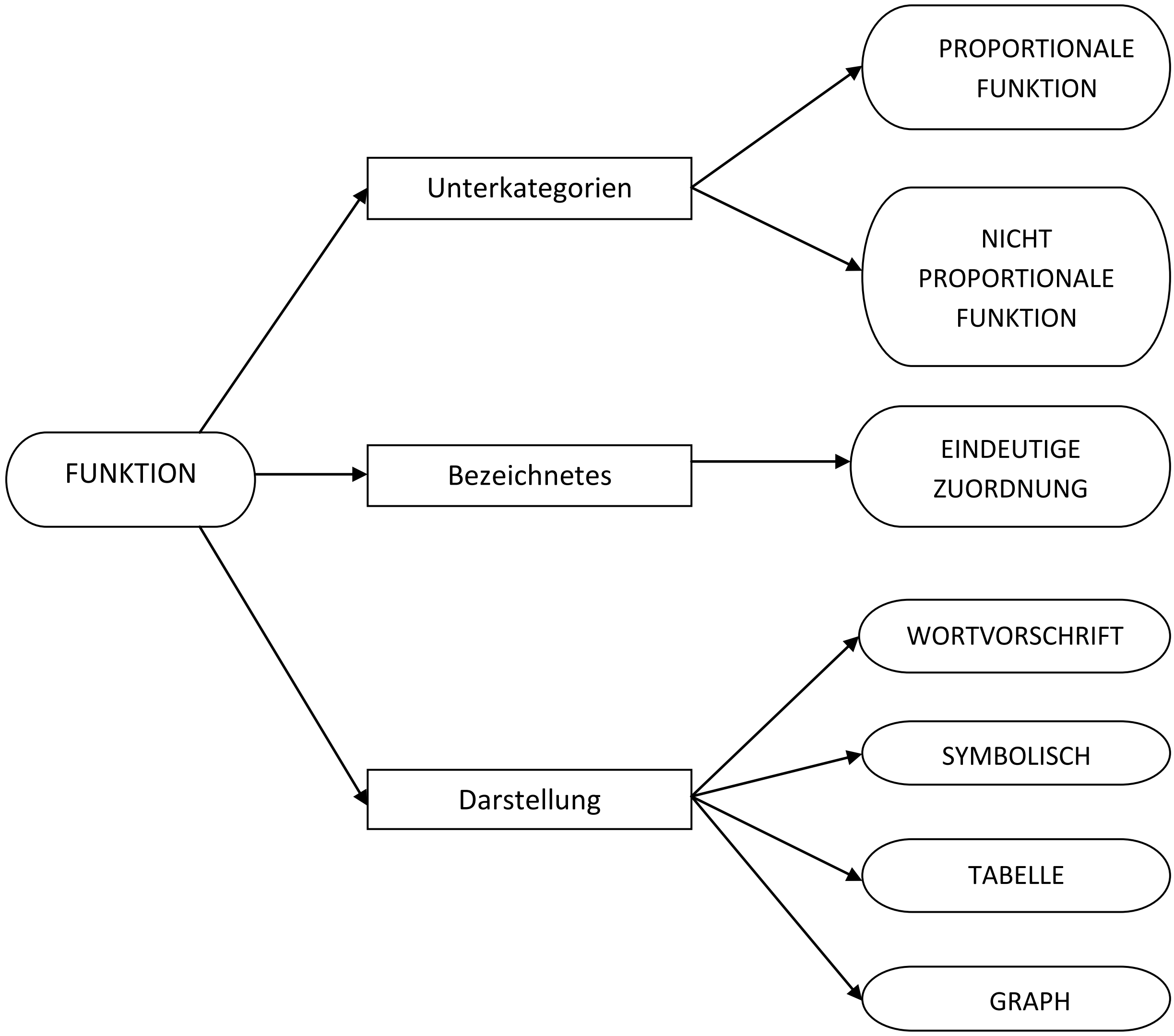


Abbildung 14: FUNKTION-Schema des Modellschülers im Rahmen des Lehrtextes ‚Telefontarife'

Eine FUNKTION bezeichnet eine EINDEUTIGE ZUORDNUNG, die auf unterschiedlichen Abstraktionsebenen vorliegen kann; so gibt es neben (konkreten) Zuordnungen zwischen ‚realen' Größen abstrahierte Zuordnungen zwischen zwei Zahlenmengen (den x- und y-Werten). Des Weiteren weist das FUNKTION-Schema mehrere Belegungen der Darstellung-

[130] An dieser Stelle wird im Schulbuch mit ‚Zuordnungsvorschrift' eine neue Bezeichnung für eine symbolische Darstellungsform einer Funktion gebraucht, die von der eingeführten Bezeichnung ‚Abbildungsvorschrift' abweicht. Die beiden Bezeichnungen werden hier offensichtlich synonym gebraucht.

Leerstelle auf, wobei die SYMBOLISCHE DARSTELLUNG nochmals in zwei UNTERKATEGORIEN eingeteilt wird*:* FUNKTIONSGLEICHUNG und ZUORDNUNGSVORSCHRIFT. Die PROPORTIONALE FUNKTION ist als eine UNTERKATEGORIE im übergeordneten FUNKTION-Schema eingebettet, d.h. sie weist die gleichen Leerstellen auf, die allerdings spezifisch belegt sind. So bezeichnet eine PROPORTIONALE FUNKTION auf einer abstrakten Ebene eine Zuordnung, bei der stets zum doppelten (dreifachen, vierfachen,…) eines x-Wertes das doppelte (dreifache, vierfache,…) eines y-Wertes zugeordnet wird. Auf einer anschaulicheren Ebene bezeichnet sie Zuordnungen zwischen ‚realen' Größen, die die genannte Bedingung erfüllen, wie z.B. die Zuordnung des Flüssigkeitsvolumens in einem Becher zur Flüssigkeitshöhe. Die einzelnen DARSTELLUNGEN einer PROPORTIONALEN FUNKTION weisen ebenfalls Spezifika auf: So lautet die FUNKTIONSGLEICHUNG ‚$f(x) = m \cdot x$'; die (WERTE-)TABELLE besteht aus ‚quotientengleichen Paaren' und der GRAPH ist ‚eine Gerade durch den Ursprung'. Da diese kennzeichnenden Merkmale unterschiedlicher Darstellungen einer proportionalen Funktion im entsprechenden Lehrtext ‚hergeleitet' wurden, weiß unser Modellschüler, dass diese Merkmale begründbar sind, d.h. sie sind als SÄTZE ‚abgespeichert' und weisen jeweils eine (belegte) Grund-für-die-Geltung-Leerstelle auf. Da die einzelnen BEGRÜNDUNGEN im Rahmen des zu analysierenden Lehrtextes von untergeordneter Bedeutung sind, werden sie nicht weiter präzisiert. Entscheidend ist, dass eine PROPORTIONALE FUNKTION und damit eine FUNKTIONEN(-UNTER-)KATEGORIE sich durch spezifische MERKMALE IHRER DARSTELLUNG auszeichnet und dass diese MERKMALE jeweils begründbar sind. Des Weiteren ist dem Modellschüler bekannt, dass der Faktor m in der Funktionsgleichung bzw. in der Zuordnungsvorschrift der Geradensteigung entspricht. Auf einer allgemeinen Ebene weiß er also, dass zu einer FUNKTIONEN(-UNTER-)KATEGORIE (begründbare) SÄTZE gehören, die ZUSAMMENHÄNGE zwischen unterschiedlichen Darstellungsformen, insbesondere zwischen FUNKTIONSGLEICHUNG und dem GRAPHEN beinhalten.

II. *Beschreibung formaler sprachlicher Merkmale des Lehrtextes*

Der Lehrtext ist – ähnlich wie die vorherigen analysierten Texte – typographisch recht komplex; er weist drei Hervorhebungen, zwei graphische Darstellungen sowie drei Randnotizen auf. Die Nummerierung der sprachlichen Einheiten orientiert sich wiederum an der Syntax; jeder vollständige natursprachliche Satz des Haupttextes ist mit einer Nummer versehen. Eine Ausnahme bildet der letzte ‚Kasten', in dem ‚Verfahren' vorgestellt werden: Jedes ‚Verfahren' – also jeder ‚Halbkasten' – erhält lediglich eine Nummer (Ausdrücke 26 und 27). Die Grafiken, sowie die Randnotizen sind ebenfalls mit einer Nummer, die sich in die Sequenz des Haupttextes einfügt, gekennzeichnet (Ausdrücke 5, 7, 17, 29 und 28).

Der Arbeitsauftrag wird entsprechend des Vorgehens in Kapitel 6.2 als Teiltext 0 gekennzeichnet. Der Lehrtext im engen Sinne wird in zwei Teiltexte erster Ordnung gegliedert. Dies resultiert daher, dass ab dem Ausdruck 23 ‚Verfahren' als zentrale Referenzträger auftauchen (vgl. die in der Abb. 20 unterstrichenen zentralen Referenzträger der einzelnen Teiltexte). Der Teiltext 2.1 (Ausdrücke 23-25) hat einen einleitenden Charakter, während im Teiltext 2.2 (Ausdrücke 26-29) die einzelnen Verfahren mitgeteilt werden. Der erste Teiltext erster Ordnung (Ausdrücke 1-22) bezieht sich auf der sprachlichen Ebene nicht auf ‚Verfahren'. Aufgrund seiner unterschiedlichen sprachlichen Bedeutungen ist er in weitere Subtexte eingeteilt. So beinhaltet der Teiltext 1.1 (Ausdrücke 1-5) Aussagen über die Grundgebühr sowie den Minutentarif des im Arbeitsauftrag mitgeteilten Telefontarifs. Der darauffolgende Teiltext 1.2 (Ausdrücke 6-7) zeigt die graphische Darstellung der Telefonkosten mit und ohne Grundgebühr. Der natursprachliche Teiltext 1.3 (Ausdrücke 8-12) bezieht sich auf die ‚beiden Geraden', also auf die graphische Darstellung der Telefonkosten. Daraufhin thematisiert der Teiltext 1.4 (Ausdrücke 13-17) die graphische Darstellung beliebiger linearer Funktionen. Der Teiltext 1.5 (Ausdrücke 18-20) bezieht sich wiederum auf die Telefontarif-Funktion, hier im Speziellen auf die ‚Abbildungsvorschrift der Tarif-Funktion'. Abschließend wird im Teiltext 1.6 (Ausdrücke 21-22) die Abbildungsvorschrift einer beliebigen linearen Funktion aufgegriffen.

Die einzelnen Teiltexte des Lehrtextes beziehen sich damit auf die einzelnen Aspekte der konkreten Telefontarife-Zuordnung und einer allgemeinen linearen Funktion. Dabei ist ein wiederkehrender Wechsel zwischen Konkretem und Allgemeinem zu konstatieren; die ersten drei Teiltexte (T1.1.-1.3) beziehen sich recht eindeutig auf die Telefontarife-Zuordnung, der nachfolgende Teiltext 1.4. hat eine ‚beliebige lineare Funktionen' zum Gegenstand, im Teiltext 1.5 wird erneut die Telefontarif-Zuordnung aufgegriffen, während die darauffolgenden Teiltexte wiederum einen verallgemeinernden Charakter aufweisen. In dieser Hinsicht wirkt die Textoberfläche recht diffus, so dass sich die Frage stellt, inwiefern sich diese Wechsel der Bezugsobjekte in ein intaktes zusammenhängendes Ganzes einfügen können.

III. *Beschreibung naheliegender Modelle und Diskussion ihrer jeweiligen Bildungsschwierigkeit*

Naheliegende MATHEMATISCHE(S)-ELEMENT(E)-Modelle

Aufgrund der Überschrift und der Tatsache, dass die ersten beiden Teiltexte (T1.1-1.2) sich eindeutig auf den gestellten Arbeitsauftrag ‚Telefontarife' (T0) beziehen, kann man annehmen, dass im (Gesamt-)Lehrtext der Arbeitsauftrag ‚sorgfältig ausgeführt' wird. Der Arbeitsauftrag wird von unserem Modellschüler im Rahmen des MATHEMATISCHES-ELEMENT-Schemas folgerichtig als eine PROBLEMSTELLUNG betrachtet, die aus vier TEIL-PROBLEMSTELLUNGEN besteht:

- PROBLEMSTELLUNG 1 ‚Ermittlung der Grundgebühr und des Minutentarifs anhand des gezeichneten Graphen/Diagramms',
- PROBLEMSTELLUNG 2 ‚Ermittlung des Tarif-Funktionsterms (anhand des Diagramms)',
- PROBLEMSTELLUNG 3 ‚Auswirkungen der Senkung der Grundgebühr auf das Diagramm und auf den Funktionsterm',
- PROBLEMSTELLUNG 4 ‚Auswirkungen der Senkung des Minutentarifs auf das Diagramm und auf den Funktionsterm'.

Ein dieser Erwartung entsprechendes, von den Teiltexten 0-1 nahegelegtes TELEFONTARIFE-PROBLEM-Modell ist in der folgenden Struktur veranschaulicht.

PROBLEM ‚Telefontarife' (T0-1)

[1] TEILPROBLEM 1 ‚Ermittlung der Grundgebühr und des Minutentarifs anhand des Diagramms' (T0-1.1)

[2] TEILPROBLEM 3 ‚Auswirkungen der Senkung der Grundgebühr auf das Diagramm und auf den Funktionsterm' (T0, T1.2-1.3 und fehlender Teiltext)

[2.1] ERSTER ASPEKT DES TEILPROBLEMS 3 ‚Auswirkungen der Senkung der Grundgebühr auf das Diagramm' (T0, 1.2-1.3)

[2.2] ZWEITER ASPEKT DES TEILPROBLEMS 3 ‚Auswirkungen der Senkung der Grundgebühr auf den Funktionsterm' (fehlender Teiltext)

[3] TEILPROBLEM 2 ‚Ermittlung des Tarif-Funktionsterms anhand des Diagramms' (T0, 1.3, 1.5)

[4] TEILPROBLEM 4 ‚Auswirkungen der Senkung des Minutentarifs auf das Diagramm und auf den Funktionsterm ' (fehlender Teiltext)

Struktur 18: Von den Teiltexten 0-1 des Lehrtextes 'Telefontarife' nahegelegtes TELEFONTARIFE-PROBLEM-Modell

Das Modell passt relativ gut zum ersten Teiltext des Lehrtextes, denn einige der im Auftrag gestellten Fragen werden anhand des Lehrtextes beantwortet, so dass einige aktivierte Leerstellen recht leicht und vollständig anhand der Textdaten belegt werden können. Dies betrifft insbesondere die Leerstellen [1] und [2.1]. Die Konstruktion eines vollständigen und der Teiltexte 1.3 und 1.5 integrierenden Teilmodells [3] erfordert demgegenüber – wie später noch erläutert wird – eine erhöhte mentale Anstrengung. Trotz der (vermeintlichen) Passung erweist sich das TELEFONTARIFE-PROBLEM-Modell als stark sinnbeeinträchtigt. So werden im Lehrtext nicht alle im Auftrag gestellten PROBLEMSTELLUNGEN bearbeitet. Das heißt, es fehlen (explizite) Textdaten, die als BEARBEITUNG der PROBLEMSTELLUNG ‚Welche Auswirkungen hat eine Senkung der Grundgebühr auf den Funktionsterm?' (vgl. [2.2]) und der PROBLEMSTELLUNG ‚Welche Auswirkungen hat eine Senkung des Minutentarifs auf das Diagramm und auf den Funktionsterm?' (vgl. [4]) interpretierbar sind. Diese aktivierten Leerstellen müssen von unserem Modellschüler selbstständig schlussfolgernd inferiert werden. Die zweite zentrale Schwierigkeit des Modells betrifft die Nicht-Integrierbarkeit vieler Textdaten. So sind die Teiltexte 1.4 und 1.6, in denen beliebige von Geraden darstellbare Funktionen thematisiert werden, in das TELEFONTARIFE-PROBLEM-Modell schwer integrierbar, denn im Auftrag war nicht nach einer allgemeinen Abbildungsvorschrift beliebiger als Geraden darstellbarer Funktionen gefragt. Und schließlich ist der gesamte Teiltext 2 in das TELEFONTARIFE-PROBLEM-Modell schwer integrierbar, denn der Auftrag enthält keine Frage nach der Ermittlung eines Graphen bzw. einer Geraden ausgehend von einer beliebigen (linearen) Abbildungsvorschrift. Eine Möglichkeit, die ‚überflüssigen' Teiltexte sinnvoll in das konstruierte TELEFONTARIFE-PROBLEM-Modell zu integrieren, besteht darin, das gestellte PROBLEM zu validieren. So kann man annehmen, dass im (Gesamt-)Lehrtext primär das abstrahierte TEILPROBLEM 2, also die ‚Ermittlung der Abbildungsvorschrift anhand einer (beliebigen) gegebenen Geraden‘, bearbeitet wird. Die entsprechende Text-Modell-Struktur der ersten Zerlegungsstufe ist nachfolgend skizziert.

PROBLEM ‚Ermittlung der Abbildungsvorschrift anhand einer gegebenen Geraden‘ (T0-2)

[1] KONKRETES PROBLEM ‚Ermittlung der Tarif-Abbildungsvorschrift anhand des Tarif-Diagramms‘ (T1.1-1.3, 1.5)

[2] VERALLGEMEINERTES PROBLEM (T1.4, 1.6, Ausdruck 28)

[3] UMKEHRPROBLEM ‚Ermittlung der Geraden anhand einer gegebenen Abbildungsvorschrift‘ (T2)

Struktur 19: Vom Gesamtlehrtext ‚Telefontarife' nahegelegtes PROBLEM-Modell

Die Ermittlung der Tarif-Abbildungsvorschrift anhand des Diagramms, die die Teiltexte 1.1-1.3 und 1.5 andeuten, erscheint als Konkretisierung des verallgemeinerten Problems (vgl. [1] und [2]). Die Teiltexte 1.4 und 1.6, die sich auf beliebige als Geraden darstellbare Funktionen beziehen, sind als BEARBEITUNG DES VERALLGEMEINERTEN PROBLEMS ausdeutbar (vgl. [2]). Aber auch der Ausdruck 28 (die Randnotiz) fügt sich in dieses zweite Teilmodell ein. Der Teiltext 2 (ohne Randnotiz) lässt sich als UMKEHRPROBLEM, also als ein benachbartes PROBLEM intakt ausdeuten, wobei dieses UMKEHRPROBLEM im Rahmen des Gesamtmodells eine lediglich ergänzende und damit untergeordnete Rolle spielt. Das Gesamtmodell integriert zwar alle Teiltexte des Gesamttextes, es ist jedoch stark sinnbeeinträchtigt und damit schwer konstruierbar. Im Folgenden werden die zentralen Schwierigkeiten skizziert.

Die übergreifende verallgemeinerte PROBLEMSTELLUNG ‚Ermittlung der Abbildungsvorschrift anhand einer (beliebigen) Geraden‘ wird weder im Arbeitsauftrag noch im Lehrtext explizit mitgeteilt und muss daher vom Modellschüler selbstständig inferiert werden. Es ist anzunehmen, dass diese Inferenz auch aufgrund der irreführenden Überschrift ‚Telefontarife‘ nicht leicht zu vollziehen ist. Der stärkste Hinweis darauf, dass im Lehrtext die ‚Ermittlung der Abbildungsvorschrift anhand einer beliebigen Geraden‘ bearbeitet wird, findet sich im Ausdruck 23: Die Frage ‚Wie kommst du von der Abbildungsvorschrift zum Graph?‘, die auf der Textoberfläche die Teiltexte 1 und 2 verbindet, suggeriert, dass im ersten Teiltext das umgekehrte Problem, also die Frage: ‚Wie kommst du vom Graphen zur Abbildungsvorschrift?‘ behandelt wurde. Hier erst wird von unserem Modellschüler die verallgemeinerte PROBLEMSTELLUNG (endgültig) konstruiert und erst an dieser Stelle können die einzelnen bis dahin gebildeten (vagen) (Teil-)Modelle als BEARBEITUNG der (verallgemeinerten) PROBLEMSTELLUNG rückwirkend reinterpretiert und zusammengefügt werden.

Des Weiteren entstehen Sinnbeeinträchtigungen bezüglich der Verbindung zwischen dem Lehrtext und dem formulierten Auftrag. Während das im Auftrag gestellte TEILPROBLEM 2 ‚Ermittlung der Abbildungsvorschrift anhand des Tarif-Diagramms‘ als Konkretisierung des im Lehrtext vorgestellten PROBLEMS betrachtet werden kann, erscheinen die anderen im Auftrag gestellten TEILPROBLEME als weitgehend überflüssig. Andererseits wird im Lehrtext ein TEILPROBLEM (UMKEHRPROBLEM) behandelt, das im Auftrag überhaupt nicht enthalten ist. Damit entstehen im Rahmen des PROBLEM-Modells folgende Fragen: Warum wird nur eines und warum gerade dieses der vier im Auftrag gestellten Probleme verallgemeinert und im Lehrtext bearbeitet? Warum wird im Lehrtext ein Problem bearbeitet, das im Auftrag weder in einer konkretisierten noch in einer verallgemeinerten Form gestellt wurde? Darüber hinaus ist die Sinnhaftigkeit der PROBLEMSTELLUNG nicht zugänglich: Warum sollte man anhand einer Darstellungsform (von etwas größtenteils Unbekanntem) eine andere Darstellungsform ableiten? In Zusammenfassung dieser Teilfragen stellt sich also übergreifend recht dringend die Frage nach dem Motiv der Problembehandlung, die vom Modellschüler kaum selbstständig beantwortet werden kann.

Im Lehrtext werden sowohl der Tarif-Funktionsterm (Ausdruck 20) als auch die verallgemeinerte lineare Abbildungsvorschrift (Ausdruck 21) mitgeteilt. Damit sind die ERGEBNISSE des konkreten und des verallgemeinerten PROBLEMS (Ausdruck 21) leicht konstruierbar. Allerdings entsteht in diesem Zusammenhang die Frage, *wie* man zu diesen ERGEBNISSEN gelangt; es wird also die Bearbeitungsschritte-Leerstelle auf der konkreten und der allgemeinen Ebene aktiviert. Eine vollständige Belegung dieser Leerstelle auf der allgemeinen Ebene kann wie folgt zusammenfassend angegeben werden: ‚Man muss die Steigung der gegebenen Geraden ablesen, dies ist der Faktor vor dem x in der Abbildungsvorschrift. Außerdem muss man die Schnittstelle der Geraden mit der y-Achse ablesen, dies ist der zweite Summand in der Abbildungsvorschrift'. Die Konstruktion der konkreten und der verallgemeinerten BEARBEITUNGSSCHRITTE ist anhand der Textdaten schwer. Dies resultiert teilweise aus der zwischen konkreter und verallgemeinerter Ebene changierenden Sequenzierung des Lehrtextes. So müssen die BEARBEITUNGSSCHRITTE des konkreten PROBLEMS anhand der in der Sequenz des Lehrtextes weit auseinander liegender Teiltexte 1.1-1.2 und 1.5 konstruiert werden. Die textbasierten Werte der verallgemeinerten BEARBEITUNGSSCHRITTE sind den im Textverlauf ebenfalls unterbrochenen Teiltexten 1.4 und 1.6 zu entnehmen. Die verallgemeinerten BEARBEITUNGSSCHRITTE werden dabei im Lehrtext nicht explizit genannt. Sie müssen vom Modellschüler größtenteils selbstständig mit Hilfe des Teiltextes 1.6 inferiert werden, was eine recht hohe kognitive Anforderung darstellt. Zusätzlich verwundert in Anbetracht der Tatsache, dass im Teiltext 2.2 die BEARBEITUNGSSCHRITTE des UMKEHRPROBLEMS explizit genannt werden, der Umstand, dass dies im Rahmen des primären PROBLEMS ‚Vom Graphen zur Abbildungsvorschrift' im Teiltext 1 nicht geschieht.

Ein PROBLEM-Modell enthält im Allgemeinen nicht nur die Frage/Leerstelle, *wie* eine Problemstellung zu bearbeiten ist, sondern auch die Frage/Leerstelle, *warum* das Probleme gerade so bearbeitet werden muss/darf. Bezüglich des vom Lehrtext nahegelegten PROBLEM-Modells heißt das, dass in jedem der drei Teilmodelle erster Ordnung (vgl. [1], [2] und [3]) die Grund-für-die-Geltung-der-Bearbeitungsschritte-Leerstelle aktiviert wird. Grundlegend für die zu konstruierenden BEGRÜNDUNGEN ist der Zusammenhang zwischen der symbolischen und der graphischen Darstellungsform einer linearen Funktion. D.h. zunächst muss unser Modellschüler verstanden haben, dass eine Gleichheit zwischen den einzelnen Bestandteilen beider Darstellungsformen vorliegt: die Steigung einer Geraden ist gleich dem Faktor vor dem x in der zu dieser Geraden gehörigen Funktionsgleichung und der Schnitt einer Geraden mit der y-Achse ist gleich dem Absolutglied in der entsprechenden Funktionsgleichung. Dieser SATZ ist anhand des Teiltextes 1.6. konstruierbar. Allerdings beinhaltet auch dieses SATZ-Modell die Frage/Leerstelle ‚Warum ist das so?', die sich letztendlich auf das von Geraden bzw. Funktionsgleichungen Dargestellte richtet. Die Warum-Frage bzw. die aktivierte BEGRÜNDUNG-Leerstelle umfasst damit unter anderem auch folgende Fragen/Leerstellen: Welche Spezifika weist die von der Abbildungsvorschrift $f: x \rightarrow mx + b$ und von den Geraden dargestellte Zuordnung auf? Welche Gemeinsamkeiten und Unterschiede weist die lineare Zuordnung im Vergleich zu den (bekannten) proportionalen und nicht linearen Zuordnungen auf? In welchen Umweltsituationen sind lineare Zuordnungen verankert? Wenn man die Textdaten anschaut, dann wird offensichtlich, dass die genannten Fragen/Leerstellen von unserem Modellschüler im Zuge der Lehrtextverarbeitung kaum beantwortbar/belegbar sind.

Die primäre Schwierigkeit bei der Konstruktion einer BEGRÜNDUNG liegt also darin, dass in den Teiltexten, die eine BEGRÜNDUNG andeuten (T1.2-1.6), ausschließlich auf der Ebene der (Zuordnungs-)Darstellungen argumentiert wird, indem Bezug auf den (bekannten) Zusammenhang zwischen graphischer und symbolischer Darstellung proportionaler Funktionen genommen wird. Das von Geraden und linearen Funktionsgleichungen Dargestellte wird auf der Oberfläche der begründenden Teiltexte 1.2-1.6. nicht explizit erwähnt. Im Rahmen des Gesamttextes werden die Spezifika der von Geraden darstellbaren Zuordnung lediglich in Bezug auf die Tarif-Zuordnung und nur in den Teiltexten (T0-1.1) angedeutet: die Tarif-Zuordnung hat eine Grundgebühr und einen gleichbleibenden Minutentarif. Die Spezifika einer verallgemeinerten Zuordnung, die anhand von Geraden darstellbar ist, werden dagegen im gesamten Lehrtext nicht erwähnt. Sie können dabei von unserem Modellschüler auch kaum selbstständig geschlussfolgert werden. Dazu müsste er die im Lehrtext präsentierte Situation (Telefontarif) und ihre Spezifika (Grundgebühr und gleichbleibender Minutentarif) auf all jene Wachstumsprozesse verallgemeinern, in denen etwas in einer ‚Zeitportion' gleichmäßig anwächst, d.h. bei denen die (von der Zeit) abhängige Größe in gleichen Schritten um die gleiche Menge additiv zunimmt.[131] Dabei muss die ‚wachsende Größe' in Analogie zur Grundgebühr des Telefontarifs zum Zeitpunkt Null – im Gegensatz zu proportionalen Zuordnungen – nicht notwendigerweise Null sein.[132] Da Wachstumsprozesse mit Halbgeraden darstellbar sind und in der PROBLEMSTELLUNG hingegen Geraden auftauchen, muss das inferierte DARGESTELLTE noch weiter verallgemeinert werden. Unser Modellschüler müsste also von den Wachstumsprozessen auf Sachsituationen jenseits des Wachstums schließen. Die Spezifik dieser Sachsituationen kann

[131] Diese Verallgemeinerung ist unter anderem auch dadurch erschwert, dass der Telefontarif sekundengenau abgerechnet wird und damit streng genommen keine lineare Zuordnung, sondern eine Treppenfunktion vorliegt.
[132] Eine weitere Möglichkeit, das DARGESTELLTE zu konstruieren, besteht darin, ausgehend von den Geraden und/oder den linearen Funktionsgleichungen auf die Spezifika der linearen Zuordnung zu schließen. Dies wird jedoch in den Textdaten an keiner Stelle angedeutet.

wie folgt formuliert werden: Wenn man die unabhängige Größe um 1 erhöht, dann verändert sich die abhängige Größe stets um einen konstanten Wert. Dabei können die beiden Größen auch negativ sein. Erst wenn unser Modellschüler diese Spezifik der Zuordnung mental konstruiert hat, erlangt er eine Grundlage, um (vollständig) einzusehen, warum die einzelnen Bestandteile der symbolischen und graphischen Darstellungsform einer linearen Funktion zueinander gleich sind. Und erst dann könnte er verstehen, warum bei den ‚Übersetzungsprozessen' zwischen Geraden und Funktionsgleichungen gerade so wie im Lehrtext angedeutet vorgegangen werden muss. Es ist offensichtlich, dass aufgrund der Abstraktheit der notwendigen Gedanken und der fehlenden entsprechenden Textdaten die beschriebene inferenzielle Leistung von unserem Modellschüler nicht erbracht werden kann. Damit bleibt die (Von-Geraden-)Dargestelltes-Leerstelle größtenteils offen und folglich sind die BEGRÜNDUNGEN aller TEILPROBLEME unvollständig und für den Modellschüler nicht einsichtig.

Aus dem Gesagten folgt insbesondere, dass der Teiltext 1.1, in dem der Zusammenhang zwischen Bestandteilen der Tarif-Zuordnung (Grundgebühr/Minutentarif) und ihrer graphischen Darstellung (y-Achsenabschnitt/Geradensteigung) thematisiert wird, erst dann in das Gesamtmodell sinnvoll integrierbar ist, wenn man seine Inhalte – wie eben erläutert – als einen Bestandteil der später folgenden BEGRÜNDUNG der (verallgemeinerten) PROBLEMBEARBEITUNG aufgefasst. Da die hierfür notwendige kognitive Leistung sehr hoch ist und sie mit keinerlei sprachlichen Mitteln im Rahmen der begründeten Teiltexte (1.2. und 1.6.) unterstützt wird, ist der Teiltext 1.1 in das Gesamtmodell schwer integrierbar.

Des Weiteren kann davon ausgegangen werden, dass der Modellschüler den im Arbeitsauftrag gefordertem Tarif-Funktionsterm vornehmlich durch einen Rückgriff auf die Tarif-Zuordnung ermittelt, indem er beispielsweise dem Diagramm einige Wertepaare entnimmt und dadurch ein ‚Gefühl' für die Zuordnung gewinnt. Der im Lehrtext vollzogene Rückgriff auf die (Darstellungen der) proportionalen Funktionen, die ja im ersten Kapitel des Schulbuchs behandelt wurden und daher schwer aktivierbar sind, erscheint für den Modellschüler demgegenüber weniger zugänglich. Das heißt, im Lehrtext wird eine schwer zugängliche Problembearbeitung präsentiert, während eine naheliegende Bearbeitungsmöglichkeit keine Erwähnung findet.

Schließlich erschwert die bereits erwähnte changierende Textsequenzierung die Konstruktion einer konkreten und in Folge auch einer allgemeinen BEGRÜNDUNG: Die Teiltexte 1.2-1.3 und 1.5 deuten eine BEGRÜNDUNG der ‚Ermittlung des Tarif-Funktionsterms anhand des Diagramms' an. Der Teiltext 1.4, in dem ein Aspekt verallgemeinert wird, unterbricht diese Sequenz.

Insgesamt ist das beschriebene, vom Lehrtext nahegelegte PROBLEM-Modell schwer konstruierbar und weist zahlreiche Sinnbeeinträchtigungen auf. Man kann den Lehrtext jedoch auch in der Perspektive des BEGRIFF-Modells ausdeuten: Die (Unter-)Kapitelüberschrift ‚Lineare Funktionen' sowie die Inhalte des vorherigen Lehrtextes, in dem der Begriff ‚Funktion‘ in allgemeiner Hinsicht behandelt wird, wecken die Erwartung, dass im vorliegenden Lehrtext eine neue Funktionenkategorie, d.h. ein neuer BEGRIFF ‚Lineare Funktion‘ eingeführt wird. Unter diesen Annahmen aktiviert der Modellschüler das FUNKTIONEN(-UNTER-)KATEGORIE-Schema und damit folgende zentrale Leerstellen bzw. Subschemata (vgl. Vorwissen des Modellschülers):

- DARGESTELLTES/BEZEICHNETES, also SPEZIFIKA DER (EINDEUTIGEN) ZUORDNUNG,
- SPEZIFIKA DER DARSTELLUNGSFORMEN.

Inwiefern unter diesen vom Aufbau des Schulbuchs nahegelegten Annahmen eine entsprechende Modellbildung gelingen kann, wird im Folgenden untersucht; die dazugehörige Text-Modell-Struktur kann wie folgt dargestellt werden:

BEGRIFF ‚Lineare Funktion‘ (T0-2)

[1] DARGESTELLTES ‚Eine Zuordnung, bei der die abhängige Größe sich (additiv) um einen konstanten Wert verändert, wenn die unabhängigen Größe um 1 erhöht wird‘ (T0 und fehlender Teiltext)

[2] (SPEZIFIK DER) GRAPHISCHE(N) DARSTELLUNG ‚Lineare Funktionen werden durch Geraden dargestellt‘ (T1.1-1.2 und Ausdruck 13)

[3] SYMBOLISCHE DARSTELLUNG ‚Die Abbildungsvorschrift einer linearen Funktion ist $f\colon x \to mx + b$, dabei ist der Parameter $m/\, b$ gleich der Steigung/ dem y-Achsenabschnitt der zu der Abbildungsvorschrift gehörigen Geraden‘ (T1.2-2.2)

[3.1] GRUND FÜR DIE GELTUNG DES SATZES (T1.2-T1.6)

[3.2] SATZAUSSAGE (T1.6)

[3.3] (Formale) ANWENDUNG DES SATZES ‚Verfahren zur Bestimmung der Abbildungsvorschrift/Geraden ausgehend von der jeweils anderen Darstellungsform‘ (schwer integrierbarer T2)

Struktur 20: Vom Gesamtlehrtext ‚Telefontarife’ nahegelegtes BEGRIFF-Modell

Die Dargestelltes-Leerstelle ist im Rahmen des BEGRIFF-Schemas zentral, sie kann aber – wie bereits erläutert – anhand der Textdaten lediglich bezüglich der konkreten Tarif-Zuordnung belegt werden – nicht aber bezüglich beliebiger als Geraden darstellbarer Zuordnungen; sie bleibt demzufolge weitgehend offen (vgl. [1]). Die anderen beiden Leerstellen des BEGRIFF-Modells ([2] und [3]) beziehen sich primär auf die (Spezifika der) Darstellungsformen linearer Funktion und können anhand der Textdaten größtenteils belegt werden. So wird anhand der Teiltexte 1.1-1.2 sowie des Ausdrucks 13 der SATZ ‚Lineare Funktionen werden durch Geraden dargestellt‘ gebildet, der die Spezifika-der-graphischen-Darstellungsform-Leerstelle belegt (vgl. [2]). Die SATZAUSSAGE ist anhand des Ausdrucks 13 leicht konstruierbar. Die Belegung der dazugehörigen Grund-für-die-Geltung-Leerstelle ist allerdings anhand der vorliegenden Textdaten sehr kompliziert. Eine entsprechende BEGRÜNDUNG bezüglich der Telefontarif-Zuordnung ist anhand der Teiltexte 1.1-1.2 sowie des Auftrags (T0) grundsätzlich inferierbar. Eine allgemeine BEGRÜNDUNG verlangt jedoch die Konstruktion des von (beliebigen) Geraden DARGESTELLTEN, also der SPEZIFIK DER (als Geraden darstellbaren)

ZUORDNUNG. Dieses Teilmodell bleibt aber – wie bereits erläutert – weitgehend offen, so dass insgesamt größtenteils unbeantwortet bleibt, warum lineare Funktionen/Zuordnungen stets als Geraden darstellbar sind.

Das nachfolgende Teilmodell [3], das anhand des nahezu gesamten Lehrtextes konstruiert wird, beinhaltet den SATZ ‚Die Abbildungsvorschrift einer linearen Funktion ist $f: x \to mx + b$, dabei ist der Parameter $m/\, b$ gleich der Steigung/ dem y-Achsenabschnitt der zu der Abbildungsvorschrift gehörigen Geraden‘. Der SATZ besteht im Grunde aus zwei TEILSÄTZEN; er beinhaltet zunächst die Spezifika der symbolischen Darstellung – also die Spezifika des algebraischen Ausdrucks – der neuen Funktionenkategorie. Diese TEILSATZAUSSAGE kann in etwa wie folgt zusammengefasst werden: Die Abbildungsvorschrift einer linearen Funktion ist stets eine Summe, wobei ein Summand ein Produkt aus einem Parameter und der Variablen x und der andere Summand ein (anderer) Parameter ist. Darüber hinaus beinhaltet der SATZ [3] den Zusammenhang zwischen graphischer und symbolischer Darstellung einer linearen Funktion, also die geometrische Interpretation der beiden Parameter der Abbildungsvorschrift. Die jeweiligen (TEIL-)SATZAUSSAGEN [3.2] sind anhand des Teiltextes 1.6 relativ leicht bildbar. Ihre BEGRÜNDUNGEN [3.1] sind jedoch anhand der vorherigen Teiltexte schwer konstruierbar; sie verlangen zahlreiche inferenzielle Anreicherungen und bleiben aufgrund der größtenteils offenen (Von-den-Geraden-)Dargestelltes-Leerstelle teilweise unbelegt und damit für den Modellschüler nicht einsichtig.

Der Teiltext 2, der sich eindeutig auf ‚Verfahren‘ bezieht, wird im Rahmen des BEGRIFF-Modells als eine (formale) ANWENDUNG des SATZES [3] interpretiert (vgl. [3.3]). Es handelt sich um die VERFAHREN zur Umwandlung einer Darstellungsform in die jeweils andere. Hier stellt sich die Frage nach dem Motiv für die Erwähnung der Verfahren: Warum wird relativ ausführlich eine formale ANWENDUNG des SATZES mitgeteilt, die zudem relativ einfach aus dem SATZ geschlussfolgert werden kann, wohingegen die im Rahmen der Einführung linearer Funktionen als eine neue Funktionenkategorie zentralen Inhalte nicht mitgeteilt werden?[133] So fehlen im Lehrtext nicht nur das vom BEGRIFF ‚Lineare Funktion‘ BEZEICHNETE und (TEIL-)BEGRÜNDUNGEN der mitgeteilten SÄTZE, sondern auch eine Thematisierung der Spezifika der dritten Darstellungsform einer Funktion – der WERTE-TABELLE. Da die Spezifika-der-Wertepaare-Leerstelle im Rahmen des FUNKTIONEN-KATEGORIE-Schemas relativ fest verankert ist, verwundert das Fehlen der Textdaten, anhand derer diese aktivierte Leerstelle belegt werden könnte. Die Integration des Teiltextes 2 in das naheliegende BEGRIFF-Modell ist damit schwierig.

Insgesamt erweist sich das BEGRIFF-Modell als stark sinnbeeinträchtigt; es bleiben zentrale Leerstellen offen, zahlreiche, teilweise schwer vollziehbare Inferenzen sind notwendig und die Integration des Teiltextes 2 ist problematisch.

[133] An dieser Stelle tritt erneut das bereits in der Analyse des Lehrtextes ‚An der Kühltheke‘ festgestellte Phänomen auf, dass im Text von einem Unverständnis des Lesers ausgegangen wird. Würde man davon ausgehen, dass die (meisten) Schüler den SATZ verstehen, gäbe es nahezu keinen Grund dafür, die Verfahren gesondert und derart detailliert mitzuteilen.

Neben den besprochenen Modellen beruht eine weitere mögliche Lehrtextinterpretation auf der Annahme, dass im Rahmen des Lehrtextes primär der neue SATZ ‚Die Abbildungsvorschrift einer linearen Funktion ist $f : x \to mx + b$, dabei ist der Parameter m/ b gleich der Steigung/ dem y-Achsenabschnitt der zu der Abbildungsvorschrift gehörigen Geraden' vorgestellt wird. Das entsprechende SATZ-Modell besteht aus der SATZAUSSAGE (Teiltext 1.6), einer kompliziert inferierbaren und unvollständigen BEGRÜNDUNG (Teiltexte 1.1-1.6) und einer (vernachlässigbaren) formalen ANWENDUNG des SATZES (Teiltext 2). Dieses Modell ist nicht minder sinnbeeinträchtigt und ebenso schwer zu konstruieren wie die bereits besprochenen naheliegenden Modelle. Insbesondere bleiben im Rahmen des SATZ-Modells das BEZEICHNETE (der SATZOBJEKTE) und damit die SATZBEGRÜNDUNG größtenteils offen. Des Weiteren bleibt offen, warum ein Zusammenhang zwischen Darstellungen (von etwas größtenteils unbekanntem) behandelt wird. Schließlich ist der vorliegende Lehrtext auch als VERFAHREN zur Bestimmung der Abbildungsvorschrift/ Geraden – ausgehend von der jeweils anderen Darstellungsform – ausdeutbar. Das VERFAHREN-Modell weist ebenfalls starke Sinnbeeinträchtigungen auf: Offenheit des BEZEICHNETEN der VERFAHRENSOBJEKTE und des MOTIVS zur Behandlung der VERFAHREN, teilweise Offenheit und komplizierte inferenzielle Anreicherungen hinsichtlich der BEGRÜNDUNG der VERFAHRENSCHRITTE, schwere Integrierbarkeit des Teiltextes 1.1 sowie relativ umfangreiches Inferieren der VERFAHRENSSCHRITTE ‚Vom Graphen zur Abbildungsvorschrift (anhand des Steigungsdreiecks)'. Während die beschriebenen PROBLEM- und BEGRIFF-Modelle vom Aufbau des Schulbuchs (Überschriften, vorherige Inhalte) unterstützt werden, ist dies beim SATZ- und VERFAHREN-Modell nicht der Fall, was die Bildung der letztgenannten Modelle zusätzlich erschwert.

Zusammenfassend kann festgestellt werden, dass alle vom Lehrtext nahegelegten MATHEMATISCHE(S)-ELEMENT(E)-Modelle stark sinnbeeinträchtigt und damit für den Modellschüler schwer zu konstruieren sind. Insbesondere ist der Teiltext 1 im Rahmen des MATHEMATISCHES-ELEMENT-Schemas schwer intakt ausdeutbar.

Naheliegende AUFGABE(N)-Modelle

Im Rahmen des Arbeitsauftrages werden vier Aufgabenstellungen in Bezug auf die Telefontarif-Zuordnung gestellt:

- Aufgabenstellung 1: Ermittle die Grundgebühr und den Minutentarif anhand des Diagramms,
- Aufgabenstellung 2: Bestimme zum Diagramm den Funktionsterm,
- Aufgabenstellung 3: Erarbeite die Veränderung im Diagramm und im Funktionsterm, wenn die Grundgebühr gesenkt wird,
- Aufgabenstellung 4: Erarbeite die Veränderung im Diagramm und im Funktionsterm, wenn der Sekundenpreis/Minutentarif gesenkt wird.

Die Aufgabenstellung 2 zeichnet sich gegenüber den anderen Aufgabenstellungen dadurch aus, dass sie leicht generalisierbar ist, so dass sie als ein Vertreter der verallgemeinerten (typischen) AUFGABENSTELLUNG ‚Bestimme zu einer gegebenen Geraden den dazugehörigen Funktionsterm‘ betrachtet werden kann. Diese AUFGABENSTELLUNG enthält eine typische TRANSFORMATIONSART (‚bestimme‘) sowie typischen AUFGABENOBJEKTE (Geraden und algebraische Ausdrücke). Die anderen Aufgabenstellungen des Auftrages sind demgegenüber schwer generalisierbar. Das liegt unter anderem an ihren Bezugsobjekten ‚Grundgebühr und Minutentarif des Telefontarifs‘; das Kennzeichnende des Kontextes (Telefontarif) ist dem Modellschüler unbekannt. Außerdem weisen die AUFGABENSTELLUNGEN 3 und 4 keine typische TRANSFORMATIONSART (‚Erarbeite die Veränderung‘) auf. All dies führt dazu, dass nach der Verarbeitung des Auftrags und vor der Lehrtextverarbeitung im Rahmen des AUFGABE-Schemas erwartet wird, dass im Lehrtext eher die (verallgemeinerte) LÖSUNG der generalisierbaren und typischen AUFGABENSTELLUNG 2 präsentiert wird, während die LÖSUNGEN der anderen (untypischen) AUFGABENSTELLUNGEN entweder nicht oder lediglich ergänzend vorgestellt werden. Diese Erwartung bestätigt sich. Die LÖSUNG der (untypischen) AUFGABENSTELLUNG 1 wird im Teiltext 1.1 zwar mitgeteilt, aber nicht verallgemeinert. Eine TEILLÖSUNG der (konkreten) AUFGABENSTELLUNG 3 wird vage vom Teiltext 1.2. angedeutet: Wenn man die Grundgebühr absenkt, dann verschiebt sich das Diagramm nach unten. Allerdings fehlt im Lehrtext eine Verallgemeinerung dieser Aufgabenlösung. Auch die (untypische) Aufgabenstellung 4 (Veränderung des Diagramms/Funktionsterms bei Absenkung des Minutentarifs) wird im Lehrtext an keiner Stelle erwähnt.

Es wurde festgestellt, dass Teiltext 1.2. im Rahmen des AUFGABE3-Modells recht schwer ausdeutbar sind. Eine andere naheliegende Interpretation des Teiltextes 1.2 besteht darin, ihn nicht als Mitteilung der AUFGABENLÖSUNG zu betrachten, sondern ihn zusammenhängend mit den nachfolgenden Teiltexten als eine Herleitung von ‚etwas‘ auszudeuten. Spätestens beim Verarbeiten des Teiltextes 1.4 wird auch deutlich, ‚was‘ hergeleitet wurde, nämlich die LÖSUNG der (typischen) AUFGABENSTELLUNG 2. Im Teiltext 1.6. wird schließlich die LÖSUNG der verallgemeinerten AUFGABENSTELLUNG 2 mitgeteilt. Insgesamt wird damit von den Teiltexten 0-1 das hier dargestellte AUFGABE-Modell nahegelegt, dessen Bildungsschwierigkeit im Folgenden diskutiert wird:

TRANSFORMASTIONSAUFGABE ‚Bestimmung der Abbildungsvorschrift zu einer Geraden‘ (T0-1)

[1] AUFGABENSTELLUNG (T0)
[2] GRUND FÜR DIE GELTUNG DER BEARBEITUNGSSCHRITTE (T1.2-1.6)
[3] BEARBEITUNGSCHRITTE (Ausdruck 7, T1.5-1.6 und fehlender Teiltext)

Struktur 21: Von den Teiltexten 0-1 des Lehrtextes ‘Telefontarife’ nahegelegtes TRANSFORMATIONSAUFGABE-Modell

Die konkrete AUFGABENSTELLUNG (vgl. [1]) ist anhand des Auftrags leicht konstruierbar. Auch das Inferieren einer verallgemeinerten AUFGABENSTELLUNG ist – wie bereits erwähnt – auch aufgrund ihrer Typik nicht schwer. Demgegenüber ist die Konstruktion der BEGRÜNDUNG der BEARBEITUNGSSCHRITTE (vgl. [2]) schwer und bleibt – wie im Rahmen

MATHEMATISCHE(S)-ELEMENT(E)-Modelle erläutert – unvollständig. Die im Rahmen des AUFGABE-Schemas zentralen BEARBEITUNGSSCHRITTE (vgl. [3]) sind ebenfalls nicht leicht konstruierbar. Wie im Rahmen des PROBLEM-Modells erwähnt, müssen die zu der konkreten AUFGABENSTELLUNG gehörigen BEARBEITUNGSSCHRITTE anhand der ‚zerstreuten' Teiltexte 1.2 und 1.5 gebildet werden. Die verallgemeinerten BEARBEITUNGSSCHRITTE erfordern aufgrund der Kürze des Teiltextes 1.6 viele inferenzielle Anreicherungen. Zusätzlich zu diesen Schwierigkeiten erscheint der Teiltext 1.1 im Rahmen des Modells als weitgehend überflüssig. Auch die Hervorhebung des Teiltextes 1.4 entspricht nicht der Struktur des Modells. Vor diesem Hintergrund ist das vom Teiltext 1 nahegelegte AUFGABE-Modell insgesamt schwer konstruierbar.

Nunmehr wird der Frage nachgegangen, wie sich der in die meisten MATHEMATISCHE(S)-ELEMENT(E)-Modelle schwer integrierbare Teiltext 2 im Rahmen des AUFGABE-Schemas ausdeuten lässt. Anhand dieses Teiltextes werden drei AUFGABEN(-TYPEN) mitgeteilt: Bestimmung der Abbildungsvorschrift zur Geraden anhand zweier Punkte (Ausdruck 26), Bestimmung der Abbildungsvorschrift zur Geraden anhand des Steigungsdreiecks (Ausdruck 27) und Bestimmung der Geraden zur Abbildungsvorschrift anhand zweier Punkte (Ausdruck 28). Diese AUFGABEN sind mit der auf der Grundlage des Teiltextes 1 konstruierten AUFGABE ‚Bestimmung der Abbildungsvorschrift zu einer Geraden (anhand eines Steigungsdreiecks)' aufgrund der Gleichheit der AUFGABENOBJEKTE (Geraden und Abbildungsvorschrift) und der Ähnlichkeit der AUFGABENSTELLUNGEN benachbart. Daher erscheint der Gesamtlehrtext im Rahmen des AUFGABE-Schemas als relativ wohlgeformt: In ihm werden AUFGABEN vorgestellt, bei denen eine Darstellungsform (Gerade oder Abbildungsvorschrift) in die jeweils andere ‚übersetzt' werden soll. Der Gesamtlehrtext legt damit ein TRANSFORMATIONSAUFGABEN-Modell nahe, wobei in den AUFGABENSTELLUNGEN verlangt wird, Gerade/Abbildungsvorschrift in eine Abbildungsvorschrift/Gerade ‚umzuwandeln'. Das weitgehende Fehlen der im Auftrag gestellten (untypischen) AUFGABEN 1, 3 und 4 lässt sich im Rahmen des AUFGABE-Schemas als ein Indiz dafür interpretieren, dass diese AUFGABEN in der dem Lehrtext folgenden Aufgabensammlung nicht vorkommen werden.[134] Daher wirkt das Fehlen entsprechender Lehrtextdaten wenig sinnbeeinträchtigend. Es bleibt lediglich die Frage offen, weshalb diese Aufgaben im Auftrag überhaupt gestellt wurden. Das AUFGABEN-Gesamtmodell ist in der nachfolgenden Text-Modell-Struktur 22 veranschaulicht.

[134] Diese Erwartung bestätigt sich. Alle nachfolgenden ‚Trainieren-Aufgaben' bewegen sich ausschließlich auf der Ebene der Darstellungen. Die dargestellten Zuordnungen – also auch kontextgebundene Situationen – tauchen in keiner Trainieren-Aufgabe auf (vgl. Esper et al. 2008, S. 170).

TRANSFORMATIONSAUFGABEN ‚Von der Geraden zur Abbildungsvorschrift und umgekehrt' (T0-2)

[1] AUFGABEN ‚Von der Geraden zur Abbildungsvorschrift' (T0-1, Ausdruck 28 und Teilgrafik 29)

[1.1] AUFGABE ‚Von der Geraden zur Abbildungsvorschrift anhand des Steigungsdreiecks' (T0-1)

[1.2] AUFGABE ‚Von der Geraden zur Abbildungsvorschrift anhand der Punktebestimmung' (Ausdruck 28 und Teilgrafik 29)

[2] AUFGABEN ‚Von der Abbildungsvorschrift zur Geraden' (T2 mit Ausnahme des Ausdrucks 28)

[2.1] AUFGABE ‚Von der Abbildungsvorschrift zur Geraden anhand der Punktebestimmung' (Ausdruck 26, Teilgrafik 29)

[2.2] AUFGABE ‚Von der Abbildungsvorschrift zur Geraden anhand des Steigungsdreiecks' (Ausdruck 27, Teilgrafik 29)

Struktur 22: Vom Gesamtlehrtext ‚Telefontarife' nahegelegtes TRANSFORMATIONSAUFGABEN-Modell

Das Konstruieren der AUFGABEN anhand des Teiltextes 2 ist relativ leicht (vgl. [1.2], [2.1] und [2.2]); die entsprechenden AUFGABENSTELLUNGEN sind aufgrund ihrer Typik sowie des engen Zusammenhangs zu der bereits im Rahmen des ersten Teiltextes konstruierten AUFGABENSTELLUNG einfach zu bilden. Die Ableitung der konkreten BEARBEITUNGSSCHRITTE ist ebenfalls unkompliziert, denn sie werden im Teiltext 2 anhand eines Beispiels explizit angegeben; die Verallgemeinerung der BEARBEITUNGSSCHRITTE ist anhand der Textdaten in absoluter Hinsicht recht komplex, allerdings ist diese inferenzielle Leistung unserem Modellschüler zuzumuten. Damit entstehen vollständig belegte AUFGABEN. Gleichzeitig können alle Textdaten des Teiltextes 2 in die einzelnen AUFGABEN integriert werden, damit sind keine überflüssigen Textdaten vorhanden. Auch die Hervorhebung der Ausdrücke 26 und 27 passt zum AUFGABEN-Modell. Andererseits wirkt das Platzieren des (im Rahmen des AUFGABE-Modells) zentralen Ausdrucks 28 außerhalb des Haupttextes unpassend. Insgesamt lässt sich feststellen, dass sich Teiltext 2 recht leicht als AUFGABEN ausdeuten lässt, während Teiltext 1 diesbezüglich erhebliche Sinnbeeinträchtigungen aufweist. Es ist eine Variante des beschriebenen nahegelegten AUFGABEN-Modells denkbar. So besteht die Möglichkeit, rückwirkend – also in Verbindung mit einer erhöhten kognitiven Anstrengung – die Teiltexte 1.2-1.6. nicht nur als Herleitung der LÖSUNG der ersten AUFGABE [1.1], sondern als eine übergreifende Herleitung *aller* präsentierten AUFGABENLÖSUNGEN zu interpretieren. Diese Variante ist allerdings nicht minder sinnbeeinträchtigt.

IV. Skizze naheliegender Lerngerbnisse

Im Folgenden sollen die aufgrund der beschriebenen naheliegenden Modelle einhergehenden Lernergebnisse skizzenhaft dargestellt werden. Im Rahmen des AUFGABEN-Modells erscheinen die LINEAREN FUNKTIONEN als AUFGABENOBJEKTE, d.h. als Geraden und als (spezifische) algebraische Ausdrücke. Die Dargestelltes/Bezeichnetes-der-linearen-

Funktion-Leerstelle wird im Verarbeitungsprozess lediglich bei der Verarbeitung der Teiltexte 0-1.1 aktiviert und mit dem Wert ‚Telefontarif' auf einer konkreten Ebene belegt. Der ‚Telefontarif' erweist sich jedoch im nachfolgenden Verarbeitungsprozess bzw. im Rahmen des gesamten AUFGABEN-Modells als größtenteils überflüssig, so dass dieser Leerstelle und ihrer (rudimentären) Belegung kaum Aufmerksamkeit geschenkt wird. Damit weist das neukonstruierte LINEARE-FUNKTION-Schema lediglich eine schwach ausgebildete und kaum belegte *Dargestelltes/Bezeichnetes*-Leerstelle auf. Das heißt, die Geraden und die algebraischen Ausdrücke der Form $m * x + n$ werden nicht als DARSTELLUNGEN der LINEAREN FUNKTIONEN betrachtet, sondern als ihre UNTERKATEGORIEN: eine Gerade/ Gleichung ist (!) eine lineare Funktion. Das neukonstruierte LINEARE-FUNKTION-Schema ist also aufgrund des Fehlens bzw. der Schwäche der Bezeichnetes-Leerstelle mit dem Alltagswissen und insbesondere mit dem bereits vorhandenen ZUORDNUNG-Schema nicht verbunden. Dies führt dazu, dass das Schema in realitätsbezogenen Problemstellungen, in denen Zuordnungen auftauchen, nicht bzw. schwer aktivierbar und damit schwer anwendbar ist. Außerdem widerspricht die Beziehungslosigkeit zwischen ZUORDNUNG- und LINEARE-FUNKTION-Schema und die damit einhergehende Gleichsetzung einer linearen Funktion mit einer Geraden bzw. einer linearen Gleichung der fachlichen Norm.

Das im Zuge der Bildung eines naheliegenden MATHEMATISCHE(S)-ELEMENT(E)-Modells neukonstruierte LINEARE-FUNKTION-Schema weist ebenfalls eine weitgehend unbelegte Dargestelltes-Leerstelle auf. Der entscheidende Unterschied eines MATHEMATISCHE(S)-ELEMENT(E)-Lernergebnisses zum beschriebenen AUFGABEN-Lernergebnis besteht jedoch darin, dass der Modellschüler im ersten Fall weiß, dass es sich bei den linearen Funktionen um spezifische Zuordnungen handelt, auch wenn er die Spezifika nicht kennt. Schematheoretisch gesprochen: Das neukonstruierte LINEARE-FUNKTION-Schema weist eine relativ verfestigte (größtenteils offene) Spezifika-der-Zuordnung-Leerstelle auf. Die Struktur dieses (neukonstruierten) Schemas entspricht der fachlichen Norm. Darüber hinaus führt das Vorhandensein dieser größtenteils offenen Leerstelle dazu, dass dem Modellschüler bewusst ist, dass er das Wesen der linearen Funktionen nicht versteht, wodurch eine grundsätzliche Bereitschaft zur Korrektur und Vervollständigung seines erworbenen Wissens möglich ist. Diese Bereitschaft ist beim Lernen auf der Grundlage des AUFGABEN-Modells nicht anzunehmen, denn die weitgehende Abwesenheit der Bezeichnetes-Leerstelle im Rahmen des LINEARE-FUNKTION-Schemas (im Sinne eines AUFGABENOBJEKTS) bewirkt, dass das Nicht-Verstehen unbemerkt bleibt.

V. Integrative Lehrtextkennzeichnung – absolute und relative Bildungsschwierigkeit naheliegender Modelle

Nunmehr werden die Befunde bezüglich der absoluten und relativen Bildungsschwierigkeit der vom Lehrtext nahegelegten Modelle zusammengetragen, wobei der Fokus auf dem Vergleich zwischen naheliegenden MATHEMATISCHE(S)-ELEMENT(E)-Modellen und dem vom Lehrtext nahegelegtem AUFGABEN-Modell liegt.

In absoluter Hinsicht sind alle naheliegenden Modelle schwer konstruierbar; sie weisen zahlreiche Sinnbeeinträchtigungen auf, die in der Tabelle 4 zusammengefasst sind. So ist beispielsweise bei allen Modellen mindestens ein Teiltext schwer integrierbar. Der ‚Verfahren' thematisierende Teiltext 2 erscheint sowohl im Rahmen des PROBLEM- als auch BEGRIFF und SATZ-Modells als ‚sperrig'. Aber auch der Teiltext 1.1, in dem der Zusammenhang zwischen Telefontarif-Zuordnung und ihrer graphischen Darstellung angedeutet wird, ist nicht leicht in ein Gesamt-Modell integrierbar. Lediglich im Rahmen des BEGRIFF-Modells kann dieser Teiltext als zentral ausgedeutet werden. Im Rahmen der anderen MATHEMATISCHE(S)-ELEMENT(E)-Modelle ist er nur sehr voraussetzungsreich integrierbar – nämlich dann, wenn man ihn als einen Teilbestand der späterfolgenden BEGRÜNDUNG der PROBLEMBEARBEITUNGSSCHRITTE/ SATZAUSSAGE/ VERFAHRENS-SCHRITTE auffasst und mit seiner Hilfe das BEZEICHNETE der SATZ-/ VERFAHRENSOBJEKTE, also der Geraden und der Abbildungsvorschrift $f: x \to mx + n$ inferiert. Im Rahmen des AUFGABEN-Modells ist der Teiltext 1.1 nur dann gut integrierbar, wenn man ihn als Mitteilung eines AUFGABENTYPS auffasst. Hierfür ist es notwendig, die explizit mitgeteilte konkrete AUFGABE – also die mitgeteilte AUFGABENSTELLUNG und die LÖSUNG – zu verallgemeinern. Die zur Integration des Teiltextes 1.1 notwendigen Inferenzen sind sowohl im Rahmen der MATHEMATISCHE(S)-ELEMENT(E)- als auch im Rahmen des AUFGABEN-Modells sehr kompliziert und daher von unserem Modellschüler kaum vollziehbar. Insgesamt erscheinen das VERFAHREN- und das AUFGABEN-Modell hinsichtlich der Integrierbarkeit aller Textdaten eindeutig weniger sinnbeeinträchtigt als die anderen vom Lehrtext nahegelegten Modelle.

	PROBLEM-Modell	**VERFAHREN-Modell**	**BEGRIFF-Modell**	**SATZ-Modell**	**AUFGABEN-Modell**
Schwer integrierbare Textdaten	- Teiltext 2 - Teiltext 1.1	- Teiltext 1.1	- Teiltext 2	- Teiltext 2 - Teiltext 1.1	- Teiltext 1.1
(Teilweise) offene Leerstellen	- Grund für die Geltung der BEARBEITUNSSCHRITTE - Motiv für die Behandlung des PROBLEMS	- Grund für die Geltung der VERFAHRENS-SCHRITTE - Bezeichnetes der VERFAHRENSOBJEKTE - Motiv für die Behandlung der VERFAHREN	- Bezeichnetes der LINEAREN FUNKTION - Spezifika der Wertepaare der LINEAREN FUNKTION - Grund für die Geltung der SPEZIFIK DER GRAPHISCHEN DARSTELLUNG - Grund für die Geltung der SYMBOLISCHEN DARSTELLUNG	- Grund für die Geltung der SATZAUSSAGE - Bezeichnetes der SATZOBJEKTE - Motiv für die Behandlung des SATZES	- Grund für die Geltung der BEARBEITUNGS-SCHRITTE
(Teil-)Modelle, die eine umfangreiche Inferenzbildung erfordern	- GRUND FÜR DIE GELTUNG DER BEARBEITUNGS-SCHRITTE - PROBLEMSTELLUNG - BEARBEITUNGSSCHRITTE DES PROBLEMS	- GRUND FÜR DIE GELTUNG DER VERFAHRENSSCHRITTE - VERFAHRENSSCHRITTE DES VERFAHRENS ‚Vom Graphen zur Abbildungsvorschrift'	- GRUND FÜR DIE GELTUNG DER SYMBOLISCHEN DARSTELLUNG - GRUND FÜR DIE GELTUNG DER SPEZIFIK DER GRAPHISCHEN DARSTELLUNG	- GRUND FÜR DIE GELTUNG DER SATZAUSSAGE	- GRUND FÜR DIE GELTUNG DER BEARBEITUNGS-SCHRITTE - BEARBEITUNGS-SCHRITTE DER ERSTEN AUFGABE
Unpassende Text-sequenzierung	- Teiltexte 1.3-1.6				
	- Ausdruck 28 scheint ‚zu spät' platziert zu sein	- Ausdruck 28 scheint ‚zu spät' platziert zu sein			- Ausdruck 28 scheint ‚zu spät' platziert zu sein
Nicht ganz passende Überschriften	- Beide Überschriften	- Beide Überschriften	- ‚Telefontarife'	- Beide Überschriften	- ‚Telefontarife'
Unpassende typographische Gestaltung	- Hervorhebung des Teiltextes 1.4 und der Ausdrücke 26 und 27	- Hervorhebung des Teiltextes 1.4 - Platzierung des Ausdrucks 28 am Rand	- Hervorhebung der Ausdrücke 26 und 27	- Hervorhebung der Ausdrücke 26 und 27	- Hervorhebung des Teiltextes 1.4 - Platzierung des Ausdrucks 28 am Rand

Tabelle 4: Überblick über die Sinnbeeinträchtigungen der vom Lehrtext ‚Telefontarife' nahegelegten Modelle

Nunmehr ist die zweite zentrale Sinnbeeinträchtigung – Offenheit der Modelle – zu betrachten. Alle diskutierten Modelle enthalten offene Leerstellen. Allerdings variieren sie in ihrer Anzahl und Bedeutung. So ist bei allen Modellen die Grund-für-die-Geltung-Leerstelle teilweise offen (vgl. Tab. 4). Dies resultiert primär daraus, dass im Rahmen einer BEGRÜNDUNG die Von-Geraden-Dargestelltes-Leerstelle aktiviert wird, die jedoch weder mit Textdaten noch mit inferierten Werten vollständig belegt werden kann. Allerdings ist diese Sinnbeeinträchtigung im Rahmen eines AUFGABEN-Modells im Vergleich zu den anderen Modellen weniger stark ausgeprägt, denn die Grund-für-die-Geltung-der-Bearbeitungsschritte-Leerstelle ist im Rahmen des AUFGABE-Schema nicht verfestigt. Beim VERFAHREN-, BEGRIFF- und SATZ-Modell ist die Dargestelltes-der-Geraden/Abbildungsvorschrift- bzw. Bezeichnetes-der-linearen-Funktion-Leerstelle nicht erst im Rahmen einer BEGRÜNDUNG aktiviert, sondern bereits auf der ersten Ordnungsstufe der Modelle. Beim PROBLEM-Modell dürfte die Dringlichkeit zur Belegung dieser Leerstellen weniger stark sein. Des Weiteren enthalten PROBLEM-, VERFAHREN und SATZ-Modelle eine offene Motiv-Leerstelle. Die Aktivierung dieser Leerstelle resultiert daraus, dass das Bezeichnete der SATZ-/VERFAHREN- bzw. PROBLEMOBJEKTE unbekannt ist und die Behandlung eines SATZES/VERFAHRENS/PROBLEMS mit unbekannten OBJEKTEN als sinnbeeinträchtigt wahrgenommen wird. Beim PROBLEM-Modell wird die Irritation bezüglich des Motivs – wie oben bereits erläutert – durch die Nicht-Passung des PROBLEMS zum Arbeitsauftrag zusätzlich verstärkt. Beim BEGRIFF-Modell entsteht demgegenüber keine dringliche Frage nach dem Motiv, denn sowohl die vorherigen Lehrtexte als auch die Überschrift ‚Lineare Funktionen' legen nahe, dass nun ein neuer mathematischer BEGRIFF bzw. neue FUNKTIONENKATEGORIE eingeführt wird. Insgesamt ist also das AUFGABEN-Modell hinsichtlich seiner offenen Leerstellen mit Abstand am geringsten sinnbeeinträchtigt.

Im Rahmen aller hier diskutierten Modelle sind zahlreiche Inferenzen notwendig (vgl. Tab. 4). Insbesondere ist die Bildung der BEGRÜNDUNG(EN) anhand des auf der Textoberfläche lückenhaften und unzusammenhängenden Teiltextes 1 sehr anspruchsvoll und bedarf vielfältiger inferenzieller Anreicherungen. Bei einigen Modellen (PROBLEM, VERFAHREN und AUFGABEN) ist es zusätzlich notwendig, anhand des Teitextes 1 nicht nur die BEGRÜNDUNG, sondern auch die entsprechenden BEARBEITUNSSCHRITTE zu konstruieren, was nicht leicht ist. Im Rahmen des PROBLEM-Modells muss darüber hinaus die schwer inferierbare PROBLEMSTELLUNG ‚Wie kommt man vom Graphen zur Abbildungsvorschrift?' konstruiert werden. Aufgrund ihrer Typik ist das Inferieren der entsprechenden AUFGABENSTELLUNG jedoch leichter. Insgesamt scheint also das AUFGABEN-Modell bezüglich der notwendigen Inferenzen nicht komplizierter zu sein als die PROBLEM, VERFAHREN und BEGRIFF-Modelle. Lediglich das SATZ-Modell scheint hinsichtlich der notwendigen Inferenzen einfacher zu sein als das AUFGABEN-Modell.

Hinsichtlich der Passung der Modelle zur Textsequenz weisen die naheliegenden Modelle keine gravierenden Unterschiede auf; so erscheint der Verlauf der Teiltexte 1.3-1.6 im Rahmen aller besprochenen Modelle als nicht ganz passend. Auch bezüglich der typographischen Gestaltung bestehen zwischen den Modellen keine wesentlichen Unterschiede: Bei jedem Modell weist der Lehrtext mindestens eine unpassende Hervorhebung auf (vgl. Tab. 4). Die Überschrift ‚Lineare Funktionen‘ erscheint unpassend bezüglich aller Modelle mit Ausnahme des BEGRIFF- und des AUFGABEN-Modells. Im Rahmen des AUFGABEN-Modells werden ‚Lineare Funktionen‘ als übergeordneter Begriff für AUFGABENOBJEKTE wahrgenommen; aus dieser Perspektive erscheint die Überschrift passend. Die Überschrift ‚Telefontarife‘ erscheint im Rahmen aller naheliegenden Modelle unpassend. Insgesamt lässt sich also festhalten, dass alle hier diskutierten Modelle in absoluter Hinsicht schwer zu konstruieren sind. Zugespitzt kann man sagen, dass der Lehrtext für unseren Modellschüler zumindest teilweise sinnlos ist.

Im direkten Vergleich zwischen dem naheliegendem AUFGABEN-Modell und den naheliegenden MATHEMATISCHE(S)-ELEMENT(E)-Modellen scheint das erstgenannte Modell insbesondere aufgrund der untergeordneten Stellung der (offenen und schwer belegbaren) Grund-für-die-Geltung-Leerstellen leichter konstruierbar zu sein als die zweitgenannten Modelle. Zusätzlich weist der Lehrtext eine Besonderheit auf, die für die AUFGABEN-Lesart spricht: Der (recht umfangreiche) Teiltext 2 legt vollständige (!) und anhand der Textdaten relativ leicht zu konstruierende AUFGABEN nahe. Die konkurrierende Ausdeutung des Teiltextes 2 als (im Rahmen der meisten Modelle vernachlässigbaren) VERFAHREN beinhaltet demgegenüber eine teilweise offene und schwer konstruierbare BEGRÜNDUNG. Das Vorhandensein des Teiltextes 2, der deutlich leichter als AUFGABEN ausdeutbar ist, bewirkt, dass sich im Rahmen der anhand des Teiltextes 1 vagen, unvollständigen und gegebenenfalls miteinander konkurrierenden (Teil-)Modelle das AUFGABEN-Schema als die Interpretationsvorlage für den Gesamttext durchsetzt, wobei rückwirkend und durch wiederholtes Lesen die schwer konstruierbaren BEARBEITUNGSSCHRITTE der AUFGABE [1.1] zu bilden sind. Insgesamt scheint damit das AUFGABEN-Modell im Vergleich zu den mathematischen Modellen eindeutig leichter konstruierbar zu sein und dies insbesondere durch den die ‚Verfahren‘ thematisierenden Teiltext 2.

Zusammenfassend kann festgehalten werden, dass insbesondere folgende Textmerkmale eine sinnvolle Verarbeitung des Lehrtextes im Rahmen eines MATHEMATISCHE(S)-ELEMENT(E)-Modells erschweren:

- das Fehlen expliziter Textdaten, die als (verallgemeinertes) Bezeichnetes/ Dargestelltes der linearen Funktionen/Geraden interpretierbar sind,
- die Lückenhaftigkeit, unzusammenhängende Sequenzierung sowie die Unvollständigkeit der vorgestellten Herleitung bzw. Begründung,
- die Existenz des Teiltextes 2, der Verfahren thematisiert und im Rahmen der meisten MATHEMATISCHE(S)-ELEMENT(E)-Modelle als zweitrangig erscheint.

Die genannten Textmerkmale sind gleichermaßen Ursache dafür, dass eine Interpretation des Gesamtlehrtextes im Rahmen eines AUFGABE-Schemas erleichtert wird.

Insgesamt liegt folgendes Ergebnis vor: Der Lehrtext ist in absoluter Hinsicht schwer intakt ausdeutbar, wobei die AUFGABEN-Modellbildung relativ leicht ist. Die Folgen dieses Textmerkmals hinsichtlich der zu erwartenden Lernergebnisse auf Seiten der Schüler müssen an dieser Stelle nicht wiederholt werden (vgl. die entsprechenden Ausführungen in Kap. 6.2) Allerdings ist zu betonen, dass das das ‚Wesen' linearer Zuordnungen jenseits ihrer Darstellungen von der überwiegenden Mehrheit realer Schüler anhand des vorliegenden Lehrtextes nicht erschlossen werden dürfte. Die Schüler, die bei der Lehrtextverarbeitung das leichter zu bildende AUFGABEN-Modell konstruieren, werden zudem ihr Nicht-Verständnis bezüglich der LINEAREN FUNKTIONEN nicht bemerken, wodurch der Weg zur Selbstkorrektur und zur Erweiterung des erworbenen Wissens entsprechend der fachlichen Norm verstellt sein dürfte.

Rückblickend ist festzustellen, dass die hier vorgelegten analytischen Befunde mit den bisherigen Ergebnissen übereinstimmen: Alle analysierten Schulbuchlehrtexte sind unabhängig von ihrem ‚Lernstoff' in absoluter Hinsicht schwer sinnvoll ausdeutbar. Dabei sind die naheliegenden AUFGABE(N)-Modelle deutlich leichter konstruierbar als die naheliegende MATHEMATISCHE(S)-ELEMENT(E)-Modelle. Zur Kontrastierung der vorliegenden Befunde soll im Folgenden ein Schulbuchlehrtext vorgestellt werden, der sich im Rahmen des MATHEMATISCHES-ELEMENT-Schemas leicht ausdeuten lässt. Diese Analyse soll zur weiteren Erprobung des analytisch-theoretischen Instrumentariums sowie zur Theorieanreicherung bezüglich des Lehrpotentials eines Mathematikschulbuchlehrtextes dienen. Des Weiteren kann sie einen empirischen Beleg dafür liefern, dass sich aufgrund der Annahme der Existenz des AUFGABE-Schemas nicht jeder mathematische Schulbuchlehrtext gleichsam ‚automatisch' leichter als AUFGABEN ausdeuten lässt (vgl. Kap. 6.2). Es bietet sich an, einen Lehrtext auszuwählen, der sich auf den gleichen Lernstoff wie hier bereits analysierte Lehrtexte bezieht; daher wird ein Text gewählt, der den im Rahmen dieser Arbeit bereits intensiv betrachteten Zusammenhang zwischen Dezimalzahlen und Brüchen zum Inhalt hat.

6.5. Lehrtext 4: ‚Brüche und ihre Dezimalzahlen'

Der zu analysierende Lehrtext stammt aus dem in Schweiz veröffentlichen Schulbuch ‚Ich mache das so! Wie machst du es? Das machen wir ab. 5.-6. Schuljahr', das von den Didaktikern Urs Ruf und Peter Gallin verfasst wurde (vgl. Gallin und Ruf 1999).[135] Das Schulbuch ist für einen Einsatz sowohl im Mathematik- als auch im Deutschunterricht konzipiert, wobei einzelne Kapitel eindeutig einem der beiden Schulfächer zugeordnet werden. Das erste mathematische Kapitel des Schulbuchs trägt die Überschrift ‚Grössen und Dezimalzahlen: Wie genau willst du es wissen?', das zweite mathematische Kapitel heißt

[135] Ruf und Gallin entwickelten ihr eigenes Unterrichtskonzept, das sogenannte ‚Dialogische Lernen' (vgl. insbesondere Gallin und Ruf 1998a und Gallin und Ruf 1998b), das im deutschsprachigen Raum zumindest im Rahmen der Lehrerbildung eine große Verbreitung fand. Da hinsichtlich der Lehrpotentialanalyse eines Schulbuchlehrtextes das zugrundeliegende Unterrichtskonzept keine primäre Rolle spielt, wird auf konkretere Ausführungen zum Konzept des ‚Dialogischen Lernens' an dieser Stelle verzichtet.

‚Brüche: das Ganze und seine Teile'. Die Gestaltung des Schulbuchs unterscheidet sich stark von den bereits analysierten Schulbüchern. Es gibt zwei zentrale Textsorten – Auftragssammlung und Lehrtext – die stets abwechselnd platziert sind. Eine Auftragssammlung beinhaltet in der Regel zwei bis vier Aufträge, also offene und reichhaltige Fragen an die Schüler.[136] Jede Auftragssammlung ist mit einer Überschrift versehen. Im Rahmen des Kapitels ‚Brüche: Das Ganze und seine Teile' sind beispielsweise folgende Auftragssammlungen vorhanden: ‚Brüche im täglichen Leben', ‚Wer verzichtet, gibt seinen Teil zum Teilen frei', ‚Zähler und Nenner', ‚Wie viele Bruchteile sind es?' usw.[137] Die Anzahl der Auftragssammlungen im Rahmen eines Kapitels variiert recht stark, so beinhaltet das Kapitel ‚Grössen und Dezimalzahlen: Wie genau willst es wissen?' 21 Auftragssammlungen, das Kapitel ‚Brüche: Das Ganze und seine Teile' enthält demgegenüber lediglich 13. Auf jede Auftragssammlung folgt ein Lehrtext, in dem in der Regel ein Aspekt der vorhergehenden Auftragssammlung aufgegriffen und erläutert wird. Außerdem wird in vielen Lehrtexten zur jeweils folgenden Auftragssammlung übergeleitet, indem u.a. einige für die Bearbeitung der Aufträge notwendige Informationen mitgeteilt werden. Die Lehrtexte sind typographisch recht einfach gestaltet. Hinsichtlich ihrer Länge variieren sie relativ stark; kürzere Lehrtexte umfassen lediglich ein paar Sätze, die längsten füllen bis zu drei Schulbuchseiten. Ein Kapitel wird stets mit einer einseitigen Auflistung der zentralen neuen Begriffe und Sachverhalte abgeschlossen. Am Ende des Schulbuch befindet sich ein umfangreicher Anhang, der neben einem Register und einem Quellenverzeichnis ein ‚Brevier für Erwachsene' enthält, in dem zu jeder Auftragssammlung bzw. der dazugehörigen ‚Kernidee' didaktische Hinweise geliefert werden.

Der zu analysierende Lehrtext stammt aus dem Kapitel ‚Brüche: Das Ganze und seine Teile' und bezieht sich sowohl auf die vorhergehende Auftragssammlung ‚Regeln des Bruchrechnens' als auch auf die nachfolgenden Aufträge ‚Brüche und ihre Dezimalzahlen'. Der Lehrtext und die dazugehörigen Aufträge sind nachfolgend abgebildet, wobei – wie gewohnt – die Nummerierung der sprachlichen Einheiten bereits eingefügt wurde.

[136] Zu den Merkmalen eines ‚Auftrages' siehe insbesondere Gallin und Ruf 1998b, S. 52–86.
[137] Im Rahmen des Dialogischen Lernens dürften die Überschriften der Auftragssammlungen die sogenannten ‚Kernideen' darstellen bzw. andeuten. Das Konstrukt ‚Kernidee' wird erläutert insbesondere in Gallin und Ruf 1998b, S. 10–47.

Regeln des Bruchrechnens

· Erkläre, wie du zwei Brüche addierst oder subtrahierst.
Mach ein paar Beispiele und formuliere eine Regel,
bei der keine Zeichnung mehr benötigt wird.

· · Wie multiplizierst du einen Bruch mit einer ganzen Zahl?
Wie dividierst du einen Bruch durch eine ganze Zahl?
Was bedeutet das in den Mosaiken?
Wie heisst die Regel?

T1

1 Beim Bruchrechnen musst du oft erweitern oder kürzen.
2 Beim **Erweitern** bist du frei, du kannst, wie man sagt,
mit 2, 3, 4, 10, 20 oder 100 *erweitern*.
3 Dabei unterteilst du die Teile
in 2, 3, 4, 10, 20 oder 100 feinere Teile.
4 Beim **Kürzen** ist es heikler:
Du musst aufpassen, dass alles schön aufgeht.
5 Erweiterst du zum Beispiel die Zahl $\frac{12}{16}$ mit 3, bekommst du $\frac{36}{48}$;
kürzt du $\frac{36}{48}$ mit 4, bekommst du $\frac{9}{12}$.
6 Weil Zähler und Nenner aber noch durch drei teilbar sind,
kann man den Bruch mit 3 kürzen und erhält $\frac{3}{4}$.
7 Den Bruch $\frac{3}{4}$ kann man nicht mehr weiter kürzen:
Er ist die einfachste Schreibweise unserer Zahl $\frac{12}{16}$
und heisst deshalb **Kernbruch**.

T2

8 Beim Erweitern und Kürzen wird die Bruchzahl nur umgeformt: Ihr Wert ändert sich nicht.
9 Erweitern und Kürzen sind also **Termumformungen**.
10 Du darfst alle erweiterten und gekürzten Brüche unserer Zahl $\frac{12}{16}$ mit Gleichheitszeichen zu einer Kette verbinden, und du darfst die Kette mit weiteren Termen verlängern.

11
$$\frac{12}{16} = \frac{36}{48} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4} = \frac{30}{40} = \frac{210}{280} = \frac{3900}{5200} = \frac{3333}{4444} = \frac{6}{8}$$

T3

12 Ein besonderes Glied dieser Kette ist der Kernbruch $\frac{3}{4}$.
13 Alle andern Glieder sind unnötig aufgeblasen.
14 Es gibt aber noch ein zweites besonderes Glied in der Kette.
15 Es ist ebenso einfach und wichtig wie der Term $\frac{3}{4}$ und hat natürlich auch den gleichen Wert.
16 Aber es sieht ganz anders aus als alle andern Glieder.
17 Den Bruch $\frac{3}{4}$ kann man nämlich in eine **Dezimalzahl** umwandeln.

T4

18 Stell dir nur einmal genau vor, was die Zahl $\frac{3}{4}$ bedeutet.
19 Vor dir liegen drei runde Pizzas.
20 Die sollst du an vier Personen gerecht verteilen.
21 *Wie viel bekommt eine Person?*
22 Diese Frage kannst du auf zwei Arten beantworten.
23 Mit etwas Augenmass kannst du jede Pizza ohne weiteres durch zwei gerade Schnitte in 4 gleiche Teile teilen: Jede Person bekommt jetzt von jeder Pizza einen Viertel, sie darf also $\frac{3}{4}$ einer ganzen Pizza essen.
24 Du kannst aber auch zu rechnen beginnen.
25 Dann müssen sich die vier Personen halt etwas gedulden.
26 Dein Problem heisst jetzt: *Wie viel gibt 3 geteilt durch 4?*
27 Das schaffst du leicht, wenn du dich ans Rechnen mit Dezimalzahlen erinnerst.

T5

28 Mit dem Verfahren für die schriftliche Division kann man jeden Bruch in eine Dezimalzahl verwandeln.

29

3.	0	0	:	4			=			0.	7	5
0												
3	0											
2	8											
	2	0										
	2	0										
		0										

299

30 Jetzt kannst du dir vielleicht besser vorstellen,
warum wir $\frac{3}{4}$ als eine Zahl bezeichnet haben,
obwohl sie aus einem Zähler und einem Nenner besteht.

T6

31 Die Zahl $\frac{3}{4}$ hat den gleichen Wert wie die Zahl 0.75,
0.75 aber, das weisst du auch schon, sind 75 Hundertstel.

32

$$\frac{3}{4} = 3:4 = 0.75 = \frac{75}{100} = \frac{15}{20} = \frac{3}{4}$$

33 Die vier Personen, an die du die Pizza gerecht verteilen sollst,
werden nicht besonders begeistert sein,
wenn du ihnen nach langem Überlegen eröffnest,
jede Person bekomme 0.75 Pizza.

T7

34 Oft aber ist es nützlich, Brüche in Dezimalzahlen umzurechnen.
35 Willst du zum Beispiel wissen, ob $\frac{5}{7}$ grösser ist als $\frac{3}{4}$,
können dir die Dezimalzahlen weiterhelfen.
36 Noch wichtiger aber ist das Umrechnen in Dezimalzahlen,
wenn du wissen willst,
wo genau ein Bruch seinen Platz hat unter den Zahlen.
37 Wo zum Beispiel müsstest du die Marken $\frac{5}{7}$ Meter
oder $\frac{5}{7}$ Zentimeter auf dem Doppelmeter setzen?

38 Der Doppelmeter ist eine gute Hilfe,
wenn du dir vorstellen willst,
wo die Zahlen sitzen, wenn man sie der Grösse nach aufreiht.

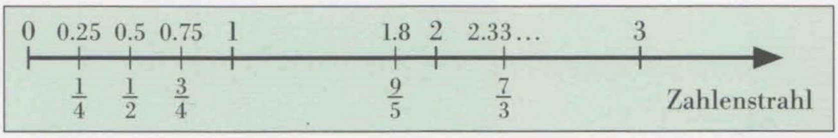
T8

39 Den Doppelmeter kannst du in Gedanken leicht verlängern.
40 Jetzt hast du den **Zahlenstrahl**, auf dem du dir in Gedanken
alle Zahlen vorstellen kannst: die ganzen und die gebrochenen.
41 Selbst eine Zahl wie $\frac{5}{7}$ hat ihren genau bestimmten Ort,
auch wenn man beim Umrechnen in eine Dezimalzahl
zu keinem Ende kommt: $5:7 = 0.714285714285714285 7\ldots$
42 Die Dezimalzahl zum Bruch $\frac{5}{7}$ bricht nicht ab.
43 Schau dir die Ziffern nach dem Dezimalpunkt genau an:
Die Ziffern 7 1 4 2 8 5 wiederholen sich unendlich oft.
44 Dezimalzahlen mit solchen Wiederholungen
nennt man **periodische Dezimalzahlen**.

45 Auf dem Zahlenstrahl findet jede Zahl ihren genau bestimmten Platz.

T9

46



T10

47 Der **Zusammenhang** zwischen Brüchen und ihren Dezimalzahlen ist vielleicht überraschend und fremd für dich.
48 Er ist aber ganz wichtig.
49 Darum musst du viele Brüche in Dezimalzahlen umrechnen.
50 Bewege dich so lange hin und her zwischen Brüchen und Dezimalzahlen, bis es dir in Fleisch und Blut übergeht.

Brüche und ihre Dezimalzahlen

• Zeichne einen Zahlenstrahl in dein Reisetagebuch und trage die Marken für die Brüche $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{9}{5}$ und $\frac{7}{3}$ ein. Verwandle die unechten Brüche in gemischte Zahlen und erkläre, wie man gemischte Zahlen in die Dezimalschreibweise umrechnet.

• • Rechne viele weitere echte und unechte Brüche in Dezimalzahlen und gemischte Zahlen um. Zeichne sie auf dem Zahlenstrahl ein. Erkläre, warum es gedanklich schwieriger ist, die Marke für die Zahl $\frac{5}{7}$ auf dem Zahlenstrahl einzuzeichnen als zum Beispiel die Marken für 3 oder für $\frac{1}{2}$.

• • • Mach eine lange Liste von Brüchen, die beim Umrechnen in Dezimalzahlen abbrechen, und eine andere Liste mit Brüchen, deren Dezimalzahlen unendlich periodisch sind. Versuche herauszufinden, welche Nenner zu abbrechenden Dezimalzahlen führen.

• • • • Gehe jetzt von Dezimalzahlen aus und rechne sie in Brüche um. Erkläre, wie du vorgehst. Warum schaffst du die Umrechnung nicht bei allen Dezimalzahlen?

Abbildung 15: Lehrtext ‚Brüche und ihre Dezimalzahlen' und die dazugehörigen Auftragssammlungen im Schulbuch ‚Ich mache das so! Wie machst du es? Das machen wir ab. 5.-6. Schuljahr' (Gallin und Ruf 1999, S. 298–301)

I. Skizze des relevanten fachlichen Vorwissens

Im Folgenden werden zunächst relativ ausführlich die bezüglich des zu analysierenden Lehrtextes relevanten vorhergehenden Schulbuchinhalte beschrieben und das entsprechende Vorwissen des Modellschülers zu Brüchen und Dezimalzahlen skizziert.

Das erste Kapitel des Schulbuchs ‚Grössen und Dezimalzahlen: Wie genau willst du es wissen?' ist umfangreich und beinhaltet zahlreiche Aufträge und Lehrtexte, die Dezimalzahlen zum Gegenstand haben. Anfangs werden ausführlich Maßeinheiten und ihre Vorsätze (Kilo, Hekto, Deka, Dezi, Zenti, Milli) thematisiert; die ersten 13 der insgesamt 21 Auftragssammlungen bzw. Lehrtexte sind dieser Thematik gewidmet (vgl. Gallin und Ruf 1999, S. 227–243). Dabei werden ausgehend von Alltagsphänomenen unterschiedliche physikalische Größen (Zeit, Längen, Gewicht, Volumen) und die entsprechenden Maßeinheiten mit und ohne Vorsätzen angesprochen. Im Folgenden wird das Spezifische der „Masseinheiten für Geld, Längen, Gewichte und Flüssigkeiten“ (Gallin und Ruf 1999, S. 230) herausgearbeitet; es liegt eine „Zehnereinteilung“ (ebd.) vor. Dabei bedeutet Dezi.., Zenti…, Milli…, dass „eine Grundeinheit in 10, 100 oder 1000 Teile unterteilt wird. Und wir haben Deka…, Hekto… oder Kilo…, wenn Pakete mit je 10, 100 oder 1000 Stücken gebildet werden“ (ebd.) Diese Maßeinheiten sind „ganz auf das **dezimale Stellenwertsystem** zugeschnitten“ (Gallin und Ruf 1999, S. 237). Die Idee der dezimalen Unterteilung wird mit nicht-dezimalen Maßeinheiten, wie angloamerikanischen Längenmaßen, britischen Gewichten und Hohlmaßen kontrastiert.[138] Anschließend wird herausgearbeitet, dass man bei einer Größenangabe Maßeinheiten mit unterschiedlichen Vorsätzen benutzen kann und dass man den Punkt bzw. das Komma „rechts neben die Stelle [setzt], deren Sorte [Maßeinheit E.K.] einem besonders wichtig ist“ (Gallin und Ruf 1999, S. 241). Außerdem wird mitgeteilt, dass man immer kleinere Maßeinheiten ‚basteln‘ kann und somit immer tiefer in die ‚Welt des Kleinen‘ eindringt (vgl. Gallin und Ruf 1999, S. 244). Schließlich vollzieht sich ein Übergang von den Größen und ihren Maßeinheiten zu den Zahlen. Die entsprechende Lehrtextstelle lautet wie folgt: „Links vom Punkt steht die Einheit, weiter links die Zehner, Hunderter, Tausender… Rechts vom Punkt stehen Zehntel, Hundertstel, Tausendstel … Das ist nicht nur so, wenn man an bestimmte Grössen denkt, das ist auch so, wenn nur von Zahlen die Rede ist.“ (ebd.) Der Aufbau der Dezimalzahlen wird im Schulbuch nicht mit Hilfe einer Stellenwerttafel veranschaulicht, sondern anhand eines Zählwerks, das aus mehreren drehbaren Rädchen besteht, die jeweils mit den Ziffern von 0 bis 9 beschriftet sind. Der Lehrtextabschnitt, in dem die Funktion des Zählwerks erklärt wird, ist im Anhang abgebildet (vgl. Abb. 8).

Im nachfolgenden Lehrtext wird der Begriff ‚Dezimalzahl‘ explizit benannt: „Das ist eine „Zahl mit Dezimalpunkt“ (Gallin und Ruf 1999, S. 246) und ihre Beziehung zu den natürlichen Zahlen thematisiert: „Schreibst du 2.0 oder 2.00, gibst du der ganzen Zahl 2 das Gesicht einer gebrochenen Zahl und bettest sie in die Gemeinschaft der Dezimalzahlen ein“ (ebd.) Des Weiteren wird die Dichte der Dezimalzahlen thematisiert. Das Kapitel endet mit fünf Lehrtexten bzw. Auftragssammlungen, die sich auf das Rechnen mit Dezimalzahlen beziehen. In den entsprechenden Lehrtexten werden alle Rechenregeln begründet, indem auf die Bedeutung der Nachkommastellen, also auf die Stellenwerte eingegangen wird. Der Größenvergleich zwischen Dezimalzahlen wird in den Lehrtexten nicht explizit behandelt.

Ausgehend von den erläuterten Schulbuchinhalten wird festgelegt, dass unser Modellschüler weiß, was Dezimalzahlen sind, wie sie aufgebaut sind und wofür sie gebraucht werden. Schematheoretisch gesprochen: Er verfügt über ein reichhaltiges verallgemeinertes DEZIMALZAHL-Schema. Da sich zahlreiche Schulbuchinhalte nicht nur auf Symbole und den Umgang mit ihnen, sondern auf deren Bedeutung, also das Bezeichnete der Dezimalzahlen, beziehen, weist das DEZIMALZAHL-Schema eine verfestigte und reichhaltig belegte

[138] Vgl. die Auftragssammlung ‚Aufgaben für Kinder in Großbritannien‘ und den dazugehörigen Lehrtext in Gallin und Ruf 1999, S. 237–238.

Bezeichnetes-Leerstelle bzw. das AUFBAU-DER-DEZIMALZAHLEN-Schema auf. Die Idee des ‚Zählwerks' legt aufgrund der getrennten Rädchen eher die lokale Sichtweise auf Dezimalzahlen (0,15 ist 1 Zehntel und 5 Hundertstel) nahe, so dass davon ausgegangen wird, dass sie bei unserem Modellschüler im Vergleich zur globalen Sichtweise (0,15 ist 15 Hundertstel) verfestigter ist. Des Weiteren ist die Anwendungsmöglichkeit-Leerstelle des DEZIMALZAHL-Schemas verfestigt und reichhaltig belegt, wobei im Rahmen dieser Leerstelle neben den im Mathematikunterricht erworbenen kognitiven Inhalten auch Inhalte des themenspezifischen Alltagswissens (Maßeinheiten im Alltag) eingebettet sind. Weiter wird davon ausgegangen, dass das NATÜRLICHE-ZAHL-Schema im DEZIMALZAHL-Schema als eine spezifische UNTERKATEGORIE eingebettet ist, d.h. die beiden Zahlenbereiche sind im kognitiven System des Modellschülers miteinander verknüpft. Das Wissen bezüglich des Größenvergleichs der Dezimalzahlen ist dagegen beim Modellschüler aufgrund der fehlenden Lehrtexte vage.

Nun sollen Schulbuchinhalte bezüglich der Bruchzahlen und der Brüche betrachtet werden. Wie bereits erwähnt, werden diese mathematischen Begriffe im Rahmen des Kapitels ‚Brüche: Das Ganze und seine Teile' behandelt. Bereits aus der Überschrift wird ersichtlich, dass Brüche als Teile eines Ganzen eingeführt werden. In den ersten vier Auftrags-sammlungen wird der Begriff ‚Bruch' behandelt, wobei neben der Idee eines ‚Ganzen' und des ‚gerechten Teilens' auch die Bedeutung der Zähler und Nenner angesprochen wird. Der entsprechende Lehr(-teil-)text lautet wie folgt: „Der **Nenner** ist eine Art Sorte: Er nennt den Namen der Teile. Steht die Zahl drei im Nenner, dann weißt du, dass man das Ganze in drei gleiche Teile eingeteilt hat. Steht die Zahl fünf im Nenner, sind es fünf gleiche Teile. Wie viele Teile der gleichen Sorte vorhanden sind, sagt dir der **Zähler**. Der Zähler zählt also die Teile." (Gallin und Ruf 1999, S. 290). In den nachfolgenden zwei Auftragssammlungen werden am Beispiel des Papierfaltens und Einfärbens der gefalteten Anteile das Verfeinern und Vergröbern der Einteilung und damit das Erweitern und Kürzen eines (konkreten) Bruchs sowie die Gleichwertigkeit zweier Brüche thematisiert. Die anschließenden Aufträge und Lehrtexte behandeln auf der Grundlage unterschiedlicher Mosaiken Addition und Subtraktion zweier Brüche, die Multiplikation eines Bruchs mit einer natürlichen Zahl sowie die Division eines Bruchs durch eine natürliche Zahl.

Unser Modellschüler verfügt damit über ein allgemeines BRUCHZAHL-Schema, dessen Grundstruktur dem BRUCHZAHL-Schema des Modellschülers im Rahmen des Schulbuchs ‚Mathematik 6' (vgl. Kap. 5.3) entspricht. Die Belegung der einzelnen Leerstellen – und dabei insbesondere des BEZEICHNETEN eines BRUCHS – wird aufgrund der zahlreichen entsprechenden Schulbuchinhalte als verfestigt und relativ reichhaltig angenommen. In dem hier zu analysierenden Lehrtext werden Dezimalzahlen und Brüche erstmalig zusammengeführt. Daher wird davon ausgegangen, dass das DEZIMALZAHL- und das BRUCH-Schema beim Modellschüler relativ isoliert voneinander vorhanden sind. BRÜCHE stellen beliebige Anteile dar, DEZIMALZAHLEN sind dagegen ‚gebrochene' bzw. ‚verfeinerte' Zahlen, die ‚Zwischenräume zwischen den ganzen Zahlen ausfüllen'. Die DEZIMALZAHLEN sind anhand der Zählwerke darstellbar und beinhalten auch die NATÜRLICHEN ZAHLEN. Ein BRUCH ist demgegenüber nicht anhand eines Zählwerks darstellbar und von den NATÜRLICHEN ZAHLEN weitgehend isoliert. Andererseits ist eine Verbindung zwischen einer DEZIMALZAHL und einem BRUCH dadurch angebahnt, dass eine DEZIMALZAHL u.a. aus spezifischen BRÜCHEN bzw. ANTEILEN (Zehntel, Hundertstel, Tausendstel,…) besteht.

II. Beschreibung formaler sprachlicher Merkmale des Lehrtextes und Einteilung in die Teiltexte

Der Lehrtext ist zwischen den beiden Auftragssammlungen ‚Regeln des Bruchrechnens' und ‚Brüche und ihre Dezimalzahlen' platziert. Die Nummerierung der sprachlichen Einheiten des (natursprachlichen) Haupttextes, die in der Abbildung 15 bereits eingefügt wurde, orientiert sich wie gewohnt an der Syntax. Die beiden Randnotizen (Ausdruck 28 und 45) sind in die Sequenz des Haupttextes eingebaut. Die eingerahmten Teiltexte, die aus formal-mathematischen oder graphisch-mathematischen Textdaten bestehen, – d.h. die beiden eingerahmten Gleichungen, die Divisionsrechnung und der Zahlenstrahl – wurden jeweils mit einer Nummer vermerkt (vgl. Ausdrücke 11, 28, 32 und 46). Die Einteilung des Lehrtextes in Teiltexte folgt der typographischen Gestaltung, d.h. den Punkten, die die Textoberfläche unterteilen.

Auf der Textoberfläche weist dieser Lehrtext im Vergleich zu den bereits analysierten Lehrtexten mehrere Unterschiede auf. So gibt es relativ wenige formal-mathematische Sprachdaten; lediglich drei (komplexe) Ausdrücke sind ausschließlich formal-mathematischer Natur (Ausdrücke 11, 28 und 32). Außerdem fällt die Sparsamkeit der typographischen Mittel auf: Lediglich die formal-mathematischen Ausdrücke sowie die Grafik (Zahlenstrahl) sind mit Hilfe einer Umrandung hervorgehoben, ansonsten gibt es keine Einrahmungen bzw. Hervorhebungen. Auch die geringe Anzahl der Randnotizen ist auffällig. Insgesamt wirkt die Textoberfläche eher klassisch: Sie besteht in hohem Maße aus sequenziell angeordneten und nicht hervorgehobenen natursprachlichen Textdaten.

III. Beschreibung naheliegender MATHEMATISCHE(S)-ELEMENT(E)-Modelle und Diskussion ihrer Bildungsschwierigkeit

Der Gesamtlehrtext legt den SATZ ‚In jeder Kette (aus gleichwertigen Brüchen) kommt eine Dezimalzahl als ein (besonderes) Glied vor' nahe. Struktur und Belegung dieses Modells auf den ersten beiden Zerlegungsstufen sind nachfolgend dargestellt.

SATZ ‚In jeder Kette (aus gleichwertigen Brüchen) kommt eine Dezimalzahl als ein (besonderes) Glied vor' (T1-10)

[1] HINFÜHRUNG ZUM SATZ ‚Gleichwertige Brüche sind zu einer Kette verbindbar. Ein besonderes Glied dieser Kette ist der Kernbruch' (T1-2 und A12-13)

[1.1] BEGRIFF ‚Kernbruch ist ein Bruch, der nicht weiter kürzbar ist' (T1)

[1.2] SATZ ‚Erweiterte und gekürzte Brüche sind gleichwertig, d.h. sie sind zu einer Kette verbindbar' (T2)

[1.3] SATZ ‚Kernbruch ist ein besonderes Glied dieser Kette' (A12-13)

[2] SATZBESTANDTEILE (A14-T6)

[2.1] SATZ konkret ‚In der Kette zum Kernbruch $\frac{3}{4}$ kommt 0,75 als (besonderes) Glied vor' (A14-T6)

[2.2] SATZ allgemein ‚In einer Kette zu jedem (Kern-)Bruch kommt eine Dezimalzahl als ein (besonderes) Glied vor' (A14-T6, insbesondere A28)

[3] ANWENDUNGSMÖGLICHKEITEN DES SATZES ‚Die Angabe eines Bruchs als Dezimalzahl ist nützlich, wenn man zwei Brüche miteinander vergleichen möchte oder den Platz eines Bruches unter den Zahlen sucht' (T7-9)

[3.1] ERSTE ANWENDUNGSMÖGLICHKEIT ‚Die Angabe eines Bruchs als Dezimalzahl ist nützlich, wenn man zwei Brüche miteinander vergleichen möchte' (A35)

[3.2] ZWEITE ANWENDUNGSMÖGLICHKEIT ‚Die Angabe eines Bruchs als Dezimalzahl ist nützlich, wenn man den Platz eines Bruchs unter den Zahlen sucht' (A36-T9)

[4] VORGEHENSWEISE ZUM VERINNERLICHEN DES SATZES ‚So viele Brüche in Dezimalzahlen umwandeln, bis der Zusammenhang einem vertraut erscheint'

Struktur 23: Vom Lehrtext ‚Brüche und ihre Dezimalzahlen' nahegelegtes SATZ-Modell

Das Gesamtmodell besteht aus vier Teilmodellen erster Ordnung. Das Teilmodell [1], das anhand der Teiltexte 1 und 2 sowie der Ausdrücke 12 und 13 konstruiert wird, bezieht sich auf den Gegenstand ‚Kette (aus gleichwertigen Brüchen)' und führt damit zum OBJEKT des übergreifenden SATZES. Das Teilmodell [2] beinhaltet die einzelnen SATZBESTANDTEILE auf einer konkreten und einer verallgemeinerten Ebene. Die textbasierten Werte dieses Teilmodells stammen aus den Teiltexten 3 bis 6 (ausgenommen Ausdrücke 12 und 13). Die nachfolgenden Teiltexte 7 bis 9 werden im Rahmen des SATZ-Schemas intakt als ANWENDUNGSMÖGLICHKEITEN (vgl. [3]) ausgedeutet. Schließlich beinhaltet das Modell eine VORGEHENSWEISE ZUM VERINNERLICHEN DES SATZES, die anhand des Teiltextes 10 konstruiert wird (vgl. [4]). Im Folgenden werden die einzelnen Teilmodelle beschrieben und ihr Bildungsschwierigkeitsgrad diskutiert.

Die HINFÜHRUNG ZUM SATZ (vgl. [1]) beinhaltet den BEGRIFF ‚Kernbruch' (vgl. [1.1]), dessen textbasierte Werte anhand des Teiltextes 1 konstruiert werden. Da unser Modellschüler über ERWEITERN- und KÜRZEN-Schemata verfügt (vgl. Vorwissen des Modellschülers), sind ihm die in Teiltext 1 mitgeteilten Inhalte weitestgehend bekannt, so dass sie anhand der Textdaten lediglich aktiviert, aber nicht neu konstruiert werden. Einzige Ausnahme ist dabei der BEGRIFF ‚Kernbruch', dessen CHARAKTERISTISCHES MERKMAL ‚nicht weiter kürzbar sein' ausgehend von textbasierten Werten ‚$\frac{3}{4}$ ist nicht weiter kürzbar und daher die einfachste Schreibweise der Ausgangszahl $\frac{12}{16}$' (vgl. Ausdruck 7) verallgemeinert gebildet wird. Die für diese Verallgemeinerung notwendige kognitive Leistung ist nicht sehr kompliziert.

Anschließend wird anhand der Ausdrücke 8-11 der SATZ ‚Erweiterte und gekürzte Brüche sind gleichwertig, d.h. sie sind zu einer Kette verbindbar' (vgl. [1.2]) konstruiert. Dabei muss die textbasierte konkrete SATZAUSSAGE ‚Alle erweiterten und gekürzten Brüche der Zahl $\frac{12}{16}$ sind mit einem Gleichheitszeichen zu einer Kette verbindbar' (vgl. Ausdruck 10) verallgemeinert werden. Der im Ausdruck 5 vorhandene sprachliche Hinweis ‚zum Beispiel' unterstützt diese Leistung. Zum Konstruieren der allgemeinen SATZAUSSAGE ist es notwendig, gedanklich den konkreten Bruch $\frac{12}{16}$ durch ‚ein beliebiger Bruch' zu ersetzen. Diese inferenzielle Leistung erscheint als relativ einfach. Der SATZ [1.2] beinhaltet auch eine BEGRÜNDUNG, die anhand der Ausdrücke 8-9 konstruiert wird. Man beachte, dass die in die BEGRÜNDUNG eingebettete SATZAUSSAGE ‚Erweitern und Kürzen verändert den Wert der Brüche nicht', die anhand des Ausdrucks 8 aktiviert wird, unserem Modellschüler bekannt und einleuchtend ist, d.h. er kennt auch die dazugehörige BEGRÜNDUNG, so dass an dieser Stelle keine offenen Fragen entstehen. Insgesamt sind die anhand der Teiltexte 1 und 2 konstruierten Teilmodelle [1.1] und [1.2] vollständig und sie integrieren alle Textdaten. Die zu ihrer Bildung notwendigen Inferenzen sind relativ unkompliziert.

Teiltext 3 leitet von gleichwertigen Brüchen zu Dezimalzahlen über, indem mitgeteilt wird, dass die Kette zwei besondere Glieder hat: einen Kernbruch und eine Dezimalzahl.[139] Anhand des Ausdrucks 12 wird zunächst der SATZ ‚Kernbruch $\frac{3}{4}$ ist ein besonderes Glied der Kette (zum Bruch $\frac{12}{16}$)' konstruiert und verallgemeinert (vgl. [1.3]). Die BEGRÜNDUNG der verallgemeinerten SATZAUSSAGE folgt unmittelbar aus dem BEGRIFF ‚Kernbruch': Ein Kernbruch ist ein (besonderes) Glied der Kette, weil er durch Kürzen eines Bruchs, das den Wert eines Bruchs nicht verändert, entstanden ist. Im Ausdruck 14 wird mitgeteilt, dass es noch ein zweites besonderes Glied in der Kette (zum Kernbruch $\frac{3}{4}$) gibt, und anschließend wird diese Aussage konkretisiert. Damit wird das ZWEITES-BESONDERES-GLIED-IN-EINER-(BRÜCHE-)KETTE-Modell auf einer konkreten und einer allgemeinen Ebene mit (zunächst) zahlreichen offenen Leerstellen konstruiert. Mit den nachfolgenden Ausdrücken wird dieses Modell vervollständigt. Nach dem Verarbeiten des Ausdrucks 17 weiß der Modellschüler,

[139] Aus fachlicher Sicht kann evtl. der Einwand vorgebracht werden, warum in der Kette nur eine (!) Dezimalzahl vorkommt und nicht mehrere, wie beispielsweise neben der 0,75 auch die 0,750 bzw. 0,7500. Da in den vorherigen Kapiteln des Schulbuchs keine Dezimalzahlen vorkommen, deren letzten Nachkommastellen Nullen sind, kennt unser Modellschüler solche besonderen Dezimalzahlen nicht. Daher stellt er die beschriebene Frage nicht.

dass das zweite besondere Glied in der Kette zum Kernbruch $\frac{3}{4}$ bzw. zum beliebigen Kernbruch eine Dezimalzahl ist. Es entsteht die Frage/Leerstelle, welche Dezimalzahl das ist und wie man sie findet. Die nachfolgenden Textdaten (T4-6) belegen diese aktivierten Leerstellen. Im Ergebnis wird der vollständige konkrete SATZ ‚In der Kette zum Kernbruch $\frac{3}{4}$ kommt 0,75 als besonderes Glied vor' (vgl. [2.1]) konstruiert. Die BEGRÜNDUNG dieser (konkreten) SATZAUSSAGE wird anhand des umfangreichen Teiltextes 4 gebildet. Man kann sie wie folgt zusammenfassen: ‚Der Bruch $\frac{3}{4}$ ist gleichbedeutend mit der Aufforderung, drei Pizzen gerecht an vier Personen zu verteilen. Da Verteilen im mathematischen Sinne ‚geteilt durch' – also Division – bedeutet, muss man 3 geteilt durch 4 rechnen. Bei dieser Rechnung erhält man 0,75.' Da ‚gerechtes Teilen' in vorherigen Kapiteln behandelt wurde, ist die Bedeutung des Bruchs $\frac{3}{4}$ als Aufforderung, drei Pizzen gerecht an vier Personen zu verteilen, unserem Modellschüler bekannt. Auch die anderen in der BEGRÜNDUNG vorhandenen Inhalte sind für ihn nicht neu, so dass an dieser Stelle keine offenen Fragen entstehen. Aufgrund der Ausführlichkeit des Teiltextes 4 kann das entsprechende BEGRÜNDUNG-Modell nahezu vollständig mit textbasierten Werten belegt werden, so dass zu seiner vollständigen Konstruktion nur wenige (unkomplizierte) inferenzielle Anreicherungen notwendig sind.

Der konkrete SATZ [2.1] wird vom Modellschüler verallgemeinert, d.h. es wird der SATZ ‚In einer Kette zu jedem (Kern-)Bruch kommt eine Dezimalzahl als besonderes Glied vor' (vgl. [2.2]) konstruiert. Insbesondere der Ausdruck 28, der sich explizit auf ‚jeden Bruch' bezieht, aktiviert das allgemeine SATZ-Schema und erleichtert die entsprechende Modellbildung. Die für die Verallgemeinerung notwendige kognitive Leistung ist zwar recht umfangreich – denn es müssen sowohl die SATZAUSSAGE als auch die BEGRÜNDUNG verallgemeinert werden –; aufgrund der Reichhaltigkeit des konkreten SATZES [2.1] ist sie jedoch gleichzeitig relativ unkompliziert. Im Wesentlichen muss dabei in Analogie zu den vorherigen SÄTZEN [1.2] und [1.3] der Kernbruch $\frac{3}{4}$ als ein konkreter Vertreter eines beliebigen Kernbruchs betrachtet werden. Insgesamt sind die beiden zentralen BESTANDTEILE des SATZES ‚In einer Kette zu jedem (Kern-)Bruch kommt eine Dezimalzahl als besonderes Glied vor' – also sowohl die SATZAUSSAGE als auch der GRUND IHRER GELTUNG – auf der konkreten und der allgemeinen Ebene mit textbasierten und recht leicht zu inferierenden Werten belegt, d.h. es gibt keine offenen Leerstellen.

Am Ende des Teiltextes 6 im Ausdruck 31 wird nicht nur die Umrechnung des Bruchs $\frac{3}{4}$ in eine Dezimalzahl, sondern auch die die ‚Umkehrrichtung' angesprochen, also die Tatsache, dass 0,75 75 Hundertstel sind. In der Gleichung (Ausdruck 32) wird die Umwandlung der 0,75 in einen Bruch ebenfalls angedeutet. Diese Textdaten sind im Rahmen des konstruierten SATZ-Modells intakt als zusätzliche BEGRÜNDUNG der SATZAUSSAGE ‚0,75 ist ein Glied in der Kette zum Kernbruch $\frac{3}{4}$' ausdeutbar. Damit sind alle Textdaten der Teiltexte 3-6 in die beschriebenen naheliegenden Teilmodelle [1.3] und [2] intakt integrierbar.

In Teiltext 7 teilt der Autor mit, wozu das Umrechnen der Brüche in Dezimalzahlen, d.h. wozu die Suche nach dem besonderen Glied ‚nützlich' (vgl. Ausdruck 34) sein kann. Damit wird die Anwendungsmöglichkeiten-Leerstelle im Rahmen des konstruierten SATZES aktiviert und belegt. Als ERSTE ANWENDUNGSMÖGLICHKEIT wird der Größenvergleich zweier Brüche genannt (vgl. [3.1]). Anhand des Ausdrucks 35 werden eine allgemeine und eine konkrete PROBLEMSTELLUNG ‚Wie kann man zwei beliebige Brüche bzw. $\frac{5}{7}$ und $\frac{3}{4}$ bezüglich ihrer Größe vergleichen?' konstruiert, bei deren BEARBEITUNG Brüche in Dezimalzahlen umgewandelt werden können, d.h. der SATZ angewendet wird. Im Ausdruck 35 wird lediglich mitgeteilt, dass beim Größenvergleich ‚die Dezimalzahlen weiterhelfen' können. Hier ist fraglich; inwiefern sie weiterhelfen; allerdings wird diese Frage vom Autor nicht beantwortet. Diese aktivierte Leerstelle muss also vom Modellschüler anhand seines Vorwissens beantwortet/belegt werden. Dazu ist er – zumindest teilweise – in der Lage, denn er kennt bereits einige (konkrete) Dezimalzahlen, die er bezüglich ihrer Größe miteinander vergleichen kann (wie etwa 0,5 und 0,6). Eine vollständige Belegung dieser Leerstelle bedarf jedoch recht umfangreicher und komplexer Inferenzen (vgl. Vorwissen des Modellschülers). Hinsichtlich der Frage, inwiefern das Fehlen der Textdaten, die den Größenvergleich zweier beliebiger Dezimalzahlen thematisieren, sinnbeeinträchtigend wirkt, ist zu bedenken, dass im Rahmen des ANWENDUNGSMÖGLICHKEIT-Schemas lediglich die (allgemeine) PROBLEMSTELLUNG und die Eignung des übergeordneten SATZES für ihre BEARBEITUNG zentral sind; eine vollständige (!) PROBLEMBEARBEITUNG ist hingegen sekundär. Das Fehlen sekundärer Inhalte in einem Lehrtext, die dem Modellschüler zudem zumindest teilweise bekannt sind, dürfte daher kaum sinnbeeinträchtigend wirken. Das Teilmodell [3.1] beinhaltet damit eine aktivierte und mit textbasierten Werten nicht belegbare Leerstelle, die jedoch sekundärer Natur ist. Die zentralen Leerstellen (Problemstellung und Anwendbarkeit des SATZES im Rahmen ihrer Bearbeitung) sind dagegen im Wesentlichen mit textbasierten Werten belegbar. Insgesamt ist das Teilmodell [3.1] bezüglich der zentralen Leerstellen vollständig und seine Bildung bedarf keiner komplizierten Inferenzen. Außerdem werden alle entsprechenden Textdaten in das Modell integriert.

Im Ausdruck 36 wird mitgeteilt, wozu das Umrechnen der Dezimalzahlen in Brüche über den Größenvergleich zweier Brüche hinaus nützlich sein kann. Anhand der folgenden Teiltexte 8 und 9 wird die ZWEITE ANWENDUNGSMÖGLICHKEIT DES SATZES (vgl. [3.2]) konstruiert. Im Einzelnen wird dabei anhand der Ausdrücke 37-40 die PROBLEMSTELLUNG ‚Welchen Platz hat der Bruch $\frac{5}{7}$ bzw. ein beliebiger Bruch unter den Zahlen bzw. auf dem Zahlenstrahl?' auf einer konkreten und einer allgemeinen Ebene gebildet. Die nachfolgenden Ausdrücke 41-44, in denen der Bruch $\frac{5}{7}$ in eine periodische – also besondere – Dezimalzahl umgewandelt wird, belegen teilweise die entsprechende Problembearbeitung-Leerstelle. Diese Belegung ist analog zum vorherigen Modell [3.1] unvollständig, d.h. einiges muss vom Modellschüler anhand seines Vorwissens inferiert werden. Die Fragen, wo konkret die gefundene Dezimalzahl 0,7142857… auf dem Zahlenstrahl ihren Platz hat, und allgemeiner gesprochen, wie man den Platz einer beliebigen Dezimalzahl auf dem Zahlenstrahl findet, werden im Text nicht beantwortet. Wie bereits im Rahmen des Modells [3.1] erläutert, handelt es sich dabei um sekundäre Leerstellen, primär ist lediglich die PROBLEMSTELUNG, bei deren BEARBEITUNG Brüche in Dezimalzahlen umgewandelt werden. Wenn die sekundären Leerstellen vom Modellschüler teilweise belegt werden können, wirkt das Fehlen entsprechender Textdaten nicht sinnbeeinträchtigend. In diesem Fall ist diese Bedingung erfüllt, denn unser Modellschüler weiß bereits, welchen Platz (einige konkrete) Dezimalzahlen auf dem Zahlenstrahl haben und wie man ihn findet. Der gezeichnete Zahlenstrahl mit markierten Brüchen und Dezimalzahlen (vgl. Ausdruck 46) unterstützt diese Inferenzbildung. Insgesamt wirkt damit der Umstand, dass hier nicht thematisiert wird, wie man den Platz einer beliebigen Dezimalzahl bzw. eines beliebigen Bruchs auf dem Zahlenstrahl sucht, im Rahmen des konstruierten Modells kaum sinnbeeinträchtigend. Allerdings irritiert doch das Fehlen der Dezimalzahl 0,7142857... und des entsprechenden Bruchs $\frac{5}{7}$ auf dem Zahlenstrahl (vgl. Ausdruck 46). Wenn schon einige Zahlen und ihre Plätze auf dem Zahlenstrahl mitgeteilt werden, dann wäre zu erwarten, dass der Bruch aus der konkreten PROBLEMSTELLUNG ebenfalls markiert wird.

Die zentrale kommunikative Funktion des Zahlenstrahls (Ausdruck 46) besteht im Rahmen des konstruierten Modells weniger in der Darstellung der (im Rahmen eines ANWENDUNGSMÖGLICHKEIT-Schemas sekundären) vollständigen BEARBEITUNG der PROBLEMSSTELLUNG ‚Wo hat ein Bruch seinen Platz auf dem Zahlenstrahl?‘, sondern vielmehr in der Konkretisierung der SATZAUSSAGE ‚Jede Zahl (und damit jeder Bruch und jede Dezimalzahl) hat ihren genauen Platz auf dem Zahlenstrahl‘, der explizit in der Randnotiz 45 mitgeteilt wird. Dieser SATZ garantiert die eindeutige Lösbarkeit der übergeordneten (und im Rahmen eines ANWENDUNGMÖGLICHKEIT-Schemas zentralen) PROBLEMSTELLUNG ‚Wo hat ein Bruch seinen Platz auf dem Zahlenstrahl?‘. Die BEGRÜNDUNG des SATZES wird anhand der Ausdrücke 37-40 angedeutet, indem eine Analogie zwischen einem Zahlenstrahl und einem Doppelmeter (Zollstock) gebildet wird. Die (leicht zu inferierende) Tatsache, dass auf einem Zollstock jede Längenangabe ihren genau bestimmten Platz hat, begründet für den Modellschüler die SATZAUSSAGE, dass analog jede Dezimalzahl genau einen Platz auf dem Zahlenstrahl hat. Da jeder Bruch in eine Dezimalzahl umgewandelt werden kann (textbasierter Wert anhand des Ausdrucks 28), hat auch jeder Bruch einen bestimmten Platz auf dem Zahlenstrahl (unmittelbare Schlussfolgerung). Hier wird deutlich, dass die zur Konstruktion der BEGRÜNDUNG notwendigen Inferenzen nicht sehr kompliziert sind.

Insgesamt ist das Teilmodell [3.2] bezüglich der zentralen Leerstellen vollständig und seine Bildung bedarf keiner komplizierten Inferenzen. Lediglich das Inferieren einer vollständigen (!) BEARBEITUNG der PROBLEMSTELLUNG ‚Welchen Platz hat eine Dezimalzahl auf dem Zahlenstrahl?‘, also die Belegung einer sekundären Leerstelle, erfordert relativ umfangreiche Inferenzen. Des Weiteren integriert das Teilmodell alle Textdaten der Teiltexte 8-9.

Im Teiltext 10 teilt der Autor mit, wie man beim Lernen bzw. beim Verinnerlichen des SATZES vorgehen sollte. Fraglich bleibt dabei, warum man auch die Dezimalzahlen in Brüche umwandeln sollte (vgl. Ausdruck 50). Der konstruierte übergeordnete SATZ besagt ja lediglich, dass zu jedem Bruch eine Dezimalzahl existiert. Den UMKEHRSATZ ‚Zu jeder Dezimalzahl existiert ein (Kern-)Bruch' beinhaltet er nicht. Der Hinweis, man soll auch Dezimalzahlen in Brüche umwandeln, ist also in den konstruierten SATZ nicht leicht integrierbar. Allerdings aktiviert der Hinweis die Frage/Leerstelle, ob der UMKEHRSATZ gilt.[140] Die Konstruktion eines vollständigen UMKEHRSATZES anhand des Lehrtextes bedarf recht komplizierter Inferenzen und ist bezüglich der Unwandelbarkeit der periodischen Dezimalzahlen für den Modellschüler nicht möglich.

Insgesamt liegt bislang folgendes Analyseergebnis vor: Das beschriebene, vom Lehrtext ‚Brüche und Dezimalzahlen' nahegelegte SATZ-Modell integriert alle Textdaten. Lediglich der am Ende des Lehrtextes vorhandene Hinweis, man solle auch Dezimalzahlen in Brüche umwandeln, erscheint im Rahmen des beschriebenen SATZ-Modells als sperrig. Des Weiteren enthält das naheliegende SATZ-Modell keine offenen zentralen Leerstellen. Auch die sekundären Leerstellen auf einer relativ hohen Zerlegungsstufe sind stets zumindest teilweise mit textbasierten und/oder inferierten Werten belegbar. Die meisten zentralen Leerstellen sind primär mit textbasierten Werten gefüllt; die Konstruktion dieser Teilmodelle erfordert damit keine komplizierten Inferenzen. Lediglich die Verallgemeinerung der SATZAUSSAGE ‚In der Kette zum Kernbruch $\frac{3}{4}$ kommt 0,75 als ein Glied vor' sowie die Verallgemeinerung ihrer BEGRÜNDUNG, also die Konstruktion des SATZES [2.2], erfordert recht umfangreiche Inferenzen, die jedoch kaum komplex sind, da der konkrete SATZ [2.1] eine reichhaltige und leicht konstruierbare BEGRÜNDUNG enthält. Darüber hinaus passt der Lehrtextverlauf zur Struktur des naheliegenden SATZ-Modells und auch die (spärliche) typographische Gestaltung widerspricht ihm nicht. Damit ist das naheliegende SATZ-Modell ist absoluter Hinsicht recht leicht bildbar.

Der Lehrtext ermöglicht weitere MATHEMATISCHE(S)-ELEMENT(E)-Modelle, allerdings ist das beschriebene SATZ-Modell das am leichtesten zu bildende. So legt der Lehrtext wie bereits angedeutet den SATZ ‚Zu jedem (Kern-)Bruch gibt es eine Dezimalzahl und zu jeder Dezimalzahl gibt es einen (Kern-)Bruch' nahe. Dieser SATZ ist im Vergleich zum beschriebenen SATZ umfangreicher, da er auch den UMKEHRSATZ integriert. Dieser wird im Lehrtext lediglich mit wenigen Textdaten (Teile der Ausdrücke 31, 32, 46 und 50) angedeutet, so dass seine Konstruktion recht komplizierter Inferenzen bedarf. Dabei bleiben einige Leerstellen offen, insbesondere die hinsichtlich der Umwandelbarkeit der periodischen Dezimalzahlen. Damit ist das SATZ-Modell, das auch den UMKEHRSATZ beinhaltet, im Vergleich zum beschriebenen SATZ-Modell wesentlich schwieriger zu konstruieren.

Der vorliegende Lehrtext ist neben dem SATZ-Modell auch als VERFAHREN ‚Umwandlung der Brüche in Dezimalzahlen (und der Dezimalzahlen in Brüche)' ausdeutbar. Es ist offensichtlich, dass das VERFAHREN-Modell, das beide ‚Umwandlungsrichtungen' beinhaltet, schwerer zu

---

[140] Der vierte Auftrag der Auftragssammlung ‚Brüche und Dezimalzahlen' beinhaltet einzelne Aspekte des UMKEHRSATZES.

bilden ist als nur das VERFAHREN zur Umwandlung der Brüche in Dezimalzahlen. Das einfacher zu konstruierende VERFAHREN-Modell weist auf der ersten Zerlegungsstufe folgende Struktur auf:

VERFAHREN ‚Umwandlung der Brüche in Dezimalzahlen' (T1-10)

[1] HINFÜHRUNG ZUM ZIEL DES VERFAHRENS ‚Gleichwertige Brüche sind zu einer Kette verbindbar. Ein besonderes Glied dieser Kette ist der Kernbruch. Das zweite besondere Glied ist eine Dezimalzahl' (T1-3)

[2] VERFAHRENBESTANDTEILE ‚Ein Bruch wird in eine Dezimalzahl umgewandelt, indem man Zähler durch den Nenner dividiert. Diese Vorgehensweise gilt, weil ein Bruch $\frac{a}{b}$ bedeutet: a Pizzen an b Personen verteilen' (T4-T6)

[3] ANWENDUNGSMÖGLICHKEITEN DES VERFAHRENS ‚Brüche werden in Dezimalzahlen umgewandelt, um zwei Brüche miteinander zu vergleichen oder den Platz eines Bruchs auf dem Zahlenstrahl zu finden'(T7-9)

[4] VORGEHENSWEISE ZUM VERINNERLICHEN DES VERFAHRENS ‚So viele Brüche in Dezimalzahlen umwandeln, bis man das Verfahren sicher und schnell ausführen kann' (T10)

Struktur 24: Vom Lehrtext ‚Brüche und ihre Dezimalzahlen' nahegelegtes VERFAHREN-Modell

Im Vergleich wird deutlich, dass die Struktur und die Inhalte des VERFAHREN-Modells dem beschriebenen SATZ-Modell ähneln. Der entscheidende Unterschied zwischen beiden Modellen besteht darin, dass die einzelnen kognitiven Inhalte unterschiedlich akzentuiert werden. Dies bezieht sich insbesondere auf die Inhalte, die anhand der Teiltexte 4-6 konstruiert werden. So dominiert beim SATZ-Modell die SATZAUSSAGE und ihre BEGRÜNDUNG (vgl. [2] in der Struktur 23), wobei VERFAHRENSSCHRITTE in die BEGRÜNDUNG eingebettet sind. Beim VERFAHREN-Modell befinden sich die VERFAHRENSSCHRITTE demgegenüber auf einer höheren Zerlegungsstufe. Allerdings ähneln sich die zur Bildung beider Modelle notwendigen Inferenzen. Daher ist das VERFAHREN-Modell im Vergleich zum beschriebenen SATZ-Modell zumindest nicht leichter zu bilden. Darüber hinaus beinhaltet die Lehrtextoberfläche recht eindeutige Signale, dass der Zusammenhang zwischen Brüchen und Dezimalzahlen im Vordergrund steht – und nicht die Frage, wie man Brüche und Dezimalzahlen umwandelt (vgl. insbesondere Ausdruck 47). Um das beschriebene VERFAHREN-Modell zu konstruieren, wäre es notwendig, diese sprachlichen Hinweise zu ignorieren, was die Modellbildung erschwert. Insgesamt erscheint damit das beschriebene SATZ-Modell eindeutig als das am leichtesten zu konstruierende MATHEMATISCHE(S)-ELEMENT(E)-Modell.

IV. Beschreibung naheliegender AUFGABE(N)-Modelle und Diskussion ihrer Bildungsschwierigkeit

Nach der Beschreibung und Diskussion des SATZ-Modells soll nun kontrastierend betrachtet werden, inwiefern der Lehrtext im Rahmen des AUFGABE-Schemas ausdeutbar ist. Dabei wird davon ausgegangen, dass unser Modellschüler beim Verarbeiten des Lehrtextes annimmt, dass im Text die im Mathematikunterricht vorkommenden AUFGABENSTELLUNGEN und ihre LÖSUNGEN mitgeteilt werden. Im Teiltext 1 werden das Erweitern, das Kürzen und der Kernbruch angesprochen. Da das Erweitern und Kürzen der Brüche in vorherigen Kapiteln behandelt wurden, darf von unserem Modellschüler angenommen werden, dass für ihn nunmehr der Begriff ‚Kernbruch' als zentral und als ein AUFGABENOBJEKT zu betrachten ist. Damit liegt die Interpretation von Teiltext 1 als AUFGABE nahe, deren (allgemeine) AUFGABENSTELLUNG ‚Wandle einen gegebenen Bruch in einen Kernbruch um' lautet. Die BEARBEITUNGSSCHRITTE ‚Kürze den gegebenen Bruch so weit wie möglich' sind im Lehrtext nicht explizit vorhanden und müssen anhand der Ausdrücke 4-7 schlussfolgernd inferiert werden. Dabei bleiben in Bezug auf die BEARBEITUNGSSCHRITTE einige zentrale Aspekte/Leerstellen offen: Muss man bei der Bearbeitung der Aufgabe zuerst erweitern und dann kürzen, so wie dies im Ausdruck 5 gezeigt wurde? Gibt es eine eindeutige Regel, wie man zu einem Kernbruch gelangt, d.h. wie findet man die Zahl, mit der man den Bruch kürzen muss? Die Bearbeitungsschritte-Leerstelle ist offensichtlich mit ausschließlich textbasierten Werten nicht belegbar; ihre Füllung erfordert umfangreiche Inferenzen und sie bleibt teilweise unvollständig. Des Weiteren beinhaltet der Teiltext 1 viele Textdaten, die sich auf das Erweitern beziehen (vgl. Ausdrücke 2-3), jedoch im Rahmen der konstruierten AUFGABE ‚Umwandlung eines Bruchs in einen Kernbruch' kaum eine Rolle spielen und demzufolge schwer in das AUFGABE-Modell integrierbar sind. Im Rahmen des AUFGABE-Schemas ist fraglich, warum der Autor das überflüssige bzw. kaum relevante Erweitern relativ ausführlich thematisiert und gleichzeitig die zentrale AUFGABENSTELLUNG und die LÖSUNG nicht expliziert. Insgesamt ist die vom Teiltext 1 nahegelegte AUFGABE aufgrund der vielen schwer integrierbaren Textdaten und der Notwendigkeit, die AUFGABENSTELLUNG und LÖSUNG größtenteils selbstständig zu inferieren, schwer konstruierbar. Sowohl die AUFGABENSTELLUNG als auch ihre LÖSUNG bleiben vage, also teilweise offen. Das erste Teilmodell ist damit stark sinnbeeinträchtigt.

Im Teiltext 2 wird die Kette aus (gleichwertigen) Brüchen thematisiert. Auch hier tauchen im Rahmen des AUFGABE-Schemas starke Sinnbeeinträchtigungen auf, denn sowohl die AUFGABENSTELLUNG als auch ihre LÖSUNG werden im Lehrtext nicht expliziert und sind anhand der Textdaten schwer zu inferieren. Unklar bleibt zunächst, welche AUFGABE im Text mitgeteilt wird. Denkbar wäre beispielsweise die AUFGABENSTELLUNG ‚Erstelle zu einem gegebenen Bruch eine Kette', wobei die zugehörigen BEARBEITUNGSSCHRITTE ‚Berechne durch Erweitern und Kürzen mehrere weitere Glieder der Kette und verbinde sie jeweils mit einem Gleichheitszeichen' wären. Da die expliziten Angaben fehlen, bleibt vage, wie lang die Kette sein soll (so lang wie im Ausdruck 11?), ob man in einer Kette sowohl die erweiterten als auch die gekürzten Brüche auftauchen müssen und ob der Kernbruch dabei sein muss. Der nachfolgende Ausdruck 12 legt eine positive Beantwortung der letztgenannten Frage nahe. Insgesamt ist die anhand des Teiltextes 2 konstruierte AUFGABE stark unvollständig.

Im Teiltext 3 führt der Autor relativ ausführlich ein neues AUFGABENOBJEKT – Dezimalzahl – ein. Im Rahmen des AUFGABE-Schemas erscheint solch eine ausführliche HINFÜHRUNG als sekundär. Anhand des Ausdrucks 17 wird dann die AUFGABENSTELLUNG ‚Wandle einen gegebenen Bruch in eine Dezimalzahl' konstruiert. Die BEARBEITUNGSSCHRITTE und die PRÄSENTATION DER LÖSUNG werden im Teiltext 5 mitgeteilt. Teiltext 4 wird als BEGRÜNDUNG DER BEARBEITUNGSSCHRITTE ausgedeutet. Diese ist im Rahmen einer AUFGABE jedoch ebenso sekundär. Dies wirkt sinnbeeinträchtigend; es ist nicht nachvollziehbar, weshalb in diesem Text bezogen auf das AUFGABE-Schema gehäuft unwesentliche Sachverhalte mitgeteilt werden.

Der nachfolgende Teiltext 6 erscheint im Rahmen der konstruierten AUFGABE ‚Umwandlung eines Bruchs in eine Dezimalzahl' als größtenteils überflüssig. Zudem wird im Zuge der Verarbeitung der Ausdrücke 31 und 32 eine offene Leerstelle aktiviert, die sich mit der Frage verbindet, ob man – wie dies im Beispiel vorgeführt wurde – beim Umwandeln eines gegebenen Bruchs die ausgerechnete Dezimalzahl nochmals in einen Bruch umwandeln soll. Insgesamt ist die AUFGABE ‚Umwandlung eines gegebenen Bruchs in eine Dezimalzahl' anhand der Teiltexte 3-6 schwer konstruierbar, denn die meisten Textdaten sind bezüglich der AUFGABE sekundärer Natur und damit wenig relevant. Zusätzlich bleibt die LÖSUNG der AUFGABE teilweise offen.

Die anschließenden Teiltexte 7 und 8 wurden im Rahmen naheliegender MATHEMATISCHE(S)-ELEMENT(E)-Modelle als ANWENDUNGSMÖGLICHKEITEN interpretiert. Analog können sie auch im Rahmen des AUFGABEN-Modells als ANWENDUNGSMÖGLICHKEITEN der AUFGABE ‚Umwandlung eines Bruchs in Dezimalzahlen' ausgedeutet werden. Allerdings ist diese Leerstelle im Rahmen des AUFGABE-Schemas sekundär und nicht verfestigt (vgl. die Konzeption des AUFGABE-Schemas in Kap. 5.1). Dementsprechend erscheinen auch die Belegung dieser Leerstelle bzw. das entsprechende Teilmodell als sekundär. Unterstellt man unserem Modellschüler ein aktiviertes AUFGABE-Schema, dürfte er eher davon ausgehen, dass in den beiden umfangreichen Teiltexten vornehmlich neue AUFGABEN mitgeteilt werden als dass etwas Unwesentliches thematisiert wird. Daher wird der Ausdruck 35 als die AUFGABENSTELLUNG ‚Vergleiche zwei Brüche bezüglich ihrer Größe' ausgedeutet. Die dazugehörige Bearbeitungsschritte-Leerstelle mit textbasierten Werten ist dabei allerdings nur teilweise belegbar: Was man nach der Umwandlung der Brüche in Dezimalzahlen tun soll, wird im Text nicht mitgeteilt. Die entsprechenden Inhalte können vom Modellschüler zwar inferiert werden, allerdings stellt dies eine recht hohe kognitive Leistung dar, denn der Größenvergleich zweier Dezimalzahlen wurde in vorangegangenen Lehrtexten nicht explizit behandelt und kann beim Modellschüler nicht verfestigt sein (vgl. Vorwissen des Modellschülers). Eine vollständige Konstruktion der BEARBEITUNGSSCHRITTE der AUFGABENSTELLUNG ‚Vergleiche zwei Brüche bezüglich ihrer Größe' verlangt also komplizierte Inferenzen. Zusätzlich sinnbeeinträchtigend wirkt, dass, nachdem im Text bereits eine Vielzahl ‚unwesentlicher' Inhalte mitgeteilt wurde, die im Rahmen einer AUFGABE zentralen BEARBEITUNGSSCHRITTE stark unvollständig präsentiert werden.

Anhand der folgenden Ausdrücke (A36-T9) wird die AUFGABE ‚Bestimmung des Platzes eines gegebenen Bruchs auf dem Zahlenstrahl' konstruiert. Die AUFGABENSTELLUNG wird anhand der Ausdrücke 36-40 gebildet; sie kann im Wesentlichen mit textbasierten Werten belegt werden. Allerdings erscheint die ausführliche ‚Herleitung' der AUFGABENSTELLUNG, also das Thematisieren des im Rahmen der konstruierten AUFGABENSTELLUNG sekundären ‚Doppelmeters' wiederum als überflüssig. Die zur konstruierten AUFGABENSTELLUNG gehörige Bearbeitungsschritte-Leerstelle kann lediglich hinsichtlich des ERSTEN SCHRITTES ‚Wandle den gegebenen Bruch in eine Dezimalzahl um' mit textbasierten Werten (vgl. Ausdrücke 36 und 41) belegt werden. Die NACHFOLGENDEN BEARBEITUNGSSCHRITTE, also die möglichen Antworten auf die Frage, wie man den Ort einer Dezimalzahl auf dem Zahlenstrahl sucht und findet, bleiben auf der Lehrtextoberfläche größtenteils offen. Eine vollständige Belegung dieser Leerstelle bedarf umfangreicher Inferenzen, wobei insbesondere das Fehlen der vollständigen LÖSUNG der konkreten AUFGABENSTELLUNG ‚Wo liegt die Zahl $\frac{5}{7}$ auf dem Zahlenstrahl?' – also das Fehlen des Bruchs in der Grafik 46 – als stark sinnbeeinträchtigend wirkt.

Die Mitteilungen bezüglich der ‚periodischen Dezimalzahlen' (vgl. Ausdrücke 41-44) werden im Rahmen der AUFGABE ‚Bestimmung des Platzes eines gegebenen Bruchs auf dem Zahlenstrahl' als BESONDERE AUFGABENOBJEKTE bzw. BESONDERE ZWISCHENERGEBNISSE intakt interpretiert. Demgegenüber erscheint die Mitteilung, dass jede Zahl (jeder Bruch) auf dem Zahlenstrahl genau einen bestimmten Platz hat (vgl. Ausdruck 45), im Rahmen des konstruierten AUFGABE-Modells als irrelevant. Dies resultiert daher, dass die Eindeutigkeit der geforderten LÖSUNG im Rahmen des AUFGABE-Schemas verfestigt ist. Die entsprechende Annahme unseres Modellschülers kann vereinfacht wie folgt formuliert werden: Wenn in Aufgaben nach dem Platz eines Bruchs auf dem Zahlenstrahl gefragt wird, dann ist dieser eindeutig, – ansonsten wäre eine solche Aufgabe untypisch bzw. merkwürdig. Vor diesem Hintergrund teilt der Text in der Perspektive des AUFGABE-Schemas erneut etwas Zweitrangiges mit und verzichtet gleichzeitig darauf, die zentralen BEARBEITUNGSSCHRITTE explizit und vollständig darzustellen. Insgesamt bedarf die Konstruktion der AUFGABE ‚Bestimme den Platz eines gegebenen Bruchs auf dem Zahlenstrahl' also ebenfalls umfangreicher Inferenzen, dabei sind einige Textdaten der entsprechenden Teiltexte nur schwer integrierbar.

Der nachfolgende Teiltext 10 wird im Rahmen der AUFGABEN als ein Hinweis darauf ausgedeutet, wie man vorgehen sollte, um die BEARBEITUNGSSCHRITTE zur UMWANDLUNG DER BRÜCHE IN DEZIMALZAHLEN zu verinnerlichen; demnach sollte man sich selbst Aufgaben stellen. Dieser Hinweis erscheint im Rahmen des AUFGABE-Schemas als untypisch, denn es gehört zum Wesen von AUFGABEN, dass sie vom Lehrer bzw. im Schulbuch gestellt werden. Damit erscheint dieser Teiltext im Rahmen des AUFGABEN-Modells als sperrig. Der Hinweis, dass man auch Dezimalzahlen in Brüche umwandeln soll, ist dabei in das konstruierte Modell gar nicht integrierbar, denn bei den AUFGABENSTELLUNGEN stellen nicht Dezimalzahlen, sondern Brüche die AUSGANGSOBJEKTE dar.

Insgesamt werden also im Laufe der Lehrtextverarbeitung folgende AUFGABEN-Modelle konstruiert:

[1] AUFGABE ‚Umwandlung eines Bruchs in einen Kernbruch' (T1)
[2] AUFGABE ‚Erstellung einer Kette aus Brüchen zu einem gegebenen Bruch' (T2)
[3] AUFGABE ‚Umwandlung eines Bruchs in eine Dezimalzahl' (T3-T6)
[4] AUFGABE ‚Größenvergleich zweier Brüche' (A 35)
[5] AUFGABE ‚Bestimmung des Platzes eines gegebenen Bruchs auf dem Zahlenstrahl' (A 36-T9)
[6] VORGEHENSWEISE BEIM VERINNERLICHEN DER (TEIL-)BEARBEITUNGSSCHRITTE DER AUFGABEN [3], [4] und [5] ‚Wandle viele Brüche in Dezimalzahlen um' (T10)

Blickt man auf die Gemeinsamkeiten der AUFGABEN, die die im Lehrtext dargestellte Aufgabenklasse konstituieren, fällt zunächst auf, dass die Aufgaben [3] bis [5] insofern zusammenhängen, als sie teilweise die gleichen BEARBEITUNGSSCHRITTE beinhalten. Die ersten beiden AUFGABEN sind jedoch schwer mit den restlichen AUFGABEN verknüpfbar. Lediglich die Tatsache, dass alle AUFGABEN Brüche als AUSGANGSOBJEKTE beinhalten, bildet eine übergreifende Gemeinsamkeit. Insgesamt wird vom Lehrtext folgendes Modell nahegelegt:

AUFGABEN ‚Brüche'
- [1] AUFGABE ‚Umwandlung eines Bruchs in einen Kernbruch' (T1)
- [2] AUFGABE ‚Erstellung einer Kette aus Brüchen zu einem gegebenen Bruch' (T2)
- [3] AUFGABEN ‚Brüche und Dezimalzahlen'
  - [3.1] GRUNDAUFGABE ‚Umwandlung eines Bruchs in eine Dezimalzahl' (T3-T6, T3 und T6 teilweise schwer integrierbar)
  - [3.2] WEITERFÜHRENDE AUFGABE ‚Größenvergleich zweier Brüche' (A 35)
  - [3.3] WEITERFÜHRENDE AUFGABE ‚Bestimmung des Platzes eines gegebenen Bruchs auf dem Zahlenstrahl' (A 36-T9)
  - [3.4] HINWEIS ZUM LERNEN DER BEARBEITUNGSSCHRITTE DER GRUNDAUFGABE ‚Wandle viele Brüche in Dezimalzahlen um' (T10)

Struktur 25: Vom Lehrtext ‚Brüche und ihre Dezimalzahlen' nahegelegtes AUFGABEN-Modell

Insgesamt weist das AUFGABEN-Modell eine recht intakte Struktur und Belegung auf. Zudem integriert es die meisten Textdaten. Damit handelt es sich um ein naheliegendes Modell. Allerdings weist dieses Modell zahlreiche Sinnbeeinträchtigungen auf und ist in absoluter Hinsicht schwer konstruierbar. So sind viele zentralen Leerstellen mit textbasierten Werten nicht belegbar (insbesondere die BEARBEITUNGSSCHRITTE der AUFGABEN [3.2] und [3.3]). Die entsprechenden Inferenzen sind relativ kompliziert. Zudem bleiben einzelne AUFGABENSTELLUNGEN und die entsprechenden LÖSUNGEN teilweise offen (insbesondere im Falle der AUFGABEN [1] und [2]). Schließlich erscheint fast ein Drittel des Gesamtlehrtextes als sekundär. Im Text wird aus der Sicht eines aufgabenorientierten Lesers häufig etwas Zweitrangiges mitgeteilt und gleichzeitig Wesentliches verschwiegen. Insgesamt weist das AUFGABEN-Modell damit einen hohen Bildungsschwierigkeitsgrad auf.

V. Integrative Lehrtextkennzeichnung – absolute und relative Bildungsschwierigkeiten naheliegender Modelle

Die durchgeführte Analyse liefert recht eindeutige Ergebnisse. Das SATZ-Modell ist in absoluter Hinsicht leicht konstruierbar. Lediglich die Bildung des Teilmodells [2.2] (vgl. Struktur 23) – also die Verallgemeinerung der textbasiert gebildeten SATZAUSSAGE und der dazugehörigen BEGRÜNDUNG – verlangt relativ umfangreiche Inferenzen. Des Weiteren ist der Hinweis an den Leser, dass man auch Dezimalzahlen in Brüche umwandeln soll, im Rahmen des SATZ-Modells schwer integrierbar. Darüber hinaus enthält das SATZ-Modell kaum Sinnbeeinträchtigungen. Das vom Lehrtext nahegelegte AUFGABEN-Modell ist demgegenüber sowohl absolut als auch im konkreten Vergleich zum SATZ-Modell schwer konstruierbar. Die zentrale Sinnbeeinträchtigung besteht darin, dass viele Textdaten im Rahmen des Modells als sekundär, also im Grunde als überflüssig erscheinen. Gleichzeitig fehlen im Lehrtext die als zentral empfundenen vollständigen BEARBEITUNGSSCHRITTE und AUFGABENSTELUNGEN. Lediglich die Schüler, die über ein sehr stark ausgeprägtes und resistentes AUFGABE-Schema verfügen, dürften diesen Lehrtext als AUFGABEN interpretieren. Bei allen anderen Schülern dürfte sich das MATHEMATISCHE-ELEMENT-Schema – hier: das SATZ-Schema – als Interpretationsvorlage des Gesamtlehrtextes gegenüber dem AUFGABE-Schema durchsetzen.

7. AUFGABE(N)-Lehrtexte – vertiefende und weiterführende Betrachtung der analytischen Ergebnisse

Nachdem nunmehr insgesamt fünf Schulbuchlehrtexte analysiert worden sind, werden die analytischen Ergebnisse verallgemeinert, zugespitzt und vertieft. Zunächst werden die charakteristischen Merkmale der analysierten Lehrtexte, die sich leichter im Rahmen des AUFGABE-Schemas ausdeuten lassen, erarbeitet (vgl. Kap. 7.1). Anschließend werden im Rückgriff auf die in diese Arbeit einführenden Gedanken die analytischen Ergebnisse in einem soziologischen Kontext interpretiert, wobei der Gedanke zentral ist, dass die Schulbücher als spezifische gesellschaftlichen Produkte eine Mediator-Rolle zwischen dem gesellschaftlich akzeptierten und dem tatsächlich stattfindendem Unterricht einnehmen (vgl. Kap. 7.2).

7.1. Analysierte Schulbuchlehrtexte als AUFGABE(N)-Lehrtexte in mathematischem Gewand

Die Analyse ausgewählter mathematischer Schulbuchlehrtexte wurde mit dem Ziel durchgeführt, die ihnen innewohnenden Lehrpotentiale zu ermitteln. Von besonderem Interesse war dabei weniger die jeweils konkrete Charakteristik der von den Lehrtexten nahegelegten Modelle und Lernergebnisse, sondern vielmehr die absolute Bildungsschwierigkeit aller naheliegenden Modelle sowie der relative Bildungsschwierigkeitsgrad naheliegender AUFGABE(N)-Modelle im Vergleich zu naheliegenden MATHEMATISCHE(S)-ELEMENT(E)-Modellen. Dieses Interesse resultierte aus der Annahme, dass die beiden genannten Textmerkmale zentral dafür sind, was Schüler anhand der Schulbuchlehrtexte lernen können (vgl. Kap. 6.2).

In den ersten drei Analysen wurden Schulbuch(-lehr-)texte mit der Thematik ‚Zusammenhang zwischen Brüchen und Dezimalzahlen‘ (vgl. Kap. 5.3, 6.1 und 6.3) betrachtet. Dabei zeigt sich, dass die Schulbuchlehrtexte hinsichtlich der beiden zentralen Merkmale Ähnlichkeiten aufweisen: Sie sind in absoluter Hinsicht schwer intakt ausdeutbar, wobei die naheliegenden AUFGABE(N)-Modelle deutlich leichter zu konstruieren sind als die naheliegenden MATHEMATISCHE(S)-ELEMENT(E)-Modelle. Um auszuschließen, dass diese Befunde primär aus der Spezifik des Lehrstoffs ‚Zusammenhang zwischen Brüchen und Dezimalzahlen‘ resultieren, wurde ein weiterer Lehrtext analysiert, in dem ein anderer Lehrstoff (Einführung linearer Funktionen) behandelt wird (vgl. Kap. 6.4). Dabei zeigte sich, dass dieser Lehrtext eine ähnliche Ausprägung der genannten Merkmale aufweist. Um den möglichen Einwand zu entschärfen, dass diese einheitlichen Befunde hauptsächlich aus den womöglich inadäquaten theoretischen Annahmen – speziell aus der Annahme des AUFGABE-Schemas – resultieren, wurde schließlich ein kontrastierender Lehrtext, der sich leicht im Rahmen eines MATHEMATISCHES-ELEMENT-Modells interpretieren lässt, vorgestellt (vgl. Kap. 6.5). Somit resultiert die festgestellte Schwierigkeit einer sinnvollen Ausdeutung der Mathematikschulbuchlehrtexte (insbesondere im Rahmen des MATHEMATISCHES-ELEMENT-Schemas) aus den Spezifika der Lehrtexte und nicht aus der Spezifik des Lehrstoffs oder der Inadäquatheit der theoretischen Annahmen.

Merkmale eines AUFGABE(N)-Lehrtextes

Im Folgenden werden mathematische Schulbuchlehrtexte, die ein relativ leicht zu konstruierendes AUFGABE(N)-Modell nahelegen, als AUFGABE(N)-Lehrtexte bezeichnet. Die dazu konträren Lehrtexte, die sich also relativ leicht im Rahmen des MATHEMATISCHE(S)-ELEMENT(E)-Schemas ausdeuten lassen, werden als MATHEMATISCHE(S)-ELEMENT(E)-Lehrtexte bezeichnet. Von besonderem Interesse ist die Frage, was bezüglich der Lehrtexte im Einzelnen dafür ‚sorgt', dass sie zu AUFGABE(N)-Lehrtexten werden. Präziser formuliert lautet die Frage: Welche Merkmale an der Lehrtextoberfläche begünstigen die Bildung eines AUFGABE(N)-Modells und erschweren bzw. hemmen gleichzeitig die Bildung eines MATHEMATISCHE(S)-ELEMENT(E)-Modells? Zur Beantwortung dieser Frage werden diejenigen Merkmale der Lehrtextoberfläche zusammengestellt, die die untersuchten AUFGABE(N)-Lehrtexte mehrheitlich aufweisen und die beim untersuchten MATHEMATISCHES-ELEMENT-Lehrtext in einer jeweils konträren Ausprägung vorliegen.

Erstens: Fehlen expliziter sprachlicher Hinweise bezüglich der kommunikativ-semantischen Rolle einzelner (insbesondere nicht-natursprachlicher) Teiltexte

Bei den analysierten AUFGABE(N)-Lehrtexten wurde mehrfach festgestellt, dass einzelne Teiltexte auf der Textoberfläche miteinander unverbunden sind, so dass ihr Zusammenhang vom Leser selbstständig inferiert werden muss. Dies betrifft insbesondere den Lehrtext 1 ‚Dezimalzahlen, Brüche und Prozente', in dem zwischen dem Teiltext 1 (Zusammenhang zwischen Dezimalzahlen und Brüchen), dem Teiltext 2 (Umwandelbarkeit der Dezimalzahlen in Brüche und der Brüche in Dezimalzahlen) und dem Teiltext 3 (Prozente) semantische Lücken bestehen; der Leser muss mit teilweise komplizierten kognitiven Operationen den Zusammenhang der mitgeteilten Inhalte inferieren. Im Lehrtext fehlen also explizite sprachliche Hinweise hinsichtlich der kommunikativ-semantischen Rolle einzelner Teiltexte (erster Ordnung) im Rahmen des Gesamtlehrtextes, die die Konstruktion eines einheitlichen zusammenhängenden Gesamtmodells erleichtern würden. Beim Lehrtext 2 ‚An der Kühltheke' tritt das beschriebene Phänomen ebenfalls auf.[141] Des Weiteren beinhalten alle analysierten AUFGABE(N)-Lehrtexte viele Teiltexte nicht-natursprachlicher Art, d.h. formal-mathematische und/oder graphische Textdaten.[142] Die kommunikativ-semantische Rolle der Gleichungen/Grafiken im Rahmen des Gesamtlehrtextes wird dabei natursprachlich häufig nicht erläutert, so dass ihre Verbindung zu den anderen Teiltexten vage bleibt.[143] Zusätzlich

[141] Wie in der entsprechenden Analyse ausführlich erläutert, bestehen im Rahmen des Lehrtextes 2 semantische Lücken zwischen den Teiltexten erster Ordnung (vgl. Kap. 6.3).
[142] Vgl. Ausdrücke 2-12 im analysierten ‚Kasten', Ausdrücke 3, 4, 13-15 und 22 im Lehrtext 1; Ausdrücke 3, 9, 13, 21, 32, 43, 47 und 53 im Lehrtext 2; sowie Ausdrücke 7 und 29 im Lehrtext 3.
[143] Vgl. insbesondere den ‚Kasten', alle formal-mathematischen Teiltexte im Rahmen des Lehrtextes 1 sowie die grafisch-mathematischen Teiltexte (Ausdrücke 47 und 53) im Rahmen des Lehrtextes 2.

sind diese nicht-natursprachlichen Teiltexte oft typographisch in einer besonderen Weise gestaltet: Sie sind umrahmt und mit der Überschrift ‚Beispiele' versehen.[144]

Beim MATHEMATISCHES-ELEMENT-Lehrtext ‚Brüche und ihre Dezimalzahlen' wird demgegenüber eine Verbindung zwischen den einzelnen (auch nicht-natursprachlichen) Teiltexten mit sprachlichen Mitteln deutlich. So sind die ersten beiden Teiltexte, also die Mitteilungen bezüglich des Kernbruchs und die Mitteilungen bezüglich der Kette aus gleichwertigen Brüchen mit den nachfolgenden Teiltexten 3-6, in denen der Zusammenhang zwischen Brüchen und Dezimalzahlen thematisiert wird, semantisch eindeutig durch die Mitteilung verbunden, dass Kernbruch und Dezimalzahlen besondere Glieder dieser Kette sind (vgl. Ausdrücke 12-14). Im Teiltext 7 ist von der ‚Nützlichkeit' des Umrechnens der Brüche in Dezimalzahlen (vgl. Ausdruck 34) die Rede; durch diesen Hinweis wird die Anwendungsmöglichkeit-Leerstelle aktiviert, in deren Rahmen die nachfolgenden Teiltexte interpretiert werden. Auch der letzte Teiltext, der dem Leser Hinweise dahingehend liefert, wie er sich den ‚Zusammenhang zwischen Brüchen und ihren Dezimalzahlen' aneignen soll (vgl. Ausdruck 47), ist hinsichtlich seiner kommunikativ-semantischen Rolle im Gesamttext klar. Außerdem beinhaltet der Lehrtext lediglich kurze nicht-natursprachliche Teiltexte. Die formal-mathematischen Teiltexte bestehen stets aus einem (!) Ausdruck, also aus einer Gleichung bzw. einer Rechnung.[145] Dabei werden alle formalen Teiltexte mit den vorhergehenden natursprachlichen Teiltexten erläutert, so dass der Leser eindeutige Hinweise bezüglich der kommunikativ-semantischen Rolle der mitgeteilten Gleichungen, der Rechnung und der Grafik erhält. So wird beispielsweise die Gleichung 11 insbesondere anhand des größtenteils natursprachlich verfassten Ausdrucks 10 erläutert. Schließlich ist bemerkenswert, dass bei den nicht-natursprachlichen Teiltexten des Lehrtextes 4 die in den AUFGABE(N)-Lehrtexten zumeist vorhandene Überschrift ‚Beispiele' fehlt.

Falls an der Lehrtextoberfläche keine oder lediglich vage Hinweise bezüglich der kommunikativ-semantischen Rolle der einzelnen Abschnitte vorhanden sind, muss der Leser die auf Grundlage der Teiltexte konstruierten Teilmodelle ausschließlich selbstständig miteinander verknüpfen. Diese inferenzielle Leistung ist im Rahmen eines MATHEMATISCHE(S)-ELEMENT(E)-Modells zumeist kompliziert, da zur Schließung einer semantischen Lücke zwischen Teiltexten oft umfangreiche Schlussfolgerungen aus textbasierten Werten bzw. kognitiven Inhalten erforderlich sind. Das Schließen einer semantischen Lücke im Rahmen eines AUFGABE(N)-Modells ist demgegenüber in der Regel leichter, da sich die einzelnen konstruierten AUFGABEN häufig aufgrund einer (zumeist leicht zu inferierenden) Gemeinsamkeit – wie etwa gleiche AUFGABENOBJEKTE – zu einer Aufgabenklasse verbinden

[144] Vgl. Ausdrücke 3, 4, 13-15, 22 und 43 im Lehrtext 1, Ausdrücke 9 ,21, 32 und 43 im Lehrtext 2 sowie Ausdrücke 26 und 27 im Lehrtext 3.
[145] Vgl. Ausdrücke 11, 28, 32 und 46.

lassen, was dazu führt, dass solch ein Gesamtmodell im Rahmen des AUFGABE-Schemas als intakt empfunden wird.[146]

Die formal-mathematischen bzw. graphischen Teiltexte stellen hinsichtlich der Ausdrucksform ihrer semantisch-kommunikativen Rolle im Gesamtlehrtext eine Besonderheit dar. Während natürliche Sprache über vielfältige Mittel verfügt, Akzente zu setzen und damit die semantisch-kommunikative Funktion zu signalisieren – wie etwa Satzbau, spezifische akzentuierende Wörter, metakommunikative Hinweise usw. –, entfallen diese Mitteln bei formal-mathematischen bzw. graphischen Teiltexten weitgehend, d.h. nicht-natursprachliche Teiltexte beinhalten hinsichtlich ihrer kommunikativ-semantischen Rolle kaum steuernde Hinweise. Einer aus dem Gesamttext herausgerissenen ‚Rechnung' ‚sieht' man nicht an, mit welcher Absicht sie und was mit Ihr im Einzelnen mitgeteilt wird, worin also gewissermaßen ihre ‚Pointe' besteht. Eine weitere Besonderheit formal-mathematischer bzw. graphischer (Teil-)Texte besteht darin, dass sie im Rahmen mathematischer Schulbuchlehrtexte in der Regel sowohl als LÖSUNG einer AUFGABE als auch ein MATHEMATISCHES ELEMENT – beispielsweise als ein(e) SATZ(-AUSSAGE) – interpretierbar sind.[147] Aufgrund der den nicht-natursprachlichen Textdaten innewohnenden kommunikativen Vagheit, die durch die Beson-derheit des Kommunikationsmediums (Mathematikschulbuch) noch verstärkt wird, bedürfen solche Teiltexte in besonderem Maße eindeutiger (natursprachlicher) Hinweise hinsichtlich ihrer kommunikativ-semantischen Rolle im Gesamtlehrtext.[148] Falls solche Hinweise fehlen bzw. lückenhaft sind – wie dies bei den analysierten AUFGABE(N)-Lehrtexten häufig der Fall ist – bleibt ihre kommunikativ-semantische Rolle unklar. Sie sind damit stets sowohl als LÖ-SUNG einer AUFGABE auch als ein VERFAHREN oder als ein SATZ interpretierbar. Die in den analysierten AUFGABE(N)-Lehrtexten häufig vorgefundene spezifische typographische Gestaltung nicht-natursprachlicher Teiltexte – Umrandung mit der Überschrift ‚Beispiel' – kann als Hinweis darauf gedeutet werden, dass im ‚Beispielkasten' die LÖSUNG einer AUFGABE präsentiert wird. Falls ein Lehrtext ausschließlich solche auf AUFGABEN hin-weisenden typographischen Signale hinsichtlich der kommunikativ-semantischen Rolle der nicht-natursprachlichen Teiltexte enthält, werden konkurrierende Interpretationen dieser Teiltexte im Rahmen des MATHEMATISCHES-ELEMENT-Schemas naturgemäß erschwert. Ins-gesamt kann festgehalten werden, dass fehlende bzw. stark lückenhafte natursprachliche Hinweise zur kommunikativ-semantischen Rolle (nicht-naturspachlicher) Teiltexte in Ver-bindung mit einer eher auf AUFGABEN hinweisenden typographischen Gestaltung formal-mathematischer bzw.

[146] Vgl. die Diskussion der notwendigen Inferenzen im Rahmen der von den Lehrtexten 1 und 2 nahegelegten AUFGABE(N)-Modelle im Kap. 6.1 und 6.3.

[147] Vgl. die entsprechenden Diskussionen der von den nichtnatursprachlichen Teiltexten nahegelegten Modelle.

[148] Die kommunikativ-semantischen Besonderheiten der formal-mathematischen Textdaten scheinen Paradoxien aufzuweisen. Einerseits sind formale (Teil-)Texte semantisch in besonderer Weise eindeutig. So trägt die Formalisierung sprachlicher Mittel zu „sprachlicher Standardisierung" (Heintz 2000, S. 259) bei, die „Verstehen und Verständigung [der Mathematiker E.K.] auch unter anonymen und sozial heterogenen Bedingungen […] ermöglichen" (ebd.). Auf der anderen Seite scheinen diese Textdaten für Lernende bezüglich ihrer kommunikativ-semantischen Rolle in besonderer Weise vage zu sein. Diese Paradoxie bedarf im Rahmen der mathematikdidaktischen Forschung einer intensiveren Zuwendung.

graphischer Teiltexte (Umrandung mit der Überschrift ‚Beispiel') die AUFGABE(N)-Modellbildung begünstigen und gleichzeitig die MATHEMATISCHE(S)-ELEMENT(E)-Modellbildung hemmen.

Zweitens: Fehlen oder starke Lückenhaftigkeit der Teiltexte, die als BEGRÜNDUNGEN neuer Sachverhalte interpretierbar sind

Bei den durchgeführten Analysen fiel auf, dass in den AUFGABE(N)-Lehrtexten die neuen Sachverhalte lediglich mitgeteilt werden. Die Frage, warum sie jeweils gelten, wird zumeist nicht beantwortet. Damit fehlen häufig Textdaten, die als BEGRÜNDUNGEN neuer Sachverhalte ausdeutbar sind, oder die begründenden Teiltexte sind so lückenhaft, dass ein vollständiges Inferieren für adressierte Schüler kaum möglich ist.[149] Insbesondere beinhalten die analysierten AUFGABE(N)-Lehrtexte oft keine deutlichen Hinweise bezüglich der BEGRÜNDUNGEN. Diese sind häufig ausschließlich anhand der formal-mathematischen Textdaten angedeutet; sie sind gewissermaßen in den Gleichungen der ‚Beispiel-Kästen' hinter einer in der Regel leichter zu bildenden Interpretation im Rahmen des AUFGABE-Schemas ‚versteckt'.[150]

Der konträre Lehrtext 4 beinhaltet demgegenüber mehrere begründende Teiltexte. So wird insbesondere die zentrale SATZAUSSAGE ‚0,75 ist ein Glied in der Kette zum Kernbruch $\frac{3}{4}$' im Rahmen des umfangreichen Teiltextes 4 ausführlich begründet, so dass das entsprechende Teilmodell zahlreiche textbasierte Werte enthält, wodurch seine Bildung erleichtert wird.

Wenn Textdaten, die eine BEGRÜNDUNG eines neuen Sachverhalts andeuten, fehlen oder wenn sie stark lückenhaft sind, so dass komplizierte Inferenzen zur Bildung der BEGRÜNDUNGEN erforderlich sind, dann ist aufgrund der zentralen Stellung der Begründung-Leerstelle im Rahmen des MATHEMATISCHES-ELEMENT-Schemas die Bildung eines MATHEMATISCHE(S)-ELEMENT(E)-Modells erschwert. Im Rahmen des AUFGABE-Schemas beeinträchtigt das Fehlen oder eine starke Lückenhaftigkeit begründender Teiltexte hingegen kaum die Modellbildung, da die Begründung-Leerstelle im AUFGABE-Schema nicht verfestigt ist und deshalb als sekundär empfunden wird. Ein Lehrtext mit fehlenden bzw. lückenhaften Begründungen erscheint daher im Rahmen des AUFGABE-Schemas nicht als unvollständig. Folgerichtig begünstigen fehlende bzw. lückenhafte Begründungen das Bilden eines AUFGABE(N)-Modells und hemmen die Bildung eines MATHEMATISCHE(S)-ELEMENT(E)-Modells.

---

[149] So wird in den analysierten AUFGABE(N)-Lehrtexten lediglich in einem Fall eine relativ leicht zu bildende BEGRÜNDUNG nahegelegt – und zwar hinsichtlich der Unwandelbarkeit nichtperiodischer Dezimalzahlen in Brüche im Lehrtext ‚An der Kühltheke' (vgl. T1.6 im Lehrtext 2). Alle anderen neu mitgeteilten Sachverhalte werden in den AUFGABE(N)-Lehrtexten nicht explizit begründet.

[150] Vgl. dazu insbesondere die Lehrtexte 1 und 2.

Drittens: Fehlen oder starke Lückenhaftigkeit der Teiltexte, die als BEZEICHNETES neuer oder vor kurzem eingeführter Symbole/Bezeichnungen interpretierbar sind

Die zentralen Objekte bzw. Referenzträger im Rahmen der analysierten AUFGABE(N)-Lehrtexte sind primär (mathematische) Symbole und mathematische Bezeichnungen/Termini. Das, was sich jeweils hinter Symbolen und Begriffen ‚verbirgt', wird jedoch zumeist nicht mitgeteilt. Das heißt, in allen analysierten AUFGABE(N)-Lehrtexten fehlen gehäuft explizite Textdaten, die als BEZEICHNETES neuer bzw. vor kurzem eingeführter Symbole/Bezeichnungen interpretierbar sind. So wurde in den hier analysierten AUFGABE(N)-Lehrtexten das Bezeichnete eines ‚Bruchs', einer ‚Dezimalzahl' und einer ‚(linearen) Funktion' nicht explizit mitgeteilt.[151] Der vorgestellte MATHEMATISCHES-ELEMENT-Lehrtext weist im Gegensatz dazu zahlreiche Textdaten auf, die leicht als BEZEICHNETES der (neuen) Bezeichnungen/Symbole interpretierbar sind. Im Teiltext 4 wird explizit auf die zu der Zahl $\frac{3}{4}$ gehörige ‚Vorstellung' eingegangen, im Ausdruck 31 wird das Bezeichnete der Zahl 0,75 mitgeteilt – ‚75 Hundertstel' – und in den Ausdrücken 39-40 wird mitgeteilt, dass der (bekannte und alltägliche) Doppelmeter als gedankliche Grundlage des (schul-)mathematischen Konstrukts ‚Zahlenstrahl' betrachtet werden kann.

Wenn auf der Lehrtextoberfläche primär auf einer symbolischen Ebene argumentiert wird, d.h. wenn die zentralen Referenzträger neue oder vor kurzem eingeführte Symbole/ Bezeichnungen sind und ihr Bezeichnetes explizit nicht oder kaum erwähnt wird, erschwert dieser Umstand eine Modellbildung im Rahmen des MATHEMATISCHES-ELEMENT-Schemas stark, weil die zentrale aktivierte Bezeichnetes-Leerstelle vom Schüler selbstständig gefüllt werden muss. Dies ist ihm in der Regel entweder auf der Grundlage seines Vorwissens nicht möglich oder erfordert komplizierte Inferenzen. Im Rahmen des AUFGABE-Schemas ist die Bezeichnetes-Leerstelle hingegen nicht verfestigt, da AUFGABENOBJEKTE typischerweise SYMBOLE bzw. BEZEICHNUNGEN sind. Ein Lehrtext, bei dem das Bezeichnete an der Oberfläche nicht expliziert wird, erscheint damit im Rahmen des AUFGABE-Schemas nicht als unvollständig, wodurch sich dieses Schemas bei der Lehrtextverarbeitung tendenziell durchsetzt. Das Fehlen von Textdaten bzw. eine starke Lückenhaftigkeit von Textdaten, die als BEZEICHNUNGEN neuer Symbole/Bezeichnungen interpretierbar sind, erschwert insgesamt die Bildung eines MATHEMATISCHE(S)-ELEMENT-Modells und erleichtert gleichzeitig die Bildung eines AUFGABEN-Modells.

Viertens: Vorhandensein von Teiltexten, die im Rahmen naheliegender AUFGABE(N)-Modelle als relevant und gleichzeitig im Rahmen naheliegender MATHEMATISCHE(S)-ELEMENT(E)-Modelle als überflüssig bzw. als sekundär erscheinen

Alle analysierten AUFGABE(N)-Lehrtexte beinhalten Teiltexte, die im Rahmen der naheliegenden AUFGABEN-Modelle als zentral und gleichzeitig im Rahmen naheliegender

[151] Eine Ausnahme stellen die Ausdrücke 25-26 im Rahmen des Lehrtextes 2 dar, anhand derer das BEZEICHNETE der Dezimalzahl 0,235 leicht bildbar ist.

MATHEMATISCHE(S)-ELEMENT(E)-Modelle als schwer integrierbar bzw. als irrelevant erscheinen. So beinhaltet der Lehrtext 1 ‚Dezimalzahlen, Brüche und Prozente' einen Teiltext (T3), in dem Prozente angesprochen werden. Dieser Teiltext ist im Rahmen des MATHEMATISCHES-ELEMENT-Schemas sperrig; entweder ist er in die jeweiligen Modelle kaum intakt integrierbar oder seine Integration erfordert komplizierte Inferenzen.[152] Gleichzeitig ist dieser Teiltext im Rahmen des naheliegenden AUFGABE(N)-Modells relativ leicht intakt integrierbar, indem man ihn als AUFGABEN ‚Prozente und Dezimalzahlen' interpretiert.[153] Am Ende des Lehrtextes ‚An der Kühltheke' wird unvermittelt mitgeteilt, dass die ‚Umwandlungsrichtung' für die Bearbeitung der ‚Umwandlungsprobleme' in der Regel egal ist (T4 im Rahmen des Lehrtextes 2). Im Rahmen der naheliegenden MATHEMATISCHE(S)-ELEMENT(E)-Modelle erscheint dieser Teiltext als weitgehend überflüssig. Im Rahmen des naheliegenden AUFGABEN-Modells ist er hingegen als (allgemeine) BEARBEITUNGSSCHRITTE der TRANSFORMATIONSAUFGABE ‚Umwandlung der gegebenen Brüche und Dezimalzahlen in eine einheitliche Schreibform' leicht intakt ausdeutbar und erscheint als relevant.[154] Besonders auffällig hinsichtlich des Vorhandenseins solch spezifischer Textdaten ist der Lehrtext ‚Telefontarife'. Der darin enthaltene umfangreiche Teiltext 2, in dem mitgeteilt wird, wie man ausgehend von der Abbildungsvorschrift zum Graphen gelangt, ist im Rahmen naheliegender MATHEMATISCHE(S)-ELEMENT(E)-Modelle schwer integrierbar.[155] Im Rahmen des naheliegenden AUFGABE(N)-Modells erscheint dieser Teiltext jedoch als zentral.[156]

Demgegenüber beinhaltet der MATHEMATISCHES-ELEMENT-Lehrtext kaum Teiltexte, die im Rahmen naheliegender MATHEMATISCHE(S)-ELEMENT(E)-Modelle als irrelevant erscheinen. Lediglich ein Ausdruck ist in naheliegende MATHEMATISCHE(S)-ELEMENT(E)-Modelle recht schwer integrierbar – und zwar der Hinweis, dass man die Dezimalzahlen in Brüche umwandeln soll (Ausdruck 50). Dieser Ausdruck und darüber hinaus der gesamte Teiltext 10 erscheinen jedoch – wie in der Analyse dargelegt – im Rahmen des naheliegenden AUFGABEN-Modells ebenfalls als überflüssig und damit als schwer integrierbar. Andererseits beinhaltet der Lehrtext zahlreiche Textdaten, die im Rahmen naheliegender AUFGABEN-Modelle als sekundär erscheinen, die also keine wesentlichen Aspekte/Leerstellen einer AUFGABE darstellen. Insbesondere fehlen mehrfach Textdaten, die (leicht) als LÖSUNGEN der (TRANSFORMATIONS-)AUFGABEN interpretierbar sind.[157]

Falls ein Lehrtext Textdaten enthält, die im Rahmen aller naheliegender MATHEMATISCHE(S)-ELEMENT(E)-Modelle als irrelevant bzw. als schwer integrierbar und gleichzeitig im Rahmen naheliegender AUFGABE(N)-Modelle als relevant bzw. als leicht integrierbar erscheinen, fördert dies die AUFGABEN-Modellbildung und hemmt gleichzeitig

[152] Vgl. Strukturen 5, 6 und 7.
[153] Vgl. Struktur 8.
[154] Vgl. Strukturen 15 und 16.
[155] Vgl. Strukturen 16 und 17.
[156] Vgl. Struktur 18.
[157] So werden in den Teiltexten 7 und 8 die LÖSUNGEN der entsprechenden AUFGABENSTELLUNGEN stark unvollständig mitgeteilt.

die MATHEMATISCHE(S)-ELEMENT(E)-Modellbildung. Insbesondere trifft dieser Zusammenhang auf diejenigen Teiltexte zu, die unmotivierte Aussagen hinsichtlich des Umgangs bzw. der Prozeduren mit (neuen) Symbolen beinhalten – wie beispielsweise der Teiltext 2 im Rahmen des Lehrtextes ‚Telefontarife' –, denn solche Textdaten erscheinen im Rahmen der MATHEMATISCHE(S)-ELEMENT(E)-Modelle zumeist als irrelevant und gleichzeitig sind sie als BEARBEITUNGSSCHRITTE einer (TRANSFORMATIONS-)AUFGABE interpretierbar und damit zentral. Dabei dürfte die Platzierung von im Rahmen der MATHEMATISCHE(S)-ELEMENT-Modelle irrelevanten Textdaten am Ende eines Lehrtextes – wie dies bei den analysierten AUFGABE(N)-Lehrtexten stets der Fall war – die Durchsetzung des AUFGABE-Schemas als Interpretationsvorlage für den Gesamtlehrtext in besonderer Weise begünstigen.

Fünftens: Nichtpassung zwischen vorangestelltem Arbeitsauftrag und dem Lehrtext

Bei den Analysen der AUFGABE(N)-Lehrtexte lag stets eine problematische Beziehung zwischen Lehrtexten und den entsprechenden Arbeitsaufträgen vor. In den zwei analysierten Lehrtexten, die sich auf einen vorangestellten Arbeitsauftrag beziehen (‚An der Kühltheke' und ‚Telefontarife') werden entgegen der Erwartungshaltung nicht der Auftrag bzw. die im Auftrag gestellten Probleme bearbeitet. Damit erweist sich das anhand des Arbeitsauftrages und der Überschrift konstruierte PROBLEM-Modell nach der Lehrtextverarbeitung als stark sinnbeeinträchtigt. Vereinfacht gesagt: In beiden Lehrtexten wurden mehrfach in den Aufträgen nicht gestellte (und in den Lehrtexten nicht explizierte) Probleme (nicht einsichtig) bearbeitet, wobei gleichzeitig die in den Aufträgen gestellten Probleme im Rahmen der Lehrtexte nicht bzw. unvollständig gelöst wurden. Die daraus folgenden Sinnbeeinträchtigungen im Rahmen eines MATHEMATISCHE(S)-ELEMENT(E)-Modells sind für den Leser schwerwiegend. Demgegenüber wird die Nichtpassung zwischen einem Auftrag und dem Lehrtext im Rahmen des AUFGABE-Schemas als weniger störend erlebt, denn es wird in diesem Fall erwartet, dass im Lehrtext alle in der nachfolgenden Aufgabensammlung vorkommenden relevanten Aufgabentypen präsentiert werden. Der Auftrag bzw. die in ihm enthaltenen Aufgabenstellungen stellen im Rahmen des AUFGABE-Schemas lediglich eine Auswahl (!) (vermutlich) relevanter Aufgaben dar. Daher ist es für einen aufgabenorientierten Leser kaum irritierend, wenn im Lehrtext Aufgaben auftauchen, die im Auftrag nicht enthalten sind.[158] Außerdem erscheinen die im Auftrag enthaltenen konkreten Aufgabenstellungen und ihre Lösungen lediglich insofern relevant, als sie verallgemeinerte Aufgabentypen repräsentieren bzw. veranschaulichen. Das Konkrete ist also dem Allgemeinen untergeordnet. Daher stört das Fehlen einer konkreten Lösung für eine im Auftrag enthaltene Aufgabenstellung nicht, solange die Textdaten eine verallgemeinerte

[158] Vgl. beispielsweise das im Rahmen des AUFGABE-Schemas relativ leichte Ausdeuten der ‚Umwandlung der periodischen Dezimalzahlen in Brüche' (T 1.7) im Lehrtext ‚An der Kühltheke' sowie der ‚Verfahren, um von der Abbildungsvorschrift zum Graphen zu kommen' (T 2) im Lehrtext ‚Telefontarife'.

Aufgabenlösung beinhalten.[159] Ein AUFGABE(N)-Modell ist damit nur dann sinnbeeinträchtigt, wenn eine im Auftrag mitgeteilte Aufgabenstellung im Lehrtext sowohl auf einer konkreten als auch auf einer allgemeinen Ebene nicht oder unvollständig bearbeitet wird. Für den (aufgabenorientierten) Leser entsteht die Frage, warum die (in der nachfolgenden Aufgabensammlung vermutlich nicht vorkommende und damit für den aufgabenorientierten Schüler irrelevante) Aufgabenstellung im Auftrag überhaupt mitgeteilt wurde.[160] Insgesamt sind die Sinnbeeinträchtigungen bei einer Nichtpassung zwischen einem Auftrag und dem dazugehörigen Lehrtext im Rahmen eines MATHEMATISCHE(S)-ELEMENT(E)-Modells wesentlich stärker als im Rahmen eines AUFGABE(N)-Modells. Daher begünstigt eine solche Nichtpassung das Bilden und Durchsetzen des AUFGABE(N)-Modells und hemmt die Bildung eines konkurrierenden MATHEMATISCHE(S)-ELEMENT(E)-Modells.

Sechstens: aufwendige und eher naheliegenden AUFGABE(N)-Modellen entsprechende typographische Gestaltung

Alle analysierten AUFGABE(N)-Lehrtexte mit Ausnahme des kurzen ‚Kastens' weisen eine recht aufwendige typographische Gestaltung auf, die eine intakte Ausdeutung des Gesamtlehrtextes tendenziell erschwert, denn sie widerspricht teilweise der Struktur aller naheliegender Modelle. Einige typographische Elemente – wie die bereits erwähnten Umrandungen mit der Überschrift ‚Beispiel' – verweisen dabei recht deutlich auf die AUFGABEN-Modelle. Der MATHEMATISCHES-ELEMENT-Lehrtext ist demgegenüber typographisch einfacher gestaltet und ähnelt in seiner Form einem klassischen Fließtext. Lediglich die Punkte, die die einzelnen Abschnitte unterteilen, stellen eine Besonderheit dar. Aufgrund der geringen Anzahl markanter typographischer Hinweise widerspricht die typographische Gestaltung nicht der Struktur des naheliegenden SATZ-Modells und erschwert zumindest nicht die entsprechende Modellbildung.

Zusammenfassend scheinen insbesondere folgende Textoberflächenmerkmale die AUFGABEN-Modellbildung zu erleichtern und gleichzeitig eine Ausdeutung im Rahmen des MATHEMATISCHES-ELEMENT-Schemas zu hemmen:

- Fehlen expliziter sprachlicher Signale bezüglich der kommunikativ-semantischen Rolle einzelner (insbesondere nicht-natursprachlicher) Teiltexte,
- Fehlen oder starke Lückenhaftigkeit von Teiltexten, die als BEGRÜNDUNGEN neuer Sachverhalte interpretierbar sind,
- Fehlen oder starke Lückenhaftigkeit von Teiltexten, die als BEZEICHNETES neuer bzw. vor kurzem eingeführter Symbole/Bezeichnungen interpretierbar sind,

[159] So wirkt die im Lehrtext ‚An der Kühltheke' lückenhafte und teilweise unvollständige Beantwortung der im Auftrag gestellten Frage ‚Welche Packung ist die richtige?' im Rahmen des AUFGABE-Schemas kaum sinnbeeinträchtigend.
[160] Vgl. die im Lehrtext ‚Telefontarife' weitgehend fehlenden Lösungen der (untypischen) AUFGABENSTELLUNGEN 3 und 4, in denen nach den Zusammenhängen zwischen Grundgebühr/Minutentarif und des Diagramms/Funktionsterms gefragt wird.

- Vorhandensein von Teiltexten, die im Rahmen naheliegender AUFGABE(N)-Modelle als zentral und gleichzeitig im Rahmen naheliegender MATHEMATISCHE(S)-ELEMENT(E)-Modelle als überflüssig/sekundär erscheinen,
- Nichtpassung zwischen vorangestelltem Arbeitsauftrag und dem Lehrtext,
- Aufwendige und naheliegenden AUFGABE(N)-Modellen entsprechende typographische Gestaltung.

Insbesondere legt ein Lehrtext, der alle hier aufgezählten Merkmale aufweist, ein relativ leicht zu bildendes AUFGABEN-Modell nahe und ist damit ein typischer AUFGABE(N)-Lehrtext.[161] Zugespitzt ausgedrückt: Wenn in einem Schulbuchlehrtext die einzelnen Teiltexte miteinander unverbunden sind, wenn die ‚Warum gilt der neue Sachverhalt?'-Frage nicht gestellt und nicht beantwortet wird, wenn die ‚(Grund-)Vorstellungen' hinter mathematischen Symbolen/Bezeichnungen nicht erwähnt werden, wenn (insbesondere am Ende) unmotivierte Mitteilungen hinsichtlich der Prozeduren mit Symbolen auftauchen und wenn Umrandungen mit der Überschrift ‚Beispiel' auftauchen, dann handelt es sich um einen AUFGABE(N)-Lehrtext.

Ein MATHEMATISCHE(S)-ELEMENT(E)-Lehrtext, also einer, der sich im Rahmen des MATHEMATISCHE(S)-ELEMENT(E)-Schemas leicht(er) ausdeuten lässt, weist demgegenüber die genannten Textmerkmale in einer direkt entgegensetzten Ausprägung auf. Im Einzelnen dürfte ein Lehrtext mit einem hohen Lehrpotential insbesondere durch folgende Oberflächenmerkmale charakterisiert sein:

- Vorhandensein expliziter (natursprachlicher) Signale bezüglich der kommunikativ-semantischen Rolle einzelner (insbesondere nicht-natursprachlicher) Teiltexte,
- Vorhandensein von Teiltexten, die leicht als BEGRÜNDUNGEN (neuer Sachverhalte) interpretierbar sind,
- Vorhandensein von Teiltexten, die leicht als BEZEICHNETES (neuer) Symbole/ Bezeichnungen interpretierbar sind,
- Fehlen oder starke Lückenhaftigkeit von Teiltexten, die im Rahmen naheliegender AUFGABE(N)-Modelle als zentral und gleichzeitig im Rahmen naheliegender MATHEMATISCHE(S)-ELEMENT(E)-Modelle als überflüssig/sekundär erscheinen,
- Passung zwischen vorangestelltem Arbeitsauftrag und dem Lehrtext,
- Sparsame und naheliegenden MATHEMATISCHE(S)-ELEMENT(E)-Modellen nicht widersprechende typographische Gestaltung.

Schwere Verständlichkeit der analysierten AUFGABE(N)-Schulbuchlehrtexte

Die durchgeführte Analyse liefert neben der Tatsache, dass sich die untersuchten Lehrtexte (mit Ausnahme des Lehrtextes 4) leichter im Rahmen des AUFGABE-Schemas ausdeuten lassen, einen weiteren bemerkenswerten Befund: Die analysierten AUFGABE(N)-Lehrtexte

[161] Ein Lehrtext, der lediglich einige der genannten Merkmal aufweist kann – muss aber nicht – ebenfalls ein AUFGABE(N)-Lehrtext sein.

sind in absoluter Hinsicht schwer intakt ausdeutbar, d.h. sie sind – auch im Rahmen des AUFGABE-Schemas – schwer verständlich – und dies deshalb, weil sie sich zu ihrer Aufgabenorientierung ‚nicht bekennen'. Dieses Nicht-Bekenntnis äußert sich auf der Textoberfläche mindestens in zweifacher Hinsicht. Textdaten, die sich leicht(er) im Rahmen des AUFGABE-Schemas ausdeuten lassen, müssten konsequenterweise auf der sprachlichen Oberfläche explizite Rechen- bzw. Handlungsanweisungen enthalten. In den analysierten AUFGABE(N)-Lehrtexten sind solche expliziten (natursprachlich verfassten) Rechen- bzw. Handlungsanweisungen jedoch selten vorhanden. Klar aufgabenorientierte Formulierungen wie ‚Eine Dezimalzahl wird in einen Bruch umgewandelt, indem man die Ziffern hinter dem Komma in den Zähler schreibt und als Nenner die richtige Zehnerpotenz wählt.' (Ausdruck 49 im Lehrtext 2) sind rar.[162] Weit häufiger tauchen in Verbindung mit formal-mathematischen Beispielen Formulierungen wie ‚Einen Bruch […] kann man als Dezimalbruch schreiben' (Ausdruck 1 im Kasten), ‚Brüche […] lassen sich […] leicht in Dezimalzahlen umwandeln' (Ausdruck 5 im Lehrtext 1), ‚der Bruchstrich bedeutet auch „geteilt durch"' (Ausdruck 15 im Lehrtext 2) auf. Auf der Textoberfläche überwiegen also (natursprachliche) Formulierungen, in denen Eigenschaften (ist umwandelbar, ist gleichbedeutend mit) mathematischer Objekte (Brüche, Dezimalzahlen, Bruchstrich) genannt werden, die vom Leser bei der Konstruktion eines AUFGABE-Modells unter Hinzunahme formal-mathematischer Ausdrücke (Rechnungen) in Handlungsanweisungen ‚übersetzt' werden müssen. In diesen Fällen liegt also eine Nicht-Passung zwischen der sprachlichen Oberfläche der Textdaten und dem von ihnen (im Rahmen des Gesamtlehrtextes) angedeuteten AUFGABE(N)-Modellen vor. Diese Diskrepanz zwischen Textoberfläche und Texthintergrund erschwert die Bildung eines intakten (AUFGABE(N)-)Modells.

Das Nicht-Bekenntnis von Lehrtexten zu der ihnen innewohnenden Aufgabenorientierung äußert sich darüber hinaus in einem fragmentarischen ‚Durchschimmern' von Mathematik. So sind einige Teiltexte vorhanden sind, die im Rahmen naheliegender AUFGABE(N)-Modelle als überflüssig bzw. als sekundär erscheinen. In der Regel sind solche überflüssigen Teiltexte eher mathematischer Natur, d.h. sie deuten eher mathematische SÄTZE bzw. BEGRIFFE an und haben primär im Rahmen des MATHEMATISCHES-ELEMENT-Schemas ihre Relevanz und Bedeutung.[163] Das Vorhandensein dieser mathematikhaltigen Teiltexte stört und erschwert wiederum die Bildung eines AUFGABE(N)-Modells.

Oft sind die beiden genannten Aspekte des Nicht-Bekenntnisses zur Aufgabenorientierung in einem Lehrtext vereint. Ein signifikantes Beispiel hierfür stellt der Teiltext 1 im Rahmen des Lehrtextes 3 dar: Auf der Oberfläche findet eine mathematische Argumentation statt: Es wird der Zusammenhang zwischen der graphischen und der symbolischen Darstellungsform

[162] Außer in dem hier genannten Beispiel sind in den untersuchten Lehrtexten drei weitere explizite Handlungsanweisungen vorhanden: Umwandlung eines Bruchs in eine Dezimalzahl (Teiltext 2.3 im Lehrtext 1), Umwandlung einer periodischen Dezimalzahl in einen Bruch (Ausdrücke 40-42 im Lehrtext 2) und Zeichnen einer Geraden ausgehend von einer (linearen) Funktionsgleichung (Teiltext 2.2 im Lehrtext 3).

[163] Vgl. insbesondere die Mitteilung des Zusammenhangs zwischen Brüchen und Dezimalzahlen (Teiltext 1 im Lehrtext 1 und Teiltext 2 im Lehrtext 2) sowie die Thematisierung der Zahlenbereiche (Teiltext 3 im Lehrtext 2).

einer linearen Funktion erläutert. In Verbindung mit der nachfolgenden expliziten Handlungsanweisung im Teiltext 2 entpuppt sich der vermeintlich mathematisch orientierte Teiltext 1 im Wesentlichen als eine (schwer verständliche) Handlungsanweisung mit zahlreichen überflüssigen Informationen.

Insgesamt führen die vorhandenen mathematisch orientierten ‚Spurenelemente' an der Lehrtextoberfläche (in dem eben beschriebenen Sinne) dazu, dass die im Kern vorhandene Aufgabenorientierung – metaphorisch gesprochen – in ein mathematisches Gewand gekleidet und damit mehr oder weniger oberflächlich verhüllt wird. Die Folge ist, dass die analysierten AUFGABE(N)-Lehrtexte in ihrer Gesamtheit nicht nur im Rahmen des MATHEMATISCHES-ELEMENT- schwer verstehbar bzw. intakt ausdeutbar sind, sondern auch im Rahmen des AUFGABE-Schemas.

7.2. AUFGABE(N)-Lehrtext in mathematischem Gewand als der typische Lehrtext im Fach Mathematik

Auf der Grundlage der hier vorgelegten Analyseergebnisse werden im Folgenden weiterführende Überlegungen angestellt, die jeweils in eine verallgemeinernde These münden.

Der Befund, dass alle hier analysierten Lehrtexte mit Ausnahme des kontrastierenden Lehrtextes 4 schwer verständliche AUFGABE(N)-Lehrtexte sind, stimmt nachdenklich. Es ist zu vermuten, dass die analysierten Lehrtexte keine ‚unglücklichen' Einzelfälle darstellen, sondern auch auf einer allgemeineren Ebene ein Charakteristikum typischer Mathematikschulbuchlehrtexte offenlegen. Der Terminus ‚typischer Mathematikschulbuchlehrtext' wird dabei als ein theoretisches Konstrukt betrachtet, d.h. als ein (hypothetischer) Lehrtext, der die gemeinsamen Merkmale vieler (aktueller) Mathematikschulbuchlehrtexte aufweist. Das Konstrukt impliziert also die Annahme, dass viele mathematische Schulbuchlehrtexte (zahlreiche) Gemeinsamkeiten aufweisen. Diese Annahme ist keineswegs selbstverständlich. Eine konträre Position ist – zumindest im Hinblick auf solche Merkmale wie Themenentfaltung – durchaus denkbar. So werden mathematische Schulbuchlehrtexte von unterschiedlichen Autoren geschrieben, die zwar in inhaltlicher Hinsicht eingeschränkt sind (Orientierung an den Rahmenlehrplaninhalten), in der Entfaltung des Lernstoffs aber größtenteils frei agieren. Damit könnten die einzelnen Schulbuchlehrtexte hinsichtlich ihrer textuell-sprachlichen Merkmale – wie etwa hinsichtlich der Themenentfaltung und der Strukturierung – stark variieren. Eine (wissens-)soziologische Sicht auf Schulbücher untermauert jedoch die Annahme einer gewissen Homogenität in Bezug auf die Schulbuchgestaltung und damit auf die Schulbuchlehrtexte (eines Fachs).

Die weiteren Überlegungen stützen sich aufgrund ihrer Anschlussfähigkeit primär auf Höhne (Höhne 2003, Höhne 2005), der eine differenzierte Schulbuchtheorie in einem breiten (wissens-)soziologischen Rahmen präsentiert. Insbesondere ist demnach ein Schulbuch viel mehr als nur ein Lehr- und Lernmittel, sondern stellt ein markantes gesellschaftliches Produkt dar, das sich „im Schnittpunkt zahlreicher Diskurse, Akteure, Institutionen und sozialer Bereiche (Wissenschaft; Politik)“ (Höhne 2003, S. 61) befindet. Die Konstruktion eines Schulbuchs beschreibt Höhne wie folgt:

„Mit unterschiedlichen diskursiven Mitteln trachten die heterogenen Akteure (z.B. Ministerien, Verlage, Eltern, WissenschaftlerInnen) nach größtmöglicher Einflussnahme und bilden ein komplexes Netz aus Kräfteverhältnissen. Diskurs und Macht, Dialog und Restriktion, Verhandlung und Entscheidung bilden die elementaren Praktiken und Grundlagen für einen Konsens.“ (Höhne 2005, S. 68)

Dabei ist unter ‚Konsens‘ „eine strategische Übereinkunft“ (Höhne 2003, S. 61), die eher auf „machtvolle[n] und herrschaftliche[n] Prozesse[n]“ (ebd.) und weniger auf Rationalität beruht, zu verstehen.[164] Hervorzuheben ist dabei, dass sich diese Prozesse nicht nur auf die Auswahl und Anordnung von Lernstoffen beziehen, sondern bis in die Ebene der Konstruktion einzelner Lehrtexte hineinreichen.

„Auf vielen Ebenen (Fachwissenschaftler, Didaktik, Politik, Schulbuchverlage, Elternverbände usw.) wird bis in die Wortwahl fein abgestimmt ein Wissen lehr- und lernbar gemacht, das ein Konsenswissen all der an der Produktion und Konzeption beteiligenden Akteure und Institutionen darstellt“ (ebd.).[165]

Dabei dürften die Kräfteverhältnisse bei der Konstruktion unterschiedlicher (Mathematik-)Schulbücher in einem Land zu einem bestimmten Zeitpunkt jeweils ähnlich sein, so dass erwartet werden kann, dass das Ergebnis dieses Kräftemessens und damit die Schulbücher mit ihren Lehrtexten einander ähneln.

Aus dieser Perspektive können die durchgeführten Analysen trotz ihrer geringen Anzahl Hinweise bezüglich des Gemeinsamen und Charakteristischen (deutscher) Mathematikschulbuchlehrtexte liefern. Demnach wäre der typische Mathematikschulbuchlehrtext ein schwer verständlicher bzw. schwer intakt ausdeutbarer AUFGABE(N)-Lehrtext.[166] Als primäre Quelle für die schwere Verständlichkeit kann dabei die zu den angedeuteten AUFGABE(N)-Modellen größtenteils unpassende Textoberfläche, die metaphorisch als mathematisches Gewand der AUFGABE(N)-Lehrtexte bezeichnet wurde, betrachtet werden.[167]

[164] Ullmann, der sich in seinen Untersuchungen primär auf die Mathematikschulbücher fokussiert, argumentiert in ähnlicher Weise: „Erst wenn man das komplexe Netz aus Politik und Bürokratie, Produzenten (Schulbuchautoren, -verleger und -verlage) und Konsumenten (Lehrer, Schüler und Eltern) und deren lebensweltlichen Verflechtungen in den Blick nimmt, wird das Schulbuch als das sichtbar, was es ist: als Resultat vielfältiger Verhandlungen und Kompromisse in einem hochsensiblen gesellschaftlichen Spannungsfeld“ (Ullmann 2008, S. 251).
[165] Den Konstruktionsprozess einer mathematischen Schulbuchreihe aus der Perspektive eines Schulbuchautors hat Hayen dargestellt; vgl. Hayen 1987.
[166] Im Rahmen der Mathematikdidaktik wurde die Aufgabenorientierung in Schulbuchlehrtexten in der einschlägigen Literatur bemerkt und kritisiert. So wurde beispielsweise bereits 1980 von Keitel, Otte und Seeger behauptet, dass „die Lehrbuchtexte […] sich immer mehr als eine Festlegung einzelner Handlungsschritte [verstehen]“ (Keitel et al. 1980, S. 119). Die entwickelten Gedanken hinsichtlich der textoberflächlichen ‚Verpackung‘ der ‚Handlungsschritte‘ präzisieren und vertiefen diese Beobachtung.
[167] Die Forschung hinsichtlich gemeinsamer Merkmale und der Verständlichkeit (mathematischer) Schulbuch(lehr)texte konzentriert sich häufig auf die Merkmale der Textoberfläche – wie etwa Satzbau und Komplexität der Lexik – und vernachlässigt damit eine zentrale Dimension der Texte (vgl. die entsprechenden

<u>These 1:</u> Der typische Mathematikschulbuchlehrtext ist ein AUFGABE(N)-Lehrtext in einem mehr oder weniger verhüllenden mathematischen Gewand.

Aus dieser These ergeben sich mehrere Schlussfolgerungen. Zunächst soll betrachtet werden, inwiefern der typische Mathematikschulbuchlehrtext seinen Lehr- und Lernfunktionen gerecht wird. Schulbücher – und dementsprechend Schulbuchlehrtexte – sind für mehrere Adressatengruppen (Schüler, Lehrer, Eltern) und damit mehrere Zwecke konzipiert.[168] Schüler als Adressaten nehmen dabei eine besondere Rolle ein. Die Schulbuchlehrtexte wenden sich explizit an die Schüler, wodurch signalisiert wird, dass die Lehrtexte unmittelbar für die Hand der Schüler (und nicht etwa der Lehrer) bestimmt sind. Untermauert wird dieser Anspruch durch die einführenden Hinweise der Autoren zur intendierten Nutzungsweise der Schulbücher. Bezüglich der Funktionen der Lehrtexte wird beispielsweise in den Fokus-Schulbüchern mitgeteilt, dass im Lehrtext „der Unterrichtsstoff übersichtlich und zusammenhängend erklärt wird“ (Esper et al. 2008, S. Klappentext) und dass man die neuen Begriffe und Zusammenhänge kennenlernen oder wiederholen kann, falls man krank war (vgl. ebd.). Die von den Autoren geäußerte Intention beinhaltet zwei Aspekte: die intendierte Lernart, d.h. *wie* Schüler anhand der Lehrtexte lernen sollen und das intendierte Lernobjekt, d.h. *was* sie lernen sollen. Bezüglich der Lernart wird suggeriert, dass Schüler anhand der Lehrtexte selbstständig, d.h. ohne Hilfe der Lehrer oder Eltern lernen können. Der Hinweis, dass die Inhalte ‚übersichtlich und zusammenhängend erklärt werden‘, signalisiert, dass mit den Lehrtexten Verständnis und damit sinnvolles Lernen angestrebt werden – und nicht etwa ein ‚bloßes‘ mechanisches Lernen. Als Lernobjekte werden ‚neue Begriffe und Zusammenhänge‘ genannt. Damit wird angezeigt, dass Schüler Mathematik (im Sinne einer Veränderung des MATHEMATISCHES-ELEMENT-Schemas) und nicht das Bearbeiten von kalkülhaften Aufgaben (im Sinne einer Veränderung des AUFGABE-Schemas) lernen sollen.

Die von den Autoren kommunizierte Nutzungsweise der Lehrtexte – (sinnvolles) Lernen von Mathematik – ist öffentlich akzeptiert und wird in ähnlicher Weise auch bei anderen Autoren formuliert. Insbesondere korrespondiert sie mit den zentralen öffentlich akzeptierten Zielvorstellungen bezüglich des schulischen Lernens (im Fach Mathematik). Viele administrative schulische (Vor-)Schriften (Rahmenlehrpläne, KMK-Bildungsstandards) fordern, dass Schüler im Mathematikunterricht ‚mathematische Allgemeinbildung‘ erwerben sollen. Diese umfasst z.B. laut dem Rahmenlehrplan des Landes Brandenburg folgende wesentliche Aspekte der Mathematik:

- „Mathematik ist eine in vielen Bereichen anwendbare Wissenschaft. Mit mathematischen Strukturen lassen sich Probleme sowohl aus der Wissenschaft und Technik als auch aus dem Alltag erfassen und lösen.

Ausführungen in der Eiinleitung dieser Arbeit sowie die zusammenfassende Studie linguistischer Spezifika mathematischer Schul(buch)texte, die sich nahezu ausschließlich auf die Merkmale der Textoberfläche beschränkt; vgl. Österholm und Bergqvist 2013). Solch eine Fokussierung ist bedenklich, da hinsichtlich des Lernens aus Texten insbesondere der Texthintergrund und weniger die Textoberfläche, zentral ist.

[168] Eine recht umfassende Übersicht der Schulbuchfunktionen findet man in Zimmermann 1992, S. 30–32.

- Mathematik ist eine abstrakte, deduktiv argumentierende Strukturwissenschaft. Die Mathematik erschafft und behandelt Objekte sowie Ideen eigener Art und entwickelt Methoden, mit diesen umzugehen.
- Mathematik fördert einen Bereich menschlichen Denkens, in dem sich – ob im Alltag oder in der Wissenschaft – die Kreativität und die Problemlösefähigkeit des Einzelnen entfalten.“ (Rahmenlehrplan für die Sekundarstufe I 2008, S. 11)

Solche Formulierungen, die in ähnlicher Weise auch in anderen offiziellen Dokumenten vorhanden sind, verweisen darauf, dass im Unterricht Mathematik als verstehbar, anwendbar und als in sich strukturiertes gedankliches Gebilde präsentiert und erlebt werden soll. Die sogenannten prozessbezogenen mathematischen Kompetenzen, wie ‚mathematisch argumentieren‘, ‚Probleme mathematisch lösen‘, ‚mathematisch modellieren‘ und ‚kommunizieren‘, die auf den „Bildungsstandards im Fach Mathematik für den mittleren Schulabschluss“ der Kultusministerkonferenz (KMK) vom 04.12.2003 beruhen und Eingang in die Rahmenlehrpläne gefunden haben, verweisen in eine ähnliche Zielrichtung. Die in offiziellen Dokumenten verankerten allgemeinen Ziele des Mathematikunterrichts, die unter dem Begriff ‚mathematische Allgemeinbildung‘ zusammengefasst werden, korrespondieren ganz offensichtlich mit dem Lernen im Sinne einer Veränderung des MATHEMATISCHES-ELEMENT-Schemas. Da das kalkülhafte Bearbeiten von (Rechen-)Aufgaben, also der Umgang mit (unverstandenen) Zeichen nach einem eindeutigen und feststehenden Verfahren mit diesen Zielvorstellungen nur schwerlich vereinbar ist, ist die Verwirklichung des Anspruchs ‚mathematischer Bildung‘ mit einem Lernen im Sinne einer Veränderung des AUFGABE-Schemas kaum kompatibel.[169]

Die öffentlich kommunizierte Lehrtextfunktion korrespondiert teilweise mit der tatsächlichen Nutzungsweise der Schulbuchlehrtexte durch die Schüler. So kann davon ausgegangen werden, dass viele Schüler außerhalb des Mathematikunterrichts selbstständig Schul-buchlehrtexte lesen bzw. zu lesen versuchen.[170] Dabei werden Mathematikschulbücher im Allgemeinen und ihre Lehrtexte im Speziellen von Schülern primär mit folgenden Zielsetzungen benutzt:[171]

1. Bearbeiten von Aufgaben: Das Ziel der Schulbuch(-lehrtext-)nutzung besteht in der Lösung einer (gestellten) (Haus-) Aufgabe.
2. Festigen: Das Ziel der Schulbuch(-lehrtext-)nutzung besteht darin, die mathematischen Inhalte, die bereits im Unterricht behandelt wurden, besser zu verstehen.
3. Aneignen von Wissen: Das Ziel der Schulbuch(-lehrtext-)nutzung besteht darin, neue mathematische Inhalte, also Inhalte, die im Unterricht noch nicht behandelt

[169] Vgl. dazu auch die Diskussion der Qualität von den in Mathematikschulbuchlehrtexten nahegelegten Lernergebnissen im Kap. 5.2.
[170] Zimmermann fragte 562 Schüler der Klassenstufen 8 und 9 unterschiedlicher Gymnasien, ob sie „im Mathematikbuch gelesen bzw. versucht [haben] zu lesen“ (Zimmermann 1992, S. 79). Über 70% der befragten Schüler bejahten diese Frage.
[171] Vgl. Rezat 2009a, S. insbesondere 153-168.

oder vom Schüler aufgrund von Fehlzeiten im Unterricht verpasst wurden, anzueignen bzw. zu verstehen.

4. Interessenmotiviertes Lernen: Diese Tätigkeit wird durch einen „kognitiven Antrieb“ motiviert und zeichnet sich weniger durch ein feststehendes Ziel aus.

Die Schüler wollen in der Regel mit Hilfe der Lehrtexte etwas *verstehen:* sei es, wie man eine konkrete Aufgabe löst oder mathematische Zusammenhänge konstruiert. Folglich wollen Schüler sinnvoll (und nicht mechanisch) lernen. Diese Nutzungsweise der Schulbuchlehrtexte stimmt hinsichtlich der Lernart (sinnvoll und selbstständig) mit der öffentlich geäußerten Intention überein.

Der typische Mathematikschulbuchlehrtext wird dieser Lehrtextfunktion jedoch offensichtlich nicht gerecht. Wenn die hier vorgelegten Analyseergebnisse auch in allgemeinerer Hinsicht belastbar sind, lässt die schwere Verständlichkeit der Texte sinnvolles Lernen für viele Schüler nicht zu. Sowohl diejenigen Schüler, die verstehen wollen, wie man Aufgaben bearbeitet, als auch diejenigen, die mathematische Zusammenhänge verstehen wollen, dürften bei ihren verstehen-wollenden Lernversuchen zumindest teilweise scheitern und daher höchstens mechanisch lernen.[172] Wenn Schüler wiederholt die Erfahrung machen, dass Lehrtexte sich als ein ungeeignetes Instrument zum sinnvollen Lernen erweisen, werden sie im weiteren Lernprozess entweder auf das selbstständige Lesen von Lehrtexten komplett verzichten oder sie nur selektiv verarbeiten. Damit wird das unterlassene bzw. nur selektive Lesen von Lehrtexten, das in empirischen Studien mehrfach festgestellt wurde, zu einem (weiteren) Indiz für die schwere Verständlichkeit der Lehrtexte.[173]

Des Weiteren ist festzuhalten, dass anhand eines typischen Mathematikschulbuchlehrtextes aufgrund der Tatsache, dass er sich im Rahmen des AUFGABEN-Schemas leichter ausdeuten lässt, ‚Mathematik‘ (im Sinne einer Veränderung des MATHEMATISCHES-ELEMENT-Schemas) nur schwer gelernt werden kann. Wie oben ausführlich erläutert wurde, sind (schwer verständliche) AUFGABE(N)-Lehrtexte zum Zwecke des Lernens von *Mathematik* lediglich für spezifische Schüler nutzbar – und zwar für diejenigen, die neben den elaborieren Lesestrategien und der Bereitschaft, eine umfangreiche mentale Arbeit in die entsprechende

[172] Im Einklang zu dieser Vermutung stehen auch die Ergebnisse der Studie von Zimmermann. So gaben etwa 50% der befragten Schüler an, die „Erläuterungen des Mathematikschulbuchs nicht verstanden“ (Zimmermann 1992, S. 80–81) zu haben. Dabei muss bedacht werden, dass diejenigen Schüler, die das Gefühl haben, die Lehrtexte zu verstehen, sie nicht notwendigerweise ‚wirklich‘ verstehen, d.h. ein zusammenhängendes Modell anhand aller Textdaten konstruieren.

[173] Lediglich etwa 8% aller von Zimmermann befragten Schüler gaben an, den ‚erklärenden Text des Mathematikbuches‘ zu lesen, wenn sie während des Mathematikunterrichts etwas nicht verstanden haben (vgl. Zimmermann 1992, S. 75–76). Die Hefteinträge scheinen für die Schüler weit hilfreicher zu sein: fast 90% nutzen sie, wenn sie etwas nicht verstanden haben (vgl. ebd.). Die Annahme, dass Schüler Lehrtexte selektiv lesen und primär die hervorgehobenen Kästen mit Beispielsrechnungen betrachten, bestätigt sich sowohl in der Studie von Rezat als auch von Zimmermann (vgl. Zimmermann 1992, S. 76, Rezat 2009a, S. 256–257. Bemerkenswert ist in diesem Zusammenhang, dass selbst die Schüler, die zum Schulbuch aufgrund des ‚interessenmotivierten Lernens‘ greifen, Lehrtexte höchst selektiv lesen. Meistens beschränkt sich ihre Lesetätigkeit auf das Betrachten der lebensweltlicher Abbildungen und des Lesens der Textausschnitte im Umfeld der Abbildungen (vgl. Rezat 2009a, S. 240–246).

Modellbildung zu investieren, über umfangreiches fachliches Vorwissen und ein stark verfestigtes MATHEMATISCHES-ELEMENT-Schema verfügen. Es liegt auf der Hand, dass nur wenige Schüler diese Anforderungen tatsächlich erfüllen können. Damit kann der typische Mathematikschulbuchlehrtext im Hinblick auf die Schüler weder dem von den Autoren beworbenen Lernobjekt ‚Mathematik' noch der öffentlich kommunizierten Zielsetzung des schulischen Mathematiklernens gerecht werden.

<u>These 2:</u> Der typische Mathematikschulbuchlehrtext ist zum Zweck ‚selbstständigen sinnvollen Lernens' kaum nutzbar. Insbesondere ist er zum Lernen von Mathematik (im Sinne einer Veränderung des MATHEMATISCHES-ELEMENT-Schemas) für die adressierten Schüler in der Regel nicht geeignet.
Der typische Mathematikschulbuchlehrtext wird damit weder seiner öffentlich kommunizierten Lehrfunktion noch den Wünschen der Schüler gerecht. Die schwere Verständlichkeit verhindert in der Regel das (selbstständige) sinnvolle Lernen, die AUFGABEN-Dominanz dominiert das öffentlich akzeptierte Lernobjekt ‚Mathematik' (im Sinne einer Veränderung des MATHEMATISCHES-ELEMENT-Schemas).

Ein Schulbuch als ein gesellschaftliches Produkt stellt einen aussagekräftigen gesellschaftlichen Indikator dar (vgl. auch Ullmann 2008, S. 251, Höhne 2003, S. 34). Um diesen Umstand differenzierter beschreiben zu können, wird hier das der TIMSS-Studie zugrundeliegende Curriculum-Modell aufgegriffen (vgl. Robitaille et al. 1993, S. 25–30, Valverde et al. 2002, S. 5–13). Dort wird zwischen einem intendierten und einem implementierten Curriculum (eines Landes) unterschieden. Das intendierte Curriculum umfasst die gesellschaftlichen Ziele des schulischen Lernens, die in offiziellen schulübergeordneten Dokumenten wie z.B. in KMK-Beschlüssen und in Rahmenlehrplänen verankert sind. Das implementierte Curriculum bezieht sich demgegenüber auf den typischen Unterricht eines Landes. Es umfasst neben den (typischen) unterrichtlichen Aktivitäten (im weitesten Sinne) auch die Ziele des schulischen Lernens, die Lehrer (typischerweise) beim Unterrichten verfolgen. Schulbücher spielen in diesem Zusammenhang eine Sonderrolle: Sie sind ‚Mediatoren zwischen Intention und Implementation':

„Curriculum policy makers make decisions regarding instructional goals. These are shaped into instruments such as content standards, curriculum guides, frameworks, or other such documents. Unfortunately, these documents rarely spell out the operations that must take place to build instructional activities that embody the content present in the standards. However, textbooks are written to serve teachers and students in this way – to work on their behalf as the links between the ideas present in the intended curriculum and the very different world of classrooms." (Valverde et al. 2002, S. 9)

Schulbücher konkretisieren also die offiziellen Zielvorgaben, indem sie bestimmte unterrichtliche Aktivitäten skizzieren. Damit stellen sie ‚Modelle der Instruktion' dar und können als ‚potentielle Implementation' bezeichnet werden (vgl. Valverde et al. 2002, S. 12–23).

Das vorgestellte Modell erscheint defizitär. Die Beschränkung des intendierten Curriculums auf offizielle Vorgaben im Rahmen der entsprechenden administrativen (Vor-)Schriften ist hinterfragbar. Damit werden die gesellschaftlichen Ziele bezüglich des schulischen Lernens auf die öffentlich kommunizierten begeschränkt bzw. mit ihnen gleichgesetzt. Solch eine Sicht scheint zumindest einseitig, denn das bezüglich der Institution Schule gesellschaftlich Gewollte muss nicht notwendigerweise öffentlich kommuniziert sein. Vielmehr kann man davon ausgehen, dass einige gesellschaftliche Interessen hinsichtlich des schulischen Lernens nicht den Weg in den Status der öffentlichen Diskussion und der verlautbarten Akzeptanz des Gemeinwesens finden. Die Möglichkeit, dass es auch unausgesprochene, ‚verborgene' gesellschaftliche Ziele hinsichtlich der Institution Schule im Allgemeinen und des Mathematikunterrichts im Speziellen gibt, sollte zumindest nicht ausgeschlossen werden. Auch ist denkbar, dass einige der in offiziellen Dokumenten erwähnten Ziele primär aufgrund ihrer ‚politischen Korrektheit' auftauchen. Das heißt, die öffentlich kommunizierten und die ‚tatsächlichen' gesellschaftlichen Ziele schulischen Lernens können zumindest als voneinander verschiedene, evtl. sogar als voneinander weitgehend unabhängige Größen betrachtet werden. Insgesamt scheint es sinnvoll zu sein, das Konstrukt ‚intendiertes Curriculum' in zwei Komponenten auszudifferenzieren: in offiziell kommunizierte Ziele und in ‚tatsächliche' gesellschaftliche Ziele schulischen Lernens. Die erstgenannte Komponente wird im Folgenden als öffentliches Curriculum bezeichnet, die zweite als intendiertes Curriculum. Dabei wird sowohl das öffentliche als auch das intendierte Curriculum im Vergleich zur Konzeption im Rahmen der TIMSS-Studie umfassender verstanden; beide beinhalten nicht nur die (Unterrichts-)Ziele, sondern auch – in Analogie zum implementierten Curriculum – die mit diesen Zielen konvergierenden Unterrichtsaktivitäten. Die Kategorie ‚intendiertes Curriculum' bezeichnet demnach insgesamt das von der Gesellschaft bezüglich des schulischen Lernens tatsächlich Gewollte, das sich in den Zielen und einer dazu passenden Unterrichtsgestaltung verwirklicht. Davon zu unterscheiden ist das öffentlich kommunizierte Curriculum – öffentliche kommunizierte Zielstellungen und Maßgaben zur Unterrichtsgestaltung –, dessen Beziehung zum intendierten Curriculum offen bleibt.

Aufgrund der vollzogenen Erweiterung des Curriculum-Modells kann nunmehr die Rolle von Schulbüchern präziser beschrieben und eingeordnet werden. Schulbücher sind staatlich kontrollierte Instrumente, um das in den Schulen tatsächlich Stattfindende zu beeinflussen. Sie können daher als eine Skizze des gesellschaftlich erwünschten (Mathematik-)Unterrichts – einschließlich der intendierten Unterrichtsgestaltung – betrachtet werden.[174] Und weiter sind sie Konkretisierungen der intendierten Ziele. Insgesamt stellen Schulbücher neben den staatlich kontrollierten Vergleichs-Arbeiten einen zentralen Indikator für das jeweils intendierte Curriculum dar.

[174] Die Idee, dass sich in Schulbüchern ‚Unterrichtstraditionen' eines Landes manifestieren, wurde in einschlägiger Literatur vielfach geäußert. Einen Überblick liefern Haggarty und Pepin 2002 und Pepin et al. 2001.

Nimmt man die hier vorgelegten Analyseergebnisse ernst und unterstellt man darüber hinaus ihre Verallgemeinerbarkeit, dann verweist der typische Mathematikschulbuchlehrtext aufgrund der Tatsache, dass er sich im Rahmen des AUFGABE-Schemas leichter ausdeuten lässt, auf ein gesellschaftliches Interesse daran, dass die Schüler im Rahmen des Mathematikunterrichts vornehmlich den formalen Umgang mit (unverstandenen) Zeichen einüben. Dieses intendierte Curriculum des schulischen Mathematiklernens ist jedoch gesellschaftlich nicht konsensfähig und wird dementsprechend öffentlich verschwiegen. Das öffentlich kommunizierte Ziel des schulischen Mathematiklernens ist – wie bereits benannt – ‚mathematische Allgemeinbildung', die mit dem verschwiegenen intendierten Curriculum nicht vereinbar ist. Im typischen Mathematikschulbuchlehrtext manifestiert sich dieser Widerspruch: Konsequenterweise bekennt sich auch der typische Mathematikschulbuchlehrtext nicht zu einer Aufgaben-Orientierung, so dass an der Textoberfläche die Aufgabenstellungen und ihre Bearbeitungen selten expliziert werden. Die Textoberfläche erscheint vielmehr in Gestalt des hier bereits beschriebenen mathematischen Gewandes und korrespondiert damit mit dem öffentlich kommunizierten Curriculum des Mathematikunterrichts. Die Nicht-Passung zwischen Textoberfläche und Texthintergrund des typischen Mathematikschulbuchlehrtextes wird aus dieser Perspektive klar einsehbar. Des Weiteren verweist die Tatsache, dass sich der typische Mathematikschulbuchlehrtext grundsätzlich im Rahmen des MATHEMATISCHES-ELEMENT-Schemas intakt ausdeuten lässt, darauf, dass das öffentlich kommunizierte Ziel ‚mathematische Allgemeinbildung' auf einer äußerlichen Ebene nicht komplett fallen gelassen wird. Jedoch spielt es im Vergleich zum angestrebten kalkülhaften Umgang mit Zeichen eine eindeutig nachgeordnete Rolle. Es scheint, als ob eine Differenzierung zwischen den Zielen der mathematischen Bildung einerseits und dem kalkülhaften Umgang mit Zeichen anderseits vorgenommen wird, die zugespitzt lautet: Mathematische Bildung ist lediglich für einige wenige ‚auserwählte' Schüler vorgesehen, nämlich für diejenigen, denen wenige und vage Andeutungen ausreichen, um ein MATHEMATISCHES-ELEMENT-Modell zu konstruieren; die verbleibenden ‚normalen' Schüler hingegen sollen lediglich und vornehmlich den kalkülhaften Umgang mit Zeichen lernen. Im Rahmen des typischen Mathematikschulbuchlehrtextes wird damit der Widerspruch zwischen verschwiegener Aufgabenorientierung und öffentlich kommunizierter mathematischer Allgemeinbildung auf spezifische Weise bearbeitet.

<u>These 3:</u> *Ein primäres Ziel des deutschen Mathematikunterrichts ist weniger die ‚mathematische Allgemeinbildung' der Heranwachsenden als vielmehr die Einübung der Lernenden in den kalkülhaften Umgang mit (unverstanden) Zeichen.*
Der typische Mathematikschulbuchlehrtext als Indikator für das intendierte Curriculum verweist darauf, dass dieses Curriculum aus zwei (schwer vereinbaren) Komponenten besteht: aus einer öffentlich kommunizierten ‚mathematischen Allgemeinbildung' und aus einer öffentlich verschwiegenen ‚Aufgabenbearbeitung'. Dabei signalisiert die Tatsache, dass sich der typische Mathematikschulbuchlehrtext deutlich leichter im Rahmen des AUFGABE-Schemas ausdeuten lässt, dass das gesellschaftliche Interesse an ‚Aufgabenbearbeitung' im Vergleich zu ‚mathematischer Allgemeinbildung' dominiert. Die ‚mathematische Allgemein-

bildung' erschöpft sich im Wesentlichen auf einer oberflächlichen Textebene, auf der sie zur Schaffung und Sicherung gesellschaftlicher Akzeptanz und damit als ‚Gewand' zur Verwirklichung der ‚eigentlichen' Zielstellung der ‚Aufgabenbearbeitung' dient.

Diese These führt zu einer sozialkritischen Sicht auf den Mathematikunterricht und steht im Einklang mit einigen Beiträgen dieser Forschungsrichtung. Kollosche zeigt beispielsweise die weitreichende gesellschaftliche Bedeutung und Funktion der (Zeichen-)Aufgaben, also der Aufgaben, in denen der Umgang mit Zeichen nach einem eindeutig feststehen Verfahren eingeübt wird. So ist das Zeichenrechnen insbesondere mit bürokratischer Verwaltung verbunden (vgl. Kollosche 2014, S. 156–193). Ein weiterer möglicher Grund, warum Aufgabenbearbeitung bzw. das Zeichenrechnen im Rahmen des Mathematikunterrichts gesellschaftlich gewünscht und angestrebt wird, ist die Reproduktion des ‚Mythos Mathematik'. Ullmann beschreibt diesen Mythos wie folgt: „Mathematik, und das heißt mathematisches Wissen, ist gesichert, wahr, rational, objektiv und universell gültig" (Ullmann 2008, S. 11). Der moderne Staat in seiner bestehenden Form – so die These Ullmanns – hängt in entscheidendem Maße vom Glauben der Bürger an diesen Mythos ab. Die Schule trägt maßgeblich zur Reproduktion dieses Mythos bei, zu dem wohl auch der Aspekt gehört, dass das Nachvollziehen der Wahrhaftigkeit mathematischen Wissens nur einigen ‚auserwählten' Menschen vorbehalten ist, wohingegen es ‚normalen' Menschen weitgehend unzugänglich bleibt. Sie sind allein auf den *Glauben* an die Wahrheit der Mathematik verwiesen. Aus einer solchen Perspektive sind die AUFGABEN-Dominanz und die schwere Verständlichkeit des typischen Mathematiklehrtextes mit der übergeordneten (verborgenen) Zielsetzung – Reproduktion des ‚Mythos Mathematik' – kompatibel.

Oben wurde bereits eingeführt, dass Schulbücher einen primären Indikator nicht nur hinsichtlich der intendierten Ziele, sondern auch hinsichtlich der intendierten Unterrichtsgestaltung darstellen. Da in den Schulbuchlehrtexten in der Regel neuer ‚Lernstoff' eingeführt wird, dürften sie insbesondere Indikatoren hinsichtlich der intendierten Unterrichtsgestaltung in den sogenannten Einführungsphasen darstellen. Aufgrund der erwähnten ‚Mediator-Rolle' eines Schulbuchs zwischen intendiertem und implementiertem Curriculum kann damit angenommen werden, dass im Rahmen des Mathematikunterrichts eine Konvergenz zwischen dem typischen Mathematikschulbuchlehrtext und dem typischen kommunikativen Verhalten in fachbezogenen Einführungsphasen zumindest naheliegt, wenn nicht sogar faktisch besteht. Diese These wird im Folgenden präzisiert.

In der TIMSS-Studie wurde festgestellt, dass in Deutschland neuer ‚Mathematikstoff' größtenteils „im fragend-entwickelndem Unterrichtsgespräch, das auf eine einzige Lösung hinführt, relativ kurzschrittig erarbeitet wird" (Baumert et al. 1997, S. 226). Das sogenanntefragend-entwickelnde Unterrichtsgespräch kann also zunächst als eine typische Kommunikationsform während der Einführungsphasen im Mathematikunterricht angenommen werden. Es stellt oberflächlich eine Frage-Antwort-Sequenz dar, sein Hintergrund hat allerdings viele Gemeinsamkeiten mit einem Vortrag.[175] Die Bezeichnung ‚Lehrervortrag mit verteilten Rollen' (vgl. Ehlich und Rehbein 1986) deutet die enge Verwandtschaft zwischen fragend-entwickelndem Unterrichtsgespräch und Vortrag an. Im vorliegendem Zusammenhang ist zentral, dass ein fragend-entwickelndes Unterrichtsgespräch vom Produzenten (Lehrer) ähnlich geplant und strukturiert wird wie ein Vortrag; darüber hinaus wird es von den Rezipienten (Schülern) im Wesentlichen in einer ähnlichen Weise mental verarbeitet. Ein Vortrag wiederum gleicht aus kognitionslinguistischer Sicht im Wesentlichen einem schriftlichen Lehrtext. Das heißt, dass hinsichtlich zentraler Aspekte eine Parallele zwischen der in dieser Arbeit entwickelten (Lehr-)Texttheorie und einem (typischen) fragend-entwickelnden Unterrichtsgespräch herstellbar ist. Insbesondere bedeutet dies, dass ein fragend-entwickelndes Gespräch im Mathematikunterricht mehr oder weniger leicht zu bildende AUFGABE(N)- und MATHEMATISCHE(S)-ELEMENT(E)-Modelle nahelegt. Ein Schüler erlebt entsprechend ein mathematisches Unterrichtsgespräch als verstanden, wenn es ihm gelingt, anhand der mündlichen und gegebenenfalls (an der Tafel fixierten) schriftlichen Textdaten ein sinnvolles bzw. intaktes AUFGABE(N)- oder MATHEMATISCHE(S)-ELEMENT(E)-Modell zu konstruieren.

Bezieht man in diese Überlegung die oben getroffene Annahme ein, dass aufgrund der ‚Mediator-Rolle' eines Schulbuchs zwischen der intendierten und der implementierten Unterrichtsgestaltung eine gewisse Übereinstimmung besteht, lässt sich diese Annahme nunmehr dahingehend präzisieren, dass eine Konvergenz zwischen dem typischen Mathematikschulbuchlehrtext und dem typischen fragend-entwickelnden Unterrichtsgespräch in Einführungsphasen des Mathematikunterrichts besteht. Es kann also gefragt werden, inwiefern das typische fragend-entwickelnde Unterrichtsgespräch genauso wie der typische Mathematikschulbuchlehrtext einen AUFGABE(N)-Lehrtext im mathematischen Gewand darstellt. Dieser Zusammenhang scheint plausibel zu sein, wenn man die Rolle des Lehrers im kommunikativen Geschehen bedenkt. Er plant und steuert das Unterrichtsgespräch und ist damit der Regisseur des Geschehens:

„Vom Lehrer werden Entwurf, Prozessierung und weitgehende Vorgabe des propositionalen Gesamtplans erbracht, von den Schülern werden operative Hilfsdienste beigesteuert." (Kügelgen 1994, S. 11)

Dabei kann angenommen werden, dass die Dissonanz zwischen öffentlich kommunizierten und intendierten Curricula von den Lehrkräften ‚gespürt' wird. Einerseits wissen sie aufgrund staatlich verordneter Vergleichsarbeiten, aufgrund der Schulbuchinhalte und insbesondere

---

[175] Die Sprachwissenschaftler Ehlich und Rehbein beschreiben das fragend-entwickelnde Unterrichtsgespräch wie folgt: „Sie [Kommunikationsform E.K.] wird konstituiert durch die systematische Kombination von Handlungsmustern, der Diskursart *Vortrag* und der *Frage-Antwort*-Sequenz mit dem Fragetyp der *Regiefrage* an der Initialstelle der Sequenz. Aus dem Handlungspotential des *Vortrages* werden die Umsetzung von Wissen in eine Form der schnellen Vermittlung, der propositionale Gesamtplan und auf den *Vortrag* bezogene Elemente wie die *Zusammenfassung* übernommen. Aus der *Frage-Antwort*-Sequenz mit *Regiefrage* als Initialposition wird das Mittel der Thema-Rhema-Zerlegung und der Einsatz der *Frage* zum Einfluß auf die mentalen Operationen des Adressaten übernommen. Beide Konstitutionselemente haben gemeinsam, daß sie dem Lehrer die Initiative voll zuweisen" (Ehlich und Rehbein 1986, S. 86).

aufgrund des vormals als Schüler selbst erlebten Unterrichts, dass im realen Mathematikunterricht primär das kalkülhafte Lösen von Aufgaben vermittelt wird. Auf der anderen Seite wissen sie aus ihrer Lehrer(-aus-)bildung und anhand staatlicher (Vor-)Schriften, dass ein öffentliches Bekenntnis zu einer solchen Zielsetzung verschmäht und stattdessen ein Bekenntnis zur ‚mathematischen Allgemeinbildung' goutiert wird. Es liegt nahe anzunehmen, dass dieser Widerspruch und das Nicht-Bekenntnis zu einer authentischen, d.h. unverstellten Aufgabenorientierung von den Lehrkräften dergestalt in den Unterricht ‚importiert' wird, dass – vergleichbar mit den hier analysierten Schulbuchlehrtexten – eine Vermittlung des Aufgabenlösens in einem mathematischen Gewand stattfindet. Das würde insbesondere für Phasen typischer fragend-entwickelnder Unterrichtsgespräche bedeuten, dass an ihrer Oberfläche mathematisch gehandelt wird, während sie in ihrer Tiefenstruktur – und damit auf der Ebene ihrer faktischen Wirksamkeit – einen aufgabenvermittelnden Charakter haben.

Eine empirische Überprüfung der hier angenommenen Zusammenhänge zwischen einem typischen Schulbuchlehrtext und einem typischen fragend-entwickelndem Unterrichtgespräch kann an dieser Stelle nicht geleistet werden. Vor dem Hintergrund der Annahme eines Gesamtzusammenhangs der einzelnen Bestandteile des Mathematikunterrichts (inhaltliche, didaktisch-methodische, kommunikative, psychologische u.a.) im Sinne schlüssiger Teil-Ganzes-Beziehungen dürfte der Versuch einer Verifizierung der hier formulierten These indes ein lohnendes Forschungsanliegen darstellen.

<u>*These 4:*</u> *In einem typischen fragend-entwickelnden Unterrichtsgespräch im Fach Mathematik wird hinter einer mathematischen Fassade im Wesentlichen (schwer verständlich) in der alleinigen Regie der Lehrkraft und in dialogischer Struktur mit Schülern vorgetragen, wie mit mathematischen Zeichen umzugehen ist.*
Aufgrund der Mediator-Rolle des Schulbuchs zwischen intendiertem und implementiertem Curriculum weist ein typisches fragend-entwickelndes Gespräch im Mathematikunterricht die gleichen kennzeichnenden Merkmale wie ein typischer Mathematikschulbuchlehrtext auf, d.h. es stellt in seiner Gesamtheit einen AUFGABE(N)-Lehrtext in mathematischem Gewand dar.

Wenn diese These zutrifft, würden die unmittelbaren Folgen für das Lernen von Schülern in typischen fragend-entwickelnden Unterrichtsgesprächen mit den – bereits erläuterten – (mangelhaften) Lernergebnissen beim Lernen anhand eines typischen Mathematikschulbuchlehrtextes korrespondieren. Insbesondere aufgrund der Nicht-Passung zwischen (mathematikorientierter) Textoberfläche und (aufgabenorientiertem) Texthintergrund dürfte ein (typisches) fragend-entwickelnde Unterrichtsgespräch schwer verständlich sein. Für diejenigen Schüler, denen es nicht gelingt, diese Dissonanz mental zu korrigieren und anhand des Gesprächs ein intaktes Modell zu konstruieren, dürfte das Unterrichtsgeschehen in der entsprechenden Phase undurchschaubar und vollkommen unverständlich erscheinen. Eine solche Dissonanz zwischen Textoberfläche und Texthintergrund könnte auch einer der Gründe für die in der einschlägigen Forschung festgestellte ‚Mathophobie' sein (vgl. Fischer

1984). Die in der Literatur bislang diskutierten Gründe für dieses Phänomen konzentrieren sich bislang vorrangig auf die Spezifika des Fachs: auf seine ‚Struktur' (vgl. Fischer 1984, S. 55) oder auf seine ‚Logik' (vgl. Kollosche 2014, S. 148–156). Der hier in die Diskussion eingeführte Begründungszusammenhang basiert demgegenüber auf der Spezifik der unterrichtlichen Kommunikation im Mathematikunterricht,[176] die aus der beschriebenen Diskrepanz hinsichtlich divergierender gesellschaftlicher Zweckbestimmungen mathematischer Schulbildung resultiert.

Abschließend ist ein Blick auf die Bedingungen interessant, die ein Schüler, der in einem Mathematikunterricht wie dem hier beschriebenen erfolgreich lernen will, erfüllen sollte. Wenn das (gesellschaftlich verschmähte und verschwiegene) Interesse an Aufgabenvermittlung tatsächlich andere Funktionen des Mathematikunterrichts dominiert, dann dürfte sich ein erfolgreicher Schüler vornehmlich dadurch auszeichnen, dass er im Stande ist, u.a. in Lehrtexten und Unterrichtsgesprächen die mehr oder weniger ‚verhüllten' Aufgaben zu finden und insbesondere aus den formal-mathematischen Zeichen die Handlungsanweisungen ‚abzulesen' und umzusetzen. Dazu muss dieser Schüler über ein verfestigtes AUFGABE-Schema verfügen. Weniger erfolgreiche Schüler sind folgerichtig diejenigen, denen es nicht gelingt, hinter dem jeweiligen mathematischen Gewand Aufgaben zu identifizieren. Ein Schüler, der eher ‚mathematisch' denkt, der sich also im Rahmen des MATHEMATISCHES-ELEMENT-Schemas bewegt und der damit der öffentlich kommunizierten Zielsetzung des Mathematikunterrichts gerecht wird, dürfte damit nicht notwendigerweise erfolgreich sein. Darüber hinaus dürften seine erwartbaren offenen (mathematikhaltigen) Fragen einen konsequent aufgabenorientierten Unterrichtsablauf eher stören.[177]

Insgesamt ist davon auszugehen, dass die gesellschaftlichen Interessen am schulischen Lernen bzw. das intendierte Curriculum das kommunikative Verhalten und Geschehen im (Mathematik-)Unterricht erheblich beeinflussen. Dabei deutet sich ein gesellschaftlicher Widerspruch hinsichtlich schulischen Mathematiklernens an. Einerseits wird das Vermitteln von Mathematik im Sinne einer Veränderung des MATHEMATISCHES-ELEMENT-Schemas öffentlich größtenteils als Konsens aller Akteure kommuniziert, was sich auch in den entsprechenden offiziellen schulbezogenen (Vor-)Schriften äußert. Andererseits manifestiert sich u.a. in der Tiefenstruktur von Mathematikschulbüchern ein ausgeprägtes gesellschaftliches Interesse daran, im Mathematikunterricht vorrangig das Zeichenrechnen bzw.

---

[176] Es gibt Indizien, dass die festgestellte Diskrepanz zwischen der Textoberfläche und dem Texthintergrund nicht nur im Rahmen der Kommunikation bei der Einführung neuer schulmathematischer Inhalte besteht, sondern sich auch in den Mathematik(-test-)aufgaben manifestiert und folglich einen Wesenszug der schulmathematischen Kommunikation im Allgemeinen darstellt. So analysiert Meyerhöfer ausgewählte PISA- und TIMSS-Aufgaben und stellt – ähnlich wie beim typischen Mathematikschulbuchlehrtext – ein ‚Gegeneinanderlaufen von latenter und manifester Textebene' fest, wobei auf der latenten Ebene eine ‚Beschädigung des Mathematischen' stattfindet (vgl. Meyerhöfer 2005).

[177] In diesem Zusammenhang wäre es interessant, Personen, die ‚mathematisch denken' können, wie insbesondere Mathematikprofessoren hinsichtlich ihres Erfolgs im Mathematikunterricht, der letztendlich an Zensuren messbar ist, zu befragen. Im Einklang mit angestellten Überlegungen müssten einige der Mathematikprofessoren im Mathematikunterricht nicht erfolgreich gewesen sein.

das Lösen von (Routine-)Aufgaben zu vermitteln.[178] Wenn ein Widerspruch zwischen dem kommunizierten und intendierten Curriculum besteht, dann wird den Lehrern und Schülern übel mitgespielt. Vor diesem Hintergrund wäre es – nicht nur aus ethischen Gründen – wünschenswert, dass Mathematikdidaktik mehr Forschungsinteresse auf soziologische Aspekte des schulischen Mathematiklernens lenkt, um die gesellschaftlichen Interessen hinsichtlich des schulischen Mathematiklernens und ihre Verschränkung mit dem stattfindenden Mathematikunterricht weiter auszuleuchten und tiefer zu verstehen.

[178] Dieses Interesse wird nicht nur in Mathematikschulbüchern sichtbar, sondern auch im Mathematikunterricht, insbesondere an der Dominanz der Aufgaben, die durch kalkülhaftes Abarbeiten nach einem feststehenden Verfahren bearbeitbar sind. Die Dominanz der Routineaufgaben, wurde in der einschlägigen mathematikdidaktischen Literatur vielfach festgestellt und kritisiert. Einen (unvollständigen) Überblick der entsprechenden Untersuchungen liefert Kollosche 2014, S. 32–33.

8. Zusammenfassung

Die primäre Zielsetzung dieser Arbeit bestand darin, das Konstrukt ‚Lehrpotential eines Mathematikschulbuchlehrtextes', also das von Schülern anhand eines Schulbuchlehrtextes Lernbare, als eine textimmanente, intersubjektiv gültige und analytisch zugängliche Größe zu konzipieren und darauf aufbauend die Lehrpotentiale von (aktuellen) Mathematikschulbuchlehrtexten analytisch zu erfassen, um differenzierte Thesen hinsichtlich der Lehrpotentiale typischer Schulbuchlehrtexte im Fach Mathematik zu generieren. Mit diesem Vorgehen wurde beabsichtigt, die zu Beginn dieser Arbeit beschriebenen vielfältigen Leerstellen und Defizite in der mathematikdidaktischen Schulbuchforschung hinsichtlich der Lehrpotentiale von Schulbuchlehrtexten zu reduzieren. An die theoretische Konstruktion der Größe ‚Lehrpotential eines Mathematikschulbuchlehrtextes' wurden dabei insbesondere die folgenden zentralen Anforderungen gestellt: Sie sollte erstens in eine allgemeine kognitive Lerntheorie eingebettet sein und zweitens die Spezifik des Lernmediums – schriftlich informierender Text in einem Schulbuch mit mathematikhaltigen Inhalten – systematisch berücksichtigen.

Die allgemeine Lerntheorie, die in Kapitel 3.1 skizziert wurde, beruht auf der im Rahmen der Kognitionspsychologie entwickelten Schematheorie, die menschliche Kognition modelliert. Zentral ist dabei der Begriff des Schemas als ein organisierter Baustein des deklarativen Wissens, wobei dieser Baustein als die Gesamtheit der strukturierten Leerstellen mit ihren jeweiligen Werten aufgefasst wird. Dabei werden zwei Arten von Lernen unterschieden: das sinnvolle und das mechanische Lernen. Das erstgenannte kann als ein Prozess der Informationsverarbeitung beschrieben werden, der beim Lernenden zu Schemaveränderungen, d.h. zur Verfestigung/Schwächung, Neuentstehung und Umstrukturierung der (ursprünglichen) Schemata führt. Der Prozess der Informationsverarbeitung lässt sich als Modellbildung präzisieren, wobei ein Modell ein aktiviertes und mit konstanten (empiriebasierten und/oder inferierten) Werten belegtes Schema bezeichnet. Beim mechanischen Lernen – umgangssprachlich häufig als Auswendiglernen bezeichnet – werden die vorliegenden Informationen nicht als Werte aktivierter Schemata interpretiert, so dass auch keine Modellbildung stattfindet. Stattdessen wird die vorliegende Information im Gedächtnis des Lernenden weitgehend unverarbeitet abgespeichert und (unverstanden) an das deklarative Wissen angelagert.

Auf der Grundlage kognitionspsychologischer und textlinguistischer Ansätze wurde in Kapitel 3.2 das Lernen aus einem (schriftlichen) Lehrtext als ein Prozess der mit der Lehrtextverarbeitung einhergehenden (Vor-)Wissenserweiterung bzw. -veränderung beschrieben. Sinnvolles Lernen setzt dabei eine tiefe Textverarbeitung voraus, bei der der Leser versucht, anhand seines (Vor-)Wissens und der vorliegenden Textdaten ein intaktes Modell zu konstruieren, das insbesondere eine intakte Struktur und Belegung aktivierter Leerstellen aufweist und alle Textdaten integriert. Das konstruierte Modell determiniert die Schemaveränderungen und damit das (sinnvolle) Lernergebnis. Beim mechanischen Lernen werden demgegenüber die oberflächlich verarbeiteten Textdaten, d.h. die mental repräsentierten sprachlichen Bedeutungen, eingeprägt. Das Kennzeichnende dieser oberflächlich verarbeiteten und eingeprägten Textdaten im Sinne eines mechanischen Lernergebnisses ist, dass sie nicht in Schemata eingebettet sind, folglich keine Schemaveränderungen hervorrufen und damit aus didaktischer und pädagogisch-psychologischer Sicht ein mangelhaftes Lernergebnis darstellen. Oberflächliche (Lehr-)Textverarbeitung tritt in der Regel dann ein, wenn der Leser eine Behaltensstrategie verfolgt oder wenn ihm eine Modellbildung anhand der Textdaten misslingt.

Die Rolle des Lehrtextes für das Lernen kann wie folgt skizziert werden: Ein Lehrtext deutet mehr oder weniger schwer zu konstruierende Modelle und damit einhergehende (sinnvolle) Lernergebnisse bzw. Schemaveränderungen an. Ein Modell ist dann schwer konstruierbar, wenn a) bei der Textrezeption komplizierte Inferenzen notwendig sind, b) beim Rezipienten zentrale Leerstellen offen bleiben, weil im Lehrtext keine diesbezüglichen Textdaten vorhanden sind und dem Leser das entsprechende (Vor-)Wissen fehlt, c) Teiltexte als sekundär bzw. als überflüssig erscheinen und d) die Sequenz oder die typographische Gestaltung des Lehrtextes nicht der Struktur des Modells entspricht. Unter der Annahme, dass individuelles Alltags-, Sprach- und Fachwissen von Angehörigen eines Kulturkreises und einer Alterskohorte viele Gemeinsamkeiten aufweisen und daher bis zu einem gewissen Grad intersubjektiv ähnlich ausgeprägt sein dürften, ist die Bandbreite der von einem Lehrtext angedeuteten intakten Modelle und damit die Varianz (sinnvoller) Lernergebnisse beschränkt.

Auf der Grundlage der entwickelten Lern-(Lehr-)Text-Theorie wurde nunmehr das Konstrukt ‚Lehrpotential eines Schulbuchlehrtextes‘ als eine textinterne und intersubjektiv überprüfbare Größe konzipierbar (vgl. Kap. 4.1). Mit der Einführung des Hilfskonstrukts ‚Modellschüler‘ wurden die textexternen Faktoren auf der Seite der Textrezeption als konstant bestimmt; damit erscheint das Lehrpotential eines Lehrtextes als eine textimmanente Größe. Dabei wurde der Modellschüler als lernoptimal festgelegt; er ist insbesondere bestrebt, den jeweiligen (Gesamt-)Text zu verstehen, also anhand der Textdaten ein möglichst intaktes Modell zu konstruieren. Des Weiteren kennt er alle Inhalte der im jeweiligen Schulbuch vorangegangenen Schulbuchlehrtexte. Die Lehrtextverarbeitungsergebnisse des Modellschülers, also die anhand der Textdaten konstruierbaren und dabei möglichst intakten Modelle werden als naheliegende Modelle bezeichnet. Das ‚Lehrpotential eines Schulbuchlehrtextes‘ erscheint dementsprechend als Gesamtheit der möglichen sinnvollen Lernergebnisse (Schemaveränderungen) des Modellschülers, die mit der Bildung naheliegender Modelle einhergehen. Dabei weist die Bildung jedes naheliegenden Modells textabhängig einen bestimmten Schwierigkeitsgrad auf und jedes Lernergebnis hat eine bestimmte Qualität hinsichtlich seiner fachlichen Passung und hinsichtlich der Anwendbarkeit des Gelernten. Auch wenn der Modellschüler in dieser Untersuchung (lediglich) als ein Hilfskonstrukt angelegt ist, ist das Lehrpotential eines Lehrtextes ein Indiz auch für das Lernen realer Schüler, wobei es insgesamt aufgrund der lernoptimalen Konstruktion des Modellschülers das Maximum dessen markiert, was reale Schüler aus einem Lehrtext lernen können. Das Lernergebnis, das mit dem am leichtesten zu konstruierenden naheliegenden Modell einhergeht, signalisiert das wahrscheinlichste sinnvolle Lernergebnis realer Schüler. Wenn alle naheliegenden Modelle in absoluter Hinsicht schwer konstruierbar sind, bedeutet dies, dass viele reale Schüler den entsprechenden Schulbuchlehrtext (teilweise) oberflächlich verarbeiten, was in ein höchstens mechanisches (Teil-)Lernergebnis auf Seiten der Schüler mündet.

Der Konzeption des Lehrpotentials eines (beliebigen) Schulbuchlehrtextes wurde in einem Folgeschritt ein korrespondierendes analytisches Verfahren zur Seite gestellt, das aus mehreren aufeinander aufbauenden Schritten besteht. Im Zentrum steht dabei die Ermittlung und Beschreibung der vom Lehrtext nahegelegten Modelle und Lernergebnisse (vgl. Kap. 4.2). Die Ermittlung naheliegender Modelle vollzieht sich in einem hermeneutischen Interpretationsprozess, in dem u.a. ein integratives Ganzes/Schema, das den Gesamttext umfasst, gesucht wird. Die sogenannten Modell-Text-Strukturen, die auf dem textlinguistischen Ansatz von Schröder beruhen, stellen dabei ein hilfreiches Instrument dar (vgl. Schröder 2003). Sie erlauben es, sowohl die Intaktheit des Modells als auch die Beziehung zwischen Modell und Textdaten sichtbar und damit intersubjektiv überprüfbar zu machen. Darüber hinaus sind die Text-Modell-Strukturen zur Analyse des Bildungsschwierigkeitsgrades eines Modells hilfreich, denn in einer parallelen Betrachtung von Textdaten und der entsprechenden Text-Modell-Struktur wird die Ausprägung nahezu aller relevanten Merkmale unmittelbar sichtbar.

Hinsichtlich des Lehrpotentials von Schulbuchlehrtexten im Fach Mathematik stellte die in Kapitel 5.1 vollzogene Konzeption des allgemeinen schulmathematischen (deklarativen) (Vor-)Wissens des Modellschülers einen zentralen und grundlegenden Schritt dar. Dabei galt folgendes Leitprinzip: Die fachlichen Schemata des Modellschülers sollen mit den Schemata (vieler) realer Schüler weitgehend übereinstimmen. Die Quelle dieser Schemata stellen die typischen Erfahrungen von Schülern bezüglich des Lernstoffs im Mathematikunterricht dar. Hierfür werden zwei prototypische Unterrichtsformen unterschieden: der genetische und der aufgabenorientierte Unterricht. Der erstgenannte wird in der einschlägigen mathematikdidaktischen Literatur als das normativ Erwünschte dargestellt und beschrieben (vgl. beispielsweise Wittmann 1981). Im genetischen Mathematikunterricht werden neue mathematische Elemente (Satz, Verfahren, Begriff) ausgehend von einem zugänglichen Problemzusammenhang entwickelt, d.h. es gibt eine Motivation bzw. ein Motiv zur Einführung des jeweiligen Elements. Des Weiteren wird im genetischen Unterricht die Frage, warum der neue Satz bzw. das neue Verfahren gilt, jeweils thematisiert und entfaltet. Darüber hinaus werden die entwickelten neuen mathematischen Elemente in Beziehung zu den bereits bekannten gesetzt, wodurch neue Sätze, Verfahren und Begriffe ihren Platz und ihre Querverbindungen im bereits erarbeiteten theoretischen Gebäude bekommen. Schließlich werden neue mathematische Elemente im Rahmen der Bearbeitung weiterer inner- und außermathematischer Probleme angewendet.

Im insbesondere von Lenné charakterisierten aufgabenorientierten Unterricht wird demgegenüber der Unterrichtsstoff nach Aufgabenklassen sequenziert (vgl. Lenné 1969, S. 34ff.). Typischerweise sind die Aufgaben im aufgabenorientiertem Unterricht anhand eindeutig festgelegter Handlungsschritte lösbar. Die Präsentation eines Aufgabentypus vollzieht sich in der Regel wie folgt: Zuerst wird eine Aufgabenstellung – in der Regel vom Lehrer – genannt und anschließend wird die entsprechende (Muster-)Lösung in einem fragend-entwickelndem Unterrichtsgespräch oder in einem Lehrervortrag mitgeteilt. Warum die Handlungsschritte so und nicht anders sind, wird dabei nicht thematisiert. Außerdem wird die Wahl eines Aufgabentypus in der Regel inhaltlich nicht motiviert. In einem aufgabenorientiertem Unterricht erleben Schüler Mathematik vornehmlich als eine Ansammlung von vorgeschriebenen Aufgabentypen, deren Auswahl gesetzt ist, deren Bearbeitung nicht einsichtig ist und die größtenteils als isolierte Einheiten wahrgenommen werden, die weder miteinander noch mit der Realität außerhalb des Mathematikunterrichts zusammenhängen. Dabei sind die Aufgaben für die Schüler insofern bedeutsam, als sie im Mathematikunterricht vorkommen und ihn wesentlich konstituieren. Außerhalb des Mathematikunterrichts sind die Aufgaben für die Schüler demgegenüber weitgehend sinn- und bedeutungslos. Insbesondere gewinnen die Aufgaben ihre Bedeutung nicht aufgrund ihres Erkenntnispotentials, wie dies bei mathematischen Elementen im Rahmen des genetischen Unterrichts der Fall ist.

Die Erfahrungen im Rahmen prototypischer Unterrichtsformen determinieren unterschiedliche schulmathematische Schemata: das AUFGABE- und das MATHEMATISCHES-ELEMENT-Schema. Das AUFGABE-Schema bildet sich in einem aufgabenorientierten Unterricht aus und stellt insgesamt einen Denkrahmen dar, der das ‚natürliche' Bestreben nach Einsicht und Sinn außer Kraft setzt. Es beinhaltet auf der höchsten Hierarchiestufe lediglich drei verfestigte Leerstellen: Unterkategorien, Bestandteile und Zweck (von Aufgaben). Ein AUFGABE-Schema besteht im Wesentlichen aus einem AUFGABENSTELLUNG- und einem AUFGABENLÖSUNG-Schema. Die kognitiven Inhalte im Rahmen des AUFGABENLÖSUNG-Schemas sind im Wesentlichen die Handlungsschritte und die Inhalte des AUFGABENSTELLUNG-Schemas sind die Bedingungen, unter welchen die entsprechenden Handlungen auszuführen sind. Typische/verfestigte AUFGABENOBJEKTE sind dabei Zeichen ohne ein Bezeichnetes. Da die Schüler in einem aufgabenorientierten Unterricht typischerweise die Erfahrung machen, dass die Lösungsverfahren nicht begründet werden, weist das AUFGABENLÖSUNG-Schema keine verfestigte Grund-für-die-Geltung-der-Bearbeitungsschritte-Leerstelle auf. Die Zweck-Leerstelle des AUFGABE-Schemas ist mit einem konstanten Wert belegt; der Zweck einer AUFGABE besteht primär darin, dass sie im Mathematikunterricht eingesetzt wird, außerhalb des Mathematikunterrichts ist eine AUFGABE bedeutungslos. Aufgrund der geringen Anzahl verfestigter Leerstellen ist das AUFGABE-Schema eine isolierte Einheit, die mit anderen Wissensbeständen weitgehend unverbunden ist.

Im genetischen Unterricht bildet sich demgegenüber das MATHEMATISCHE-ELEMENT-Schema aus. Es beinhaltet auf der höchsten Hierarchiestufe im Vergleich zum AUFGABE-Schema weitere verfestigte Leerstellen: Motiv, benachbarte mathematische Elemente sowie Anwendungsmöglichkeiten. Der Zweck eines MATHEMATISCHEN ELEMENTS besteht primär im Erkenntnisgewinn. Es werden drei Unterkategorien eines MATHEMATISCHEN ELEMENTS unterschieden (SATZ, BEGRIFF, VERFAHREN), die jeweils spezifische Bestandteile aufweisen. Insbesondere beinhalten SATZ und VERFAHREN jeweils eine verfestigte Grund-für-die-Geltung-Leerstelle. Des Weiteren ist das MATHEMATISCHES-ELEMENT-Schema aufgrund zahlreicher verfestigter Leerstellen regelhaft mit dem Alltagswissen verbunden.

Realer Unterricht dürfte in der Regel keinem der beiden beschriebenen Prototypen in Reinkultur entsprechen, er enthält mehr oder weniger stark ausgeprägte Momente beider Formen. Dementsprechend wird angenommen, dass bei den meisten realen Schülern beide Schemaarten vorhanden sind, allerdings variiert ihr Verfestigungsgrad.

Die Konzeption der abstraktionshohen schulmathematischen Schemata erlaubt nun, das allgemeine deklarative Fachwissen des (den Mathematikschulbuchlehrtexten zugrunde gelegten) Modellschülers zu präzisieren und eröffnet einen analytischen (intersubjektiv gültigen) Zugang zu den Lehrpotentialen von Schulbuchlehrtexten im Fach Mathematik (vgl. Kap. 5.2). Dabei wird angenommen, dass unser Modellschüler – in Übereinstimmung mit den meisten realen Schülern – sowohl über das AUFGABE- als auch über das MATHEMATISCHES-ELEMENT-Schema (mit ähnlichem Verfestigungsgrad) verfügt. Bei der Verarbeitung eines Mathematikschulbuchlehrtextes sind demzufolge beide Schemaarten zunächst gleichberechtigt möglich. Das bedeutet, dass sie in der unmittelbaren Situation der Textverarbeitung miteinander konkurrieren, wobei sich jeweils eine Schemaart als Interpretationsvorlage des Gesamtlehrtextes durchsetzt. Damit eröffnet ein Mathematikschulbuchlehrtext eine Bandbreite mehr oder weniger schwer zu konstruierender naheliegender AUFGABE(N)- und MATHEMATISCHE(S)-ELEMENT(E)-Modelle sowie entsprechender Lernergebnisse. Das Lernergebnis, das mit einem AUFGABE(N)-Modell einhergeht, ist dabei qualitativ mangelhaft, da es der Struktur des normativen fachlichen mathematischen Wissens nicht entspricht und aufgrund der Isoliertheit des AUFGABE-Schemas schwer in neuartigen Anforderungssituationen anwendbar ist. Des Weiteren eröffnet das AUFGABE-Schema aufgrund der Tatsache, dass es Sinnbestrebungen außer Kraft setzt, einen Raum, in dem ‚Falschheiten‘ nahezu uneingeschränkt und vom Subjekt unbemerkt vorhanden sein können (vgl. die Erläuterungen zur Qualität des AUFGABE(N)-Lernergebnisses in Kap. 5.2).

In einer ersten Erprobung des entwickelten theoretisch-analytischen Instrumentariums, in der ein kurzer Mathematikschulbuchlehrtext – ein ‚Kasten‘ zum Lernstoff ‚Zusammenhang zwischen Dezimalzahlen und Zehnerbrüchen‘ – analysiert wurde, zeigt sich, dass sich der Lehrtext im Rahmen des MATHEMATISCHES-ELEMENT-Schemas schwer ausdeuten lässt; gleichzeitig erweist sich das vom Kasten nahegelegte AUFGABE(N)-Modell als relativ einfach konstruierbar (vgl. Kap. 5.3). Die nachfolgende systematische Analyse der Lehrpotentiale von zwei Mathematikschulbuchlehrtexten zum gleichen Lernstoff bestätigte dieses Ergebnis: Die Lehrtexte sind in absoluter Hinsicht schwer intakt ausdeutbar, wobei die Bildung der naheliegenden AUFGABE(N)-Modelle relativ leicht ist (vgl. Kap. 6.1 und 6.3). Um auszuschließen, dass die Besonderheiten der analytischen Ergebnisse primär auf der Spezifik des Lernstoffs ‚Zusammenhang zwischen Brüchen und Dezimalzahlen' beruht, wurde ein Lehrtext analysiert, in dem ein neuer Begriff – lineare Funktion – eingeführt wird (vgl. Kap. 6.4). Die bisherigen Ergebnisse bestätigten sich auch in diesem Fall. Um den im Kapitel 6.2 geäußerten Einwand zu entkräften, dass die theoretische Konzeption des AUFGABE-Schemas *notwendigerweise* dazu führe, dass sich *jeder* Mathematikschulbuchlehrtext im Rahmen des AUFGABE-Schemas leichter ausdeuten ließe, wurde ein kontrastierender Lehrtext analysiert, der sich im Rahmen des MATHEMATISCHES-ELEMENT-Schemas leicht(er) ausdeuten lässt. Dabei handelt es sich um den Lehrtext aus dem in der Schweiz veröffentlichen Schulbuch ‚Ich mache das so! Wie machst du es? Das machen wir ab. 5.-6. Schuljahr', das von Ruf und Gallin verfasst wurde (vgl. Kap. 6.5).

Insgesamt zeigte sich, dass alle hier aus deutschen Schulbüchern analysierten Lehrtexte schwer verständliche AUFGABE(N)-Lehrtexte sind, d.h. sie teilen im Wesentlichen schwer verständlich mit, wie (Zeichen-)Aufgaben zu lösen bzw. zu bearbeiten sind. Die eingeschränkte Verständlichkeit der Lehrtexte dürfte dazu führen, dass den Schülern, die selbstständig aus diesen Lehrtexten lernen wollen, eine intakte Modellbildung misslingt, so dass sie die Lehrtexte (teilweise) oberflächlich verarbeiten und daher aus ihnen (teilweise) höchstens mechanisch lernen. Diejenigen, denen eine ausschließlich tiefe Verarbeitung gelingt, dürften eher das leichter zu konstruierende AUFGABE(N)-Modell bilden und damit im Wesentlichen lediglich lernen, wie man mit (mathematischen) Zeichen, die kaum etwas bezeichnen, umgehen sollte. Die von den AUFGABE(N)-Lehrtexten angedeuteten MATHEMATISCHES-ELEMENT-Modelle sind anhand der hier analysierten Lehrtexte demgegenüber sehr schwer konstruierbar, daher dürften sie und die mit ihnen einhergehenden Lernergebnisse, die u.a. Vorstellungen zu den mathematischen Zeichen, Zusammenhänge zwischen mitgeteilten Sachverhalten und Begründungen neuer Sachverhalte beinhalten, für die überwiegende Mehrheit der adressierten Schüler beim selbstständigen Lernen unerreichbar sein.

Die durchgeführten Analysen erlaubten es nunmehr, Merkmale eines AUFGABE(N)-Lehrtextes zusammenzustellen – d.h. eines Lehrtextes, der sich im Rahmen des AUFGABE-Schemas leichter ausdeuten lässt (vgl. Kap. 7.1). Hierbei handelt es sich um Textoberflächenmerkmale, die die Bildung eines AUFGABE(N)-Modells erleichtern und gleichzeitig die Bildung eines MATHEMATISCHE(S)-ELEMENT(E)-Modells erschweren. Im Wesentlichen zählen dazu a) die Unverbundenheit einzelner Teiltexte, b) das Nicht-Beantworten der Frage ‚warum gilt der neue Sachverhalt?', c) das Nicht-Erwähnen der (Grund-)Vorstellungen bzw. des Bezeichneten hinter mathematischen Zeichen, d) ein unmotiviertes Mitteilen von Prozeduren mit (mathematischen) Symbolen und e) auf der Ebene der Textgestaltung das

Vorhandensein von Umrandungen (primär formal-mathematische Zeichen beinhaltender Teiltexte) mit der Überschrift ‚Beispiel'.

Des Weiteren wurde deutlich, dass die erschwerte intakte Ausdeutbarkeit bzw. die Unverständlichkeit der analysierten AUFGABE(N)-Lehrtexte vor allem darin begründet liegen, dass sich die Lehrtexte zu ihrer Aufgabenorientierung nicht bekennen: Auf der Ebene der sprachlichen Textoberfläche erscheinen eher mathematische Zusammenhänge und nicht – dem AUFGABE-Schema entsprechende – Aufgabenstellungen und ihre Lösungen. Die vorhandene mathematische Orientierung an der Lehrtextoberfläche führt dazu, dass die sich im Lehrtext unterhalb dieser Oberfläche im Kern verwirklichende Aufgabenorientierung – metaphorisch gesprochen – mit einem mathematischen Gewand bekleidet und damit mehr oder weniger verhüllt.

Die Ergebnisse der analytischen Arbeit gewinnen in einem soziologischen Kontext, in dem Schulbuchlehrtexte als markante gesellschaftliche Produkte aufgefasst werden, an Aussagekraft und Brisanz (vgl. 7.2.). So wurde aus den Analyseergebnissen u.a. die These abgeleitet, dass der typische Mathematikschulbuchlehrtext ein AUFGABE(N)-Lehrtext in einem mathematischen Gewand ist. Ein solcher Text ist zum selbstständigen sinnvollen Lernen von Mathematik kaum geeignet; d.h. er wird weder seiner öffentlich kommunizierten Funktion noch den Erwartungen der Schüler gerecht. Wenn man Schulbuchlehrtexte als einen Indikator für das intendierte Curriculum im Sinne des von der Gesellschaft tatsächlich erwünschten Mathematikunterrichts auffasst, dann verweist die Tatsache, dass der typische Schulbuchlehrtext sich im Rahmen des AUFGABE-Schemas deutlich leichter ausdeuten lässt als im MATHEMATISCHES-ELEMENT-Schema, darauf, dass es faktisch ein großes gesellschaftliches Interesse an der Bearbeitung von (Zeichen-)Aufgaben im Rahmen des Mathematikunterrichts gibt. Dieses empirisch dominante Ziel schulischen Lernens ist mit dem öffentlich kommunizierten Ziel ‚mathematische Allgemeinbildung' nicht vereinbar und wird öffentlich größtenteils verschwiegen. Die erwähnte Erscheinungsform einer mathematisch orientierten Textoberfläche als Gewand für einen aufgabenmitteilenden Texthintergrund erscheint als eine signifikante Manifestation dieses Widerspruchs.

Schließlich kann aufgrund der Mediator-Rolle eines Schulbuchs zwischen dem intendierten und dem implementierten Curriculum vermutet werden, dass eine Konvergenz zwischen dem typischen Mathematikschulbuchlehrtext und dem typischen kommunikativen Verhalten in den Einführungsphasen des Mathematikunterrichts besteht. Das kurzschrittige fragend-entwickelnde Unterrichtsgespräch kann dabei als typische Kommunikationsform bei der Einführung neuen Unterrichtsstoffs im Fach Mathematik betrachtet werden. Dieses ‚Gespräch' weist aufgrund der Lehrerdominanz eine enge Verwandtschaft zu einem Vortrag auf, wovon beispielsweise die Bezeichnung ‚Lehrervortrag mit verteilten Rollen' zeugt (vgl. Ehlich und Rehbein 1986). Ein Vortrag entspricht wiederum aus kognitionspsychologischer Sicht im Wesentlichen einem mündlichen Lehrtext; somit ist eine Verwandtschaft zwischen Lehrtext und fragend-entwickelndem Unterrichtsgespräch angezeigt. Insbesondere bedeutet dies zunächst, dass ein typisches fragend-entwickelndes Unterrichtsgespräch im Mathematikunterricht mehr oder weniger leicht zu bildende AUFGABE(N)- und MATHEMATHISCHE(S)-ELEMENT(E)-Modelle nahelegt. Insgesamt ist aufgrund der angenommen Konvergenz zwischen dem typischen Mathematikschulbuchlehrtext und dem typischen kommunikativen Verhalten in den unterrichtlichen Einführungsphasen die folgende These naheliegend: Das typische fragend-entwickelnde Unterrichtsgespräch im Mathematikunterricht ist ein (mündlicher) AUFGABE(N)-Lehrtext in mathematischem Gewand; in ihm wird also im Wesentlichen hinter einer mathematischen Fassade mitgeteilt, wie mit mathematischen Zeichen umzugehen ist. Es liegt nahe, die vornehmlich auf der Diskrepanz zwischen textoberflächlicher Erscheinung und Texttiefenstruktur beruhende schwere Verständlichkeit des Gesprächs als einen Grund für die recht verbreitete ‚Mathophobie' anzunehmen (vgl. Fischer 1984).

Die vorliegende Arbeit stellt in erster Linie einen theoretisch-methodologischen Beitrag dar, indem zunächst das Lehrpotential eines Mathematikschulbuchlehrtextes als eine textimmanente und analytisch zugängliche Größe konzipiert wurde. Die dazu in dieser Arbeit entwickelte Theorie des Lernens aus Lehrtexten liefert eine fundierte Grundlage, um Lehrpotentiale nicht nur schriftlicher Lehrtexte, sondern jeglicher informierender Kommunikationsformen im Rahmen des Mathematikunterrichts – insbesondere auch von mündlichen Vorträgen und fragend-entwickelnden Unterrichtsgesprächen – zu erfassen und zu beschreiben. Die entwickelte Methode, die hinsichtlich der mündlichen informierenden Kommunikationsformen modifiziert werden sollte, ist zwar extensiv, jedoch übersteigt sie nicht den Rahmen des praktisch Möglichen. Wenn man ein wenig Übung hat und nicht alle Analyseschritte kleinschrittig verschriftlichen muss, dann erschließen sich aus der entwickelten Perspektive die Sinnhaftigkeit bzw. Verständlichkeit sowie das Lehrpotential einer vorliegenden unterrichtlichen Kommunikationsform recht schnell. Des Weiteren können die in dieser Arbeit entwickelten abstraktionshohen schulmathematischen Schemata eine Grundlage dafür bilden, (individuelle) schulische Lernprozesse zu modellieren und zu analysieren.

In zweiter Linie stellen die analytischen Ergebnisse dieser Arbeit einen empirischen Beitrag dar, um das schulische Mathematiklehren besser zu verstehen. So wird u.a. sichtbar, dass das mehrfach festgestellte und seitens der Mathematikdidaktik kritisierte kalkülhafte Bearbeiten von (Zeichen-)Aufgaben im Rahmen des Mathematikunterrichts nicht nur eine ‚Laune' von (womöglich unmotivierten sowie didaktisch und fachlich nicht ausreichend ausgebildeten) Lehrern ist, sondern sich auch in der Tiefenstruktur von Schulbuchlehrtexten zeigt, was auf eine manifeste systemische Verankerung im Schulwesen hinweist. Des Weiteren stellt die in dieser Arbeit ermittelte Diskrepanz zwischen einer mathematischen Textoberfläche und einem aufgabenvermittelnden Texthintergrund eines typischen Mathematik(-schulbuch-)lehrtextes ein zentrales Merkmal – wenn nicht gar einen Wesenszug – schulmathematischer Kommunikation und damit auch (gesellschaftlichen) schulmathematischen Wissens dar. Dieses Merkmal und – allgemeiner – die Spezifik der schulischen Kommunikation, die nicht nur die Charakteristik der Textoberfläche, sondern auch die

Charakteristik des Texthintergrunds bzw. des von Schülern tatsächlich Verstehbaren vereint, stellen einen bedeutsamen und bisher im Rahmen der Mathematikdidaktik lediglich in Ansätzen erforschten Gegenstand dar. Auch vor dem Hintergrund der hier vorgelegten Analyseergebnisse ist es wünschens- und lohnenswert, dass sich Mathematikdidaktik dem Thema der unterrichtlichen Kommunikation intensiver forschend zuwendet und sich dabei auch sprachwissenschaftlichen, kognitionspsychologischen und soziologischen Ansätzen öffnet, um das Eigentümliche des schulmathematischen Lehrens und Wissens besser als bislang zu verstehen – und nicht, wie dies zuweilen geschieht, es als bekannt zu konstatieren und reflexartig Verbesserungswürdigkeit zu postulieren.

Anhang

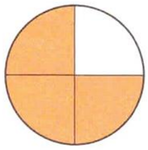
Bruchteile 39

Bruch
Zähler
Nenner

Die Brüche ein Halb $\left(\frac{1}{2}\right)$, zwei Drittel $\left(\frac{2}{3}\right)$, ein Viertel $\left(\frac{1}{4}\right)$, drei Fünftel $\left(\frac{3}{5}\right)$, ... sind Bezeichnungen für Bruchteile.

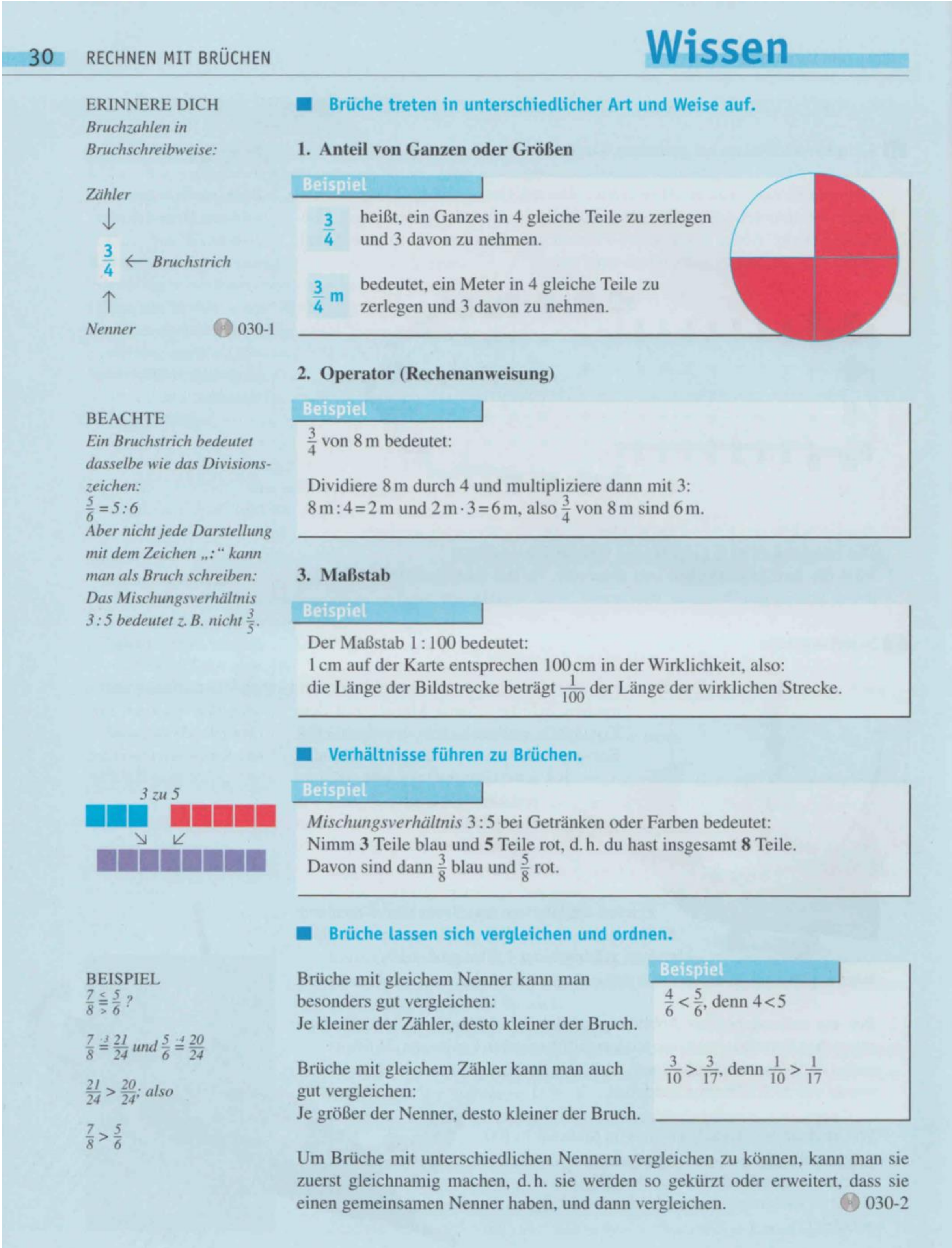
Der **Nenner** eines **Bruches** gibt an, in wie viele gleich große Teile das Ganze eingeteilt wurde.

Der **Zähler** gibt an, wie viele Teile genommen werden.



Bruch $\left\{ \frac{3}{4} \right.$ – Zähler – Bruchstrich – Nenner

Abbildung 1: Kasten ‚Bruch, Zähler, Nenner' im Schulbuch ‚Mathematik 6' (Liebau et al. 2004, S. 39)



30 RECHNEN MIT BRÜCHEN

Wissen

ERINNERE DICH
Bruchzahlen in Bruchschreibweise:

Zähler
↓
$\frac{3}{4}$ ← *Bruchstrich*
↑
Nenner 030-1

BEACHTE
Ein Bruchstrich bedeutet dasselbe wie das Divisionszeichen:
$\frac{5}{6} = 5:6$
Aber nicht jede Darstellung mit dem Zeichen „:“ kann man als Bruch schreiben: Das Mischungsverhältnis 3:5 bedeutet z. B. nicht $\frac{3}{5}$.

3 zu 5

BEISPIEL
$\frac{7}{8} \lesseqgtr \frac{5}{6}$?

$\frac{7}{8} \overset{\cdot 3}{=} \frac{21}{24}$ *und* $\frac{5}{6} \overset{\cdot 4}{=} \frac{20}{24}$

$\frac{21}{24} > \frac{20}{24}$, *also*

$\frac{7}{8} > \frac{5}{6}$

■ Brüche treten in unterschiedlicher Art und Weise auf.

1. Anteil von Ganzen oder Größen

Beispiel

$\frac{3}{4}$ heißt, ein Ganzes in 4 gleiche Teile zu zerlegen und 3 davon zu nehmen.

$\frac{3}{4}$ m bedeutet, ein Meter in 4 gleiche Teile zu zerlegen und 3 davon zu nehmen.

2. Operator (Rechenanweisung)

Beispiel

$\frac{3}{4}$ von 8 m bedeutet:

Dividiere 8 m durch 4 und multipliziere dann mit 3:
8 m : 4 = 2 m und 2 m · 3 = 6 m, also $\frac{3}{4}$ von 8 m sind 6 m.

3. Maßstab

Beispiel

Der Maßstab 1 : 100 bedeutet:
1 cm auf der Karte entsprechen 100 cm in der Wirklichkeit, also:
die Länge der Bildstrecke beträgt $\frac{1}{100}$ der Länge der wirklichen Strecke.

■ Verhältnisse führen zu Brüchen.

Beispiel

Mischungsverhältnis 3 : 5 bei Getränken oder Farben bedeutet:
Nimm **3** Teile blau und **5** Teile rot, d. h. du hast insgesamt **8** Teile.
Davon sind dann $\frac{3}{8}$ blau und $\frac{5}{8}$ rot.

■ Brüche lassen sich vergleichen und ordnen.

Brüche mit gleichem Nenner kann man besonders gut vergleichen:
Je kleiner der Zähler, desto kleiner der Bruch.

Brüche mit gleichem Zähler kann man auch gut vergleichen:
Je größer der Nenner, desto kleiner der Bruch.

Beispiel

$\frac{4}{6} < \frac{5}{6}$, denn $4 < 5$

$\frac{3}{10} > \frac{3}{17}$, denn $\frac{1}{10} > \frac{1}{17}$

Um Brüche mit unterschiedlichen Nennern vergleichen zu können, kann man sie zuerst gleichnamig machen, d. h. sie werden so gekürzt oder erweitert, dass sie einen gemeinsamen Nenner haben, und dann vergleichen. 030-2

Abbildung 2: Lehrtext ‚Brüche und Verhältnisse‘ Schulbuch ‚Interaktiv Mathematik 6‘ (Pies et al. 2007, S. 30)

Wissen

HINWEIS
Die Ziffern hinter dem Komma heißen Dezimale.

Im Alltag kommen vielfach Kommazahlen vor, beispielsweise bei der Angabe von Preisen, Längen oder Massen.

Kommazahlen bezeichnet man als *Dezimalzahlen*, manchmal auch als *Dezimalbrüche*.

HINWEIS
Für Zehntel verwendet man häufig die Vorsilbe ***dezi****, z. B.:*
1 Dezimeter = $\frac{1}{10}$ *m,*
für Hundertstel die Vorsilbe ***zenti****, z. B.:*
1 Zentimeter = $\frac{1}{100}$ *m*
und für Tausendstel die Vorsilbe ***milli****, z. B.:*
1 Millimeter = $\frac{1}{1000}$ *m*
oder
1 Milligramm = $\frac{1}{1000}$ *g*

Dezimalzahlen lassen sich wie natürliche Zahlen in einer Stellentafel darstellen. Dazu wird die Stellentafel nach rechts vom Komma um Zehntel, Hundertstel, Tausendstel usw. erweitert:

	Z	E	z Zehntel	h Hundertstel	t Tausendstel	Man liest:
14,15	1	4	1	5		vierzehn Komma eins fünf
2,809		2	8	0	9	zwei Komma acht null neun

Von den natürlichen Zahlen ist schon bekannt:
10 Einer ergeben 1 Zehner, 10 Zehner ergeben 1 Hunderter, …
Genauso gilt für die Stellen nach dem Komma:
10 Zehntel ergeben 1 Einer, 10 Hundertstel ergeben 1 Zehntel, …

Man kann Dezimalzahlen als Summen der einzelnen Stellen schreiben:

Beispiel

$$14{,}15 = 1\,Z + 4\,E + 1\,z + 5\,h = 10 + 4 + \frac{1}{10} + \frac{5}{100}$$

$$2{,}809 = 2\,E + 8\,z + 0\,h + 9\,t = 2 + \frac{8}{10} + \frac{0}{100} + \frac{9}{1000} = 2 + \frac{8}{10} + \frac{9}{1000}$$

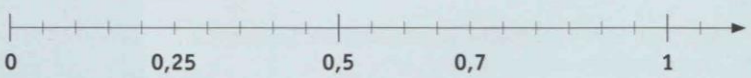
BEACHTE
Dezimalzahlen müssen kein Komma haben, auch natürliche Zahlen sind Dezimalzahlen.

Bei dieser Darstellung der Dezimalzahlen als Summe von Brüchen kann man $\frac{0}{10}, \frac{0}{100}$ usw. weglassen, da diese Summanden den Wert 0 haben.

Durch das Anhängen von Nullen hinter der letzten Nachkommastelle verändert sich der Wert einer Dezimalzahl also nicht, z. B. ist: 3,6 = 3,60 = 3,600 = …, aber es gilt 3,06 ≠ 3,6.

Auch Dezimalzahlen können am Zahlenstrahl dargestellt und verglichen werden:

Beispiel

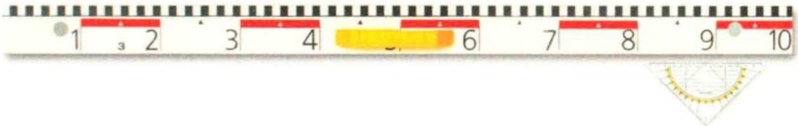


BEISPIEL
0,493 und 0,489 sollen verglichen werden. Bei der 2. Stelle nach dem Komma unterscheiden sich die Ziffern das erste Mal. 9 > 8, also: 0,493 > 0,489

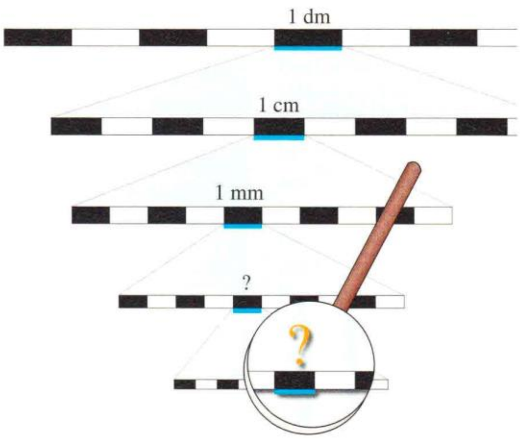
Dezimalzahlen lassen sich gut vergleichen, wenn man, von links beginnend, einander entsprechende Stellen vergleicht. Die erste Stelle, an der die Ziffern verschieden sind, entscheidet, welche Zahl größer ist.

Abbildung 3: Lehrtext ‚Dezimalzahlen' im Schulbuch ‚Interaktiv Mathematik 6' (Pies et al. 2007, S. 110)

3 Das immer genauere Lineal



Beschreibe die Einteilung des Lineals, mit dem ihr an der Tafel arbeitet. Wie genau kann man damit messen? Wie genau kannst du dagegen mit deinem Geodreieck messen?



Man kann sich vorstellen, dass auch die Einteilung des Geodreiecks weiter unterteilt wird. Um diese weitere Einteilung zu erkennen, bräuchte man allerdings ein Vergrößerungsglas.
Wie groß ist das jeweils neue markierte Stück im Vergleich zum vorigen?
Schreibe in der Einheit Meter auf, wie lang die markierten Strecken sind. Benutze dabei Zahlen mit Komma.
Man kann die Stellenwerttafel nach rechts erweitern, sodass auch die Ziffern hinter dem Komma Platz in ihr haben. Trage diese Zahlen in deinem Heft in die erweiterte Stellenwerttafel ein.

T	H Z E ,	…				
	,					

Welche Bedeutung haben die Stellen hinter dem Komma, wie könnten diese Stellen heißen?

zum **Auftrag ...**

3 Das immer genauere Lineal

Im Bild mit den Lupen wird das markierte Stück jeweils in zehn gleiche Teile unterteilt, von denen jedes zehnmal kleiner ist als die vorige Unterteilung.
Führst du die bereits bekannten Umrechnungen nach dem gleichen Muster weiter fort, erhältst du folgende Verfeinerungsschritte:
0,1 m
0,01 m
0,001 m
0,00**01** m
0,000**01** m
Bei der fortlaufenden Teilung war jedes neue Stück der zehnte Teil des vorigen.

Erinnere dich
1 dm = 0,1 m
1 cm = 0,01 m
1 mm = 0,001 m

BEACHTE
Ein Hundertstel geht zehnmal in ein Zehntel, also hundertmal in ein Ganzes.

Der zehnte Teil eines Ganzen heißt Zehntel (z). Die Zehntel stehen unmittelbar hinter dem Komma. Danach kommt der zehnte Teil eines Zehntels. Das entspricht dem hundertsten Teil (zehnmal in ein Zehntel) eines Ganzen. Also stehen an der zweiten Stelle die Hundertstel (h). Auf die gleiche Weise folgen Tausendstel (t), Zehntausendstel (zt) und Hunderttausendstel (ht) usw. Zahlen mit Komma heißen Dezimalzahlen.

T	H	Z	E,	z	h	t	zt	ht
			0,	1				
			0,	0	1			
			0,	0	0	1		
			0,	0	0	0	1	
			0,	0	0	0	0	1

BEACHTE
3,67 liest du *„drei Komma sechs sieben"*.

Erinnere dich
Potenzen mit der Grundzahl 10 heißen Zehnerpotenzen:
$10^1 = 10$
$10^2 = 100$
$10^3 = 1000$ usw.

Bei der Multiplikation mit 10, 100, ... hängst du Nullen an: 318 · 100 = 31800. Die Endnullen „verbessern" den Platz aller Ziffern in der Stellenwerttafel.
Das bleibt auch bei Dezimalzahlen so, nur folgen den Einern nun die Nachkommastellen: 318,472 · 100 = 31847,2.
Bei der Division wandert das Komma entsprechend nach links und es gilt z. B.: 647,2 : 100 = 6,472. Bei Aufgaben wie 1,36 : 100 musst du ein wenig genauer hinsehen. Da das Komma hier um zwei Stellen nach links rücken muss, wird eine zusätzliche Null eingefügt und es gilt: 1,36 : 100 = 0,0136.
Ein Blick in die Stellenwerttafel verdeutlicht das Verfahren:

T	H	Z	E,	z	h	t	zt	ht
0	0	0	1,	3	6	0	0	0
0	0	0	0,	0	1	3	6	0

Tipp
Du kannst einfach die Nullen zählen, wenn du wissen willst, um wie viele Stellen du das Komma verschieben musst.
Bei Zehnerpotenzen sagt dir die Hochzahl die Anzahl der Stellen.

Bei der Multiplikation mit 10, 100, 1000, ... rückt das Komma um eine, zwei, drei, ... Stellen nach rechts. Entsprechend rückt es bei der Division durch 10, 100, 1000, ... um eine, zwei, drei, ... Stellen nach links.
34,823 · 100 = 3482,3 — **125,8 : 100 = 1,258**
1,04 · 10000 = 10400 — **0,005 : 1000 = 0,000005**

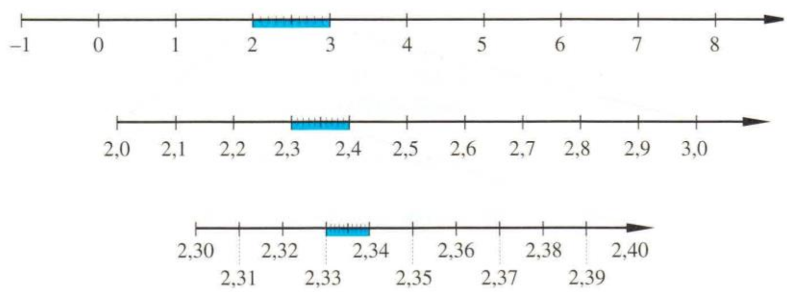
Du hast Dezimalzahlen schon bei Größen kennen gelernt. 0,03 kg sind 30 g oder 3 Hundertstel Kilogramm. Wenn nun beliebig viele Stellen nach dem Komma erlaubt sind, kannst du beliebig kleine Zahlen bilden:
0,000 001 g ist z. B. der millionste Teil eines Gramms.

Große und kleine Maße

		Hundertstel	0,01	Zenti
1000	Kilo	Tausendstel	0,001	Milli
1 000 000	Mega	Millionstel	0,000 001	Mikro
1 000 000 000	Giga	Milliardstel	0,000 000 001	Nano
1 000 000 000 000	Tera	Billionstel	0,000 000 000 001	Piko

BEACHTE
Ein Nanometer ist der milliardste Teil eines Meters.

Die Zahlengerade kann nun verfeinert werden. Zwischen den ganzen Zahlen liegen Dezimalzahlen.



BEACHTE
Bei Größen sind der Verfeinerung der **Zahlenwerte** durch die beschränkte Genauigkeit der Messgeräte Grenzen gesetzt.
Betrachtest du hingegen die **reinen Zahlen**, kannst du dieses Verfahren beliebig weit fortsetzen.
Die Lupe hat ihre technischen Grenzen, dein Verstand nicht!

Übrigens kann man jede ganze Zahl als Dezimalzahl schreiben: $5 = 5{,}0$.

Beispiele
$6 \cdot 100 = 6{,}0 \cdot 100 = 600{,}0 = 600$; $70 : 100 = 70{,}0 : 100 = 0{,}700 = 0{,}7$

Beim **Runden** von Dezimalzahlen entscheidet wie bei natürlichen Zahlen die Stelle nach der Rundungsstelle über Auf- oder Abrunden.
Auf Hundertstel gerundet: $61{,}80617 \approx 61{,}81$
Wenn du auf eine Nachkommastelle rundest, kannst du deutlich machen, auf welche Stelle du gerundet hast, indem du entsprechend Endnullen stehen lässt. So erkennt man bei $3{,}002 \approx 3{,}0$ und $3{,}002 \approx 3{,}00$, dass im ersten Fall auf Zehntel, im zweiten Fall auf Hundertstel gerundet worden ist. Hier erhalten die sonst überflüssigen Endnullen einen Sinn, sie zeigen die Genauigkeit der Zahlen an.

Abbildung 4: Lehrtext ‚Das immer genauere Lineal' und der dazugehörige Auftrag im Schulbuch ‚Fokus Mathematik Klasse 6' (Esper und Schornstein 2007, S. 9–11)

2 Schmelzkäsepackung

Eine Schmelzkäsepackung enthält verschiedene Sorten. Gib den Anteil der einzelnen Sorten an der gesamten Schachtel an. Welche Winkel nehmen die Sorten jeweils ein? Die gesamte Packung enthält 250 g. Wie viel Gramm nimmt eine Ecke an, wie viel die einzelnen Sorten?

zum Auftrag …

2 Schmelzkäsepackung

Die grüne Sorte hat einen Anteil von vier Ecken von insgesamt zwölf Teilen, also vier Zwölftel. Bei der roten sind es drei Ecken, bei der blauen und braunen Sorte jeweils zwei und bei der gelben schließlich eine Ecke von zwölf, also drei Zwölftel, zwei Zwölftel und ein Zwölftel.

Dies wird auch geschrieben als: $\frac{4}{12}$, $\frac{3}{12}$, $\frac{2}{12}$ und $\frac{1}{12}$. Anteile, die in dieser Form geschrieben werden, heißen Brüche.

Brüche stellen Teile eines Ganzen dar. Brüche bestehen aus

Zähler 3
Bruchstrich —
Nenner 8

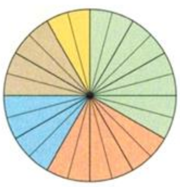
Der Nenner eines Bruches gibt an, in wie viele Teile ein Ganzes geteilt wird. Der Zähler gibt an, wie viele Teile davon genommen werden.

So bestimmst du den Winkelanteil einer Käsesorte:
1. Teile 360° durch die Anzahl aller Käseecken.
2. Multipliziere das Ergebnis mit der Anzahl der Ecken der jeweiligen Sorte.

Es sind insgesamt 12 Käseecken.
Für die gelbe Sorte ergibt sich: 360° : 12 = 30°. Es gibt nur eine gelbe Käseecke, also nimmt die gelbe Sorte einen Winkel von 30° ein.
Anteil der grünen Sorte, bei der es vier Käseecken sind: 30° · 4 = 120°. Die grüne Sorte nimmt also 120° ein.
Du erhältst für die blaue und braune Sorte je 60° und für die rote Sorte 90°.
Bruchteile lassen sich in einem Kreisdiagramm veranschaulichen:

Tipp

Auch bei Größenangaben werden Brüche verwendet.
$\frac{3}{4}$ Liter sind $\frac{3}{4}$ von 1000 ml.
Um den Anteil zu berechnen, teilst du 1000 ml durch 4 und multiplizierst anschließend mit 3:
1000 ml : 4 = 250 ml,
250 ml · 3 = 750 ml.

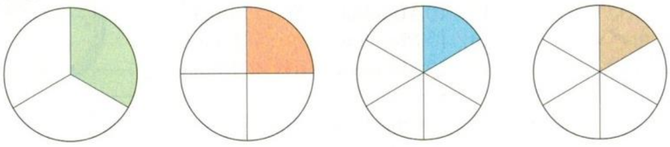


Den Masseanteil einer Käsesorte erhältst du genauso wie den Winkelanteil:
1. Teile die Gesamtmasse 250 g durch die Anzahl aller Käseecken.
2. Multipliziere das Ergebnis mit der Anzahl der Ecken der jeweiligen Sorte.

Bei 250 g für die ganze Packung hat eine Ecke die Masse 250 g : 12 ≈ 20,8 g.
Für die gelbe Sorte (ein Käseeck) erhältst du eine Masse von 20,8 g · 1 = 20,8 g.
Für die grüne Sorte (4 Käseecken) ergibt sich ein Anteil von 20,8 g · 4 = 83,2 g an der Gesamtmasse der Packung.
Die rote Sorte wiegt 20,8 g · 3 = 62,4 g, für die blaue und braune Sorte ergibt sich 20,8 g · 2 = 41,6 g.

Würde jede Käseecke in der Mitte einmal durchgeschnitten, so würden 24 kleinere Käseecken entstehen. Die grüne Sorte hätte dann einen Anteil von $\frac{8}{24}$, die rote von $\frac{6}{24}$, die blaue und braune Sorte von je $\frac{4}{24}$, und die gelbe von $\frac{2}{24}$. Da sich die Mengen nicht verändert haben, müssen die Brüche denselben Wert haben, also $\frac{8}{24} = \frac{4}{12}$ (grün), $\frac{6}{24} = \frac{3}{12}$ (rot), $\frac{4}{24} = \frac{2}{12}$ (blau und braun) und $\frac{2}{24} = \frac{1}{12}$ (gelb).

Durch Unterteilung der Einteilung kannst du also von einer Darstellung eines Anteils zu einer anderen kommen.
Umgekehrt kannst du in der Käseschachtel auch Teile zusammenfassen:



Fasst du z. B. je vier Ecken zu einer Einheit zusammen, so wird die Schachtel in drei Teile unterteilt. Die grüne Sorte hat dann einen Anteil von $\frac{1}{3}$.
Die rote Sorte hat einen Anteil von einem Viertel, also $\frac{1}{4}$, die blaue und braune Sorte hat einen Anteil von jeweils $\frac{1}{6}$. Durch Zusammenfassung erhältst du also auch gleichwertige Darstellungen von Anteilen.
Der Bruch $\frac{4}{12}$ ist also gleichwertig mit $\frac{1}{3}$, ebenso $\frac{3}{12}$ mit $\frac{1}{4}$ und $\frac{2}{12}$ mit $\frac{1}{6}$.

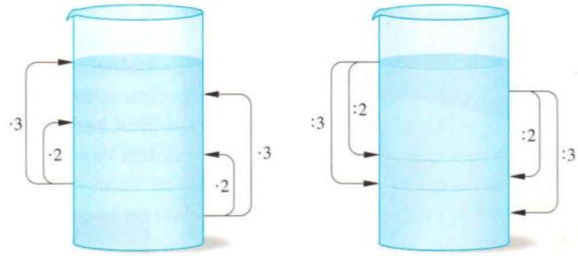
Abbildung 5: Lehrtext ‚Schmelzkäsepackung‘ und der dazugehörige Auftrag im Schulbuch ‚Fokus Mathematik Klasse 6‘ (Esper und Schornstein 2007, S. 83–85)

3 Messbecher

Tim und Luisa haben einen geraden Haushalts-Messbecher auf dem Dachboden gefunden. Leider ist die Mess-Skala kaum noch zu erkennen. Es ist nur noch ablesbar, dass der Messbecher bei einer Flüssigkeitshöhe von 3 cm 375 ml Flüssigkeit enthält. Fertige eine Tabelle an, die verschiedenen Flüssigkeitshöhen dieses Messbechers die im Becher enthaltene Flüssigkeit zuordnet.
Zeichne diese Zuordnung in ein Diagramm. Welches Volumen gehört zu einer Flüssigkeitshöhe von 8,3 cm?

zum Auftrag …

3 Messbecher



Wie du an dem Bild sehen kannst, gehört zur doppelten Füllhöhe das doppelte Volumen der Flüssigkeit. Der dreifachen Füllhöhe ist das dreifache Volumen der Flüssigkeit zugeordnet.
Halbierst bzw. drittelst du die Füllhöhe, so halbiert bzw. drittelt sich auch das Volumen der Flüssigkeit im Messbecher.

Erinnere dich

Dieser Zusammenhang ist dir bereits vom Thema *Dreisatz* her bekannt.

Zwei Größen *A* und *B* sind zueinander proportional, wenn zum doppelten (dreifachen, vierfachen …) von *A* das doppelte (dreifache, vierfache) von *B* gehört.

Mithilfe dieses Prinzips kannst du die folgende Tabelle erstellen:

Füllhöhe in cm	0,5	1	2	3	4	6	8	9
Volumen in ml	62,5	125	250	375	500	750	1000	1125

Außerdem kannst du überprüfen, ob eine gegebene Tabelle von Wertepaaren zu einer proportionalen Zuordnung gehört, indem du den Quotienten aus zugeordnetem Wert und vorgegebenem Wert bei jedem Wertepaar bildest:

$\frac{1125}{9} = 125$; $\frac{1000}{8} = 125$; $\frac{750}{6} = 125$; $\frac{500}{4} = 125$; $\frac{375}{3} = 125$; $\frac{250}{2} = 125$; $\frac{125}{1} = 125$; $\frac{62,5}{0,5} = 125$

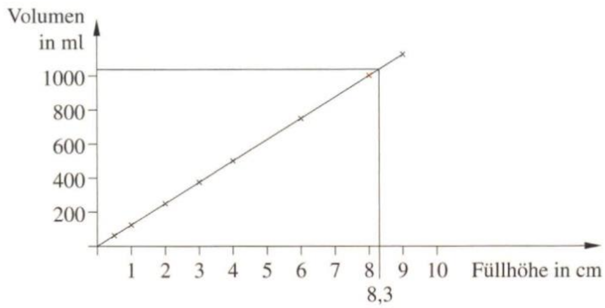
Die Quotienten haben alle den gleichen Wert.

Schon gewusst?

pro (lat.): für
Der Proportionalitätsfaktor gibt an, wie viel **einer** Portion zugeordnet ist, beispielweise wie viel Geld pro Portion, also für eine Portion ausgegeben werden muss.

Die Paare einer proportionalen Zuordnung sind quotientengleich.
Der Quotient aus zugeordnetem Wert und vorgegebenem Wert heißt Proportionalitätsfaktor.

Du kannst diese Zuordnung grafisch darstellen, indem du für jedes Wertepaar den ersten Wert als x-Koordinate und den zweiten Wert als y-Koordinate eines Punktes nimmst und die so entstehenden Punkte in ein Koordinatensystem einträgst.
Zum Beispiel erhältst du so die Punkte (0,5|62,5) und (1|125).
Du kannst erkennen, dass alle Punkte der proportionalen Zuordnung auf einer Halbgeraden liegen.
Man nennt die Punkte, die eine Zuordnung in einem Koordinatensystem darstellen, den **Graphen** der Zuordnung.



Der Graph einer proportionalen Zuordnung ist eine Halbgerade, die vom Ursprung des Koordinatensystems ausgeht.

Das zur Flüssigkeitshöhe 8,3 cm zugehörige Volumen kannst du aus dem Graphen ungefähr ablesen.
Willst du den Wert allerdings genau wissen, so kannst du ihn mittels des **Dreisatzverfahrens** berechnen:

1. Schritt: Schreibe ein gegebenes Paar der Größen in die erste Zeile einer Tabelle. 3 cm entsprechen 375 ml.

2. Schritt: Berechne zuerst den Wert für die Einheit. 1 cm entspricht 125 ml.

3. Schritt: Berechne die gesuchte Größe. 8,3 cm entsprechen 1037,5 ml.

	Flüssigkeitshöhe in cm	Volumen in ml	
:3	3	375	:3
· 8,3	1	125	· 8,3
	8,3	1037,5	

Abbildung 6: Lehrtext ‚Messbecher' und der dazugehörige Auftrag im Schulbuch ‚Fokus Mathematik Klasse 7' (Esper et al. 2008, S. 8–11)

6.1 Zuordnungen und Funktionen

1 Grafische Fahrpläne

Der ICE 517 befährt die Strecke von Dortmund nach Mannheim, der ICE 612 fährt die Strecke in umgekehrter Richtung.

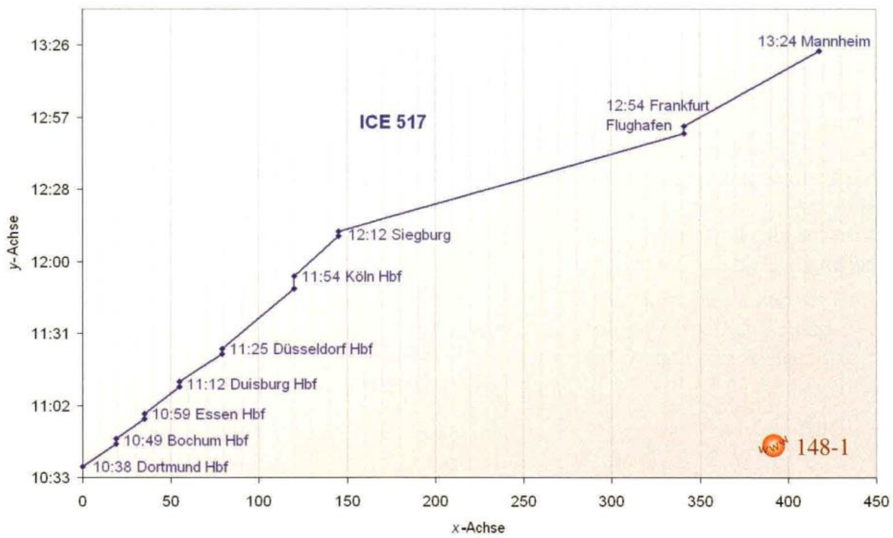
ICE 517

km	Bahnhof	Ankunft	Abfahrt
0	Dortmund Hbf		10:38
19	Bochum Hbf	10:47	10:49
35	Essen Hbf	10:57	10:59
55	Duisburg Hbf	11:10	11:12
79	Düsseldorf Hbf	11:23	11:25
120	Köln Hbf	11:49	11:54
145	Siegburg	12:10	12:12
341	Frankfurt Flughafen	12:51	12:54
418	Mannheim	13:24	

ICE 612

km	Bahnhof	Ankunft	Abfahrt
418	Mannheim		10:35
341	Frankfurt Flughafen	11:06	11:09
145	Siegburg	11:46	11:48
120	Köln Hbf	12:06	12:11
79	Düsseldorf Hbf	12:32	12:34
55	Duisburg Hbf	12:46	12:48
35	Essen Hbf	12:58	13:00
19	Bochum Hbf	13:09	13:11
0	Dortmund Hbf	13:21	

Sammelt in Gruppenarbeit aus den Tabellen und dem Diagramm Informationen zur Aufenthaltsdauer, der Durchschnittsgeschwindigkeit des Zuges und der Entfernung zwischen den Bahnhöfen. Vergleicht die Ergebnisse untereinander.
Zeichnet ein Diagramm auf ein Plakat, bei dem die Zeiten auf der x-Achse abgetragen werden. Tragt dort zusätzlich auch die Fahrtdaten des ICE 612 ein.
Wo und wann treffen sich die Züge? Beschreibt die Fahrt eines der Züge in Form eines Dialogs zweier Reisender. Vergleicht und beurteilt die Darstellungsarten: An welcher Stelle hat die Tabelle Vorteile, wo bietet sich ein Diagramm an? Welches der beiden Diagramme ist eurer Meinung nach vorteilhafter? Begründet.



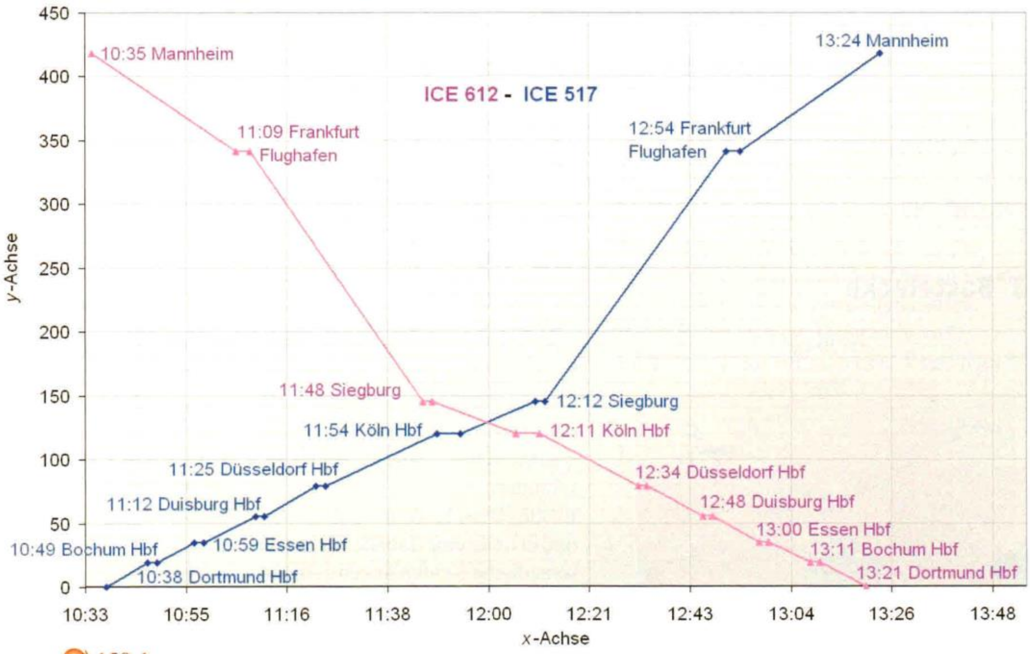
zum Auftrag ...

1 Grafische Fahrpläne

Die Fahrt eines Zuges kann u. a. mithilfe einer Tabelle und durch einen Graphen beschrieben werden. In beiden Darstellungsarten wird einem Wert, z. B. der Entfernung bzw. dem Bahnhof, ein anderer Wert, hier die Zeit, zugeordnet.
Den Verlauf der Fahrt, wie z. B. die durchschnittliche Geschwindigkeit auf einem Streckenabschnitt, kannst du besser dem Verlauf des **Graphen** entnehmen.

Zuordnungen beschreiben eine Größe in Abhängigkeit von einer anderen Größe.

Allerdings werden bei der Zuordnung „Fahrplan: *Entfernung* ↦ *Zeit*" auf Seite 148 einer Entfernung meist pro Haltestelle zwei Zeiten zugeordnet. An diesen Stellen ist die Zuordnung nicht **eindeutig**. Dies ändert sich, wenn du der Uhrzeit die Entfernung zuordnest.
Dies entspricht einer Vertauschung der beiden Achsen, wie du sie in folgendem Diagramm erkennen kannst. Ferner wurde dort der entsprechende Verlauf des ICE 612 eingezeichnet.



150-1

Vergleiche doch mal das Diagramm mit dem auf Seite 148 und überprüfe insbesondere, ob jetzt wirklich jedem Zeitpunkt genau eine Entfernung zugeordnet wird.
Die Haltezeiten auf den Bahnhöfen werden im Graph durch Parallelen zur Zeitachse dargestellt, da sich dort die Entfernung vom Ausgangspunkt nicht verändert. Je länger der Zug hält, umso länger ist auch die parallele Strecke. Demgemäß halten beide Züge am längsten in Köln.
Der Zug fährt am schnellsten, wenn die Verbindung im Diagramm zwischen zwei Bahnhöfen am steilsten ist. Denn dann benötigt er für die Strecke am wenigsten Zeit.

Andererseits fährt er am langsamsten, wenn die Linie flach verläuft:
Zwischen Siegburg und Frankfurt Flughafen fährt der Zug am schnellsten und zwischen Köln und Siegburg am langsamsten.
Die Züge treffen sich zwischen Köln und Siegburg um ca. 12:00 Uhr. Diesem Zeitpunkt ist ein bestimmter Ort, die Entfernung 125 km, zugeordnet. Du kannst aus dem Diagramm also auch ablesen, wo sich die Züge zu einem bestimmten Zeitraum befinden.

BEACHTE
In der Grafik auf Seite 148 ist es genau umgekehrt! Prüft nach und erklärt euch die Unterschiede noch einmal gegenseitig in eigenen Worten.

Eine Zuordnung, bei der jedem x-Wert genau ein y-Wert, zugeordnet wird, heißt Funktion.

Eine Funktion kann auf verschiedene Weise beschrieben werden.

Beispiel
Zwei Freunde gründen eine Firma. Da beide den gleichen Anteil Startkapital einbringen, wird verabredet, auch Gewinn und Verlust gleich aufzuteilen – also jeden gewonnenen und auch jeden verlorenen Euro zu halbieren.

Text Die Funktion f ordnet jedem Wert x die Hälfte zu.
Jedem x wird der Wert $y = \frac{x}{2}$ zugeordnet.

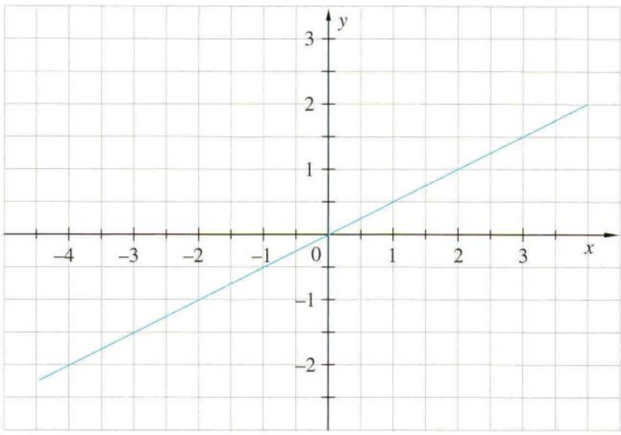
symbolisch $f: x \mapsto \frac{x}{2}$ „Abbildungsvorschrift“

$f(x) = \frac{x}{2}$ „Funktionsgleichung“

Tabelle

x	−1	0	1	2	3	…
$y = \frac{x}{2}$	−0,5	0	0,5	1	1,5	…

Graph/ Schaubild



BEACHTE
$f: x \mapsto \frac{x}{2}$
Funktions-symbol Funktions-term
$f: 9 \mapsto 4{,}5$
x-Wert y-Wert

Eine Funktion kann als Maschine verstanden werden, die zu jedem x-Wert den y-Wert berechnet.

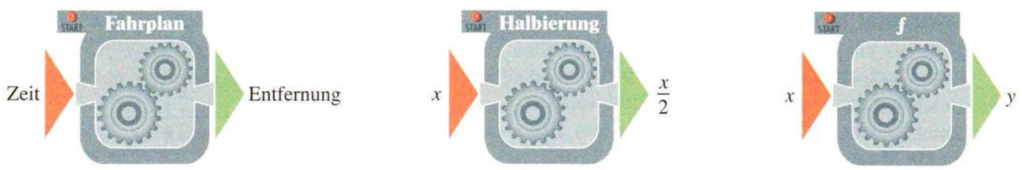
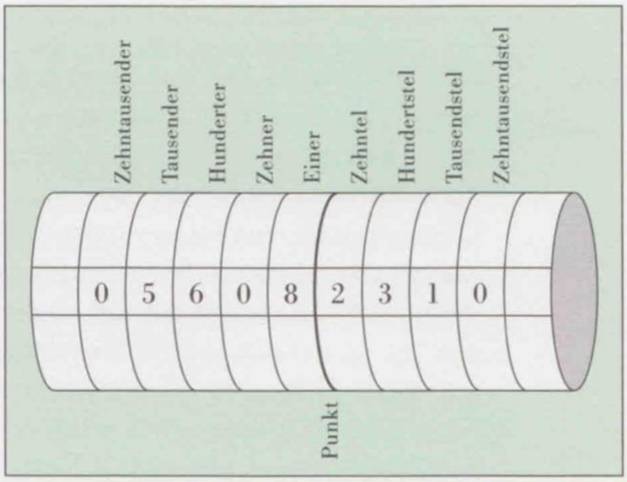


Abbildung 7: Lehrtext ‚Grafische Fahrpläne‘ und der dazugehörige Auftrag im Schulbuch ‚Fokus Mathematik Klasse 7‘ {(Esper et al. 2008, S. 148–151)}

Bei der Arbeit mit Längen, Gewichten und Flüssigkeiten
hast du erfahren,
wie man das Grosse unterteilen kann
und wie man dabei tiefer und tiefer ins ganz Kleine vordringt:
von den Metern zu den Millimetern,
von den Litern zu den Millilitern,
von den Tonnen zu den Milligrammen.
Aber auch bei den Millimetern, Millilitern und Milligrammen
ist man noch lange nicht am Ende der **Welt des Kleinen**.
Man kann die kleinen Masseinheiten
weiter und weiter unterteilen:
in Zehntel, Hundertstel, Tausendstel …

Der Zähler macht alles mit:
Nicht nur links kannst du ihn beliebig erweitern,
auch rechts vom Dezimalpunkt
kannst du Rädchen um Rädchen dazufügen.
Links vom Punkt steht die Einheit,
weiter links die Zehner, Hunderter, Tausender …
Rechts vom Punkt stehen die Zehntel, Hundertstel, Tausendstel …
Das ist nicht nur so, wenn man an bestimmte Grössen denkt,
das ist auch so, wenn nur von Zahlen die Rede ist.

Mit einem roten Wollfaden kannst du auf deinem Zähler das Tor in die Welt des Kleinen öffnen. Der Faden steht für den Dezimalpunkt. Die Rädchen links zählen Grosses und immer Grösseres, die Rädchen rechts Kleines und immer Kleineres. Hier ist die Zahl 5'608.231 eingestellt.



Du weisst ja, wie ein Zählwerk funktioniert:
Darum ist das Rechnen mit dem Dezimalpunkt
kein Problem für dich.
Der rote Faden stört den Zählmechanismus überhaupt nicht.
Er zeigt dir nur, wo die Einer sitzen.

bis sein Zahlenvorrat erschöpft ist,
muss das Einerrad die zehn Zehntel übernehmen
und einen Schritt vorwärts machen.
Der Übertrag funktioniert hier wie bei allen anderen Rädchen.

· Jetzt musst du dir zuallererst einen grösseren Zähler bauen.
Alles geht genau gleich wie beim Zähler für grosse Zahlen,
du brauchst nur eine längere Kartonrolle,
eine leere Haushaltpapierrolle zum Beispiel.
Das Einerrädchen ist jetzt nicht mehr am rechten Rand,
sondern etwa in der Mitte.
Gezählt werden jetzt ja nicht mehr bloss **ganze Zahlen**
wie 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12,…,
gezählt werden nun auch **gebrochene Zahlen**:
die kleinen und und immer kleineren Bruchteile,
mit denen die Zwischenräume zwischen den ganzen Zahlen immer dichter ausgefüllt werden können.

Rechnen mit gebrochenen Zahlen

· Stell deinen Zähler auf 00000.0000.
Geh jetzt zum Hundertstelrädchen
und zähle 125 Hundertstel vorwärts.
Schreibe alle Zahlen der Reihe nach in dein Reisetagebuch ab.
Erkläre, welche Nullen auf dem Zähler wichtig sind und welche nicht.

·· Zähle mit dem Zähler die Zahlen
3.56 und 0.342 zusammen.
Wie schreibt man solche Rechnungen am besten auf,
wenn man sie mit den Verfahren
des schriftlichen Rechnens überprüfen will?

··· Erfinde ein paar einfache und ein paar schwierige
Additions- und Subtraktionsaufgaben.
Gib sie anderen Kindern zum Lösen
und kontrolliere ihre Ergebnisse.

Zahlen im Dezimalsystem kennst du schon lange:
ganze Zahlen wie 0, 1, 7, 13, 111, 1001, …
Jetzt kommt eine neue Art von Zahlen im Dezimalsystem dazu:
gebrochene Zahlen wie 0.0001, 0.75, 1.5, 5.11, 26.026, …
Es sind Zahlen mit einem Dezimalpunkt.

245

Abbildung 8: Einführung der Dezimalzahlen im Schulbuch ‚Ich mache das so! Wie machst du es? Das machen wir ab. 5.-6. Jahrgangsstufe‘ (Gallin und Ruf 1999, S. 244–245)

Literaturverzeichnis

Adamzik, Kirsten (2004): Textlinguistik. Eine einführende Darstellung. Tübingen: M. Niemeyer.

Aebli, Hans (1994): Denken: das Ordnen des Tuns. 2. Aufl. Stuttgart: Klett-Cotta.

Anderson, John R. (2012): Kognitive Psychologie. 6. Aufl., [4. dt. Ausg.], Nachdr. Berlin; Heidelberg: Springer VS.

Antos, Gerd (2001): Sprachdesign als Stil? Lifting oder: Sie werden die Welt mit anderen Augen sehen. In: Eva-Maria Jakobs und Annely Rothkegel (Hg.): Perspektiven auf Stil. Tübingen: Niemeyer, S. 55–76.

Antos, Gerd (2005): Die Rolle der Kommunikation bei der Konzeptualisierung von Wissensbegriffen. In: Gerd Antos, Sigurd Wichter und Jörg Palm (Hg.): Wissenstransfer durch Sprache als gesellschaftliches Problem. Frankfurt am Main, New York: Lang, S. 339–364.

Ausubel, David P.; Novak, Joseph D.; Hanesian, Helen (1980): Psychologie des Unterrichts. Band 1. Weinheim [u.a.]: Beltz.

Bartlett, Frederic (1932): Remembering. A study on experimental and social psychology. Cambridge: Cambridge University Press.

Bauer, Ludwig Albert (1988): Mathematik und Subjekt. Eine Studie über pädagogisch-didaktische Grundkategorien und Lernprozesse im Unterricht. Wiesbaden: Dt. Univ.-Verl.

Baumert, Jürgen; Lehmann, Rainer; Lehrke, Manfred; Schmitz, Bernd; Clausen, Marten; Hosenfeld, Ingmar et al. (1997): TIMSS--Mathematisch-naturwissenschaftlicher Unterricht im internationalen Vergleich. Deskriptive Befunde. Opladen: Leske & Budrich.

Brewer, William F. (1987): Schemas versus mental models in human memory. In: Peter E. Morris (Hg.): Modelling cognition. Chichester, New York: Wiley, S. 187–197.

Brinker, Klaus; Ausborn-Brinker, Sandra (2010): Linguistische Textanalyse. Eine Einführung in Grundbegriffe und Methoden. 7. Aufl. Berlin: Erich Schmidt.

Brinker, Klaus; Cölfen, Hermann; Pappert, Steffen (2014): Linguistische Textanalyse. Eine Einführung in Grundbegriffe und Methoden. 8. Aufl. Berlin: Schmidt.

Bruner, Jerome S. (1974): Entwurf einer Unterrichtstheorie. Berlin, Düsseldorf: Berlin-Verlag; Pädagogischer Verlag Schwann.

Bucher, Hans-Jürgen (2011): Multimodales Verstehen oder Rezeption als Interaktion. In: Hajo Diekmannshenke, Michael Klemm und Hartmut Stöckl (Hg.): Bildlinguistik. Theorien - Methoden - Fallbeispiele. Berlin: Erich Schmidt Verlag, S. 123–156.

Busse, Dietrich (1992): Textinterpretation. Sprachtheoretische Grundlagen einer explikativen Semantik. Opladen: Westdeutscher Verlag.

Busse, Dietrich (2005): Architektur des Wissens - Zum Verhältnis von Semantik und Epistemologie. In: Ernst Müller (Hg.): Begriffsgeschichte im Umbruch? Hamburg: F. Meiner Verlag, S. 43–57.

Busse, Dietrich (2009): Semantik. Paderborn, München: Fink.

Carter, Jack; Li, Yeping; Ferrucci, Beverly J. (1997): A Comparison of How Textbooks Present Integer Addition And Subtraction In PRC And USA. In: *The Mathematics Educator* 2 (2), S. 197–209.

Chevallard, Yves (1985): La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigne. Grenoble: La Pensée sauvage.

Das Ministerium für Bildung, Jugend und Sport Landes Brandenburg (Hg.) (2008): Rahmenlehrplan für die Sekundarstufe I. Jahrgangsstufen 7-10. Mathematik. 1. Aufl. Potsdam.

Dole, Shelley; Shield, Mal (2008): The capacity of two Australian eighth-grade textbooks for promoting proportional reasoning. In: *Research in Mathematics Education* 10 (1), S. 19–35.

Drollinger-Vetter, Barbara (2011): Verstehenselemente und strukturelle Klarheit. Fachdidaktische Qualität der Anleitung von mathematischen Verstehensprozessen im Unterricht. Münster, New York, NY, München, Berlin: Waxmann.

Dubs, Rolf (2009): Lehrerverhalten. Ein Beitrag zur Interaktion von Lehrenden und Lernenden im Unterricht. 2. Aufl. Stuttgart: Steiner.

Dürscheid, Christa (Hg.) (2012): Einführung in die Schriftlinguistik. 4. Aufl. Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht; UTB.

Edelmann, Walter (2000): Lernpsychologie. 6. Aufl. Weinheim: Beltz, PVU.

Ehlich, Konrad; Rehbein, Jochen (1986): Muster und Institution. Untersuchungen zur schulischen Kommunikation. Tübingen: G. Narr (15).

Engelkamp, Johannes (2006): Lehrbuch der kognitiven Psychologie. Göttingen: Hogrefe.

Eroms, Hans-Werner (1986): Funktionale Satzperspektive. Tübingen: M. Niemeyer.

Esper, Norbert; Lütticken, Renatus; Schornstein, Johannes; Uhl, Claudia (Hg.) (2008): Fokus Mathematik. Klasse 7. 1. Aufl., 2. Dr. Berlin: Cornelsen.

Esper, Norbert; Schornstein, Johannes (Hg.) (2007): Fokus Mathematik. Klasse 6. 1. Aufl., 2. Dr. Berlin: Cornelsen.

Fan, Lianghuo (2013): Textbook research as scientific research: towards a common ground on issues and methods of research on mathematics textbooks. In: *ZDM* 45 (5), S. 765–777.

Fan, Lianghuo; Zhu, Yan (2007): Representation of problem-solving procedures: a comparative look of China, Singapore, and US mathematics textbooks. In: *Educational Studies in Mathematics* 66 (1), S. 61–75.

Fan, Lianghuo; Zhu, Yan; Miao, Zhenzhen (2013): Textbook research in mathematics education: development status and directions. In: *ZDM* 45 (5), S. 633–646.

Fend, Helmut (2006): Neue Theorie der Schule. Einführung in das Verstehen von Bildungssystemen. 1. Aufl. Wiesbaden: VS, Verl. für Sozialwiss.

Fischer, Ronald (1984): Unterricht als Prozeß der Befreiung vom Gegestand. Visionen eines neuen Mathematikunterrichts. In: *JMD* (5), S. 51–85.

Freudenthal, Hans (1973): Mathematik als pädagogische Aufgabe. Stuttgart: Klett.

Führer, Lutz (1997): Pädagogik des Mathematikunterrichts. Eine Einführung in die Fachdidaktik für Sekundarstufen. Braunschweig: Vieweg.

Gallin, Peter; Ruf, Urs (1998a): Dialogisches Lernen in Sprache und Mathematik. Band I. Austausch unter Ungleichen. Grundzüge einer interaktiven und fächerübergreifenden Didaktik. Seelze-Velber: Kallmeyer.

Gallin, Peter; Ruf, Urs (1998b): Dialogisches Lernen in Sprache und Mathematik. Band II. Spuren legen - Spuren lesen. Unterricht mit Kernideen und Reisetagebüchern. Seelze: Kallmeyer.

Gallin, Peter; Ruf, Urs (1999): Ich mache das so! Wie machst du es? Das machen wir ab. Sprache und Mathematik. 5.-6. Schuljahr. 1. Aufl. Zürich: Interkantonale Lehrmittelzentrale, Lehrmittelverl.

Glatfeld, Martin (1981a): Aspekte zur Analyse mathematischer Schulbücher. In: Martin Glatfeld (Hg.): Das Schulbuch im Mathematikunterricht. Braunschweig [u.a.]: Vieweg, S. 145–154.

Glatfeld, Martin (1981b): Aspekte zur Darstellung in mathematischen Schulbüchern. In: Martin Glatfeld (Hg.): Das Schulbuch im Mathematikunterricht. Braunschweig [u.a.]: Vieweg, S. 31–54.

Götz, Wolfgang (1981): Textgestaltung im Schulfach Mathematik. In: Martin Glatfeld (Hg.): Das Schulbuch im Mathematikunterricht. Braunschweig [u.a.]: Vieweg, S. 55–73.

Graesser C. Arthur; Singer, Murray; Trabasso, Tom (1994): Constructing Inferences During Narrative Comperhension. In: *Psychological Review* 101 (3), S. 371–395.

Gruber, Hans; Renkl, Alexander (2000): Die Kluft zwischen Wissen und Handeln: Das Problem des trägen Wissens. In: Georg Hans Neuweg (Hg.): Wissen - Können - Reflexion. Ausgewählte Verhältnisbestimmungen. Innsbruck: StudienVerlag, S. 155–174.

Gruber, Hans; Stamouli, Elena (2009): Intelligenz udn Vorwissen. In: Elke Wild und Jens Möller (Hg.): Pädagogische Psychologie. Dordrecht: Springer, S. 27–47.

Gruschka, Andreas (2013): Unterrichten - eine pädagogische Theorie auf empirischer Basis. Opladen [u.a.]: Budrich.

Haapasalo, Lenni; Kadijevich, Djordje (2000): Two Types of Mathematicel Knowledge and Their Relation. In: *JMD* 21 (2), S. 139–157.

Hagemann, Jörg (2007): Typographie und logisches Textdesign. In: Kersten Sven Roth und Jürgen Spitzmüller (Hg.): Textdesign und Textwirkung in der massenmedialen Kommunikation. Konstanz: UVK Verlagsgesellschaft, S. 77–92.

Haggarty, Linda; Pepin, Birgit (2002): An investigation of mathematics textbooks and their use in English, French and German classrooms: Who gets an opportunity to learn what? 28 (4), S. 567–590.

Harris, Nicholas; Dennis, Peter (2008): Abenteuer Zeitreise. Mannheim, Zürich [etc.]: Meyers Lexikonverlag.

Hasemann, Klaus (1986): Mathematische Lernprozesse. Analysen mit kognitionstheoretischen Modellen. Braunschweig: Vieweg.

Hasselhorn, Marcus; Gold, Andreas (2009): Pädagogische Psychologie. Erfolgreiches Lernen und Lehren. 2. Aufl. Stuttgart: Kohlhammer.

Hausendorf, Heiko; Kesselheim, Wolfgang (2008): Textlinguistik fürs Examen. Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht.

Hayen, Jürgen (1987): Planung und Realisierung eines mathematischen Unterrichtswerkes als Entwicklung eines komplexen Systems. Dokumentation und Analyse. Oldenburg: Klett.

Hayen, Jürgen (1990): Planung und Realisierung eines mathematischen Unterrichtswerks als Entwicklung eines komplexen Systems. Dokumentation nd Analyse. In: *JMD* 11 (2), S. 173–174.

Heckmann, Kirsten (2006): Zum Dezimalbruchverständnis von Schülerinnen und Schülern. Theoretische Analyse und empirische Befunde. Berlin: Logos-Verl.

Heinemann, Margot; Heinemann, Wolfgang (2002): Grundlagen der Textlinguistik. Interaktion - Text - Diskurs. Tübingen: Niemeyer.

Heinemann, Wolfgang; Viehweger, Dieter (1991): Textlinguistik. Eine Einführung. Tübingen: Niemeyer.

Heintz, Bettina (2000): Die Innenwelt der Mathematik. Zur Kultur und Praxis einer beweisenden Disziplin. Wien [u.a.]: Springer.

Heringer, Hans Jürgen (1989): Lesen lehren lernen. Eine rezeptive Grammatik des Deutschen. 2. Aufl. Tübingen: Niemeyer.

Heymann, Hans Werner (1996): Allgemeinbildung und Mathematik. Weinheim: Beltz.

Hoffmann, Michael H. G. (Hg.) (2003): Mathematik verstehen. Semiotische Perspektiven. Hildesheim: Franzbecker.

Höhne, Thomas (2003): Schulbuchwissen. Umrisse einer Wissens- und Medientheorie des Schulbuches. Frankfurt am Main: Fachbereich Erziehungswiss. der Johann-Wolfgang-Goethe-Univ.

Höhne, Thomas (2005): Über das Wissen in Schulbüchern - Elemente einer Theorie des Schulbuchs. In: Eva Matthes (Hg.): Das Schulbuch zwischen Lehrplan und Unterrichtspraxis. Bad Heilbrunn/Obb: Klinkhardt, S. 65–108.

Hörmann, Hans (1980): Der Vorgang des Verstehens. In: Wolfgang Kühlwein und Albert Raasch (Hg.): Sprache und Verstehen. Kongressberichte d. 10. Jahrestagung d. Gesellschaft für Angewandte Linguistik GAL e.V., Mainz 1979. Tübingen: Narr, S. 17–30.

Howson, A. G. (1995): Mathematics textbooks. A comparative study of grade 8 texts. Vancouver: Pacific Educational Press.

Jahnke, Thomas (2001): Normaler produktiver Mathematikunterricht. In: Wilfried Herget, Thomas Jahnke und Wolfgang Kroll (Hg.): Produktive Aufgaben für den Mathematikunterricht in der Sekundarstufe I. 1. Aufl., 1. Dr. Berlin: Cornelsen, S. 5–11.

Jong, Ton de; Ferguson-Hessler, Monica (1996): Types and Qualities of Knowledge. In: *Educational Psychologist* (31), S. 105–113.

Kadunz, Gert (Hg.) (2010): Sprache und Zeichen. Zur Verwendung von Linguistik und Semiotik in der Mathematikdidaktik. Hildesheim [u.a.]: Franzbecker.

Keitel, Christine; Otte, Michael; Seeger, Falk (1980): Text, Wissen, Tätigkeit. Das Schulbuch im Mathematikunterricht. Königstein/Ts: Scriptor.

Kintsch, Walter (1996): Lernen aus Texten. In: Carl F. Graumann und Niels Birbaumer (Hg.): Enzyklopädie der Psychologie. Göttingen, Bern, Toronto, Seattle: Hogrefe, Verl. für Psychologie, S. 503–528.

Kintsch, Walter (1998): Comprehension. A paradigm for cognition. Cambridge, New York, NY, USA: Cambridge University Press.

Knecht, Petr; Matthes, Eva; Schütze, Sylvia; Aamotsbakken, Bente (Hg.) (2014): Methodologie und Methoden der Schulbuch- und Lehrmittelforschung/Methodology and Methods of Research on Textbooks and Educational Media. Bad Heilbrunn: Klinkhardt, Julius.

Knoblauch, Hubert (2005): Wissenssoziologie. Konstanz: UVK.

Kollosche, David (2014): Gesellschaftliche Funktionen des Mathematikunterrichts. Ein soziologischer Beitrag zum kritischen Verständnis mathematischer Bildung. Wiesbaden: Springer.

Konerding, Klaus-Peter (1993): Frames und lexikalisches Bedeutungswissen. Untersuchungen zur linguistischen Grundlegung einer Frametheorie und zu ihrer Anwendung in der Lexikographie. Tübingen: Niemeyer.

Kügelgen, Rainer von (1994): Diskurs Mathematik. Kommunikationsanalysen zum reflektierenden Lernen. Frankfurt am Main, New York: P. Lang.

Langer, Inghard; Schulz von Thun, Friedemann; Tausch, Reinhard (1974): Verständlichkeit in Schule, Verwaltung, Politik und Wissenschaft. Mit e. Selbsttrainingsprogramm z. verständl. Gestaltung von Lehr- u. Informationstexten. München, Basel: Reinhardt.

Lauter, Josef (1992): Nach welchen Kriterien kann man Schulbücher für den Mathematikunterricht in der Grundschule beurteilen? In: *Mathematiksche Unterrichtspraxis* 13 (2), S. 17–29.

Lehmann, Gabriele (1987): Zur Verständlichkeit von mathematischen Lehrbuch-Texten. In: *JMD* 8 (1-2), S. 157–158.

Lenné, Helge (1969): Analyse der Mathematikdidaktik in Deutschland. Stuttgart: Ernst Klett Verlag.

Liebau, Bernd; Scheele, Uwe; Wilke, Wilhelm (Hg.) (2004): Mathematik 6. 1. Aufl. Braunschweig: Westermann.

Lötscher, Andreas (1987): Text und Thema. Studien zur thematischen Konstituenz von Texten. Tübingen: M. Niemeyer.

Lötscher, Andreas (2008): Textsemantische Ansätze. In: Nina Janich (Hg.): Textlinguistik: 15 Einführungen. Tübingen: Narr, S. 85–112.

Luckmann, Thomas (2002): Wissen, Handeln und Deuten. In: Thomas Luckmann (Hg.): Wissen und Gesellschaft. Ausgewählte Aufsätze 1981-2002. Konstanz: UVK Verlagsgesellschaft (1), S. 69–130.

Maier, Hermann; Schweiger, Fritz (1999): Mathematik und Sprache. Zum Verstehen und Verwenden von Fachsprache im Mathematikunterricht. Wien: ÖBV & HPT.

Mayer, Richard E.; Sims, Valerie; Tajika, Hidetsugu (1995): A Comparison of How Textbooks Teach Mathematical Problem Solving in Japan and the United States. In: *American Educational Research Journal* 32 (2), S. 443–460.

Meyerhöfer, Wolfram (2005): Tests im Test. Das Beispiel PISA. Opladen: Barbara Budrich.

Meyer, Michael; Voigt, Jörg (2008): Entdecken mit latenter Beweisidee - Analyse von Schulbuchseiten. In: *JMD* 29 (2), S. 124–151.

Mietzel, Gerd (2007): Pädagogische Psychologie des Lernens und Lehrens. 8. Aufl. Göttingen, Bern, Wien, Paris, Oxford, Prag, Toronto, Cambridge, MA, Amsterdam, Kopenhagen: Hogrefe.

Minsky, Marvin (1975): A Framework for Representing Knowlegde. In: Patrick Henry Winston (Hg.): The psychology of computer vision. New York: McGraw-Hill, S. 211–281.

Muckenhaupt, Manfred (1986): Text und Bild. Grundfragen der Beschreibung von Text-Bild-Kommunikationen aus sprachwissenschaftlicher Sicht. Tübingen: Niemeyer.

Nicholls, Jason (2003): Methods in School Textbook Research. In: *International Journal of Historicel Learning, Teaching and Research* 3 (2), S. 1–17.

Nussbaumer, Markus (1991): Was Texte sind und wie sie sein sollen. Ansätze zu einer sprachwissenschaftlichen Begründung eines Kriterienrasters zur Beurteilung von schriftlichen Schülertexten. Tübingen: Niemeyer.

Oberauer, Klaus (2000): Wissen und mentale Repräsentationen. In: Georg Hans Neuweg (Hg.): Wissen - Können - Reflexion. Ausgewählte Verhältnisbestimmungen. Innsbruck: StudienVerlag, S. 85–109.

O'Halloran, Kay L. (2005): Mathematical discourse. Language, symbolism and visual images. London: Continuum.

Österholm, Magnus; Bergqvist, Ewa (2013): What is so special about mathematical texts? Analyses of common claims in research literature and of properties of textbooks. In: *ZDM* 45 (5), S. 751–763.

Otte, Michael (1983): Textual Strategies. In: *For the learning of mathematics* (3), S. 15–28.

Otte, Michael (1986): What is a text? In: B. Christiansen, A. G. Howson und M. Otte (Hg.): Perspectives on Mathematics Education. Dordrecht: Springer Netherlands (2), S. 173–203.

Padberg, Friedhelm (2004): Die Einführung der Dezimalbrüche – ein Selbstläufer? In: m*athematik lehren* (123), S. 41–45.

Padberg, Friedhelm (2005): Didaktik der Arithmetik. 3. Aufl. München: Elsevier, Spektrum Akad. Verl.

Padberg, Friedhelm (2009): Didaktik der Bruchrechnung. 4. Aufl. Heidelberg: Spektrum, Akad. Verl.

Pepin, Birgit; Haggarty, Linda; Keynes, Milton (2001): Mathematics textbooks and their use in English, French and German classrooms: a way to understand teaching and learning cultures. In: *ZDM* 33 (5), S. 158–175.

Piaget, Jean; Inhelder, Bärbel (1983): Die Psychologie des Kindes. 33.-37. Tsd., Lizenzausg. Frankfurt, Main: Fischer Taschenbuch Verlag.

Pies, Anja; Borneleit, Peter; Winter, Martin (Hg.) (2007): Interaktiv Mathematik 6. 1. Aufl., 1. Dr. Berlin: Cornelsen.

Polenz, Peter von (2008): Deutsche Satzsemantik. Grundbegriffe des Zwischen-den-Zeilen-Lesens. 3. Aufl. Berlin: Walter de Gruyter.

Prange, Klaus (1986): Bauformen des Unterrichts. Eine Didaktik für Lehrer. 2. Aufl. Bad Heilbrunn/Obb: Klinkhardt.

Renkl, Alexander (1996): Träges Wissen: Wenn Erlerntes nicht genutzt wird. In: *Psychologische Rundschau* (47), S. 78–92.

Rezat, Sebastian (2008): Die Struktur von Mathematikschulbüchern. In: *JMD* 29 (1), S. 46–67.

Rezat, Sebastian (2009a): Das Mathematikbuch als Instrument des Schülers. Eine Studie zur Schulbuchnutzung in den Sekundarstufen. Wiesbaden: Vieweg+Teubner Verlag / GWV Fachverlage, Wiesbaden.

Rezat, Sebastian (2009b): Das Mathematikschulbuch als Instrument des Schülers - Eine empirische Studie zur Schulbuchnutzung in den Sekundarstufen. In: *JMD* 30 (3-4), S. 287–288.

Rezat, Sebastian (2011): Wozu verwenden Schüler ihre Mathematikschulbücher? Ein Vergleich von erwarteter und tatsächlicher Nutzung. In: *JMD* 32 (2), S. 153–177.

Rickheit, Gert; Herrmann, Theo; Deutsch, Werner (Hg.) (2003): Psycholinguistik. Handbücher zur Sprach- und Kommunikationswissenschaft. Berlin [u.a.]: De Gruyter.

Rickheit, Gert; Schade, Ulrich (2000): Kohärenz und Kohäsion. In: Klaus Brinker, Gerd Antos, Wolfgang Heinemann und Sven F. Sager (Hg.): Text- und Gesprächslinguistik. Ein internationales Handbuch zeitgenössischer Forschung. 2 Bände. Berlin, New York: W. de Gruyter (1), S. 275–282.

Rickheit, Gert; Strohner, Hans (1999): Textverarbeitung: Von der Proposition zur Situation. In: Angela D. Friederici (Hg.): Sprachrezeption. Göttingen: Verlag für Psychologie, S. 271–306.

Robitaille, David F.; Knight, Curtis Mc; Schmidt, William H.; Britton, Edward; Raizen, Senta; Nicol, Cynthia (1993): Curriculum frameworks for mathematics and science. Vancouver: Pacific Educational Press (1).

Rottensteiner, Sylvia (2012): Textrezeption von Schulgeschichtsbüchern im Spannungsfeld von Lesesozialisation und Unterrichtspraxis. Eine Schulbuchanalyse mit sprachwissenschaftlichem Zugang. Online verfügbar unter https://opus.bibliothek.uni-augsburg.de/…/Dissertation_Rottensteiner.pdf.

Sachs-Hombach, Klaus (Hg.) (2004): Bild - Bildwahrnehmung - Bildverarbeitung. Interdisziplinäre Beiträge zur Bildwissenschaft. 2. Aufl. Wiesbaden: Dt. Univ.-Verl.

Sandig, Barbara (2006): Textstilistik des Deutschen. 2. Aufl. Berlin, New York: W. de Gruyter.

Scheller, Petra (2010): Verständlichkeit im Physikschulbuch. Kriterien und Ergebnisse einer interdisziplinären Analyse. Bad Heilbrunn: Klinkhardt.

Scherner, Maximilian (1984): Sprache als Text. Ansätze zu einer sprachwissenschaftlich begründeten Theorie des Textverstehens: Forschungsgeschichte, Problemstellung, Beschreibung. Tübingen: M. Niemeyer.

Schiefele, Ulrich (1996): Motivation und Lernen mit Texten. Göttingen, Seattle: Hogrefe.

Schmitz, Ulrich (1997): Schriftliche Texte in multimedialen Kontexten. Online verfügbar unter http://www.linse.uni-due.de/linse/publikationen/text_in_multimedia.html.

Schnotz, Wolfgang (1994): Aufbau von Wissensstrukturen. Untersuchungen zur Kohärenzbildung beim Wissenserwerb mit Texten. Weinheim: Beltz.

Schnotz, Wolfgang (1996): Lesen als Textverarbeitung. In: Hartmut Guenther und Otto Ludwig (Hg.): Schrift und Schriftlichkeit (Writing and Its Use). Ein Interdisziplinaeres

Handbuch Internationaler Forschung - An Interdisciplinary Handbook of International Research. New York: Walter De Gruyter Inc (vol. 10.2), S. 972–982.

Schnotz, Wolfgang (2006): Was geschieht im Kopf des Lesers? Mentale Konstruktionsprozesse beim Textverstehen aus der Sicht der Psychologie und der kognitiven Linguistik. In: Hardarik Blühdorn, Eva Breindl und Ulrich H. Waßner (Hg.): Text -- Verstehen. Grammatik und darüber hinaus. Berlin, New York: De Gruyter, S. 222–238.

Schnotz, Wolfgang; Dutke, Stephan (2004): Kognitionspsychologische Grundlagen der Lesekompetenz: Mehrebenenverarbeitung anhand multipler Informationsquellen. In: Ulrich Schiefele, Cordula Artelt, Wofgang Schneider und Petra Stanat (Hg.): Struktur, Entwicklung und Förderung von Lesekompetenz. Vertiefende Analysen im Rahmen von PISA 2000. 1. Aufl. Wiesbaden: VS Verlag für Sozialwissenschaften, S. 61–100.

Scholz, Oliver R. (2001): Verstehen und Rationalität. Untersuchungen zu den Grundlagen von Hermeneutik und Sprachphilosophie. 2. Aufl. Frankfurt am Main: Vittorio Klostermann.

Schröder, Hartmut (1993): Semiotische Aspekte multimedialer Texte. In: Hartmut Schröder (Hg.): Fachtextpragmatik. Tübingen: G. Narr, S. 189–214.

Schröder, Thomas (2003): Die Handlungsstruktur von Texten. Ein integrativer Beitrag zur Texttheorie. Tübingen: Narr.

Schütz, Alfred (2003): Symbol, Wirklichkeit und Gesellschaft. In: Hubert Knoblauch, Ronald Kurt und Hans-Georg Soeffner (Hg.): Theorie der Lebenswelt 2. Die kommunikative Ordnung der Lebenswelt. Konstanz: UVK-Verl. Ges., S. 119–197.

Seeger, Falk; Steinbring, Heinz; Sträßer Rudolf (1989): Die didaktische Transformation. Rezension von Yves Chevallard: La Transposition didactique - du savoir savant au savoir enseigné. In: *mathematica didactica* 12 (2/3), S. 157–177.

Seel, Norbert M. (1991): Weltwissen und mentale Modelle. Göttingen: Hogrefe.

Seel, Norbert M. (2003): Psychologie des Lernens. Lehrbuch für Pädagogen und Psychologen. 2. Aufl. München [u.a.]: Reinhardt [u.a.]; E. Reinhardt.

Skemp, Richard R. (2009, c1987): The psychology of learning mathematics. Expanded American ed (Online-Ausg.). New York, Abingdon: Routledge.

Spitzmüller, Jürgen (2012): Typographie. In: Christa Dürscheid (Hg.): Einführung in die Schriftlinguistik. 4. Aufl. Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht; UTB, S. 207–238.

Stacey, Kaye; Vincent, Jill (2009): Modes of reasoning in explanations in Australian eighth-grade mathematics textbooks. In: *Educational Studies in Mathematics* 72 (3), S. 271–288.

Steindorf, Gerhard (1985): Lernen und Wissen. Theorie des Wissens und der Wissensvermittlung. Bad Heilbrunn/Obb: Klinkhardt.

Steiner, Gerhard (1996): Lernen. 20 Szenarien aus dem Alltag. 2. Aufl. Bern [u.a.]: Huber.

Stern, Elsbeth; Felbrich, Anja; Schneider, Michael (2010): Mathematiklernen. In: Detlef H. Rost (Hg.): Handwörterbuch pädagogische Psychologie. 4. Aufl. Weinheim [u.a.]: Beltz, S. 521–529.

Stöckl, Hartmut (2004a): Die Sprache im Bild, das Bild in der Sprache. Zur Verknüpfung von Sprache und Bild im massenmedialen Text : Konzepte, Theorien, Analysemethoden. Berlin, New York: Walter de Gruyter.

Stöckl, Hartmut (2004b): Typographie: Gewand und Körper des Textes - Linguistische Überlegungen zu typographischer Gestaltung. In: *Zeitschrift für angewandte Linguistik* (41), S. 5–48.

Stöckl, Hartmut (2006): Zeichen, Text und Sinn - Theorie und Praxis der multimodalen Textanalyse. In: Eva Martha Eckkrammer und Gudrun Held (Hg.): Textsemiotik. Studien zu multimodalen Texten. Frankfurt am Main Lang (23), S. 11–36.

Stöckl, Hartmut (2011): Sprache-Bild-Texte lesen. Bausteine zur Methodik einer Grundkompetenz. In: Hajo Diekmannshenke, Michael Klemm und Hartmut Stöckl (Hg.): Bildlinguistik. Theorien - Methoden - Fallbeispiele. Berlin: Erich Schmidt verlag (228), S. 45–70.

Strohner, Hans (2006): Textverstehen aus psycholinguistischer Sicht. In: Hardarik Blühdorn, Eva Breindl und Ulrich H. Waßner (Hg.): Text -- Verstehen. Grammatik und darüber hinaus. Berlin, New York: De Gruyter, S. 187–204.

Stylianides, Gabriel J. (2009): Reasoning-and-Proving in School Mathematics Textbooks. In: *Mathematical Thinking and Learning* 11, S. 258–288.

Ullmann, Philipp (2008): Mathematik, Moderne, Ideologie. Eine kritische Studie zur Legitimität und Praxis der modernen Mathematik. Konstanz: UVK Verlagsgesellschaft.

Valverde, Gilbert A.; Bianchi, Leonard J.; Wolfe, Richard G.; Schmidt, William H.; Houang, Richard T. (2002): According to the book. Using TIMSS to investigate the translation of policy into practice through the world of textbooks. Dordrecht, Boston: Kluwer Academic Publishers.

van Dijk, Teun Adrianus (1980): Textwissenschaft. Eine interdisziplinäre Einfürung. München: Deutscher Taschenbuch Verlag.

van Dormolen, Joop (1986): Textual Analysis. In: B. Christiansen, A. G. Howson und M. Otte (Hg.): Perspectives on Mathematics Education. Dordrecht: Springer Netherlands (2), S. 141–171.

Vollrath, Hans-Joachim (2001): Grundlagen des Mathematikunterrichts in der Sekundarstufe. Heidelberg, Berlin: Spektrum, Akad. Verl.

Vom Hofe, Rudolf (1995): Grundvorstellungen mathematischer Inhalte. Heidelberg, Berlin, Oxford: Spektrum, Akad. Verl.

Wehde, Susanne (2000): Typographische Kultur. Eine zeichentheoretische und kulturgeschichtliche Studie zur Typographie und ihrer Entwicklung. Tübingen: Niemeyer (69).

Weinert, Franz (2000): Lehren und Lernen für die Zukunft - Ansprüche an das Lernen in der Schule. In: *Pädagogische Nachrichten Rheinland-Pfalz*, S. 1–16.

Wiater, Werner (2003): Das Schulbuch als Gegenstand pädagogischer Forschung. In: Werner Wiater (Hg.): Schulbuchforschung in Europa. Bestandsaufnahme und Zukunftsperspektive. Bad Heilbrunn/Obb: Klinkhardt, S. 11–22.

Winkel, Sandra; Petermann, Franz; Petermann, Ulrike (2006): Lernpsychologie. Paderborn: Schoningh.

Wittmann, Erich (1981): Grundfragen des Mathematikunterrichts. 6. Aufl. Braunschweig [u.a.]: Vieweg.

Ziem, Alexander (2008): Frames und sprachliches Wissen. Kognitive Aspekte der semantischen Kompetenz. Berlin, New York: W. de Gruyter.

Zimmermann, Peter (1992): Mathematikbücher als Informationsquellen für Schülerinnen und Schüler. Eine Untersuchung zur Spezifikation von Anforderungen an gymnasiale mathematische Unterrichtswerke. Bad Salzdetfurth: Franzbecker.

Abbildungsverzeichnis

Strukturenverzeichnis