
Qualitative nichtlineare Zeitreihenanalyse mit Anwendung auf das Problem der Polbewegung

Im
Institut für Physik der
Universität Potsdam

eingereichte
Dissertation

von

Ismail Hammoudeh

aus Jordanien

Juni 2002

Qualitative nichtlineare Zei- treihenanalyse mit Anwend- ung auf das Problem der Polbewegung

Im
Institut für Physik der
Universität Potsdam

eingereichte
Dissertation

von

Ismail Hammoudeh

aus Jordanien

September 2002

Gutachter:
Prof. H. Jochmann
Prof. J. Kurths

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

1 Das Phasensignal

- **1.1 Motivation und Definition**
- **1.2 Das Phasensignal, bampq**
- **1.3 Bedeutung**
- **1.4 Frequenzbereich**
- **1.5 Zeitbereich**
- **1.6 Verteilung**
- **1.7 Beispiele mit dem Phasensignal**
- **1.8 Verallgemeinerungen des Phasensignals**
- **1.9 Zusammenfassung über das Phasensignal**

2 Kritik der Surrogatmethoden

- **2.0 Einführung**

■ **2.1 Über die Annahme der Gleichverteilung des Phasenspektrums einer linearen stationären Zeitreihe**

■ **2.2 Operationelle Begriffe**

■ **2.3 Unsere Konstruktionsmethode**

■ **2.4 Über die statistische Abhängigkeit zwischen Zeitreihen**

■ **2.5 Zusammenfassung**

3 Nichtlinearität in der Polbewegung?

■ **3.0 Einführung**

■ **3.1 Charakterisierung des Problems**

■ **3.2 Die Prüfung der Abhängigkeit der Polbewegung von der atmosphärischen Erregung auf Linearität und Stationarität**

■ **3.3 Linearität und Stationarität der Polbewegung**

■ **3.4. Beispiele von Hypothesen zur Polbewegung**

■ **3.5 Zusammenfassung**

Zusammenfassung

Anhänge

A. Nichtlineare Zeitreihenanalyse und die Surrogatmethode

B. Parametrische Maximalkorrelationen: MLC und MPC

C. Is Polar Motion Nonlinear?

Literaturverzeichnis

Nachwort und Danksagung

Einleitung

Das Jahr 1963 erlebte praktisch die Geburt von drei wichtigen Ideen in verschiedenen Gebieten der angewandten Mathematik.

Am nennenswertesten ist die Leistung von E.N. Lorenz [Lorenz 63], der in seinen Bemühungen um ein idealisiertes einfaches Modell für die Atmosphäre ein System aus 3 gewöhnlichen Differentialgleichungen begründen konnte, das eine merkwürdige Empfindlichkeit gegenüber kleinsten Änderungen in den Anfangswerten aufweist. Lorenz demonstrierte dabei als erster das Phänomen des "deterministischen Chaos". *[korrekter ist hier von einer Wiederbelebung und nicht von einer Geburt die Rede, denn die Idee des deterministischen Chaos wurde schon von Pincaré behandelt],*

Die zweite Idee war die von Barnard [Barnard 63], der als erster Hypothesentests durch Monte-Carlo-Methoden beschrieb und förderte. Er schrieb: ".. provided one has access to reasonable amount of time on a reasonably powerful computer, an exact test of significance is something one never needs be without."

Die dritte Idee ist die von Bogert, Healy und Tukey [Bogert et al. 63], die im Jahre 1963 eine Arbeit mit dem ungewöhnlichen Titel: "The Quefreny Alanysis of Time Series for Echoes: Cepstrum, Pseudoautocovariance, Cross-Cepstrum, and Saphe Cracking" veröffentlichten. Schon in ihrem ungewöhnlichen Titel stehen drei neue Begriffe, die aus Buchstabenpermutationen einiger berühmter Begriffe der Spektralanalyse entstehen. In ihrer Arbeit gibt es noch mehr:

frequency	quefreny
spectrum	cepstrum
phase	saphe
magnitude	gamnitude
filtering	liftering
harmonic	rahmonic
period	repiod

Tafel mit den neuen Begriffen von Bogert, Healy and Tukey

Die Begründung ihrer Umstellung der alten Begriffe erklärten Bogert et al. so: "in general, we find ourselves operating on the frequency side in ways customary on the time side and vice versa." Also fanden sich die Verfasser in so einer Lage, dass sie im Frequenzbereich Methoden anwenden mussten, die früher charakteristisch für den Zeitbereich waren und umgekehrt. Die neuen umgestellten Vokabeln erinnern an die traditionellen Begriffe. Von all diesen neuen Vokabeln haben sich mit der Zeit nur zwei durchgesetzt, das Cepstrum (auf Deutsch sollte es vielleicht Kepstrum heißen) und die Quefreny (die Quefrenz konsequenter Weise).

Kurz gefasst, in 1963 entstanden 3 neue Ideen: die Idee des deterministischen Chaos, die Idee der Hypothesenprüfung durch Monte-Carlo-Simulationen und die Idee der Dualbehandlung einer Zeitreihe im Zeit- und Frequenzbereich. Auf dem ersten Blick scheinen diese Ideen so verschiede-

nartig, dass ein gemeinsames Auftreten für sehr unwahrscheinlich gehalten wird. Trotzdem möchte ich hier in dieser Arbeit einen Aspekt studieren, wo alle drei Ideen eine Rolle spielen, wenn auch teilweise gegensätzliche Rollen. Und das kommt hoffentlich rechtzeitig vor dem 40. Jubiläum dieser Ideen. Höchste Zeit, denke ich.

Welche Treibkraft hat diese Ideen zusammengeführt, und auf welchem Gebiet mag dieser Aspekt des gemeinsamen Auftretens dieser drei Ideen liegen? Die Antwort kommt für die Kenner nicht unerwartet: Computer sind die Treibkraft und die nichtlineare Datenanalyse ist das Gebiet. Um die Lage bescheidener zu gestalten soll hier erwähnt werden, dass die Verschmelzung der beiden ersten Ideen schon seit einem Jahrzehnt (besonders wegen Arbeiten von Theiler [TEL+ 92, TLR93, TP96, TP97], Kaplan [Kap 95] und Schreiber [SS96, Sch98, SS00]) in der Form der Surrogatmethode bekannt und populär geworden ist. Die vorliegende Arbeit ist im Grunde eine Art Kritik und Korrektur dieser Surrogatmethode, wobei Methoden oft verwendet werden, die der dritten Idee entstammen (insbesondere die Idee des Phasensignals im nächsten Kapitel).

Die Entwicklungen in der Theorie der nichtlinearen Dynamik seit der Pionierarbeit von Lorenz verursachten eine Euphorie. Besonders nach der Begründung der Einbettungstheoreme begann man überall in jeder Zeitreihe nach einem chaotischen Attraktor zu suchen. Angeblich sei eine Erklärung komplexen Verhaltens mit niederdimensionalem Chaos physikalisch einfacher und deswegen von der Natur bevorzugter als stochastische Erklärungen. Es war dann nötig ein Kriterium zu finden, der zwischen Chaotizität und Stochastizität unterscheiden kann. Es gab aber ein Problem. Chaos lässt sich nicht einfach prüfen. Aber Chaos ist notwendigerweise ein nichtlineares Verhalten. Also sollte man zuerst Nichtlinearität im zu untersuchenden System nachweisen, bevor man nach Chaos sucht.

Und hier begann vor etwa 10 Jahren die Verschmelzung der Monte-Carlo-Methoden mit der Nichtlinearen Dynamik. Theiler et al. [TEL+92] beobachteten, dass das Amplitudenspektrum nur lineare Eigenschaften enthalten kann, denn es korrespondiert in eindeutiger Weise mit den linearen Autokorrelationen. Sie erfanden einen Algorithmus mit Hilfe dessen, Surrogate mit dem gleichen Amplitudenspektrum, und mit informationslosem Phasensignal konstruiert werden, also Surrogate mit den gleichen linearen Eigenschaften. Es war die fourier-basierte Surrogat-Methode: FT-Surrogatmethode.

Diese Methode wurde schnell populär. Sie manifestierte die Teilung der Informationen in einem Signal in lineare Amplitudeninformation und nichtlineare Phaseninformation. Das sollte ein Grund genug sein, sich mit der Phase zu befassen und ihre Gesetzmäßigkeiten zu erkunden. Hier kommt man automatisch auf den Pfad der Erfinder des Cepstrums, Bogert, Healy und Tukey. Nach meiner Meinung hat man das Studium des Phasenspektrums vernachlässigt. Jetzt mit den Entwicklungen in der nichtlinearen Datenanalyse ist es höchste Zeit. Und hier habe ich hoffentlich einen gewissen Beitrag geleistet.

Die FT-Surrogatmethode wurde auch schnell mit Begeisterung und Euphorie aufgenommen. Aber einige grundlegende Eigenschaften der Methode wurden nicht konsequent genug verfolgt. Im zweiten Kapitel wird die Surrogatmethode untersucht.

Im dritten Kapitel wird schnell exemplarisch eine geophysikalische Anwendung, die Polbewegung, betrachtet. Es werden die Resultate von Hypothesentests aufgestellt. Im Gegensatz zur Überzeu-

gung einiger Skeptiker wird klar, dass Interessante Hypothesen [*nicht nur die oft nicht sehr interessante Frage: "Sind die Daten linearen Ursprungs?"*] doch aufzustellen sind.

1 Das Phasensignal

■ 1.1 Motivation und Definition

In der Einleitung (und gründlicher im Anhang A) ist erklärt, wie die populären fourier-basierten Surrogate in den drei Formen: FT-Surrogaten, AAFT-Surrogaten und den iterativen IAAFT-Surrogaten konstruiert werden. Die erste Form, die FT-Form, ist die grundlegende Form, die weitere Modifikationen im Sinne der Histogramm-Abbildung zulässt. Der Hauptteil dieser Studie befasst sich mit dem Studium der Methode der fourier-basierten Surrogate. In der Einleitung, im Anhang A und insbesondere im nächsten Kapitel wird erklärt, auf welchen Annahmen sich die fourier-basierte Surrogatmethode stützt. Es ist die noch zubeweisende Annahme,

Annahme A : Alle linearen Eigenschaften einer typischen Realisierung eines stationären linearen Zeitreihenprozesses stecken ausschließlich im Amplitudenspektrum.

Diese Annahme verschärft sich im normalverteilten Fall zu:

Annahme B : Linearität + Stationarität + Gaußizität \Leftrightarrow Gleichverteilung der Phasen im Phasenspektrum (Phasengleichverteilung).

Kehren wir zurück zu den Linearitätskriterien, die ein Linearitätstest mit fourierbasierten Surrogaten implizit annimmt, wie sie in den vorigen Formulierungen stehen. Formulierung A besagt, dass keine Informationen des Amplitudenspektrums im Phasenspektrum Spuren hinterlassen. Z.B. soll aus dem Phasenspektrum auf keinen Fall eine charakteristische Frequenz extrahiert werden, die irgendeine Rolle im Amplitudenspektrum spielt. In diesem Sinn müssen das Amplitudenspektrum und das Phasenspektrum voneinander statistisch unabhängig sein. Formulierung B ist die stärkere und besagt, dass schon der Nachweis einer signifikanten Abweichung von der Gleichverteilung für die Verteilung der Phasen im Phasenspektrum zur Ablehnung der Nullhypothese führt. Dieser Sachverhalt ist eigentlich ganz verständlich, denn jede Teststatistik, die im FT-Surrogatetest zum Testen auf Linearität verwendet wird, ist eine Funktion aller Veränderlichen im Amplituden- und Phasenspektrum ($\{A_k\}, \{\phi_k\}$). Da das Amplitudenspektrum im FT-Surrogatetest überall exakt erhalten bleibt, vergleicht man eigentlich nur die Projektion der Teststatistik auf den Raum der Veränderlichen ($\{\phi_k\}$) im Phasenspektrum. Die Phasen der FT-Surrogate sind gleichverteilt. Also testet man eigentlich die Phasen der Originalzeitreihe auf Gleichverteilung. Das ist insbesondere deswegen eine richtige Schlussfolgerung, weil man in der Methode des Surrogattests praktisch alle Teststatistiken ohne jegliche Begrenzung zulässt.

Braucht man wirklich eine Monte-Carlo-Methode zur Prüfung einer Datenreihe zufälliger Zahlen auf Gleichverteilung? Ich bin überzeugt, dass die aufwendigeren und aussageschwächeren Monte-Carlo-Testmethoden gar nicht notwendig sind. Eine Begründung für die Verwendung der Surrogatmethode versucht man zu erreichen, indem man folgende Argumente angibt:

1. Das Testen auf Gleichverteilung ist gewöhnlich schwierig. Es gibt nur einige bekannte theoretisch begründete Tests, und die Surrogatmethode hat praktisch keine Grenzen in der Wahl der Teststatistiken.
2. Es ist erwünscht, Teststatistiken zu benutzen, die eine transparente Bedeutung haben, die physikalisch oder mathematisch im Rahmen der Theorie der nichtlinearen Dynamik nachvollzogen werden kann.

Zum ersten Punkt wird gleich gezeigt, wieviele neue Teststatistiken mit theoretisch bekannter Verteilung das Phasensignal konstruieren kann. Mit diesen Teststatistiken können oft Signifikanzen erreicht werden, die mit Monte-Carlo-Methoden undenkbar scheinen. Zum zweiten Punkt erinnern wir daran, dass den im Surrogattest verwendeten Teststatistiken für endliche mit Rauschen behaftete Zeitreihen gewöhnlich keine absolute Bedeutung zugemessen werden darf. Abschätzungen für Ljapunow-Exponente, Korrelationssummen, Entropien und fraktale Dimensionen haben gar keine Bedeutung im absoluten Sinn. Also ist der Wahl einer physikalisch verständlichen Teststatistik nicht von Bedeutung. *(Man kann sich aber überlegen, dass es bestimmte Teststatistiken geben darf, die an sich etwas absolut messen (z.B. die Korrelation zwischen der momentanen Amplitude und der momentanen Phase in der Arbeit von Palus und Novotna [PN99].). In diesem Fall hat der Surrogattest eine erweiterte Bedeutung und die Nullhypothese beinhaltet die explizite Bedeutung der Teststatistik [PN 00].)*

Die Idee des Surrogattests mit den fourier-basierten Surrogaten macht klar, dass eine Trennung zwischen dem Amplitudenspektrum und dem Phasenspektrum sinnvoll ist. Die fourier-basierten Surrogate sind selbst Signale im Zeitbereich, die aus einer ursprünglichen Zeitreihe so gebildet werden, dass das ursprüngliche Phasenspektrum entfernt und durch ein neues informationsloses Phasenspektrum ersetzt wird. Ein besonderes informationsloses Phasenspektrum ist eins, bei dem alle Phasen verschwinden. Das so entstandene spezielle Surrogat nennen wir das Amplitudensignal. Mit der Fourier-Darstellung einer Zeitreihe, $\{x_t\}$,

$$\{x_t\} = \mathcal{F}^{-1} \{A_k e^{i\phi_k}\} \quad (1)$$

definieren wir das Amplitudensignal $AS[\{x_t\}] = \{A_t\}$

$$AS[\{x_t\}] = \{A_t\} = \mathcal{F}^{-1} \{A_k\} \quad (2)$$

Analog dazu definieren wir das Phasensignal 1. Art:

$$\text{Phasensignal I } [\{x_t\}] = \text{bleich}[\{x_t\}] = \{\text{PS}_t\} = \mathcal{F}^{-1} \{e^{i\phi_k}\} \quad (3)$$

[bleichen = weiß machen, also wird das Signal zu weißem Rauschen, in dessen Amplitudenspektrum alle Farben (alle Frequenzen) gleich beteiligt sind]

Es folgt:

$$\{x_t\} = \{A_t\} \otimes \{\text{PS}_t\} \quad (4)$$

Die Zeitreihe ist die Faltung aus dem Amplitudensignal und dem Phasensignal 1. Art.

Das implizite Nichtlinearitätskriterium (Annahmen A und B) besagt, dass das Phasensignal 1. Art alle reinen nichtlinearen und keine linearen Eigenschaften der Zeitreihe enthält. Das Studium der

Struktur des Phasensignals dient zur Erforschung des nichtlinearen Charakters der Zeitreihe. Allein die Feststellung einer Struktur im Phasensignal ist eine Bestätigung der "Nichtlinearität" [richtiger: der sogenannten Nichtlinearität à Theiler] der Zeitreihe. Das Phasensignal soll im Frequenzbereich und im Zeitbereich studiert werden.

■ 1.2 Das Phasensignal, **bampq**

Ohne Weiteres ist das Phasensignal 1. Art im Frequenzbereich wenig interessant, da sein Absolutwert hier identisch 1 ist. Eine Modifikation des Phasensignals 1. Art scheint angebracht, um ein Signal zu konstruieren, das auch im Frequenzbereich interessant ist. Das gesuchte Signal soll im Frequenzbereich Informationen über charakteristische Frequenzen und Phasenkopplungen zwischen verschiedenen Frequenzen geben können. Ich habe mehrere Modifikationen versucht, die wenig erfolgreich waren. Am Ende bin ich durch Versuch und Irrtum auf die folgende Modifikation gestoßen:

$$\text{bampq}\{x_t\} = \{\text{bampq}_t\} = \text{Amp}\{[\text{PS}_t]^2\} = \{\text{PS}_t^2\} + \text{Hilbert}\{[\text{PS}_t]\}^2 \quad (5)$$

Das Phasensignal 2. Art (**bampq** oder das Phasensignal schlechthin) ist (formal gesehen) das Quadrat der momentanen Amplitude des Phasensignals 1. Art. Mit der momentanen Amplitude wird der Betrag des Gabor'schen analytischen Signals gemeint, das das ursprüngliche Signal als Realteil und dessen Hilbert-Transformierte als Imaginärteil hat.

$$\text{Gabor}\{x_t\} = \{x_t\} + \text{i Hilbert}\{x_t\} \quad (6)$$

Das Phasensignal, **bampq**, einer ZR ist eine aus der Zeitreihe hergeleitete ZR, die im idealen Fall (also im Fall der Erfüllung der Theiler-Annahmen) nur rein nichtlineare Eigenschaften der ursprünglichen Zeitreihe beinhaltet.

Wie konstruiert man das Phasensignal? Man **bleicht** die Zeitreihe, findet dann die momentane **amplitude** des Produkts und **quadriert** diese Amplitude:

1. **b**: man bleicht die ZR mit der Fourier-Methode. Man behält das Phasenspektrum der ZR, das nur im nichtlinearen Fall von Belang ist, und ersetzt das Amplitudenspektrum, das alle linearen Informationen der ZR enthält, durch ein ganz informationsloses Standardspektrum. (Hier wird ein konstantes Amplitudenspektrum für den ganzen relevanten Frequenzbereich gewählt).

2. **amp**: man findet die momentane Amplitude des Fourier-gebleichten Signals (des Phasensignals 1. Art). Eine elegante Methode dies zu berechnen, ist die Verwendung des Gabor'schen analytischen Signals. Das Signal wird in die ganze komplexe Ebene analytisch fortgesetzt. Dazu rechnet man die Hilbert-Transformation des Signals als Imaginärteil des analytischen Signals. Die Amplitude ist der Absolutwert dieser komplexen Zeitreihe. Im Prinzip bewirkt die Hilbert-Transformation eine Phasenverschiebung um $+\pi/2$ (bzw. $-\pi/2$) im positiven (bzw. negativen) Phasenspektrum. Die Hilbert-Transformation behält das Amplituden-Spektrum. Das Ergebnis dieser Transformation bis zu diesem Schritt nennen wir **bamp**.

Warum waren wir nicht zufrieden mit dem Fourier-gebleichten Signal (mit dem Phasensignal 1. Art)? wir möchten Periodizitäten nichtlinearen Ursprungs (z.B. Grenzyklen) untersuchen. Dazu

möchten wir interessante Spektren ermitteln können. Das Amplitudenspektrum des Fouriergebleichten Signals ist bekanntlich identisch 1. Eine Modifikation dieses Signals (dieses Phasensignals 1. Art) ist angebracht. Das einfache Kubieren des Phasensignals 1. Art hilft nicht wesentlich. Durch verschiedene Versuche haben wir gefunden, dass die momentane Amplitude am besten hilft, obwohl sie im Prinzip nur die Hälfte der Information des Signals enthält. Also es bleiben nichtlineare Informationen in der momentanen Phase unbehandelt. Später entdeckt man, dass das so konstruierte Phasensignal in direkter Beziehung zu Autokorrelationen im Phasenspektrum steht.

3. **Q**: Dann quadriert man die Amplitude und erhält **bampq**. Eigentlich kann man im Prinzip beliebige monotone Funktionen auf **bamp** anwenden (z.B. Log), aber das Quadrieren wird vorgezogen, weil theoretische Untersuchungen im Fourier-Raum leichter werden, und weil hier auch eine Kontrolle gegen *lineare Artefakte* (Zeitreihen mit klaren linearen Restspuren im Phasenspektrum) schon optisch besser gelingt. (**bamp** oder **bampLog** sind vorteilhaft, wenn man restliche lineare Eigenschaften in den Artefakten untersuchen will).

Zum Beispiel betrachten wir den Barnes'schen Prozess, der zur Beschreibung der jährlichen Sonnenfleckenzreihe von Barnes et al. vorgeschlagen wurde [Barnes et al., 1980]. Das Skelett des Barnes'schen Prozesses, $\{z_t\}$, ist ein autoregressiver Moving-Average-Prozess ARMA(2,2), $\{x_t\}$, der nichtlinear transformiert wird. Im einzelnen sind die Formeln des Barnes'schen Prozesses:

$$\begin{aligned} \text{Barnes_x: } x_t &= \xi_1 x_{t-1} + \xi_2 x_{t-2} + \epsilon_t - \eta_1 \epsilon_{t-1} - \eta_2 \epsilon_{t-2} \\ \text{Barnes_y: } y_t &= x_t^2 \\ \text{Barnes_z: } z_t &= y_t + \gamma (y_t - y_{t-1})^2 \end{aligned} \quad (7)$$

Dabei sind $\xi_1 = 1.90693$, $\xi_2 = -0.98751$, $\eta_1 = 0.78512$, $\eta_2 = -0.40662$, $\gamma = 0.03$. ϵ_t ist Gauß'sches weißes Rauschen, $N[0, \sigma]$, mit der Standardabweichung $\sigma = 0.4$.

Der Barnes'sche Prozess hat das Potential, 4 verschiedene charakteristische Frequenzen zu haben, nämlich:

$$\begin{aligned} \nu_1 &= \frac{1}{2\pi} \arccos \left(4 \xi_2 \eta_1^2 - 4 \eta_2 \xi_1^2 - 4 \eta_2 \xi_2^2 + \right. \\ &\quad \sqrt{\left((-4 \xi_2 \eta_1^2 + 4 \eta_2 \xi_1^2 + 4 \eta_2 \xi_2^2 + 4 \eta_2 - 4 \eta_2^2 \xi_2 - 4 \xi_2)^2 - \right. \\ &\quad \left. 4 (-4 \eta_2 \xi_1 + 4 \eta_2 \xi_2 \xi_1 + 4 \eta_1 \xi_2 - 4 \eta_1 \eta_2 \xi_2) \right. \\ &\quad \left. (-\xi_1 \eta_1^2 + \xi_1 \xi_2 \eta_1^2 - \eta_2 \xi_1^2 \eta_1 + \xi_1^2 \eta_1 - \eta_2 \xi_2^2 \eta_1 + \xi_2^2 \eta_1 - \right. \\ &\quad \left. \eta_2 \eta_1 - 2 \eta_2 \xi_2 \eta_1 + 2 \xi_2 \eta_1 + \eta_1 - \eta_2^2 \xi_1 - 2 \eta_2 \xi_1 - \right. \\ &\quad \left. \xi_1 + \eta_2^2 \xi_1 \xi_2 + 2 \eta_2 \xi_1 \xi_2 + \xi_1 \xi_2) \right) - 4 \eta_2 + 4 \eta_2^2 \xi_2 + \\ &\quad \left. 4 \xi_2 \right) / \left(2 (-4 \eta_2 \xi_1 + 4 \eta_2 \xi_2 \xi_1 + 4 \eta_1 \xi_2 - 4 \eta_1 \eta_2 \xi_2) \right) \end{aligned} \quad (8)$$

$\nu_1 = 0.0454512 \approx \frac{1}{22}$, $\nu_2 \approx 2 \nu_1$, $\nu_3 \approx 3 \nu_1$, $\nu_4 \approx 4 \nu_1$. Die quadratische Form in (Gl.7.2) behauptet ν_2 und ν_4 und entfernt die Gipfel von ν_1 und ν_3 vom Spektrum. So ein Prozess kann die beobachtete 11-jährige Periode in der Zeitreihe der Sonnenflecken wiedergeben.

Wir behandeln eine Realisierung, $\{x_t\}$, des ARMA-Prozesses Barnes_x (Gl.7)

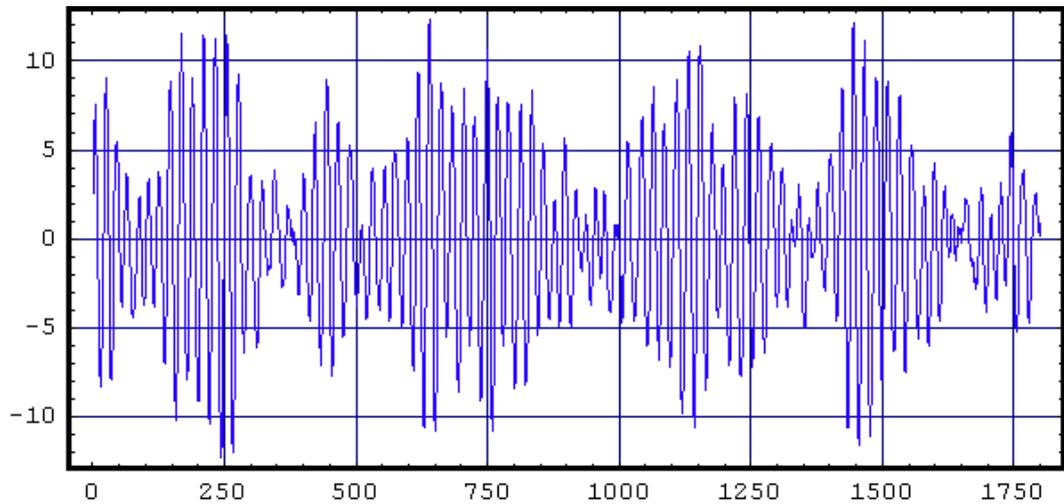
**Figure 1**

Abb.1: Eine Simulation $\{x_t\}$ des linearen stochastischen Prozesses Barnes_x von (Gl. 7), der dem Barnes'schen Sonnenfleckmodell zugrunde liegt. Die Zeitreihe ist 1800 Jahre lang.

Das Amplitudenspektrum sieht so aus:

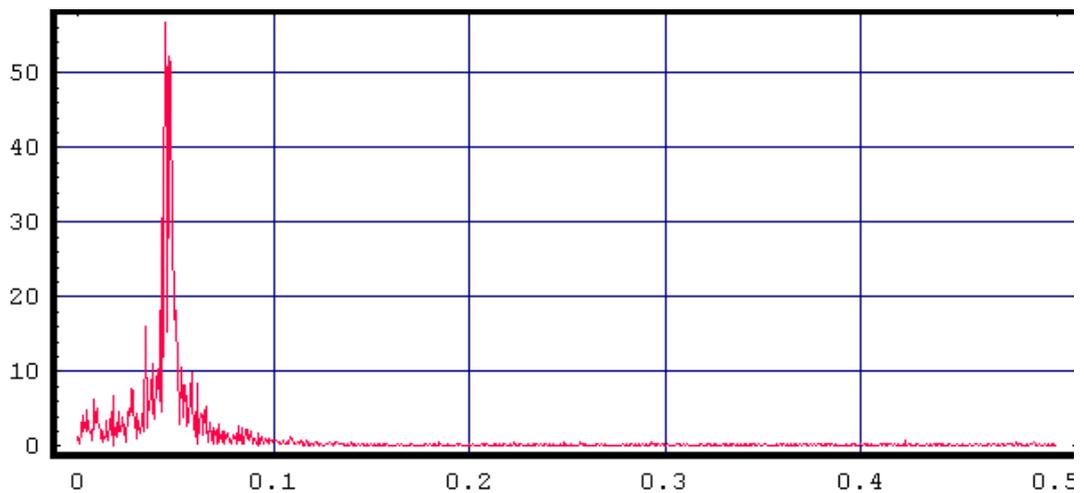
**Figure 2**

Abb.2: Das Amplitudenspektrum des ARMA-Prozesses hat einen Gipfel für die Frequenz $\nu_1 = 0.0454512 \approx \frac{1}{22}$ (d.h. eine Periode von 22 Jahren)

Das Bleichen von $\{x_t\}$ ergibt das Phasensignal 1.Art:

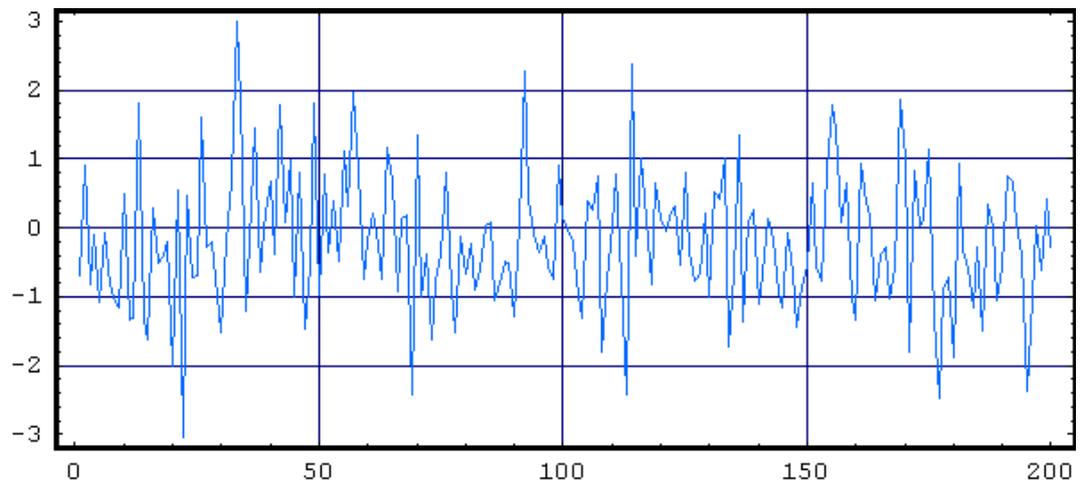


Figure 3

Abb.3: Das Phasensignal 1. Art von $\{x_t\}$. Es besteht aus quasi-gauß'schen Zufallszahlen. Hier sind 200 Zahlen.

Die momentane Amplitude dieses gebleichten Signals (formal gesehen) ergibt:

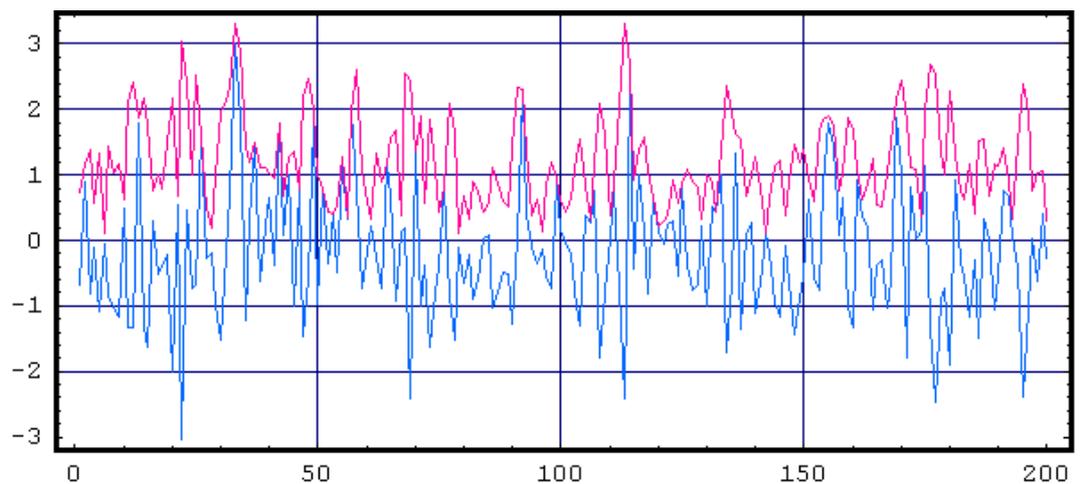


Figure 4

Abb.4: Das gebleichte Signal (blau) und seine "momentane Amplitude" (lila)

Diese Grafiken waren im Zeitbereich. Wie sieht das Spektrum von $\text{bampq}[\{x_t\}]$ aus? Nicht besonders anschaulich, weil hier stochastische Zeitreihen im Spiel sind. Hier zeigen wir einen Vergleich zwischen dem Signal $\{x_t\}$ und seinem Phasensignal $\text{bampq}[\{x_t\}]$ im Frequenzbereich:

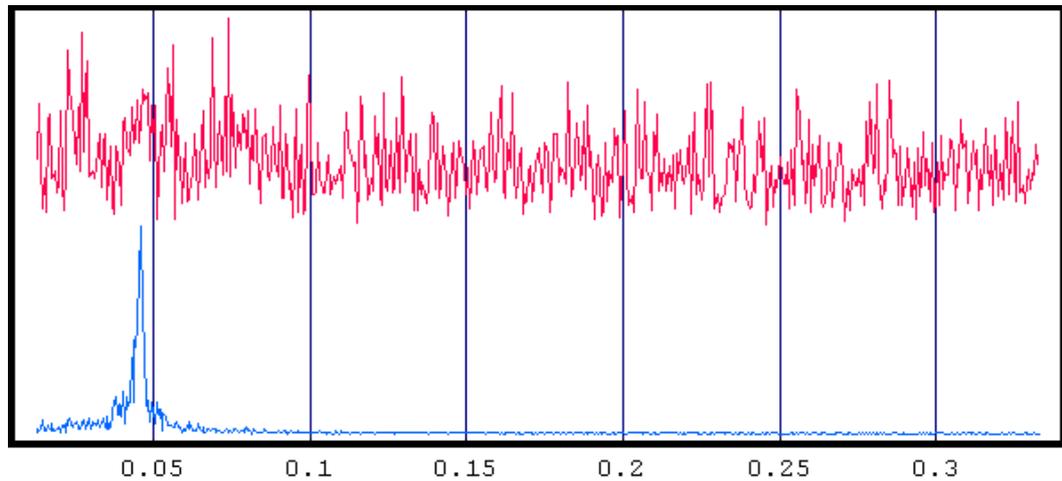


Figure 5

Abb.5: Das Amplitudenspektrum des Phasensignals, bampq , der linearen Zeitreihe $\{x_t\}$ (rot) im Vergleich mit dem Amplitudenspektrum von $\{x_t\}$. Es gibt gar kein Zeichen für eine charakteristische Frequenz im Phasenspektrum.

Für Realisierungen linearer Prozesse sind alle Grafiken des Phasensignals uninteressant. Man kann von keiner charakteristischen Frequenz sprechen. Wie sieht es aus bei einer einfachen nichtlinearen Transformation? Im Barnes'schen Modell ist $\{y_t\}$ das Quadrat des vorigen Signals. Nun sieht das Amplitudenspektrum des Phasensignals von $\{y_t\}$ interessanter aus las das von $\{x_t\}$

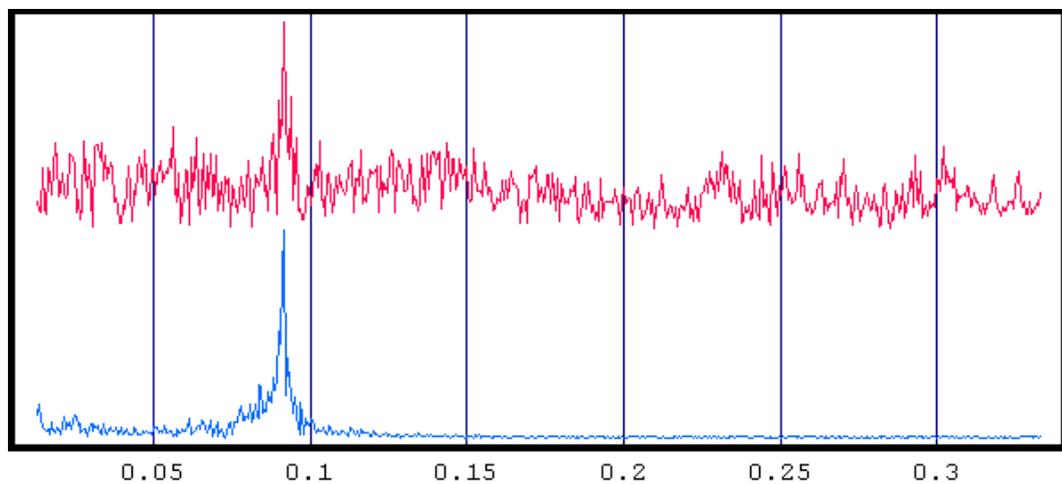


Figure 6

Abb.6: Vergleich zwischen den Gipfeln der Amplituden-Spektren von $\{y_t\}$ (in blau) und $\text{bampq}[\{y_t\}]$ (in rot).

Jetzt gibt es eine charakteristische Frequenz im Phasenspektrum, die exakt an derselben Stelle des Gipfels ($\nu_2 = 1/11$) im Amplitudenspektrum liegt. Es handelt sich hier um "quadratische Phasenkopplung". Eine charakteristische Frequenz im Leistungsspektrum, die im direkten Zusammenhang zu einer charakteristischen Frequenz im Spektrum des Phasensignals steht, nennen wir "nichtlineare Frequenz".

Die Untersuchung einer Realisierung des Barnes'schen Prozesses, z_t , stellt auch die Existenz nichtlinearer Frequenzen fest. Die entsprechende Vergleichsgrafik sieht so aus:

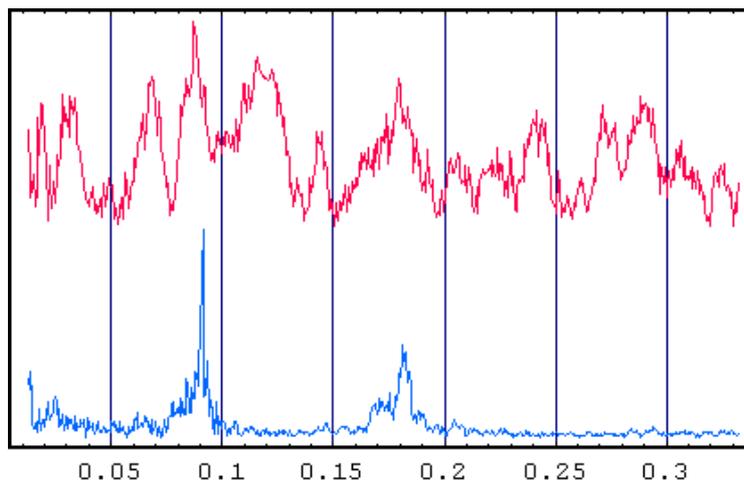


Figure 7

Abb.7: Vergleich zwischen den Gipfeln der Amplituden-Spektren des ursprünglichen Signals (in blau) und des Phasen-Signals (in rot).

Von einer einzigen Realisierung wird ziemlich klar, dass der Barnes'sche Prozess zwei nichtlineare Frequenzen hat: nämlich $\nu_2 = 1/11$ und $\nu_4 = 2/11$. Wenn man über viele Realisierungen (5000) des Prozesses mittelt verbessert sich das Bild:

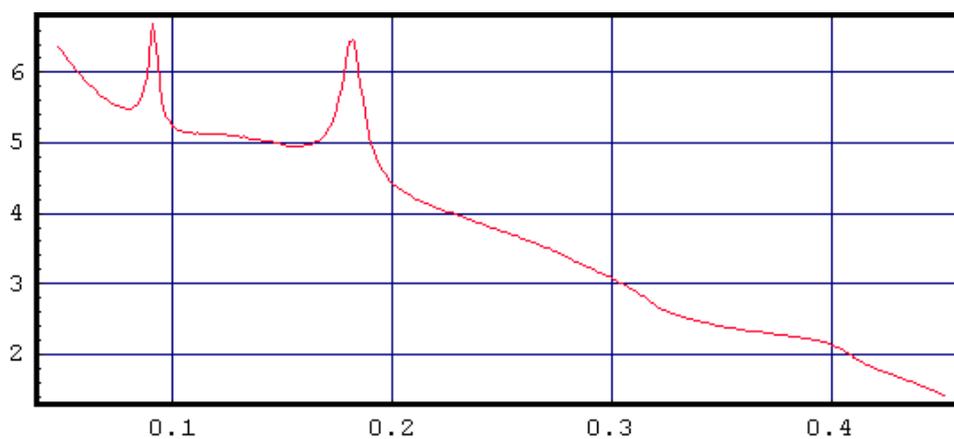


Figure 8

Abb.8: Das Phasensignal des Barnes'schen Prozesses hat zwei Gipfeln bei $\nu_2 = 1/11$ und $\nu_4 = 2/11$.

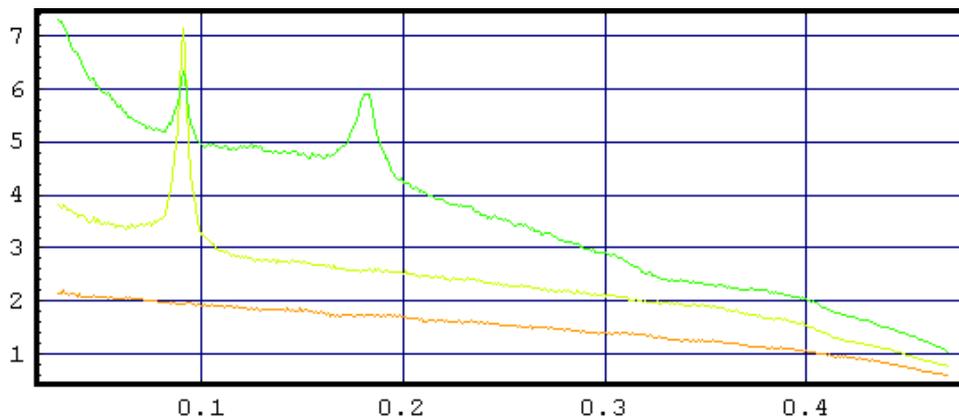


Figure 9

Abb.9: Das Phasensignal der im Barnes'schen Modell betrachteten Zeitreihen gemittelt über 5000 Realisierungen. Orange ist die lineare ARMA-Zeitreihe $\{x_t\}$ (praktisch identisch mit dem Phasensignal einer phasengleichverteilten Zeitreihe). Gelb ist $\{y_t\}$, das Quadrat von $\{x_t\}$, das quadratische Phasenkopplung aufweist. Grün ist schließlich die endgültige Barnes'sche Zeitreihe $\{z_t\}$

■ 1.3 Bedeutung

Nachdem die Konstruktion des Phasensignals erklärt wurde, wissen wir, dass das Phasensignal das Quadrat der formalen Amplitude des Fourier-gebleichten Signals ist. Das hilft wenig. Es stellt sich die wichtige Frage: hat das Phasensignal irgend eine direkte interpretierbare physikalische Bedeutung? Was beschreibt oder misst das Phasensignal im Zeitbereich? Was beschreibt oder misst es im Frequenzbereich? Kann man aus dem Phasensignal quantitative Aussagen gewinnen, oder muss man sich mit qualitativen Aussagen begnügen? Das wird in den kommenden Abschnitten studiert. Zuerst möchte ich auf eine schöne Eigenschaft des Phasensignals 2. Art hinweisen, die vielleicht die Modifikation (Gl. 5) des Phasensignals 1. Art attraktiv macht, auch wenn diese Eigenschaft für stetig differenzierbare Signale existiert, und unser Interesse in erster Linie stochastischen diskreten Zeitreihen gilt.

$x(t)$ und $y(t)$ seien zwei stetige Signale, die in der Form von genügend langen Zeitreihen $\{x_t\}$ und $\{y_t\}$ mit genügend kleinem Schritt aufgenommen sind, so dass die Fourier-gebleichten Formen der Zeitreihen (d.h. deren Phasensignale 1. Art $\{bx_t\}$ und $\{by_t\}$) im übertragenen Sinn stetig sind. Es sei $y(t)$ die erste Ableitung von $x(t)$. Aus der Darstellung von $\{x_t\}$ im Frequenzbereich: $\mathcal{F}\{x_t\} = \{A_k e^{i\phi_k}\}$ folgt: $\mathcal{F}\{y_t\} = \{\frac{ikA_k}{N} e^{i\phi_k}\}$, $\mathcal{F}\{bx_t\} = \{e^{i\phi_k}\}$ und $\mathcal{F}\{by_t\} = \{i \operatorname{sig}(k) e^{i\phi_k}\}$ (sig ist die Vorzeichen-Funktion). wenn man sich an die Definition der Hilbert-Transformation erinnert, dann wird klar, dass $\{bx_t\}$ und $\{by_t\}$ durch eine Hilbert-Transformation miteinander verknüpft sind. Das Gabor'sche analytische Signal von $\{bx_t\}$ ist also bis auf einen Faktor i das Konjugiert-Komplexe des Gabor'schen analytischen Signals von $\{by_t\}$. Die entsprechenden Beträge sind sicher gleich. Es folgt $\operatorname{bampq}[\{x_t\}] = \operatorname{bampq}[\{y_t\}]$. **Das Phasensignal 2. Art wird (unter bestimmten Regularitätsbedingungen) nach Differentiation erhalten.**

Wir möchten jetzt diese Eigenschaft an einem Beispiel demonstrieren. Wir betrachten die Lösung des Lorentz-Systems:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{x}'[t] &= \sigma * (\mathbf{y}[t] - \mathbf{x}[t]) \\
 \mathbf{y}'[t] &= \mathbf{r} * \mathbf{x}[t] - \mathbf{y}[t] - \mathbf{x}[t] * \mathbf{z}[t] \\
 \mathbf{z}'[t] &= \mathbf{x}[t] * \mathbf{y}[t] - \mathbf{b} * \mathbf{z}[t],
 \end{aligned} \tag{9}$$

mit den Parametern: $\{r, b, \sigma\} = \{28, \frac{8}{3}, 10\}$
 und den Anfangsbedingungen: $\{x[0], y[0], z[0]\} = \{0, 1, 0\}$.

Wir betrachten die x-Komponente der numerischen Lösung. Um die theoretische Gleichheit des Phasensignals zu demonstrieren vermeiden wir eine mögliche Fehlerquelle wegen der Fourier-Bildung und sorgen für passende Periodizitätsbedingungen. Wenn man nur 2 Signale vergleichen möchte (das Signal und seine erste Ableitung) muss man die passenden Endpunkte des zu untersuchenden Intervalls wählen. Sie müssen im ursprünglichen Signal gleich groß sein. Wenn man aber weitere Ableitungen vergleichen möchte, ist es praktisch unmöglich Endpunkte zu finden, welche die Periodizitätsbedingungen auch für mehr als ein Signal gleichzeitig erfüllen. Hier möchten wir 4 Signale vergleichen. Das erste Signal ist die x-Komponente mit 2 gleichgroßen Endpunkten. Das zweite Signal ist die erste Ableitung. Die beiden letzten Signale sind Integrationen des ersten Signals, die die Periodizität (durch die Wahl passender Integrationskonstanten) erfüllen.

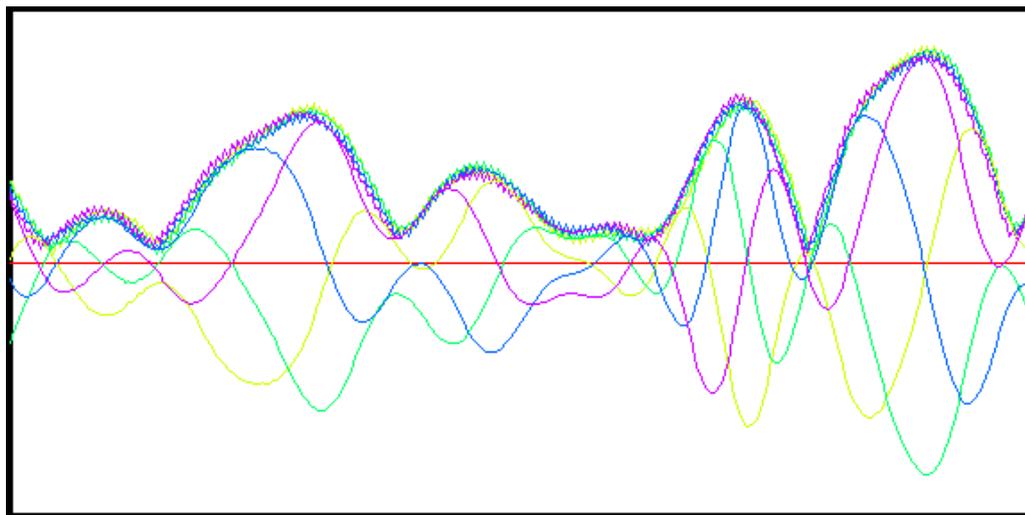


Figure 10

Abb.10: Phasensignale erster Art (bleich) und zweiter Art (bamp) für das Lorentz-System im Bereich $t \in [66.322, 67.50]$ (s1: x-Komponente - grün, s0: 1. Ableitung - grün, s2: 1.Integral - blau, s3: 2.Integral: lila. Das Phasensignal 1. Art wiederholt sich mit weiteren Differentiationen als Hilbert-Transformierte. Es gilt: $bleich[s0] = Hilbert[bleich[s1]] = Hilbert[Hilbert[bleich[s2]]] = Hilbert[Hilbert[Hilbert[bleich[s3]]]]$ Die zweifache Anwendung der Hilbert-Transformation ist mit einer Multiplikation mit -1 identisch. In der Grafik ist diese Tatsache sichtbar: $bleich[s0] \approx -bleich[s2]$ und $bleich[s1] \approx -bleich[s3]$. Die Enveloppe aller dieser Phasensignale 1.Art ist die gleiche, die momentane Amplitude, bamp, (die Wurzel des Phasensignals 2. Art, bampq). In der Grafik ist übersichtlich, wie alle bamp-Signale aufeinander zusammenfallen.

Dieses Beispiel stellt auch eine Gelegenheit zu zeigen, was das Bleichen einer Zeitreihe (in so einem "kontinuierlichen" Fall) bewirkt:

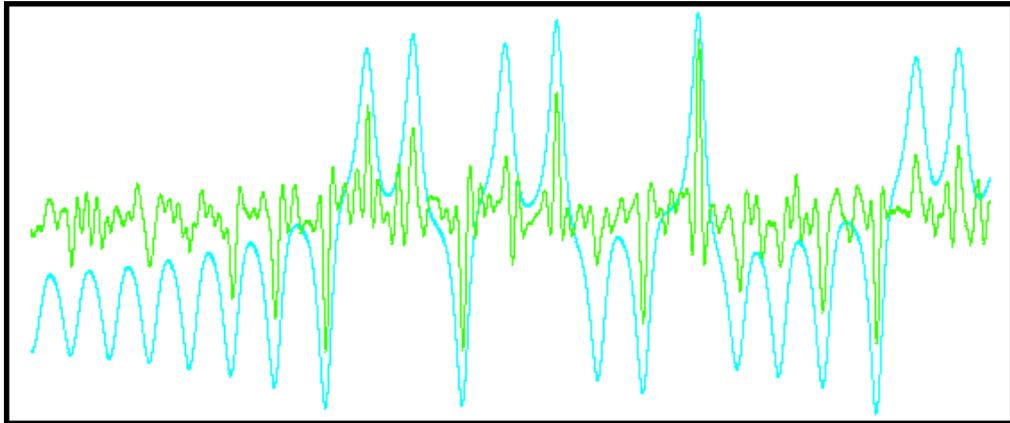


Figure 11

Abb.11: Die x-Komponente des Lorenz-Systems (blau) und das zugehörige Phasensignal 1. Art (grün). Beide signale laufen zusammen. Alle wichtigen *Ereignisse* sind im Phasensignal registriert. Alle *nichtlinearen* Eigenschaften des ursprünglichen Signals sollen in dieser Fourier-Bleichung erhalten bleiben. In diesem kontinuierlichen Fall ist das Phasensignal auch kontinuierlich. Für realistischere weniger ordentliche Zeitreihen sind nur statistische Eigenschaften des Phasensignals aussagekräftig.

Nun möchte ich zeigen, dass auch für Intervalle, die keine Periodizitätsbedingungen erfüllen, die Phasensignale der Ableitungen, und sogar der anderen Komponenten, sehr ähnlich sind. Es sieht so aus, dass das Phasensignal (2. Art) eine charakteristische Signatur des Systems darstellt.

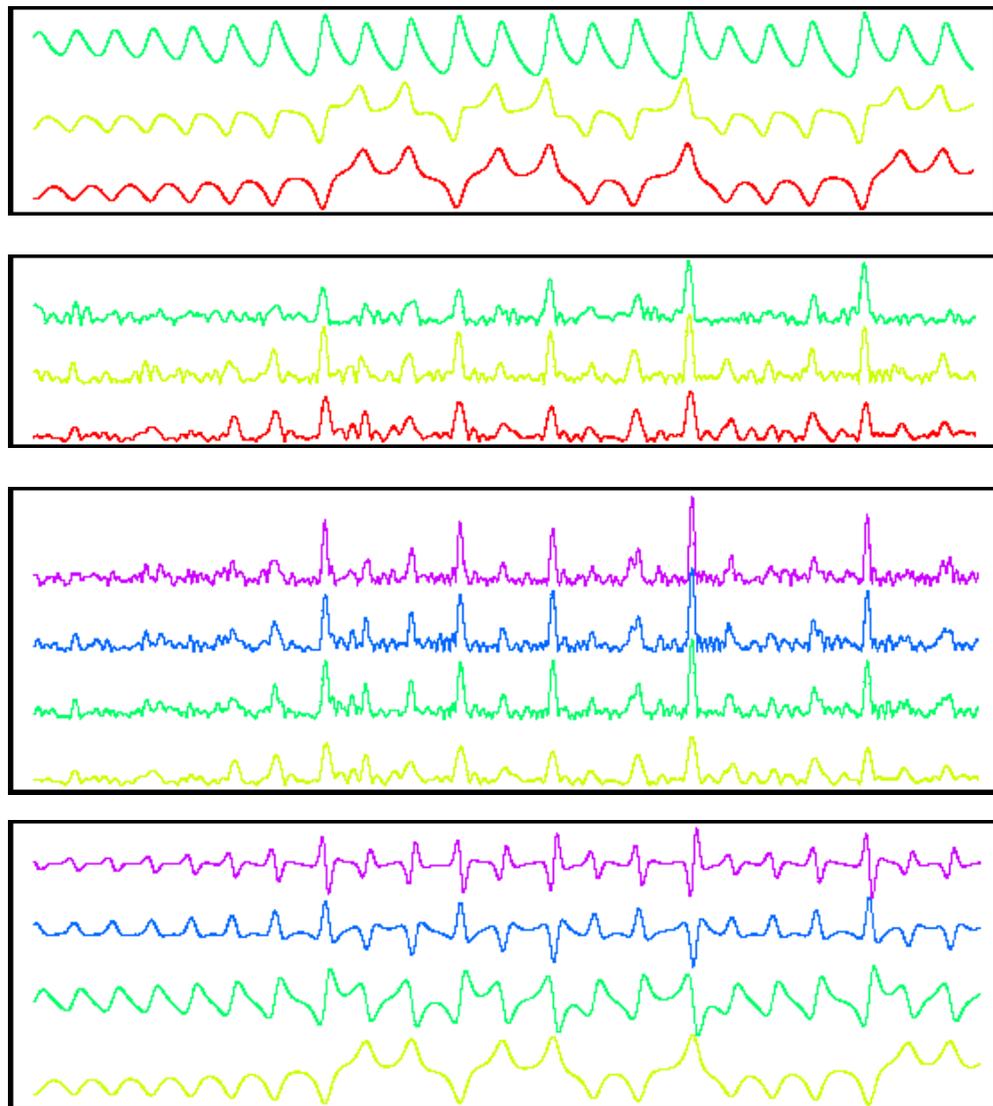


Figure 12

Abb.12: Eine Zusammenfassung wichtiger Zeitreihen aus dem Lorenzsystem und deren zugehörigen Phasensignale 2. Art (bamp). Im oberen Kasten sind die drei Komponenten des Systems dargestellt: x-rot, y-gelb, z-grün. Im zweiten Kasten stehen die dazugehörigen Phasensignale 2. Art (bamp) mit den entsprechenden Farben. Darunter stehen die Phasensignale der Ableitungen der x-Komponente (oben 3. Ableitung - unten 0.te Ableitung). Im unteren Kasten stehen die gemeinten Ableitungen selbst. Die Ähnlichkeit der verschiedenen 6 Phasensignale ist sehr klar. In all diesen Grafiken ist die x-Achse die Zeit. Auf die Absolutwerte der Signale wurde nicht geachtet. Die ursprünglichen Zeitreihen sind verschieden normiert worden, die Phasensignale haben aber alle denselben Maßstab. Ihr absoluter Wert ist, wie das für *kontinuierliche* zu *ordentliche* Zeitreihen üblich ist, ziemlich klein (< 0.7).

■ 1.4 Frequenzbereich

In diesem Abschnitt untersuchen wir das Phasensignal im Frequenzbereich und versuchen zu ermitteln, ob es eine konkrete Bedeutung hat. Zuerst beginnen wir mit dem Phasensignal 1. Art. Dieses Signal ist im Frequenzbereich zuerst weniger interessant, da es nach Definition einen einheitlichen Betrag für alle Frequenzen hat. Das Bild verbessert sich aber, wenn wir ein gleitendes Mittel im Frequenzbereich verwenden. Z.B. mitteln wir über $2n+1$ benachbarte Frequenzen und nehmen das Quadrat des Betrags. Dieses Gebilde nennen wir das **Moving-Average-Phasenspektrum** (MAPS).

$$\text{MAPS}(\nu, n) = \left| \frac{1}{2n+1} \sum_{\mu=-n}^n e^{i\varphi_{\nu+\mu}} \right|^2 \tag{10}$$

Die Bedeutung von $\text{MAPS}(\nu, n)$ ist die Tatsache, dass MAPS die Abweichung von einer Phasengleichverteilung in der Umgebung der Frequenz ν misst. Wir werden später zeigen, dass, bei Annahme der Phasengleichverteilung in der Umgebung von ν , $\text{MAPS}(\nu, n)$ einen Wert $\frac{|\ln \alpha|}{2n+1}$ nur mit der Wahrscheinlichkeit α überbieten kann. $\text{MAPS}(\nu, n)$ kann so als Teststatistik zur Prüfung der Hypothese der Phasengleichverteilung (der sogenannten Theiler-Linearität) fungieren.

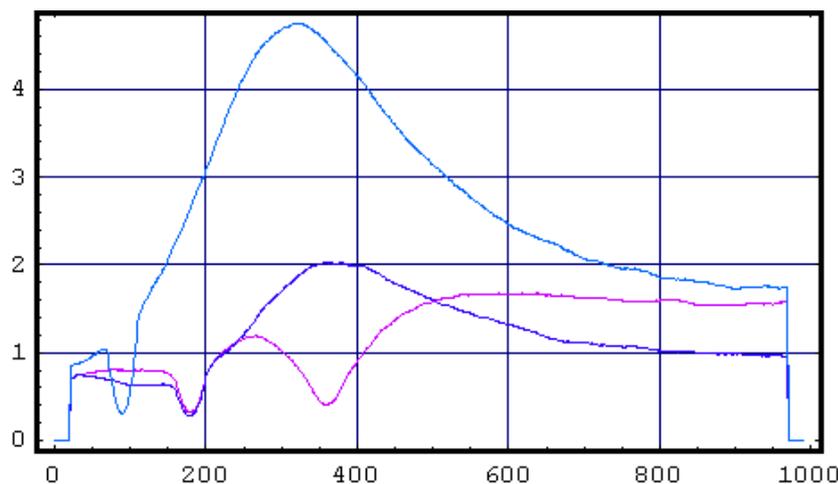


Figure 13

Abb.13: $\text{MAPS}(\nu, 20)$ von $\{x_t\}$, $\{y_t\}$ und $\{z_t\}$ (den Prozessen aus dem Barnes'schen Modell (Gl. 7)) skaliert, so dass die y-Achse Irrtumswahrscheinlichkeiten für die Ablehnung der Nullhypothese der Phasengleichverteilung in der ν -Umgebung exponentiell liest. (Irrtumswahrscheinlichkeit= 10^{-y} ... D.h. $y = 1$ definiert die 90%-Vertrauensgrenze. Die lineare $\{x_t\}$ ist am wenigsten phasengleichverteilt (blau). $\{y_t\}$ ist dunkelblau und $\{z_t\}$ ist violett. Dort, wo ein Gipfel im Leistungsspektrum liegt gibt es ein Tal für MAPS. Hier sind in der x-Achse die Frequenzen durchnummeriert, so dass 1024 einer Frequenz von 0.5 entspricht.

Nun widmen wir uns dem Phasensignal bampq im Frequenzbereich.

Gegeben ist eine endliche Zeitreihe, $\{x_t\}$, der Länge N . N sei zur Vereinfachung eine gerade Zahl. Wir bezeichnen mit φ_ν die Phasen im positiven Teil des Phasenspektrums. ν läuft von 1 bis $\frac{N}{2}-1$. Mit $\text{bampq}[x_t]$ bezeichnen wir das Phasensignal von $\{x_t\}$. Zu untersuchen ist das Fourier-Spektrum des Phasensignals, fbampq , als Funktion von der Länge, N , und der Frequenz, ν .

Eine längere Rechnung ergibt:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{fbampq}(N, \nu) &= \frac{4}{\sqrt{N}} \sum_{\mu=1}^{\frac{N}{2}-\nu-1} e^{i(\varphi_{\mu+\nu}-\varphi_{\mu})} + \mathbf{Grenzterme} \\
 \mathbf{Grenzterme}(N, \nu) &= -\sqrt{\frac{8}{N}} \left(e^{i\left(\varphi_{\nu}-\frac{3\pi}{4}\right)} + e^{i\left(\frac{3\pi}{4}-\varphi_{\frac{N}{2}-\nu}\right)} \right)
 \end{aligned} \tag{11}$$

Wenn man von den Grenztermen absieht, dann ergibt sich:

$$\mathbf{fbampq}(N, \nu) \sim \frac{N-2\nu}{\sqrt{N}} \langle e^{i\varphi_{\mu+\nu}} (e^{i\varphi_{\mu}})^* \rangle_{\mu}$$

Dieser letzte Term, $\langle e^{i\varphi_{\mu+\nu}} (e^{i\varphi_{\mu}})^* \rangle_{\mu}$, ist wichtig. Er ist die Autokovarianz der komplexen Datenreihe, $\{e^{i\varphi_{\mu}}\}$, der Datenreihe des Phasenspektrums in Exponentialform. Das heißt, bis auf einen Faktor, der die niedrigen Frequenzen gegenüber den hohen Frequenzen verstärkt, misst das Spektrum des Phasensignals gewisse Autokorrelationen im Phasenspektrum. Autokorrelationen im Phasenspektrum sind eindeutige nichtlineare Eigenschaften der Zeitreihe, denn die Linearität setzt die Unabhängigkeit der verschiedenen Frequenzanteile voraus.

Bei starken Autokorrelationen im Phasenspektrum (in der Form von scharfen Gipfeln) sprechen wir von *Phasenkopplungen*. Die einfachste Art einer Phasenkopplung ist die ideale quadratische Phasenkopplung, die beim Quadrieren eines Signals mit einer charakteristischen Frequenz, ν_1 , entsteht. Das Quadrat hat in seinem Fourier-Spektrum zwei charakteristische Frequenzen: ν_1 und $\nu_2 = 2\nu_1$. Die Phasenkopplung hat in diesem einfachen Fall die mathematische Form: $\varphi_{\nu_2} = 2\varphi_{\nu_1}$. (Das klassische Instrument zum Auffinden von quadratischen Phasenkopplungen ist das Bispektrum). [SMN 98]

Das Phasensignal entdeckt allgemeinere Phasenkopplungen. Wenn ein scharfer Gipfel im Fourier-Spektrum des Phasensignals einer Zeitreihe, $\{x_t\}$, bei der Frequenz ω existiert, dann bedeutet das, dass es im Spektrum von $\{x_t\}$ verschiedene Paare (mindestens ein Paar) von charakteristischen Frequenzen $\{\nu_1, \nu_2\}$ gibt, die phasengekoppelt sind und die Differenz ω haben: $\nu_2 - \nu_1 = \omega$. Was genau die Art der Phasenkopplung ist, lässt sich einfach ohne weitere Informationen nicht sagen. In jedem Fall ist ein Vergleich mit dem Leistungsspektrum von $\{x_t\}$ sinnvoll, denn so erkennt man am einfachsten die wichtigsten charakteristischen Frequenzen. Oft hilft das Phasensignal in der Entdeckung der zweiten charakteristischen Frequenz, die im Leistungsspektrum unsichtbar ist. Von großer Bedeutung ist die Tatsache, dass Phasenkopplungen die Abhängigkeit zwischen verschiedenen charakteristischen Frequenzen aufklären. Ich erwähne hier schnell als Beispiel die fragliche Halb-Chandler-Periode in den Zeitreihen der Polbewegung (siehe 2. Teil). Die charakteristische Frequenz der Polbewegung heißt die Chandler-Frequenz und beträgt ungefähr eine Periode alle 14 Monate. Nun meinen einige Forscher, dass sie einen gewissen kleinen Gipfel im Bereich der Frequenz einer Periode alle 7 Monate finden. Diese Beobachtung ist gar nicht so eindeutig. Und kleine Gipfel in so einer stochastischen Zeitreihe sind überall auffindbar. Kann man trotzdem davon sprechen, dass dieser Gipfel mit der Chandler-Frequenz zusammenhängt und dass dies ein Zeichen eines nichtlinearen Verhaltens sei?

Nun hilft die Phasenkopplung. Die Echtheit der Halb-Chandler-Periode kann nachgewiesen werden, falls ein Gipfel im Spektrum des Phasensignals der Zeitreihen der Polbewegung bei der Chandler-Frequenz existiert. Gibt es so einen Gipfel? Man findet keinen. Das kann auf die schlechte Qualität der Zeitreihen oder vielmehr auf die Nichtexistenz der Halb-Chandler-Periode

zurückgeführt werden. Auf jeden Fall gibt es keinen Nachweis der fraglichen Halb-Chandler-Welle.

■ 1.5 Zeitbereich

■ 1.5.1 Vorwort

Die Phasensignale 1. und 2. Art sind beide Spezialfälle einer Klasse von abgeleiteten Signalen, die aus Transformationen im Frequenzbereich entstehen. Wir möchten diese Transformationen allgemein beschreiben, damit die Bedeutung des Zeitindex in den neuen Signalen besser verstanden werden kann. Dazu verallgemeinern wir Begriffe, die im Rahmen der Cepstrum-Analyse eingeführt wurden. Wir fassen diese Transformation zu *allgemeinen cepstralen Transformationen* und bezeichnen den Index mit dem Namen *Quefreny*. Zuerst erklären wir das Cepstrum.

■ 1.5.2 Das Cepstrum

Im Jahre 1963 veröffentlichten Bogert, Healy und Tukey [Bogert et al. 63] eine Arbeit mit dem ungewöhnlichen Titel: "The Quefreny Alanysis of Time Series for Echoes: Cepstrum, Pseudoauto-covariance, Cross-Cepstrum, and Saphe Cracking." Schon in ihrem ungewöhnlichen Titel stehen drei neue Begriffe, die aus Buchstabenpermutationen einiger bekannter Begriffe der Spektralanalyse entstehen. In ihrer Arbeit gibt es noch mehr:

frequency	quefreny
spectrum	cepstrum
phase	saphe
magnitude	gamnitude
filtering	liftering
harmonic	rahmonic
period	repiod

Tafel mit den neuen Begriffen von Bogert, Healy and Tukey

Die Begründung ihrer Umstellung der alten Begriffe erklärten Bogert et al. so: "in general, we find ourselves operating on the frequency side in ways customary on the time side and vice versa." Also fanden sich die Verfasser in so einer Lage, dass sie im Frequenzbereich Methoden anwenden mussten, die früher charakteristisch für den Zeitbereich waren und umgekehrt. Die neuen umgestellten Vokabeln erinnern an die traditionellen Begriffe. Von all diesen neuen Vokabeln haben sich mit der Zeit nur zwei durchgesetzt, das Cepstrum (auf Deutsch sollte es vielleicht Kepstrum heißen) und die Quefreny (die Quefrenz konsequenter Weise). Mit dem Cepstrum schlechthin wurde aber gewöhnlich nur ein Spezialfall der Technik gemeint und zwar mit dem reellen bzw. komplexen Cepstrum die inverse Fourier-Transformation des reellen bzw. komplexen Logarithmus des Fourier-Spektrums. Dieses Cepstrum fand wichtige Anwendungen in der Sprachanalyse und Deconvolution. In seiner einfachsten Anwendung weist das reelle Cepstrum für ein Signal, das ein Echo enthält, einen Gipfel beim Echo-Delay auf. D.h. in der Literatur meint man mit dem Cepstrum das Spektrum des Logarithmus des Spektrums. In unserer Arbeit hier verwenden wir das Wort

Cepstrum allgemein für das Spektrum einer Transformation des Spektrums, sprich für das Ergebnis einer "cepstralen" Transformation.

■ 1.5.3 "Cepstrale"-Transformationen:

Das Phasensignal 1. Art und 2. Art sind beide Spezialfälle einer Klasse von abgeleiteten Signalen, die aus Transformationen im Frequenzbereich entstehen. Diese Signale werden im Prinzip nach folgender Muster abgeleitet:

1. Das Signal $\{\mathbf{x}_t\}$ wird zum Frequenzbereich transformiert:

$$\{\mathbf{x}_t\} \rightarrow \mathbf{F}[\{\mathbf{x}_t\}] = \{\mathbf{X}_\omega\} \quad (12)$$

2. Eine funktionale Transformation wird auf \mathbf{X}_ω angewendet

$$\mathbf{X}_\omega \rightarrow \mathbf{g}(\mathbf{X}_\omega, \omega) = \mathbf{X}'_\omega \quad (13)$$

$\mathbf{g}(\mathbf{X}_\omega, \omega) = \mathbf{g}(|\mathbf{X}_\omega|, \varphi_\omega, \omega)$ ist im Allgemeinen von ω explizit abhängig. $\mathbf{g}(\mathbf{X}_\omega, \omega)$ soll $\mathbf{g}(\mathbf{X}_{-\omega}, -\omega) = (\mathbf{g}(\mathbf{X}_\omega, \omega))^*$ erfüllen, falls ausschließlich ein reelles Signal nach der Rücktransformation erwünscht wird.

3. Es wird zurücktransformiert in den "Zeit"-bereich (richtiger: Quefrequency-Bereich)

$$\{\mathbf{X}'_\omega\} \rightarrow \mathbf{F}^{-1}[\{\mathbf{X}'_\omega\}] = \{\mathbf{x}'_t\} \quad (14)$$

Wir nennen die Transformation: $\{\mathbf{x}_t\} \rightarrow \{\mathbf{x}'_t\}$ eine cepstrale Transformation. Das entstandene Signal ist noch keine richtige Zeitreihe sondern ein Cepstrum, dessen Index eine formale Zeitindex ist, die wir Quefrequency nennen. Dieses Cepstrum ist eigentlich ein "Spektrum" eines Signals im Frequenzbereich, (also ein Spektrum eines Spektrums = Cepstrum) und beschreibt so Beziehungen der Frequenzen des Signals im Frequenzbereich (Frequenz der Frequenzen= Quefrequency). Die Quefrequency kann manchmal auch als richtige Zeit interpretiert werden.

■ 1.5.4 Beispiele von cepstralen Transformationen

1. $\mathbf{x}'_\omega = (|\mathbf{X}_\omega|)^2$

$\{\mathbf{x}'_t\}$ ist die Autokovarianz

Die Quefrequency, t, ist die Zeitdifferenz (Lag)

2. $\mathbf{x}'_\omega = (i\theta(\omega) - i\theta(-\omega)) \mathbf{X}_\omega$

Eine Phase der Größe $\frac{\pi}{2}$ wird einheitlich zum positiven Spektrum addiert und vom negativen Spektrum subtrahiert. $\{\mathbf{x}'_t\}$ ist die Hilbert-Transformierte von $\{\mathbf{x}_t\}$.

Die Quefrequency, t, kann als Zeit interpretiert werden.

3. $\mathbf{x}'_\omega = e^{i\omega T} \mathbf{X}_\omega$; T ist eine ganze Zahl.

$\{\mathbf{x}'_t\}$ ist x_t um d Stellen nach rechts rotiert (d.h. eine Delay-Operation).

Die Quefrequency, t, ist die Zeit.

(Die Verallgemeinerung auf reelle T kann eine Interpolation definieren).

4. $\mathbf{x}'_\omega = \ln |X_\omega|$
 $\{\mathbf{x}'_\tau\}$ ist das reelle Cepstrum.
 Die Queffrency, t , kann als Zeitdifferenz (Lag) interpretiert werden.
5. $\mathbf{x}'_\omega = \ln(X_\omega)$
 $\{\mathbf{x}'_\tau\}$ ist das komplexe Cepstrum.
 Die Queffrency, t , kann weder als Zeit noch als Zeitdifferenz (Lag) interpretiert werden.
6. $\mathbf{x}'_\omega = P(\omega) X_\omega$; wobei $P(\omega)$ ein Polynom n -ten Grades in ω ist.
 $\{\mathbf{x}'_\tau\}$ ist das Produkt eines formalen linearen Differential-Operators n -ter Ordnung mit $\{\mathbf{x}_\tau\}$
 Die Queffrency, t , ist die Zeit.
7. $\mathbf{x}'_\omega = |X_\omega|$
 $\{\mathbf{x}'_\tau\}$ nennen wir das Amplitudensignal. Es ist der Teil des Signals \mathbf{x}_τ , der in der Theiler-Methode behalten wird, um lineare Surrogate zu konstruieren. Es wirkt eigentlich wie ein FIR-Filter.
 Die Queffrency, t , kann als die Zeitdifferenz (Lag) interpretiert werden.
8. $\mathbf{x}'_\omega = \frac{X_\omega}{|X_\omega|}$
 $\{\mathbf{x}'_\tau\}$ nennen wir das Phasensignal 1. Art. Es ist der Teil des Signals $\{\mathbf{x}_\tau\}$, der in der Theiler-Methode entfernt wird, weil er alle nichtlinearen Eigenschaften der Zeitreihe $\{\mathbf{x}_\tau\}$ enthalten soll.
 Die Queffrency, t , kann, wie wir gleich sehen werden, als die Zeit interpretiert werden.
9. $\mathbf{x}'_\omega = \frac{X_\omega}{|X_\omega|} (1 + -\theta(\omega) + \theta(-\omega))$
 $\{\mathbf{x}'_\tau\}$ ist das analytische Signal des Phasensignals 1. Art. Es ist ein komplexes Signal dessen Real- und Imaginärteile das Phasensignal 1. Art und dessen Hilbert-Transformierte sind. Das Quadrat des Betrags von $\{\mathbf{x}'_\tau\}$ ist das Phasensignal 2. Art, bampq (oder das Phasensignal, wenn nicht weiter spezifiziert wird).
 Die Queffrency, t , kann, genauso wie im Fall des Phasensignals 1. Art, als die Zeit interpretiert werden.

■ 1.5.5 Wann kann Queffrency als Zeit interpretiert werden?

Gegeben sind zwei Signale $\{\mathbf{x}_\tau\}$ und $\{\mathbf{x}'_\tau\}$. $\{\mathbf{x}_\tau\}$ ist eine echte diskrete Zeitreihe und $\{\mathbf{x}'_\tau\}$ ist ein Cepstrum von $\{\mathbf{x}_\tau\}$, also ein Signal, das aus einer cepstralen Transformation von $\{\mathbf{x}_\tau\}$ entsteht. $\{\mathbf{x}'_\tau\}$ kann auch allgemeiner betrachtet werden. Sie ist ein aus dem Signal $\{\mathbf{x}_\tau\}$ abgeleitetes Signal mit derselben Länge. Gefragt wird danach, ob beide Signale zusammenlaufen. In diesem Fall spricht man von der *Zeitlichkeit* beider Signale, und die Queffrency kann als Zeit interpretiert werden.

Mathematisch heißt das, (wobei hier mit Trf eine Transformation gemeint wird)

$$\{\mathbf{x}'_\tau\} = \text{Trf}[\{\mathbf{x}_\tau\}] \text{ ist mit } \{\mathbf{x}_\tau\} \text{ zeitlich } \iff \text{Trf}[B^T \{\mathbf{x}'_\tau\}] = B^T \text{Trf}[\{\mathbf{x}_\tau\}] \quad (15)$$

Mit B wird der Operator bezeichnet, der die Rotation um eine Stelle nach rechts bewirkt. T ist eine beliebige ganze Zahl

Diese Definition der Zeitlichkeit hat eine direkte Folgerung im Frequenzbild. Denn für das Spektrum einer rotierten Zeitreihe gilt:

$$F[B^T \{x_t\}] = F[\{x_{t-T}\}] = \{e^{i\omega T} X_\omega\}$$

Also kann für die Zeitlichkeit einer cepstralen Transformation die folgende notwendige und hinreichende Bedingung an der funktionalen Transformation im Frequenzbereich gefunden werden:

$$g(e^{i\omega T} X_\omega) = e^{i\omega T} g(X_\omega) \quad (16)$$

Die allgemeine Lösung dieser Funktionalgleichung ist :

$$g(X_\omega) = h(|X_\omega|, \omega) \frac{X_\omega}{|X_\omega|} \quad (17)$$

h ist eine komplexe Funktion, die bzgl. ω hermitesch symmetrisch ist ($h(-\omega) = h^*(\omega)$). Das garantiert, dass die Rücktransformation ein reelles Signal erzeugt. Wichtig ist die Tatsache, dass h unabhängig von der Phase φ_ω ist. Eine lineare cepstrale zeitliche Transformation liegt vor, falls $g(X_\omega) = h(\omega) X_\omega$, wie für Hilbert-Transformationen, Delay-Transformationen, Differentialoperatoren und Kombinationen aus diesen.

Eigentlich kann man die Bedingung der Zeitlichkeit in Gleichungen (16) und (17) darauf reduzieren, dass das Phasenspektrum bis auf eine von φ_ω unabhängige additive Phase erhalten wird.

Die einfachste Realisierung der zeitlichen cepstralen Transformationen erhält man wenn in (17) $h \equiv 1$ eingesetzt wird, was dann das Phasensignal 1. Art ergibt.

Der Vollständigkeit halber geben wir die allgemeine Bedingung der Zeitlichkeit zwischen einer Zeitreihe und einer beliebigen Abgeleiteten dieser Zeitreihe. Im Frequenzbereich wird Gleichung (6) verallgemeinert. Es gibt jetzt für jede Frequenz ν eine andere Transformationsfunktion $g_\nu(\{X_\omega\})$, die jetzt vom ganzen Spektrum (d.h. vom Amplituden- und Phasenspektrum) abhängt:

$$X'_{\nu} = g_\nu(\{X_\omega\}) = g_\nu(\{A_\omega\}, \{\varphi_\omega\}) = G_\nu(\{A_\omega\}, \{\varphi_\omega\}) e^{i\gamma_\nu(\{A_\omega\}, \{\varphi_\omega\})}$$

G_ν und γ_ν sind im Gegensatz zu g_ν reell und bezeichnen den Betrag und den Argument von g_ν . Nun sieht die Zeitlichkeitsbedingung (6) so aus (Zeitlichkeit nach Rotation um T):

$$G_\nu(\{\varphi_\omega + T\omega\}) e^{i\gamma_\nu(\{\varphi_\omega + T\omega\})} = G_\nu(\{\varphi_\omega\}) e^{i(\gamma_\nu(\{\varphi_\omega\}) + T\nu)}$$

Die Abhängigkeit vom Amplitudenspektrum wird nicht mehr explizit geschrieben, weil die Zeitlichkeitsbedingung nur für das Phasenspektrum interessant ist. Nun kann man aus dieser komplexen Gleichung zwei reelle Gleichungen machen.

$$\begin{aligned} G_\nu(\{\varphi_\omega + T\omega\}) &= G_\nu(\{\varphi_\omega\}) \\ \gamma_\nu(\{\varphi_\omega + T\omega\}) &= \gamma_\nu(\{\varphi_\omega\}) + T\nu \end{aligned} \quad (18)$$

Diese Beziehungen gelten für beliebige Rotationen T . Wenn man nach T differenziert kriegt man die folgenden Bedingungen an \mathcal{G}_v und γ_v jeweils in der Form einer linearen partiellen Differentialgleichung.

$$\begin{aligned} \sum_{\omega} \frac{\partial \mathcal{G}_v}{\partial \varphi_{\omega}} \omega &= 0 \\ \sum_{\omega} \frac{\partial \gamma_v}{\partial \varphi_{\omega}} \omega &= v \end{aligned} \quad (19)$$

Beide Gleichungen sind bis auf eine Inhomogenität in der 2. Gleichung identisch. \mathcal{G}_v und γ_v haben beide bis auf eine additive spezielle Lösung von γ_v dieselbe allgemeine Lösung. Eine spezielle Lösung der zweiten Gleichung ist: $\gamma_v = \varphi_v$. Jede reelle positive (differenzierbare) Funktion der Form $G\left(\sum_k \frac{c_k \varphi_k}{k}\right)$ mit der Bedingung: $\sum_k c_k = 0$ erfüllt Gleichung (19). Wir bezeichnen diese Form mit $G^c(\vec{\varphi})$ und finden die allgemeine Form einer zeitlichen Transformation im Frequenzbereich:

$$\mathcal{g}_v(\{\mathbf{X}_{\omega}\}) = e^{i\varphi_v} \left(\sum_c G_v^c(\vec{\varphi}) \right) e^{i \sum_c \gamma_v^c(\vec{\varphi})} \quad (20)$$

Wir wissen, dass das Phasensignal 2. Art nicht zur Klasse der cepstralen Transformationen gehört. Als das Quadrat des Betrags einer zeitlichen komplexen cepstralen Transformation konnten wir dennoch seine Zeitlichkeit einfach nachweisen. Der direkte Nachweis über die allgemeine Zeitlichkeitsbedingung (20) kann als Kontrolle für die Richtigkeit der Formel (11) dienen. Der Nachweis gelingt einfach, wenn man in (11) den Faktor $e^{i\varphi_v}$ vorzieht.

Nebenbei sei bemerkt, dass außer dem Phasensignal noch andere cepstrale Transformationen möglich sind, die nur vom Phasenspektrum abhängig sind. Die einfachste vorstellbar in der Literatur existierende Möglichkeit ist die Differenz zwischen dem komplexen Cepstrum und dem reellen Cepstrum. Im Gegensatz zum Phasensignal handelt es sich hier nicht um ein zeitliches Signal. Das beeinträchtigt Interpretationsmöglichkeit und Bedeutung sehr.

Eine ganze Klasse von aus einer Zeitreihe, $\{\mathbf{x}_t\}$, abgeleiteten Zeitreihen, $\{\mathbf{x}'_t\}$, haben dasselbe Phasensignal 2. Art: $\mathbf{bampq}[\{\mathbf{x}_t\}] = \mathbf{bampq}[\{\mathbf{x}'_t\}]$. Diese Klasse enthält alle allgemeinen cepstralen Transformationen, die mit $\{\mathbf{x}_t\}$ zeitlich sind, und die folgende Form haben:

$$\begin{aligned} \{\mathbf{x}'_t\} &= \mathcal{F}^{-1} [\mathbf{h}(\{|\mathbf{X}_{\omega}|, \omega\}) \otimes \{\mathbf{x}_t\}] \text{ mit} \\ \mathbf{h}(\{|\mathbf{X}_{\omega}|, \omega\}) &= \mathbf{f}(\{|\mathbf{X}_{\omega}|, \omega\}) e^{i\theta \frac{\omega}{|\omega|}} \end{aligned} \quad (21)$$

(f ist eine positive gerade Funktion von ω , θ ist beliebig und \otimes bezeichnet die Faltung). Zu dieser Klasse gehören z.B.:

1. die formale erste Ableitung $\rightarrow(\theta = \frac{\pi}{2}; f = |\omega|)$
2. die formale zweite Ableitung $\rightarrow(\theta = \pi; f = \omega^2)$
3. die formale n-te Ableitung $\rightarrow(\theta = \frac{n\pi}{2}; f = |\omega|^n)$

4. die Hilbert-Transformation $\rightarrow(\theta = \frac{\pi}{2}; f = 1)$
5. das Phasensignal 1. Art $\rightarrow(\theta = 0; f = |X_\omega|)$

■ 1.5.6 Beispiel für die Zeitlichkeit - Grafik -

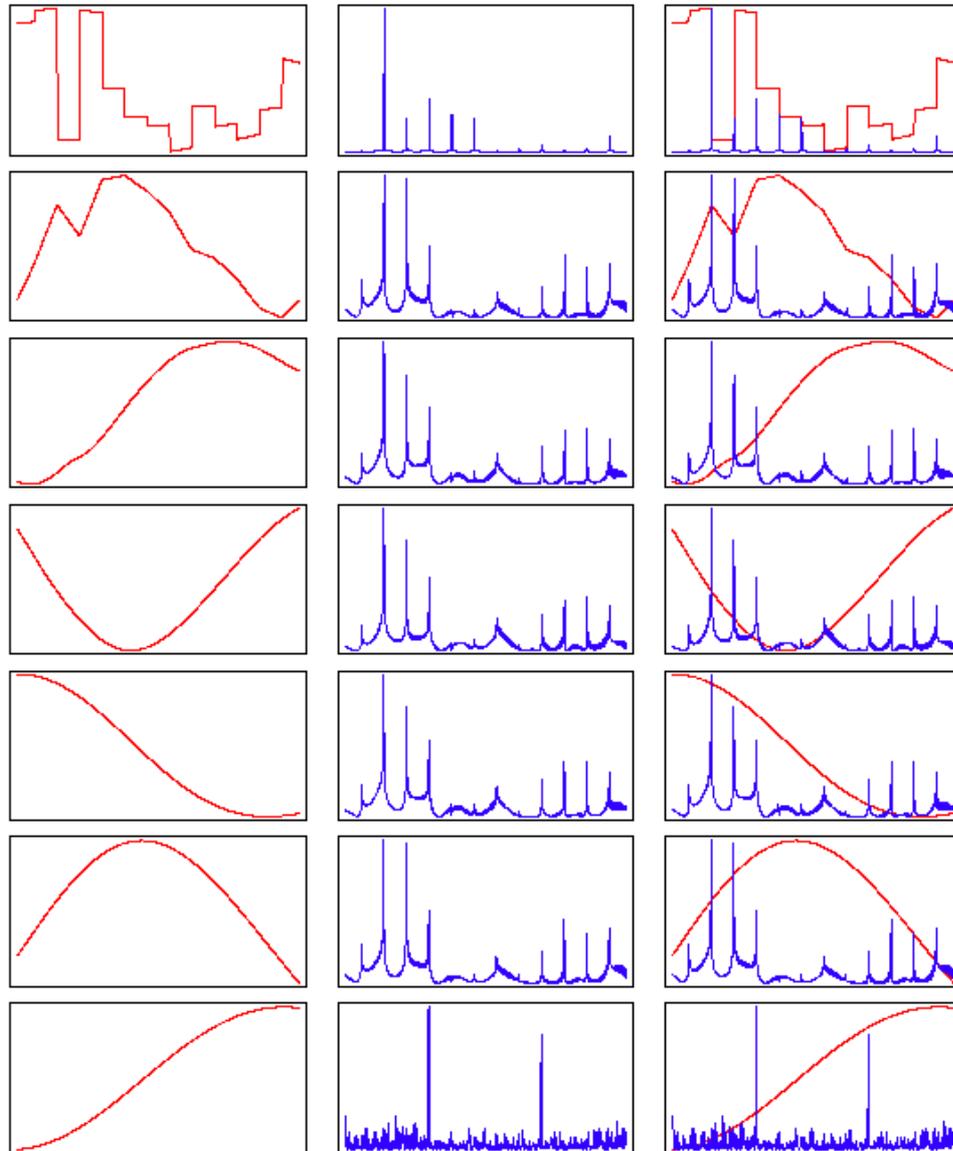


Figure 14

Abb.14: Die Grafik zeigt das Verhalten des Phasensignals für nichtstochastische stückweise differenzierbare Signale, die in diskreten Zeitreihen aufgenommen wurden. Die Zeitreihen stehen in der linken Spalte, die dazugehörigen Phasensignale in der mittleren Spalte, und gemeinsame Darstellungen der jeweiligen Zeitreihe mit dem entsprechenden Phasensignal (bei passender Normierung) stehen in der rechten Spalte. Wir fangen an mit der oberen Zeile. Links ist eine Zeitreihenaufnahme einer stückweise stetigen Funktion mit 12 Diskontinuitätsstellen. Das Phasensignal ist an diesen Diskontinuitätsstellen besonders groß (fast 700 für die zweite Diskontinuitätsstelle). Auch für die erste Diskontinuitätsstelle gibt es einen lokalen Gipfel im Verlauf des Phasensignals, der aber relativ klein ist (≈ 0.9). Das gemeinsame Bild rechts demonstriert die Korrespondenz zwischen den Gipfeln des Phasensignals und dieser außerordentlichen Ereignisse (Sprünge) im ursprünglichen Signal. In der zweiten Zeile von oben steht links das "Integral" des obigen Signals. Dieses Signal ist also selbst stetig, hat aber Sprünge in der 1.

Ableitung. (Merken Sie bitte, dass hier die Begriffe der kontinuierlichen Funktionen im übertragenen verständlichen Sinne verwendet werden). Das entsprechende Phasensignal hat auch Gipfel in den Sprungstellen der 1. Ableitung. Sein absoluter Wert ist aber viel kleiner als im nichtstetigen Fall in der Zeile darüber (< 0.53). Wenn wir in den kommenden Zeilen mit weiteren Integrationen den gleichen Vorgang fortsetzen, dann ändert sich das Bild des Phasensignals kaum. Das Signal in der 3. Zeile rechts hat Sprünge in seiner 2. Ableitung, denn es ist das Integral des Signals darüber. Ein interessantes Phänomen ist nicht zu übersehen. Das Phasensignal in der zweiten Spalte ist für die Zeilen 2 bis 6 praktisch das gleiche. Das spiegelt die Tatsache wieder, dass für stetige Signale, die differenzierbar sind, das Phasensignal 2. Art vom Signal und das von dessen Ableitung gleich sind. Für endliche diskrete Zeitreihen kann dieses theoretische Ergebnis ab einer bestimmten Stufe aus Diskretisierungs- und numerischen Gründen nicht mehr bestätigt werden. Das ist hier im Übergang von der vorletzten zur letzten Zeile sichtbar (Sprünge in der 6. Ableitung sind nicht mehr konsequent erkennbar).

Die Grafik bestätigt die Zeitlichkeit des Phasensignals. Außerordentliche Ereignisse im zeitlichen Verlauf werden durch hohe Phasensignalwerte registriert. Besondere Ereignisse sind Sprünge im Funktionswert sowie Sprünge in den Differenzen ("*Ableitungen*"). Besonders stark ist die Reaktion des Phasensignals gegenüber Sprünge im Funktionswert.

■ 1.6 Verteilung

■ 1.6.1 Vorwort

Die grundlegende Idee, die uns dazu motivierte, das Phasensignal einzuführen, war es, Struktur im Phasenspektrum einer stochastischen Zeitreihe und damit gleichzeitig Theiler-Nichtlinearität feststellen zu können. Dabei ist es wichtig, die Irrtumswahrscheinlichkeit dieser Feststellung zu quantifizieren, um von Signifikanz sprechen zu können. So ein Zugang ermöglicht die Prüfung auf Theiler-Linearität direkt ohne die Notwendigkeit, Surrogate zu konstruieren. In diesem Abschnitt untersuchen wir die Verteilung des Phasensignals 1. und 2. Art im Frequenzbereich sowie im Zeitbereich, wenn man eine theiler-lineare (phasengleichverteilte) Zeitreihe voraussetzt. Wir fangen an mit dem Frequenzbereich, wo charakteristische Frequenzen in einem gewissen Sinne auf "Nichtlinearität" geprüft werden.

■ 1.6.2 Verteilung von MAPS(n, ν)

Für das Phasensignal 1. Art ist es interessant, die Verteilung des gleitenden Mittels des Spektrums, MAPS(n, ν), zu ermitteln. Wir stellen uns die Frage: Wie groß ist

$$\rho(\mathbf{x}, \mathbf{n}) = \frac{\text{Wkt}[x < \text{MAPS}(n, \nu) < x + dx]}{dx} \quad ?$$

(MAPS(ν, n) = $|\frac{1}{2n+1} \sum_{\mu=-n}^n e^{i\varphi_{\nu+\mu}}|^2$ mit gleichverteilten statistisch unabhängigen Phasen φ_ν . Wkt bezeichnet die Wahrscheinlichkeit.) Es ist klar, dass $\rho(\mathbf{x}, \mathbf{n})$ von ν unabhängig ist.

In der Berechnung dieser Wahrscheinlichkeitsdichte stoßen wir auf die Abschätzung der Summe n verschiedener komplexer Zahlen mit einheitlichem Betrag und zufälligen Phasen, $\sum_{\mu=1}^n e^{i\varphi_\mu}$. Dieses Problem ist ein 2-dimensionales Random-Walk-Problem, das Zufallswandererproblem in 2 Dimensionen. Obwohl die Technik der Ermittlung dieser Abschätzung nicht für alle interessant sein dürfte, finde ich es angebracht, sie kurz darzustellen, weil sie dieselbe Abschätzung noch beim

bampq gebraucht wird. In der Literatur gibt es andere Abschätzungsmethoden. Hier folgen wir einem eigenen direkten Zugang.

■ 1.6.3 Das Zufallswandererproblem in 2 Dimensionen

Eine Person bewege sich in einheitlichen Schritten in zufällige Richtungen. Wo ist sein Ort nach n Schritten? Wie groß ist der Abstand vom Ausgangspunkt nach n Schritten?

Nach n Schritten ist der Ort in der komplexen Ebene: $z_n = \sum_{\mu=1}^n e^{i\varphi_\mu}$. Es dürfte klar sein, dass der Argument von z_n gleichverteilt ist. Uns interessiert nur der Betrag von z_n , oder, gleich gut, dessen Quadrat: $w_n = z_n z_n^*$.

Unsere Strategie ist wie folgt:

1. Zuerst finden wir die Momente $f_{nm} = \langle w_n^m \rangle$
2. Dann rechnen wir die charakteristische Funktion: $\phi_n^w(\varphi) = \langle e^{i\varphi w_n} \rangle = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{i^m f_{nm} \varphi^m}{m!}$
3. Dann führen wir eine inverse Fourier-Transformation um auf die Wahrscheinlichkeitsdichte $\rho^w(\mathbf{x}, n)$ zu kommen.
4. Dann ermitteln wir die gesuchte Wahrscheinlichkeitsdichte, $\rho^z(\mathbf{x}, n)$, nach der Formel: $\rho^z(\mathbf{x}, n) = 2x\rho^w(x^2, n)$.

Der erste Punkt ist der zentrale Punkt. Dafür versuchen wir eine Induktionsbeziehung herzuleiten. Wir betrachten das Dreieck mit den Eckpunkten: Ursprung, z_n , z_{n+1} und bezeichnen mit θ den Winkel zwischen z_n und z_{n+1} : $\theta = \text{Arg}(z_n) - \text{Arg}(z_{n+1})$. Es folgt: $w_{n+1} = w_n - 2 \cos\theta \sqrt{w_n} + 1$. Daraus folgt nach einer Mittelung über alle θ :

$$f_{n+1,m} = \sum_{k=0}^m \sum_{\mu=0}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} f_{n,k-\mu} \binom{m}{k} \binom{m-2\mu}{k} \binom{2\mu}{\mu} \tag{2.2}$$

Mit dem vernünftigen Polynomialansatz $f_{n,m} = \sum_{r=0}^m c_r^m n^r$ und mit den Bedingungen $c_0^m = \delta_{0,m}$ erhält man schließlich ein eindeutig lösbares lineares Gleichungssystem mit den Unbekannten c_r^m . Die ersten Koeffizienten ($m=1...6$) sind:

- $m = 1 : \{0, 1\}$
- $m = 2 : \{0, -1, 2\}$
- $m = 3 : \{0, 4, -9, 6\}$
- $m = 4 : \{0, -39, 88, -72, 24\}$
- $m = 5 : \{0, \frac{1628}{3}, -1375, \frac{3940}{3}, -600, 120\}$
- $m = 6 : \{0, -\frac{33245}{3}, 30611, -\frac{99490}{3}, 18315, -5400, 720\}$

Liste der ersten Koeffizienten c_r^m in der Entwicklung der Momente der 2-dimensionalen Brown'schen Verteilung ($r=0...m$). Zu bemerken ist die Beziehung: $c_m^m = m!$

Am wichtigsten ist der Koeffizient c_m^m . Die Betrachtung der Gleichungen mit $r = m - 1$ im vorigen Gleichungssystem führt zur Gleichung $c_m^m = m c_{m-1}^{m-1}$. D.h. $c_m^m = m!$ und das asymptotische Verhalten von $f_{n,m}$ ist:

$$f_{n,m} \sim m! n^m \quad (23)$$

Zum Vergleich geben wir hier die Momente einer χ^2 -verteilten Zufallsgröße, y_k , mit k Freiheitsgraden,

$$\langle y_k^m \rangle = g_{k,m} = (k + 2m - 2)!! \quad (24)$$

(Wichtig ist der Spezialfall, k=2. Hier gilt:

$$g_{2,m} = m! 2^m.$$

Der Vergleich mit $f_{n,m} \sim m! n^m$ besagt schließlich, dass

$\frac{2w_n}{n}$ **asymptotisch mit 2 Freiheitsgraden χ^2 -verteilt ist.** Das ist eine wichtige Erkenntnis.)

Das asymptotische Verhalten für die Wahrscheinlichkeitsdichte folgt aus den übrigen Punkten unserer Strategie oben:

2. (Summe konvergiert für genügend kleines φ und wird analytisch fortgesetzt)→ Die charakteristische Funktion:

$$\phi_n^w(\varphi) \sim \frac{1}{1 - i n \varphi}$$

3. (Integration mit Hilfe des Residuumsatzes)→ Wahrscheinlichkeitsdichte für w:

$$\rho^w(\mathbf{x}, \mathbf{n}) \sim \frac{e^{-x/n}}{n}$$

4. Wahrscheinlichkeitsdichte für |z|:

$$\rho^z(\mathbf{x}, \mathbf{n}) \sim \frac{2 \mathbf{x} e^{-x^2/n}}{n}$$

Nun kehren wir zurück zu unseren Phasensignalverteilungen. Gesucht ist die Verteilung von MAPS(N, ν). Die Verteilung ist unabhängig von ν . Man kann $MAPS = \frac{w}{(2N+1)^2}$ setzen mit $n=2N+1$. Also erhält man mit unserer asymptotischen Näherung die folgende Lösung des Problems:

$$\rho_{MAPS}(\mathbf{x}, \mathbf{n}) = \frac{Wkt[x < MAPS(n, \nu) < x + \Delta x]}{\Delta x} = (2n + 1) e^{-(2n+1)x} \quad (25)$$

Diese Wahrscheinlichkeitsdichte ist bekanntlich eine Näherung für großes n. MAPS ist nach Definition eine reelle Zahl zwischen 0 und 1. Deswegen sollte die richtige Wahrscheinlichkeitsdichte für $x > 1$ identisch verschwinden. Dieser Fehler ist aber geringfügig. Numerische Untersuchungen ergaben fast genau die theoretischen Histogramme schon für $n=15$.

Aus dieser theoretisch bekannten Verteilung kann man jetzt Quantile und Vertrauensgrenzen ausrechnen. Gemäß der zugrundeliegenden Wahrscheinlichkeitsdichte kann das Quantil $q(\alpha)$ nur mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von $1-\alpha$ erreicht werden. D.h. es gilt als Definition des Quantils $q(\alpha)$:

$$\alpha = \int_{-\infty}^{q(\alpha)} \rho(x) dx$$

In unserem Fall gilt diese Formulierung: Für eine Zeitreihe, die in der Umgebung der Frequenz ν im Phasenspektrum gleichverteilte Phasen hat, kann $\text{MAPS}(\nu, n)$ den Wert $q(\alpha)$ mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von $1-\alpha$ nicht erreichen. $\text{MAPS} > q(\alpha)$ (als einziger Test) widerlegt die Nullhypothese der Phasengleichverteilung mit einer Signifikanz von α . Wir möchten $q(\alpha)$ bestimmen. Einfach finden wir:

$$q_{\text{MAPS}}(n)(\alpha) = \frac{|\ln(1-\alpha)|}{2n+1} \quad (26)$$

Es gilt: $y = \frac{(2n+1)\text{MAPS}}{2}$ ist asymptotisch mit 2 Freiheitsgraden χ^2 -verteilt.

■ 1.6.4 Verteilung von $\text{fbampq}(N, \mu)$

Aus einer N -langen Zeitreihe, $\{x_l\}_{l=1\dots N}$, wird das Phasensignal $\{\text{fbampq}(N, \mu)\}_{\mu=1\dots \frac{N}{2}-1}$ konstruiert. Unsere Nullhypothese ist, dass $\{x_l\}$ linear im Theiler-Sinn ist (theiler-linear = phasengleichverteilt). Wie verhält sich dann die Wahrscheinlichkeitsdichte:

$$\rho_{\text{fbampq}}(\mathbf{x}, n) = \lim_{\Delta \mathbf{x} \rightarrow 0} \frac{\text{Wkt}[\mathbf{x} < |\text{fbampq}(N, \mu)| < \mathbf{x} + \Delta \mathbf{x}]}{\Delta \mathbf{x}} ?$$

Ohne die Grenzterme in der Gl.(11) gilt näherungsweise:

$$\text{fbampq}(N, \mu) = \frac{4}{\sqrt{N}} \sum_{k=1}^{\frac{N}{2}-\mu-1} e^{i(\varphi_{\mu+k}-\varphi_k)} \quad (27)$$

Bis auf den Vorfaktor handelt es sich hier auch um eine 2-dimensionale Brown'sche Bewegung, die Anzahl der Summanden ist aber $\frac{N}{2} - \mu - 1$. Bei Berücksichtigung der Grenzterme verbessert sich die Näherung, wenn man bei der Herleitung der Wahrscheinlichkeitsdichte statt Gl.(23) $f_{n,m} \sim m!(n+1)^m$ einsetzt. Wenn man mit ν die Frequenz $\frac{\mu}{N}$ bezeichnet, dann ergibt eine einfache Rechnung:

$$\begin{aligned} \rho_{\text{fbampq}}\left(\mathbf{x}, \nu = \frac{\mu}{N}\right) &= \\ \frac{\text{Wkt}[\mathbf{x} < |\text{fbampq}(N, \nu)| < \mathbf{x} + d\mathbf{x}]}{d\mathbf{x}} &= \\ \frac{\mathbf{x}}{4(1-2\nu)} e^{\frac{-\mathbf{x}^2}{8(1-2\nu)}} & \end{aligned} \quad (28)$$

Eine direkte Rechnung findet für die Korrelation zwischen 2 festen Fourierkomponenten ($\mu_1, \mu_2 \in \{1, \dots, \frac{N}{2} - 1\}$, μ_1, μ_2 fest) des Phasensignals:

$$\text{corr}(N, \mu_1, \mu_2) = \frac{n_1+n_2}{\sqrt{(n_1^2-n_1)(n_2^2-n_1)}} \sim \frac{1}{N} \rightarrow 0 \quad (29)$$

Dabei sind $n_1 = \frac{N}{2} - \mu_2 - 1$ und $n_2 = \frac{N}{2} - \mu_2 - 1$. Wir vermuten, dass dasselbe auch für höhere Momente geschieht, so dass feste Fourier-Komponenten (z.B. benachbarte Komponenten) des Phasensignals bei großer Länge der Zeitreihe völlig statistisch unabhängig werden.

Quantile: Für eine phasengleichverteilte (theiler-lineare) Zeitreihe kann $|\text{fbampq}(N, \nu)|$ den Wert $q(\alpha)$ nur mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von $1-\alpha$ erreichen:

$$q_{|\text{fbampq}(\nu)}(\alpha) = \sqrt{8(1-2\nu)|\ln(1-\alpha)|} \quad (30)$$

In den Hypothesentests wird oft $\alpha = 95\%$ oder $\alpha = 99\%$ gewählt. In den Surrogattests wird $q(\alpha)$ für das gewählte α aus den Surrogaten geschätzt. Für $\alpha = 95\%$ braucht man für eine grobe Abschätzung mindestens 19 Surrogate, für $\alpha = 99\%$ mindestens 99. Mit Hilfe der vorigen Quantilbeziehung kann man auf Surrogate völlig verzichten, wenn man $|\text{fbampq}(N, \nu)|$ als Teststatistik verwendet. Die Genauigkeit dieser Quantilbeziehung kann numerisch gezeigt werden.

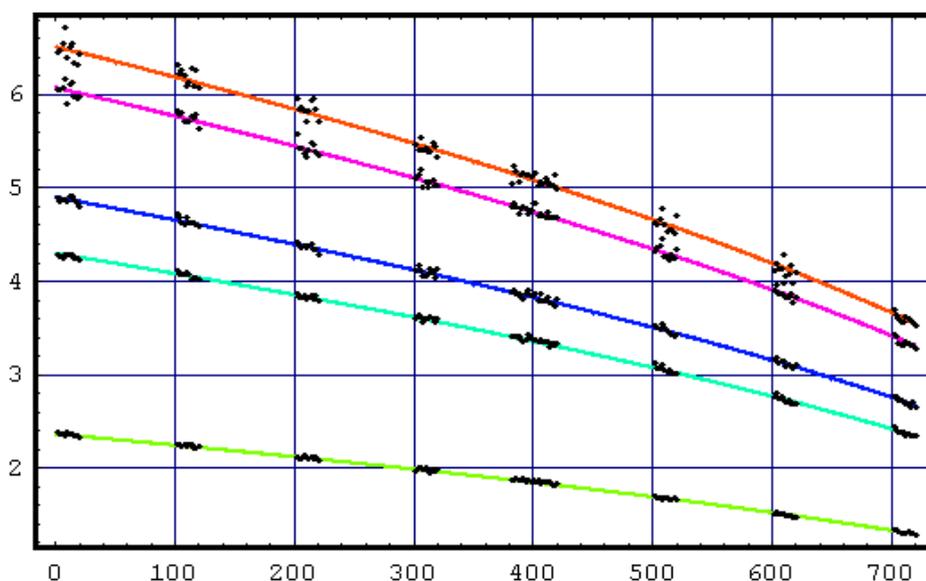


Figure 15

Abb.15: Bestätigung der Genauigkeit der theoretischen Verteilung der Fourierkomponenten des Phasensignals. Hier sind die folgenden theoretischen Quantile von $|\text{fbampq}(N, \mu)|$, $q(\alpha)$, als Funktionen vom Index der Fourierkomponente, μ , gezeichnet. $N=2048$. Die Signifikanzen α sind: 50% (Median) - Hellgrün, 90% - Dunkelgrün, 95% - Blau, 99% - Rosa, 99,5% - Dunkelorange. Außerdem wurden aus 10000 Surrogaten Quantile für verschiedene Frequenzen geschätzt. Sie sind als Schwarze Punkte gezeichnet. Man merkt, wie gut die schwarzen Punkte auf den gezeichneten Linien passen.

Mit $\nu \in (0, 0.5)$ als normierte Frequenz gilt: $y = 4(1-2\nu)|\text{fbampq}(\nu)|^2$ ist asymptotisch mit 2 Freiheitsgraden χ^2 -verteilt.

■ 1.6.5 Verteilung des Phasensignals einer "theiler"-linearen Zeitreihe im Zeitbereich

Wir erinnern daran, dass Linearität im Sinne von Theiler Phasengleichverteilung ist. Zeitreihen, die aus unabhängigen identisch verteilten (kurz: iid=independent identically distributed) zufälligen Zahlen besteht, haben genau dann gleichverteilte Phasenspektren, falls sie gauss-verteilt sind. Diese Tatsache werden wir später im Kapitel 2 beweisen. Deswegen ist das Phasensignal 1.Art einer theiler-linearen Zeitreihe (ich nenne diese Folge von zufälligen Zahlen quasi-Gauß'sche Zufallszahlen) einer iid-Zeitreihe mit Gauß'scher Verteilung $\eta[0,1]$ sehr ähnlich. Denn beide haben jeweils ein gleichverteiltes Phasenspektrum und das entsprechende Amplitudenspektrum hat denselben Erwartungswert 1. Beide Zeitreihen sind sehr ähnlich. Sie haben sehr ähnliche Histogramme. Trotzdem sind sie verschieden. Es darf nicht angenommen werden, dass die Zeitreihe aus den quasi-Gauß'schen Zufallszahlen eine gauss-verteilte iid-Zeitreihe ist. Denn diese Zeitreihe ist nicht einmal iid. Ich erwähne diese Tatsache hier, weil in der Surrogat-Literatur (z.B. in [Kaplan 95]) diese Annahme der Gaußizität zur Begründung der Linearität und Stationarität des surrogaterzeugenden Prozesses dienen sollte. Bekanntlich lassen sich alle Surrogate als Faltungen eines Filters (Amplitudensignal) mit Rauschen (quasi-Gauß'sche Zufallszahlen) darstellen. Die Linearität und Stationarität des Inputs (des einkommenden Rauschens) würden die Linearität und Stationarität des Outputs (der Surrogate) garantieren, und Gauß'sches iid Rauschen ist sicher linear und stationär. Der surrogaterzeugende Prozess sei so ein MA-Prozess. Aber diese Begründung ist falsch. Eine Zeitreihe aus quasi-Gauß'schen Zufallszahlen, die z.B. $2N$ lang ist, und deren Phasenspektrum gleichverteilt ist, aber deren Amplitudenspektrum identisch 1 ist, ist gar keine iid-Zeitreihe, denn diese $2N$ Zufallsvariablen werden eindeutig durch $N-1$ Phasen bestimmt. Die Abhängigkeit der Zufallsvariablen untereinander ist sicher. Der Prozess, der FT-Surrogate erzeugt, ist nicht linear. Vielmehr gehört er zur Klasse der stationären harmonischen Prozesse, bei denen die Anzahl der Harmoniken eine dynamische Eigenschaft des Systems ist. Bei den FT-Surrogaten ist die Länge der Zeitreihe eine dynamische Eigenschaft, und Untersuchungen von Teilintervallen der Surrogate zeigen große Unterschiede zu Teilintervallen aus entsprechenden gauß'schen Zeitreihen.

Nach dieser Bemerkung über die Nicht-Gaußizität des Phasensignals 1.Art für theiler-lineare Zeitreihen möchte ich betonen, dass der Unterschied in den Innenabhängigkeiten zwischen den verschiedenen Zahlen der Zeitreihe liegt, und nicht etwa im Wertebereich oder Histogramm, wie das numerisch nachweisbar ist. Also kann man für die Werte des Phasensignals 1. Art ein gauß'sches Histogramm annehmen.

$$\rho_{PS}(\mathbf{x}) = \frac{Wkt[\mathbf{x} < PS_t < \mathbf{x} + d\mathbf{x}]}{d\mathbf{x}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \quad (31)$$

Seine Hilbert-Transformierte hat dieselbe Verteilung, so dass nun $bampq_t$ eine Chi-Quadrat-Verteilung mit 2 Freiheitsgraden hat.

$$\rho_{bampq}(\mathbf{x}) = \frac{Wkt[\mathbf{x} < bampq_t < \mathbf{x} + d\mathbf{x}]}{d\mathbf{x}} = \chi^2(\mathbf{x}, 2) = \frac{e^{-x/2}}{2} \quad (32)$$

Für die Quantile dieser Verteilungsdichte gilt die Beziehung:

$$q_{bampq}(1 - 10^{-n}) = 4.60517 n \quad (33)$$

■ 1.6.6 Direkter Test auf Phasengleichverteilung

Der Vollständigkeitshalber erwähnen wir hier, wie wir die Hypothese der Phasengleichverteilung direkt prüfen können. Eine direkte und zugleich effektive Methode ist der χ^2 -Test auf Gleichverteilung. Das empirische Histogramm wird abgeschätzt, indem man den Wertebereich in n Intervalle teilt und die Anzahl der Ereignisse in jedem Intervall registriert. Nun wird dieses empirische Histogramm mit dem theoretischen Histogramm verglichen, (d.h. die Differenzen werden ermittelt). Bei gleichgroßen Intervallen ist die Summe der Quadrate der Differenzen multipliziert mit einem passenden Vorfaktor, x ($x = \frac{\text{Anzahl der Intervalle}}{\text{Anzahl der Punkte}}$), praktisch mit $(n-1)$ Freiheitsgraden χ^2 -verteilt. Wichtig ist zu bemerken, dass die Histogramme der Differenzen des Phasenspektrums bei der Annahme der Phasengleichverteilung auch gleichverteilt sind. Deswegen wenden wir den vorigen χ^2 -Test auf Gleichverteilung des Histogramms auch auf die Differenzen, und deren Differenzen an. (Normalerweise testeten wir die Phasen und die ersten 4 Differenzen auf Gleichverteilung der Histogramme). Beispiel: $\{x_t\}$ ist eine Realisierung des ARMA-Prozesses des Barnes'schen Prozesses (7). Anwendung des χ^2 -Histogramm-Tests ergibt: (in den folgenden χ^2 -Histogramm-Tests werden $n=10$ Intervalle verwendet)

(Bemerkung: es ist hier rein zufällig gewesen, dass die ARMA-Realisierung phasengleichverteilt ist. Die meisten Realisierungen sind aber nicht phasengleichverteilt. In einem Test mit 1000 Realisierungen wurde die Phasengleichverteilung (Theiler-Linearität) dann abgelehnt, wenn das Minimum der 5 Tests kleiner als 1% war. Die Anzahl der nichtphasengleichverteilten Realisierungen war: 892. Da die Länge der Zeitreihen in dieser Rechnung kein Vielfaches von der Periode 22 war, nämlich 1800, habe ich die Rechnung mit der Periode $90 \cdot 22 = 1980$ wiederholt. Das Resultat war im Wesentlichen das gleiche: 870 Realisierungen aus 1000 sind nicht phasengleichverteilt.)

Ein FT-Surrogat der vorigen ARMA-Realisierung ist sicher (nach Konstruktion) gleichverteilt:

Die Gleichverteilung wird mit folgenden Irrtumswahrscheinlichkeiten abgelehnt:

$$\{0.643226, 0.362012, 0.596198, 0.41058, 0.371616\}$$

Die Gleichverteilung kann hier nicht abgelehnt werden.

Was geschieht, wenn man dieses Surrogat um einige Glieder verkürzt? (Jetzt nur um 2 Glieder)

$$\{0.00265722, 0.368291, 0.514514, 0.722615, 0.529007\}$$

Die Gleichverteilung wird abgelehnt. Obwohl nur ein Test aus 5 die Gleichverteilung ablehnt, ist diese Ablehnung sehr signifikant (>99%). Insgesamt hat der kombinierte Test eine Signifikanz von mindestens 95%.

Das ist ein Beispiel für eine "lineare" Zeitreihe, die nicht theiler-linear ist. Das Quadrat der vorigen ARMA-Realisierung ist nicht mehr linear. Kann mit Hilfe des χ^2 -Histogramm-Tests diese Nichtlinearität festgestellt werden?

{0.350575, 0, 0.122206, 0.172121, 0.894101}

Ja. Die Gleichverteilung wird abgelehnt. Die erste Differenz ist auf keinen Fall gleichverteilt!!
(Aus 1000 Realisierungen wurde die Gleichverteilung 984 Mal abgelehnt)

Die Barnes'sche Zeitreihe wird auch getestet:

{0.869613, 0, 0.622642, 0.837713, 0.79387}

Die Gleichverteilung wird eindeutig abgelehnt.
(Aus 1000 Realisierungen wurde die Gleichverteilung 996 Mal abgelehnt)

Man sieht, dass der χ^2 -Histogramm-Test ziemlich effektiv ist. Am effektivsten ist er, nach unserer Erfahrung, wenn er an den ersten Differenzen der Phasen angewendet wird. Sehr oft tendieren die Phasen einer Zeitreihe in einigen bestimmten Frequenzbereichen, aus noch nicht ganz klaren Gründen, linear zu fallen. In diesem Fall haben die ersten Differenzen der Phasen einen bevorzugten Wert, was zur Verwerfung der Hypothese der Phasengleichverteilung führt.

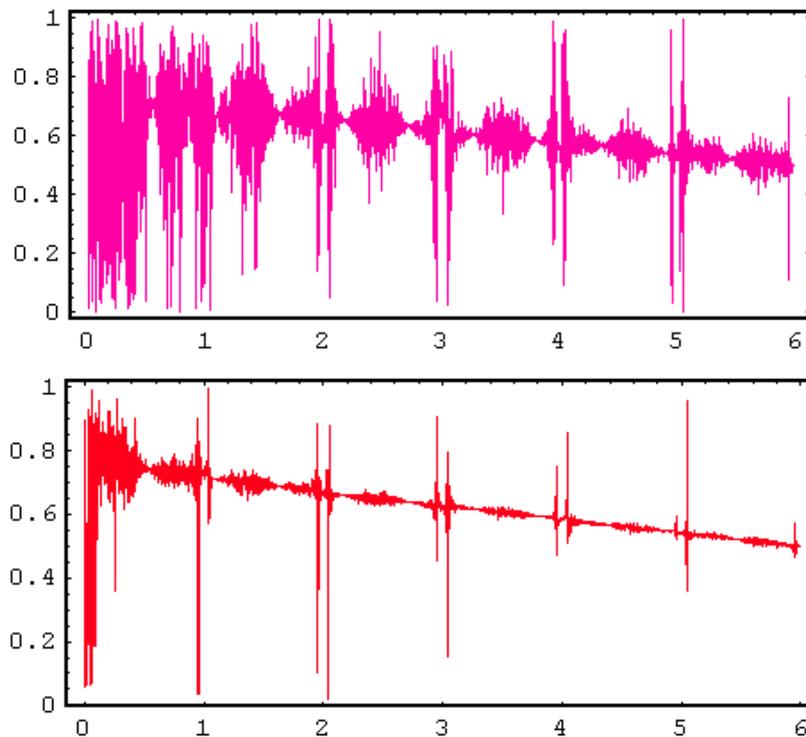


Figure 16

Abb.16: Beispiele des Phasenspektrums einiger Realisierungen von Variationen des Barnes'schen Modells. Die Modelle bestehen im Wesentlichen aus 12 unabhängigen aneinandergereihten gewöhnlichen jährlichen Barnes'schen Modellen und geben monatliche Abschätzungen. Die x-Achse zeigt die Frequenzen in cpy (Zyklen pro Jahr), und die y-Achse ist der zwischen 0 und 1 normierte Phasenwert. Es entsteht eine "nichtlineare" jährliche Scheinfrequenz, die mit der 11-jährigen periode gekoppelt wird. Das erklärt die Doppellinien in der Nähe der Vielfachen der jährlichen Frequenz. Interessant ist der linear fallende Verlauf der Phasen. Dieser Effekt hat nichts mit der Nichtlinearität des erzeugenden Prozesses zu tun.

■ 1.7 Beispiele mit dem Phasensignal

■ 1.7.1 kubische Phasenkopplung

Signal ist Kubik einer Zeitreihe mit einem scharfen Gipfel (bei Frequenz $\omega = \omega_0$) im Spektrum. Das Signal wird mit iid-Rauschen verrauscht. Signal:Rauschen = 1:1

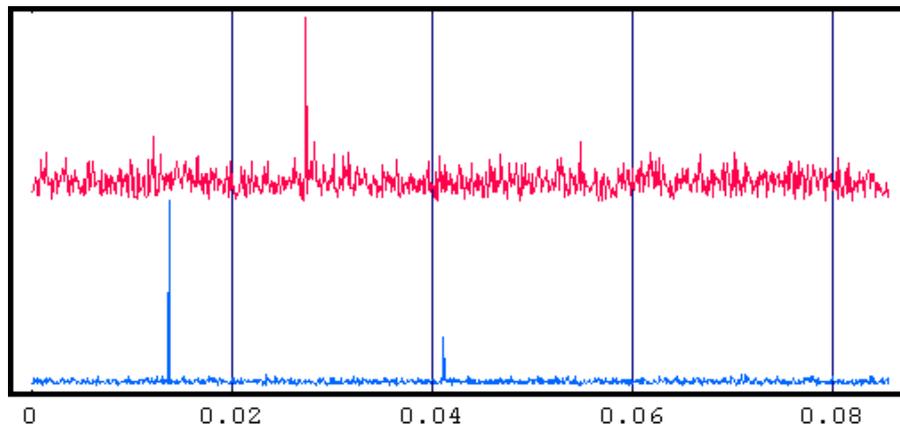


Figure 17

Vergleich zwischen den Gipfeln der Amplitudenspektren des ursprünglichen Signals (in blau) und des Phasen-Signals (in rot). Der wichtigste Gipfel im Spektrum des Phasensignals liegt bei $\omega = 2 \omega_0$, während die Gipfel des Kubiks bei $\omega = \omega_0$ und $\omega = 3 \omega_0$ liegen. (Die Differenz ist relevant). Die x-Achse bezeichnet die Frequenz.

■ 1.7.2 Allgemeine gerade Phasenkopplung

Signal ist Resultat der Anwendung einer geraden Funktion an einer Zeitreihe mit einem scharfen Gipfel im Spektrum. Das Signal wird mit iid-Rauschen verrauscht. Signal:Rauschen = 1:1

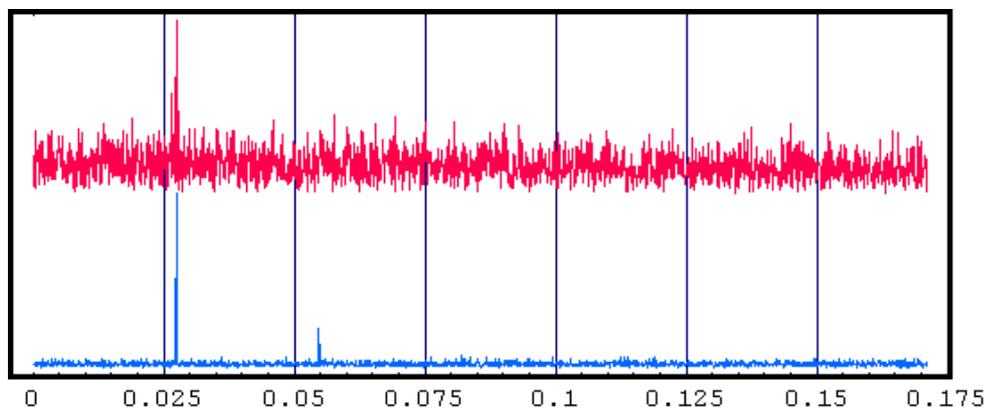


Figure 18

Vergleich zwischen den Gipfeln der Amplituden-Spektren des ursprünglichen Signals (in blau) und des Phasen-Signals (in rot). (Erste Gipfel fallen zusammen). Die x-Achse bezeichnet die Frequenz.

■ 1.7.3 Allgemeine ungerade Phasenkopplung

Signal ist Resultat der Anwendung einer ungeraden Funktion an einer Zeitreihe mit einem scharfen Gipfel im Spektrum. Das Signal wird mit iid-Rauschen verrauscht. Signal:Rauschen = 1:1 (Ähnlich ist die Phasenkopplung im Fall eines stochastisch angeregten Van-der-Pol- oder Duffing-Oszillators)

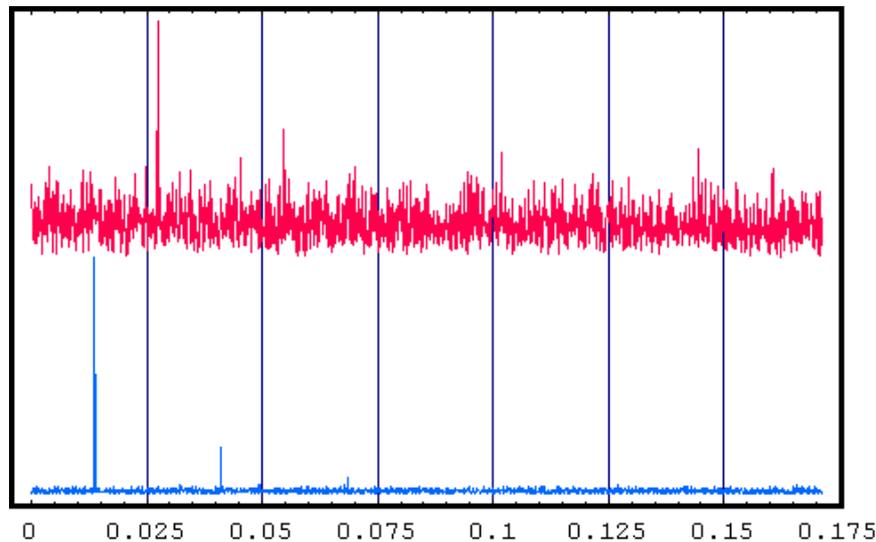


Figure 19

Vergleich zwischen den Gipfeln der Amplituden-Spektren des ursprünglichen Signals (in blau) und des Phasen-Signals (in rot). (Gipfel fallen nicht zusammen). Die x-Achse bezeichnet die Frequenz.

■ 1.7.4 Duffing-Oszillator

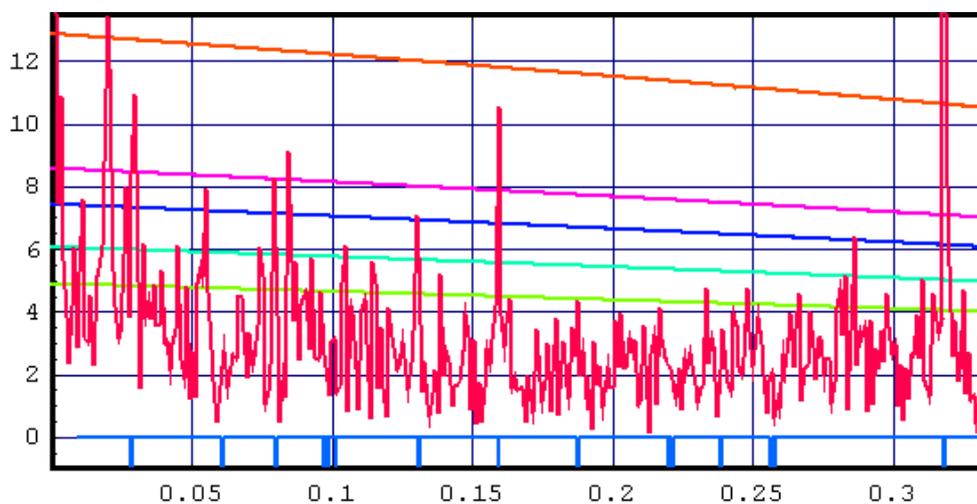


Figure 20

Duffing-Oszillator:

$$\ddot{x} + 2\gamma \dot{x} + \alpha x + \beta x^3 = A \cos[\omega t] \quad \text{mit: } \alpha=0.016; \beta=10; \gamma=0.04; A=1; \omega=0.5;$$

Die blauen Linien unten zeigen die im Vergleich zu ihrer Umgebung für signifikant gehaltene Gipfel im Amplitudenspektrum. Das Spektrum des Phasensignals ist in rot. Vertrauensgrenzen für die Irrtumswahrscheinlichkeiten: 0.05, 0.01, 0.001, 0.0001 und 10^{-9} sind von unten nach oben gezeichnet. Die Signifikanz der Ablehnung der Nullhypothese einer Phasengleichverteilung ist bewältigend (3 Gipfel überschritten die 10^{-9} -Vertrauensgrenze). Die Assoziation mit dem Amplitudenspektrum ist auch klar (einfach sichtbar in 5 Gipfeln). Die x-Achse bezeichnet die Frequenz.

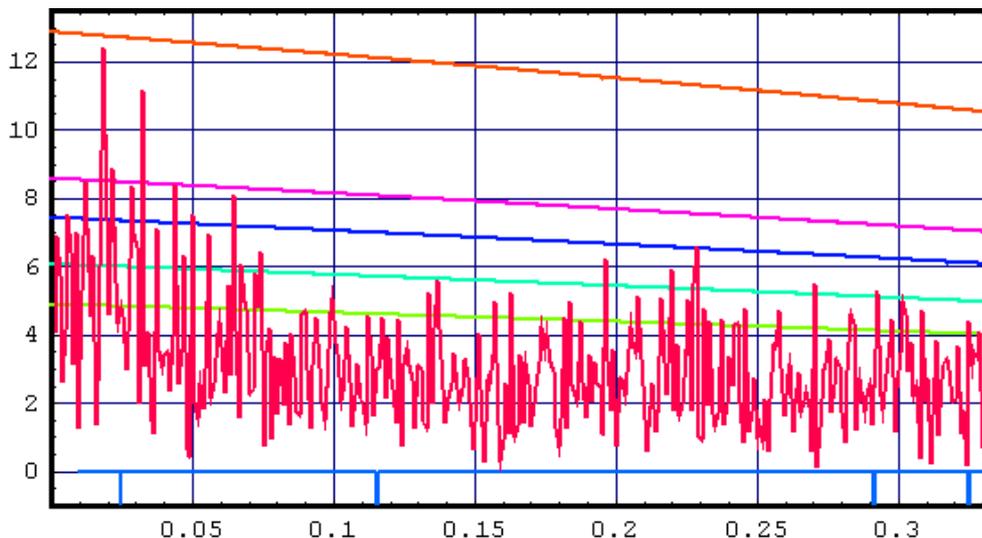


Figure 21

Dieselbe Duffing-problematik wie früher aber mit zusätzlichem stochastischem Gauß-Input ($\sigma = 0.1$). Die blauen Linien unten zeigen die im Vergleich zu ihrer Umgebung für signifikant gehaltene Gipfel im Amplitudenspektrum. Das Spektrum des Phasensignals ist in rot. Vertrauensgrenzen für die Irrtumswahrscheinlichkeiten: 0.05, 0.01, 0.001, 0.0001 und 10^{-9} sind gezeichnet. Im Vergleich zum reinen Duffing-Oszillator von vorher ist die Signifikanz etwas kleiner. Die Signifikanz bleibt aber bewältigend (ein Gipfel erreicht fast die 10^{-9} -Vertrauensgrenze). Die Assoziation mit dem Amplitudenspektrum ist schwächer geworden (sichtbar in einem der 4 Gipfel), denn scharfe Gipfel fehlen nun. (Die x-Achse bezeichnet die Frequenz.)

■ **1.7.5 Lorentz-System**

Signal ist die z-Koordinate des Lorentzsystems mit den bekannten chaotischen Parametern von früher (Gl. 9). Es gibt Phasenkopplung.

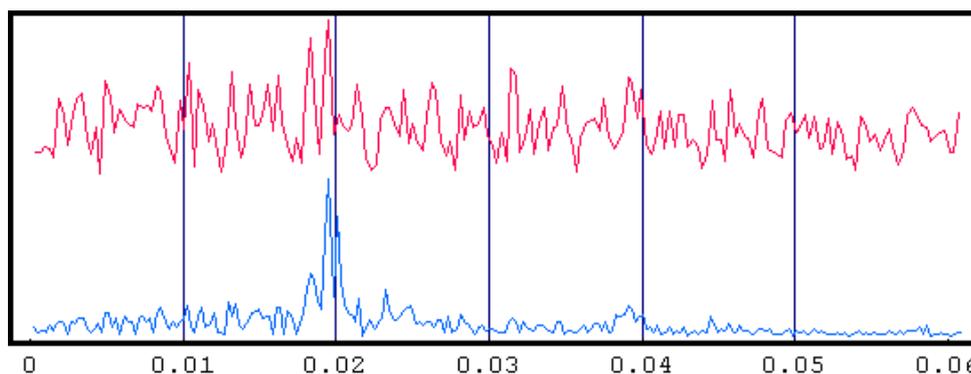


Figure 22

Vergleich zwischen den Gipfeln der Amplituden-Spektren des ursprünglichen Signals (in blau) und des Phasen-Signals (in rot). (Die x-Achse bezeichnet die Frequenz.)

Das Phasensignal charakterisiert ungewöhnliche Ereignisse im Verlauf des Signals

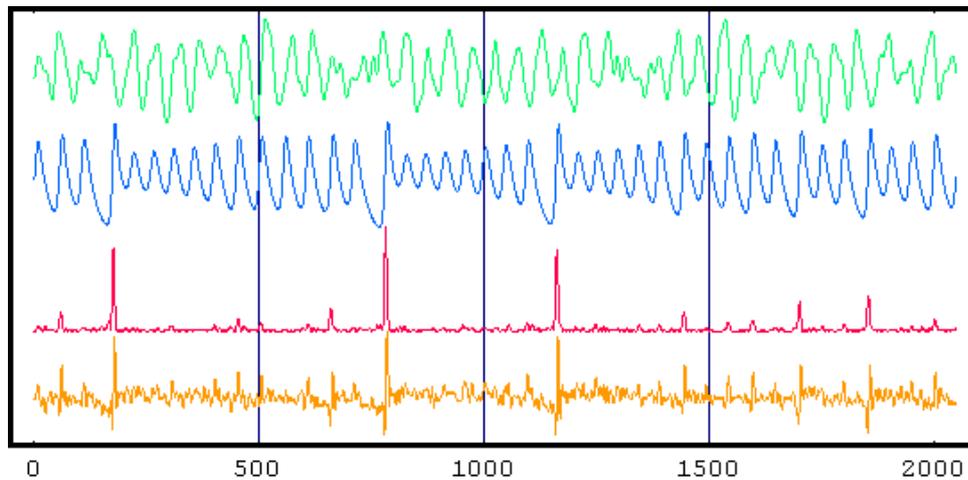


Figure 23

Vergleich zwischen dem ursprünglichen Signal (in blau) und dem Phasensignal (in rot). Das Fourier-gebleichte Signal (=das Phasensignal 1.ter Art - in dunkelorange) wird unten und, zum Vergleich, auch das Amplituden-Signal (oben - in grün) gezeigt. Außer dem Amplituden-Signal, das eigentlich wie ein Filter, der alle linearen Beziehungen fasst, wirkt, laufen alle Signale zusammen mit. (Die x-Achse bezeichnet die Zeit.)

■ 1.7.6 Rössler-System

Das Signal ist die x-Koordinate des Rössler-Systems mit chaotischen Parametern.

Die Phasenkopplung ist evident. Das ist nur ein Teil des Spektrums!!

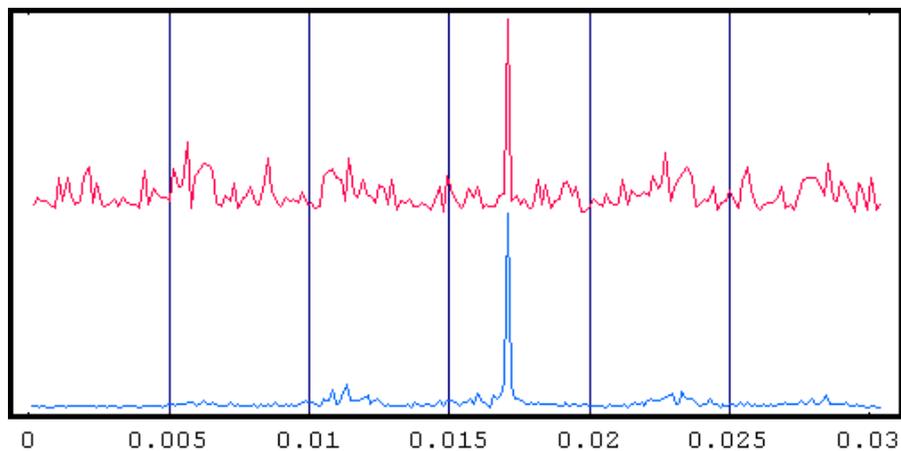


Figure 24

Vergleich zwischen den Gipfeln der Amplituden-Spektren des ursprünglichen Signals (in blau) und des Phasen-Signals (in rot). (Die x-Achse bezeichnet die Frequenz.)

Das Phasenspektrum enthält reguläre Gipfel. Die Nichtlinearität der Zeitreihe ist zweifellos. Ein Gipfel überschreitet sogar die 10^{-25} -Irrtumswahrscheinlichkeitsgrenze.

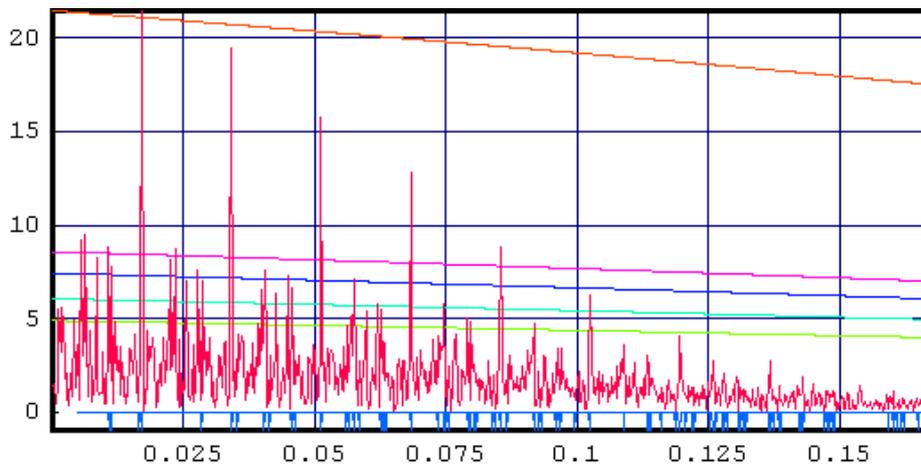
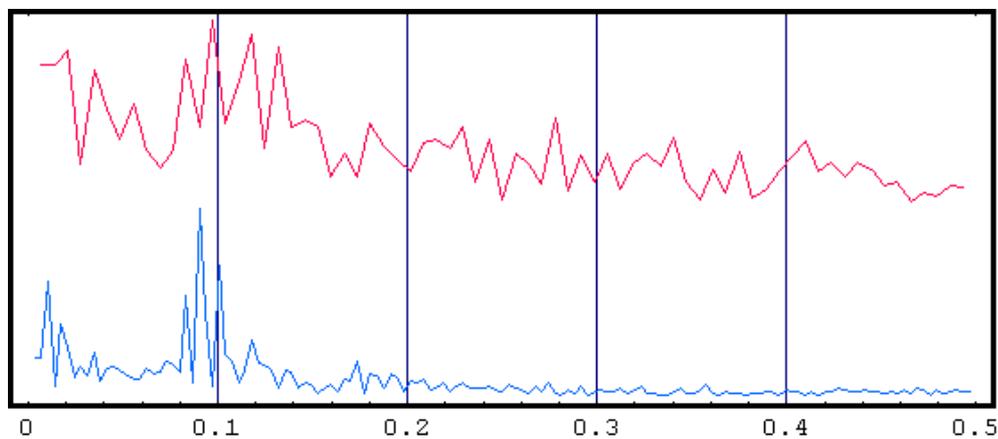


Figure 25

Das Amplitudenspektrum des Phasensignals. Vertikale blaue Linien zeigen die Stellen von signifikanten lokalen Gipfeln im Leistungsspektrum des ursprünglichen Signals. Die Horizontalen abfallenden Linien zeigen Quantile bei Annahme der Phasengleichverteilung (von unten nach oben: 95%; 99%; 99,9%; 99,99%; $1 \cdot 10^{-25}$). Hier wird getestet, ob das Spektrum des Phasensignals signifikant groß ist. (Die x-Achse bezeichnet die Frequenz.)

■ Realistische Zeitreihen

■ 1.7.7 Sonnenflecken-Zeitreihe



Vergleich zwischen den Gipfeln der Amplituden-Spektren des ursprünglichen Signals (in blau) und des Phasensignals (in rot). (Die x-Achse bezeichnet die Frequenz.)

Aus der folgenden Grafik wird trotz der Kürze der Zeitreihe nachgewiesen, dass die Hauptperiode der Zeitreihe nichtlinearer Natur sei. Den Gipfel gibt es an derselben Stelle sowohl im Spektrum der Zeitreihe als auch im Spektrum des Phasensignals der Zeitreihe. Weiterhin existieren Vielfache der entsprechenden Frequenz im Spektrum des Phasensignals. Aus ungenauen Abschätzungen von 5 Gipfeln folgen folgende Abschätzungen für diese "nichtlineare Periode": (in Jahren: 10.5753, 11.0312, 11.104, 11.0311, 12.3242). Die Existenz Vielfacher der Hauptfrequenz im Spektrum des Phasensignals spricht für eine Kopplung, die allgemeiner ist, als die angenommene quadratische

Kopplung.

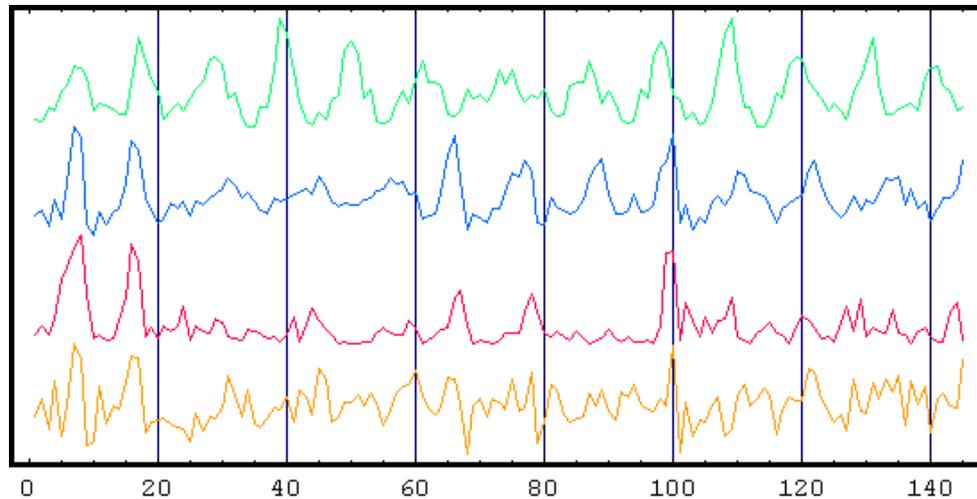


Figure 26

Vergleich zwischen dem ursprünglichen Signal (in blau) und dem Phasensignal (in rot). Das Fourier-gebleichte Signal (=das Phasensignal 1.ter Art - in dunkelorange) wird unten und, zum Vergleich, auch das Amplituden-Signal (oben - in grün) gezeigt. Außer dem Amplituden-Signal, das eigentlich wie ein Filter, der alle linearen Beziehungen fasst, wirkt, laufen alle Signale zusammen mit. (Die x-Achse bezeichnet die Zeit.)

Die letzte Grafik zeigt den Verlauf der Sonnenflecken-Zeitreihe und ihres Phasensignal in den mittleren 145 Jahren (zwischen 1771 und 1915). Die Abschätzung von Phasenmaßen in der Mitte der Zeitreihe ist ziemlich glaubwürdig, denn die mittleren Werte sind wenig von den Artefakten der Fourier-Transformationen infolge der Nichtperiodizität der Zeitreihe beeinflusst. Man sieht einfach die große Ähnlichkeit der blauen ursprünglichen und der roten Phasensignal-Zeitreihen. Das ist ein Zeichen dafür, dass sehr wesentliche Eigenschaften der Sonnenfleckenzeitreihe in ihrem Phasenspektrum liegen. Und das spricht für wesentliche Nichtlinearität der Zeitreihe.

■ 1.7.8 Kanadische-Lynx-Zeitreihe

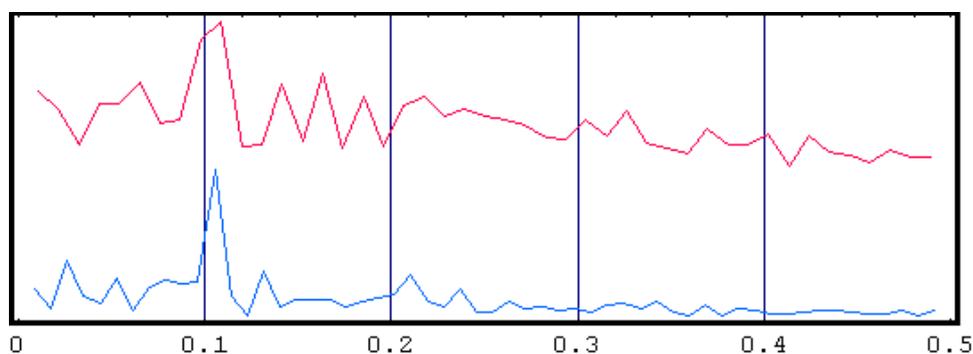


Figure 27

"Vergleich zwischen den Gipfeln der Amplituden-Spektren des ursprünglichen Signals (in blau) und des Phasen-Signals (in rot)." (Die x-Achse bezeichnet die Frequenz.)

Die Lynx-Zeitreihe ist sehr kurz (114 Terme). Trotzdem kann man die Phasenkopplung im Spektrum des Phasensignals signifikant nachweisen.

■ 1.7.9 Atmosphärische Erregung der Polbewegung

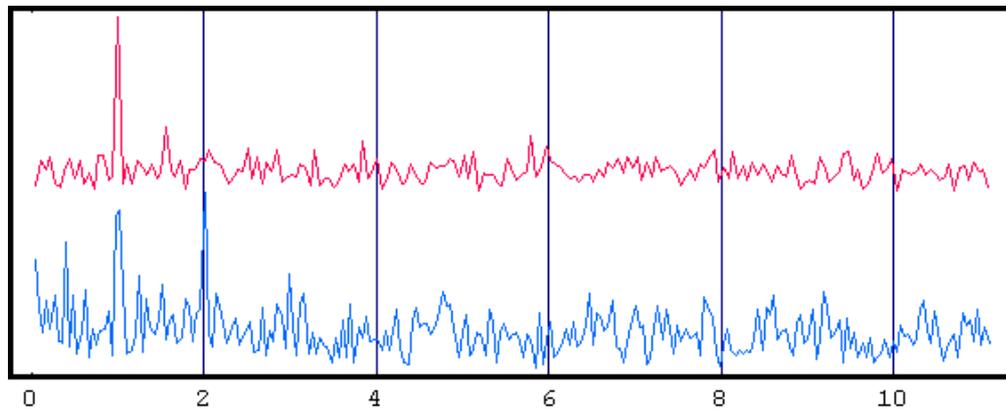


Figure 28

Vergleich zwischen den Gipfeln der Amplituden-Spektren des ursprünglichen Signals (in blau) und des Phasen-Signals (in rot). (Die x-Achse bezeichnet die Frequenz.)

Die Kopplung bei der Jahresperiode ist sehr signifikant.

■ 1.8 Verallgemeinerungen des Phasensignals

■ 1.8.1 Vorwort

Das Phasensignal 2. Art, bampq , ist in seiner ursprünglichen Auffassung ein aus einer zu untersuchenden Zeitreihe abgeleitetes Signal, das zwei grundlegende Eigenschaften besitzt. Im Zeitbereich ist das Phasensignal mit der Zeitreihe zeitlich, läuft also mit ihr mit. Im Frequenzbereich stellt das Phasensignal Beziehungen zwischen verschiedenen Frequenzbereichen der Zeitreihe dar, (im Wesentlichen eine Autokorrelation des Phasenspektrums). Mit dem Verzicht auf das Amplitudenspektrum versucht man Eigenschaften, die durch lineare Beziehungen erklärbar sind, außer Betracht zu lassen. Das Amplitudenspektrum kann durch die Autokorrelationen der Zeitreihe erklärt werden, und diese als Momente zweiter Ordnung können theoretisch mit einem genügend langen linearen Differenzenansatz (Stichwort: MA-Modell) erklärt werden. Diese Denkweise begründet sofort ein gewisses Nichtlinearitätsverständnis für eine Zeitreihe: Nichtlinear ist eine Zeitreihe dann, wenn ihr Phasenspektrum unwahrscheinlich durch ein MA-Modell erklärbar ist. Diese Definition einer nichtlinearen Zeitreihe ist eine operationelle Wahrscheinlichkeitsdefinition, die natürlicherweise auf einen Surrogattest hinausläuft. Nennen wir diese Art der Nichtlinearität, die **Nichtlinearität im engeren Sinne**. Denn wir werden gleich eine allgemeinere Art der Nichtlinearität einer Zeitreihe, die **Nichtlinearität im erweiterten Sinne**, begründen.

Zuerst erinnern wir an eine Eigenschaft, die bekanntlich für lineare Gauß'sche Prozesse gilt. Zwei lineare Gauß'sche Prozesse, die linear unkorreliert sind, sind auch statistisch unabhängig. (Diese Eigenschaft gilt auch für nichtgauß'sche Prozesse, solange die stochastischen Innovationen in den beiden Prozessen voneinander höchstens linear abhängig sind). Aus dieser Eigenschaft folgt die Erwartung, dass die verschiedenen Spektralanteile eines "linearen" Signals, die von konstruktionsgemäß linear unkorreliert sind, auch "unabhängig" sind. Wichtig ist zu bemerken, dass hier von "Nichtlinearität" und "Unabhängigkeit", die realisierungs- und nicht prozessbezogen sind, die Rede ist. Das Nichtlinearitätsverständnis wird so von einem Unabhängigkeitsverständnis, das noch erklärungsbedürftig ist, abhängig gemacht. Natürlich scheint hier die Prüfung verschiedener Filtrationen der Zeitreihe, die aus verschiedenen Frequenzbereichen filtriert sind, im Zeitbereich auf Unabhängigkeit. In einem späteren Kapitel (3), werde ich zwei Unabhängigkeitsverständnisse für Zeitreihen (Unabhängigkeit im engeren und im erweiterten Sinn) unterscheiden. Stattdessen springe ich auf eine intuitive Definitionsmöglichkeit im Frequenzbereich. **Die Existenz signifikanter Korrelationen zwischen verschiedenen Frequenzbereichen widerspricht der Linearitätsannahme**. Die letzte Aussage braucht nicht nur für das Phasenspektrum zu gelten, wenn man eine Nichtlinearität im erweiterten Sinne meint. Diese Aussage soll auch für allgemeinere Spektren wie z.B. das komplexe Fourier-Spektrum und das Amplitudenspektrum gelten.

Wie kann man nun die Nichtlinearität im erweiterten Sinn im Fall des Amplitudenspektrums erklären? Nach diesem Verständnis ist das lineare Surrogat einer "nichtlinearen Zeitreihe im engeren Sinne" oft nichtlinear im erweiterten Sinne. Das stimmt. Nehmen wir z.B. eine Realisierung eines stochastischen Van-der-Pol-Prozesses als Beispiel. Diese Zeitreihe hat eine Hauptfrequenz mit vielen Harmoniken (Vielfachen der Hauptfrequenz). Ein lineares Surrogat hat dieselben Gipfel im Amplitudenspektrum, zerstört aber alle Strukturen im Phasenspektrum. Dieses lineare Surrogat kann mit Hilfe eines passenden MA-Modells erklärt werden. Dieses MA-Modell ist aber sehr

unnatürlich. Es ist sehr lang und seine Parameter sind voneinander auf komplizierte Weise so abhängig, dass die Gipfel im Amplitudenspektrum genau an den Stellen der Vielfache der Hauptfrequenz entstehen können. Ja.. man kann sagen, dass ein nichtlinearer Prozess die Parameter des MA-Modells erzeugt hat. Nichtlinearität im erweiterten Sinn ist durchaus denkbar und natürlich.

Kehren wir zurück zu unserem Anfangspunkt. Wie kann man vernünftigerweise das Phasensignal verallgemeinern? Ein zeitliches Signal, das im Frequenzspektrum Korrelationen allgemeiner Spektren darstellt, ist die gesuchte Verallgemeinerung. Natürlich kommen hier auch Korrelationen zwischen allgemeinen Spektren aus zwei verschiedenen Signalen in Frage. Also dürfen Autokorrelationen auf Kreuzkorrelationen zwischen verschiedenen Signalen verallgemeinert werden. Als Grundlage für die Verallgemeinerung des Phasensignals dient die folgende zweikomponentige Verallgemeinerung, das Spektrumkorrelationssignal, SKS.

■ 1.8.2 Das Spektrumkorrelationssignal, SKS

Im Frequenzbereich soll es sich hier im Wesentlichen um die Korrelation der Spektren zweier Signale handeln. Gegeben sind zwei reelle Signale, $\{x_t\}$ und $\{y_t\}$ $t=1, \dots, 2n+1$, die nach passender Konvention im Frequenzbereich in der folgenden Form darstellbar sind:

$$x_t = \frac{1}{2} \sum_{\omega=-n}^n X_{\omega} e^{\frac{2\pi i \omega t}{2n+1} - i \varphi_{\omega}^x}$$

$$y_t = \frac{1}{2} \sum_{\omega=-n}^n Y_{\omega} e^{\frac{2\pi i \omega t}{2n+1} - i \varphi_{\omega}^y}$$

Die Amplitudenspektren, X_{ω} und Y_{ω} , sind symmetrisch in ω und die Phasenspektren, φ_{ω}^x und φ_{ω}^y , sind antisymmetrisch in ω . Nach dieser Konvention folgen die folgenden Beziehungen für die Signale und ihre Hilbert-Transformationen, wenn man von störenden vernachlässigbaren Grenzgliedern absieht (z. B. bei der Annahme verschwindender Mittel):

$$\begin{aligned} x_t &= \sum_{\omega=1}^n X_{\omega} \cos\left(\frac{2\pi\omega t}{2n+1} - \varphi_{\omega}^x\right) \\ H[x_t] &= \sum_{\omega=1}^n X_{\omega} \sin\left(\frac{2\pi\omega t}{2n+1} - \varphi_{\omega}^x\right) \\ y_t &= \sum_{\omega=1}^n Y_{\omega} \cos\left(\frac{2\pi\omega t}{2n+1} - \varphi_{\omega}^y\right) \\ H[y_t] &= \sum_{\omega=1}^n Y_{\omega} \sin\left(\frac{2\pi\omega t}{2n+1} - \varphi_{\omega}^y\right) \end{aligned} \quad (34)$$

Das Spektrumkorrelationssignal der beiden Signale, $\{x_t\}$ und $\{y_t\}$, wird folgendermaßen definiert (das liegt nah um von der trigonometrischen Beziehung $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta$ Gebrauch zu machen):

$$\text{SKS}[x_t, y_t] = x_t y_t + H[x_t] H[y_t] \quad (35)$$

Zuerst ist klar, dass SKS zweier zeitlicher Zeitreihen mit diesen zeitlich ist. Das Spektrumkorrelationssignal läuft mit den Signalen mit. Das ist die grundlegendste Eigenschaft im Zeitbereich, die wir haben möchten. Im Frequenzbereich kann eine langweilige direkte Rechnung zeigen, dass das Frequenzspektrum von SKS, $\text{fks}(\omega)$, mit einem symmetrischen Mittel der Kreuzkorrelation der beiden Spektren korrespondiert:

$$\begin{aligned} fsk_s(n, \omega) \sim \frac{n-\omega}{\sqrt{n}} < X_{\mu+\omega} (e^{i\varphi^x_{\mu+\omega}} (Y_{\mu} e^{i\varphi^y_{\mu}}))^* + \\ Y_{\mu+\omega} (e^{i\varphi^y_{\mu+\omega}} (X_{\mu} e^{i\varphi^x_{\mu}}))^* >_{\mu} \end{aligned} \quad (36)$$

(Bemerkung: zusätzlich angenommene statistische Eigenschaften der Phasenspektren, φ^x und φ^y , machen die konstanten Terme $< X_{\mu+\omega} e^{i\varphi^x_{\mu+\omega}} >_{\mu}$ und $< Y_{\mu+\omega} e^{i\varphi^y_{\mu+\omega}} >_{\mu}$ vernachlässigbar und ermöglichen so die Interpretation der Kreuzkorrelation). Die Signifikanz von fsk_s in einem lokalen Extremum bei der Frequenz ω_0 ist hier ein Zeichen der allgemeinen Nichtlinearität und auch dafür, dass ω_0 eine charakteristische nichtlineare Frequenz ist.

Das Phasensignal 2. Art ist ein Spezialfall des Spektrumkorrelationssignals:

$$bampq[\{x_t\}] = SKS[bleich[\{x_t\}], bleich[\{x_t\}]] \quad (37)$$

wobei $bleich[\{x_t\}]$ das Phasensignal erster Art ist. Die 2-Signal-Erweiterung des Phasensignals nennen wir das Phasenspektrumkorrelationssignal, PSKS.

$$PSKS[\{x_t\}, \{y_t\}] = SKS[bleich[\{x_t\}], bleich[\{y_t\}]] \quad (38)$$

Ich nenne im Folgenden weitere Spezialfälle.

■ 1.8.3 Amplitudenspektrumkorrelationssignal, ASKS

Das Amplitudensignal, AS, ist die Inverse Fourier-Transformation des Amplitudenspektrums. ASKS definiert man mit Hilfe von AS.

$$ASKS[\{x_t\}] = SKS[AS[\{x_t\}], AS[\{x_t\}]] \quad (39)$$

Im Frequenzbereich handelt es sich hier im Wesentlichen um die Autokorrelation des Amplitudenspektrums einer Zeitreihe. Das kann auch auf die Korrelation der Amplitudenspektren zweier Zeitreihen verallgemeinert werden.

$$ASKS[\{x_t\}, \{y_t\}] = SKS[AS[\{x_t\}], AS[\{y_t\}]] \quad (40)$$

Die Signifikanz des Amplitudensignals 2. Art ist ein sicheres Zeichen der Nichtlinearität im erweiterten Sinne. Nach dieser Auffassung ist das lineare Surrogat eines nichtlinearen Signals mit charakteristischen Frequenzen und Superharmoniken auch nichtlinear, denn die Existenz mehrerer Gipfel an derselben Stelle von Superharmoniken kann kaum mit dem Zufall erklärt werden. ASKS hat im Vergleich zu SKS und PSKS Nachteile. $ASKS[\{x_t\}]$ ist mit $\{x_t\}$ nicht zeitlich. Die Interpretation der Queffreny, t , als Lag ist, ähnlich dem reellen Cepstrum, aber möglich. Im Frequenzbereich ist die Interpretation der Korrelation nicht genau, denn der freie Term $< X_{\mu} > < Y_{\mu} >$ verschwindet nicht. Deswegen scheint eine andere Definition nach direkter Berechnung der Korrelationen der Amplitudenspektren treffender zu sein. Man darf in diesem Fall nicht vergessen, dass für die direkte Berechnung der Korrelationen im Amplitudenspektrum nur das positive Spektrum verwendet werden darf. Zyklische Korrelationen sind nicht zulässig.

■ 1.8.4 Beispiele

Im Folgenden vergleichen wir verschiedene SKS-Spezialfälle am Barnes'schen Modell (Gl. 7). Es sind insgesamt 9 Spezialfälle: Autokorrelationen der Zeitreihen der Quadrate der linearen Skelett-Prozesses, $\{y_t\}$, Autokorrelationen der tatsächlichen barnes'schen Zeitreihen, $\{z_t\}$, und Kreuzkorrelationen zwischen $\{y_t\}$ und $\{z_t\}$, wobei für jede Art der Korrelationen 3 verschiedene Spektren verwendet werden: das Phasenspektrum (rot), das komplexe Fourier-Spektrum (grün), und das Amplitudenspektrum (blau). Bemerkung zur Bezeichnung: Mit einem "f" vor der Bezeichnung des Spektrumkorrelationssignals (z.B. *f*sk*s*, *f*ask*s*, *f*bamp*q*, *f*psk*s*) sind die Absolutwerte des Spektrums des jeweiligen Signals gemeint.

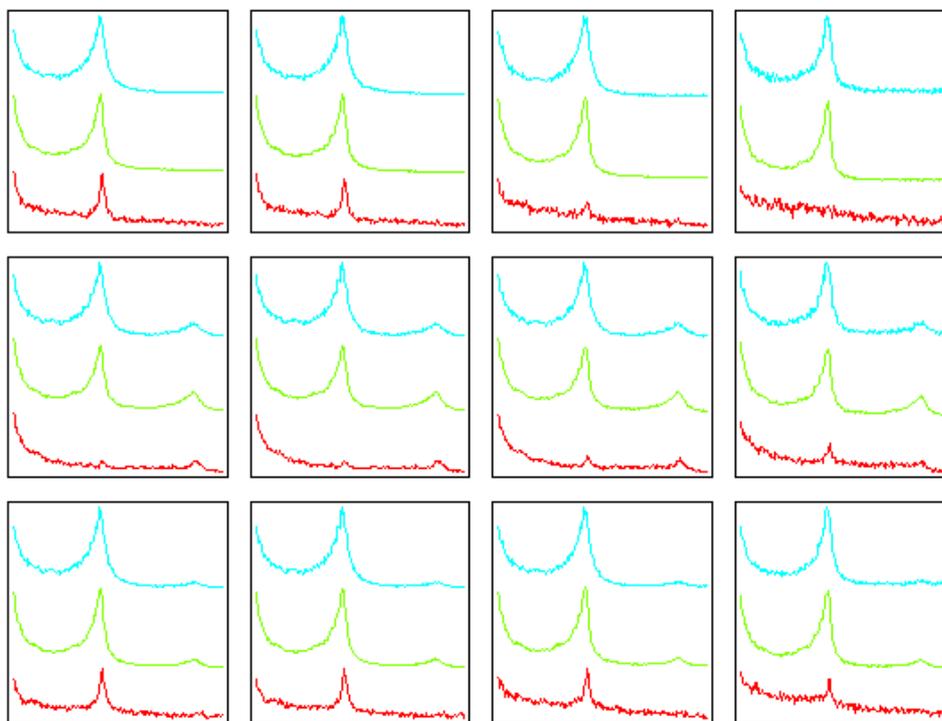


Figure 29

Abb.17: Qualitativer Vergleich verschiedener SKS-Spezialfälle im Frequenzbereich am Barnes'schen Modell. 9 Spezialfälle sind für verschiedene Signal-Rauschen-Verhältnisse dargestellt. Die neun Spezialfälle sind: 1. *f*ask*s* $\{\{y_t\},\{y_t\}\}$ (blau in 1. Zeile), 2. *f*sk*s* $\{\{y_t\},\{y_t\}\}$ (grün in 1. Zeile), 3. *f*psk*s* $\{\{y_t\},\{y_t\}\}$ =bamp*q* $\{\{y_t\}\}$ (rot in 1. Zeile), 4. *f*ask*s* $\{\{z_t\},\{z_t\}\}$ (blau in 2. Zeile), 5. *f*sk*s* $\{\{z_t\},\{z_t\}\}$ (grün in 2. Zeile), 6. *f*psk*s* $\{\{z_t\},\{z_t\}\}$ =bamp*q* $\{\{z_t\}\}$ (rot in 2. Zeile), 7. *f*ask*s* $\{\{y_t\},\{z_t\}\}$ (blau in 3. Zeile), 8. *f*sk*s* $\{\{y_t\},\{z_t\}\}$ (grün in 3. Zeile), 9. *f*psk*s* $\{\{y_t\},\{z_t\}\}$ (rot in 3. Zeile). Dargestellt sind immer die Absolutwerte der Spektren (im ersten Viertel des positiven Spektrums) gemittelt über 150 Barnes'schen Realisierungen, deren Längen 1980 Punkte sind (1980 ist ein Vielfaches von 22, der Grundperiode des Barnes'schen Prozesses). In der ersten Spalte links gibt es kein Rauschen. In den weiteren Spalten vergrößert sich das Rauschen: Signal : Rauschen = 2:1 (in der 2. Spalte), 1:1 (in der 3. Spalte) und 1:2 (in der 4. Spalte). Mit Rauschen wird weißes gauß'sches Rauschen gemeint und das Verhältnis Signal:Rauschen ist ein Verhältnis von Varianzen.

Die Grafik zeigt Überlegenheit von SKS und ASKS gegenüber PSKS (bampq). Der qualitative Verlauf des Spektrums von SKS und ASKS war gegenüber dem Rauschen nicht so empfindlich

wie der des Spektrums von PSKS (bampq). In der ersten Zeile sieht man, wie verstärktes Rauschen die Erkennung des Gipfels bei bampq unmöglich macht. In der 2. Zeile sieht man, wie das verstärkte Rauschen die Bedeutung des ersten Gipfels gegenüber dem zweiten Gipfel erhebt. Solche Inkonsistenzen fehlen für SKS und ASKS.

Die Pointe ist, dass SKS und ASKS Spuren der Nichtlinearität im erweiterten Sinne erkennen. PSKS kann das aber im engeren Sinne. Das sehen wir deutlich mit einem anschaulichen Beispiel. Dabei bleiben wir mit dem Barnes'schen Modell. Wir behalten die Zeitreihe $\{y_t\}$, ersetzen aber die Zeitreihe $\{z_t\}$ mit einem linearen Surrogat. Im engeren Sinne ist $\text{Surrogate}\{\{z_t\}\}$ linear. Im engeren Sinne sind $\{y_t\}$ und $\text{Surrogate}\{\{z_t\}\}$ voneinander unabhängig. Im erweiterten Sinne ist das nicht mehr der Fall. Im erweiterten Sinne ist $\text{Surrogate}\{\{z_t\}\}$ auch nichtlinear, denn mehrere Gipfel in seinem Spektrum stehen merkwürdigerweise bei Vielfachen einer grundlegenden charakteristischen Frequenz. Das kann schwierig mit dem Zufall erklärt werden. Im erweiterten Sinn sind $\{y_t\}$ und $\text{Surrogate}\{\{z_t\}\}$ voneinander abhängig. Denn viele charakteristischen Eigenschaften der beiden Zeitreihen, wie die charakteristischen Frequenzen, stimmen merkwürdigerweise überein. Das kann schwierig mit dem Zufall erklärt werden. Und diese Nichtlinearität im erweiterten Sinn wird von SKS und ASKS entdeckt.

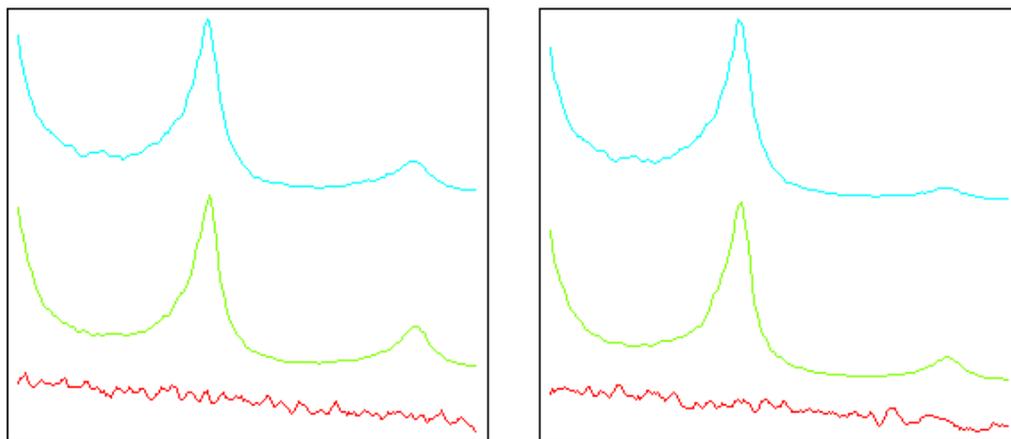


Figure 30

Abb. 18: Qualitativer Vergleich verschiedener SKS-Spezialfälle im Frequenzbereich am Barnes'schen Modell. In der linken Grafik sind $f_{bampq}[\text{Surrogate}\{\{z_t\}\}]$ (in rot), $f_{fks}[\text{Surrogate}\{\{z_t\}\}, \text{Surrogate}\{\{z_t\}\}]$ (in grün) und $f_{fks}[\text{Surrogate}\{\{z_t\}\}, \text{Surrogate}\{\{z_t\}\}]$ (in blau) dargestellt. In der rechten Grafik sind $f_{fks}[\{y_t\}, \text{Surrogate}\{\{z_t\}\}]$ (in rot), $f_{fks}[\{y_t\}, \text{Surrogate}\{\{z_t\}\}]$ (in grün) und $f_{fks}[\{y_t\}, \text{Surrogate}\{\{z_t\}\}]$ (in blau) dargestellt. Man bemerkt in beiden Fällen, wie sks und asks (anders als psks) zwischen Nichtlinearität im erweiterten Sinne (hier) und Nichtlinearität im engeren Sinne (vorige Abbildung) nicht unterscheiden kann.

Zum Schluss sei hier nebenbei erwähnt, dass die Verallgemeinerung des Phasensignals im Rahmen der SKS-Formulierung auch zu anderen gleichwertigen Definitionen des Phasensignals führen kann, bei denen die Bleichung der ursprünglichen Zeitreihe das ursprüngliche Amplitudenspektrum mit einem anderen (als $A_k \equiv 1$) informationslosen Amplitudenspektrum ersetzt wird, was vielleicht bei der Stabilität und Lokalität des Phasensignals helfen darf.

$$\text{AllgPS}\{\{x_t\}\} = \text{SKS}\{\{A_t\} \otimes \text{bleich}\{\{x_t\}\}, \{B_t\} \otimes \text{bleich}\{\{x_t\}\}\} \quad (41)$$

$$f \text{AllgPS}(n, \omega) \sim \frac{n-\omega}{\sqrt{n}} < A \quad (42)$$

$$\{A_t\} = F^{-1}[\{A_\mu\}]; \quad \{B_t\} = F^{-1}[\{B_\mu\}];$$

$\{A_\mu\}$ und $\{B_\mu\}$ brauchen nicht identisch zu sein und durften vernünftigerweise monoton fallend sein. Die theoretisch ermittelten Verteilungen des ursprünglichen Phasensignals sind natürlich nicht mehr gültig.

■ 1.9 Zusammenfassung über das Phasensignal

In Kürze haben wir in diesem Kapitel einen neuen nützlichen Apparat kennengelernt. Unser Ausgangspunkt war eine glaubwürdige Annahme der nichtlinearen Datenreihenanalyse, die Annahme, dass nichtlineare Eigenschaften einer Zeitreihe ausschließlich in ihren Phasenspektrum liegen. Das veranlasste uns dazu, das Amplitudenspektrum zu entfernen, und dabei kamen wir auf natürlicher Weise in die Welt der cepstralen Transformationen. Obwohl es keine eindeutige Wahl für das gesuchte "Phasensignal" gab, war schnell deutlich, dass es eine einfache ziemlich natürliche Wahl gibt, die interessante Eigenschaften im Frequenzbereich und im Zeitbereich hat. Das Phasensignal einer Zeitreihe, bampq , misst im Frequenzbereich Korrelationen ihres Phasenspektrums und läuft im Zeitbereich mit ihr mit.

Das Phasensignal kann vielfältig von Nutzen sein. Sehr einfach und effektiv lässt sich mit Hilfe des Phasensignals auf Nichtlinearität im Theiler-Sinn (Phasengleichverteilung) prüfen. Dazu kann man verschiedene Teststatistiken im Frequenz- und im Zeitbereich konstruieren, deren Verteilungen theoretisch bekannt sind. Dadurch ersetzt man die Surrogatmethode und erreicht Signifikanzen, die mit Surrogaten schwer erreichbar sind. Gipfel im Spektrum des Phasensignals machen auf charakteristische Frequenzen aufmerksam, bei denen allgemeine Phasenkopplungen festgestellt und die nur mit Nichtlinearität (und nicht etwa mit Instationarität) erklärt werden können. Tests auf Nichtlinearität einer Zeitreihe, die den Wert des Phasensignals in der Umgebung kritischer Frequenzen (z.B. Gipfel im Amplitudenspektrum der Zeitreihe) prüfen diese kritischen Frequenzen auf Nichtlinearität und sind also gegenüber Instationarität unempfindlich. Das kann man von der ursprünglichen Surrogatmethode nicht behaupten.

Im Zeitbereich erreicht das Phasensignal signifikant hohe Werte bei außerordentlichen Ereignissen (z.B. bei Sprüngen). Das hilft bei der Untersuchung von Instationaritäten. Interessant ist die Beobachtung, dass die Phasensignale verschiedener Komponenten desselben dynamischen Systems sehr ähnlich aussehen. Das macht aus dem Phasensignal einer Zeitreihe aus einem dynamischen System einen Vertreter für das ganze System, der alle wesentlichen nichtlinearen und nichtstationären Eigenschaften des Systems erfasst. Als so ein Vertreter kann das Phasensignal zur Prüfung zweier Systeme auf statistische Unabhängigkeit verwendet werden.

Das Phasensignal, bampq , registriert also wichtige Ereignisse im zeitlichen Verlauf des ursprünglichen Signals. Kann man mit Hilfe des Phasensignals noch mehr über die Natur dieser Ereignisse lernen? Ein allgemeines Rezept ist schwierig. Eine Schwäche des Phasensignals ist die schwache Lokalität im Vergleich zu anderen cepstralen Transformationen (wie Differentialoperatoren). Entfernte Änderungen in der Zeitreihe verursachen größere Unterschiede. Ein anderes verwandtes Problem ist die schwache Stabilität der Abschätzung des Phasensignals. Besonders für stochastische Zeitreihen ist die Abschätzung des Phasensignalls empfindlich gegenüber der Wahl der zugrunde liegenden Teilzeitreihe. In diesen Fällen ist der konkrete numerische Wert des Phasensignals in einem bestimmten Punkt nicht gerade von Bedeutung. Statistische Ergebnisse sind aber aussagekräftig.

Verallgemeinerungen des Phasensignals konnten unter dem Begriff des Spektrumkorrelationssignals, SKS, formuliert werden. Die Verallgemeinerungen im Rahmen dieser Formulierung lassen im Allgemeinen das Amplitudenspektrum der Zeitreihe im Spiel. Das hat gegenüber dem Phasensignal bzgl. Lokalität und Stabilität deutliche Vorteile, kann aber nicht als Nachweis der üblichen Nichtlinearität betrachtet werden. Vielmehr handelt es sich hier um eine Nichtlinearität im erweiterten Sinn, auf die mit dem SKS geprüft wird. Dieser erweiterte Nichtlinearitätsbegriff hat auch seine eigene Berechtigung.

2 Kritik der Surrogatmethoden

■ 2.0 Einführung

In dieser Arbeit wird eine wichtige Frage gestellt: reicht es eigentlich aus zu wissen, dass die Physik hinter einem in der Form von Zeitreihen aufgenommenen Phänomen bestimmt nichtlineare Aspekte beinhaltet, um dann mit den modernen nichtlinearen zeitreihenanalytischen Methoden (wie z.B. Korrelationsdimensionen und Ljapunow-Exponente) diese Zeitreihen zu analysieren? Die Frage wird vom Anfang an so geantwortet: eine nichtlineare Behandlung ist nur dann nötig und sinnvoll, falls mit ausreichender Signifikanz gezeigt wird, dass die lineare Behandlung die reiche Struktur der Zeitreihen nicht erklären kann. Die grundlegende Methode, dies zu entscheiden, besteht in der Anwendung von Hypothesentests, die als Nullhypothese die Linearität des zu behandelnden Problems in geeigneter Form hat.

Nun ist diese Denkweise schon bekannt, und wesentliche Beiträge dazu von Leuten wie Theiler, Schreiber, ..u.a. wurden fast klassisch. Die Anwendung der Hypothesentests in der Form der Fourier-basierten Surrogaten-Tests wurde zu einem weitverbreiteten Instrument in der Zeitreihenanalyse. Wir sind aber der Meinung, dass gerade hier Vieles noch im Dunkeln liegt, und dass wichtige Begriffe, die der Methode zu Herzen liegen, noch konkreter operationeller Definitionen bedürftig sind. Was wird genau in der Nullhypothese explizit und implizit vorausgesetzt? Was ist genau die Gegenhypothese? Was wird unter Linearität, Stationarität, Stochastizität usw. für endliche Zeitreihen verstanden? Was sind Eigenschaften eines Prozesses und was sind

Eigenschaften einer Zeitreihe? Wie kann man diese Eigenschaften unabhängig voneinander behandeln? Wo liegt die natürliche Grenze?

Sehr wichtig ist es noch, eine interessante Nullhypothese aufstellen und prüfen zu können.

■ 2.1 Über die Annahme der Gleichverteilung des Phasenspektrums einer linearen stationären Zeitreihe

■ 2.1.0 Einführung

Die populärsten Surrogattestmethoden zur Prüfung von Zeitreihen auf Nichtlinearität basieren alle auf der fourier-basierten Theiler-Methode. Die Nichtlinearität einer Zeitreihe wird festgestellt, wenn sich Eigenschaften der untersuchten Zeitreihe signifikant von den Eigenschaften typischer Realisierungen linearer Zeitreihenprozesse unterscheiden. Das ist schon eine gewisse operationelle Definition einer "nichtlinearen Zeitreihe". Es wird aber sofort behauptet (oder mindestens implizit angenommen), dass so eine nichtlineare Zeitreihe ein gleichverteiltes Phasenspektrum besitzt, denn die linearen fourier-basierten Surrogate haben, im Gegensatz zur ursprünglichen Zeitreihe, ein gleichverteiltes Phasenspektrum. Wenn hier von "Phasenspektrum" gesprochen wird, dann wird nur das positive nichttriviale Spektrum gemeint (das sind $[(N - 1)/2]$ verschiedene Komponenten in einer N -langen Zeitreihe). Oft wird nachträglich dazu behauptet, dass diese Surrogate gauß-verteilt sind. Mit dem Trick der Histogramm-Abbildung (Adjustierung der Werte der Surrogate nach den Werten der Zeitreihe) könne man nicht-gauß'sche lineare Zeitreihen prüfen. Es stellen sich hierzu schnell natürliche berechnete Fragen:

- Q1. Sind typische Realisierungen linearer Zeitreihenprozesse phasengleichverteilt?
- Q2. Wenn nicht, sind sie denn im Grenzwert einer sehr langen Zeitreihe phasengleichverteilt?
- Q3. Sind sie phasengleichverteilt, wenn sie gauß-verteilt sind?
- Q4. Ist der Zeitreihenprozess, der fourier-basierte Surrogate produziert, linear?
- Q5. Sind die fourier-basierten Surrogate als Zeitreihen linear?

Hier werden wir uns diesen Fragen widmen, denn sie sind in der uns bekannten Literatur unbefriedigend oder gar falsch beantwortet worden. (Repräsentativ diesbezüglich ist die Arbeit von Schmitz im Anhang A). Es gibt weitere Fragen, die tiefer den physikalischen Sinn der ganzen Methode in Frage stellen:

- Q6. Stimmt das mit der Histogramm-Abbildung?
- Q7. Selbst wenn der Nichtlinearitätssurrogatansatz richtig gefunden wird, und dadurch die "Nichtlinearität" einer konkreten Zeitreihe nachgewiesen wird, wie wichtig ist diese Information? Diese letzte Frage beantworten wir später. Wir fangen mit den ersten 5 Fragen, den technischen Fragen, an und versuchen zuerst die Problemstellung genauer darzulegen.

■ **2.1.1 Was ist ein linearer Zeitreihenprozess?**

Ein Zeitreihenprozess, X^N , [eine Gesamtheit vieler Zeitreihen (Realisierungen des Prozesses), $\{x_t\}_{t=1,2,\dots,N}$], kann als eine Folge von N Zufallsvariablen, \hat{x}_t , aufgefasst werden:
 $P^N = \{\hat{x}_t\}; t = 1, 2, \dots, N$.

Der Index t, die Zeit, umfasst zuerst mal die Menge der natürlichen Zahlen von 1 bis N.

Ein spezieller Zeitreihenprozess ist der iid-Prozess, der aus unabhängigen identisch verteilten Zufallsvariablen besteht. (iid steht im Englischen für independent identically distributed).

Die Linearität bezeichnet normalerweise eine Beziehung zwischen zwei Seiten (etwa Ursache und Wirkung), die voneinander linear abhängig sind. Die lineare Abhängigkeit kann man sich so vorstellen:

Eine Änderung der Ursache um Ursache X $\xrightarrow{\text{bewirkt}}$ Wirkung X

Eine Änderung der Ursache um Ursache Y $\xrightarrow{\text{bewirkt}}$ Wirkung Y

Eine Änderung der Ursache um (Ursache X + Ursache Y) $\xrightarrow{\text{bewirkt}}$ (Wirkung X + Wirkung Y)

Wenn man von einem linearen Zeitreihenprozess spricht, dann meint man implizit eine lineare Beziehung zwischen diesem Prozess und einem anderen unsichtbaren Prozess von stochastischen Innovationen. Dieser zugrunde liegende Referenzprozess ist ein unendlicher iid-Zeitreihenprozess, $U = \{\hat{u}_t\}_{t=-\infty}^N$ (\hat{u}_t sind iid-Zufallsvariablen). Wenn man noch Kausalität (keine Abhängigkeit von zukünftigen Werten) voraussetzt, dann kann ein linearer Zeitreihenprozess in der folgenden kausalen Form geschrieben werden:

$$x_t = \sum_{k=0}^{\infty} h_k u_{t-k} \tag{1}$$

Diese Beziehung verbindet jede Realisierung des iid-Zeitreihenprozesses U durch einen (möglicherweise unendlichen) Filter, $h=\{h_k\}$, eindeutig mit einer Realisierung des Zeitreihenprozesses X^N

Ein wichtiger Spezialfall linearer Zeitreihenprozesse ist der Gauß-Prozess. Dabei sind alle Zufallsvariablen \hat{u}_t normalverteilt (Wkt[$u \in (x, x + dx)$] = $\frac{\exp(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2})}{\sqrt{2\pi}\sigma} dx$) mit derselben Standardabweichung, σ , und demselben Mittel, m.

Wichtig ist es, zwischen stationären und instationären linearen Zeitreihenprozessen zu unterscheiden. Bei stationären Prozessen dürfen die Komponenten des Filters, h, nicht von der absoluten Zeit, t, abhängen. (Das ist in unserer obigen Darstellung eines linearen Prozesses (1) der Fall).

■ **2.1.2 Was ist Phasengleichverteilung?**

Hier übernehmen wir die folgende Konvention der diskreten Fourier-Transformation:

$$X_\mu = A_\mu e^{i\varphi_\mu} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{t=1}^N x_t e^{2\pi i(t-1)(\mu-1)/N} \tag{2}$$

und für die inverse Fourier-Transformation:

$$x_t = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\mu=1}^N X_{\mu} e^{-2\pi i t(\mu-1)/N} \quad (3)$$

Eine reelle Zeitreihe der Länge N hat demzufolge im Frequenzbereich folgendes Phasenspektrum:

Phasenspektrum = $\{0, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{n-1}, \varphi_n, 0, -\varphi_n, -\varphi_{n-1}, \dots, -\varphi_2, -\varphi_1\}$ falls N gerade ist
oder

Phasenspektrum = $\{0, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{n-1}, \varphi_n, -\varphi_n, -\varphi_{n-1}, \dots, -\varphi_2, -\varphi_1\}$ falls N ungerade ist
 $n = [(N-1)/2]$ ist der ganze Teil von $\frac{N-1}{2}$

Nun betrachten wir Zeitreihenprozesse. $x_t, A_{\mu}, \varphi_{\mu}$ sind jetzt reelle Zufallsvariablen. Wenn man von der Phasengleichverteilung spricht, dann meint man die Komponenten des Vektors $\vec{\varphi} = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{n-1}, \varphi_n)$. Die Verteilung einer Phase beschreibt man am besten mit der Wahrscheinlichkeitsdichte, $\rho[\varphi = \theta] = f(\theta)$. Z.B. ist $\rho[\varphi_i = \theta_i]$ ist der Wert der Wahrscheinlichkeitsdichte der i -ten Phase, φ_i , für den Winkel θ_i (d.h. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Phase φ_i einen Wert im Intervall $(\theta_i, \theta_i + d\theta_i)$ einnimmt ist $\rho[\varphi_i = \theta_i] d\theta_i$). Die Annahme der Phasengleichverteilung beinhaltet eine Gleichverteilung für jede Phase sowie die statistische Unabhängigkeit aller Phasen untereinander. Für die gemeinsame Wahrscheinlichkeitsdichte der Phasen gilt:

Phasengleichverteilung :

$$\rho[\vec{\varphi} = \vec{\theta}] = \frac{1}{d\theta_1 d\theta_2 \dots d\theta_n} \quad (4)$$

Wkt $[\varphi_1 \in (\theta_1, \theta_1 + d\theta_1), \varphi_2 \in (\theta_2, \theta_2 + d\theta_2), \dots,$
 $\varphi_n \in (\theta_n, \theta_n + d\theta_n)] = \prod_{i=1}^n \rho[\varphi_i = \theta_i] = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n$

Allgemein gilt für lineare Zeitreihenprozesse:

$$\rho[\vec{\varphi} = \vec{\theta}] = \prod_{i=1}^n \rho_i[\varphi_i = \theta_i] \quad (5)$$

Also sind die verschiedenen Phasen untereinander statistisch unabhängig. Das kann man einfach bestätigen, indem man (1) in (2) einsetzt und die lineare Korrelation zwischen zwei verschiedenen Fourier-Komponenten direkt ausrechnet. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit nehmen wir für x_t und u_t verschwindende Erwartungswerte an. Man findet:

$$\langle X_{\mu} X_{\nu}^* \rangle = \delta_{\mu\nu} \sum_k \sum_j h_k h_j e^{\frac{2\pi i}{N}(k-j)(\mu-1)} \quad \langle X_{\mu} X_{\nu} \rangle = \delta_{\mu, N+2-\nu} \sum_k \sum_j h_k h_j e^{\frac{2\pi i}{N}(j-k)(\mu-1)}$$

Verschiedene Fourier-Komponenten ($\mu \neq \nu$) sind linear unkorreliert. Auch sind sie mit dem Komplex-Konjugierten unkorreliert. Unkorreliertheit impliziert in diesem Fall statistische Unabhängigkeit, denn alle untersuchten Größen sind lineare Kombinationen von iid-Zufallsvariablen. Insbesondere folgt daraus die statistische Unabhängigkeit zwischen verschiedenen Phasen (aber

auch zwischen verschiedenen Amplituden). **Verschiedene Phasen eines linearen Zeitreihenprozesses sind voneinander statistisch unabhängig** (sind aber deswegen noch nicht identisch verteilt).

■ **2.1.3 Verteilung des Phasenspektrums eines normalverteilten iid-Zeitreihenprozesses**

Es sei $\{x_t\}_{t=1,\dots,N}$ ein normalverteilter iid-Zeitreihenprozess der Länge N. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit seien alle $x_t \sim N[0,1]$ verteilt (normalverteilt mit Mittel=0 und Standardabweichung=1). X_μ sei das dazu gehörige Fourier-Spektrum. Es gilt:

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_\mu &= \mathbf{A}_\mu e^{i\varphi_\mu} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{t=1}^N x_t \cos \frac{2\pi(t-1)(\mu-1)}{N} + \\ &\quad \frac{i}{\sqrt{N}} \sum_{t=1}^N x_t \sin \frac{2\pi(t-1)(\mu-1)}{N} = \mathbf{u} + i \mathbf{v} \end{aligned}$$

Die beiden Zufallsvariablen u und v sind mit $N[0, \frac{1}{\sqrt{2}}]$ normalverteilt. Sie sind außerdem linear unkorreliert (das gilt für Nicht-iid-Zeitreihenprozesse nicht). Daraus ergibt sich dass u und v statistisch unabhängig sind. Die Verteilung des Paares (u, v) kann mit der Verteilungsdichte $\rho(u,v)$ beschrieben werden:

$$\begin{aligned} \mathbf{Wkt} [u \in (u, u + du) ; v \in (v, v + dv)] &= \\ \rho(u, v) du dv &= \rho(u) \rho(v) du dv \end{aligned}$$

Die letzte Gleichung gilt wegen der statistischen Unabhängigkeit. Jetzt setzen wir die Normalverteilung ein und verwenden anschließend die Kreisvariablen: $r = \sqrt{u^2 + v^2}$ und $\varphi = \arctan \frac{v}{u}$.

$$\rho(u) \rho(v) du dv = \frac{1}{\pi} e^{-(u^2+v^2)} du dv = \rho(r, \varphi) dr d\varphi = \frac{1}{\pi} e^{-r^2} r dr d\varphi = \rho^r(r) \rho^\varphi(\varphi) dr d\varphi$$

Aus Normierungsgründen ergeben sich:

$$\begin{aligned} \rho^r(r) &= 2r e^{-r^2} \\ \rho^\varphi(\varphi) &= \frac{1}{2\pi} \end{aligned} \tag{6}$$

Die letzte Gleichung sagt deutlich, dass das Phasenspektrum eines normalverteilten iid-Zeitreihenprozesses gleichverteilt ist.

■ **2.1.4 Wann ist das Phasenspektrum eines iid-Zeitreihenprozesses gleichverteilt?**

Hier werden wir nachweisen, dass der letzte Satz in gewisser Weise eindeutig umkehrbar ist. Ein iid-Zeitreihenprozess, der phasengleichverteilt ist, ist sicher normalverteilt. Wie oben gezeigt, darf für iid-Zeitreihen die Verteilungsdichte gespalten werden: $\rho(u, v) du dv = \rho^u(u) \rho^v(v) du dv$ (u und v sind nicht als identisch verteilt vorausgesetzt). Es gilt also:

$$\rho(u, v) du dv = \rho^u(u) \rho^v(v) du dv = \rho^r(r) dr \frac{d\varphi}{2\pi}$$

Mit $u=r \cos\varphi$ und $v=r \sin\varphi$ haben wir eine Funktionalgleichung:

$$\rho^u(r \cos \varphi) \rho^v(r \sin \varphi) = \frac{\rho^f(r)}{2\pi r} = f(r)$$

ist eine Funktion von r und nicht von φ . Das Logarithmieren liegt nah. Wir nehmen an, dass wir hier eine analytische Verteilungsfunktion haben und verwenden den Potenzreihenansatz:

$$\text{Log } \rho^u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n; \text{Log } \rho^v(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

$$\text{Es folgt: } \text{Log } f(r) = \text{Log } \rho^u(r \cos \varphi) + \text{Log } \rho^v(r \sin \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} r^n (a_n \cos^n \varphi + b_n \sin^n \varphi)$$

Die letzte Beziehung muss für alle r φ -invariant sein. Es folgt $a_n = b_n = 0$ für alle $n \geq 3$; $a_1 = b_1 = 0$; $a_2 = b_2$ und aus Normierungsgründen $a_0 = b_0$. Also sind \mathbf{u} und \mathbf{v} identisch verteilt. Sie sind sogar normalverteilt, denn der Logarithmus der Verteilungsfunktion ist quadratisch.

Nun haben wir gezeigt, dass jede Fourier-Komponente normalverteilt ist. Aus der inversen Transformation finden wir für den iid-Zeitreihenprozess eine endliche lineare Kombinationen normalverteilter Zufallsgrößen. Die Zufallsvariablen des Prozesses müssen dementsprechend auch normalverteilt sein.

Unser wichtiges Ergebnis (eine Antwort auf Frage **Q3**) ist:

Ein endlicher iid-Zeitreihenprozess ist genau dann exakt phasengleichverteilt, falls er normalverteilt ist.

Diese Aussage ist zugleich eine Antwort auf die Frage **Q1**: **Nein, nicht alle linearen Zeitreihenprozesse sind phasengleichverteilt.** Nichtnormalverteilte iid-Zeitreihenprozesse sind nach dem vorigen Satz sicher nicht phasengleichverteilt. Auch lineare normalverteilte Zeitreihenprozesse brauchen nicht phasengleichverteilt zu sein (besonders wenn sie kausal sind).

■ 2.1.5 Beispiel eines linearen normalverteilten Zeitreihenprozesses:

Wenn man ein Signal, x_t , der Länge N mit einem Filter, f_t , faltet, um ein anderes filtrierte Signal, y_t , der Länge N zu erhalten, kann man das anschaulich im Frequenzbereich als Multiplikation mit einer Transferfunktion verstehen. Im Phasenspektrum gibt es einen klaren Effekt: jede Phase des Signals wird um eine vom Filter bestimmten Wert verschoben. Also:

Im Zeitbereich:

$$y_t = f_t \otimes x_t$$

Im Frequenzbereich:

$$F[y_t] = Y_\mu = A_\mu^y \exp i \varphi_\mu^y = F[f_t \otimes x_t] = f_\mu X_\mu = A_\mu^f \exp i \varphi_\mu^f A_\mu^x \exp i \varphi_\mu^x$$

Es folgt: $\varphi_\mu^y = \varphi_\mu^f + \varphi_\mu^x$. Wenn wir nun die Zufallsvariablen φ_μ^y eines Zeitreihenprozesses betrachten, dann folgt für ihre Verteilungsdichte:

$$\rho_\mu^y(\varphi_\mu^y) d\varphi_\mu^y = \text{Wkt}[\varphi_\mu^y \in (\varphi_\mu^y, \varphi_\mu^y + (d \varphi)_\mu^y)] = \text{Wkt}[\varphi_\mu^x \in (\varphi_\mu^y - \varphi_\mu^f, \varphi_\mu^y - \varphi_\mu^f + (d \varphi)_\mu^y)]$$

Es folgt:

$$\rho_\mu^y(z) = \rho_\mu^x(z - \varphi_\mu^f) \quad (7)$$

Man würde denken, ein linearer Zeitreihenprozess ist die Faltung eines festen Filters mit einem iid-Zeitreihenprozess. In diesem Sinne erwartet man für normalverteilte Zeitreihenprozesse, dass die ursprünglichen gleichverteilten Phasen nach der Filtrierung nach (7) umverteilen, (d.h. auch gleichverteilt bleiben).

Vorsicht...Das stimmt nicht genau. Dieser Sachverhalt ist gültig, wenn die Länge der Zeitreihe mit der Faltung erhalten bleibt. Das, aber, impliziert eine zyklische Beziehung. Wenn die Länge des Filters $n+1$ ist, dann hängen die ersten n Glieder von $\{y_t\}$ von den letzten n Gliedern von $\{x_t\}$ ab. Die Kausalität der linearen Darstellung wird verletzt.

Für solche nichtkausale zyklische lineare normalverteilte Zeitreihenprozesse und für unendlich lange lineare normalverteilte Zeitreihen gilt die Phasengleichverteilung.

Das ist eine Teilantwort auf Frage: **Q2**.

Für kausale endliche normalverteilte lineare Zeitreihenprozesse gilt die Phasengleichverteilung im Allgemeinen **nicht**. Im Folgenden zeige ich diese Tatsache extrem deutlich in Grafiken.

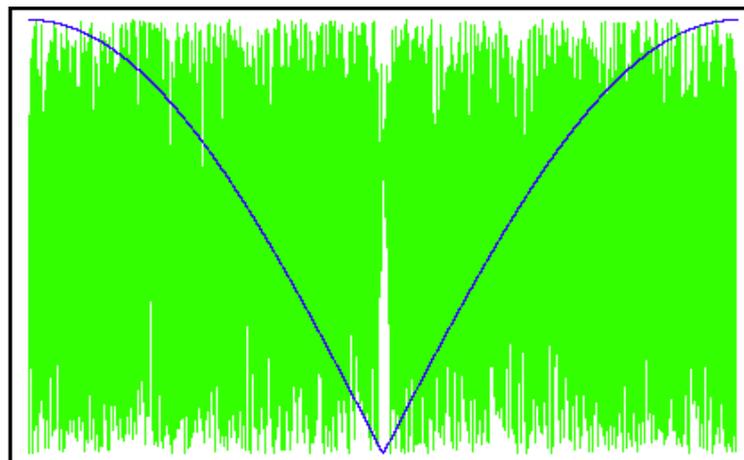


Figure 1

Abb.1: Das Phasenspektrum, $\vec{\varphi}$ (etwa 6000 verschiedene Phasen nebeneinander), einer Realisierung eines sehr einfachen gauß'schen MA-Prozesses 2. Ordnung mit $x_t = \eta_t + \eta_{t-2}$. Die Zeitreihe ist etwa 12000 Punkte lang ($3 \cdot 2^{12}$). Das Phasenspektrum, $\vec{\varphi}$, ist $(3 \cdot 2^{11} - 1)$ lang. Die Phasengleichverteilung ist dort am deutlichsten unmöglich, wo die Transferfunktion verschwindet. Mit der Transferfunktion meinen wir die Fourier-Transformation des FIR-Filters, f_t , mit dem der MA-Prozess produziert wird: $x_t = f_t \otimes \eta_t$ (hier ist $f_t = \{1, 0, 1\}$). Der Betrag der Transferfunktion wird in blau in einem anschaulichen Maßstab gezeichnet.

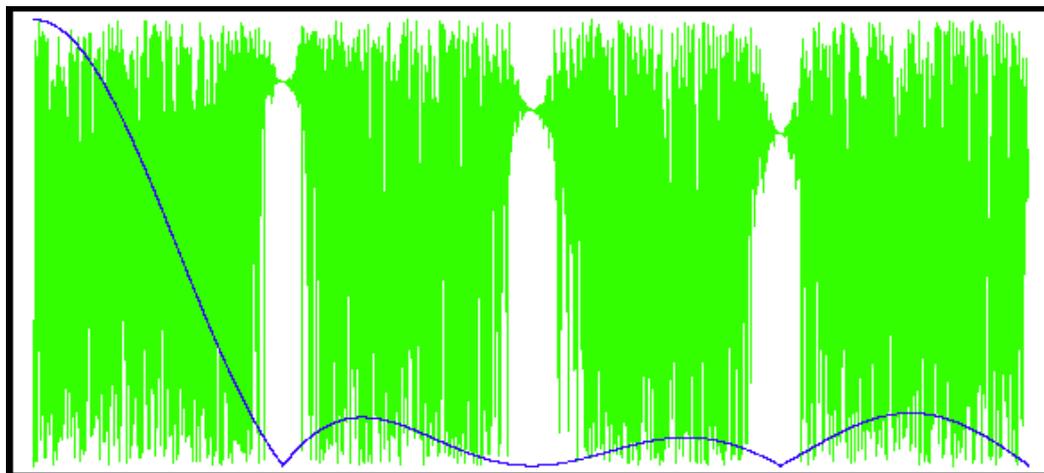


Figure 2

Abb.2: Das Phasenspektrum einer Realisierung eines gauß'schen MA-Prozesses 9. Ordnung. ($f_t = \{1, 0, 1\} \otimes \{1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1\}$). Die Abweichung von der Gleichverteilung ist sehr offensichtlich. Der Verlauf des Filters, f_t , im Frequenzbereich ist in einem passenden Maßstab betragsmäßig in blau gezeichnet.

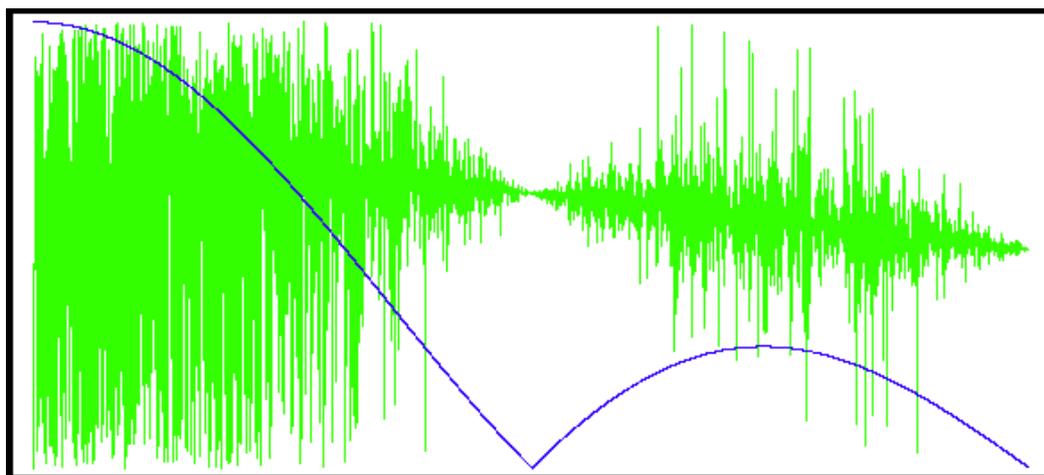


Figure 3

Abb.3: Das Phasenspektrum einer MA-Filterierung einer Realisierung des ARMA-Prozesses, x_t , der dem Barnes'schen Prozess # zugrunde liegt: $w_t = x_t + x_{t-1} + x_{t-2} + x_{t-3}$. Die Abweichung von der Gleichverteilung ist sehr offensichtlich. Der Verlauf des Filters, $\{1, 1, 1, 1\}$, im Frequenzbereich ist in einem passenden Maßstab betragsmäßig in blau gezeichnet. (Die Zeitreihe ist $(11 \cdot 2^{10})$ – Punkte lang, was ein Vielfaches der Grundperiode des Barnes'schen Prozesses ist).

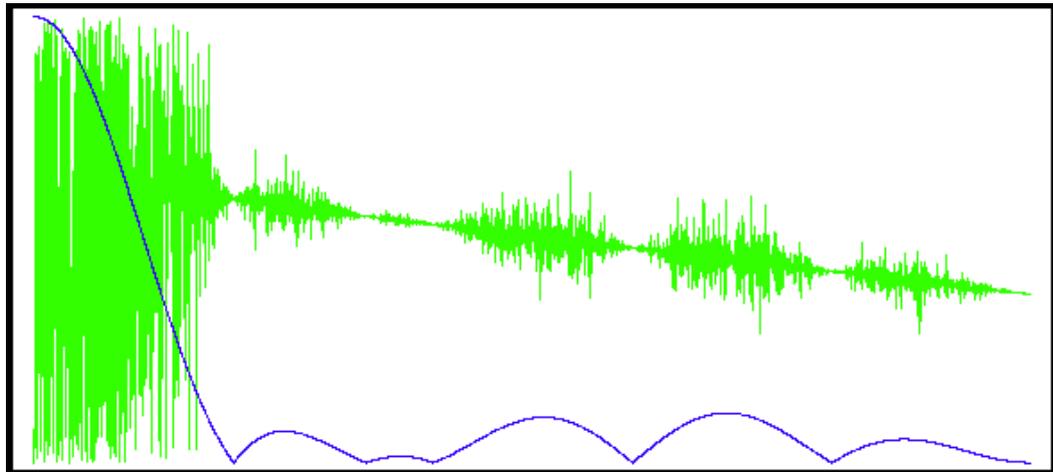


Figure 4

Abb.4: Das Phasenspektrum einer MA-Filtrierung einer Realisierung des ARMA-Prozesses x_t , der dem Barnes'schen Prozess # zugrunde liegt: $w_t = f_t \otimes x_t$. Die Abweichung von der Gleichverteilung ist sehr offensichtlich. Der Verlauf des Filters, $f_t = \{1, 0, 0, 1\} \otimes \{1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1\}$, im Frequenzbereich ist in einem passenden Maßstab betragsmäßig in blau gezeichnet. (Die Zeitreihe ist $(11 \cdot 2^{10})$ – Punkte lang, was ein Vielfaches der Grundperiode des Barnes'schen Prozesses ist).

Sind diese Beispiele vielleicht eher eine Ausnahme der Regel? Betrachten wir hier vielleicht sehr spezielle Filter (mit ganzen Zahlen)?

Nein. Das Phänomen ist verbreitet. Man kann die vorigen Filter in den Grafiken mit zufälligen Störungen modifizieren. Die Grafiken bleiben beeindruckend (wenn auch etwas weniger). Die Verletzung der Phasengleichverteilung braucht nicht so extrem deutlich zu sein. Mit dem bekannten χ^2 – Test auf Gleichverteilung habe ich 1000 Realisierungen des linearen x-Barnes-Zeitreihenprozesses (1-7) (ARMA-Prozess) der Länge 1980 (ein Vielfaches von 22, der Grundperiode des Barnes'schen Prozesses) auf Phasengleichverteilung geprüft. Nur 152 bestanden den Test. Bei den übrigen konnte mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von 2% ausgeschlossen werden, dass sie gleichverteilt sind. Bei einer Länge, die kein Vielfaches der Grundperiode ist, fällt die Fehlquote etwas höher. Bei weniger scharfen Gipfeln im Amplitudenspektrum der Zeitreihe verhält sich das Phasenspektrum gleichmäßiger.

Ich möchte zum Abschluss dieses Punktes ein einfaches Beispiel einer nicht-gleichverteilten Phase zeigen. Ich betrachte den einfachsten nichtrivialen Fall einer normalverteilten MA(1)-Zeitreihenprozess, und zwar der Länge 3. Der Prozess ist $\{x_1, x_2, x_3\}$ mit $x_t = u_t + u_{t-1}$. Der Zeitreihenprozess $\{u_0, u_1, u_2, u_3\}$ ist iid und normalverteilt mit $N[0,1]$. Die Phase φ ist:

$$\varphi = \arctan \frac{\sqrt{3}(u_1 - u_3)}{2u_0 + 3u_1 + 2u_2 + u_3} \quad (\text{Bemerkung: Im zyklischen Fall gilt } u_0 = u_3, \text{ und } \varphi \text{ ist gleichverteilt}).$$

Man kann im Prinzip versuchen, ein 3-faches Integral zu lösen, um eine analytische Form der Verteilungsdichte von φ zu erhalten. Schneller geht es numerisch:

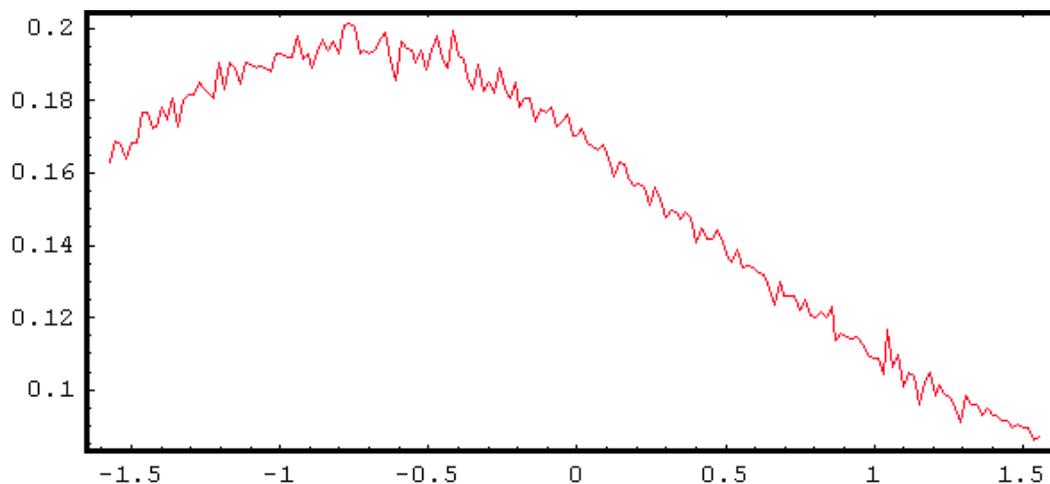


Figure 5

Abb. 5: Die Verteilungsdichte der einzigen nichttrivialen Phase eines normalverteilten MA(1)-Zeitreihenprozesses ($x_t = u_t + u_{t-1}$) der Länge 3. Die Winkel wurden in einem Intervall zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $\frac{\pi}{2}$ betrachtet. Die numerische Darstellung entstand mit einer Simulation von 1000000 Phasen.

■ 2.1.6 Sehr lange Zeitreihen

Wir fanden vorher, dass unendlich lange lineare gauß-verteilte Zeitreihenprozesse phasengleichverteilt sind. Wie ist es denn mit unendlichen nicht-gauß'schen Zeitreihenprozessen?

Jede Fourier-Komponente eines N-langen iid-Zeitreihenprozesses ist eine lineare Kombination von N iid-Zufallsvariablen. Nach dem zentralen Grenzwertsatz sind die Fourier-Komponenten für sehr großes N ungefähr normalverteilt. Das legt nahe, dass die Phasenverteilungen gleichverteilt werden. Diese Aussage ist nicht exakt. Im Allgemeinen gilt:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \vec{\varphi}[\{\mathbf{u}_t\}_{t=1}^N] \neq \vec{\varphi}[\lim_{N \rightarrow \infty} \{\mathbf{u}_t\}_{t=1}^N]$$

Betrachten wir einige Symmetrie-Eigenschaften der Verteilungsdichten des Phasenspektrums von iid-Zeitreihenprozessen. Es sei $\{\mathbf{u}_t\}_{t=1}^N$ ein iid-Zeitreihenprozess der Länge N. $\{u_1, u_2, u_3, \dots, u_{N-2}, u_{N-1}, u_N\}$ sei eine Realisierung des Prozesses. Die Zufallsvariable φ_μ nimmt die Werte

$$\theta = \text{Arg}\left[\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{t=1}^N u_t \exp \frac{2\pi i(t-1)(\mu-1)}{N}\right]$$

ein. Ihre Verteilungsdichte, $\rho^\mu(\theta) = \rho^\mu(u_1, u_2, u_3, \dots, u_{N-2}, u_{N-1}, u_N)$, beschreibt die Wahrscheinlichkeit dafür, dass φ_μ den Wert θ einnimmt. Weil $\{\mathbf{u}_t\}$ iid-Prozess ist, sind alle Permutationen einer Realisierung genauso wahrscheinlich.

$$\rho^\mu(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \dots, \mathbf{u}_{N-2}, \mathbf{u}_{N-1}, \mathbf{u}_N) = \rho^\mu(\text{Permutation}[\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \dots, \mathbf{u}_{N-2}, \mathbf{u}_{N-1}, \mathbf{u}_N])$$

Eine einfache Permutation ist die Rotation um T Stellen nach rechts. Nach einer Rotation um T Stellen ist die eingenommene Phase

$$\theta^T = \text{Arg}\left[\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{t=1}^N u_{t-T} \exp \frac{2\pi i(t-1-T)(\mu-1)}{N}\right] =$$

$$\text{Arg}\left[\exp \frac{2\pi i T(\mu-1)}{N} * \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{t=1}^N u_{t-T} \exp \frac{2\pi i(t-1-T)(\mu-1)}{N}\right] = \theta + \frac{2\pi T(\mu-1)}{N}$$

Also gilt:
$$\rho^\mu(\theta) = \rho^\mu\left(\theta + \frac{2\pi T(\mu-1)}{N}\right) \quad (8)$$

Die Verteilungsdichte der μ -ten Phase, $\rho^\mu(\theta)$, eines iid-Zeitreihenprozesses ist periodisch. Die Grundperiode beträgt $2\pi \text{gcd}[\mu-1, N]/N$. Mit gcd wird der größte gemeinsame Teiler gemeint. Das bedeutet, dass $\rho^\mu(\theta)$ (für fast alle μ) den χ^2 -Test auf Gleichverteilung mit fester Anzahl der Intervalle besteht. In diesem Sinn ist eine lange iid-Zeitreihe praktisch phasengleichverteilt. Diese Aussage gilt sicher nicht, wenn die Anzahl der Intervalle im χ^2 -Test mit N steigt.

Als kleine Hilfe zur Beantwortung der Frage **Q2** sei die folgende interessante Anwendung des Phasensignals.

■ **2.1.7 Nachweis der Nichtgleichverteilung des Phasenspektrums nicht-Gauss'scher iid-Zeitreihen auch bei sehr langen Zeitreihen. Anwendung des Phasensignals**

Eine interessante Anwendung des Phasensignals liegt in theoretischen statistischen Untersuchungen der Wahrscheinlichkeitstheorie. Ein interessantes Problem ist die Frage nach der Verteilung der Phasen im Phasenspektrum einer iid-Zeitreihe. Man kann ziemlich leicht beweisen, dass endliche iid-Zeitreihen nur dann phasengleichverteilt sind, falls sie gaußverteilt sind. Nichtgauß'sche iid-Zeitreihen sind bei genügender Länge "praktisch" phasengleichverteilt, denn die Phasenwahrscheinlichkeitsdichte ist periodisch, und die Grundperiode ist zur Länge der Zeitreihe invers proportional (das zeige ich woanders#). Also steht fest, dass ein χ^2 -Test auf Phasengleichverteilung mit einer festen Anzahl der Intervalle sicher die Gleichverteilung akzeptiert, wenn die Länge der Zeitreihe gegen unendlich geht. Merken Sie bitte, dass die Anzahl der Intervalle im χ^2 -Test fest bleibt. Es ist interessant zu wissen, ob für unendliche Zeitreihen die Phasengleichverteilung gilt. Ich werde mit Hilfe des Phasensignals einen Nachweis (keinen Beweis aber) für die Ungültigkeit der Annahme der Phasengleichverteilung erbringen. Ich werde numerisch zeigen, dass *fbampq* mit Verlängerung der Zeitreihe ihre Form nicht ändert, und dass diese Form eine gewisse Signatur der jeweiligen Verteilung ist. Hier zeige ich die Signatur der Gleichverteilung. Sie hat 5 Hügelchen und ist sicher anders als die bekannte (linear fallende) Signatur der Normalverteilung.

Funktionen von Gauß'schen iid-Zufallsvariablen sind auch iid-Zufallsvariablen. Betrachten wir zum Beispiel Kubiken von Gauß'schen Zufallsvariablen. Im Vergleich zur Gauß'schen Verteilung ist die Verteilung der sogenannten "Gauß-Kubiken" stumpfer mit größerer Kurtosis.

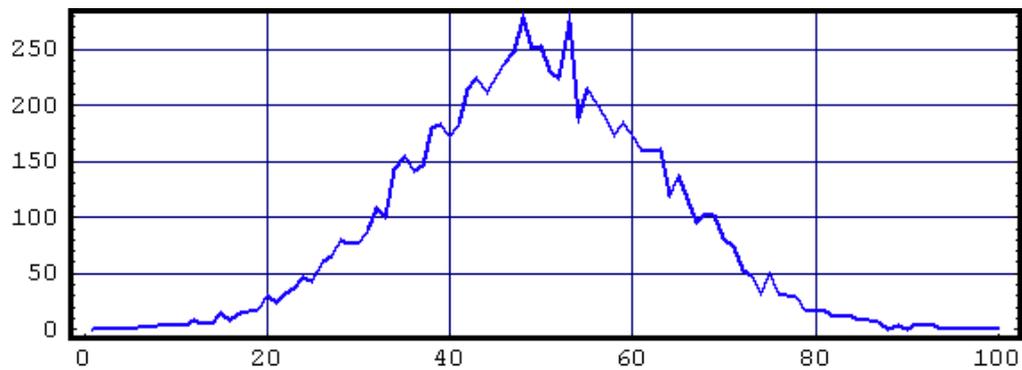


Figure 6

Abb.6: Histogramm der Gauß-iid-Zeitreihe

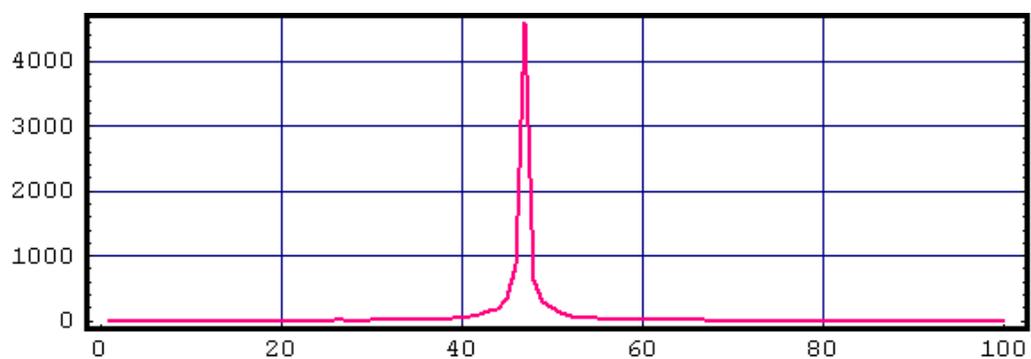


Figure 7

Abb.7: Histogramm der mit der dritten Potenz skalierten Gauß-iid-Zeitreihe. Die jetzige Zeitreihe ist noch iid, ist aber nicht mehr Gauß-förmig. Wir nennen ihre Zufallsgrößen Gauß-Kubiken.

Der Standardtest auf Phasengleichverteilung ist der χ^2 -Test des Histogramms des Phasenspektrums. Wir erweitern den Test auf die Phasendifferenzen n-ter Ordnung, die wegen der Unabhängigkeit der Phasen untereinander auch gleichverteilt sein sollen. Insbesondere ist die erste Phasendifferenz von großer Signifikanz. Bei einer Länge von 2000 ist der χ^2 -Test ineffektiv für die Zeitreihe der iid-Gauß-Kubiken:

$$\{0.471112, 0.422638, 0.625031, 0.8031, 0.703409\}$$

Das waren die Tests des Phasenspektrums und seiner ersten 4 Differenzen. Die angegebenen Werte sind die Irrtumswahrscheinlichkeiten für die Ablehnung der Phasengleichverteilung im jeweiligen Test. Nur Werte, die kleiner sind als 0.05 kommen in Frage.

Mit Hilfe des Phasensignals können wir sehr signifikant zeigen, dass auch viel längere Zeitreihen der iid-Gauß-Kubiken nicht phasengleichverteilt sein können. Hier zeigen wir dies für die Länge 2^{16} :

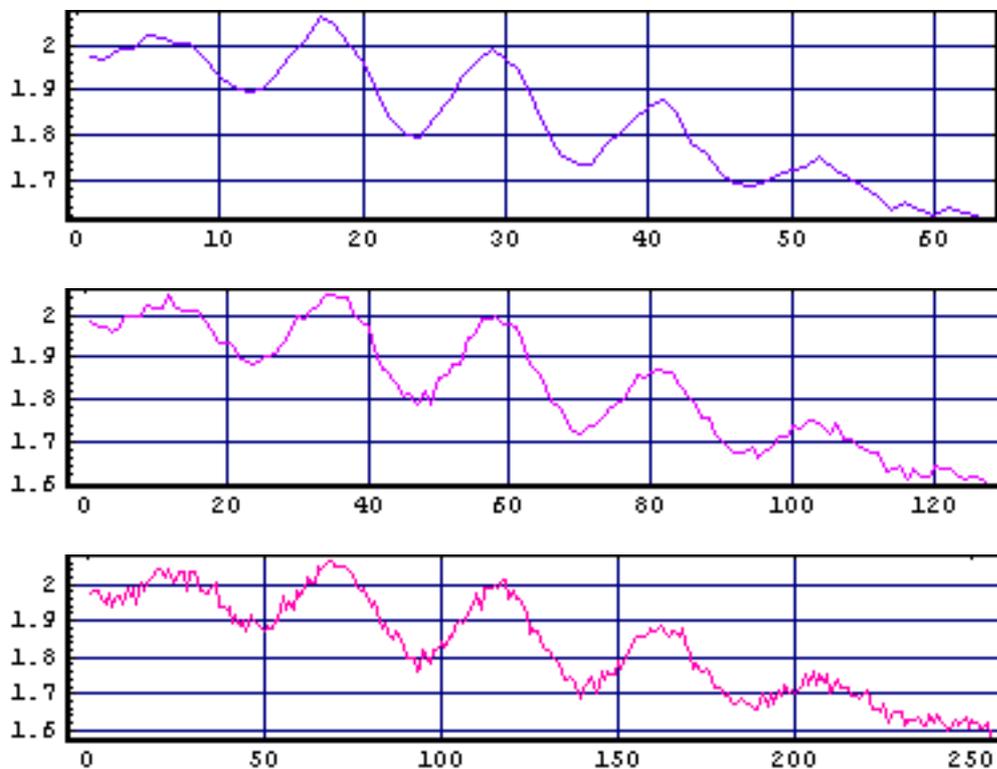
```
{5.53078, 5.76202, 6.58162, 7.05799, 11.1354, 11.1246,
 11.0763, 11.2257, 11.449, 11.1031, 11.1524, 10.7521, 10.6741,
 10.5534, 8.89958, 8.6183, 8.13147, 7.90025, 7.91126,
 7.89875, 7.6357, 8.2515, 9.02995, 8.7203, 8.82656, 8.43345,
 8.2989, 8.52519, 8.52506, 8.98548, 9.10396, 9.48832}
```

```
{12.0725, 6.98865, 7.20168, 6.57783, 8.23508, 8.20679,
 8.47079, 8.229, 7.65972, 7.32918, 7.5683, 8.61084, 8.12609,
 9.25365, 9.53076, 9.52974, 9.27241, 9.03865, 9.27453,
 9.16774, 10.1156, 10.3538, 10.3723, 10.0327, 9.80263,
 9.74519, 9.8061, 9.55527, 9.46585, 9.40395, 9.31416, 9.48832}
```

In 64 verschiedenen praktisch unabhängigen Tests haben wir mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von maximal 4×10^{-5} die Gleichverteilung abgelehnt. Das ist sehr signifikant!!

Bei anderen Verteilungen die kleinere Kurtosis haben als die Gauß-Verteilung klappt diese Methode nicht ganz einfach mit einer einzigen Realisierung der Verteilung. Mit Vielen Realisierungen kann man aber eine empirische Phasensignal-Verteilung für die untersuchte Zeitreihe finden und den signifikanten Unterschied zu den Gauß-Verteilungen nachweisen.

Z.B. untersuchen wir hier die Gleichverteilung. Wir zeigen hier den Erwartungswert für die empirische Phasensignal-Verteilung einer iid-Zeitreihe aus 2^n gleichverteilten Zufallsgrößen ($n=9, 10, 11, 12, 13$).



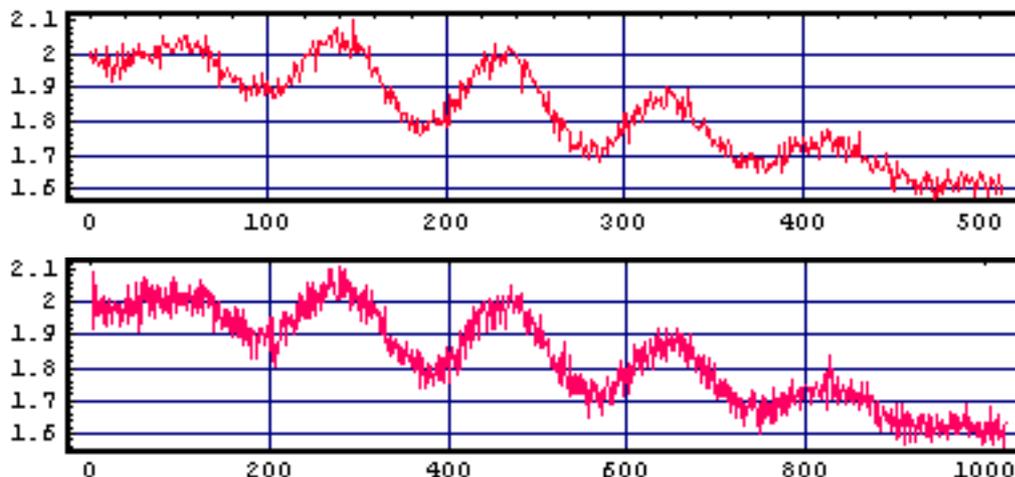


Figure 8

Abb.8: Das ist schön!!! diese 5 Hügeln findet man nicht in der iid-Zeitreihe der Gauß-verteilter Zufallsgrößen!! (Die Grafiken sind für die verschiedenen n im Grunde identisch, die Mittelung ist aber für größeres n schlechter, weil hier weniger Realisierungen zur Verfügung stehen). Eins steht fest, eine Zeitreihe unabhängiger gleichverteilter Zufallszahlen ist nicht phasengleichverteilt. Ihr Phasensignal hat eine innere Struktur.

Bemerkung: Der Erwartungswert von fbampq (bzw. fbampq^2) eines iid-Prozesses scheint eine Art "Unterschrift" des Prozesses zu sein. Am interessantesten ist der Frequenzbereich bis zur Hälfte der Nyquist-Frequenz (d.h. $\nu = 0.25$). Die Bernoulli-Verteilung hat eine andere "Unterschrift" (ungefähr ein Bogen) als die Normalverteilung (eine fallende Linie), und diese eine andere als die Gleichverteilung (5 Hügeln).usw. Es scheint interessant zu sein, diese "Unterschriften" zu studieren.

■ 2.1.8 Ist der Theiler-Prozess linear?

Wir wissen schon, dass eine endliche iid-Zeitreihe genau dann exakt phasengleichverteilt ist, wenn sie normalverteilt ist. Die fourier-basierten Surrogate sind nach Konstruktion eine Faltung eines Amplitudensignals mit phasengleichverteilten Innovationen (deren Amplitudenspektrum identisch 1 ist). Sind diese Innovationen denn normalverteilt?

An die Konstruktion dieser Innovationen für eine gerade Länge des Zeitreihenprozesses wird jetzt erinnert:

Es werden $\mathbf{n} = \frac{N}{2} - 1$ gleichverteilte Zufallsvariablen (Phasen) in der folgenden Form angeordnet:

$$\mathbf{Q} = \{ \mathbf{1}, e^{i\varphi_1}, e^{i\varphi_2}, \dots, e^{i\varphi_{n-1}}, e^{i\varphi_n}, \mathbf{1}, e^{-i\varphi_n}, e^{-i\varphi_{n-1}}, \dots, e^{-i\varphi_2}, e^{-i\varphi_1} \} \quad (9)$$

Und dann wird das so erhaltene Fourierspektrum zurücktransformiert mittels:

$$\mathbf{q}_t = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\mu=1}^N \mathbf{Q}_\mu e^{-2\pi i(t-1)(\mu-1)/N}. \quad (10)$$

Nennen wir den Zeitreihenprozess, der diese Innovationenzeitreihen produziert, den Quasi-Gauß-Prozess. Es stellen sich die Fragen: ist der quasi-Gauß-Prozess ein echter Gauß-Prozess (d.h. normalverteilt)? Ist er linear? Ist er iid?

Es muss bemerkt werden, dass die Phasengleichverteilung zur Begründung der angeblichen Gauß'izität der Fourier-basierten Surrogaten (á Theiler) nicht ausgenutzt werden darf. Denn eine Zeitreihe (aus "Quasi-Gauß-Zufallszahlen"), die z.B. $2N$ lang ist, und deren Phasenspektrum gleichverteilt ist, aber deren Amplitudenspektrum identisch 1 ist, ist gar keine iid-Zeitreihe. Man bemerke, diese $2N$ Zufallsvariablen werden eindeutig durch $N-1$ Phasen bestimmt. Die Abhängigkeit der Zufallsvariablen untereinander ist sicher und die Anwendbarkeit des obigen Satzes ist nicht zugelassen. D.h. $\{q_t\}_{t=1}^N$ ist weder iid noch linear noch exakt normalverteilt (praktisch normalverteilt für genügend lange Zeitreihen wegen des Zentralgrenzwertsatzes).

Genauso lässt sich der Theiler-Prozess nicht als lineare Kombination von iid-Zufallszahlen darstellen. Der Theiler-Prozess ist kein linearer Zeitreihenprozess. Vielmehr gehört der Theiler-Prozess zu der Klasse der stationären harmonischen Prozessen, bei denen die Anzahl der Harmoniken eine dynamische Eigenschaft des Systems ist. Ein harmonischer Zeitreihenprozess ist eine Gesamtheit von harmonischen Zeitreihen, die aus einer endlichen Summe von harmonischen Schwingungen besteht, wobei die Anfangswerte statistisch verteilt sind. Ein harmonischer Zeitreihenprozess ist diskret und zählt nach dem Wold'schen Theorem [Anhang C2] nicht zu den Kandidaten der linearen stochastischen Prozesse. Denn die künftigen Werte des Prozesses können aus den vergangenen Werten exakt berechnet werden. (Nebenbei sei gesagt, es ist nicht schwer zu zeigen, dass für einen harmonischen Prozess: $\mathbf{x}_t = \mathbf{a} \cos \omega t + \mathbf{b} \sin \omega t$ eine notwendige (und unter weiteren Voraussetzungen) eine hinreichende Bedingung für die Stationarität des Prozesses die Gleichverteilung der Phase $\varphi = \arctan \frac{b}{a}$ ist.)

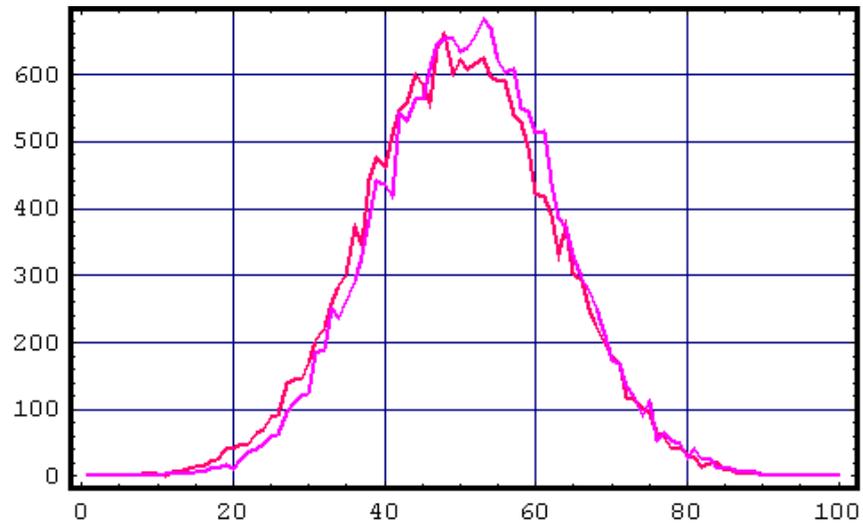


Figure 9

Abb.9: Das Histogramm von 20000 Quasi-Gauß-Zufallszahlen ist dem entsprechenden Gauß'schen Histogramm sehr ähnlich. Genügend lange Zeitreihen aus Quasi-Gauß-Zufallszahlen sind (nach dem Zentralgrenzwertsatz) normalverteilt.

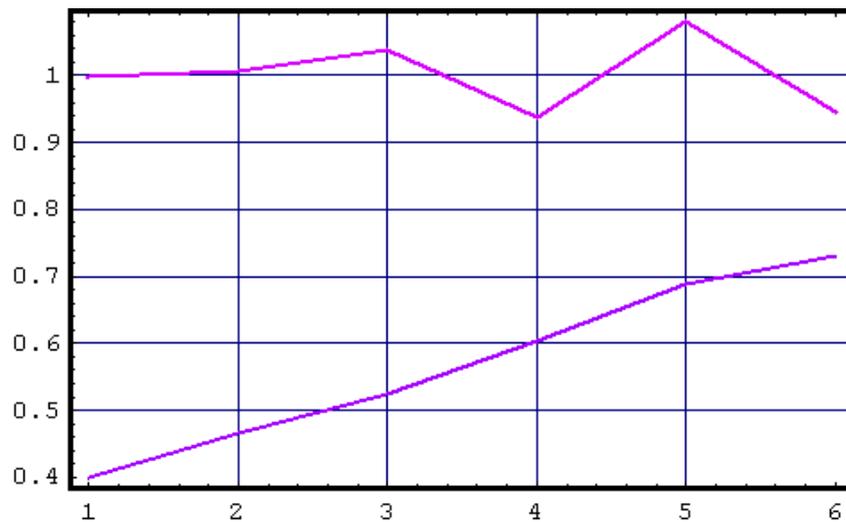


Figure 10

Abb. 10: Vergleich zwischen echten Gauß-iid-Zahlen und Quasi-GaußGauß-iid-Zahlen á Theiler: Die Standardabweichung der Autokorrelationsfunktion der Zeitreihen nach Abschneiden von 100 bis 600 Punkten ist ziemlich konstant (=1) bei den richtigen iid-Zahlen. Anders sieht es aus mit den Quasi-iid-Zahlen á Theiler. Die Standardabweichung ist immer kleiner als die der iid-Zahlen. Sie ist nicht konstant, sondern vergrößert sich um so mehr, je mehr von der Zeitreihe abgeschnitten wird. Das zeigt nochmal, dass die Länge der Zeitreihe eine Konstante der Dynamik des Systems ist.

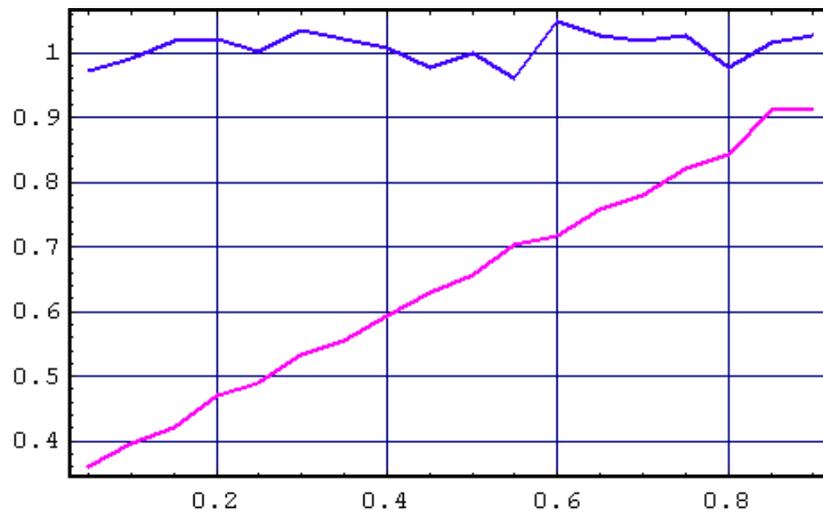


Figure 11

Abb.11: Die Standardabweichung der Autokorrelationsfunktion der abgeschnittenen Zeitreihen der echten und Quasi-Gauß-iid-Zahlen. Die x- Achse zeigt das Verhältnis des weggeschnittenen Teils der ursprünglichen Zeitreihe. Man sieht, das nichtorthodoxe Verhalten der Quasi-iid-Zahlen ist persistent, unabhängig von der ursprünglichen Länge der Zeitreihe. Hier ist die ursprüngliche Länge 2048 (doppelt so groß wie im vorigen Diagramm). Die Quasi-iid-Zahlen werden nicht Gauß-ähnlicher, wenn man die grundlegende Länge vergrößert. (Ein Zentralgrenzwertsatz in diesem Sinne gibt es nicht).

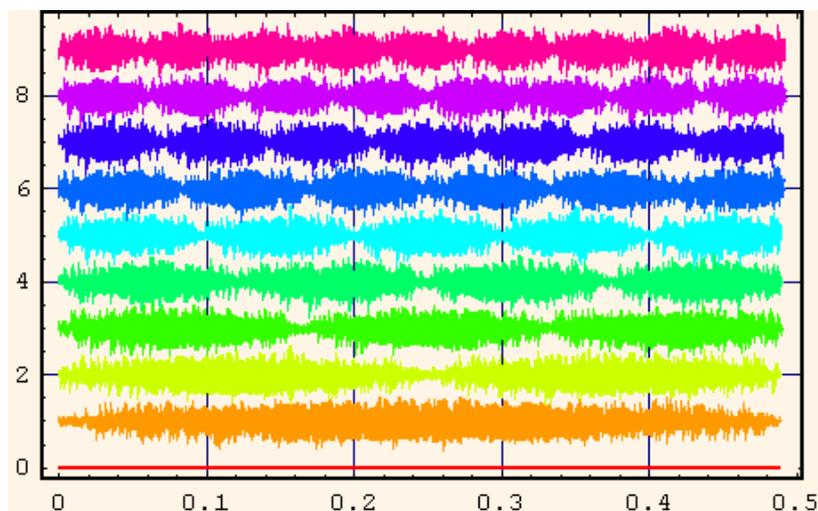


Figure 12

Abb.12: **Das Amplitudenspektrum der Quasi-Gauß-iid-Zufallszahlen, nachdem $2n$ Punkte vom Anfang abgeschnitten wurden (y-Abzisse: n).** Das Mittel des Amplitudenspektrums ist immer=1 (die ursprüngliche Quasi-Gauß-Zeitreihe unten hat ein Amplitudenspektrum identisch 1- rot unten). Das Maximum ist <2 . Es gilt: es entstehen periodisch genauso viele Populationen im gesamten Frequenzbereich (also bis 1...In der Grafik wird nur der positive Anteil bis 0.5 gezeigt) wie die Anzahl der abgeschnittenen Punkte. Dieses Verhalten ist unabhängig von der ursprünglichen Länge der Zeitreihe. Nochmals wird gezeigt, dass sich diese Zahlen von den echten Gauß'schen Zufallszahlen grundlegend unterscheiden. Für den Wert des Amplitudenspektrums von iid- $N[0,1]$ -verteilten Zufallszahlen gilt eine konstante Varianz=1 für alle Frequenzen.

Die Antwort auf Frage **Q4** lautet: **Der Theiler-Prozess, der die fourier-basierten Surrogate einer bestimmten Zeitreihe der Länge N produziert, ist kein linearer Prozess. Aber er ist stationär.**

Aber bevor man zu falschen Schlussfolgerungen kommt, beantworte ich die Frage **Q5**: Obwohl der Prozess an sich nicht linear ist, ist eine typische Realisierung des Theiler-Prozesses zugleich eine typische Realisierung eines linearen Prozesses. Denn es gibt keine Eigenschaft in der Zeitreihe, die nichtlinearer Natur ist. Das Phasenspektrum ist ganz informationslos. **In diesem Sinn sind die fourier-basierten Surrogate linear.**

■ 2.1.9 Zusammenfassung

In diesem Abschnitt wurde gezeigt, die Annahme, dass lineare Zeitreihenprozesse phasengleichverteilt sein sollen, nur für uninteressante Spezialfälle (normalverteilte iid-Zeitreihenprozesse und zirkulare nichtkausale lineare Filtrierungen davon) exakt gilt. Viele Realisierungen linearer Zeitreihenprozesse würden einen Test auf Nichtlinearität mit fourier-basierten Surrogaten nicht bestehen. Sie würden für nichtlinear gehalten. Das ist eine große Schwäche der Methode.

■ 2.2 Operationelle Begriffe

■ 2.2.0 Vorwort

In diesem Abschnitt werden versuchsweise einige nicht gerade exakte Begriffe eingeführt, die hoffentlich in der Praxis mit Zeitreihen nützlich sind, wenn man der Zeitreihe Attribute verleihen will, die in Beziehung zu Prozessattributen stehen. Insbesondere werden hier Linearität und Stationarität für Zeitreihen operationell eingeführt.

■ 2.2.1 Was heißt lineare Zeitreihe?

linear \leftrightarrow theiler-linear

Die Linearität ist eine Eigenschaft eines stochastischen Prozesses. Also ist die Linearität zuerst mal kein Attribut für eine konkrete Zeitreihe. Man möchte aber diesen Begriff auch für die Zeitreihen verwenden dürfen, die typische Realisierungen von linearen Prozessen sind. Zuerst untersuchen wir, ob und wie diese Fragestellung für unendliche Zeitreihen Sinn macht. Erklärungsbedürftig in dieser Fragestellung ist: was heißt "typisch"?

Im folgenden betrachten wir zuerst normalverteilte Zeitreihenprozesse. Im unendlichen Fall haben lineare Zeitreihen eine wichtige Eigenschaft: das Phasenspektrum, falls dies irgendwie passend definiert wird, ist gleichverteilt. Die Gleichverteilung kann dann genügend gut mit Hypothesentests geprüft werden. Andererseits kann man das Leistungsspektrum genügend gut abschätzen. Das Leistungsspektrum enthält alle nötigen linearen Eigenschaften und entspricht eindeutig einem MA-Prozess (Null-Phasen-Filter). Nun kann man die Hypothese prüfen, ob die zu untersuchende Zeitreihe eine Realisierung dieses MA-Prozesses ist. Das vorige "typisch" wird durch die Irrtumswahrscheinlichkeit des Hypothesentests erklärt.

Also haben sich im unendlichen Fall zwei verschiedene Zugänge vorgeschlagen, mit deren Hilfe entschieden werden kann, ob eine Zeitreihe linear ist. Der erste Zugang prüft unabhängig von jeder Beschränkung durch konkrete Modellierung die Daten direkt und wird deswegen als "**Datenzugang**" bezeichnet. Der zweite Zugang modelliert die Zeitreihe mit Hilfe der Klasse der linearen MA-Modelle (das darf erweitert werden auf AR- oder ARMA-Modelle) und heißt der "**Modellierungszugang**".

Nun stellt sich die Frage, ob sich diese beiden Zugänge auf endliche Zeitreihen anwenden lassen. Zwei Probleme treten sofort auf. Zuerst sind lineare stationäre Zeitreihen nicht phasengleichverteilt. Zweitens gibt es eine Beschränkung beim Auffinden des richtigen Modells, weil die zur Bestimmung des Modells zur Verfügung stehenden Datenmenge beschränkt ist. Zuerst führen wir den Begriff des Misch-Linear-Prozesses ein.

Grob gesagt ist ein **Misch-Linear-Prozess** ein Zeitreihenprozess (eine Gesamtheit von Realisierungen (Zeitreihen) mit entsprechenden Wahrscheinlichkeitsverteilungen), dessen Realisierungen auch als typische Realisierungen von linearen Zeitreihenprozessen zu betrachten sind. Misch-Linear-Prozesse sind nicht linear (als Prozess), bestehen aber ausschließlich aus linearen Zeitreihen. Ein Gemisch aus verschiedenen linearen Prozessen mit einem variablen Gewicht ist ein Beispiel.

Misch-Linear-Prozesse werden durch ihre Realisierungen definiert und werden später in Surrogattests verwendet, um die Linearität von Zeitreihen zu prüfen. Deswegen muss man die Mischlinearität einiger speziellen Prozesse feststellen, bevor man diese in den Surrogattests anwenden darf. Man kann zeigen, dass der Prozess, der fourier-basierte Surrogaten produziert, der **Theiler-Prozess**, Misch-Linear-Prozess ist. Denn dieser Prozess produziert typischerweise ausschließlich Zeitreihen mit informationslosem Phasenspektrum. Obwohl lineare Eigenschaften für endliche Zeitreihen auch im Phasenspektrum (z. B. die Beschränktheit des Phasenspektrums in der Nähe von Nullstellen des Amplitudenspektrums) zu finden sind, ist das Umgekehrte für die rein nichtlinearen Eigenschaften immer unmöglich. Das Amplitudenspektrum enthält keine rein nichtlinearen Informationen.

Wichtig ist zu bemerken, dass die Realisierungen des Theiler-Prozesses spezielle lineare Zeitreihen sind, die eine bestimmte Eigenschaft haben. Wir nennen diese spezielle Eigenschaft **Theiler-Linearität** der Zeitreihen. Theiler-lineare Zeitreihen sind linear. Lineare Zeitreihen sind nicht unbedingt theiler-linear.

Von großer Bedeutung ist es, einen neuen Misch-Linear-Prozess zu konstruieren, der die allgemeineren linearen Surrogate produziert. Wir konstruieren diesen Prozess als die mit den entsprechenden Wahrscheinlichkeiten gewichtete Mischung der verschiedenen in Frage kommenden linearen Modelle. Das ist eine gewisse Verallgemeinerung des Modellierungszugangs. Wir fügen hinzu, dass unsere praktische Erfüllung dieser allgemeinen Surrogatmethode keine konkrete Modellierung sichtbar macht. Wenn man die Erklärung unserer Surrogatmethode weiter unten liest, wird man einsehen, dass diese Methode effektiv beide Zugänge vereint.

Da dieser allgemeine Misch-Linear-Prozess, viel größer ist als der Theiler-Prozess und diesen sogar ganz enthält, ist klar, dass die **Leistung** (Power) des Tests gegen diesen Prozess kleiner ist, als die Leistung des Tests gegen den Theiler-Prozess. Die Feststellung der Nichtlinearität der Zeitreihe

wird aber so glaubwürdiger. Eine Kombination beider Tests ist am vernünftigsten. Zuerst wird die zu untersuchende Zeitreihe auf Theiler-Linearität geprüft. Falls diese Hypothese nicht widerlegt werden kann, dann ist die Zeitreihe auch linear. Wenn die Zeitreihe signifikanterweise nicht theiler-linear ist, dann wird sie mit Hilfe unserer Surrogate auf Linearität geprüft.

■ 2.2.2 Was heißt stationäre Zeitreihe?

Die Stationarität ist eine Eigenschaft des Prozesses. Wir begründen hier eine Ad-Hoc-Definition für einen operationellen Begriff der schwachen Stationarität einer Zeitreihe (nicht eines Prozesses). Eine "operationell schwach stationäre" Zeitreihe ist eine Zeitreihe, deren Momente 4. Ordnung, die als Varianzen von in Teilintervallen lokal abgeschätzten Momenten 2. Ordnung gefasst werden können, sich von den entsprechenden Momenten der linearen stationären Surrogate dieser Zeitreihe nicht signifikant unterscheiden. Ein signifikanter Unterschied in diesen Momenten kann sowohl als Zeichen der Nichtlinearität als auch der schwachen Instationarität gefasst werden. Eine bestimmte vorgegebene charakteristische Skala soll bestimmen, ab welcher Länge der Teilintervalle der Zeitreihe die signifikanten Abweichungen für Instationaritätseffekte (und nicht für Nichtlinearitätseffekte) gehalten werden. Wenn schwache Instationarität festgestellt wird, dann kann mit Hilfe geeigneter schwach instationärer linearer Surrogate bestimmt werden, ob die Zeitreihen noch nichtlinear sind. Z.B. ist die Länge der zu prüfenden Zeitreihe 2000. Vorgegeben ist eine charakteristische Länge von 1000. Die Teststatistik sei die Varianz der Varianzen in disjunkten Teilintervallen der Länge 2000. Eine signifikante Abweichung von den entsprechenden Werten der Surrogate wird als Nachweis schwacher Instationarität verstanden (nicht aber wenn die Länge der Teilintervalle (z.B. 100) kleiner ist, als die vorgegebene charakteristische Skala).

Der Begriff der starken Instationarität ist für uns nicht von großer Bedeutung. Die starke Instationarität ist garantiert vorhanden, falls die schwache Instationarität festgestellt wird. Beim Nichtvorhandensein der schwachen Instationarität gibt es kein Problem für die Feststellung der Nichtlinearität einer Zeitreihe, wenn die starke Instationarität angenommen wird. Denn diese Art von Instationarität tritt in den höheren Momenten auf und ist keine Widerspiegelung einer Instationarität der ersten oder zweiten Momente. D.h. sie bestätigt die Existenz unabhängiger höherer Momente, was auch Nichtlinearität heißt. Die Frage ob die zu untersuchende Zeitreihe nur nichtlinear oder nichtlinear und zugleich instationär ist, bleibt eine Überzeugungsfrage.

Die Konstruktion geeigneter instationärer Surrogate wird durch eine kleine Modifikation unserer Surrogatmethode erreicht. Ein laufender Filter wird statt des festen Filters verwendet. Mehrkomponentige Zeitreihen können auch behandelt werden. Die Rechenzeit ist aber ziemlich länger, als die entsprechende Zeit bei der Konstruktion der stationären Zeitreihen.

Wir haben auch eine andere Kategorie von Surrogaten erfunden, die zugleich nichtlinear und instationär ist. Diese kann für eine Verallgemeinerung der Theiler-Surrogate gehalten werden. Ein Theiler-Surrogat einer Zeitreihe der Länge N kann man nämlich auch als die Faltung der Zeitreihe mit einem *All-Phase-Filter* der Länge N betrachten. Ein All-Phase-Filter hat ein Amplitudenspektrum, das identisch 1 ist. Unsere Verallgemeinerung lässt andere Filter zu, die eine andere Länge haben und im Durchschnitt ein Amplitudenspektrum $=1$ haben. Ein solches Surrogat behält im Durchschnitt die Autokorrelation der ursprünglichen Zeitreihe und ist nach Definition eine lineare

Kombination von Rotationen der ursprünglichen Zeitreihe. Im Prozess-Sinn ändert das nichts von der Nichtlinearitäts- und Nichtstationaritätseigenschaft des Prozesses. Im operationellen Sinn findet man, dass diese Surrogate ab eine bestimmte charakteristische Filterlänge linear werden. Das Theiler-Surrogat (das gewöhnliche fourier-basierte Surrogat) ist ein Spezialfall und ist sicher linear.

■ 2.3 Unsere Konstruktionsmethode

■ 2.3.1 Misch-Linear-Prozesse

Von großer Bedeutung ist es, einen neuen Misch-Linear-Prozess zu konstruieren, der die allgemeineren linearen Surrogate (und nicht nur die theiler-linearen) produziert. Dieser Prozess ist im idealen Fall die mit den entsprechenden Wahrscheinlichkeiten gewichtete Mischung der verschiedenen in Frage kommenden linearen Modelle. In einem gewissen Sinne ist dies eine Verallgemeinerung des Modellierungszugangs. Wir fügen hinzu, dass unsere praktische Erfüllung dieser allgemeinen Surrogatmethode keine konkrete Modellierung sichtbar macht. Wenn man die Erklärung unserer Surrogatmethode weiter unten liest, wird man einsehen, dass diese Methode effektiv beide Zugänge vereint.

Zuerst merken wir, dass die Konstruktion des Misch-Linear-Prozesses als gewichtete Summe von linearen Modellen praktisch gemacht werden muss. Die ursprüngliche Idee ist so:

- Betrachte die Menge aller stabilen (stationären) ARMA(n,m)-Modelle. Jedes Modell wird durch $n + m + 1$ Parameter bestimmt, wenn man noch von der Freiheit bei der Wahl der zugrundeliegenden Verteilung der stochastischen iid-Innovationen absieht.
- Ermittle für jedes Modell eine Wahrscheinlichkeit dafür, dass die zu untersuchende Zeitreihe eine Realisierung dieses Modells ist.
- Bilde den Misch-Linear-Prozess als die Summe aller ARMA-Modelle, gewichtet mit den dazugehörigen Wahrscheinlichkeiten.

Diese ganz unpraktische Vision (man denke nur daran, wie man zuerst diese Wahrscheinlichkeiten der verschiedenen Modelle abschätzen soll) einer Gesamtheit von allen möglichen linearen Prozessen steht im Gegensatz zur Vision des Modellierungszugangs, wo genau ein einziges lineares Modell abgeschätzt wird. Das ist wiederum zu extrem. Mit linearen Surrogaten, die nur einem einzigen linearen Modell entstammen, prüft man eigentlich auf die Richtigkeit des Modells und nicht auf die allgemeine Linearität. Deswegen muss man die Konstruktion eines handhabbaren Misch-Linear-Prozesses zustreben.

Erstens soll man die Klasse der linearen Modelle beschränken, indem man z.B. eine maximale Ordnung der linearen Modelle vorgibt. Zweitens wird ein Kriterium zur Wahl gleichwahrscheinlicher repräsentativer linearer Modelle gesucht. Das erreicht man am einfachsten, indem man auf identischer Weise lineare Modelle in verschiedenen gleich langen Teilintervallen der Zeitreihe abschätzt. Diese Methode impliziert die Vorgabe einer charakteristischen Länge der Zeitreihe, und die so abgeschätzten linearen Modelle sind gleich wahrscheinlich.

Wir ziehen hier 2 Möglichkeiten in Betracht.

■ 2.3.2 AR-Misch-Linear-Prozess

Ein AR-Misch-Linear-Prozess ist eine gewichtete Sammlung von Autoregressiven Prozessen. Wir erklären unseren Vorschlag anhand eines abstrakten Beispiels. Wir nehmen z.B. eine Zeitreihe der Länge 1000

- $500 = \frac{1000}{2}$ ist unsere vorgegebene charakteristische Länge. Wir untersuchen immer 500 nacheinander folgende Punkte (sie werden zufällig gewählt)

- Mit Hilfe der ersten 200 Punkte und den letzten 200 Punkte schätzen wir alle AR-Modelle bis zur Ordnung 100

- aus diesen 100 Modellen wählen wir die 10, die den geringsten quadratischen Fehler verursachen, wenn sie an den mittleren 100 Terme getestet werden. Jedes AR-Modell wird vervollständigt durch Modellierung des Input-Rauschens durch den Rest aus der Anwendung des Modells auf die Gesamtheit aller 500 Punkte. Das Schütteln dieser Restterme ergibt das Input-Rauschen, und das hilft zur Modellierung nicht-Gauß'scher linearer Zeitreihen.

- Wenn wir z.B. 10 verschiedene Grundintervalle wählen, für jedes Intervall 10 AR-Modelle bestimmen, und dann für jedes AR-Modell 10 Realisierungen konstruieren, dann haben wir 1000 Surrogate.

Ein Einwand gegen dieses Beispiel ist, dass hier AR-Modelle mit unrealistisch großen Ordnungen abgeschätzt werden (100 Parameter aus 500 Werten!!). Das vorige Beispiel erklärt die Methode exemplarisch. Schließlich wird die richtige Ordnung durch den Vergleich mit den mittleren unberührten Werten (Validitätsmenge) ermittelt. Diese Ordnung wird sicher realistisch sein. [Aber dieser Einwand kann gegen die Theiler-Methode verwendet werden, wo effektiv 251 Parameter aus 500 werten abgeschätzt werden!!].

Zu den Vorteilen dieser Methode gehört die Tatsache, dass nicht-Gauß'sche lineare Zeitreihen modelliert werden können. ARMA-Modelle können nach demselben Prinzip zur Konstruktion des Misch-Linear-Prozesses verwendet werden, aber AR-Modelle sind einfacher abzuschätzen.

Nachteile sind die Rechenaufwendigkeit und die Tatsache, dass die Stationarität des AR-Modells nicht vom Anfang an garantiert ist. Ein theoretisches Problem ist die Begründung der Wahl der maximalen Ordnung und der Länge der Teilzeitreihen. Wenn man die besten AR-Modelle durch eine unberührte Testmenge ermittelt, (wie die 100 mittleren Terme in diesem Beispiel), kann eine höhere Ordnung des AR-Modells (abgesehen von der zusätzlichen Rechenaufwendigkeit) die Abschätzung des AR-Modells mit der richtigen Ordnung nur verbessern. Und für die Praxis ist mit der Hälfte der Länge der Zeitreihe eine gute Wahl der Länge der Teilzeitreihen für stationäre Zeitreihen garantiert.

■ 2.3.3 MA-Misch-Linear-Prozesse

Ein MA-Misch-Linear-Prozess ist ein gewichtetes Ensemble von MA-Modellen. Das ist die Methode, die wir empfehlen. Unser Vorschlag ist wie folgt: (Wir behandeln eine Zeitreihe der Länge N)

- wir untersuchen immer n (z.B. $n=N/4$, $n=N/2$, $n=N$) nacheinander folgende Punkte (sie werden zufällig gewählt) und betrachten diese Menge als Filter
- Mit diesem Filter falten wir eine Gauß'sche iid-Input-Zeitreihe der Länge $N+n$
- schließlich entfernen wir die ersten n Glieder dieser Faltung. Das Resultat ist eine lineares Surrogat, das die linearen Beziehungen des Filters wiedergibt. Es handelt sich hier um einen Misch-Linear-Prozess, der aus $N - n + 1$ verschiedenen gleichwahrscheinlichen $MA(n - 1)$ -Modellen besteht. Die Koeffizienten der MA-Modelle sind die Glieder der n -langen Teilzeitreihen.

Bemerkungen:

Man kann im Prinzip verschiedene Längen n mit entsprechenden Gewichten verwenden. Ein offenes Problem bleibt die Bestimmung dieser Gewichte.

n muss größer als die Korrelationslänge der Zeitreihe gewählt werden.

Im Prinzip kann man auch nicht-Gauß'sches Input-Rauschen zulassen. Bei den in der Praxis gewählten Filterlängen (z.B. $n=N/2$) ist das Resultat im Grunde Gauß'sch.

Wenn man das Periodogramm als Abschätzung des Leistungsspektrums verabsolutieren will, wie das Theiler in seiner Surrogatmethode tut, (und was zu einem Nachteil der Theiler-Methode zählt), dann kann man einfach $n=N$ wählen. In diesem Fall besteht der so konstruierte Misch-Linear-Prozess aus einem einzigen linearen Modell, einem $MA(N-1)$ -Modell mit den Zeitreihengliedern als Koeffizienten. Selbst so konstruierte Surrogate sind besser als die Theiler-Surrogate. Sie sind nicht zyklisch (Theiler-Surrogate modellieren einen Sprung zwischen dem Anfangs und dem Endpunkt!!) und können beliebig lang gemacht werden. Und der Prozess, der diese Surrogate produziert ist selbst linear und nicht unbedingt phasengleichverteilt.

Unsere MA-Surrogatmethode hat mehrere Vorteile. Sie ist schnell und der FT-Surrogatmethode ähnlich. Dabei vermeidet sie viele der Probleme der FT-Surrogatmethode. Sie ist auch einfach auf mehrkomponentige Zeitreihen zu verallgemeinern. Das mehrkomponentige Surrogat ist das Produkt der Faltung des mehrkomponentigen Filters (= der mehrkomponentigen Teilzeitreihe) mit einer Realisierung des iid-Input-Rauschens.

Ein Nachteil der Methode ist die Tatsache, dass nicht-Gauß'sche lineare Surrogate mit dem Ausgangshistogram schwer zu erhalten sind.

Eine mögliche Lösung zur Prüfung der Hypothese nicht-Gauß'scher linearer stationärer Zeitreihen ist die anschließende Anwendung der korrigierten Histogramm-Abbildung (Histogramm-Abbildung wird sowohl an den Surrogaten als auch an der ursprünglichen Zeitreihe angewendet). Ein anderer möglicher Lösungsweg für nicht-Gauß'sche lineare stationäre Zeitreihen ist die Verwendung eines AR- oder ARMA-Misch-Linear-Prozesses, wobei das nicht-Gauß'sche Input-Rauschen mitmodelliert wird.

Dolan und Spano haben in [DS 01] eine Surrogat-Methode vorgeschlagen, die unserer MA-Surrogatmethode etwas ähnlich ist. Ihre Surrogate (die digital filtrierte Surrogate) sind das Ergebnis der Faltung von Input-Rauschen mit einem abgeschätzten Filter, der mit der Abschätzung

des Leistungsspektrums korrespondiert. Das Leistungsspektrum wird bei ihnen aus Periodogrammen in Teilzeitreihen abgeschätzt. D.h. ihr Filter ist eine Art Mittelung unserer Filter (Teilzeitreihen). Ihr Misch-Linear-Prozess besteht aber aus nur einem einzigen linearen Modell. Es handelt sich wieder um den klassischen Modellierungszugang.

■ 2.3.4 Nichtstationäre Surrogate

Zum Schluss wird unser Vorschlag zur Konstruktion instationärer Surrogate erklärt. Wir fangen, wie oft in dieser Arbeit, mit den FT-Surrogaten an. Ein FT-Surrogat, $\{s'_t\}$, einer Zeitreihe, $\{x_t\}$ der Länge N , hat die folgende Form:

$$\{s'_t\} = \{q_t\} \otimes \{x_t\} \quad (11)$$

Das FT-Surrogat, $\{s'_t\}$, ist da Ergebnis der Faltung der Zeitreihe, $\{x_t\}$, mit einem Filter aus N Quasi-Gauß-Zahlen, $\{q_t\}$. Unsere MA(N)-Surrogat-Methode ersetzt die Quasi-Gauß-Zahlen, $\{q_t\}$, mit einer echten iid-Gauß-Zeitreihe der Länge N , $\{\eta_t\}$. Für unser MA(N)-Surrogat, $\{s_t\}$, gilt:

$$\{s_t\} = \{\eta_t\} \otimes \{x_t\} \quad (12)$$

Diese Zeitreihe, $\{s_t\}$, kann als eine Realisierung zweier verschiedener Zeitreihenprozesse betrachtet werden. Der eine Zeitreihenprozess ist $\{\hat{\eta}_t\} \otimes \{x_t\}$ und ist ein linearer stationärer MA(N-1)-Prozess. Dabei werden Realisierungen des Gauß'schen weißen Rauschens mit einem N -langen FIR-Filter, $\{x_t\}$, filtriert. Der zweite Zeitreihenprozess ist $\{\eta_t\} \otimes \{\hat{x}_t\}$ und ist eine Filtration des zu untersuchenden Zeitreihenprozesses, $\{\hat{x}_t\}$. Ein solcher Prozess ist nur dann linear bzw. stationär, falls $\{\hat{x}_t\}$ selbst linear bzw. stationär ist. Wenn man nur eine Realisierung, $\{s_t\} = \{\eta_t\} \otimes \{x_t\}$, betrachtet, dann erkennt man, dass sich beide Prozesse hier durchschneiden. Beide Prozesse kann man noch auf andere Filterlängen verallgemeinern.

$$\{\hat{a}_t^n\} = \{\hat{\eta}_t\} \otimes \{x_t^n\} \quad (13)$$

$$\{\hat{b}_t^n\} = \{\eta_t^n\} \otimes \{\hat{x}_t\} \quad (14)$$

Der erste Prozess, der a(n)-Prozess, ist unser MA(n-1)-Surrogat-Prozess für die Teilzeitreihe $\{x_t^n\}$. Seine Realisierungen sind linear und stationär. Der zweite Prozess, der b(n)-Prozess, ist die Filtrierung des zu untersuchenden Prozesses mit einem zufälligen FIR-Filter der Länge n . Der Unterschied zwischen den beiden Prozessen verschwindet für $n=N$. Für kleines n ist der b-Prozess genauso nichtlinear und nichtstationär wie $\{\hat{x}_t\}$ selbst. Also hängt die Stationarität und Linearität des b-Prozesses von n ab. Instationarität (im Gegensatz zu Nichtlinearität) beschreibt kein lokales Verhalten. Deswegen zerstört der zufällige Filter bei wachsender Länge n zuerst die Nichtlinearität und dann die Instationarität. Der b-Prozess ist reich. Seine Realisierungen (b-Surrogate) sind für kleines n instationär und nichtlinear (nützlich für Abhängigkeitsuntersuchungen). Dann werden sie bei größerem n instationär aber linear. Schließlich werden sie (ab $n=N/2$) stationär und linear. Zwei charakteristische Längen zur Unterscheidung der 3 Phasen werden gebraucht. Ihre Bestimmung ist eine Überzeugungsfrage. Ich wähle normalerweise $n \in [\frac{N}{10}, \frac{N}{3}]$ für die Filterlänge, um die Nichtlinearität zu unterdrücken und Instationarität zuzulassen.

Eine Bemerkung sei hier am Platz. Die a- und b-Surrogate sind in dieser oben beschriebenen Form zyklisch. Denn das Surrogat hat dieselbe Länge N , wie die längere in der Faltung auftretenden Zeitreihe. Das soll man vermeiden.

Für die a-Surrogate kann man längeres $\{\eta_t\}$ wählen, (z.B. der Länge $N+n-1$). Aus dem zyklischen Ergebnis entfernt man die ersten $n-1$ Glieder und erhält ein N -langes a-Surrogat.

Für die b-Surrogate ist dieses Vorgehen unmöglich, weil $\{x_t\}$ im Allgemeinen nicht verlängerbar ist. Deswegen werden die b-Surrogate gekürzt. Man entfernt die ersten $n-1$ Glieder und erhält eine $(N+1-n)$ - lange Zeitreihe. Diese b-Surrogate werden in Surrogattests mit einer verkürzten Zeitreihe, $\{x_t\}$, verglichen. Am besten entfernt man von $\{x_t\}$ die Hälfte der $(n-1)$ Glieder vom Anfang und die andere Hälfte vom Ende.

■ 2.4 Über die statistische Abhängigkeit zwischen Zeitreihen

■ 2.4.1 Einführung

Die Behandlung Linearitätshypothesen für mehrkomponentige ("multivariate") Systeme ist eine natürliche Verallgemeinerung des einkomponentigen Falls. Diese Verallgemeinerung ist im praktischen Leben öfter anzutreffen. Selten behandelt man Systeme, von denen nur eine einzige Zeitreihe bekannt ist, wie es mit der Sonnenfleckenzeitreihe der Fall ist. Im Labor z.B. misst man für ein komplexeres System vernünftigerweise mehr als eine einzige Datenreihe. Auch bestehen vektorielle Größen bekanntlich aus mehr als einer Komponente. Also ist die Behandlung mehrkomponentiger Systeme (zu denen auch einkomponentige Systeme als Spezialfall gehören) realistischer. Und für diese realistischere Problematik kann man interessantere realistischere Hypothesen stellen und zu prüfen versuchen.

Die Hypothese, dass die beobachtete mehrkomponentige Zeitreihe "nichtlinear" ist, kann man einfach mit unserer Surrogatmethode testen. Denn unsere Methode ist mehrkomponentenfähig, im Gegensatz zu einigen anderen Surrogatmethoden. Ich erwähne hier die Methode von [DS 01].

Wir haben die letzte Frage **Q7** vernachlässigt, obwohl sie von allen Fragen an die Surrogatmethode die wichtigste ist. Wie bedeutend ist die Information, dass eine bestimmte Zeitreihe keine typische Realisierung eines ARMA-Prozesses ist?

Diese Information ist von beschränktem Nutzen. Die wenigsten Zeitreihenprozesse im wirklichen Leben sind linear. Es gibt immer Abweichungen von der Linearität, die man aber nicht immer beobachten kann. Aber das ist hier der wichtige Punkt. Wie kann man für die Anwendung komplizierter nichtlinearer Methoden werben, wenn man aus den beobachteten Daten noch nicht feststellen kann, dass dieses System nichtlinear ist?

D.h. wir können behaupten, dass die einfache Surrogatmethode ein Kriterium für die Berechtigung komplexerer Beschreibungen eines in der Form einer Zeitreihe aufgenommenen Phänomens gibt. Wenn man dieses Phänomen lange genug beobachtet und so eine genügend lange Zeitreihe bekommt, dann wird ihm die Surrogatmethode sehr wahrscheinlich sagen, diese Zeitreihe sei sehr wahrscheinlich nichtlinearer Natur. Erst dann gibt es einen Sinn nach nichtlinearer Beschreibung

zu streben, denn es gibt sehr wahrscheinlich Eigenschaften im System, die linear nicht beschreibbar sind.

Und da die meisten praktischen Zeitreihen vom wirklichen Leben lang genug sind, ist diese Surrogatmethode von beschränkter Bedeutung. Ein Beispiel aus dem wirklichen Leben werden wir in einem späteren Kapitel 3 betrachten (Die Polbewegung). Die Zeitreihen der Polbewegung sind nicht lang genug, um das Phänomen gut zu verstehen, aber lang genug um eine ganz idealistische Beschreibung wie die ARMA-Beschreibung ablehnen zu können.

Aber allgemeinere kompliziertere lineare Beschreibungen gibt es auch. Man soll sich der Tatsache bewusst sein, dass die Linearität ursprünglich eine Beziehung zwischen einer "Ursache" und einer "Wirkung" beschreibt. Die Ursache braucht nicht auf stochastisches Rauschen beschränkt zu sein (wie dass mit ARMA-Modellierung der Fall ist). Eine interessante im wirklichen Leben persistente Aufgabe ist zu prüfen, ob die Beziehung zwischen zwei physikalischen Systemen nur linear gut beschreibbar ist. Braucht man in solchen Fällen den linearen Zugang aufzugeben?

Dieses interessante Problem berühren wir in diesem Abschnitt. Der wichtigste Fall für mehrkomponentige Systeme ist der Zweikomponentenfall. Er dient als Beispiel für andere mehrkomponentige Systeme und sondert sich dazu noch in der Tatsache, dass sich auf seinem Gelände die interessante Problematik der Abhängigkeit zwischen 2 Zeitreihen befindet. Die Abhängigkeit zwischen zwei Zeitreihen kann später auf die Abhängigkeit zwischen zwei Systemen verallgemeinert werden.

■ 2.4.2 Abhängigkeit 1. Art versus Abhängigkeit 2. Art

Stellen wir uns vor, wir haben zwei geophysikalische Systeme, die physikalisch wenig miteinander zu tun haben, die aber beide in ihrem zeitlichen Verlauf ein saisonales Verhalten haben. Beide Systeme haben z.B. eine wesentliche jährliche Periode in ihrem Spektrum. Allein aus dieser Tatsache sind beide Systeme für eine bestimmte Verzögerungszeit miteinander signifikant korreliert. (Rechenbeispiel: Die Zeitreihe, x (bzw. y), des ersten (bzw. zweiten) Systems besteht aus einer Jahresperiode, und Rest mit dem Varianzverhältnis: $\sigma^2(x_{\text{Jahr}}) : \sigma^2(x) = A$ (bzw. $\sigma^2(y_{\text{Jahr}}) : \sigma^2(y) = B$). Man kann einfach ausrechnen, dass im Mittel das Quadrat des Korrelationsfaktors der beiden Zeitreihen: $\langle \rho^2[x, y] \rangle = \frac{AB}{2}$. Das ist bestimmt nicht unsignifikant). Die Zeitreihen sind sicher korreliert. Sind sie aber im praktischen Sinne voneinander abhängig?

Ein anderes Beispiel: Produzieren wir aus dem Barnes'schen Prozess mit 2 statistisch voneinander unabhängigen Sätzen von stochastischen Innovationen 2 Realisierungen (die nicht sehr lang sind). Dann haben wir konstruktionsgemäß 2 Zeitreihen, die "statistisch unabhängig" sind. Die beiden Zeitreihen haben aber dieselben Hauptperioden, und sind deswegen für bestimmte Zeitverzögerungen signifikant korreliert.

Diese signifikanten Korrelationen mit "statistisch unabhängigen" Zeitreihen veranlassen uns, bei den Zeitreihen mit scharfen Gipfeln vorsichtig zu sein. Es sind hier zwei Stufen der statistischen Unabhängigkeit von Zeitreihen zu unterscheiden. Für die eine Stufe existiert statistische Abhängigkeit schon aus der Erkenntnis, dass es sehr unwahrscheinlich ist, dieselbe scharfe Frequenz in zwei verschiedenen statistisch unabhängigen Zeitreihen zu finden. Eine gemeinsame Treibkraft erzeuge diese Frequenz für beide Zeitreihen. Für die andere ist die Zeitlichkeit das wichtige Phänomen. Zwei Zeitreihen sind nach diesem Gesichtspunkt dann voneinander statistisch abhängig, falls die Änderungen im zeitlichen Verlauf einiger Eigenschaften der Zeitreihen miteinander korreliert sind. Eine konstante Frequenz ändert sich aber nicht. Allein ein signifikanter Wert der linearen Korrelation (bzw. MLC) zwischen zwei Zeitreihen erklärt eine statistische Abhängigkeit 1. Art (nach dem ersten Gesichtspunkt = im erweiterten Sinn) für signifikant, nicht aber die statistische Abhängigkeit 2. Art (nach dem 2. Gesichtspunkt = im engeren Sinne).

Besonders bei geophysikalischen Problemen, wo saisonale Oszillationen ganz natürlich sind, ist die statistische Unabhängigkeit 2. Art physikalisch mehr von Bedeutung. Deswegen wird hier immer die Unabhängigkeit 2. Art gemeint, wenn nichts mehr dazu erwähnt wird. Zwei Zeitreihen, die nach dem zweiten Gesichtspunkt unabhängig und nach dem ersten Gesichtspunkt abhängig sind, nennen wir scheinabhängig.

■ 2.4.3 Beispiel

Wie man zwischen Scheinabhängigkeit und richtiger Abhängigkeit unterscheidet wird an einem Beispiel von der Polbewegung demonstriert. Wir prüfen die Zeitreihen x_{pol} (die x -Koordinate der Polbewegung) und y_{BN} (die atmosphärische Druck-Erreger-Funktion in der nördlichen Hemisphäre) auf statistische Unabhängigkeit. Beide sind saisonal getrieben. Wir prüfen mit der Surrogatmethode und wählen die maximale Linearkorrelation (MLC - siehe Anhang 2) als Abhängigkeitsteststatistik.

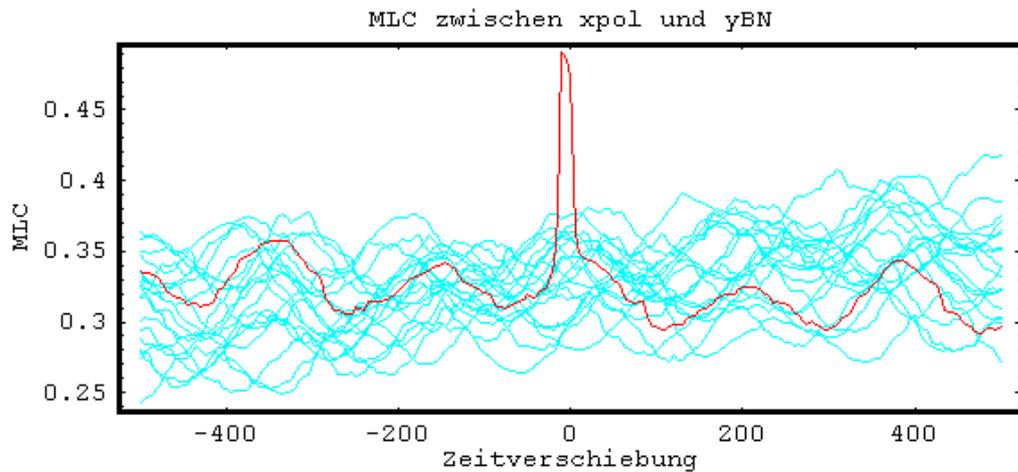


Figure 13

Abb.13: Vergleich zwischen $MLC(x_{pol}, 1; y_{BN}, 3)$ (rot) und 19 verschiedene Surrogatabschätzungen: $MLC(sx_{pol}_i, 1; y_{BN}, 3)$ $i = 1 \dots 19$ (blau), wobei sx_{pol} ein lineares Surrogat (FT-Surrogat) von x_{pol} ist. Hier sind die Hauptperioden (insbesondere die Jahresperiode) nicht wegfiltert. Ein signifikanter Korrelationsfaktor von etwa 0.3 existiert unabhängig von der Zeitverschiebung. Die Ursache ist die Jahresperiode. Die Surrogate, die unabhängig konstuiert wurden) sind signifikant mit der atmosphärischen Erregerfunktion korreliert.

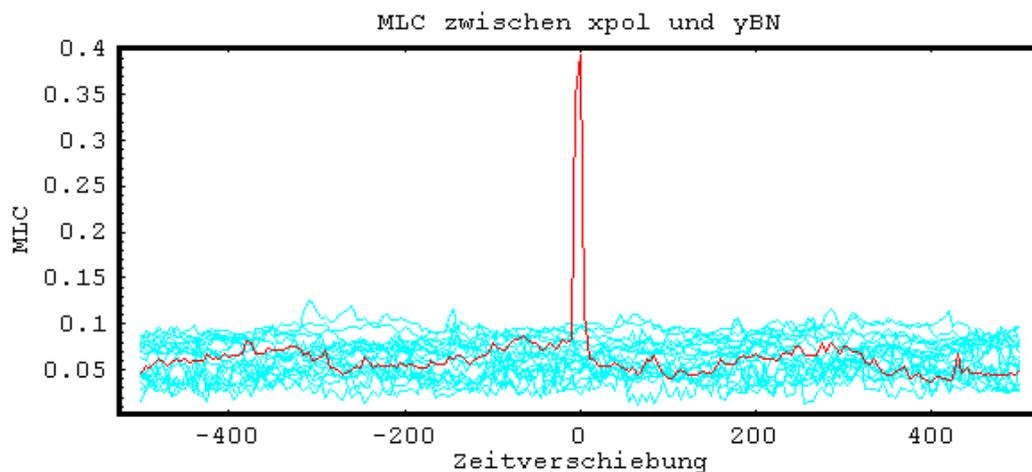


Figure 14

Abb.14: Dasselbe wie in der vorigen Abbildung aber mit Unterdrückung der Jahresperiode. Die Signifikanz ist überwältigend.

Die Bedeutung der Unterdrückung der Jahresperiode versteht man am besten durch Vergleiche der Spektralenergieanteile der wichtigsten Perioden für die Zeitreihen x_{pol} und y_{BN}

	x_{pol}	y_{BN}
Jahresperiode	21 %	59 %
Halb - Jahres - Periode	0.047 %	2 %
Chandler - Periode	73 %	0.22 %

Im idealen Fall von ganz scharfen Gipfeln bei den Jahresperioden kann eine lineare Korrelation von $\sqrt{21\% \cdot 59\%} = 35\%$ schon durch die Anpassung der jährlichen Wellen erreicht werden. MLC muss nach Definition (bei einer passenden Zeitverschiebung) mindestens genauso groß sein (auch für die linearen "statistisch unabhängigen" Surrogate mit demselben Spektrum). In der Abbildung (13) erkennt man für jedes Surrogat mindestens einen Wert von 35% für das Maximum von MLC. Diese signifikanten Korrelationen mit "statistisch unabhängigen" Zeitreihen veranlassen es, bei den Zeitreihen mit scharfen Gipfeln vorzusehen. *(Die Grafiken zeigen auch die Stärke von MLC. Auch ohne Wegfiltrierung der Jahresperiode ist die richtige Abhängigkeit (d.h. 2.Art) sehr signifikant, und bestimmt die beste Verzögerungszeit (= 0) für maximale Abhängigkeit.)*

■ 2.4.4 Hierarchie von Linearitätshypothesen in einem zweikomponentigen System

Wir möchten eine einfache Hierarchie von einfachen Nullhypothesen bauen und untersuchen. Wir nehmen an, dass wir eine zweikomponentige Zeitreihe mit den Elementen: $z_n = (x_n, y_n) \dots n = 1, \dots, N$ haben. Es folgt die Hierarchie der einfachen Hypothesen:

AG0x	oder	AG0y
A0x	oder	A0y
AG1xy		
A1xy		
B0xy		
BB0xy		
B1xy	oder	B1yx
C1xy	oder	C1yx
CC1xy	oder	CC1yx
D1xy	oder	D1yx
DD1xy	oder	DD1yx

A0x) $\{x_n\}$ ist eine Realisierung eines iid-Prozesses, d.h. eine Folge von unabhängigen identisch verteilten Zufallsvariablen. **A0x** kann mit der Surrogatmethode einfach geprüft werden. Das Schütteln (die zufällige Umordnung) der Zeitreihe $\{x_n\}$ zerstört alle inneren Abhängigkeiten zwischen den nachfolgenden Elementen der Zeitreihe und konstruiert so iid-Surrogate. Dabei wird das Histogramm der ursprünglichen Zeitreihe behalten. Als Teststatistik dient jede Größe, die eine innere Abhängigkeit der Zeitreihe misst, wie z.B. die Autokorrelation, ρ_n , für $n > 0$.

A0y) $\{y_n\}$ ist eine Realisierung eines iid-Prozesses. (analog zu **A0x**)

Noch elementarer als **A0x** und **A0y** sind noch **AG0x** und **AG0y** vorstellbar. Danach muss der iid-Prozess normalverteilt (gauß-verteilt) sein. Diese Hypothesen können mit unserer Surrogatkonstruktionsmethode (=Ensemble mehrerer geschätzten Modelle) einfach geprüft werden. Aus verschiedenen Abschätzungen des Paares (μ (Mittel), σ (Standardabweichung)) simuliert man verschiedene Surrogate. (Auch lässt sich die Gaußizität mit Hilfe des Phasensignals optimal prüfen.)

B0xy) $\{y_n\}$ ist von $\{x_n\}$ statistisch unabhängig (nach dem 1. Gesichtspunkt). Diese Nullhypothese kann man auch mit Hilfe der Surrogatmethode ziemlich einfach prüfen. Jetzt muss man aber Surrogate für $z_n = (x_n, y_n)$ als Paar konstruieren. Wenn man x_n schüttelt und y_n beibehält, dann hat

man jede Abhängigkeit zwischen den beiden Komponenten zerstört. Deswegen heißen unsere Surrogate: $\{\hat{z}_n = (\hat{x}_n, y_n)\}$, wobei $\{\hat{x}_n\}$ das Resultat des Schütteln von $\{x_n\}$ ist. Als Teststatistik kann die lineare Korrelation zwischen einer Abgeleiteten von $\{x_n\}$ und einer Abgeleiteten von $\{y_n\}$ dienen: $\text{Korrelation}(F[\{x_n\}], G[\{y_n\}])$. F und G sind beliebige zeitliche Transformationen wie z.B. die Identität, die momentane Phase, die momentane Amplitude, das Phasensignal, Differenzen und Differentialableitungen und funktionale statische Transformation. Eine Teststatistik ist z.B. $\text{Korrelation}(\{\cos\phi_x\}, \{\sin\phi_y\})$ wobei mit ϕ die momentane Phase (Argument des Gabor'schen analytischen Signals) gemeint ist.

BB0xy $\{y_n\}$ ist von $\{x_n\}$ statistisch unabhängig (nach dem 2. Gesichtspunkt). Wie im graphischen Beispiel oben wird ein Surrogattest durchgeführt, wobei die Surrogate Paare der Form $\{\hat{z}_n = (\hat{x}_n, y_n)\}$, $\{\hat{x}_n\}$ sind FT-Surrogate von $\{x_n\}$.

A1x $\{x_n\}$ ist eine Realisierung eines linearen stationären Prozesses. Diese Nullhypothese ist die klassische Linearitätshypothese, die wir schon eingehend im vorigen Kapitel untersucht haben. (Man kann auch eine konkretere Hypothese, **AG1x**, eines linearen stationären Gauß'schen Prozesses betrachten.) **AG1x** ist einfacher mit Surrogaten zu prüfen, als **A1x**. Unsere MA-Surrogatkonstruktionsmethode (Ensemble von geschätzten MA-Modellen) ist nicht adäquat für **A1x**. Hier ist die etwas schwierigere Methode des Ensembles von geschätzten AR-Modellen erfolgreicher, denn nichtgauß'sche Innovationen können auch mitmodelliert werden. Auch durch andere Methoden, die keine Surrogate anwenden, wie durch Abschätzungen des Bisppektrums [Hin 82, RG 84] lässt sich **A1x** prüfen.

A1y $\{y_n\}$ ist eine Realisierung eines linearen stationären Prozesses. Entsprechend gibt es die elementarere Hypothese **AG1y** eines linearen stationären Gauß'schen Prozesses.

A1xy Die zweikomponentige Zeitreihe $\{z_n\} = \{x_n, y_n\}$ ist eine Realisierung eines linearen stationären Prozesses. Diese Nullhypothese beinhaltet die Linearität jeder Komponente sowie die Linearität der Verbindung zwischen den Komponenten. Oft ist diese Nullhypothese identisch mit **A1x** \wedge **A1y**. Aber das gilt nicht immer. Es gibt aber einen Ausnahmefall: $\{x_n\}$ erfüllt **A0x** (iid), und $y_n = \sum_{i=1}^p y_{n-i} + \sum_{j=0}^q f(x_{n-j})$, f ist eine nichtlineare Funktion. In diesem Fall ist $\{y_n\}$ eine ARMA-Konstruktion und ist linear, denn die Input-Zeitreihe, $\{f(x_n)\}$, ist, genauso wie $\{x_n\}$, auch iid-Realisierung, also auch linear. In diesem Fall sind $\{x_n\}$ und $\{y_n\}$ linear, aber die Beziehung zwischen den beiden Zeitreihen ist nichtlinear.

Entsprechend kann man die elementarere Nullhypothese stellen: **AG1xy** Die zweikomponentige Zeitreihe $\{z_n\} = \{x_n, y_n\}$ ist eine Realisierung eines linearen stationären Gauß'schen Prozesses. Diese Hypothese ist äquivalent mit **AG1x** \wedge **AG1y**.

Wie prüft man diese Nullhypothese? Dazu konstruiert man lineare Surrogate, welche die Autokorrelation beider Zeitreihen sowie auch die Kreuzkorrelation zwischen den beiden Zeitreihen erhalten, denn diese sind die linearen Eigenschaften des Systems. Das gelingt für die Theiler-FT-Methode sowie für unsere Methode (Ensemble der MA-Modelle) ziemlich einfach. Für die FT-Surrogate muss man dieselbe zufällige Phase zum Phasenspektrum jeder Komponente addieren [TEL+ 92]. Für unsere Methode wenden wir die entsprechenden MA-Filter der verschiedenen Zeitreihen, (z.B. die Teilfolgen $[x_n, x_{n+1}, \dots, x_m]$ und $[y_n, y_{n+1}, \dots, y_m]$) auf dieselbe iid-Input-Zeitreihe an. (Mit der Anwendung meinen wir die Faltung.) Hier liegt auch ein Vorteil unserer Surrogatkonstruktions-

methode, denn es ist oft aufwendig oder gar unmöglich, einige Surrogatkonstruktionsmethoden auf den mehrkomponentigen Fall zu verallgemeinern. (Ich denke an die typische Konstruktionsmethode von Dolan und Spano [DS 01] mit der Festlegung eines festen MA-Modells, und nicht mit einem Ensemble von MA-Modellen wie bei uns).

Als Teststatistiken dienen für diese Nullhypothese beliebige nichtlineare Konstruktionen aus den beiden Zeitreihen: $f[\{x_n, y_n\}]$.

Für **A1xy** eignet sich eine AR-Konstruktionsmethode im Ensemble-Sinn besser. Hier sind die Surrogate Realisierungen eines Ensembles von 2-komponentigen AR-Modellen der Form:

$$\begin{aligned} x_n &= a_0 + a_1 x_{n-1} + \dots + a_p x_{n-p} + b_1 y_{n-1} + \dots + b_p y_{n-p} + \epsilon_n^{(1)} \\ y_n &= c_0 + c_1 x_{n-1} + \dots + c_p x_{n-p} + d_1 y_{n-1} + \dots + d_p y_{n-p} + \epsilon_n^{(2)} \end{aligned} \quad (15)$$

wobei in jedem Modell die nicht-gauss'schen Innovationen $\epsilon_n^{(1,2)}$ mitmodelliert werden. (p ist die Ordnung des AR-Modells, die nicht unbedingt für alle Modelle im Ensemble einheitlich zu sein braucht. Man erinnere sich an unser Beispiel mit dem Misch-Linear-Prozess aus gewichteten AR-Modellen).

Die vorigen Hypothesen sind alle (außer vielleicht **B0xy** und **BB0xy**) hauptsächlich von beschränkter praktischer Bedeutung. Diese Hypothesen trifft man nämlich selten im täglichen Leben, wo selten mit Linearität und Stationarität zu rechnen ist, und es wird deswegen erwartet, dass diese Hypothesen verworfen werden. Realistischere und zugleich interessantere Hypothesen sind diejenigen, die die Natur der Beziehung und Abhängigkeit zwischen 2 Zeitreihen behandeln, und zwar unabhängig von der Natur der einzelnen Zeitreihen. Mit der Natur meinen wir hier im Rahmen dieser Hierarchie hauptsächlich die Linearität und die Stationarität. **B0xy** war der erste Schritt in diese Richtung. Es folgen andere:

■ 2.4.5 Lineare vollständige Beziehungen

B1xy) Die Zeitreihe $\{y_n\}$ ist als Output von dem Input $\{x_n\}$ linear abhängig, wobei $\{x_n\}$ der einzige nichtlineare und nichtstationäre Input sein darf. Es handelt sich um eine ARX- oder ARMAX-Modellierung:

$$\text{ARX}[x,y;p,q]: y_n = a_0 + b_0 x_n + \dots + b_p x_{n-p} + c_1 y_{n-1} + \dots + c_q y_{n-q} + \epsilon_n \quad (16)$$

$$\begin{aligned} &\text{ARMAX}[x,y;p,q,r]: \\ y_n &= a_0 + b_0 x_n + \dots + b_p x_{n-p} + c_1 y_{n-1} + \dots + c_q y_{n-q} + d_0 \epsilon_n + \dots + d_r \epsilon_{n-r} \end{aligned} \quad (17)$$

$\{\epsilon_n\}$ ist unabhängiges Gauß'sches Rauschen.

Wie kann man diese Hypothese prüfen? Hier muss betont werden, dass lineare Surrogate nach dem Beispiel von **A1xy** das Ziel verfehlen. Man kann nicht die Natur der Abhängigkeit zwischen 2 Zeitreihen durch lineare Surrogate prüfen. Nehmen wir an, dass ein Surrogatstest einen signifikanten Unterschied zwischen den Surrogaten und den ursprünglichen Zeitreihen feststellt. Wenn wir von Instationarität absehen, wissen wir dann, dass die ursprünglichen Zeitreihen nicht wie die Surrogate sein können, nämlich: lineare Zeitreihen, die voneinander linear abhängig sind. Dann sind die ursprünglichen Zeitreihen entweder nichtlinear voneinander abhängig oder sind sie selbst nichtlin-

ear. Die letzte Möglichkeit muss aber ausgeschlossen werden. Ein Beispiel hier könnte lehrreich sein:

Es sei $\{x_n\}$ eine Realisierung eines bilinearen Prozesses: $x_n = a x_{n-1} + b x_{n-2}^2 + \epsilon_n$. Es sei $\{y_n\}$ eine nichtlineare Zeitreihe, die als ARX-Output vom Input $\{x_n\}$ hervorgeht: $y_n = A x_n + B x_{n-1} + \eta_n$. Zuerst sei bemerkt, dass die vorige Darstellung der Abhängigkeit zwischen dem Input und dem Output nur eine Möglichkeit ist. Es gibt andere Darstellungen, die auch nichtlinear sein dürfen. Z.B. gilt hier: $y_n = (B + aA) x_{n-1} + bA x_{n-2}^2 + \delta_n$ oder $y_n = (A - \frac{B}{a}) x_{n-1} + \frac{bB}{a} x_{n-2}^2 + \zeta_n$. Unsere Nullhypothese besagt nur, dass eine lineare Darstellung möglich ist. Dies folgt aus der Konstruktion.

Wir kehren zurück zum Surrogattest mit linearen Surrogaten. Die Teststatistik, die im Surrogattest verwendet wird, beruht auf den Begriff der linearen Maximalkorrelation MLC (siehe Anhang A2). Mit $\text{MLC}(\mathbf{U}; \mathbf{V})$, der linearen Maximalkorrelation zwischen dem von den Vektoren (normierten Input-Zeitreihen) \vec{u}_i gespannten Unterraum \mathbf{U} und dem von den Vektoren (normierten Output-Zeitreihen) \vec{v}_j gespannten Unterraum \mathbf{V} , wird die maximale Korrelation einer Linearkombination von \vec{u}_i und einer Linearkombination von \vec{v}_j gemeint. Dies ist der Kosinus des Winkels zwischen den beiden Unterräumen. Unsere Teststatistik ist $\xi = \text{MLC}(y_n; x_n, x_{n-2}, x_{n-4}) - \text{MLC}(y_n; x_n, x_{n-2}^2)$, d.h. die Differenz zwischen einem linearen und einem nichtlinearen Korrelationsmaß. Im Fall der linearen Surrogate ist der erste Term sicher größer als der zweite Term, dessen Input-Unterraum nur zweidimensional ist. ξ ist sicher positiv. Für die ursprünglichen zu untersuchenden Zeitreihen ist der zweite Term wesentlich besser. Die innere Struktur der Zeitreihe $\{x_n\}$ macht den Unterraum $\{\alpha x_n + \beta x_{n-2}^2\}$ im Wesentlichen dem Unterraum $\{\alpha x_n + \beta x_{n-1}\}$ gleich, in dem die Zeitreihe $\{y_n\}$, gefasst als Vektor, liegt. Also ist ξ in diesem Fall negativ und signifikant anders als die linearen Surrogate. Vielleicht argumentiert man, daß die gewählte Teststatistik hier eine Differenz zweier Abhängigkeitsmaße ist, und so kein Abhängigkeitsmaß an sich darstellt. Von einem Abhängigkeitsmaß erwartet man, dass es verschwindet, wenn Unabhängigkeit vorliegt. Dieses Argument hilft nicht. Zwar besteht ξ aus 2 Termen, der erste Term, $\text{MLC}(y_n; x_n, x_{n-2}, x_{n-4})$, ist aber linearer Natur und ist deswegen für alle Zeitreihen gleich. Es wird eigentlich nur der zweite Term, $\text{MLC}(y_n; x_n, x_{n-2}^2)$, bekanntlich ein Abhängigkeitsmaß, verglichen.

Diese Hypothese lässt sich aber noch mit der klassischen Surrogatmethode prüfen. Einige Modifikationen sind fällig. Zuerst verwenden wir *optimierte* Teststatistiken, deren Erwartungswert im Fall der Unabhängigkeit gleich 0 ist. Andere Abhängigkeitsteststatistiken, die immer positiv sind und deswegen diese schöne Eigenschaft nicht besitzen, wie die verschiedenen Maximalkorrelationen und die Transinformation und ihre Verallgemeinerungen, fallen so aus. In Betracht kommen nur Abhängigkeitsteststatistiken, die nach folgender Schema konstruiert werden:

1. Aus $\{x_n\}$ bilden wir eine beliebige Derivate: $A\{x_n\}$, die mit $\{x_n\}$ zeitlich ist. (Siehe Kapitel 1!)
2. Aus $\{y_n\}$ bilden wir eine beliebige Derivate: $B\{y_n\}$, die mit $\{y_n\}$ zeitlich ist.
3. Unsere Teststatistik, ξ , ist die Korrelation zwischen den beiden Derivaten: $\xi = \text{Korrelation}(A\{x_n\}, B\{y_n\})$

Eine weitere Verbesserung der Surrogatmethode zur Untersuchung der Hypothese der linearen Abhängigkeit zwischen zwei Zeitreihen liegt in der Konstruktionsmethode der Surrogate. Wir

verwenden unsere b-Surrogate (14) mit ziemlich kurzen zufälligen Filtern. Die so entstandenen Surrogate sind nichtlinear und instationär.

Eine andere Surrogatmethode zur Prüfung der Nullhypothese **B1xy** ist die Ensemble-Methode. In diesem Fall kann man ziemlich einfach (*ähnlich unserer Methode mit dem AR-Misch-Linear-Prozess*) Surrogate konstruieren. Die Instationarität der Zeitreihen stört dabei nicht, weil das lineare Verhältnis (d.h. die Transferfunktion) stationär ist. Mit passend hohen p und q kann ARX-Modellierung ARMAX ersetzen. Es gibt bekannte Algorithmen zur Abschätzung von ARX-Modellen (z.B. [Lju 87]). Verschiedene ARX-Modelle werden abgeschätzt und dann iteriert, so dass N neue Zeitreihen $\{\hat{y}_n\}_i$, $i = 1, \dots, N$ als Surrogate von $\{y_n\}$ gefunden werden. Die Input-Zeitreihe $\{x_n\}$ bleibt fest. Nun dient ein beliebiges nichtlineares Abhängigkeitsmaß zwischen dem Input und dem Output als Teststatistik im Surrogattest.

Bemerkung: In der ersten Surrogattestmethode werden beide Zeitreihen ersetzt. In der Ensemble-Methode bleibt eine Zeitreihe (die Input-Zeitreihe) als Referenzzeitreihe fest.

B1yx) Die Zeitreihe $\{x_n\}$ ist als Output von dem Input $\{y_n\}$ linear abhängig, wobei $\{y_n\}$ der einzige nichtlineare und nichtstationäre Input sein darf. Man könnte denken, die Berücksichtigung der Symmetrie von zwischen x und y in der ARX-Definition oben Gl. (16) bedeutet, **B1xy** und **B1yx** seien identisch. In diesem Sinn gebe es keine klare Unterscheidung zwischen einem Input und einem Output. Das stimmt nicht. Diese ARX-Definition beinhaltet implizit eine Input-Output-Aussage, so dass die statistische Unabhängigkeit zwischen dem Input $\{x_n\}$ und dem anderen Stör-Input $\{\epsilon_n\}$ vorausgesetzt wird.

Als kleines Beispiel zur Demonstration seien ϵ_1 , ϵ_2 , η_1 , und η_2 Gauß'sche zufällige Variable mit verschwindendem Mittel und gleicher Varianz (=1). ϵ_1 und ϵ_2 seien voneinander unabhängig. Es sei $\eta_1 = (\epsilon_1 + \epsilon_2) / \sqrt{2}$ und $\eta_2 = (\epsilon_1 - \epsilon_2) / \sqrt{2}$. Dann sind η_1 und η_2 voneinander unabhängig. Wenn wir jetzt die drei Variablen η_1 , ϵ_1 und ϵ_2 betrachten dann sehen wir schnell ein, dass die Beziehung: $\eta_1 = \frac{\epsilon_1}{\sqrt{2}} + \frac{\epsilon_2}{\sqrt{2}}$ eine richtige Input-Output-Beziehung ist. ϵ_1 ist z.B. der Input, ϵ_2 ist der Stör-Input und η_1 ist der Output. Die umgeordnete Beziehung: $\epsilon_1 = \sqrt{2} \eta_1 - \epsilon_2$ ist aber keine richtige Input-Output-Beziehung, denn η_1 und ϵ_2 sind korreliert: $\langle \eta_1 \epsilon_2 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Das heißt aber nicht, dass η_1 als Input für ϵ_1 nicht fungieren kann. Man muss aber dafür die passende Beziehung finden. Hier findet man einfach: $\epsilon_1 = \frac{\eta_1}{\sqrt{2}} + \frac{\eta_2}{\sqrt{2}}$. Für einfache Nullhypothesen wie **A1xy** ist es im Prinzip immer möglich, den Input und den Output in diesem Sinne zu vertauschen (**A1xy** = **A1yx**). Das gilt für **B1xy** nicht unbedingt.

■ 2.4.6 Lineare unvollständige Beziehungen

C1xy) Die Zeitreihe $\{y_n\}$ ist als Output von dem Input $\{x_n\}$ linear abhängig, wobei andere nichtlineare und nichtstationäre Input-Terme als $\{x_n\}$ erlaubt sind. Dabei müssen die anderen Input-Terme von $\{x_n\}$ statistisch unabhängig sein:

$$y_n = a_0 + b_0 x_n + \dots + b_p x_{n-p} + c_1 y_{n-1} + \dots + c_p y_{n-p} + w_n \quad ; \quad (18)$$

$\{w_n\}$ ist von $\{x_n\}$ statistisch unabhängig.

Die verlangte statistische Unabhängigkeit ist notwendig. Es reicht nicht aus, zu verlangen, dass $\{w_n\}$ und $\{x_n\}$ linear unkorreliert sind. Anderenfalls hat man kein korrekt gestelltes Problem. Zur Demonstration dieses Sachverhalts betrachten wir ein einfaches Beispiel.

Es sei $\{z_n\}$ eine Zeitreihe mit einem einzigen Gipfel in ihrem Amplitudenspektrum (z.B. bei der Frequenz f_1). Es seien $x_n = z_n^2$ und $y_n = b_0 x_n + \dots + b_p x_{n-p} + \epsilon_n$ die Elemente zweier neuer Zeitreihen $\{x_n\}$ und $\{y_n\}$, die miteinander linear verbunden sind. $\{x_n\}$ ist der Input und $\{y_n\}$ ist der Output. In ihren Amplitudenspektren haben $\{x_n\}$ und $\{y_n\}$ 2 Gipfel (bei f_1 und bei $f_2 = 2 f_1$). Nun teilen wir das Signal $\{x_n\}$ durch spektrale Filtrierung in zwei Signale, die miteinander linear unkorreliert sind: $\{x'_n\}$ mit den Tieffrequenzen $f < f_3$ und $\{x''_n\}$ mit den Hochfrequenzen $f > f_3$, wobei f_3 zwischen f_1 und f_2 liegt. Wir stellen die Frage: Wie ist die Beziehung zwischen dem Output $\{y_n\}$ und dem Input $\{x'_n\}$? Ist $\{y_n\}$ von $\{x'_n\}$ linear abhängig?

Sicher kann eine lineare Beziehung die Abhängigkeit zwischen den beiden Zeitreihen nicht erklären. Es gibt z.B. eine Abhängigkeit zwischen der momentanen Amplitude des f_2 -Gipfels im $\{y_n\}$ -Spektrums und der momentanen Amplitude des f_1 -Gipfels im $\{x'_n\}$ -Spektrums. Diese Abhängigkeit kann nicht linear erklärt werden. Aber wenn man einen zusätzlichen Input zulässt, der vom ersten Input, $\{x'_n\}$, nur linear unkorreliert zu sein braucht, dann darf man es mit dem zweiten Input $\{x''_n\}$ versuchen. In diesem Fall ist die lineare Erklärung wieder möglich, denn $x_n = x'_n + x''_n$. Nach diesem Prinzip kann man immer eine lineare Erklärung, die keinen wirklichen Sinn macht, begründen. Das ist kein korrekt gestelltes Problem.

Die Hypothese **C1xy** ist eine interessante Hypothese, die oft anzutreffen ist. Oft beobachten wir komplexe Phänomene mit mehreren Komponenten, die nicht unbedingt linear und stationär sind. Für dieses Phänomen gibt es Überlegungen (Kausalitätsbetrachtungen oder physikalische Berücksichtigungen), die uns dazu veranlassen, bestimmte Komponenten als Input-Zeitreihen und andere als Output-Zeitreihen zu betrachten. Das zu untersuchende Phänomen ist dazu nicht vollständig beobachtet worden. Es gibt Gründe zur Annahme, dass weitere, noch nicht bekannte, hier fehlende Input-Komponenten existieren.

Nun ist der erste Modellierungsversuch natürlich von der Art **C1xy**. Erst wenn ich zeigen kann, dass so eine lineare Erklärung der Beziehung zwischen dem Input und dem Output ungenügend ist, ist die Betrachtung eines komplizierteren Modells oder gar eines dynamischen Modells vernünftig.

Die analoge entgegengesetzte Hypothese nennen wir **C1yx**.

Man kann theoretisch eine noch kompliziertere instationäre unvollständige Linearitätsbeziehung in Betracht ziehen. **D1xy** hat einen einzigen Unterschied zu **C1xy**. Die Koeffizienten in (16) und (17), a_0 , \vec{b} , \vec{c} und \vec{d} , sind nicht mehr zeitunabhängig. Dieser Unterschied ist gewaltig und macht diese Hypothese nur im Fall langsamer zeitlicher Veränderungen der Koeffizienten handhabbar und sinnvoll. In diesem Fall werden für Teilzeitreihen entsprechende Hypothesen der Form **C1xy** aufgestellt und geprüft.

Die interessanten Hypothesen **C1xy** und **C1yx** verdienen es näher betrachtet zu werden.

Mit einer linearen Beziehung zwischen den Zeitreihen $\{x_n\}$ und $\{y_n\}$ ist die Hypothese **C1xy** oder **C1yx** gemeint. In ihrer verallgemeinerten ARMAX-Darstellung ist die zu untersuchende Nullhy-

pothese angewendet auf die Zeitreihen $\{x_n\}$ und $\{y_n\}$ folgende:

Für passende Ordnungen p und q ist eine folgende Darstellung zwischen $\{x_n\}$ und $\{y_n\}$ möglich:

$$0 = a_0 + b_0 x_n + \dots + b_p x_{n-p} + c_0 y_n + \dots + c_q y_{n-q} + w_n \quad ; \quad (19)$$

$\{w_n\}$ ist entweder von $\{x_n\}$ (**C1xy**) oder von $\{y_n\}$ (**C1yx**) statist

Es sei zuerst zu betonen, dass hier auch eine Unterscheidung zwischen Input und Output mit Hilfe der Annahmen **B0xw** oder **B0yw** wichtig ist. (Man kann auch Scheinabhängigkeit zwischen dem Input und dem Restprozess zulassen **BB0xw**, was für geophysikalische Prozesse vernünftig ist. In diesem Fall nennen wir die zu untersuchende Nullhypothese **CC1xy**)

Es ist viel schwieriger eine Nullhypothese wie **C1xy** oder **C1yx** zu verwerfen, als die vorigen Nullhypothesen. Und besonders mit Surrogaten ist das komplizierter als vorher. Einen Äquivalenten zum Misch-Linear-Prozess lässt sich hier etwas schwieriger konstruieren. Eine Gesamtheit von verschiedenen gleich wahrscheinlichen Modellen zur Beschreibung der beiden Zeitreihen muss verständlicherweise den Restprozess $\{\hat{w}_n\}$ auch modellieren. Dieser Prozess, der nichtlinear und instationär sein darf, ist aber völlig unbekannt. Seine Instationarität macht Modellierungen in kleinen Teilintervallen nicht auf die ganze Zeitreihe nicht verallgemeinbar. Es gibt aber einen künstlichen Ausweg. Bevor ich diesen Ausweg vorschlage erwähne ich der Vollständigkeit halber zwei andere Methoden, die berücksichtigt werden können:

1. Simulated-Annealing-Methode von Schmitz und Schreiber [SS 00, Sch 00c]: Diese Methode erzeugt aus einer Zeitreihe Surrogate, indem zufällig die Elemente der Zeitreihe geschüttelt werden und dann durch Permutationen zweier Elemente weiter so modifiziert werden, dass eine Kostfunktion, die man je nach Bedürfnissen anders definieren kann, minimiert wird. Die Methode ist noch komplizierter. In Anlehnung an thermodynamisches Gedankengut lässt man die Möglichkeit zu, durch die Permutationen die Kostfunktion auch zu vergrößern. Die Wahrscheinlichkeit für eine Erhöhung der Kostfunktion wird von einem Parameter, *Temperatur*, kontrolliert und wird ständig verkleinert bis zu einem Gefrierpunkt, wo das Iterierungsverfahren endlich zu einer Lösung konvergiert, die die Kostfunktion gut genug minimiert.

In der Kostfunktion stecken alle Eigenschaften, die wir in den Surrogaten erhalten sehen möchten. In unserem Fall für **C1xy** lassen wir die Input-Zeitreihe als Referenzzeitreihe fest und finden Surrogate für die Output-Zeitreihe, die die linearen Kreuzkorrelationen mit der Referenz-Zeitreihe bis zu einer bestimmten Ordnung in verschiedenen Zeitintervallen behalten. Für diese zu erhaltenden Größen wird in der Kostfunktion Rechnung getragen.

Die Simulated-Annealing-Methode ist leider sehr zeitaufwendig. Bestimmt wird sie in der Zukunft mehr benutzt werden, wenn wir Rechner haben, die 1000 mal schneller sind als die jetzigen. Hier erwähne ich nur diese Möglichkeit der Vollständigkeit halber.

2. Die zweite vorgeschlagene Methode, die zur Zeit weiterentwickelt wird, ist die ICA-Quellentrennung-Methode für konvolutive Mischungen. Mit ICA [Lee 98] ist die *Independent Components Analysis* gemeint, eine Weiterentwicklung der PCA, *Principal Components Analysis* (Hauptkomponentenanalyse). Die Standard-ICA-Problematik ist die blinde Trennung von statistisch unabhängigen Quellsignalen von momentanen linearen Mischungen dieser Quellen, wobei die Anzahl der Quellsignale der Anzahl der Mischsignale gleich ist. Eine Weiterentwicklung der Standard-ICA lässt konvolutive (gefaltete) Mischungen als Verallgemeinerung der instantanen Mischungen zu.

Das lässt sich hier (für **C1xy**) anwenden. Hier haben wir zwei Mischsignale $\{x_n\}$ und $\{y_n\}$ und wir möchten 2 Quellsignale $\{x_n\}$ und $\{w_n\}$ (siehe Gl.(18)) daraus trennen. Wenn die Trennung gelingt, dann hat man ein lineares Modell für die Beziehung zwischen $\{x_n\}$ und $\{y_n\}$. Ein Ensemble von Modellen zur Erzeugung von Surrogaten bekommt man zum Beispiel, indem man z.B. zufällige mit der Messgenauigkeit der Zeitreihen verträglichen Störungen addiert und dann wieder mit der ICA-Methode modelliert.

Was ist der jetzige Stand der Entwicklung? Je nach Länge des Mischungsfilters lassen sich die 2 Quellen trennen. Jedenfalls kann man es versuchen. Inwieweit es schließlich funktioniert hängt stark von den Signalen ab. Eine Patentlösung gibt es noch nicht...

Diese Möglichkeit wird hier nur daneben erwähnt.

Wir kehren zurück zu unserem Misch-Prozess zur Prüfung der Hypothese **C1xy**. Das Problem bestand darin, verschiedene gleichwahrscheinliche Modelle zu konstruieren, weil die gewöhnliche Methode mit der Betrachtung von Teilzeitreihen wegen der Instationarität des Restprozesses unbrauchbar ist. Wir sollen eine andere Methode finden.

Jetzt wird unsere Idee erklärt. Nehmen wir an, wir haben einen Algorithmus **A** (z.B. mit kleinsten Quadraten), der aus zwei Zeitreihen $\{x_t\}$ und $\{y_t\}$ eine optimale lineare Transformation bis zu einer vorgegebenen Ordnung p abschätzt: $y = f \otimes x + w$ (f ist ein Filter der Länge p w ist die Restzeitreihe). Es gilt also:

$$A[x, y] = f \quad (20)$$

Ein Filter f entspricht einem Modell (*auch gehört die Restzeitreihe zum Modell*). Wir betrachten die folgenden Modelle:

$$A[x, y + z^i] = f_i ; z^i \text{ sind von } x \text{ statistisch unabhängig} \quad (21)$$

Im Idealfall (d.h. für genügend langes x und nicht sehr großes z^i) gilt: $f_i \approx f$. Auf diese Weise kann man verschiedene Modelle ermitteln. Damit diese Modelle gleichwahrscheinlich werden, müssen alle z^i mit derselben Prozedur gegeben werden. Zur Prüfung der Nullhypothese **C1xy** wählen wir:

$$z^i = z^i(\epsilon) = \epsilon P[y] \quad (22)$$

ϵ ist eine nicht sehr große Zahl (z.B. $\frac{1}{2}$) und $P[y]$ ist eine zufällige Permutation von y .

Zur Prüfung der Nullhypothese **CC1xy** wählen wir:

$$z^i = z^i(\epsilon) = \epsilon \text{ Surrogate}[y] \quad (23)$$

Surrogate[y] ist ein FT-Surrogat von y .

So konstruiert man (bei einer Vorgabe von ϵ) einen entsprechenden Misch-Prozess zur Prüfung der Linearitätsannahmen.

Es gibt aber eine Unschönheit in diesem Aufbau. Die Modelle des Mischprozesses sind optimale Abschätzungen aus N Punkten (N ist die effektive Länge der Zeitreihen - Länge der Zeitreihe + 1 - Länge des Filters). Sie werden sehr wahrscheinlich starke Abweichungen voneinander haben. Es ist besser, gemittelte Modelle, \bar{f}_i , in den Mischprozess aufzunehmen. Bestimmt wird nicht ein

Mittelwert der Filter mehrerer Modelle gemeint, sondern die Abschätzung der Modelle wird auf mehrere Zeitreihen (n Zeitreihen) erweitert.

$$\begin{aligned} \overline{A}[\{x_t, y_t\}] &= \overline{A}[\{x_t, y_t\}, \epsilon, n] = \\ &A[\{x_t, y_t + z_t^1(\epsilon)\} \cup \{x_t, y_t + z_t^2(\epsilon)\} \cup \dots \cup \{x_t, y_t + z_t^n(\epsilon)\}] = \overline{f} \end{aligned} \quad (24)$$

Ein möglicher Ansatz für $\overline{A}[\{x_t, y_t\}, \epsilon, n]$ ist der ansatz der kleinsten Quadrate. Es sind aber diesmal die kleinsten Quadrate aus n Zeitreihen. Jetzt wird der Algorithmus $\overline{A}[\{x_t, y_t\}, \epsilon, n]$ k mal durchgeführt um k verschiedene gleichwahrscheinliche Modelle zu ermitteln.

■ 2.5 Zusammenfassung

In diesem Kapitel untersuchten wir zuerst die theoretischen Grundlage der FT-Surrogatmethode. Wir fanden, dass die wichtige Annahme der Phasengleichverteilung, auf der die Methode basiert, im Allgemeinen nicht richtig ist. Typische Realisierungen linearer Prozesse können so für nichtlinear gehalten werden. FT-Surrogate sind aber zur Begründung einer speziellen Art der Linearität, Theiler-Linearität, gut. Auch wurde eine Modifikation der Histogramm-Abbildung vorgeschlagen. Wir unterschieden zwischen prozessbezogenen und realisierungsbezogenen Attributen und fügten operationelle Begriffe für die Linearität und die schwache Stationarität einer Zeitreihe ein. Mit Hilfe des Begriffs des Misch-Linear-Prozesses wurde ein einheitlicher Zugang für Surrogattests auf Linearität vorgeschlagen. Eine wichtige Surrogatmethode lässt sich so begründen, die MA-Ensemble-Methode. Sie kann als eine Art Vereinigung der Fourier- und der Modellierungsmethode betrachtet werden. sie vermeidet aber viele Nachteile der FT-Methode. Eine andere Klasse von Surrogaten wurde eingeführt, die für Stationaritäts- und Abhängigkeitstests nützlich ist.

Schließlich wurde eine Hierarchie von Linearitätshypothesen vorgeschlagen. Wenn man auch die Abhängigkeit zwischen Zeitreihen betrachtet, dann ergeben sich viel interessantere Linearitätshypothesen als die nicht sehr nützliche Frage: "*Ist diese Zeitreihe nichtlinear*"? Für alle Hypothesen in der Hierarchie wurden Surrogattests vorgeschlagen.

3 Nichtlinearität in der Polbewegung?

■ 3.0 Einführung

Vor über 200 Jahren leitete Leonard Euler ein quadratisches Differentialgleichungssystem 3. Ordnung zur Beschreibung der Rotation der Erde als starren Körper.

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} I_1 \omega_1 &= (I_2 - I_3) \omega_2 \omega_3 + M_1 \\ \frac{d}{dt} I_2 \omega_2 &= (I_3 - I_1) \omega_1 \omega_3 + M_2 \\ \frac{d}{dt} I_3 \omega_3 &= (I_1 - I_2) \omega_1 \omega_2 + M_3\end{aligned}\tag{1}$$

Dabei sind I_1 , I_2 und I_3 die Hauptträgheitsmomente der Erde (I_1 und I_2 sind äquatorial und I_3 polar), $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ der Vektor der Winkelgeschwindigkeit und $\mathbf{M} = (M_1, M_2, M_3)$ das äußere Drehmoment, das im freien Fall 0 gesetzt wird. Wenn man berücksichtigt, dass die äquatoriale Asymmetrie der Figur der Erde ($\epsilon = \frac{I_2 - I_1}{I_3} = O(10^{-5})$) sehr klein ist, und noch dazu äußere Kräfte vernachlässigt ($\mathbf{M} = 0$, freier Fall), dann lässt sich das Gleichungssystem (1) auf die Differentialgleichungen eines linearen Oszillators reduzieren.

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \omega_1 &= \Omega_{\text{Eu}}^2 \omega_2 \\ \frac{d}{dt} \omega_2 &= -\Omega_{\text{Eu}}^2 \omega_1\end{aligned}\tag{2}$$

Es folgt, dass sich die Rotationsachse der Erde in einer freien Nutationsbewegung mit der Periode:

$$\frac{2\pi}{\Omega_{\text{Eu}}} = 2\pi \left(\frac{I_3 - I_1}{I_1} \omega_3 \right)^{-1} \approx 10 \text{ Monate}\tag{3}$$

bewegt. Jedoch man fand diese Periode in den astronomischen Beobachtungen nicht. Sondern Chandler fand 1891 zwei andere Perioden, eine von 14 Monaten und eine von 12 Monaten. Die 12 monatige (*d.h. die jährliche*) Periode kann einfach erklärt werden. Sie ist eine Folge der saisonalen Massenverteilungen in der Atmosphäre und in der Hydrosphäre. Die jährliche Periode wird von äußeren Kräften getrieben. Aber die andere Periode, (*die Chandler-Periode*), lässt sich schwer erklären. Man kennt keine äußeren geophysikalischen Vorgänge, die die Periode 14 haben. Diese Periode scheint eine Eigenschaft des inneren Erdsystems zu sein und nicht etwa eine Eigenschaft der äußeren treibenden Kräfte. Und das System soll eine Eigenschwingung haben, die Euler-Schwingung. Also ist es am natürlichsten, dem Ansatz zu folgen, dass die Chandler-Periode eine Modifikation der Euler-Periode ist.

Die späteren Modellierungen verfeinerten das einfache starre Modell von Euler. Realistische Modelle betrachten eine mehrkomponentige Erde mit flüssigem Kern und festem viskoelastischem Mantel. Die Deformation der Figur der Erde infolge der veränderlichen Rotation bewirkt eine Vergrößerung der Periode der Eigenschwingung. Mit passend gewählten Parametern erreicht man

Eigenschwingungen der Periode 14 Monate. Die Chandler-Periode kann also als eine Eigenschwingung des Erdsystems erklärt werden. Was aber nicht erklärt wird, ist, wieso eine solche freie Oszillation nach 100 Jahren nicht abgedämpft wurde. Denn gerade diese realistischen Modelle, die eine Chandler-Periode von 14 Monaten erreichten, können ohne die innere Dämpfung nicht funktionieren.

Die Suche nach der Energiequelle, die die Chandler-Periode versorgt, ist noch nicht abgeschlossen. Die Hauptenergiequelle bleibt unbekannt. Die meisten Forscher auf dem Gebiet verwendeten lineare Ansätze und suchten nach äußeren treibenden Kräften, die im Bereich der Chandler-Periode genug aktiv sind. Die in Frage kommenden geophysikalischen Phänomene sind aber nicht sehr gut erfasst. Das gibt ihnen Hoffnung, dass die Erfassung dieser noch teilweise unbekannt geophysikalischen Phänomene die Frage nach der treibenden Kraft der Chandler-Periode endgültig klären wird.

Aber im Gegenzug gibt es Vieles, was eine nichtlineare Behandlung der Polbewegung angebracht macht.

- Während die beobachtete Polbewegung in ihrem Spektrum einen scharfen Gipfel bei der jährlichen Periode zeigt, hat sie ein Band von Aktivitäten in der Nähe der Chandler-Periode. Die Chandler-Periode hat kein festes zeitliches Verhalten. Jedenfalls sieht es so aus, als wäre die Chandler-Welle, im Gegensatz zur Jahreswelle, keine reine harmonische Welle.
- Der Mechanismus der Versorgung der Chandler-Welle mit Energie kann möglicherweise nichtlinear sein. Wang bemerkt in [Wan 02], dass die Jahreswelle nicht ganz entfernt von der Chandler-Welle liegt, und meint, ein noch unbekannter nichtlinearer Effekt kann bewirken, dass die Jahreswelle die Energiequelle der Chandler-Periode ist. Sonechkin [Son 01] schlägt einen anderen Mechanismus vor.
- Die Euler'schen Gleichungen (1) sind ursprünglich nichtlinear. Unter bestimmten Bedingungen (d.h. mit unrealistischen Parametern) lassen sie sogar chaotische Lösungen zu.
- Die geophysikalischen treibenden Kräfte sind alle nichtlinearer Natur (Dynamik der Atmosphäre und der Hydrosphäre auf der Oberfläche und Magnetohydrodynamik im Kern).
- Und schließlich könnten nichtlineare datenanalytische Methoden *hoffentlich* qualitativ neue Einsichten in die Thematik einbringen. Man lernt dadurch etwas über *topologische* Eigenschaften von Attraktoren... usw. In diesem Sinne gab es auch einige Publikationen über die Polbewegung, z.B. [FM 99, FM00].

Trotzdem spricht Einiges gegen diese nichtlineare Euphorie. Zuerst ist eine lineare Auflösung des Problems der Erhaltung der Chandler-Welle in Sicht. In der letzten Zeit und nach Studium einiger realistischer Ozean-Modelle kamen einige Forscher zur Überzeugung, dass die wichtigste treibende Kraft im Ozean liegt. Zusammen mit den bekannten treibenden Kräften der Atmosphäre reichen die Ozean-Erregerkräfte völlig zur Erklärung der Chandler-Welle, so Gross [Gro 00]. Die Linearisierung der Euler-Gleichungen ist sehr natürlich. Höhere Terme (als die linearen) sind um mindestens 6 Größenordnungen kleiner und sind deswegen zur Erklärung der beobachteten Zeitreihen sicher vernachlässigbar. In [SRS 92] und [SSR 93] wurde ohne Linearisierung im Rahmen von Planetenmodellen gerechnet. Charakteristische Zeiten für dieses Modell waren in Millionen von Jahren. Die längsten gut brauchbaren Zeitreihen der Polbewegung sind aber etwa 150 Jahre lang. Auch sind die Ideen über die nichtlinearen Mechanismen zur Erregung der Chandler Welle sehr

spekulativ und rein qualitativer Natur. Keiner konnte ein konkretes Erdmodell aufstellen, dessen numerische Lösung diese behaupteten Effekte zeigt. Und über die Dimension eines Attraktors zu sprechen, macht fast immer wenig Sinn, weil solche Abschätzungen in der Anwesenheit vom Rauschen sehr instabil sind. Und das komplizierte Verhalten der Zeitreihen der Polbewegung wie die schwache Vorhersagbarkeit, kann eher durch Stochastizität als durch Chaotizität erklärt werden.

Wir sind der Meinung, dass auf die Notwendigkeit einer nichtlinearen Behandlung der Polbewegung geprüft werden soll. Wenn in den vorhandenen Daten signifikante Unterstützung für nichtlineares Verhalten des inneren Systems (d.h. abgesehen von der Nichtlinearität der äußeren Erreger) existiert, dann sind nichtlineare Methoden berechtigt und auch notwendig. Die Suche nach anderen unabhängigen äußeren treibenden Kräften würde dann die gesuchte Erklärung des Phänomens nicht bringen können.

Anderenfalls (d.h. wenn keine signifikanten nichtlinearen Eigenschaften entdeckt werde) kann eine nichtlineare Behandlung kaum berechtigt sein, besonders wenn man sich an Winzigkeit der nichtlinearen Terme erinnert. In diesem Fall darf von Chaos und Attraktor (usw...) keine Rede sein.

In diesem Kapitel betrachten wir den nichtlinearen Charakter der Polbewegung und prüfen einige Nullhypothesen diesbezüglich. Methoden aus dem ersten und dem zweiten Kapitel werden verwendet.

■ 3.1 Charakterisierung des Problems

Wir nehmen an, wir haben eine endliche Anzahl von dynamischen Variablen im zu untersuchenden System und fassen die Variablen zusammen in einem Vektor \mathbf{u} . Im Fall des starren Modells der Erde von Euler (1) gilt $\mathbf{u} = \boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$. In einem Modell mit zwei Komponenten (Mantel und Kern) hat man 6 Variable:

$$\mathbf{u} = (\boldsymbol{\omega}_{\text{Mantel}}(t), \boldsymbol{\omega}_{\text{Kern}}(t)) \quad (4)$$

Es gibt verschiedene zwei-komponentige Erdmodelle, die verschieden kompliziert sind. Ein ziemlich realistisches Modell ist eins mit flüssigem Kern und viskoelastischem Mantel. Anders als Modelle mit starrem Körper deformiert sich die Figur der Erde nach diesem Modell. Mit Hilfe der Erhaltung des Drehimpulses kriegt man ein Differentialgleichungssystem der Form:

$$\mathbf{F}(t, \mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}) = \boldsymbol{\psi} \quad (5)$$

wobei $\boldsymbol{\psi}$ die Erregerfunktion ist, die Anteile verschiedener treibender Kräfte kombiniert: $\boldsymbol{\psi}_{\text{Atmosphäre}}, \boldsymbol{\psi}_{\text{Ozean}}, \boldsymbol{\psi}_{\text{Mond-Sonne}}, \dots$

Gleichung (5) stellt ein Input-Output-Problem (Eingang-Ausgang-Problem) dar. Die Erregerfunktion ist der treibende Eingang (Input). Die Respons, \mathbf{F} , bestimmt die Dynamik der Output-Variablen \mathbf{u} und ist links. Das System ist im Allgemeinen nichtlinear und nichtautonom (zeitabhängig).

Für kleine \mathbf{u} lässt sich (5) linearisieren zu:

$$\dot{\mathbf{u}} + A \mathbf{u} = \text{const} (\psi_{\text{Atmosphäre}} + \psi_{\text{Ozean}} + \psi_{\text{Mond-Sonne}}) \quad (6)$$

Die Matrix A ist zeitunabhängig, wenn Stationarität der Respons angenommen wird. Wenn man noch die äquatorialen Trägheitsmomente gleich setzt dann entkoppelt sich das System (6) zu zwei Systemen.

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{u}}^i + A^i \mathbf{u}^i &= \text{const} (\psi_{\text{Atmosphäre}}^i + \psi_{\text{Ozean}}^i + \psi_{\text{Mond-Sonne}}^i) \quad i = 1, 2 \\ \mathbf{u}^1 &= \{\omega_M^1, \omega_M^2, \omega_K^1, \omega_K^2\}, \mathbf{u}^2 = \{\omega_M^3, \omega_K^3\} \end{aligned} \quad (7)$$

Einige Output-Variable sind praktisch unsichtbar (wie die Winkelgeschwindigkeit des Kerns ω_{Kern}). Das erste System beschreibt die Bewegung der Rotationsachse (die Polbewegung). Das zweite System beschreibt die Änderungen des Betrags der Rotationsgeschwindigkeit (Änderung der Tageslänge-*Length of Day=lod*). Für eine Axialsymmetrische Erde sind die Polbewegung und die Tageslänge dynamisch voneinander unabhängige Probleme.

Nicht alle Input-Variablen sind bekannt. Unsere Untersuchung der Polbewegung betrachtet im Prinzip als Input-Variable, atmosphärischen Erregerfunktionen: $xaam = \psi_{\text{xAtmosphäre}}$ und $yaam = \psi_{\text{yAtmosphäre}}$, und als Output-Variable, die Polkoordinaten: $xp = \frac{\omega_M^1}{\omega_0}$ und $yp = \frac{\omega_M^2}{\omega_0}$, wobei ω_0 die mittlere Rotationsgeschwindigkeit ist.

Die verwendeten Pol-Zeitreihen sind von IERS (International Earth Rotation Service): EOP(IERS) C04. (<http://hpiers.obspm.fr/>)

Die Zeitreihen bestehen aus täglichen Werten seit 1962. Wir verwendeten:

xp: x-Koordinate der Polbewegung
 yp: y-Koordinate der Polbewegung
 xpdot: 1. Ableitung von xp
 ypdot: 1. Ableitung von yp

Die atmosphärischen Daten kommen von "NCEP/NCAR Reanalysis Project" (<http://wesley.wmb.noaa.gov/reanalysis.html>). Sie bestehen aus 6-stündigen Werten seit 1958. Wir verwendeten tägliche Werte ab 1962 in der Form folgender Zeitreihen

xWN : x - Komponente des Windterms in der nördlichen Hemisphäre
 xDN : x - Komponente des Druckterms in der nördlichen Hemisphäre
 xBN : x - Komponente des Druckterms mbN in der nördlichen Hemisphäre
 xWS : x - Komponente des Windterms in der südlichen Hemisphäre
 xDS : x - Komponente des Druckterms in der südlichen Hemisphäre
 xBS : x - Komponente des Druckterms mbN in der südlichen Hemisphäre
 yWN : y - Komponente des Windterms in der nördlichen Hemisphäre
 yDN : y - Komponente des Druckterms in der nördlichen Hemisphäre
 yBN : y - Komponente des Druckterms mbN in der nördlichen Hemisphäre
 yWS : y - Komponente des Windterms in der südlichen Hemisphäre
 yDS : y - Komponente des Druckterms in der südlichen Hemisphäre
 yBS : y - Komponente des Druckterms mbN in der südlichen Hemisphäre

(Bemerkung: mbN bezeichnet die inverse barometrische Näherung im Druckterm. Zu weiteren Informationen zu den Datenreihen konsultiere man die entsprechenden Internet-Seiten)

Unsere Aufgabe ist die Nullhypothese zu prüfen:

" $\{x_{aa}, y_{aa}\}$ als Teil eines Inputs und $\{x_p, y_p\}$ als Teil des Outputs lassen sich durch eine Beziehung wie (6) beschreiben." (d.h. die Polbewegung hängt von der atmosphärischen Erregung linear ab).

■ 3.2 Die Prüfung der Abhängigkeit der Polbewegung von der atmosphärischen Erregung auf Linearität und Stationarität

Die angenommene zu untersuchende Nullhypothese ist $C1xy$ (d.h. die Zeitreihe $\{y_n\}$ ist als Output von dem Input $\{x_n\}$ linear abhängig, wobei andere nichtlineare und nichtstationäre Input-Terme als $\{x_n\}$ erlaubt sind), wobei für den Input $\{x_n\}$ eine Zeitreihe aus den Zeitreihen der atmosphärischen Erregung und für den Output $\{y_n\}$ eine Zeitreihe der Polbewegungszeitreihen stehen. Die wichtigsten Perioden in der Polbewegung sind die Chandler-Periode (ungefähr 14 Monate), die Jahresperiode und die Halbjahresperiode. Um eine stabilere Abschätzung der Abhängigkeitsparameter zwischen dem Input und dem Output, die gegenüber diesen scharfen Perioden relativ unempfindlich ist, zu ermöglichen, betrachten wir filtrierte Versionen der Zeitreihen, die nur die Frequenzen enthalten, die höher sind als 2,1 cpy (Zyklen pro Jahr). So garantieren wir den Ausschluss der großen Gipfel im Spektrum, die sicher auch von nichtatmosphärischen Kräften erregt werden. Von den 12 verschiedenen Zeitreihen der atmosphärischen Erregung wählen wir für unsere Tests, diejenigen Druck- und Windzeitreihen, die mit den beiden Zeitreihen der Polbewegung am stärksten linear korreliert sind. Zur Bestimmung dieser maximalen linearen Korrelation benutzen wir unseren Algorithmus von mlc . Wir verwenden für unsere Abschätzungen die Tiefe 25 für das Input-System. D.h. wir schätzen den Output als lineare Funktion der letzten 25 Input-Werte.

		MLC ² zwischen						
		xp		yp				
und	(xWN	0.0212297	0.0113752	(xWN	0.0103706	0.00874519
		xDN	0.0366822	0.0283796		xDN	0.0585059	0.0133621
		xBN	0.0440321	0.014366		xBN	0.105709	0.0198928
		xWS	0.0247535	0.0135948		xWS	0.00192227	0.0226241
		xDS	0.0611892	0.0181959		xDS	0.00804463	0.0236354
		xBS	0.0739808	0.0143096		xBS	0.0348527	0.0199182
		yWN	0.0832156	0.0167156		yWN	0.00807059	0.0103565
		yDN	0.128475	0.0479878		yDN	0.0243016	0.0233579
		yBN	0.153118	0.0219985		yBN	0.0399023	0.0394963
		yWS	0.00954603	0.0313512		yWS	0.02703	0.0185023
	yDS	0.0210273	0.0307664		yDS	0.034926	0.0356093	
	yBS	0.00667623	0.026961		yBS	0.00158565	0.0268586	
))			

Die linke (bzw. rechte) Tabelle zeigt die Quadrate der maximalen linearen Korrelationen (mlc) zwischen den atmosphärischen Erregern und der x-Koordinate der Polbewegung (x_p) (bzw. y-Koordinate der Polbewegung (y_p)). In der dritten Spalte steht der Maximalwert aus 19 mlc^2 - Werten zwischen den atmosphärischen Erregern und linearen Surrogaten der Pol-Koordinate.

Links: (mit x_p) Nur für die letzten 3 Zeitreihen sind keine linearen Korrelationen signifikant nachgewiesen. Am stärksten (zum Quadrat 15%) ist die Korrelation mit der Zeitreihe y_{BN} (der y -Druckzeitreihe mit barometrischer Näherung in der nördlichen Halbkugel). Die stärkste lineare Korrelation (zum Quadrat 8%) mit einer Windzeitreihe hat x_p mit y_{WN} (der y -Windzeitreihe in der nördlichen Halbkugel).

Rechts: (mit y_p) Für die Zeitreihen x_{WS} , x_{DS} , y_{WN} , y_{DS} und y_{BS} sind keine linearen Korrelationen signifikant nachgewiesen. Am stärksten (zum Quadrat 11%) ist die Korrelation mit der Zeitreihe x_{BN} (der y -Druckzeitreihe mit barometrischer Näherung in der nördlichen Halbkugel). Die stärkste lineare Korrelation (zum Quadrat 3%) mit einer Windzeitreihe hat y_p mit y_{WS} (der y -Windzeitreihe in der südlichen Halbkugel).

Für weitere Hypothesentests nehmen wir exemplarisch die Zeitreihen: x_p und y_{BN} und nennen sie x und y . Es wird ein Signifikanzniveau von 95% erzielt. (Das erreicht man mit mindestens 19 Surrogaten)

■ 3.3 Linearität und Stationarität der Polbewegung

Wir gehen zuerst in der im vorigen Kapitel vorgeschlagenen Hierarchie der Hypothesen

Schwache Stationarität wird abgelehnt für x_p und y_{BN} (x und y) es folgen die Hypothesen der Hierarchie:

AG0x	abgelehnt	AG0y	abgelehnt
A0x	abgelehnt	A0y	abgelehnt
AG1xy	abgelehnt		
A1xy	abgelehnt		
B0xy	abgelehnt		
BB0xy	abgelehnt		
B1xy	abgelehnt	B1yx	abgelehnt
C1xy	nicht abgelehnt	C1yx	nicht abgelehnt
CC1xy	nicht abgelehnt	CC1yx	nicht abgelehnt

Die Resultate werden nicht weiter erläutert. Dieses Kapitel ist eigentlich als eine kurze Zusammenfassung der Resultate einiger Hypothesen anzusehen. Im Anhang C ist ein weiterer Artikel mit mehr Erläuterung gegeben.

■ 3.4. Beispiele von Hypothesen zur Polbewegung

■ Abhängigkeit zwischen der Polbewegung und der Tageslänge

Die Tageslänge (lod) ist von der y_p signifikant abhängig. (aber nicht von x_p)

	MLC ²	
	lod	19 Surrogate
x_p	0.0360155	0.0496284
$x_{p\dot{}}$	0.0377152	0.0471861
y_p	0.0404648	0.0311506
$y_{p\dot{}}$	0.0407669	0.0262245

Diese Abhängigkeit ist kein Nachweis gegen die Entkopplung der Tageslänge von der Polbewegung. Es ist nur ein Zeichen dafür, dass beide dynamisch entkoppelten Systeme von denselben physikalischen Umständen getrieben werden (z.B. Wind)

■ Abhängigkeit zwischen Polbewegung und Sonnenflecken

Es gibt Scheinabhängigkeit (wegen der 11-jährigen Periode) aber keine echte Abhängigkeit

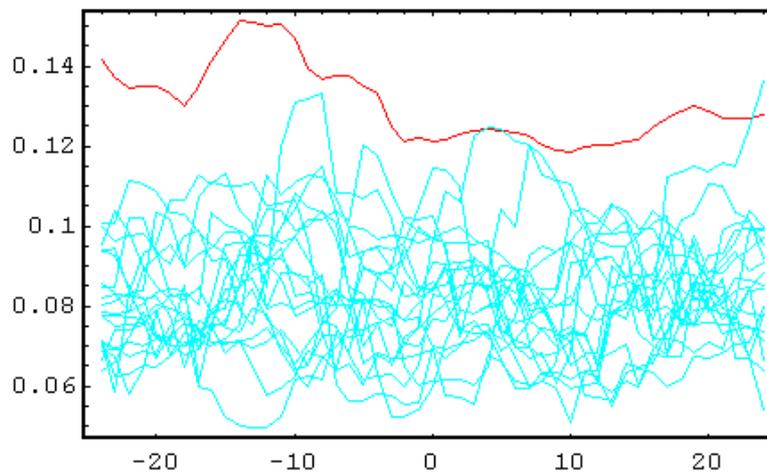


Figure 1

Abb.1: x_1 und die Anzahl der Sonnenflecken sind nach dem ersten Gesichtspunkt signifikant voneinander abhängig. MLC (y-Achse) wird mit 19 geschüttelten Surrogaten für verschiedene Zeitverschiebungen (x-Achse) verglichen

■ Abhängigkeit zwischen Polbewegung und QBO

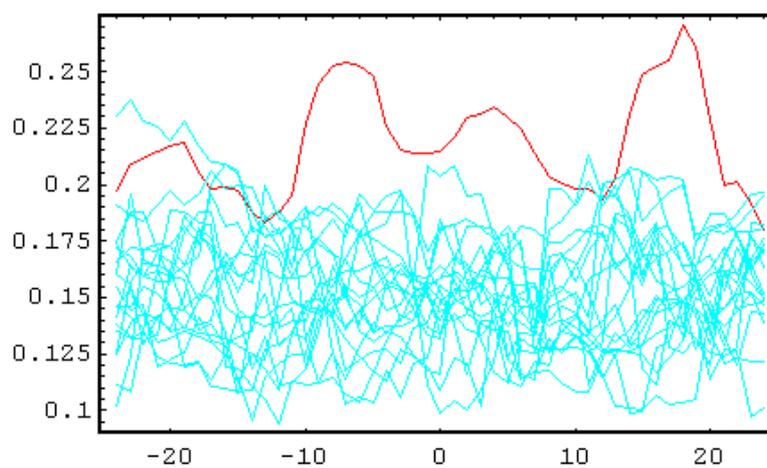


Figure 2

Abb.2: Es gibt Scheinabhängigkeiten (QBO: Periode ≈ 28 Monate $= 2 \cdot$ Chandler-Periode). MPC (y-Achse) wird für verschiedene Zeitverschiebungen (x-Achse) verglichen. Die maximale Polynomial-Korrelation erfasst die Ähnlichkeit mit der Chandler-Periode. (Vergleich mit 19 geschüttelten Surrogaten).

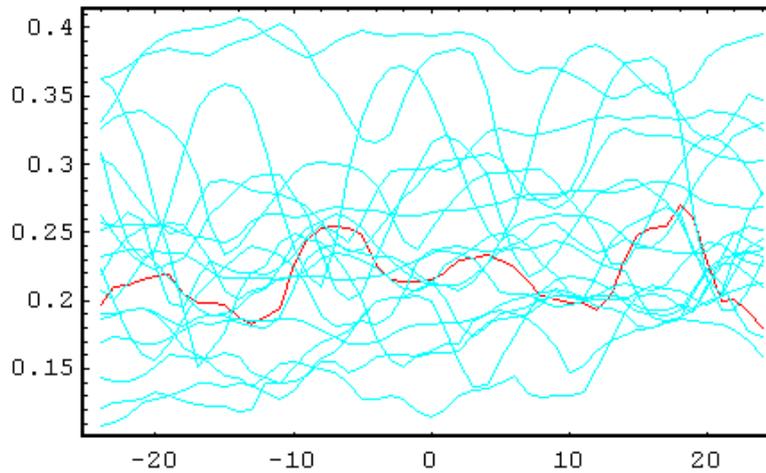


Figure 3

Abb.3: Wie oben, aber diesmal wird mit 19 linearen Surrogaten verglichen. Auf echte Abhängigkeit wird geprüft. Es gibt aber keine.

Es gab Vorschläge dafür, dass diese Quasi-Biennial Oscillation, die in der Stratosphäre tätig ist, vielleicht eine dynamische Beziehung mit der Chandler-Periode hat. Die Zeitreihe ist von [Barbara Naujokat \(naujokat@strat01.met.fu-berlin.de\)](mailto:naujokat@strat01.met.fu-berlin.de)

Man kann die Hypothese der Unabhängigkeit (BB0xy) nicht widerlegen.

■ Abhängigkeit zwischen Pol-Chandler und Pol-Halb-Chandler

Es gibt Scheinabhängigkeiten aber keine Abhängigkeiten. Die Nichtlinearität der Chandler-Frequenz kann nicht nachgewiesen werden. Das gelingt weder mit dem Bispektrum noch mit dem Phasensignal.

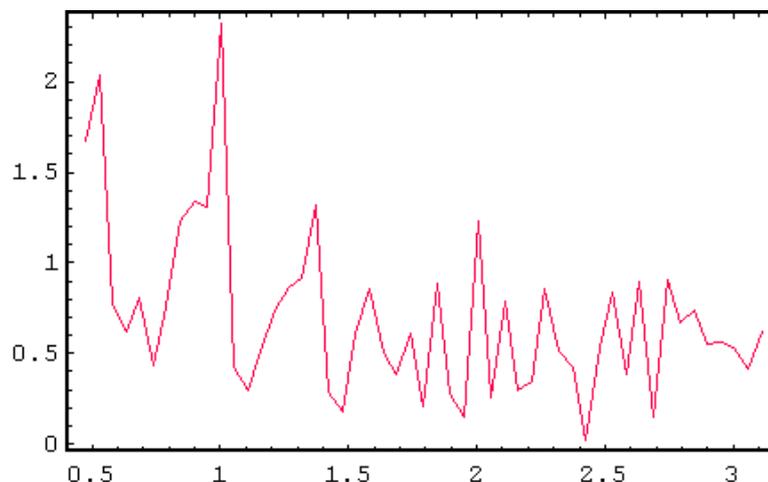


Figure 4

Phasensignal einer vorfiltrierten Polkoordinate (x_p) im Frequenzbereich. x-Achse: Frequenzen in Zyklen Pro Jahr. y-Achse: $fbampq$. Die Jahreswelle wurde vorher wegfiltriert. Trotzdem ist ein Gipfel bei der jährlichen Frequenz sehr deutlich. Es gibt keinen Gipfel für die Chandler-Frequenz

■ 3.5 Zusammenfassung

dieser Kapitel diente nur dazu exemplarisch zu zeigen, dass qualitative nichtlineare Zeitreihenanalyse (sprich: Hypothesentests) praktische Bedeutung hat. Es wurde versucht über die Berechtigung und/oder Notwendigkeit einer nichtlinearen Behandlung der Polbewegung zu entscheiden. Es gab zwei Zugänge zu diesem Vorhaben. Erstens, man kann versuchen nachzuweisen, dass die Abhängigkeit zwischen dem Input (Erreger-Funktion) und dem Output (Polbewegung). Dabei kann man die allgemeinen Hypothesen der Art $CC1xy$ nicht ablehnen. Zweitens man konnte bestimmte Zeichen für Nichtlinearität in der Polbewegung aufsuchen, die nur in diesem System existieren. Und wir dachten sofort an die Chandlerwelle. Falls man die Nichtlinearität dieser Frequenz zeigen kann, dann folgt die Nichtlinearität des Systems, das diese Eigenschwingung produziert. (die Existenz eines Vielfachen der Chandler-Frequenz = Halb-Chandler-Welle) konnte nicht nachgewiesen werden. Scheinabhängigkeiten mit anderen geophysikalischen Prozessen konnten nachgewiesen werden. (Mit den Sonnenflecken und mit der QBO). Echte Abhängigkeit blieb aus. Es folgt, dass man keinen Grund hat, die linearen Methoden aufzugeben.

■ Zusammenfassung

In Kürze haben wir im ersten Kapitel einen neuen nützlichen Apparat kennengelernt. Unser Ausgangspunkt war eine glaubwürdige Annahme der nichtlinearen Datenreihenanalyse, die Annahme, dass nichtlineare Eigenschaften einer Zeitreihe ausschließlich in ihren Phasenspektrum liegen. Das veranlasste uns dazu, das Amplitudenspektrum zu entfernen, und dabei kamen wir auf natürlicher Weise in die Welt der cepstralen Transformationen. Obwohl es keine eindeutige Wahl für das gesuchte "Phasensignal" gab, war schnell deutlich, dass es eine einfache ziemlich natürliche Wahl gibt, die interessante Eigenschaften im Frequenzbereich und im Zeitbereich hat. Das Phasensignal einer Zeitreihe, bampq , misst im Frequenzbereich Korrelationen ihres Phasenspektrums und läuft im Zeitbereich mit ihr mit.

Das Phasensignal kann vielfältig von Nutzen sein. Sehr einfach und effektiv lässt sich mit Hilfe des Phasensignals auf Nichtlinearität im Theiler-Sinn (Phasengleichverteilung) prüfen. Dazu kann man verschiedene Teststatistiken im Frequenz- und im Zeitbereich konstruieren, deren Verteilungen theoretisch bekannt sind. Dadurch ersetzt man die Surrogatmethode und erreicht Signifikanzen, die mit Surrogaten schwer erreichbar sind. Gipfel im Spektrum des Phasensignals machen auf charakteristische Frequenzen aufmerksam, bei denen allgemeine Phasenkopplungen festgestellt und die nur mit Nichtlinearität (und nicht etwa mit Instationarität) erklärt werden können. Tests auf Nichtlinearität einer Zeitreihe, die den Wert des Phasensignals in der Umgebung kritischer Frequenzen (z.B. Gipfel im Amplitudenspektrum der Zeitreihe) prüfen diese kritischen Frequenzen auf Nichtlinearität und sind also gegenüber Instationarität unempfindlich. Das kann man von der ursprünglichen Surrogatmethode nicht behaupten.

Im Zeitbereich erreicht das Phasensignal signifikant hohe Werte bei außerordentlichen Ereignissen (z.B. bei Sprüngen). Das hilft bei der Untersuchung von Instationaritäten. Interessant ist die Beobachtung, dass die Phasensignale verschiedener Komponenten desselben dynamischen Systems sehr ähnlich aussehen. Das macht aus dem Phasensignal einer Zeitreihe aus einem dynamischen System einen Vertreter für das ganze System, der alle wesentlichen nichtlinearen und nichtstationären Eigenschaften des Systems erfasst. Als so ein Vertreter kann das Phasensignal zur Prüfung zweier Systeme auf statistische Unabhängigkeit verwendet werden.

Das Phasensignal, bampq , registriert also wichtige Ereignisse im zeitlichen Verlauf des ursprünglichen Signals. Kann man mit Hilfe des Phasensignals noch mehr über die Natur dieser Ereignisse lernen? Ein allgemeines Rezept ist schwierig. Eine Schwäche des Phasensignals ist die schwache Lokalität im Vergleich zu anderen cepstralen Transformationen (wie Differentialoperatoren). Entfernte Änderungen in der Zeitreihe verursachen größere Unterschiede. Ein anderes verwandtes Problem ist die schwache Stabilität der Abschätzung des Phasensignals. Besonders für stochastische Zeitreihen ist die Abschätzung des Phasensignalls empfindlich gegenüber der Wahl der zugrunde liegenden Teilzeitreihe. In diesen Fällen ist der konkrete numerische Wert des Phasensignals in einem bestimmten Punkt nicht gerade von Bedeutung. Statistische Beobachtungen sind aber aussagekräftig.

Verallgemeinerungen des Phasensignals konnten unter dem Begriff des Spektrumkorrelationssignals, SKS, formuliert werden. Die Verallgemeinerungen im Rahmen dieser Formulierung lassen im Allgemeinen das Amplitudenspektrum der Zeitreihe im Spiel. Das hat gegenüber dem Phasensignal bzgl. Lokalität und Stabilität

deutliche Vorteile, kann aber nicht als Nachweis der üblichen Nichtlinearität betrachtet werden. Vielmehr handelt es sich hier um eine Nichtlinearität im erweiterten Sinn, auf die mit dem SKS geprüft wird. Dieser erweiterte Nichtlinearitätsbegriff hat auch seine eigene Berechtigung.

Im zweiten Kapitel untersuchten wir zuerst die theoretischen Grundlagen der FT-Surrogatmethode. Wir fanden, dass die wichtige Annahme der Phasengleichverteilung, auf der sich die Methode basiert, im Allgemeinen nicht richtig ist. Typische Realisierungen linearer Prozesse können so für nichtlinear gehalten werden. FT-Surrogate sind aber zur Begründung einer speziellen Art der Linearität, Theiler-Linearität, gut. Auch wurde eine Modifikation der Histogramm-Abbildung vorgeschlagen. Wir unterschieden zwischen prozessbezogenen und realisierungsbezogenen Attributen und fügten operationelle Begriffe für die Linearität und die schwache Stationarität einer Zeitreihe ein. Mit Hilfe des Begriffs des Misch-Linear-Prozesses wurde ein einheitlicher Zugang für Surrogattests auf Linearität vorgeschlagen. Eine wichtige Surrogatmethode lässt sich so begründen, die MA-Ensemble-Methode. Sie kann als eine Art Vereinigung der Fourier- und der Modellierungsmethode betrachtet werden. Sie vermeidet aber viele Nachteile der FT-Methode. Eine andere Klasse von Surrogaten wurde eingeführt, die für Stationaritäts- und Abhängigkeitstests nützlich ist. Schließlich wurde eine Hierarchie von Linearitätshypothesen vorgeschlagen. Wenn man auch die Abhängigkeit zwischen Zeitreihen betrachtet, dann ergeben sich viel interessantere Linearitätshypothesen als die nicht sehr nützliche Frage: *"Ist diese Zeitreihe nichtlinear?"* Für alle Hypothesen in der Hierarchie wurden Surrogattests vorgeschlagen.

Der dritte Kapitel diente nur dazu exemplarisch zu zeigen, dass qualitative nichtlineare Zeitreihenanalyse (sprich: Hypothesentests) praktische Bedeutung hat. Es wurde versucht über die Berechtigung und/oder Notwendigkeit einer nichtlinearen Behandlung der Polbewegung zu entscheiden. Es gab zwei Zugänge zu diesem Vorhaben. Erstens, man kann versuchen nachzuweisen, dass die Abhängigkeit zwischen dem Input (Erreger-Funktion) und dem Output (Polbewegung). Dabei kann man die allgemeinen Hypothesen der Art $CC1xy$ nicht ablehnen. Zweitens man konnte bestimmte Zeichen für Nichtlinearität in der Polbewegung aufsuchen, die nur in diesem System existieren. Und wir dachten sofort an die Chandlerwelle. Falls man die Nichtlinearität dieser Frequenz zeigen kann, dann folgt die Nichtlinearität des Systems, das diese Eigenschwingung produziert. (die Existenz eines Vielfachen der Chandler-Frequenz = Halb-Chandler-Welle) konnte nicht nachgewiesen werden. Scheinabhängigkeiten mit anderen geophysikalischen Prozessen konnten nachgewiesen werden. (Mit den Sonnenflecken und mit der QBO). Echte Abhängigkeit blieb aus. Es folgt, dass man keinen Grund hat, die linearen Methoden aufzugeben.

A. Über nichtlineare Zeitreihenanalyse und die Surrogatmethode

Dieser Abschnitt ist von A. Schmitz, einem Spezialisten der Surrogatmethoden, geschrieben [Sch 00c]. Ich habe den Text nur ein wenig bearbeitet und meine Notizen kursiv zwischen eckigen Klammern eingeschoben.

Einleitung

Die nichtlineare Zeitreihenanalyse bildet das Bindeglied zwischen der Theorie der nichtlinearen, dynamischen Systeme einerseits und der Analyse von Daten andererseits. Die grundlegende Theorie der chaotischen, dynamischen Systeme wurde dabei im Wesentlichen von Mathematikern, wie z. B. Poincaré und Birkhoff, in der ersten Hälfte des 20. Jahrhunderts entwickelt und später von Kolmogorov, Smale, Sinai, Arnold und Ruelle — um nur einige zu nennen — ausgebaut. Ihr Ziel war die theoretische Beschreibung und die Bestimmung von Eigenschaften von Systemen, deren Dynamik als bekannt vorausgesetzt wurde. Auf der anderen Seite standen Experimentatoren mit Daten, die an Systemen aufgenommen wurden, deren zugrunde liegende Dynamik häufig nicht bekannt war. Beobachtete Irregularitäten in den Daten wurden dabei zunächst als das Ergebnis von externen Störungen, Messrauschen oder einer hohen Komplexität des Systems angesehen. Erst in den Achtzigerjahren gelangte eine weitere alternative Erklärung ins öffentliche Bewusstsein: Die Idee des deterministischen Chaos, welches sich durch eine sensitive Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen auszeichnet. Die Tatsache, dass selbst einfachste Systeme, wie z. B. Doppelpendel oder nichtlineare, elektrische Schaltkreise irreguläres, chaotisches Verhalten zeigen können, faszinierte besonders die Physiker. Für sie war und ist stets auch die Einfachheit der zugrunde liegenden Mechanismen ein Kriterium für die Attraktivität eines neuen Modells. Es zeigte sich schnell, dass die Theorien nicht direkt auf die experimentellen Daten anwendbar waren und erst adäquate Werkzeuge, nämlich die Methoden der nichtlinearen Zeitreihenanalyse, entwickelt werden mussten. Die rasante Geschwindigkeit dieser Entwicklung war nicht zuletzt auf die parallele Entwicklung von immer leistungsfähigeren und preiswerteren Computern zurückzuführen. Durch sie wurde es erstmals möglich, nicht nur große Datenmengen aufzunehmen und statistisch zu analysieren, sondern auch Gleichungen numerisch zu lösen, die analytisch nicht zugänglich waren. In der ersten Euphorie wurde vielerorts überschnell behauptet, in den unterschiedlichsten (nichtphysikalischen) Systemen "Chaos" gefunden zu haben. Einen entscheidenden Vorsprung im Umgang mit Daten hatten hier die Physiker, welche gewohnt sind, vorurteilsfrei an ein gegebenes Problem heranzugehen und zunächst einfachere Alternativen auszuschließen. Erste gewonnene Ergebnisse wurden kritisch hinterfragt und die statistische Signifikanz angezweifelt. Ein statistischer Test für die Existenz von Chaos sollte Klarheit schaffen. Dabei ist das theoretische Kriterium für das Auftreten von Chaos denkbar einfach: Ist der maximale Lyapunov-Exponent des Systems, welcher ein Maß für die exponentielle Divergenz einer infinitesimalen Abweichung darstellt, *positiv* und *endlich*, ist das System chaotisch. Leider ist der maximale Lyapunov-Exponent nur schwer aus einem Datensatz zu schätzen, was gleichfalls für die Angabe des Fehlers der Schätzung

gilt. Zudem weist Rauschen theoretisch einen unendlichen Lyapunov-Exponenten auf, während Schätzer selbstverständlich nur endliche Werte liefern können. Eine Unterscheidung zwischen Rauschen und Chaos wäre also ebenfalls nicht leicht. Auch hier ist also die direkte Umsetzung der Theorie nicht die praktikabelste. Eine Voraussetzung für das Auftreten von Chaos ist die Nichtlinearität des Systems. Darunter ist die Nichtlinearität der zugrunde liegenden, dynamischen Gleichungen des Systems zu verstehen, welche entweder in der kontinuierlichen Form:

$$\frac{d\vec{x}(t)}{dt} = \vec{F}[\vec{x}(t)]$$

als *Differentialgleichungen* oder in der zeitlich diskretisierten Form:

$$\vec{x}_{n+1} = \vec{M}(\vec{x}_n)$$

als *Abbildung* geschrieben werden können. Können in einem Datensatz keine Nichtlinearitäten nachgewiesen werden, kann die Existenz von Chaos zwar nicht ausgeschlossen werden, eine sinnvolle Anwendung der Methoden der nichtlinearen Zeitreihenanalyse lässt sich dann aber nicht mehr rechtfertigen. Andersherum ist aber natürlich der Nachweis von Nichtlinearität kein Beweis für das Auftreten von chaotischem Verhalten, sodass in diesem Fall weitere Untersuchungen notwendig sind. Die *lineare* Form der oben angegebenen Differentialgleichung kann leicht geschlossen gelöst werden und es stellt sich heraus, dass unter der Voraussetzung der Endlichkeit für lange Zeiten lediglich konstante oder periodische Lösungen auftreten. Diese können normalerweise leicht von chaotischen Lösungen unterschieden werden. Anders sieht dies aus, wenn das System hochdimensional ist oder in M stochastische Terme, d. h. Rauschanteile, erlaubt werden. Bevor man die modernen (chaosbezogenen) Methoden der nichtlinearen Zeitreihenanalyse anwendet, sollte man zuerst die offensichtliche Möglichkeit der linearen stochastischen Erklärung ausgeschlossen haben. Man soll auf Nichtlinearität testen.

Tests auf Nichtlinearität

1.1 Einleitung

In nahezu allen Bereichen der Wissenschaft können zeitlich variierende Prozesse beobachtet werden. Um zu einem Verständnis der Vorgänge in solchen Systemen zu gelangen, werden Daten in Form von Zeitreihen aufgenommen. Über den Erzeugungsprozess der zu analysierenden Daten ist dabei oft nichts oder nur wenig bekannt. Lineare Ansätze sollten in solchen Fällen der erste Schritt sein, denn sie können oft schon zu einem Verständnis der Prozessnatur führen. Hilfreich ist dabei die Vielzahl an allgemeiner und spezialisierter Literatur und ausgereiften, fertigen Programmpaketen für die lineare Zeitreihenanalyse. Die Anwendung der Methoden der *nichtlinearen* Zeitreihenanalyse auf Daten ist meist dadurch motiviert, dass viele Prozesse in der Natur nur schwerlich als linear angenommen werden können. In diese Kategorie fallen nicht nur viele physikalische Systeme, sondern auch die große Klasse der physiologischen Daten. In solchen Fällen stellt sich allerdings stets die Frage, ob die Anwendung der nichtlinearen Zeitreihenanalyse auch durch die *Daten* allein gerechtfertigt werden kann. Dabei spielt natürlich auch die Qualität der Daten bezüglich Aufnahmezeit, Länge und Rauschniveau eine entscheidende Rolle. In jedem Fall ist es wünschenswert, einen objektiven Test zu besitzen, der aussagt, ob *sichtbare* Nichtlinearitäten

in den Daten vorhanden sind. Der Einsatz von nichtlinearen Techniken kann nur dann sinnvoll sein, wenn ein solcher Test erfolgreich Nichtlinearität findet. Dabei hat sich die Surrogatmethode von Theiler et al. [TEL+92] als sehr populärer Ansatz erwiesen, der auch in dieser Arbeit als Grundlage dient und später beschrieben und kritisiert wird. Gemessene Zeitreihen sind aber selten ein Produkt eines rein linearen oder nichtlinearen, niedrigdimensionalen Systems. Sie sind vielmehr oft eine Mischung aus mehreren linearen, nichtlinearen und stochastischen Anteilen. Die in den Daten vorhandenen Nichtlinearitäten können also z. B. durch viele Freiheitsgrade oder starken Rauschanteil verwischt und deshalb nur sehr schwach ausgeprägt sein. Hinzu kommt, dass Nichtlinearitäten in unterschiedlichsten, auch *nicht*dynamischen Formen auftreten können, was nicht immer auf eine nichtlineare, deterministische Dynamik schließen lässt.

1.2 Statistische Tests

Tests können sowohl die Verifikation von angenommenen Eigenschaften als auch die Suche nach weiteren, neuen Eigenschaften zum Ziel haben. Die Untersuchung der Eigenschaften kann mit der Formulierung einer Frage beginnen, auf die ein Test eine Antwort geben soll. Typische Fragen sind z. B.:

- (a) Sind die Werte korreliert?
- (b) Welcher Verteilung unterliegen die Werte der Zeitreihe?
- (c) Zeigt die Zeitreihe chaotisches Verhalten?
- (d) Was ist die zugrunde liegende Dynamik?

Insbesondere können *Entscheidungsfragen* formuliert werden, auf die nur mit "ja" oder "nein" geantwortet werden kann. Jede Entscheidungsfrage filtert eine bestimmte Eigenschaft der Zeitreihe heraus. Komplexere Fragen können im Prinzip aus mehreren Entscheidungsfragen kombiniert werden, was aber in solch allgemeinen Fragen wie in Beispiel (d) wenig praktikabel ist. Zu jeder Entscheidungsfrage wird eine *Nullhypothese* aufgestellt. Die Nullhypothese besagt, dass die Antwort auf die Frage "nein" ist. Der Test soll diese Hypothese überprüfen.

Für das obige Beispiel (a) lautet die Nullhypothese:

"Die Werte der Zeitreihe sind unkorreliert."

Ein Test kann aber nie die Nullhypothese wirklich beweisen oder widerlegen. Der Test kann immer nur mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit die Nullhypothese für die betrachteten Daten verwerfen. Die Nullhypothese muss präzise formuliert werden, damit der Test eine eindeutige Aussage liefert. Außerdem muss sichergestellt werden, dass der Test auch wirklich genau auf die Nullhypothese testet bzw. dass die Nullhypothese für einen gegebenen Test korrekt formuliert ist. Um Entscheidungen über eine bestimmte Eigenschaft treffen zu können, braucht man ein quantitatives Maß für die betreffende Eigenschaft. Dieses Maß ist in der Regel eine *Observable* $T = T(\{s_n\})$, die die Zeitreihe $\{s_n\}; n = 1 \dots N$, auf eine reelle Zahl abbildet. Für Tests wird T auch *Teststatistik* genannt. Im einfachsten Fall besteht ein Test aus einer Berechnung von T und einer Kontrolle, ob T in einer für die Nullhypothese charakteristischen Teilmenge von \mathbb{R} liegt. Diese Teilmenge kann z. B. ein bestimmtes Intervall $[T_{\min}; T_{\max}]$ oder ein Punkt T_0 sein. Soll z. B. auf die Korrelation der Werte der Zeitreihe getestet werden, kann als Teststatistik der Schätzer für die *Autokovarianz*

$$\chi(\tau) = \frac{1}{N-\tau} \sum_{n=1}^{N-\tau} (s_n - \bar{s})(s_{n+\tau} - \bar{s}) \quad (1.1)$$

mit einer festen zeitlichen Verzögerung dienen. Die Nullhypothese würde dann z. B. für $\gamma(\tau = 1) \neq 0$ verworfen und anderenfalls akzeptiert. Für endliche Zeitreihen unterliegt aber der Wert der Autokovarianz statistischen Fluktuationen, sodass in der Praxis auch für unkorrelierte Daten $\gamma(\tau)$ von 0 abweicht. So liefert z.B. die Varianz des Schätzers der Autokovarianz (1.1) für weißes Rauschen $1/N + o(1/N^2)$ für alle $\tau \neq 0$ [SS87]. Der obige Test wäre also nur im Limes für $N \rightarrow \infty$ korrekt und würde für endliche Zeitreihen falsche Aussagen liefern. Die Autokovarianz ist eine sehr einfache Teststatistik, für die Erwartungswert und Varianz auch für allgemeine endliche Zeitreihen berechnet werden können. D.h. die Verteilung der Werte T für verschiedene Zeitreihen, die die Nullhypothese erfüllen, ist annähernd bekannt. Ist diese Verteilung z. B. eine Gaußverteilung, so kann einfach anhand des Abstands vom Mittelwert von $T(\{s_n\})$ die Wahrscheinlichkeit für die Richtigkeit der Nullhypothese angegeben werden. Im Allgemeinen kann aber über die Verteilung der T keine Aussage gemacht werden. Nur in wenigen Fällen kann sie unter speziellen Bedingungen analytisch berechnet werden. In Abschnitt 1.4 wird gezeigt, wie die Verteilung anhand von vielen Datensätzen, die die Nullhypothese erfüllen, numerisch approximiert werden kann.

1.2.1 Maße für die Güte eines Tests:

Size und Trennschärfe

Die Leistungsfähigkeit und Qualität von statistischen Tests wird durch zwei wichtige Parameter beschrieben. Diese sind bestimmt durch die zwei Arten von Fehlern, die bei einem Test mit einem zu untersuchenden Datensatz auftreten können. Zunächst besteht die Möglichkeit, dass der Test die Nullhypothese verwirft, obwohl sie in Wirklichkeit wahr ist. Dies wird "Fehler vom Typ I" genannt. Die Wahrscheinlichkeit für einen solchen Fehler ist die *Size* α des Tests. Wird ein Signifikanzniveau von $1-p$ vorgegeben, sollte die Size p nicht überschreiten. Für gewöhnlich wird p , die *nominelle* Size, vorher festgesetzt und der Test entsprechend realisiert. Es muss gewährleistet werden, dass die wirkliche, *empirische* Size α des Tests mit der nominellen übereinstimmt. Ist die Size zu groß, verliert der Test seine Aussagefähigkeit. Formell ist eine Size kleiner als p zwar zulässig, kann aber zu einer unerwünschten Senkung der Leistungsfähigkeit des Tests führen. Es sollte also vor jeder Durchführung eines Tests die Size ermittelt werden. Dies geschieht indem möglichst viele Tests mit Daten, die die Nullhypothese erfüllen, durchgeführt werden. Der Quotient aus der Anzahl der Verwerfungen der Nullhypothese und der Anzahl der Tests ist die ermittelte Size des Tests. Stimmt sie nicht mit der nominellen überein, lässt dies auf eine unzureichende Konstruktion des Tests schließen. Ein "Fehler vom Typ II" ist das Akzeptieren einer Nullhypothese, die in Wirklichkeit falsch ist. Die Wahrscheinlichkeit dafür wird mit β bezeichnet und $1-\beta$ ist die *Trennschärfe* oder *Power* des Tests. Die Trennschärfe gibt an, wie stark bzw. wie wahrscheinlich die Nullhypothese für die zu untersuchende Zeitreihe mit einem bestimmten Test abgelehnt werden kann. Eine möglichst hohe Trennschärfe ist also wünschenswert. Verschiedene Realisierungen eines Tests können unterschiedliche Trennschärfen aufweisen und die Trennschärfe kann als Maß für die Güte der einzelnen Realisierungen betrachtet werden. Ein wichtiger Punkt bei der Konstruktion eines Tests ist dabei die Wahl der Teststatistik. Wird sie ungünstig gewählt, kann dies zu einer unerwünschten Senkung der Trennschärfe führen.

1.3 Maße für Nichtlinearität

Für einen Test auf Nichtlinearität ist es nötig eine Teststatistik zu besitzen, die den Grad der vorhandenen Nichtlinearitäten misst. Dazu lassen sich in der Literatur viele unterschiedliche Ansätze finden. Im Folgenden werden die Teststatistiken vorgestellt, die in den weiteren Untersuchungen verwendet werden. Die hier getroffene Auswahl beruht dabei im Wesentlichen auf dem repräsentativen Vergleich in [SS97b] bezüglich ihrer Trennschärfe. Diese Teststatistiken zeichnen sich durch ihre Sensitivität auch auf schwächste Nichtlinearitäten aus. Weitere Alternativen werden in [SS97b] und den darin enthaltenen Referenzen diskutiert. Traditionelle Maße für Nichtlinearität basieren auf Verallgemeinerungen der Autokovarianz (1.1) auf höhere Ordnungen. Da alle Momente mit einer Ordnung größer als zwei für lineare Prozesse verschwinden, können sie als Teststatistiken für einen Test auf Nichtlinearität dienen, indem auf einen signifikanten Unterschied von Null getestet wird. *[Diese Aussage ist nicht exakt. Sie gilt sogar nicht einmal für unkorrelierte Gauß-Prozesse (z.B. gerade Momente). Für Momente höherer Ordnung, die als lineare Kombinationen von Kumulanten höherer Ordnung darstellbar sind, kann diese Aussage unter Umständen (z.B. für Gauß'sche Prozesse) zutreffen. Andererseits stimmt es, dass Momente höherer Ordnung für lineare Prozesse Funktionen der Kovarianzen und von diesen vollständig bestimmt sind.]* Ein Moment dritter Ordnung ist z. B. die 3-Punkt-Autokovarianz

$$T^{3P}(\tau_1, \tau_2) = \frac{1}{N-\tau_2-1} \sum_{n=1}^{N-\tau_2} (s_n - \bar{s})(s_{n+\tau_1} - \bar{s})(s_{n+\tau_2} - \bar{s}) \quad (1.2)$$

wobei ohne Verletzungen der Allgemeinheit $\tau_1 < \tau_2$ angenommen wurde. Häufig wird $\tau_2 = 2\tau_1$ verwendet. Eine weitere sehr nützliche Größe dritter Ordnung ist

$$T^{\text{rev}}(\tau) = \frac{\sum_{n=1}^{N-\tau} (s_n - \bar{s})^3}{\sum_{n=1}^{N-\tau} (s_n - \bar{s})^2} \quad (1.3)$$

welche als Maß für die Zeitumkehrinvarianz einer Zeitreihe dienen kann. Für die zeitunggekehrte Zeitreihe $\{s_{N-n+1}\}$ ändert sich lediglich das Vorzeichen von T^{rev} , sodass für zeitungkehrinvariante Prozesse $T^{\text{rev}} = 0$ gelten muss. Da lineare Prozesse komplett über ihre Autokovarianzen beschrieben werden können und diese invariant unter Zeitumkehr sind, liefern lineare Prozesse $T^{\text{rev}} = 0$. Prozesse mit nichtlinearer Dynamik zeigen dagegen häufig sehr starke Asymmetrie unter Zeitumkehr, wodurch sich T^{rev} neben seiner Einfachheit und Robustheit sehr gut als Teststatistik eignet [DvHTD95, TEL+92, RG84]. Obwohl nichtverschwindende Momente höherer Ordnung *[allgemein ist das falsch. Richtiger ist: Obwohl signifikante Unterschiede zu den linearen Surrogaten bei höheren Momenten]* ein starkes Indiz für Nichtlinearität sind, sagen sie nichts über die Art der gefundenen Nichtlinearität aus. Häufig steht hinter einem Test aber die Vermutung auf eine nichtlineare, zugrunde liegende, deterministische Dynamik, sodass als Teststatistiken Größen aus der Theorie nichtlinearer, deterministischer Systeme naheliegen. Um diese Größen auch für skalare Zeitreihen schätzen zu können, müssen die unter Umständen mehrdimensionalen Phasenraumzustände aus der Zeitreihe rekonstruiert werden. Eine sehr nützliche und weitverbreitete Methode, dies zu bewerkstelligen ist die Zeitverzögerungseinbettung

$$\vec{s}_n = (s_{n-(m-1)\tau}, s_{n-(m-2)\tau}, \dots, s_{n-\tau}, s_n). \quad (1.4)$$

Dabei ist m die Einbettungsdimension und τ die Zeitverzögerung bzw. das Lag. Eine skalare Zeitreihe mit N Werten liefert $N_E = N - (m-1)\tau$ Einbettungsvektoren. Der besseren Lesbarkeit

wegen, wird im Folgenden auch für $\mathbb{N}_{\mathbb{E}}$ die Bezeichnung \mathbb{N} verwendet. Aus dem jeweiligen Kontext heraus ist die Bedeutung stets eindeutig erkennbar. Auf die Eigenschaften und die Wahl der Parameter der Phasenraumrekonstruktion (1.4) möchte ich hier nicht näher eingehen und auf die existierende Literatur [KS97, Aba96] verweisen. Eine Klasse sehr robuster Phasenraumobservablen für Nichtlinearitätstests sind Vorhersagefehler. Ein Vorhersagefehler kann z. B. über die Standardabweichung zwischen Vorhersage und dem wirklich angenommenen Wert

$$T^{\text{VF}}(m; \tau) = \left(\frac{1}{N-1} \sum_{n=1}^{N-1} (s_{n+1} - F(\vec{s}_n))^2 \right)^{1/2} \quad (1.5)$$

definiert werden. Dabei kann die nichtlineare Vorhersage $F(\vec{s}_n)$ für den Wert s_{n+1} der Zeitreihe auf verschiedene Art und Weise realisiert werden. Eine populäre Möglichkeit ist die lokal konstante Vorhersage, die im Folgenden beschrieben wird. Zunächst wird für jeden Punkt \vec{s}_n im Einbettungsraum die τ -Umgebung

$$U_n(\tau) = \{ \vec{s}_i \mid ||\vec{s}_i - \vec{s}_n|| < \tau \} \quad (1.6)$$

bestimmt, die aus allen Nachbarpunkten besteht, deren Abstand zum Punkt \vec{s}_n geringer als der Radius τ ist und deren zeitlicher Abstand größer als t_{\min} ist. Der Vorhersagewert ist dann nichts anderes als der Mittelwert der Folgewerte der Vektoren aus der τ -Umgebung

$$F(\vec{s}_n) = \frac{1}{||U_n(\tau)||} \sum_{\vec{s}_i \in U_n(\tau)} s_{i+1}, \quad (1.7)$$

wobei mit $||U_n(\tau)||$ die Anzahl der Punkte in der τ -Umgebung bezeichnet wird. Bei der Bestimmung von $F(\vec{s}_n)$ werden sowohl vergangene als auch zukünftige Nachbarn aus der τ -Umgebung verwendet. Um aussagekräftige, tatsächliche Vorhersagen zu erhalten, wäre ein solches Vorgehen nicht korrekt. Hier dient der Vorhersagefehler aber lediglich als Teststatistik und nicht als Qualitätsmaß für Vorhersagen. Zu (1.7) sind natürlich viele Alternativen denkbar. Neben Variationen, wie z. B. verschiedenen Wichtungen und lokal linearen Vorhersagen, sind auch Anpassungen unterschiedlichster Modelle an die Daten möglich, über die dann Vorhersagen erzielt werden können. Allen in diesem Abschnitt aufgeführten Größen ist gemeinsam, dass ihre Verteilung für ein generisches Ensemble von Zeitreihen nicht bekannt ist. Nur unter sehr speziellen und meist unrealistischen Voraussetzungen an die Zeitreihen und weiteren Vereinfachungen kann ihre Verteilung analytisch bestimmt werden. Im nächsten Abschnitt wird eine Methode zur numerischen Approximation dieser Verteilungen vorgestellt.

1.4 Die Surrogatmethode

Monte-Carlo-Methoden werden in der Physik häufig eingesetzt. Mit ihnen können numerische Ergebnisse erzielt werden, die analytisch nur schwer oder gar nicht zu erhalten sind. Ihnen gemeinsam ist die zufällige, einer wohldefinierten Wahrscheinlichkeitsverteilung unterliegende Auswahl von Konfigurationen oder Prozessen. An diesen Konfigurationen können Observablen numerisch gemessen werden. Bei einer endlichen, aber sehr großen Anzahl von Konfigurationen kann so ein "typisches", kleineres Ensemble herausgegriffen werden und nur anhand dieser die Erwartungswerte der Observablen ermittelt werden. Die Approximation der Verteilung der Teststatistik T für Datensätze, die die Nullhypothese erfüllen, geschieht ebenfalls unter Zuhilfenahme einer Monte-Carlo-Methode. Es ist dafür notwendig, möglichst viele zufällige Zeitreihen zu erzeugen, die die Nullhypothese erfüllen. Diese "künstlichen" Ersatz-Zeitreihen werden auch *Surrogate* genannt [TEL+92]. Die gewünschten Eigenschaften der Surrogate und damit ihre Erzeugung hängen natürlich von der Nullhypothese ab, auf die getestet werden soll. Das Generieren von Surrogaten ist

daher oft nicht trivial, nur schwer oder bislang gar nicht zu bewerkstelligen. Die Surrogate dürfen die Eigenschaft, auf die hin der Originaldatensatz untersucht werden soll, *nicht* aufweisen. Alle anderen Eigenschaften der Originaldaten sollten aber auch in den Surrogaten zu finden sein, was bei der Erzeugung von Surrogaten berücksichtigt werden muss. Dabei unterscheidet man zwei verschiedene Ansätze, die im Folgenden beschrieben werden.

1.4.1 Typische Realisierung

Wird die Nullhypothese direkt über eine Klasse von Modellen definiert, liegt es nahe, die Surrogate einfach durch Realisierungen eines Modells zu generieren. Durch unterschiedliche Anfangsbedingungen lässt sich so eine beliebig große Anzahl an Surrogaten erzeugen. Die offenen Parameter des Modells müssen durch Anpassung aus der Originalzeitreihe bestimmt werden. Hier zeigt sich auch schon ein erster Nachteil dieser *typischen Realisierung*. So ist es oft nicht einfach aus einer einzelnen, unter Umständen auch kurzen Zeitreihe die Parameter mit genügend hoher Genauigkeit zu bestimmen. *[Aber ist es eigentlich für die Erzeugung von linearen Surrogaten notwendig, ein exaktes Modell (genau eins) zu finden? Warum kann man nicht ein Ensemble von verschiedenen wahrscheinlichen linearen Modellen betrachten? Dieser Ansatz bildet den Kern unserer im Kapitel 2 vorgeschlagenen Methode zur Erzeugung linearer Surrogate]*. Hinzu kommt häufig das Problem, dass die Ordnung des Modells eine weitere Freiheit darstellt, deren Wahl aber von entscheidender Bedeutung sein kann. Für das in Abschnitt 1.2 erwähnte Beispiel für einen Test auf Korrelationen in einer Zeitreihe, könnte die typische Realisierung wie folgt aussehen. Die Surrogate werden über eine Folge von Zufallszahlen erzeugt, deren Wahrscheinlichkeitsverteilung mit der angepassten Verteilung der Werte der Originalzeitreihe übereinstimmt. Die Verteilung dieser Zufallszahlen wird dabei aber nicht exakt, sondern nur annähernd übereinstimmen. Werden signifikante Unterschiede in der Autokovarianz (1.1) der Originalzeitreihe und den Surrogaten gefunden, kann die Nullhypothese der Unkorreliertheit verworfen werden. Um die Methode der typischen Realisierung in einem Test auf Nichtlinearität zu verwenden, müsste ein Modell herangezogen werden, das die Klasse der linearen Prozesse abdeckt. In der Tat existiert in der linearen Zeitreihenanalyse ein solches allgemeines Modell, das sogenannte *ARMA-Modell*

$$x_n = \sum_{p=1}^P a_p x_{n-p} + \sum_{q=0}^Q b_q \eta_{n-q} \quad (1.8)$$

Dabei sind a_p und b_q reelle Koeffizienten und die $\{\eta_n\}$ gaußverteilte, unabhängige Zufallszahlen mit $\gamma^{(\eta)}(\tau) = 0$. Die erste Summe beschreibt den *autoregressiven* (AR) Aspekt des Prozesses, d.h. die Abhängigkeit von der eigenen Vergangenheit. Ist $Q = 0$, so handelt es sich um ein autoregressives Modell der Ordnung P , kurz $AR(P)$. Der zweite Term ist rein stochastisch und für $P = 0$ spricht man von einem *moving-average-Modell* Q -ter Ordnung, $MA(Q)$. Die zweite Summe ist eine mit b_q gewichtete Mittelung der treibenden Zufallsfolge η_n , wobei jeweils nur über ein verschobenes Fenster der Breite $Q+1$ gemittelt wird. Zur Anpassung der Parameter des ARMA-Modells wurden unterschiedlichste Ansätze entwickelt, wobei der einfachste auf einer einfachen Korrespondenz zwischen der Autokovarianz (1.1) und den Koeffizienten des AR-Prozesses basiert [SS87]. Entsprechende Surrogate sind dann wieder einfach Realisierungen des angepassten AR-Prozesses. Bis jetzt sind wir davon ausgegangen, dass die einzigen Freiheiten in dem anzupassenden Modell durch einen endlichen Satz reeller Zahlen beschrieben werden kann. Die Möglichkeit einer unbekanntem Funktion im Modell wurde z.B. nicht betrachtet. Eine erwünschte Erweiterung in diese Richtung zeigt die Grenzen der Methode der typischen Realisierung, da

dann eine sinnvolle Modellanpassung nur sehr schwierig wäre. In der Praxis tauchen solche Funktionen aber in Form von z.B. Messfunktionen

$$s_n = m(x_n) \quad (1.9)$$

sehr häufig auf. *[Die monotonen Messfunktionen, für die man hier werben will, tauchen gar nicht so oft auf. Quadratische und andere nichtmonotone Beobachtungs- oder Messfunktionen sind häufig. Diese bereiten aber genau dieselben Probleme für die typischen wie für die bedingten Realisierungen zu. Außerdem kann man monotone Messfunktionen für typische Realisierungen einführen. Z.B. sind die Surrogate nach Dolan [DS 01] eine Kombination von einer monotonen Messfunktion mit einem MA-Modell. Eine eingehende Kritik an den Begriff der statischen Nichtlinearität finden Sie im Kapitel 2.]* Die gemessenen Größen in Form von Zeitreihen $\{s_n\}$ zeigen dabei oft auch nichtlineare Abhängigkeit von den interessierenden, intrinsischen Größen $\{x_n\}$ des Systems, deren Verhalten unter Umständen durch ein bekanntes, lineares Modell beschrieben werden kann.

1.4.2 Bedingte Realisierung

Im Gegensatz zum vorherigen Abschnitt werden bei der *bedingten Realisierung* bestimmte Eigenschaften der Originaldaten *exakt* auf den Surrogaten reproduziert. So können z. B. einfache Eigenschaften wie Mittelwert oder Varianz durch Umskalierung der Surrogate mit der Originalzeitreihe in Übereinstimmung gebracht werden. In [TP96] wird anhand einiger Beispiele sehr deutlich gezeigt, dass die bedingte Realisierung stets vorzuziehen ist, da sie im Gegensatz zur typischen Realisierung korrekte Size und höhere Trennschärfe liefert. *[Das mit der Trennschärfe ist glaubwürdig. Aber die Aussage über die Size ist sehr zweifelhaft oder höchstens für eine andere modifizierte Nullhypothese korrekt].* In dem oben erwähnten Beispiel eines Tests auf Korrelation ist auch die Erzeugung von Surrogaten als bedingte Realisierungen relativ einfach. Ein Surrogat kann hier durch mehrfache, zufällige Vertauschung der Werte der Zeitreihe erzeugt werden. Dies zerstört jegliche, eventuell im Originaldatensatz vorhandene Korrelationen. Andere Eigenschaften, wie z. B. die Verteilung der Werte, bleiben dabei aber im Gegensatz zur typischen Realisierung exakt erhalten. Bei einem Test auf Nichtlinearität ist die entscheidende, zu erhaltende Eigenschaft der Surrogate die Autokovarianz (1.1), die, wie bereits erwähnt, in Beziehung zu den Koeffizienten des ARMA-Modells (1.8) steht. Diese direkte Korrespondenz zwischen Modellklasse und Eigenschaften ist aber eher die Ausnahme und nicht als Regelfall anzusehen. Da interessierende Nullhypothesen aber häufig über Modellklassen formuliert werden, ist das Formulieren entsprechender Eigenschaften oft schwierig oder gar unmöglich. Auch wenn die Eigenschaften bekannt sind, kann ihre gleichzeitige Realisierung problematisch sein. Oft können sie nur näherungsweise in den Surrogaten reproduziert werden. Ziel dieser Arbeit ist es, eine möglichst allgemeine Methode zur Implementierung mehrerer unterschiedlicher Eigenschaften zu entwickeln, welche in Kapitel 2 vorgestellt wird.

1.4.3 Tests mit Surrogaten

Ist die Methode zur Generierung der Surrogate in Einklang mit der zu untersuchenden Nullhypothese, wird der Test folgendermaßen durchgeführt. Zunächst werden B Surrogate erzeugt und auf allen Surrogaten die Teststatistik T_b ; $b = 1 \dots B$ berechnet. Die Verteilung der $\{T_b\}$ folgt bei korrekter Erzeugung der Surrogate annähernd der Verteilungsfunktion von T . Die gleiche Teststatistik wird auf der Originalzeitreihe $T_0 = T(\{s_n\})$ berechnet. Liegt T_0 nun im oberen

oder unteren Bereich der Werte $\{T_b\}$, d. h. im "Schwanz" der empirischen Verteilung, so wird die Nullhypothese verworfen. Solch ein Vorgehen wird *zweiseitiger* Test genannt, da die Nullhypothese sowohl für große als auch für kleine T_0 verworfen wird. Eine solche mögliche Abweichung in beide Richtungen ist z. B. für 3-Punkt-Autokovarianz (1.2) oder die Zeitumkehrasymmetrie (1.3) als Teststatistik zu erwarten, sodass in diesen Fällen ein zweiseitiger Test nötig wäre. In einem Surrogatetest wird die Nullhypothese verworfen, wenn T_0 in der nach Größe sortierten Liste $\{T_0; b = 0 \dots B\}$ zu den $(B+1)\alpha/2$ kleinsten oder zu den $(B+1)\alpha/2$ größten Werten gehört. Dieses Verfahren ist so konstruiert, dass die Wahrscheinlichkeit für einen "Fehler vom Typ I" wie erwünscht durch die Size α gegeben ist. Minimal werden für einen zweiseitigen Test $B=2/\alpha-1$ Surrogate benötigt. In diesem Fall wird die Nullhypothese verworfen, wenn T_0 der kleinste oder der größte der Liste $\{T_b\}$ ist. Soll der Test eine kleinere Size α und damit ein höheres Signifikanzniveau aufweisen, werden mehr Surrogate benötigt. Wird erwartet, dass die Teststatistik für Daten, die die Nullhypothese nicht erfüllen, stets im unteren oder stets im oberen Bereich der $\{T_b\}$ liegt, spricht man von einem *einseitigen* Test. In diesem Fall reichen $B = 1/\alpha-1$ Surrogate für einen Test aus. Ein Beispiel für eine Teststatistik, für die nur ein einseitiger Test durchgeführt werden muss, ist der Vorhersagefehler (1.5), welcher zum Verwerfen der Nullhypothese auf der Originalzeitreihe signifikant kleiner sein sollte als für die Surrogate. Für gewöhnlich wird die Anzahl der Surrogate zu $B=2n/\alpha-1$ für einen zweiseitigen Test und zu $B=n/\alpha-1$ für einen einseitigen Test gewählt, wobei $n \in \mathbb{N}$ ist. Der Grund, mehr Surrogate als minimal nötig ($n = 1$) für einen Test zu verwenden, ist eine leichte Erhöhung der Trennschärfe für große B [Mar78]. Die Size α hingegen ist unabhängig von der Anzahl der Surrogate. In einigen Fällen wird bei einem Surrogatetest eine etwas andere Vorgehensweise gewählt. So können für die Werte $\{T_b\}$ der Surrogate Mittelwert, Varianz und andere Parameter berechnet werden. Liegt T_0 dann z.B. zwei Standardabweichungen vom Mittelwert entfernt, kann die Nullhypothese mit 95% abgelehnt werden. Dieses Verfahren hat aber zwei Nachteile. Zum einen werden relativ viele Surrogate benötigt, um die Parameter genügend genau abschätzen zu können. Gravierender ist aber die Tatsache, dass die Verteilungsfunktion vorher bekannt sein muss. Die Aussage des obigen Beispiels ist nur korrekt, wenn die Teststatistik für die Nullhypothese gaußverteilt ist. Falsche Annahmen über die Verteilungsfunktion führen aber sehr wahrscheinlich zu einem falschen Testergebnis. Für einige der Teststatistiken aus Abschnitt 1.3 sieht die Wahrscheinlichkeitsverteilung auf den ersten Blick tatsächlich wie eine Gaußverteilung aus. Ein Kolmogorov–Smirnov–Test ergab aber nur eine 10%-Wahrscheinlichkeit für Gaußverteilung der Werte. Um möglichst wenige Annahmen über die Verteilung der Teststatistik zu machen, werde ich im Folgenden ausschließlich das nichtparametrische Verfahren verwenden.

1.5 Methoden im Frequenzraum

Bei der Erzeugung von Surrogaten für Tests auf Nichtlinearität ist zu beachten, dass ihre linearen Eigenschaften mit denen des Originaldatensatzes übereinstimmen. Bei einer bedingten Realisierung sollten die Surrogate also exakt die gleichen Autokovarianzen (\bullet) wie die Originaldaten aufweisen. Da dies aber auf einem Surrogat nicht offensichtlich direkt zu bewerkstelligen ist, wechselt man mittels der *diskreten Fouriertransformation*

$$\tilde{s}_k = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=1}^N s_n e^{2\pi i k n / N}; \quad k = -N/2, \dots, N/2 \quad (1.10)$$

in der Frequenzraum, welche ich im Folgenden kurz als $\{\tilde{s}_k\} = \mathbb{F}\{s_n\}$ schreibe. Die Normierung in Gleichung (1.10) ist so gewählt, dass die inverse Transformation F^{-1} durch einen einfachen Vorzeichenwechsel im Exponenten aus \mathbb{F} hervorgeht. Die komplexen \tilde{s}_k lassen sich durch ihre Amplituden $A_k = |\tilde{s}_k|$ und Phasen $\phi_k = \arctan(\text{Im}(\tilde{s}_k)/\text{Re}(\tilde{s}_k))$ darstellen. Für die Generierung von Surrogaten ist wichtig, dass die quadrierten Fourieramplituden A_k^2 einen Schätzer für das *Frequenzspektrum* darstellen, welches über das *Wiener-Khinchin-Theorem*

$$\mathbb{F}\{\gamma_n\} = A_k^2 \quad (1.11)$$

mit den *Autokorrelationen* $\rho_n = \gamma_n/\gamma_0 = \gamma_n/\sigma^2$ verknüpft ist. Zwei Zeitreihen mit gleichem Frequenzspektrum besitzen also die gleiche Autokovarianz. Diese Tatsache wird bei der im folgenden Abschnitt beschriebenen Methode zur Erzeugung von Surrogaten ausgenutzt.

1.5.1 FT–Surrogate

Für einen einfachen Nichtlinearitätstests genügt es demzufolge, Surrogate zu generieren, die in den Fourieramplituden mit den Originaldaten übereinstimmen. Die verbleibenden Freiheiten (im Frequenzraum) liegen in der Wahl der Phasen. Das folgende einfache Schema erzeugt entsprechende Surrogate:

1. Die Zeitreihe $\{s_n\}$ wird mit der diskreten Fouriertransformation (1.10) in den Frequenzbereich transformiert.
2. Die Phasen $\{\phi_k\}$ werden durch gleichverteilte Zufallszahlen zwischen 0 und 2π ersetzt.
3. Die inverse Fouriertransformation wird durchgeführt und man erhält das Surrogat $\{s_n'\}$.

Diese Surrogate besitzen per Konstruktion die gleichen Fourieramplituden wie der Originaldatensatz und werden auch *phasenrandomisierte* Surrogate genannt. *[Wichtig ist zu bemerken, dass hier keinerlei Begründung für das Randomisieren der Phasen gegeben wurde. Die phasenrandomisierten Surrogate enthalten alle Informationen des Amplitudenspektrums (sprich: alle linearen Informationen) und keine Phaseninformationen. Die Phaseninformationen sind aber nicht unbedingt rein nichtlinear. Die Möglichkeit, dass lineare Informationen auch im Phasenspektrum auf irgeneine Weise stecken und damit die Möglichkeit einer anderen nichttrivialen Verteilung des Phasenspektrums als die Gleichverteilung wird so ausgeschlossen. Die phasenrandomisierten Surrogate sind so linear aber konstituieren nur eine Untermenge aller linearen Surrogate. Diese Untermenge dürfte ohne Weiteres für allgemeine Teststatistiken nicht für repräsentativ gehalten werden.]* Wie bereits erwähnt, sind diese Amplituden aber lediglich ein Schätzer für das Frequenzspektrum, das über Gleichung (1.11) mit der Autokovarianz verknüpft ist. Eine bessere Schätzung des Frequenzspektrums ist also wünschenswert und es existieren dazu eine Reihe weiterer Methoden [PTVF92]. Für die Surrogaterzeugung ist aber auch die Rücktransformation in Schritt 3 von entscheidender Bedeutung. Ein Test mit den nach obigem Schema konstruierten Surrogaten testet auf die Nullhypothese eines gaußschen *[Woher kommt die Gaußizität ins Spiel? Das werden wir später im Kapitel besprechen]* linearen Prozesses. Wurden die Daten allerdings über eine nichtlineare Messfunktion (1.9) gewonnen, sodass die Verteilung der Originalzeitreihe von der Gaußverteilung abweicht, würde der Test die Nullhypothese korrekterweise verwerfen. *[Die Erklärung der Nicht-Gaußizität eines stochastischen Prozesses ist nicht nur Nichtlinearität, wie aus dem vorigen Satz vielleicht fälschlicherweise gedacht werden kann. Es gibt auch lineare nicht-gauß'sche Prozesse. Alle ARMA-Prozesse der Form: $x_n = \sum_{p=1}^P a_p x_{n-p} + \sum_{q=0}^Q b_q \xi_{n-q}$ wobei $\{\xi_n\}$ unabhän-*

gige identisch verteilte (nicht unbedingt gaußverteilte) Zufallszahlen sind, sind linear]. Will man eine solche instantane, nichtlineare Messfunktion in die Nullhypothese aufnehmen, müssen die entsprechenden Surrogate neben der Autokovarianz auch die Verteilungsfunktion mit den Originaldaten teilen. [Das ist kein MUSS. Es reicht schon, wenn man die Originalzeitreihe und die linearen Surrogaten gleichzeitig in eine gemeinsame Zahlenmenge transformiert. Auf diese Weise wird garantiert, dass die Testreihe und die Surrogate nach der Transformation genau dieselbe Verteilung (sprich: dasselbe Histogramm) haben. Diese Methode ist auf jeden Fall korrekter als die im nächsten Paragraph erklärte AAFT-Methode (sogenannte Histogramm-Abbildung). Das wird im Kapitel 2 diskutiert].

1.5.2 AAFT–Surrogate

Im Sinne der bedingten Realisierung bedeutet ein exaktes Reproduzieren der Verteilung, dass die Surrogate dieselben Werte annehmen wie die Originalzeitreihe [Diese Bedingung ist nicht richtig begründet. Warum stellt man nicht dagegen z.B. eine Bedingung an die ersten Differenzen, so dass die Surrogate dieselben ersten Differenzen haben, wie diese der Originalzeitreihe?] Die verbleibende Freiheit liegt in ihrer Reihenfolge. Diese Freiheit wird aber dadurch eingeschränkt, dass auch die Fourieramplituden bzw. die Autokovarianzen übereinstimmen sollen. Wie beide Bedingungen gleichzeitig exakt erfüllt werden können, ist nicht offensichtlich. Die im Folgenden beschriebene Methode der *Amplitude Adjusted Fourier Transformation* (AAFT) von Theiler et al. [TEL+92] kann die Fourieramplituden aber annähernd in Übereinstimmung bringen, während die Verteilung exakt reproduziert wird. Dabei werden die Daten zunächst in die Gaußverteilung überführt, fouriertransformiert und danach wieder auf die Ausgangsverteilung gebracht. Im Detail sieht das wie folgt aus:

1. Es werden N gaußverteilte Zufallszahlen $\{\eta_n\}$ erzeugt.
2. Die Originaldaten $\{s_n\}$ werden jetzt auf die gaußverteilten Werte umskaliert. Dabei wird der kleinste Wert der $\{s_n\}$ durch den kleinsten Wert der $\{\eta_n\}$ ersetzt. An die Stelle des zweitkleinsten der $\{s_n\}$ tritt der zweitkleinste der $\{\eta_n\}$, usw. Bis am Ende der größte Wert der $\{s_n\}$ durch den größten der $\{\eta_n\}$ ersetzt wird. Diese Prozedur heißt *Reskalierung über die Rangordnung*. Die so entstandenen Daten $\{g_n\}$ sind gaußverteilt und folgen der zeitlichen Entwicklung der Originaldaten.
3. Die $\{g_n\}$ werden fouriertransformiert, die resultierenden Phasen durch gleichverteilte Zufallszahlen ersetzt und zurücktransformiert. Man erhält die ebenfalls gaußverteilten $\{g_n'\}$.
4. Die $\{g_n'\}$ werden über die Rangordnung auf die Verteilung der Originaldaten $\{s_n\}$ zurückskaliert.

Das resultierende Surrogat $\{s_n'\}$ hat per Konstruktion die gleiche Verteilungsfunktion und annähernd das gleiche Frequenzspektrum wie die Originaldaten. Können Surrogate mit gleicher Autokovarianz und Verteilungsfunktion wie die zu untersuchende Zeitreihe konstruiert werden, lautet die entsprechende Nullhypothese: "Die Daten $\{s_n\}$ sind das Ergebnis eines gaußschen, linearen Prozesses x_n , der mit einer monotonen Messfunktion $m(x_n) = s_n$ gemessen wurde." Die Monotonie der Messfunktion ist Bestandteil der Nullhypothese, da wir im letzten Schritt des Schemas stillschweigend die Invertierbarkeit der Messfunktion vorausgesetzt haben. Dies ist die einzige bekannte Verallgemeinerung der Nullhypothese für einen Test auf Nichtlinearität in der Sprache der Modellklasse. Weitere Verallgemeinerungen können nur über die Festlegung von

weiteren Eigenschaften erreicht werden. Eine sehr flexible und allgemeine Methode, um dies zu erreichen, wird im nächsten Kapitel entwickelt. Wie erwähnt, wird das Spektrum der Originalzeitreihe nicht exakt auf den Surrogaten reproduziert. In [SS96] wird deutlich gezeigt, dass die Abweichungen des Spektrums speziell für kurze, stark korrelierte Zeitreihen signifikant sind. Das Spektrum der AAFT-Surrogate tendiert dazu, flacher als das Originalspektrum zu sein. Die Reskalierung in den Schritten 2 und 4 ist lediglich eine Approximation der unbekanntes Messfunktion, die für endliche Zeitreihen nicht exakt ist. Die Residuen zwischen den durch approximierter und wirklicher Messfunktion gemessenen Werten sind aber zeitlich unabhängig und haben daher ein weißes, flaches Spektrum. Dies führt zu einem additiven, flachen Untergrund und damit einem Abflachen des Spektrums.

1.5.3 Iteratives Verfahren (IAAFT)

Die folgende Methode [SS96] erreicht eine wesentlich bessere Annäherung des Spektrums der Surrogate an das Originalspektrum als die AAFT. Der Algorithmus besteht aus einem einfachen Iterationsschema mit zwei abwechselnden Schritten.

1. Zunächst wird eine in ansteigender Reihenfolge sortierte Version $\{\bar{s}_n\}$ der Zeitreihe $\{s_n\}$ erzeugt. Außerdem werden einmalig die Frequenzamplituden $A_k = |\bar{s}_k|$ der Zeitreihe berechnet.
2. Die folgende Iteration wird mit einer zufällig permutierten Zeitreihe $\{s_n^{(0)}\}$ gestartet.
3. Im ersten Schritt der Iteration i wird $\{s_n^{(i)}\}$ fouriertransformiert. Die resultierenden Amplituden werden verworfen und durch die Amplituden $\{A_k\}$ der Originalzeitreihe ersetzt. Die Phasen $\{\phi_k\}$ bleiben unverändert. Nach der inversen Transformation erhält man die Sequenz $\{\hat{s}_n^{(i)}\}$.
4. Im zweiten Schritt der Iteration wird die Verteilung angepasst. Dies geschieht wieder über eine Reskalierung über die Rangordnung. Dabei nutzt man die sortierte Zeitreihe $\{\bar{s}_n\}$ und erhält $\{s_n^{(i+1)}\}$.

Die beiden Iterationsschritte 3 und 4 werden abwechselnd wiederholt. Das Spektrum des Surrogates $\{s_n^{(i)}\}$ passt sich dabei immer mehr dem Spektrum der Originaldaten an, während die Verteilung stets exakt übereinstimmt. In [SS96] wird gezeigt, dass die verbleibende Diskrepanz zunächst mit bei steigender Anzahl der Iterationen i sinkt und dann einen konstanten Wert annimmt, der von der Länge der Zeitreihe N abhängt. Dabei ist für größere N die verbleibende Diskrepanz kleiner. Das Erreichen dieses Plateaus in der Spektrumsdiskrepanz könnte als Abbruchkriterium dienen. Nach weiteren Iterationen läuft das Schema allerdings in einen Fixpunkt $\{s_n^{(i+1)}\} = \{s_n^{(i)}\}$, was ein wesentlich einfacheres Abbruchkriterium darstellt. Dieser Fixpunkt wird dann erreicht, wenn die Änderung im ersten Iterationsschritt zu klein ist, um im zweiten Schritt eine Umordnung der Werte zu bewirken. Ist man an Surrogaten interessiert, die eine größtmögliche Übereinstimmung in den Korrelationen zeigen, kann auch nach Schritt 3 abgebrochen und $\{\hat{s}_n^{(i)}\}$ verwendet werden. Eine eventuell starke Abweichung in der Verteilung sollte vor dem Test jedoch ausgeschlossen werden.

B. Parametrische Maximalkorrelationen: MLC und MPC

In der letzten Zeit wurden Abhängigkeiten zwischen verschiedenen Zeitreihen (ZR) mittels eines interessanten nichtparametrischen Regressionsansatzes (ACE-Algorithmus [BF 85]) gerechnet. Dieses Maß der Abhängigkeit heisst Maximalkorrelation (MC). Dabei ist die Maximalkorrelation zwischen den ZR x und y , $MC(x,y)$, die maximal mögliche lineare Korrelation zwischen x und y nach optimalen Transformationen:

$MC(x,y)=\text{linCorrelation}(f(x),g(y))$... f,g sind Borel-meßbare optimale Transformationen.

Dieses Maß ist nichtlinear und hat einige Probleme. Seine Werte sind oft übertrieben (z.B. die Maximalkorrelation zwischen zwei statistisch unabhängigen Zeitreihen), und die Nichtstetigkeit der optimalen Transformationen ist nicht gerade befriedigend.

Ich habe zum Vergleich mit diesem Maß zwei parametrische Maße, MPC und MLC eingeführt. MPC ist die maximale Polynomialkorrelation und MLC ist die maximale Linearkorrelation.

■ MLC und MPC

Die bekannte lineare Korrelation zwischen zwei ZR kann auch geometrisch verstanden werden. In einem n -dimensionalen Raum, wobei n die Länge der Zeitreihen ist, kann man die ZR (nach Entfernung der Mittelwerte) als Vektoren auffassen und die lineare Korrelation als Kosinus des Winkels zwischen den Vektoren rechnen. Nun wird diese Idee verallgemeinert und aus jeder ZR durch Hinzufügen von auf gewisse Weise abgeleiteten ZR ein Unterraum gebildet. Die maximale Korrelation ist in diesem Sinn der Kosinus des Winkels zwischen den beiden Unterräumen. Für die lineare Maximalkorrelation werden durch Verlegungen, Differenzbildungen und/oder Abschätzungen von Differentialableitungen zusätzliche ZR hinzugefügt. (Oft gibt es mehrkomponentige Input-ZR und mehrkomponentige Output-ZR. In diesem Fall werden die Unterräume aus den Komponenten gebildet). Für die polynomiale Maximalkorrelation werden noch aus Potenzbildungen zusätzliche ZR hinzugefügt. In ihrer einfachsten Form bildet man für die MLC aus ZR1 und ihren ersten um den Lag T verzögerten ZR einen $(n+1)$ -dimensionalen Unterraum. Genauso verfährt man mit ZR2 und bildet einen $(m+1)$ -dimensionalen Unterraum. $MLC(ZR1,ZR2)$ ist die maximale Korrelation einer Linearkombination von ZR1 und n aus ZR1 abgeleiteten ZR und einer Linearkombination von ZR2 und m aus ZR2 abgeleiteten ZR. Dies ist der Kosinus des Winkels zwischen den beiden Unterräumen.

■ Wie berechnet man den Winkel zwischen 2 Unterräumen

Wir möchten die maximale Linearkorrelation zwischen n Input-Komponenten v_i und m Output-Komponenten u_j , $MLC(v_1 \dots v_n; u_1 \dots u_m)$ bestimmen. Zuerst entfernen wir das Mittel aus jeder ZR. Dann bestimmen wir den Winkel zwischen dem V-Unterraum und dem U-Unterraum durch Ausnutzung des folgenden Sachverhalts: Die n Vektoren im V-Unterraum bestimmen ein n -dimensionales Quader im hyperdimensionalen Raum. Genauso bestimmen die m Vektoren im U-Unterraum ein m -dimensionales Quader im hyperdimensionalen Raum. Die Kombination aller $n+m$ Vektoren im V+U-Unterraum bestimmt ein $n+m$ -Quader. Nun definiert man (in Anlehnung der Definition des Kreuzprodukts) einen Winkel, θ , zwischen den beiden Unterräumen nach folgender Formel:

$$\sin\theta = \frac{\text{Volumen}_{n+m}}{\text{Volumen}_n \text{Volumen}_m} = \frac{\text{vol}(v_1 \dots v_n; u_1 \dots u_m)}{\text{vol}(v_1 \dots v_n) \text{vol}(u_1 \dots u_m)}$$

Dabei werden hier die Volumina der eben genannten Quader gemeint.

■ Wie rechnet man das Volumen des Quaders.

Ich konnte eine Formel beweisen, die bestimmt nicht unbekannt ist. Ich erkläre meinen Gedankengang trotzdem. Das Volumen ist eine positive geometrische Invariante, die nur von den Längen der Vektoren des Quaders und den zwischen den Vektoren liegenden Winkeln abhängt, nicht aber von der aktuellen Darstellungsweise. Deswegen gilt:

$\text{vol}(v_1 \dots v_n) = \text{fkt}(v_i \cdot v_j)$ ($v_i \cdot v_j = \text{mat}_{ij}$ ist die Matrix der Skalarprodukte aller n -Vektoren miteinander = Kovarianzmatrix)

Diese Funktion muss symmetrisch in allen Komponenten sein. Es gilt:

$$\text{vol}(a v_1 \dots v_n) = |a| \text{vol}(v_1 \dots v_n) \text{ für reelles } a$$

Eine spezielle Lösung ist im Fall einer Darstellung der n -Quader-Vektoren in einem n -dimensionalen Raum schon bekannt. Das Volumen ist das bekannte n -dimensionale Spatprodukt. Das Volumen ist in diesem Fall der Absolutwert der Determinante der Matrix A der Koordinaten der Vektoren v_i : $A = (v_1, \dots, v_n)$. Um dieses Ergebnis in einer invarianten Form zu schreiben bemerken wir, dass die Matrix $\text{mat} = (\text{mat}_{ij}) = (v_i \cdot v_j) = A \cdot A^T$ (A^T ist Transpose(A))

$$\text{Also gilt für die Determinante: } \det(\text{mat}) = (\det(A))^2 = \text{vol}(v_1 \dots v_n)^2$$

Diese letzte Beziehung ist invariant und kann für allgemein gültig gehalten werden. Das Volumen des n -Quaders ist die Wurzel der Determinante der Matrix der Skalarprodukte aller n -Vektoren miteinander.

Die Berechnung der $MLC(v_1 \dots v_n; u_1 \dots u_m)$ erfolgt durch Bildung einer großen $(n+m)$ -quadratischen Matrix, Mat , der Skalarprodukte aller v - und u -Vektoren. In der oberen linken Ecke gibt es eine n -quadratische Matrix der Skalarprodukte der v -Vektoren, $v\text{Mat}$, und gleich darunter rechts gibt es die m -quadratische Matrix der Skalarprodukte der u -Vektoren, $u\text{Mat}$. So gilt:

$$MLC(v_1 \dots v_n; u_1 \dots u_m) = \sqrt{1 - \frac{\text{Det}(\text{Mat})}{\text{Det}(v\text{Mat}) \text{Det}(u\text{Mat})}}$$

Es ist wichtig daran zu erinnern, dass der Winkel zwischen 2 Unterräumen im Grunde der Winkel zwischen einem bestimmten Vektor im ersten Unterraum und einem anderen bestimmten Vektor im zweiten Unterraum ist. Man kann einen erweiterten Algorithmus verwenden, um MLC zusammen mit diesen bestimmten Vektoren zu ermitteln. In diesem Fall handelt es sich um eine explizite lineare Modellierung (Regression).

■ Analytische Beispiele

Die Standardrealisierung der maximalen Linearkorrelation, MLC, für den Fall, dass sowohl das Input-System als auch das Output-System aus einer einzigen Zeitreihe bestehen, entsteht durch die bekannte Einbettung der beiden Zeitreihen in höhere Dimensionen durch Zeitversetzung. Für genügend lange Zeitreihen können aus dem ursprünglichen Vektor, y (bzw. x), n (bzw. m) neue Vektoren, y_i mit $i = 0 \dots n - 1$ (bzw. x_i mit $i = 0 \dots m - 1$) durch die Rotation der Zeitreihe nach rechts um i Glieder erhalten. MLC ist in diesem Fall eine Funktion der beiden Vektoren (y und x) und der beiden Dimensionen (n und m). Die oben genannten Kovarianz-Matrizen ($yMat$ und $xMat$) sind von Töplitz-Form. Die große Block-Matrix sieht z.B. für den Fall ($n = 3, m = 5$) so aus:

$$\begin{pmatrix} 1 & cyy[1] & cyy[2] & cyx[0] & cyx[1] & cyx[2] & cyx[3] & cyx[4] \\ cyy[1] & 1 & cyy[1] & cyx[-1] & cyx[0] & cyx[1] & cyx[2] & cyx[3] \\ cyy[2] & cyy[1] & 1 & cyx[-2] & cyx[-1] & cyx[0] & cyx[1] & cyx[2] \\ cyx[0] & cyx[-1] & cyx[-2] & 1 & cxx[1] & cxx[2] & cxx[3] & cxx[4] \\ cyx[1] & cyx[0] & cyx[-1] & cxx[1] & 1 & cxx[1] & cxx[2] & cxx[3] \\ cyx[2] & cyx[1] & cyx[0] & cxx[2] & cxx[1] & 1 & cxx[1] & cxx[2] \\ cyx[3] & cyx[2] & cyx[1] & cxx[3] & cxx[2] & cxx[1] & 1 & cxx[1] \\ cyx[4] & cyx[3] & cyx[2] & cxx[4] & cxx[3] & cxx[2] & cxx[1] & 1 \end{pmatrix}$$

Mit cyx , cyy und cxx sind die entsprechenden Ko- und Autokovarianzen gemeint. Im Folgenden geben wir die expliziten Formeln von $MLC(y, n; x, m)^2$ für die ersten Einbettungen:

$n = 1, m = 1 \rightarrow MLC(y, 1; x, 1)^2 = cyx[0]^2$

$n = 1, m = 2 \rightarrow MLC(y, 1; x, 2)^2 = \frac{cyx[0]^2 - 2 cxx[1] cyx[0] cyx[1] + cyx[1]^2}{1 - cxx[1]^2}$

$n = 1, m = 3 \rightarrow MLC(y, 1; x, 3)^2 =$

$-((-1 + cxx[1]^2) cyx[0]^2 + (-1 + cxx[2]^2) cyx[1]^2 - 2 cxx[1] (-1 + cxx[2]) cyx[1] cyx[2] + (-1 + cxx[1]^2) cyx[2]^2 - 2 cyx[0] (cxx[1] (-1 + cxx[2]) cyx[1] + cxx[1]^2 cyx[2] - cxx[2] cyx[2])) / ((-1 + 2 cxx[1]^2 - cxx[2]) (-1 + cxx[2]))$

$n = 2, m = 2 \rightarrow MLC(y, 2; x, 2)^2 =$

$-(cyx[0]^4 - cyx[1]^2 + cyx[-1]^2 (-1 + cyx[1]^2) + 2 cyx[0] cyx[1] (cxx[1] + cyy[1]) - 2 cyx[0]^2 (1 + cxx[1] cyy[1]) + 2 cyx[-1] (cyx[0] (-cyx[0] cyx[1] + cyy[1]) + cxx[1] (cyx[0] - cyx[1] cyy[1]))) / ((-1 + cxx[1]^2) (-1 + cyy[1]^2))$

Anhang C

Is Polar Motion Nonlinear?

- qualitative nonlinear data analysis

von Ismail Hammoudeh [Ham 99]

Abstract:

Although the governing equations of polar motion, the Euler-Liouville equations, are originally nonlinear and despite the fact that the system is being driven by geophysical flows (atmosphere, oceans) whose behavior is mainly nonlinear, most studies on the subject are devoted to the linear aspects. Now we don't doubt the theoretical justification of a nonlinear treatment of the problem. We only think that a consequent nonlinear data analytical access to the time series of the polar motion would not have much sense, unless the time series themselves show nonlinear characteristics, that cannot be modelled linearly.

By means of some qualitative investigation of the time series we try to find out, whether a nonlinear treatment is inevitable.

■ Introduction

There are many reasons which encourages applying nonlinear time series analysis methods in studying earth rotation. First of all, the governing equations are themselves originally nonlinear. This is evident, for one can simply consider earth rotation as the rotation of a rigid body, which is being driven by external forcing. It is then governed by the Euler equations, which are nonlinear as follows:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} I_1 \omega_1 &= (I_2 - I_3) \omega_2 \omega_3 + M_1 \\ \frac{d}{dt} I_2 \omega_2 &= (I_3 - I_1) \omega_1 \omega_3 + M_2 \\ \frac{d}{dt} I_3 \omega_3 &= (I_1 - I_2) \omega_1 \omega_2 + M_3\end{aligned}\tag{1}$$

I_1, I_2 and I_3 are the principal inertial moments of the earth. The unknowns in the system are the components of the angular velocity, $\vec{\omega}$, and M_1, M_2 and M_3 are the components of the external forcing, the angular momentum. More dynamical elements in the structure of earth (e.g. a fluid core), viscoelasticity of mantle and magnetohydrodynamics complications in the core would only strengthen nonlinearity. Second, the external excitations \vec{M} , which drive the inner system, are in the physical world fluids, whose behavior is necessarily nonlinear. Originally both driver and response are nonlinear.

If we add to these two issues, the fact, that the unpredictability of polar motion lies in either stochasticity (nondeterministic input variables) or chaoticity (deterministic nonlinear behavior), then we should try to get able to distinguish between stochasticity and chaoticity. Besides, some

unexplained features of polar motion, like the existence of a consistent Chandler Wobble, may find a nonlinear explanation. These facts justify a nonlinear investigation of the problem.

But first you should be warned. You should not expect magic from nonlinear analysis. Never believe blindly the estimations of fractal dimensions and Lyapunov exponents of a supposedly low dimensional attractor, and don't draw too quick consequences about chaoticity and determinism depending on such estimations. And constructing effective dynamics with a few number of variables on a low dimensional attractor is just too beautiful to be true in real life. Still nonlinear methods are very fruitful. It is possible to make qualitative statements on linearity, stationarity and the existence of signatures of other geophysical processes in the investigated data.

Nevertheless, there is still an argument against the inevitability of a nonlinear treatment of polar motion. For the time scales that interest us developing the equations of motion in the neighborhood of the linear part would give nonlinear terms which are in best estimations 6 orders of magnitude less than the linear part. Consequent nonlinear data analysis of the time series of the polar motion would not have much sense, unless nonlinear character, that cannot be modelled linearly, is manifested in the investigated time series.

By means of some qualitative investigations of the time series we search for significant nonlinear characteristics.

■ Characterization of the problem

Assuming a finite number of the Dynamical variables in the investigated system, we mark these with the vector u , e.g.

$$u = ((\bar{\omega})_{\text{Mantle}}(t), (\bar{\omega})_{\text{Core}}(t)) \quad (2)$$

where $\bar{\omega}$ means the vector of angular velocity. The conservation of angular momentum results in a dynamical system of the following form:

$$F(t, u, \dot{u}) = \psi \quad (3)$$

ψ is the excitation function and combines many shares: $\psi_{\text{Atmosphere}}, \psi_{\text{Ocean}}, \psi_{\text{Sun-Moon}}, \dots$

Now eq(3) constitutes an input-output problem. The excitation is the driving input on the right side of the equation and the response F , which governs the output u is on the left side. The system is in general nonlinear and nonautonomous.

The linearized form of eq(3), which should be rejected in the case of significant nonlinearity looks so:

$$\dot{u} + A u = \text{const} (\psi_{\text{Atmosphere}} + \psi_{\text{Ocean}} + \psi_{\text{Sun-Moon}}) \quad (4)$$

A , a matrix, is time independent if we assume stationarity of the response.

Some output variables are practically not observable (e.g. the angular velocity of the core). Moreover, not all input variables, excitations, are known. We work here with two inputs, $xaam = \psi_{x\text{Atmosphere}}$ and $yaam = \psi_{y\text{Atmosphere}}$, and two outputs, the pole coordinates $xpol$ and $ypol$. We used the following time series:

IERS
NCEP

Briefly we can state the attacked problem as follows:

Given some input variables and some output variables in an input-output problem, find out if a linear relation of the form of eq(4) should be rejected.

We try to treat the problem generally and to avoid specific modelling as possible.

■ Nonlinearity of the pole coordinates

Please note that nonlinearity and nonstationarity are attributes of a *process* and not of a time series which is just a *realization* of the process. But here we apply this denotation also for time series if the time series can tell something about the probability, that the producing process is linear or stationary.

The question we investigate first is: how probably is the process which produced x_{pol} and y_{pol} nonlinear? There are many tests we undertook but we like to mention here the method of surrogates because of its simplicity and ability to recognize weak nonlinearities.

■ Method of surrogates

All information about a linear process is gathered in its first and second moments only. This means that the power spectrum determines all linear properties of the process. Now consider the following kind of Monte-Carlo simulation:

1- simulate surrogates (substitutes of the original time series) which mimic the original time series in all linear properties but are otherwise arbitrary. The simulation can be undertaken without explicit modelling via the *Fourier-Method*: (principally)

$$\{x_t\} \xrightarrow{\text{Fourier Trf.}} \{f(\omega) e^{i\varphi}\} \xrightarrow{\text{add arbitrary phase}} \{f(\omega) e^{i\varphi'}\} \xrightarrow{\text{inverse Fourier Trf.}} \{x_{\text{surrogate}_t}\}$$

2- choose a nonlinear *statistic* and calculate it on all sets. A nonlinear statistic can be a higher order moment or a topological measure like *correlation dimension* or *correlation sum*

3- if the value of the statistic on the original time series differs significantly from the values on the surrogates, then reject the null hypothesis of linearity

The surrogates are both linear and stationary. You may consider the Fourier-method of generation as a linear filtration of white noise to get a certain spectrum. This process is evidently linear and stationary. One should lock out the possibility that a positive result (rejection) of the surrogates test is because of nonstationarity rather than nonlinearity. This we did with our test of interdependances, which we shall mention briefly later. In fact one can use stationarity statistics in a surrogate test to check stationarity.

In the following the results of 22 surrogate tests of x_{pol} are shown. 19 surrogates were used. The significant difference is clear, whenever the statistic of x_{pol} takes rank 20 among all 20 time series.

Randomly taking rank 20 has probability of 5%. That's why a significance of 95% has been reached here.

```
{8, 20, 20, 20, 20, 20, 20, 20, 20, 20, 20, 20, 20, 20,
 20, 20, 20, 20, 20, 20, 20, 20, 20, 15, 11, 9, 12, 5, 12}
```

The result is:

Polar motion is significantly nonlinear.

This is still true after subtracting linearly modelled atmospheric influence. This is the result of the rest of ypol after decorrelation from xaam and yaam:

```
{13, 20, 20, 20, 20, 20, 20, 20, 20, 20, 20, 20, 20, 20,
 20, 20, 20, 20, 20, 20, 20, 20, 12, 15, 6, 14, 4, 9}
```

Unlike linear processes, whose spectral shares are independent of each other, the polar motion shows such interdependences (e.g. between yearly and half-yearly periods).

Tests of stationarity of the first and second moments (*weak stationarity*) give similar results:

Polar motion is significantly nonstationary (also in weak sense).

But this is not surprising. Polar motion is being excited by nonlinear and nonstationary processes.

The surrogates test shows that also for *xaam* and *yaam*.

■ interdependence

The real challenge is to test the hypothesis of a linear response in the framework of input-output analysis, if the input is itself nonlinear. Physically this means to test, whether a linear transfer function is sufficient to explain the interrelation between the atmospheric excitation and polar motion. If such a test is positive, i.e. the null hypothesis should be rejected, then the conclusion is: either one should add nonlinear derivatives of the input to construct a new input, which is linearly related to the output, or one should give up the linear response. But these two choices are mathematically in principle equivalent (inverse representations). This means that modifying the form of the atmospheric excitation may save the linear association with polar motion.

Let me make this point clearer with an example. Assume, the atmosphere excites the ocean significantly and thus appears nonlinearly in the oceanic excitation function of polar motion. In this case an adequate interdependence test would reject the linear transfer function for the pair (*xpol*, *xaam*), but would accept it for the pair (*xpol*, *xaam+xoam*).

What is a good test for interdependences? First notice that a straight forward generalization of the surrogates method (where one adds the same arbitrary phase to input and output in order to preserve the linear correlation), with a suitable nonlinear correlation measure as a statistic, would give two possibilities, if it is positive. The surrogates are themselves linear. So one can not decide objectively, whether nonlinearity of response or nonlinearity of input is the cause.

■ **Scheme for interdependence test**

interdependence tests between two timeseries $x(t)$ and $y(t)$ are constructed by modification of the surrogates test.

1. construct derivatives of x and y (e.g. instantaneous phase, instantaneous amplitude, identity, square,...)

$$x \xrightarrow{f} \tilde{x} \qquad y \xrightarrow{g} \tilde{y}$$

2. permute \tilde{x} and \tilde{y} to get surrogates.

$$\tilde{s}x_1, \tilde{s}x_2, \tilde{s}x_3, \dots, \tilde{s}x_n \qquad \tilde{s}y_1, \tilde{s}y_2, \tilde{s}y_3, \dots, \tilde{s}y_n$$

Three methods for permuting are recommended: free mixing, permuting preserving approximately the same spectrum, rotation !!!

3. choose a function of two variables H and construct for every pair (\tilde{x}, \tilde{y}) (also for the surrogates) the new time series $\{H(\tilde{x}_1, \tilde{y}_1), H(\tilde{x}_2, \tilde{y}_2), H(\tilde{x}_3, \tilde{y}_3), \dots\}$

4. compare the moments m_1, m_2, m_3, \dots of the new H -time series and determine the rank of the original time series.

This defines a whole spectrum of measures: $(\text{Measure})_{f,g,H,m_i}$

Applying ideas from general synchronization we used the following measure intensively: $f=g$ =instantaneous phase

$$H(x,y)=n \cdot x - m \cdot y \quad (n,m \text{ natural numbers})$$

we used this measure with the first four Moments: $\bar{x}, \overline{(x - \bar{x})^2}, \overline{(x - \bar{x})^3}, \overline{(x - \bar{x})^4}$. Building permutations by rotating the time series gave very good results. It is based on the experience, that associations weaken in general if time difference increases. This may not be appropriate for delay processes.

Whenever this measure signifies significant association between the two time series, one should test whether linear surrogates show the same. Nonlinear association is signified, if there is no association between the surrogates.

We could establish significantly interdependences between the yearly period of the atmospheric excitation and the half-yearly period of polar motion. For example nonlinear association is clear for $n=2$ and $m=7$. We used 39 surrogates and repeated the test 6 times. This time rank 1 and rank 40 are significant. To the right we see no significant linear association.

$$\begin{pmatrix} 24 & 2 & 2 & 1 \\ 32 & 1 & 2 & 1 \\ 28 & 1 & 2 & 1 \\ 31 & 1 & 3 & 1 \\ 35 & 1 & 1 & 1 \\ 32 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 21 & 32 & 14 & 30 \\ 4 & 6 & 24 & 8 \\ 24 & 21 & 18 & 26 \\ 4 & 23 & 8 & 25 \\ 29 & 12 & 8 & 15 \\ 9 & 14 & 26 & 13 \end{pmatrix}$$

A similar association between the Chandler period of polar motion and the yearly period of polar motion or of atmospheric excitation was not proved. Such an association would have explained the source of energy which maintains the Chandler wobble.

When the original timeseries without any filtration was tested, no significant nonlinear dependence was found.

■ Conclusions

No significant nonlinear dependence between polar motion and its atmospheric excitation was yet found. The kind of tests we applied here can reject a null hypothesis but can't prove it. But until a significant sign of nonlinearity is found one can continue to work linearly with clear conscience.

What about the half-Chandler peak? A true half-Chandler period is a very significant sign of nonlinearity. But the mere existence of a peak in the half-Chandler region is still an open question, let alone demonstrating, that such a peak is a true half-Chandler one. In many time symmetrical systems quadratic effects impose a condition on the phase of the peak with the half period, quadratic phase coupling. Bispectral analysis doesn't find quadratic phase coupling here. But the earth system doesn't need to follow this condition. Our method of finding interdependences didn't discover any interdependence between the Chandler region and the half-Chandler region.

Literaturverzeichnis

- [Bar 63] George A. Barnard, *Journal of the Royal Statistical Society B*, 1963
- [BHT 63] Bogert, B. P. and Healy, M.J.R. and Tukey J. W. 1963. The Quefrency Alanalysis of Time Series for Echoes: Cepstrum, Pseudo-autocovariance, Cross-Cepstrum and Saphe Cracking, from *Proc. Symposium Time Series Analysis.*,(Brown University, June 1962), ed. Rosenblatt, M. John Wiley and Sons, New York. Pages 209-243.
- [Barnes et al., 1980] Barnes, J., Sargent, H., and Tryon, P. (1980). Sunspot cycle simulation using random noise. In Pepin, R., Eddy, J., and Merrill, R., editors, *The Ancient Sun*, pages 159-163. New York. Pergamon Press.
- [BF 85] L. Breiman and J.H. Friedman. Estimating optimal transformations for multiple regression and correlation. *J. Am. Stat. Assoc.*, 80:580-598, 1985.
- [Aba 96] H. D. I. Abarbanel. *Analysis of Observed Chaotic Data*. Springer-Verlag, New York Berlin Heidelberg, 1996.
- [BP 85] R. Badii and A. Politi. Statistical description of chaotic attractors: the dimension function. *J. Stat. Phys.*, 40:725–750, 1985.
- [Dol 01] K. Dolan, *Extracting Dynamical Structure from Unstable Periodic Orbits*. *Physical Revue E* 64, page 026213 (2001).
- [DS 01] K.Dolan and M.L.Spano,Surrogate for Nonlinear Time Series Analysis.*Physical Revue E*,64,page 046128 (2001).
- [DHTD 95] C. Diks, J. C. van Houwelingen, F. Takens, and J. DeGoede. Reversibility as a criterion for discriminating time series. *Phys. Lett. A*, 210(2-3):221–228, 1995.
- [EKR 87] J.-P. Eckmann, S. O. Kamphorst, and D. Ruelle. Recurrence plots of dynamical systems. *Europhys. Lett.*, 4:973–977, 1987.
- [FHN 96] M. Furuya, Y. Hamano, I. Naito, Quasi-periodic wind signal as a possible excitation of Chandler wobble. *Journal of Geophysical Research - Solid Earth* Vol.101, No.B11, 1996 P:25537-25546
- [FM 99] Frede, V. and Mazzega, P., 1999, "Detectability of deterministic non-linear processes in Earth rotation time-series -- I. Embedding," *Geophys. J. Int.*, **Vol. 137**, pp. 551-564.
- [FM 99] Frede, V. and Mazzega, P., 1999, "Detectability of deterministic non-linear processes in Earth rotation time-series -- II. Dynamics," *Geophys. J. Int.*, **Vol. 137**, pp. 565-579.
- [FM 00] Frède V. and Mazzega P. , (2000), " A preliminary Nonlinear Analysis of the Earth's Chandler Wobble ", *Discrete Chaotic Dynamics in Nature and Society* Journal vol 4/1, 39-54.

- [FM 00] Frède V. , (2000), " Dynamical analysis of the atmospheric angular momentum short term fluctuations. Comparison with the Earth ", *Journal of Geodesy* 73 :660-670
- [FS 86] A. M. Fraser and H. L. Swinney. Independent coordinates for strange attractors from mutual information. *Phys. Rev. A*, 33(2):1134–1140, 1986.
- [FY 83] H. Fujisaka and T. Yamada. Stability theory of synchronized motion in coupled-oscillator systems. *Prog. Theor. Phys.*, 69:32, 1983.
- [GJ 98] Greiner-Mai, H. and Jochmann, H., 1998, "Correction to 'Climate variations and the Earth's rotation'," *J. Geodyn.*, Vol. 25, pp. 1-4.
- [GJB 98] Greiner-Mai, H., Jochmann, H. and Barthelmes, F., 1998, "About the influence of a possible relative rotation of the Earth's inner core on the polar motion, the geomagnetic field and the gravity field," *Scientific Technical Report STR 98/06*, GFZ Potsdam, 15 pp.
- [GJB 98] Greiner-Mai, H., Jochmann, H., and Barthelmes, F., 1998, "Modellierung des Einflusses einer hypothetischen Innenkernbewegung auf die Polbewegung, das Erdmagnetfeld und das Gravitationsfeld," *DGK-Sonderheft*.
- [Gra 88] P. Grassberger. Finite sample corrections to entropy and dimension estimates. *Phys. Lett. A*, 128:369–373, 1988.
- [Gra 90] P. Grassberger. An optimized box-assisted algorithm for fractal dimensions. *Phys. Lett. A*, 148(1/2):63–68, 1990.
- [Gre 97] Greiner-Mai, H., 1997, "Possible relations between the rotational axis of the inner Earth's core and the magnetic dipole axis," *Astron. Nachr.*, Vol. 318, pp. 63-741.
- [Gro 00] Gross, R. S., 2000, "Combinations of Earth Orientation Measurements: SPACE99, COMB99, and POLE99," *JPL Publication 00-5*, Pasadena, California.
- [Gro 00b] Gross, R. S., 2000, "The excitation of the Chandler wobble," *Geophysical Research Letters*, volume 27, number 15
- [Ham 99] Ismail Hammoudeh: „Is Polar Motion Nonlinear?“ JOURNÉES 1999 - SYSTEMES DE REFERENCE SPATIO-TEMPORELS, 180-183 (1999)
- [Höp 80] Höpfner, J.: Über die Halbchandlerwelle aus Breitenmessungen von Potsdam, Vortrag: Konferenz: "Studium der Erde als Planet mit Methoden der Astronomie". Kiew 1980
- [HJ 84] Höpfner, J.; Jochmann, H., Cause and evidence of the half-Chandler wobble, *Proc. IAG*, Vol. 2, 100-107, 1984.
- [Hin 82] Hinich, M. J., "Testing for gaussianity and linearity of a stationary time series," *J. Time Series Anal.* 3, 169-176, 1982.
- [HKS 99] R. Hegger, H. Kantz, and T. Schreiber. Practical implementation of nonlinear time series methods: The TISEAN package. *Chaos*, 9(2):413–435, 1999.

- [Huy 73] C. Huygens. *Horologium Oscillatorium*. Muguet, Paris, 1673.
- [JG 96] Jochmann, H. and Greiner-Mai, H., 1996, "Climate variations and the Earth's rotation," *J. Geodyn.*, Vol. 21, pp. 161-176.
- [Joc 81] Jochmann, H., 1981, "On the Cause of a Wobble of Polar Motion Oscillating with a half Chandler Period", *Astr. Nachrichten*, Bd. 302, H. 4 (1981)
- [Joc 98] Jochmann, H., 1998, "Climate cycles in polar motion," Paper presented at the IERS Workshop Potsdam, 1998.
- [Joc 99] Jochmann, H., 1999, "The influence of continental water storage on the annual wobble of polar motion, estimated by inverse solution," *J. Geodyn.*, Vol. 27, pp. 147-160.
- [Kan 94] H. Kantz. Quantifying the closeness of fractal measures. *Phys. Rev. E*, 49(6):5091–5097, 1994.
- [Kap 95] DT Kaplan "Nonlinearity and Nonstationarity: The Use of Surrogate Data in Interpreting Fluctuations in Heart Rate", Proceedings of the 3rd Annual Workshop on Computer Applications of Blood Pressure and Heart Rate Signals, Florence, Italy, 4-5 May, 1995
- [KK 97] Kosek, W. and Kolaczek, B., 1997, "Semi-Chandler and semiannual oscillations of polar motion," *Geophys. Res. Lett.*, Vol. 24, No. 17, pp. 2235-2238.
- [KKM 98] H. Kantz, J. Kurths, and G. Mayer-Kress, editors. *Nonlinear Analysis of Physiological Data*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1998.
- [Kol 93] A. N. Kolmogorov. *Information Theory and the Theory of Algorithms*, volume III of *Selected Works*. Kluwer Academic, Dordrecht, 1993.
- [KS 97] H. Kantz and Th. Schreiber. *Nonlinear Time Series Analysis*. Cambridge Univ. Press, Cambridge, UK, 1997.
- [Kug 99] D. Kugiumtzis. Test your surrogate data before you test for nonlinearity. *Phys. Lett. E*, 60:2808, 1999.
- [Kul 59] S. Kullback. *Information Theory and Statistics*. Dover, New York, 1959.
- [Lam 80] Lambeck, K. *The Earth's Variable Rotation: Geophysical Causes and Consequences*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1980
- [Lee 98] Te-Won Lee "Independent Component Analysis", Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Holland (1998)
- [Lju 87] L. Ljung . *System Identification-Theory for the User*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.-J. 1987]
- [Lor 63] E. N. Lorenz: "Deterministic nonperiodic flow", *J. Atmosph. Sc.* 20, 130-141 (1963)

- [Mar 78] F. H. C. Marriott. Barnard's monte-carlo tests: how many simulations? *App. Statist.*, 28:75, 1978.
- [MM 88] H. Moritz, I Mueller, Earth Rotation - Theory and Observation, Ungar Publishing Company, New York, USA, 1988.
- [MS 96] R. Manuca and R. Savit. Stationarity and nonstationarity in time series analysis. *Physica D*, 99:134–161, 1996.
- [OS 89] Oppenheim, Alan V.; Schafer, Ronald W. - Discrete-Time Signal Processing (págs. 768 - 770, 822), Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1989.
- [PAD 93] M. Palus, V. Albrecht, and I. Dvořák. Information-theoretic tests for nonlinearity in time series. *Phys. Lett. A*, 175:203–209, 1993.
- [PN 99] M. Palus, D. Novotna, *Phys. Rev. Lett.* 83, 3406 (1999)
- [PN 00] M. Palus, D. Novotna, *Phys. Rev. Lett.* 85, 2648 (2000)
- [Par 98] U. Parlitz Nonlinear Time-Series Analysis, in J.A.K. Suykens, J. Vandewalle (Eds.), Nonlinear Modeling - Advanced Black-Box Techniques, Kluwer Academic Publisher, Boston, 1998
- [PC 90] L. M. Pecora and T. L. Carroll. Synchronization in chaotic systems. *Phys. Rev. Lett.*, 64:821–824, 1990.
- [Pri 88] M. B. Priestley, *Non-Linear and Non-Stationary Time Series Analysis*, Academic Press, San Diego CA, 1988.
- [PS 87] K. Pawelzik and H. G. Schuster. Generalized dimensions and entropies from a measured time series. *Phys. Rev. A*, 35:481, 1987.
- [PT 95] D. Prichard and J. Theiler. Generalized redundancies for time series analysis. *Physica D*, 84:476–493, 1995.
- [PTVF 92] W. H. Press, S. T. Teukolsky, W. T. Vetterling, and B. P. Flannery. *Numerical Recipes in C: the art of scientific computing*. Cambridge University Press, Cambridge, England, 1992.
- [Pyr 96] K. Pyragas. Weak and strong synchronization of chaos. *Phys. Rev. E*, 54(5):4508–4511, 1996.
- [QAG 00] R. Quián Quiroga, J. Arnhold, and P. Grassberger. Learning driver-response relationships from synchronization patterns. *Phys. Rev. E*, 61(5):5142–5148, 2000.
- [Ren 70] A. Renyi. *Probability Theory*. North-Holland, Amsterdam, 1970.
- [RG 84] T. Subba Rao and M. Gabr. *An Introduction to Bispectral Analysis and Bilinear Time Series Models*, volume 24 of *Lecture Notes in Statistics*. Springer-Verlag, Berlin, 1984.

- [RSS 93] Ricard, Y., G. Spada, and R. Sabadini, Polar wandering of a dynamic Earth, *Geophys. J. Int.*, 113, 284-298, 1993
- [Sch 98] Th. Schreiber. Constrained randomization of time series data. *Phys. Rev. Lett.*, 90(10):2105–2108, 1998.
- [Sch 00a] A. Schmitz. Measuring statistical dependence and coupling of subsystems. *Phys. Rev. E*, 62(5):7508–7511, 2000.
- [Sch 00b] Th. Schreiber. Measuring information transfer. *Phys. Rev. Lett.*, 85:461, 2000.
- [Sch 00c] Andreas Schmitz, "Erkennung von Nichtlinearitäten und wechselseitigen Abhängigkeiten in Zeitreihen" (Dissertation 2000), Publikationsreihe des John von Neumann-Instituts für Computing (NIC) NIC-Serie Band 6, 2001.
- [SMN 98] A. Swami, J. Mendel, C. Nikias, Higher-Order Spectral Analysis Toolbox User's Guide 1998 The MathWorks.
- [Son 01] D. M. Sonechkin, Nonlinear Nature of the Chandler Wobble of the Earth's Poles *Transactions (Doklady) of the Russian Academy of Sciences/Earth Science Section*, Vol. 381A, No. 9, 2001 p. 1107 English language translation of the journal is available from MAIK "Nauka / Interperiodica" (Russia). *Doklady Earth Sciences* ISSN 1028-334X. *Translated from Doklady Akademii Nauk, Volume 381, Nos. 3–6*
- [SRS 92] Spada, G., Y. Ricard, and R. Sabadini, True polar wander for a dynamic Earth, *Nature*, 360, 452-454, 1992.
- [SSR 93] Spada, R. Sabadini, and G., Y. Ricard, "On a particular solution of the nonlinear Liouville equations", *Geophys. J. Int.*, 114, 399-404, 1993.
- [SS 87] R. Schlittgen and H. J. Streitberg. *Zeitreihenanalyse*. Oldenbourg Verlag, München Wien, 2. edition, 1987.
- [SS 96] Th. Schreiber and A. Schmitz. Improved surrogate data for nonlinearity tests. *Phys. Rev. Lett.*, 77(4):635–638, 1996.
- [SS 97a] Th. Schreiber and A. Schmitz. Classification of time series data with nonlinear similarity measures. *Phys. Rev. Lett.*, 79(8):1475–1478, 1997.
- [SS 97b] Th. Schreiber and A. Schmitz. Discrimination power of measures for nonlinearity in a time series. *Phys. Rev. E*, 55(5):5443–5447, 1997.
- [SS 99a] A. Schmitz and T. Schreiber. Surrogate data for non-stationary signals. In *Chaos in Brain? Interdisc. Workshop, 10-12 March 1999, Bonn, Germany*, pages 222–225, Bonn, Germany, 1999. Clinic of Epileptology, Rhein.-Friedr.-Wilhelms-Univ., Bonn, Germany.
- [SS 99b] A. Schmitz and T. Schreiber. Testing for nonlinearity in unevenly sampled time series. *Phys. Rev. E*, 59(4):4044–4047, 1999.
- [SS 00] Th. Schreiber and A. Schmitz. Surrogate time series. *Physica D*, 142:346–382, 2000.

- [SSC+ 96] S. J. Schiff, P. So, T. Chang, R. E. Burke, and T. Sauer. Detecting dynamical interdependence and generalized synchrony through mutual prediction in a neural ensemble. *Phys. Rev. E*, 54(6):6708–6724, 1996.
- [SW 49] C. E. Shannon and W. Weaver. *The mathematical theory of information*. University Press, Urbana Ill., 1949.
- [TEL+ 92] J. Theiler, S. Eubank, A. Longtin, B. Galdrikian, and J. D. Farmer. Testing for nonlinearity in time series: the method of surrogate data. *Physica D*, 58:77–94, 1992.
- [The 86] J. Theiler. Spurious dimensions from correlation algorithms applied to limited time-series data. *Phys. Rev. A*, 34:2427–2432, 1986.
- [Tim 98] J. Timmer. Power of surrogate data testing with respect to nonstationarity. *Phys. Rev. E*, 58(4):5153–5156, 1998.
- [Tim 00] J. Timmer. Comment on "Sunspot Cycle: A Driven Nonlinear Oscillator?" *Phys. Rev. Lett.*, 85(12):2647, 2000.
- [TLR 93] J. Theiler, P. S. Linsay, and D. M. Rubin. Detecting nonlinearity in data with long coherence times. In A. S. Weigend and N. A. Gershenfeld, editors, *Time series prediction: Forecasting the future and understanding the past*, pages 429–455. Addison Wesley, Reading Mass., 1993.
- [TP 96] J. Theiler and D. Prichard. Constrained-realization monte-carlo method for hypothesis testing. *Physica D*, 94:221, 1996.
- [TP 97] J. Theiler and D. Prichard, Using 'Surrogate Surrogate Data' to calibrate the actual rate of false positives in tests for nonlinearity in time series, *Fields Inst. Comm.* 11, 99 (1997).
- [Tak 93] Floris Takens. Detecting nonlinearities in stationary time series. *International Journal of Bifurcation and Chaos*.3:241-256, 1993
- [VK 98] H. Voss and J. Kurths. Reconstruction of nonlinear time-delayed feedback models from optical data. *Chaos, Solitons & Fractals*, 10(4-5):805-809, 1998.
- [VKAK 99] H.U. Voss, P. Kolodner, M. Abel, and J. Kurths, *Phys. Rev. Lett.* 83, 3422–3425 (1999).
- [Wan 99] Wang Wen-jun, *J. Nonlinear Dynamics in Science and Technology*, 6(1), 1999:60
- [Wan 02] Wang Wen-jun, "Nonlinear mechanism for polar motion with period of 7 months", *Journal of Geodesy*, 76 Issue 4 (2002) pp 209-215
- [WG 93] A. S. Weigend and N. A. Gershenfeld. *Time series prediction: Forecasting the future and understanding the past*, volume XV of *Santa Fe Institute Studies in the Science of Complexity*, Proc. Addison -Wesley, Reading, 1993.
- [WKP 98] A. Witt, J. Kurths, and A. Pikovsky. Testing stationarity in time series. *Physical Review E*, 58(2):1800-1810, August 1998.

Nachwort und Danksagung

Im Namen Gottes beginne ich und im Namen Gottes beende ich. Ich danke meinem Herrn, Allah, den Gnädigen, denn allein durch seine Gnade konnte ich diese Arbeit fertigen. Ich bitte Ihn um weitere Gnaden, die mich im Pfad der Wissenschaft und der Suche nach der Wahrheit unterstützen und beglücken. Und Er ist der Großzügige.

An dieser Stelle bedanke ich mich zuerst bei meiner Mutter und meinem Vater, die sehr lange auf diesen Moment warteten und dafür sehr viel opferten. Ich bedanke mich bei meiner Frau, die mich dauernd unterstützte. Aller Erfolg, den ich erreiche gilt diesen drei.

Ich bedanke mich herzlichst bei Herrn Prof. H. Jochmann. Er hat mich dauernd wissenschaftlich und persönlich unterstützt. Ich muss mich bei ihm gleichzeitig entschuldigen. Obwohl ich Verschiedenes zu seinem Interessengebiet, der Polbewegung, unternahm (Herr Jochmann, einer der renommiertesten Experten der Polbewegung, gilt nach meiner bescheidenen Meinung als "Mr. Polbewegung"), war der Anteil der Polbewegung in der Dissertation wenig. Und dieses Wenige wurde wegen des großen Zeitdrucks, unter dem ich stand, schließlich knapp dargestellt. Ich muss hierzu zugeben, dass mein Interesse eher der Datenanalyse gilt, und dass meine Resultate in der Untersuchung der Polbewegung negativer Art sind. Aber ein negatives Resultat ist auch ein Resultat. Von Herrn Jochmann habe ich Vieles gelernt, auch in der Geschichte, der deutschen Sprache und den verschiedenen sozial-wissenschaftlichen Themen.

Herrn J. Kurths danke ich sehr dafür, dass er mir die Möglichkeit einer Promotion in seiner Gruppe, die aus hervorragenden Forschern auf dem Gebiet der nichtlinearen Dynamik besteht, ermöglichte. Sicher würde er es gut heißen, wenn ich meine Arbeit weiteren Iterationen mit ihm unterziehen würde, um die Arbeit schließlich in einer reiferen Form abgeben zu können. Wegen Umstände privater Natur musste ich leider seinem Wunsch nicht entsprechen. Trotzdem akzeptierte er meine Arbeit und unterstützte mich.

Ich bedanke mich bei allen Wissenschaftlern und Kollegen im GeoPhysikalischen Zentrum, GFZ-Potsdam und bei den "Chaoten" am neuen Palais. Auch bedanke ich mich bei meinen Freunden und Brüdern, insbesondere Dr. C. Daroui und Dr. Y. Hamwi.

Es gibt viele, die ich hier nicht erwähnte. Ihnen allen gilt mein herzlicher Dank.