Universität Potsdam

Mathematisch-naturwissenschaftliche Fakultät

Lehrstuhl für Didaktik der Mathematik

Masterarbeit zum Thema

Zahlen in den Fingern. Eine Analyse des Lernspiels Fingu in Bezug auf den frühkindlichen Zahlerwerb im Rahmen der Artifact-Centric Activity Theory.

Zur Erlangung des akademischen Grades
Master of Education

Erstgutachter: Prof. Dr. Ulrich Kortenkamp
Zweitgutachterin: Prof. Dr. Silke Ladel

Abgabe: 16. Juli 2023

Online veröffentlicht auf dem
Publikationsserver der Universität Potsdam:
https://doi.org/10.25932/publishup-60762
https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:kobv:517-opus4-607629

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis

1 Einleitung

„Understanding comes only from thinking“ (Ross, 1989, S. 50).

Im Mathematikunterricht folgen viele Lernende mechanisch Rechenvorschriften und spezifischen Abläufen, ohne diese zu verstehen (Ross, 1989). Schließlich kämen sie auch so zu dem richtigen Ergebnis (Spiegel & Selter, 2021). Doch Ziel sollte es sein, nicht nur das Verständnis hinter den mathematischen Themengebieten zu forcieren, sondern auch zu kreativem und problemorientiertem Denken anzuregen (Spiegel & Selter, 2021; Winter, 1995). Über einen reichhaltigen Zugang zur Mathematik bereits von Geburt an ist dies möglich, sofern die Kinder dazu angehalten werden, ihr Wissen selbstständig aufzubauen und Beziehungen zwischen den einzelnen Themengebieten zu erkunden (Ross, 1989).

Insbesondere im Kindesalter stellen enaktive Materialien hilfreiche Werkzeuge dar, Mathematik in vielfältiger Art und Weise erfahrbar zu machen (Ross, 1989). Zudem dienen sie als Kommunikationsanlass (Ross, 1989). Benz et al. (2015) betonen, dass junge Kinder lediglich lernen, wenn es sie interessiert. Ansonsten verlieren sie oft die Motivation, sich mit den Inhalten auseinanderzusetzen (Benz et al., 2015). In diesem Sinne haben sich spielerische Zugänge zur Mathematik vor Schuleintritt oder zu Beginn ihrer Schullaufbahn als besonders fruchtbar aufgetan (Einsiedler, 1989). Auch rechenschwache Kinder und Kinder, die wegen Misserfolgen im Fach Mathematik demotiviert oder sogar verängstigt sind, profitieren wegen der Zwanglosigkeit des Spiels davon (Heinz, 2015). Über eine angemessene, inhaltliche und sprachliche Begleitung durch Erwachsene sind zahlreiche mathematische Erfolge zu erzielen (Einsiedler et al., 1985; Benz et al., 2015). Doch Spielen allein reicht nicht aus, um frühe mathematische Lernprozesse anzuregen und zu unterstützen (Wager, 2013). Hier „bleibt [...] das Problem der Zufälligkeit des Lernens. Je nach Spielform treten mehr oder weniger interne kognitive Aktivitäten auf“ (Einsiedler, 1989, S. 297). Umso wichtiger ist es, sich Lernspiele im Detail anzuschauen und nur diejenigen in den Lernpfad zu integrieren, die nicht nur auf die Automatisierung von Lerninhalten ausgerichtet sind, sondern auch mathematisches Verständnis aufbauen sollen (Heinz, 2015).

Für den ersten Zahlbegriffserwerb, die Entwicklung eines Zahlensinns und erste Anzahlbestimmungen gibt es zahlreiche Lernspiele - eines davon ist *Fingu* (Holgersson et al., 2016). Dieses digitale Lernspiel zielt nach Aussagen der Entwickler:innen darauf ab, den Zahlensinn von Kindern zu fördern und das Teil-Ganze-Verständnis zu etablieren (Holgersson et al., 2016). In der App gibt es verschiedene Level, die jeweils darauf ausgelegt sind, dass die Kinder eine Reihe von Aufgaben lösen (Tucker & Johnson, 2020). Jede dieser Aufgaben besteht darin, dass den Kindern ein oder zwei Sets von Früchten gezeigt werden und sie dann entsprechend viele Finger gleichzeitig auf den Bildschirm legen sollen (Holgersson et al., 2016). Über die verschiedenen Zerlegungen einer Zahl, die sie während des Spielens erfahren, soll das Teil-Ganze-Verständnis gefördert werden (Holgersson et al., 2016). Außerdem soll über das integrierte Zeitlimit eine Ablösung vom Zählen zur Simultanerfassung erreicht werden, da das Zählen zum Aufbau von weiteren Rechenoperationen vielfach kritisiert wird (Holgersson et al., 2016).

Untersuchungen des Lernspiels zeigen jedoch Indizien dafür, dass diese Ziele nur marginal erreicht werden (Kortenkamp et al., 2023).

Um dazu beizutragen, wie ein Lernspiel für Lernende vor bzw. unmittelbar nach Schuleintritt zum Zahlbegriffserwerb, zur Entwicklung eines Zahlensinns und zur Anzahlbestimmung gestaltet werden sollte, und um so eine Vorlage für weitere Analysen zu bieten, soll exemplarisch Fingu nach dem Ansatz der Artifact-Centric Activity Theory (ACAT) analysiert werden. ACAT basiert auf der Tätigkeitstheorie, wobei vor allem die Prozesse während des Ausführens der Tätigkeit in den Fokus gesetzt werden (Ladel & Kortenkamp, 2012). Dies ist besonders hier bei der Untersuchung der Denkprozesse und des Verstehens von mathematischen Zusammenhängen zweckdienlich (vgl. Ladel & Kortenkamp, 2013; Dohrmann et al., 2012). Daher wird diese hier rahmenbildende Theorie als erstes beschrieben.

Für eine weiterführende Analyse müssen zunächst die mathematischen Konzepte, innerhalb von ACAT auch Objekte genannt, erklärt und aus mathematikdidaktischer Sicht beleuchtet werden (Ladel & Kortenkamp, 2012). Die Objekte von Fingu, der Zahlensinn, der Zahlbegriffserwerb, die Anzahlwahrnehmung sowie -bestimmung und nach Aussagen der Entwickler:innen das Teil-Ganze-Verständnis, werden daher im Kapitel der mathematischen Grundlagen tiefgründig geschildert. Daran anknüpfend folgt eine Ausführung der Anzahldarstellung hinsichtlich der Prinzipien der *Embodied Cognition* und Finger Gnosis. Ausgehend davon wird die Bedeutung der frühen Bildung für eben diese Konzepte hervorgehoben. Damit wird die theoretische Basis für die Betrachtung der Subjekt- und Gruppenebene innerhalb von ACAT geschaffen. Dann werden die Design-Elemente der Lernapp, konkret die Verwendung von digitalen Werkzeugen und Multi-Touch-Elementen im Lernkontext, detailliert erläutert. Anschließend wird das Lernspiel gründlich beschrieben, Aussagen der Entwickler:innen zur App und zum Design sowie Studien zur Untersuchung von Fingu angeführt. Schlussendlich findet dann auf Basis all dieser Informationen eine ausführliche Analyse entlang des ACAT-Review-Guides statt (vgl. Etzold et al., 2018). Angelehnt an diese Analyse wird eine selbst durchgeführte, qualitative Studie mit zehn Vorschulkindern aus Potsdam dargelegt, die die theoretische Analyse mit empirischen Daten untermauert. Zuletzt wird eine Zusammenfassung hinsichtlich geeigneter Spiel- und Lernelemente aus Fingu angebracht, wobei zusätzlich Vorschläge für eine alternative Umsetzung, basierend auf der Literatur und den Ergebnissen der Studie, inkludiert werden. Insgesamt soll dies den Abschluss dafür bieten, ob und inwiefern das Verstehen dieser mathematischen Konzepte mit diesem Lernspiel gefördert wird oder gefördert werden könnte.

2 Artifact-Centric Activity Theory

Die Artifact-Centric Activity Theory, kurz ACAT, basiert auf der von Engeström (1987) beschriebenen Tätigkeitstheorie (Ladel & Kortenkamp, 2012). Deshalb wird diese zuerst zusammenfassend dargestellt. Darauf aufbauend wird die Instrumentation, Instrumentalisation sowie instrumentelle Genese und Orchestration näher erläutert, um daraus ACAT zu begründen und die Theorie anschließend zu präsentieren.

2.1 Tätigkeitstheorie

Im Fokus der Tätigkeitstheorie stehen menschliche Tätigkeiten mit ihren Umweltbezügen (Fischer & Wannemacher, 2013). Ausgeführt werden die Tätigkeiten von sogenannten **Subjekten**, also den aktiven Handlungsträger:innen, die als bildungsbedürftige und selbsttätige Menschen die Tätigkeiten bewusst durchführen (Ladel, 2017; Ladel & Kortenkamp, 2014a, Schupp, 2004). Eine bestimmte Tätigkeit wird vollbracht, um eigene Bedürfnisse in Interaktion mit dem **Objekt** der Tätigkeit zu befriedigen (Leontjew, 1982). Tätigkeiten gelten grundsätzlich immer als objektorientiert (Ladel, 2013). Das Objekt der Tätigkeit stellt die inhaltliche Komponente dar, in den hier betrachteten Situationen demnach die mathematischen Gegenstände (Ladel, 2013). Das Objekt kann unter zwei Facetten betrachtet werden: Einerseits existiert es unabhängig von anderen Dingen, beispielsweise kommt die Addition unabhängig von ihrer Benutzung durch ein Subjekt bei einer Rechnung als eigenständiges Konstrukt vor (Ladel, 2013). Andererseits entsteht ein (kognitives) Bild des Objekts unter der Betrachtung all seiner Eigenschaften durch die Tätigkeiten des Subjekts (Ladel, 2013). Als Beispiel dafür können die Grundvorstellungen zur Addition genannt werden.

Giest (2010) definiert eine **Tätigkeit** als zweckmäßige, bewusste, menschliche Aktivität, in der der Mensch den Stoffwechsel mit der Natur reguliert, dabei materielle und geistige Produkte herstellt sowie die Natur, die Gesellschaft und sich selbst verändert. Etwas kürzer beschreiben Ladel und Kortenkamp (2016) eine Tätigkeit als „*the purposeful, transformative and developing interaction between subject and object*“, die das Hauptkonzept der Tätigkeitstheorie darstellt (S. 26). Jede Tätigkeit besteht dabei aus Operationen und Handlungen, die das Subjekt unbewusst ausführt (Holgersson et al., 2016). Handlungen sind auf die Ziele der Tätigkeit ausgerichtet (Engeström, 2008). Operationen ergeben sich unter anderem aus den instrumentellen Bedingungen und Zwängen und stellen verinnerlichte Interaktionen dar, die kein weiteres Nachdenken erfordern (Etzold et al., 2018). Der Sinn einer Handlung oder Operation kann allerdings erst durch die Betrachtung der übergeordneten Tätigkeit erfolgen (Engeström, 2008).

Eine Tätigkeit ist historisch auf verschiedenen Stufen angesiedelt (Holgersson et al., 2016). Besonders der individuelle Lernpfad des Subjekts ist hier von Relevanz (Holgersson et al., 2016). Beeinflusst wird eine Tätigkeit darüber hinaus durch Technologien, vermittelnden Artefakten, institutionellen und informellen Regeln, Gemeinschaften und Prozessen der Arbeitsteilung (Fischer & Wannemacher, 2013).

Entsprechend der Tätigkeitstheorie geschieht **Lernen** durch das Ausführen einer Tätigkeit von den Subjekten (Holgersson et al., 2016). Fähigkeiten und Wissen werden als dynamisch betrachtet, was dazu führt, dass es nicht statisch mental vorhanden ist, sondern in Tätigkeiten ausgeführt werden muss (Holgersson et al., 2016).

2.2 Artefakte und Instrumente

Das Subjekt interagiert nicht immer direkt mit dem Objekt, sondern bedient sich gelegentlich bestimmter Werkzeuge beim Ausführen einer Tätigkeit (vgl. Vygotsky, 1930). Diese Werkzeuge werden auch **Artefakte** genannt (Ladel, 2017). Die Tätigkeit wird über das verwendete Artefakt beeinflusst, da das Subjekt nun nur mit dem Objekt in den Grenzen agieren kann, die das Artefakt gesetzt hat (Engeström, 1991; Ladel & Kortenkamp, 2014). Das Ergebnis der Tätigkeit kann dasselbe wie vor der Werkzeugnutzung sein, aber je nachdem, welches Artefakt wie genutzt wird, ändern sich die Wege zu diesem Ergebnis (Ladel & Kortenkamp, 2014). Mit anderen Worten eröffnen Werkzeuge neue Möglichkeiten und Einschränkungen, indem der Ablauf der Tätigkeiten verändert werden kann (Ladel, 2017).

Aus der Verwendung von Artefakten ergeben sich zwei nennenswerte Prozesse: die Instrumentalisation und die Instrumentation (Artigue, 2002). Mit der **Instrumentalisation** wird die Wirkung vom Subjekt auf das Artefakt beschrieben (Artigue, 2002). Denn das Subjekt verwendet das Artefakt zum Erreichen seiner Zwecke und nutzt dabei die Möglichkeiten des Artefakts aus (Artigue, 2002). Dieser Prozess ist auch als schrittweise Anreicherung von möglichen Handlungsschemata des Artefakts durch das Subjekt interpretierbar (Artigue, 2002). Als Beispiel können die Entdeckung und Benutzung der Funktionsweisen einer App beim Lösen einer Aufgabe angeführt werden (vgl. Artigue, 2002). Anders verhält es sich mit der **Instrumentation**, die die Wirkung vom Artefakt auf das Subjekt wiedergibt (Artigue, 2002). Schließlich eröffnet das Artefakt nicht nur Möglichkeiten, sondern schränkt mögliche Handlungen auch ein, beispielsweise durch erlaubte Gesten oder Vorstellungen des Subjekts, die dadurch generiert werden (Artigue, 2002). Die Benutzung des Artefakts beeinflusst dadurch die Tätigkeiten, Handlungsschemata und Vorstellungen des Subjekts (Artigue, 2002).

Nicht selten fällt auch der Begriff des **Instruments**, der jedoch klar von dem Begriff des Artefakts abgegrenzt werden muss: Ein Instrument ist mehr als ein Artefakt (Verillion & Rabardel, 1995). Der Begriff des Artefakts bezeichnet lediglich das Objekt, das als Werkzeug genutzt wird (Verillion & Rabardel, 1995). Es wird erst zum Instrument, wenn die Verbindung zwischen dem Artefakt und dem Subjekt wesentlich für die Bewältigung der Aufgabe wird (Verillion & Rabardel, 1995). Der Wandlungsprozess eines Artefakts zu einem Instrument wird als **instrumentelle Genese** bezeichnet (Ladel & Kortenkamp, 2016).

Da in einem Lernkontext mehrere Lernende mit verschiedenen Artefakten auf unterschiedliche Art und Weise arbeiten, muss in diesem Kontext zuletzt der Begriff der **instrumentellen Orchestration** aufgeführt werden (Trouche, 2004).

Bei der instrumentellen Orchestration handelt es sich um das Management der Lehrkraft, die individuellen Instrumente in den kollektiven Lernprozess erfolgreich zu integrieren (Trouche, 2004). Dies kann gut mit digitalen Medien geschehen (Trouche, 2004). Drijvers et al. (2011) beschreiben Trouches Aussage (2004) wie folgt: „*An instrumental orchestration is defined as the teacher's intentional and systematic organisation and use of the various artefacts available in a – in this case computerised – learning environment in a given mathematical task situation, in order to guide students' instrumental genesis*" (S. 1350).

Unter Einbezug der Idee, dass der Gebrauch eines Artefakts zu Veränderungen in der Interaktion führt, wurde der Werkzeugeinsatz in die Tätigkeitstheorie integriert und das Modell der Artifact-Centric Activity Theory entstand (Ladel & Kortenkamp, 2013; Ladel, 2013).

2.3 Detaillierte Beschreibung der Artifact-Centric Activity Theory

Ladel und Kortenkamp (2012) visualisieren die Artifact-Centric Activity Theorie in dem folgenden Modell:

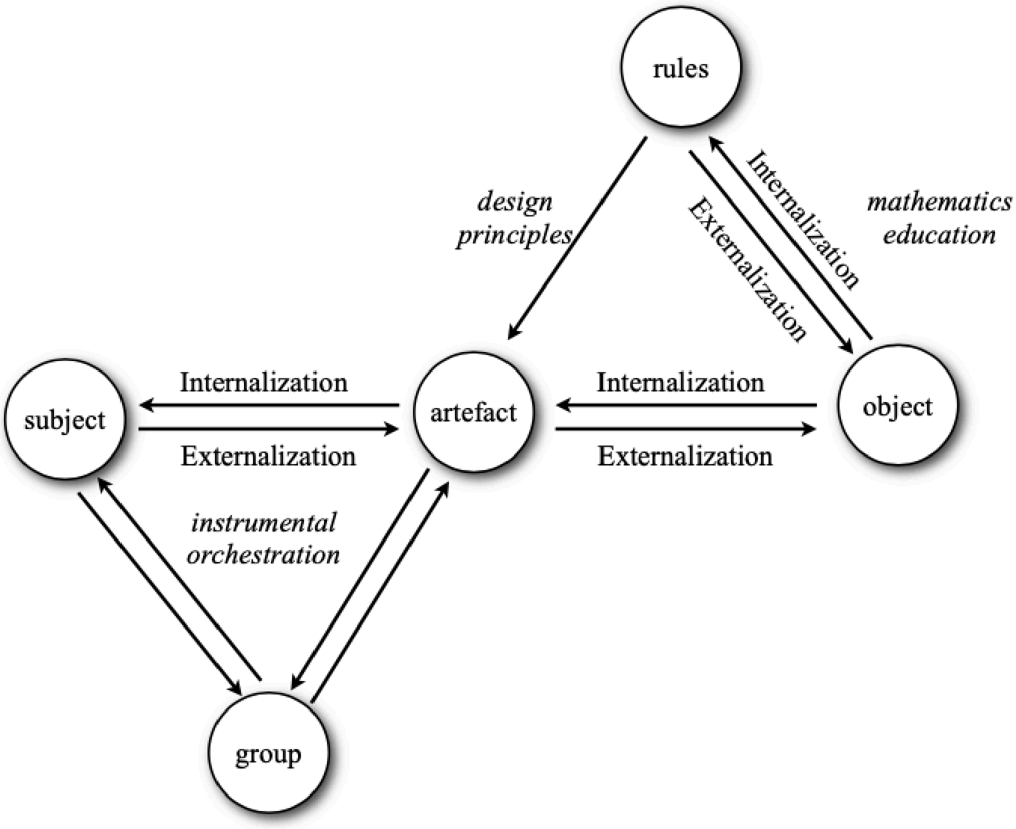

Abbildung 1: Visualisierung der Artifact-Centric Activity Theory (Ladel & Kortenkamp, 2012, S. 2).

ACAT besteht aus drei wesentlichen Sinnzusammenhängen: der Hauptachse sowie dem oberen und unterem Dreieck (Ladel & Kortenkamp, 2012). Die Pfeile zwischen den einzelnen Aspekten zeigen dabei die Beziehungen miteinander an (Ladel & Kortenkamp, 2012).

Die **Hauptachse**, bestehend aus dem Subjekt, dem Artefakt und dem Objekt, ist angelehnt an das Trias Subjekt, Objekt und Werkzeuge des *Instrumental Acts* von Vygotsky (1997). Dabei stehen Externalisierungs- und Internalisierungsprozesse im Vordergrund, wobei das Artefakt als Mediator zwischen Subjekt und Objekt wirkt (Ladel, 2017; Ladel & Kortenkamp, 2012). Ladel (2013) beschreibt die **Internalisierung** als eine Integration der praktisch-gegenständlichen Tätigkeit in die geistige Tätigkeit. Sie stellt damit ein Konzept der etappenweisen Ausbildung geistiger Handlungen dar (Ladel, 2013). Der Prozess der Verinnerlichung geschieht über das konkrete Handeln mit dem didaktischen Material (Ladel, 2017). Greifbar wird er über das Erläutern des eigenen Vorgehens, der Arbeitsrückschau, der Vorhersage des weiteren Vorgehens sowie der Wiedergabe von Strukturen und Beziehungen der Handlungen rein in der Vorstellung, ohne die Handlung tatsächlich durchzuführen (Ladel, 2017).

Über die **Externalisierung** werden die Eigenschaften des Objekts deutlich, die über das Artefakt oder über das Subjekt erfasst wurden (Ladel & Kortenkamp, 2013). Die Konzepte des Subjekts über das Objekt werden dabei über das Artefakt externalisiert, wobei das Artefakt selbst ebenfalls das Objekt über seine Repräsentation und Visualisierung externalisiert (Ladel & Kortenkamp, 2013). Denn über die Manipulation des Artefakts können Lernende das Objekt erfahren (Ladel & Kortenkamp, 2013). Die Aufgabe der Mathematikdidaktik ist es hier, **Regeln und Designprinzipien** zu entwerfen, sodass das Artefakt die gewünschte Wirkung erzielt (Ladel & Kortenkamp, 2013). Die mathematischen oder mathematikdidaktischen Regeln zur Darstellung der Objekte dienen dazu, das Objekt formal zu definieren und es so zu externalisieren (Ladel & Kortenkamp, 2013). Dabei sollten die Regeln so ausgearbeitet werden, dass die Eigenschaften des Objekts auf die bestmögliche Art und Weise eingefangen werden können (Ladel & Kortenkamp, 2013). Ferner gelten auch allgemeine Designprinzipien der Psychologie und des Multimedia-Designs (Ladel & Kortenkamp, 2013). Visualisiert wird dies in dem oberen, rechten Dreieck bestehend aus dem Artefakt, dem Objekt und den Regeln (Ladel, 2017). Darin werden vor allem Fragestellungen betrachtet, die das Design und die Analyse des Artefakts bezüglich mehrerer Bezugsdisziplinen betreffen, wie die der Psychologie oder Mathematikdidaktik (Ladel, 2017).

Bei digitalen Artefakten wie Apps muss außerdem der **Programmcode** beleuchtet werden, da darin das Objekt integriert ist (Ladel & Kortenkamp, 2013). Die Verhältnisse und Aspekte des Objekts müssen im Code sichtbar bleiben, damit das Objekt schließlich fachlich richtig über das Artefakt abgebildet wird (Ladel & Kortenkamp, 2013). Entscheidend sind hierbei die eigenen, subjektiven Sichtweisen der Programmierenden und Designenden von Apps zu einem mathematischen Objekt, da sich diese Perspektiven in der Gestaltung der App widerspiegeln (Ladel, 2017). Diese beeinflussen vehement die Internalisierungs- und Externalisierungsprozesse des Kindes bei der Interaktion mit dem Artefakt, da dieses so seine Vorstellungen nur auf bestimmte Weisen mit dem Artefakt ausdrücken kann (Ladel, 2017). Gleichzeitig ist das Artefakt über die Verhältnisse und Aspekte des Objekts limitiert, beispielsweise bestimmt die Essenz einer Zahl das Verhalten im Artefakt (Ladel & Kortenkamp, 2013).

Damit stellt das Objekt nicht nur den Lerngegenstand des Subjekts dar, sondern bestimmt auch die Art und Weise der Programmierung von Software, die für eine fachlich richtige Darstellung mathematischen Regeln folgen muss (Ladel & Kortenkamp, 2012). Ist das Objekt treffend in das digitale Artefakt implementiert, dann kann dies Kinder dabei unterstützen, über die Arbeit mit dem Artefakt eine gewünschte Internalisierung zu erlangen (Ladel & Kortenkamp, 2012).

Als weiterer Sinnzusammenhang wird aus dem Subjekt, dem Artefakt und der Gruppe das linke, untere Dreieck gebildet (Ladel & Kortenkamp, 2012). Hier stehen der Einsatz und die Nutzung des Artefakts in seiner Komplexität im Fokus, wobei auch **Kontextfaktoren** wie die Lehrperson, die Klasse oder der Schulkontext als Einflüsse auf den Lernprozess des Subjektes einbezogen werden (Ladel, 2017). Infolgedessen kann die instrumentale Orchestration Bestandteil des unteren Dreiecks sein (Ladel & Kortenkamp, 2013).

Deutlich wird, dass das Artefakt in allen drei Bereichen mit in die Analyse integriert wird und zusätzlich die gesamte Lernumgebung mit den fachlichen und fachdidaktischen Theorien verknüpft werden (Ladel & Kortenkamp, 2012). Insofern stellt die Analyse nach ACAT eine geeignete Wahl dar, um die Wirkung eines Artefakts, in diesem Fall Fingu, unter fachlicher, fachdidaktischer und pädagogischer Sicht zu untersuchen (vgl. Bottino & Chiappini, 2008).

3 Mathematische Grundlagen

Der Umgang mit Zahlen hat sowohl im privaten als auch im beruflichen Bereich im Technologiealter an Bedeutung gewonnen (Diephaus, 2015). Die Grundlagen dafür werden bereits von Kindesalter an vorbereitet (Benz et al., 2015). Um in jeder Zahlensituation flexibel und angemessen reagieren können, muss ein Zahlensinn ausgebildet werden (Diephaus, 2015). Dieser setzt sich aus mehreren Teilaspekten wie der Wahrnehmung, mentalen Verarbeitung und Darstellung von Zahlen zusammen, die im Nachfolgenden ausführlich erklärt werden. Zunächst wird dazu der Oberbegriff des Zahlensinns definiert und danach der Erwerb des Zahlbegriffs als Erweiterung dessen auf Basis mehrerer Theorien erläutert. Anschließend wird das Teil-Ganze-Verständnis als ein Aspekt des Zahlbegriffs genauer geschildert, da dieser insbesondere für die Analyse von Fingu eine Rolle spielt. Abschließend werden die drei Prozesse der Anzahlwahrnehmung und -bestimmung dargestellt: das Zählen und die (Quasi-)Simultanerfassung bzw. -darstellung. Außerdem werden Anzahlvergleiche beschrieben. Damit soll eine theoretische Fundierung für die Analyse des Lernspiels, konkret des Objekts, erarbeitet werden.

3.1 Zahlensinn

„*Number sense is difficult to define but easy to recognize*“, behaupten Meißner und Diephaus (2009, S. 177). Personen mit einem ausgeprägten Zahlensinn zeigen eine gute Intuition und ein Bewusstsein gegenüber der Verwendung von Zahlen (Berch, 2005). Dies inkludiert ein umfassendes Wissen, Fertigkeiten und Fähigkeiten sowie angemessene Erwartungen und eine konzeptionelle Struktur bezüglich Zahlen (Berch, 2005). Howden (1989) spricht von einer „*good intuition about numbers and their relationships*“ (S. 11), was schließlich in der Fähigkeit mündet, in Zahlensituationen **flexibel und angemessen** reagieren zu können (Diephaus, 2015).

Als charakteristisches Merkmal des Zahlensinns wird in zahlreichen Publikationen der **Sinn für Quantitäten** hervorgehoben (Diephaus, 2015; Lange, 1984; Dehaene, 2011; Holgersson et al., 2016). Das „spontane[,] intuitive[ ] Erfassen von Größenordnungen und Beziehungen im Zahlenraum“ wird bereits 1984 unter den Begriffen „Zahlensinn“, „Zahlengefühl“ oder englisch „*number sense*“, verstanden (Lange, 1984, S. 73; Dehaene, 1999, 2011).

Seit 1989 ist der Erwerb eines Zahlensinns eines der obersten Ziele des Mathematikunterrichts gemäß des National Council of Teachers of Mathematics (NCTM, 2000). Er stelle die Grundlage für das gesamte Curriculum dar (NCTM, 2000). Der Zahlensinn wird hier definiert als die „*ability to decompose numbers naturally, use particular numbers like 100 or* $\frac{1}{2}$ *as referents, use the relationships among arithmetic operations to solve problems, understand the base-ten number system, estimate, make sense of numbers, and recognize the relative and absolute magnitude of numbers*“ (NCTM, 2000, S. 32). Reys (1991) ergänzt: „*Number sense refers to an intuitive feeling for numbers and their various uses and interpretations; an appreciation for various levels of accuracy when figuring; the ability to detect arithmetical errors; and a common-sense approach using numbers. [...] Above all, number sense is characterized by a desire to make sense of numerical situations*“ (S. 3).

Entsprechend inkludiert der Begriff des Zahlensinns mehr als nur das Erfassen und Wiedergeben von Quantitäten (Diephaus, 2015). Er beinhaltet neben weiteren Aspekten ein Verständnis für Zerlegungen, Zusammensetzungen, arithmetische Operationen und Stellenwertsystemen (NCTM, 2000). In dieser Vielseitigkeit sollte er bereits früh von Kindern erfahren werden, damit er entsprechend ausgebildet werden kann (Howden, 1989).

Der Zahlensinn entwickelt sich graduell aus der **Erkundung und Visualisierung von Zahlen** in verschiedensten Kontexten (Howden, 1989, S. 11). Hierbei gilt es, besonders auch den Wechsel zwischen symbolischen, ikonischen und enaktiven Repräsentationen sowie die Verwendung unterschiedlicher Zahlaspekte anzuregen (Diephaus, 2015; vgl. Padberg & Benz, 2011). Hervorzuheben ist, dass der Zahlensinn nicht als solcher als Unterrichtsinhalt gelehrt werden kann, er stellt eher ein Beiprodukt des Lernens dar (Diephaus, 2015). Damit ihn Schüler:innen trotzdem erfolgreich erwerben können, muss der Unterricht so gestaltet werden, dass die Schüler:innen ihr eigenes Wissen konstruieren und sortieren können (Ross, 1989). Der vertraute Umgang mit Zahlen und Zahlenkombinationen ergibt sich dann nicht auf Grundlage von auswendig gelernten Theorien und Regeln, stattdessen beruht er auf dem Entdecken von Mustern und Beziehungen (Barendregt et al., 2012). Deutlich wird dies beispielsweise, wenn Kinder die additive Kommutativität anhand von Beispielen erklären sollen (Baroody et al., 2009).

Die Entwicklung eines Zahlensinns zu einem frühen Zeitpunkt in der Bildungslaufbahn des Kindes wird als Bedingung für ein formales, arithmetisches Lernen angesehen (Griffin et al., 1994). Dass der *number sense* eine nicht unwesentliche Basis für arithmetische und andere fortgeschrittene, mathematische Handlungen darstellt, wird von Forschungen aus der Mathematikdidaktik, der kognitiven Psychologie, der Neurobiologie und anderen Gebieten untermauert (Anobile et al., 2016; Butterworth, 2005; Sarama & Clements, 2009). Um ihn effektiv ausbilden zu können, ist es aus der didaktischen Perspektive nötig, dass die Kinder Anzahlen auf verschiedene Weisen wahrnehmen, damit umgehen und sie wiedergeben können (Gelman & Gallistel, 1986).

Indem **Finger** bei der Anzahlerfassung oder -darstellung benutzt werden, können Kinder bereits früh beginnen, diese Prinzipien zu meistern (Baccaglini-Frank & Maracci, 2015). Dies lässt sich auf die sensorisch-körperliche Dimension der Entwicklung des Zahlensinns zurückführen (Barendregt et al., 2012). Für Kinder verkörpern ihre Finger ein wesentliches Werkzeug, da sie sowohl für die Repräsentation von Zahlen in strukturierten Mustern, als auch für das Zählen selbst genutzt werden können (Barendregt et al., 2012). Die Verwendung von Fingern bei arithmetischen Kompetenzen stellt damit eine konkrete Verkörperung dieser Kompetenzen sowie der Zahlenkonzepte des Kindes dar (Johnson, 1999). Margolinas und Wosniak (2012) betonen die Wichtigkeit, dass der Zahlensinn bezüglich der Erfassung von Anzahlen auch unabhängig von Zahlen selbst eingeführt werden sollte. Dieser Prozess ist stark verflochten mit der Ausbildung von sogenannten „*finger symbol sets*“, wobei eine Anzahl oder Rechenoperationen und Beziehungen von Zahlen durch Gestiken und Handlungen mit Fingern ausgedrückt werden (Brissiaud, 1992).

Begründet wird so unter anderem auch der Einsatz von Fingu als Fördermittel des Zahlensinns, unabhängig von Ziffern. Demzufolge ist die Untersuchung von Fingerdarstellungen von Zahlen in der Analyse des Zahlensinns unabdingbar. Genauer beschrieben wird dies in dem Kapitel zur *Embodied Cognition* und Finger Gnosis.

3.2 Zahlbegriffserwerb

Eng verflochten mit dem Zahlensinn ist der Zahlbegriff, der die Vorstellungen und Fertigkeiten im Zusammenhang mit Zahlen etwas konkreter beschreibt. Zusätzlich zum Fokus auf den kardinalen Aspekt einer Zahl, wie es beim Zahlensinn der Fall ist, stellen mehrere, verschiedene **Zahlaspekte**[1] die Grundlage für den Zahlbegriff dar (Benz et al., 2015). Die miteinander verbundenen Zahlaspekte bilden ein reichhaltiges Wissensnetz für die Ausbildung eines umfassenden Zahlbegriffs (Benz et al., 2015; Padberg & Benz, 2011). Der Erwerb des Zahlbegriffs wird allgemein als wesentlich für eine weitere mathematische Bildung angesehen, weshalb er im Fokus von vielen entwicklungspsychologischen und mathematikdidaktischen Forschungen steht (Benz et al., 2015). Mehrere Theorien setzen sich mit der Entwicklung des dazugehörigen Zahlenverständnisses, der Relevanz des Zählens und dem Umgang mit Zahlen auseinander (Garrote et al., 2016). Nachfolgend werden dazu der Zahlbegriffserweb nach Piaget und Szeminska (1965) als Grundstein für die theoretische Aufarbeitung des Zahlbegriffserwerbs und das Entwicklungsmodell zur Zahl-Größen-Verknüpfung nach Krajewski und Ennemoser (2013) ausführlich dargestellt. Dann wird kurz auf das ordinale und kardinale Zahlenkonzept eingegangen. Abschließend wird aus dem *Skills Integration Model* nach Clements die Notwendigkeit der Förderung von den Prozessen zur Anzahlwahrnehmung und -bestimmung begründet.

3.2.1 Zahlbegriffserwerb nach Piaget und Szeminska

Piaget und Szeminska (1965) stellen den Zahlbegriffserwerb in ihrer Publikation „Die Entwicklung des Zahlbegriffs beim Kinde“ ausführlich dar. Aus ihren Untersuchungen entwickeln sie die von Clements (1984) als *logical foundations model* bezeichnete Theorie, die logische Grundoperationen in den Fokus stellt. Demnach werde der Zahlbegriff vor allem aus dem Verstehen der nachfolgenden fünf logischen Zusammenhänge gefestigt (Benz et al., 2015):

1. **Verständnis von Invarianz:** Kinder verstehen, dass die Mächtigkeit einer Menge, also die Anzahl der Elemente, gleich bleibt, auch wenn sich die räumliche Anordnung der einzelnen Elemente verändert (Benz et al., 2015).

2. **1:1-Zuordnung:** Die Mächtigkeit von Mengen ist miteinander vergleichbar, ohne dass die Anzahl der Elemente jeder Menge separat bestimmt werden muss (Benz et al., 2015). Eine Möglichkeit stellt das paarweise Zuordnen dar, bei dem jedem Element einer Menge genau ein anderes Element der zweiten Menge zugeordnet wird (Benz et al., 2015). Wird dies mit jedem Element der Menge vollzogen, dann sind

[1]Eine Zusammenfassung der verschiedenen Zahlaspekte befindet sich im Anhang.

Mengen gleichmächtig, wenn in keiner Menge ein Element verbleibt, was nicht zugeordnet werden konnte. Bleiben jedoch ein oder mehrere Elemente einer Menge übrig, so hat diese Menge eine höhere Anzahl an Elementen.

3. **Klassifikation:** Objekte und Elemente sollten auf Basis von Gemeinsamkeiten oder Unterschieden in Klassen oder Unterklassen zusammengefasst werden können (Benz et al., 2015). Eine solche Klasse wäre beispielsweise die Klasse der „Bälle“ und eine Unterklasse die der „roten Bälle“.

4. **Klasseninklusion:** Nach Piaget und Szeminska (1965) ist es wichtig, die Beziehung von einer Teilmenge bzw. Unterklasse zu einer Gesamtmenge bzw. Oberklasse erfassen zu können. Der Fokus besteht dabei oft im Erkennen der Teilmengenrelation, wie etwa dass die Unterklasse (z.B. rote Bälle) in der Oberklasse (z.B. Bälle) inkludiert ist (Benz et al., 2015).

5. **Seriation:** Elemente und Objekte sollten beispielsweise von klein nach groß oder von hell zu dunkel, also kriteriengeleitet, geordnet werden können (Benz et al., 2015).

Obwohl Piaget und Szeminskas Theorie oft so interpretiert wird, dass die Grundoperationen so fundamental seien, dass ohne sie sich ein Zahlbegriffsverständnis nicht ausprägen könne (Benz et al., 2015), betont Piaget (1958) bereits in früheren Publikationen, dass der Zahlbegriff nicht ausschließlich auf das Verstehen dieser logischen Zusammenhänge zurückzuführen sei. Stattdessen sei es wichtig, dass dem Kind damit **logische Werkzeuge** bereitgestellt werden, um anhand derer den Zahlbegriff aufbauen zu können (Piaget, 1958, S. 263). Inwiefern das Verständnis der Invarianz, Klasseninklusion oder der Seriation nötig sind, um ein Zahlverständnis zu erwerben, ist empirisch noch uneindeutig (Benz et al., 2015).

Besonders viel Kritik bekam die Theorie dahingehend, dass den Zählkompetenzen kaum eine Rolle beim Zahlerwerb zugewiesen wurde. 1973 äußern sich Piaget und Inhelder dazu. Sie verweisen darauf, dass man nicht glauben dürfe, „ein Kind besitze die Zahl schon deshalb, weil es verbal zählen gelernt hat“ (Piaget & Inhelder, 1973, S. 108). Bisher ist diese Aussage nicht widerlegt (Benz et al., 2015). Andere Theorien und Untersuchungen stimmen zumindest darin überein, dass verbales Zählen nur einen gewissen Teil des Zahlverständnisses ausmacht (Benz et al., 2015).

Piaget verortete den Erwerb des stabilen Zahlbegriffs frühestens im 6. Lebensjahr (Royar, 2015). Heute weiß man, dass deutlich früher mathematische Kompetenzen zu erwarten sind (Royar, 2015). Bereits Säuglinge im 1. Lebensjahr können Anzahlen von zwei und drei (Dornheim, 2008) sowie kleine und größere Objektmengen aufgrund von ihrer räumlichen Ausdehnung unterscheiden (Xu & Arriaga, 2007). Letzteres wird besonders bei einem relativen Unterschied der beiden Mengen von 1:2 erkennbar (Xu & Arriaga, 2007).

Trotz der Kritik an der Theorie wird allgemein anerkannt, dass die logischen Fähigkeiten ein Bestandteil eines verständnisvollen und flexiblen Einsatzes von Zahlen sind (Benz et al., 2015). Dies wird offensichtlich beim Kardinalzahlaspekt oder auch beim Zählen (Benz et al., 2015). Aus diesem Grund werden Kinder bereits vor Schulbeginn oftmals aufgefordert, Mengen zu vergleichen, zu sortieren oder zu klassifizieren, um damit eine Grundlage für den weiteren Umgang mit Zahlen zu schaffen (Benz et al., 2015).

3.2.2 Entwicklungsmodell zur Zahl-Größen-Verknüpfung (ZGV-Modell) nach Krajewski und Ennemoser

In Anlehnung an die Theorie nach Piaget und Szeminska entwickeln Krajewski und Ennemoser (2013) das „Entwicklungsmodell zur Zahl-Größen-Verknüpfung“. Es versteht das kardinale Zahlverständnis als Prozess, der sich zuerst im kleineren Zahlenraum abspielt und dann auf höhere Zahlenräume übertragen wird (Garrote et al., 2015). Dabei geht es vor allem darum, eine Größe nicht nur als Größenbereich zu interpretieren, sondern das Verständnis zu erlangen, „dass Zahlen eine bestimmte Größe oder Menge repräsentieren“ (Krajewski & Ennemoser, 2013, S. 227). Die Vorstellung einer Anzahl ist dabei zu Beginn eher unpräzise, wird dann präziser und endet in einer 1:1-Zuordnung zwischen der Zahl und der durch sie repräsentierten Größe (Garrote et al., 2015). Krajewski und Ennemoser (2013) teilen diesen Prozess auf drei Ebenen mit verschiedenen Teilkompetenzen auf, die zunächst isoliert erworben werden, um dann sukzessive zu Kompetenzen auf höheren Ebenen miteinander verknüpft werden (Garrote et al., 2015). Zusammenfassend wird dies in dem nachfolgenden Modell visualisiert (Krajewski & Ennemoser, 2013):

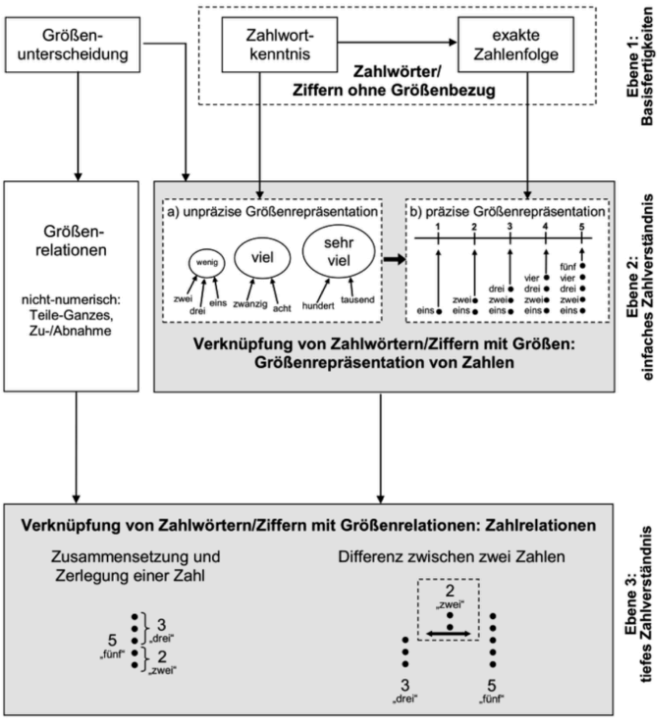

Abbildung 2: Modell der Zahl-Größen-Verknüpfung (Krajewski & Ennemoser, 2013, S. 43, entnommen von Garrote et al., 2015, S. 26).

Die **erste Ebene** wird den Basisfertigkeiten zugeordnet (Krajewski & Ennemoser, 2013). Dazu zählt ein erster Umgang mit Mengen sowie mit Zahlen, die jedoch noch isoliert voneinander betrachtet werden (Krajewski, 2008). Mengen können anhand ihrer Ausdehnung, ihrer Fläche oder ihres Volumens bereits von Geburt an unscharf voneinander unterschieden werden (Benz et al., 2015). Zudem können Kinder ab einem Alter von etwa zwei Jahren damit beginnen, die Zahlwortreihe aufzusagen (Garrote et al., 2015). Hierzu lernen sie sowohl die Zahlwörter als solche sowie die Reihenfolge, in der diese angeordnet sind (Garrote et al., 2015). Zunächst bestehen die Zahlwörter ohne jeglichen Größenbezug zu Mengen (Garrote et al., 2015).

Erst ab etwa drei bis vier Jahren werden die Begriffe und Größen miteinander verknüpft (Benz et al., 2015). Das führt zur **zweiten Ebene**, bei der ein Anzahlkonzept ausgebildet wird (Benz et al., 2015). Die Kinder erhalten die Einsicht, dass Zahlen bestimmte Größen repräsentieren (Krajewski, 2008). In einer ersten Phase werden den einzelnen Zahlwörtern grobe Mengenkategorien wie „wenig“ (z.B. eins, zwei, drei), „viel“ (z.B. acht, zwanzig), oder „sehr viel“ (z.B. hundert oder tausend) zugeordnet (Benz et al., 2015). Trotz fehlender Kenntnis der Zahlwortreihe bis 100 kann dies erkannt werden (Garrote et al., 2015).

In der zweiten Phase wird dies präzisiert, sodass nah beieinanderliegende Zahlen, wie 6 und 7, auseinandergehalten werden können (Benz et al., 2015). Einem Zahlwort wird so eine spezifische Menge exakt zugewiesen (Krajewski, 2008). So symbolisiert die Zahl 4 beispielsweise genau vier Elemente (Garrote et al., 2015). Dieses präzise Zahlverständnis stellt eine wesentliche Voraussetzung für den Erwerb der Grundoperationen dar (Garrote et al., 2015). Zusätzlich zu der Mengenbewusstheit von Zahlen werden auf der zweiten Ebene auch erste Mengenrelationen wie Teil-Ganze-Vorstellungen oder Prozesse des Zu- oder Abnehmens erworben (Benz et al., 2015). Unter dem letzten Punkt der Zu- und Abnahme lässt sich die Feststellung verstehen, dass sich Mengen nur verändern, wenn etwas hinzugefügt oder weggenommen wird, nicht jedoch, wenn etwas umgeordnet wird (Krajewski, 2008). Damit wird auch ein erstes Konzept der Zahlinvarianz etabliert (Benz et al., 2015).

Auf der letzten, **dritten Ebene** wird ein relationales Zahlverständnis aufgebaut, indem das Verständnis für Mengenrelationen aus der zweiten Ebene mit dem Verständnis von Zahlen als Anzahlen vereinigt wird (Garrote et al., 2015). Die Kinder verstehen Zahlbeziehungen wie Zerlegungen und Zusammensetzungen (Garrote et al., 2015). Damit ist beispielsweise gemeint, dass die 5 aus drei und zwei Elementen besteht ($5 = 3 + 2$) oder die Differenz von zwei Zahlen daraus abgeleitet werden kann (Unterschied zwischen 3 und 5 ist 2).

Zwar ist das ZGV-Modell hierarchisch aufgebaut, jedoch folgt es keiner starren Entwicklungslogik (Garrote et al., 2015). So werden die dargestellten Kompetenzebenen für die verbalen Zählzahlen und arabischen Ziffern nicht unbedingt zeitgleich durchlaufen (Krajewski, 2008). Analog verhält es sich mit dem Durchführen von Operationen, die bei Zahlen im Zahlenraum bis 10 auf der dritten Ebene und bei dem Zahlenraum bis 100 auf der ersten und zweiten Ebene lokalisiert sein kann (Krajewski, 2008).

Dies knüpft an Fusons Aussage (1988) an, dass sich ein Kind für verschiedene Abschnitte der Zahlwortreihe in **unterschiedlichen Entwicklungsphasen** befinden kann. Zuletzt kann die Beherrschung einer dargestellten Kompetenz von der dargebotenen Repräsentationsform abhängig sein (Benz et al., 2015). Als Beispiel könnten höhere Kompetenzen mit enaktiven Materialien erworben und beherrscht werden, die Abstraktion ohne diese Materialien könnte dem Kind jedoch noch nicht gelingen (Benz et al., 2015). Die von Krajewski und Ennemoser (2013) postulierten Erkenntnisse des Zusammensetzens und Zerlegens von (An-)Zahlen oder auch der Vergleich mit Differenzen stellen eine Grundlage für die Addition und Subtraktion dar und zeigen damit die enge Verzahnung zwischen Operations- und Zahlverständnis an (Benz et al., 2015).

In Kreisen der Mathematikdidaktik wird das ZGV-Modell teilweise **kritisiert**, da Krajewski und Ennemoser innerhalb der pädagogischen Psychologie sowie der Diagnostik ausgebildet wurden und nicht vorrangig in der Mathematik. Daher werden andere Modelle zum Zahlbegriffserwerb, unter anderem von Fuson (1988), Resnick (1983), Fritz et al. (2013) oder Fritz und Ricken (2009), oft eher zur detaillierten Beschreibung angeführt. An dieser Stelle soll jedoch darauf verzichtet werden, weil das ZGV-Modell genau wie Fingu den Fokus auf das kardinale Zahlenkonzept legt, andererseits, weil sich einige, wenn auch nicht alle, Aussagen der anderen Theorien im ZGV-Model wiederfinden lassen. So ist etwa Fusons Erkenntnis (1988), dass die Zahlwortreihe auf unterschiedlichen Niveaus[2] beherrscht werden kann, derart integriert, dass die Zahlwortkenntnis sowie die exakte Zahlenfolge voneinander getrennt und separat von der Verknüpfung mit Größen dargestellt werden (Krajewski & Ennemoser, 2013). Erweiterungen, wie beispielsweise der Aufbau eines Teil-Ganze-Verständnisses oder grundlegende Zählprinzipien, werden in den jeweiligen Kapiteln näher erläutert.

3.2.3 Das ordinale und kardinale Zahlenkonzept

In mehreren Theorien werden Zahlen über zwei Wege charakterisiert: kardinal und ordinal. Das **ordinale Zahlenkonzept** bezieht sich darauf, dass Zahlen eine bestimmte, feste Position in einer geordneten Reihe, etwa der Zahlwortreihe oder am Zahlenstrahl, einnehmen (Dornheim, 2008). Zusätzlich wird auch deutlich, welche Zahl als Nachfolger oder als Vorgänger einer anderen Zahl fungiert (Ladel & Kortenkamp, 2012). Bereits ab einem Alter von etwa zwei bis fünf Jahren wird dieses Konzept, i.d.R. beginnend mit der Zahlwortreihe, erworben (Fuson, 1988, 1992).

Parallel zum ordinalen erwerben Kinder im Alter von drei bis sechs Jahren das **kardinale Zahlenkonzept** (Gelman & Gallistel, 1992). Den Kindern wird nun bewusst, dass Zahlworte nicht nur zum Zählen angedacht sind, sondern auch dazu dienen können, eine bestimmte Anzahl an Elementen zu benennen (Gelman & Gallistel, 1992).

[2] Fusons (1988) Niveaus sind unter anderem, dass die Zahlwortreihe als Ganzheit, als unflexible, dann teilweise flexible und nur flexible Zahlwortreihe sowie schließlich als vollständig reversible Zahlwortreihe beherrscht werden kann.

Das kardinale Zahlenkonzept stellt damit die Grundlage für das Teil-Ganze-Konzept dar, indem eine Gesamtanzahl in kleinere Teilmengen zerlegt werden können, z. B. $7 = 2 + 5$ oder $7 = 3+4$ (Ladel & Kortenkamp, 2013). Hieraus entwickelt sich schließlich die dezimale Struktur mit Zehnern und Einern, die die Basis für das Zahlensystem darstellen (Ladel & Kortenkamp, 2012).

Viele Lernschwierigkeiten von Kindern lassen sich auf insuffizient entwickelte Zahlenkonzepte oder Grundvorstellungen von Operationen zurückführen (Ladel & Kortenkamp, 2013). Verwendet beispielsweise ein Kind ausschließlich das ordinale Zahlenkonzept zur Addition und Subtraktion, indem es auf dem Zahlenstrahl oder in der Zahlenreihe vorwärts oder rückwärts zählt, dann kann dieser Ansatz für kleinere Zahlenbereiche funktionieren, er kann jedoch zu Problemen führen, sobald der Zahlenbereich 20 übersteigt, z.B. bei Aufgaben wie $47+52$ und $82-63$ (Ladel & Kortenkamp, 2013). Deshalb ist es so wichtig, dass Kinder neben dem ordinalen auch das kardinale Zahlenkonzept erwerben (Ladel & Kortenkamp, 2013). Denn beide Zahlenkonzepte sind wichtig für die Entwicklung von arithmetischen Fertigkeiten wie der Addition und Subtraktion (Butterworth, 2005; Fischer et al., 2008; Neuman, 1987).

3.2.4 *Skills Integration Model* nach Clements

In einer Interventionsstudie bestätigt Clements (1984), dass Kinder beim Zählen und im Umgang mit Zahlen neben Zählfertigkeiten auch logische Verknüpfungen wie Klassifikation, Seriation und Invarianz erwerben (Benz et al., 2015). Diese Erkenntnisse werden in dem *Skills Integration Model* vereint (Benz et al., 2015). Die Hauptaussage dieser Theorie ist die folgende: „*The development of number concepts and skills result from the integration of number skills such as counting, subitizing, and comparing*“ (Clements, 1984, S. 766). Demnach resultiere der Zahlbegriff aus dem Zählen, der Simultanerfassung und dem Vergleichen von verschiedenen Mengen (Clements, 1984). Die logischen Kompetenzen müssen dabei nicht vorausgesetzt, sondern können durch Zählaktivitäten verbessert werden (Benz et al., 2015). Die einzelnen Aspekte der Zahlbegriffsentwicklung stellen eine wichtige Grundlage für den mathematischen Kompetenzerwerb in der Schule dar und müssen daher besonders gefördert werden (Benz et al., 2015). Genauer beschrieben werden sie im Kapitel der Anzahlwahrnehmung und -bestimmung.

3.3 Teil-Ganze-Verständnis

„*Probably the major conceptual achievement of the early school years is the interpretation of numbers in terms of part and whole relationships*“ (Resnick, 1989, S. 114). Denn das Teil-Ganze-Verständnis spielt eine tragende Rolle bei dem Zahlbegriffserwerb sowie bei der Erweiterung und Anwendung des kardinalen Zahlenkonzepts (Resnick, 1983, 1989, 1992). Definiert wird das Teil-Ganze-Verständnis von Benz et al. (2015) als das „Verständnis über die Zerlegung einer Menge in Teilmengen und die Zusammenfügung dieser Teilmengen zur ganzen Menge“ (S. 136).

Die Fähigkeit, jede Zahl in ggf. mehrere Teilmengen zu **zerlegen** (z.B. $2 = 1+1$, $3 = 1+2$, $4 = 1 + 3$, $4 = 2 + 2$, usw.) oder größere Zahlen aus dem **Zusammenfügen** zweier Teile zu konstruieren, stellt einen wichtigen Entwicklungsschritt dar (Holgersson et al., 2016). Dadurch wird die Struktur von Zahlen deutlich und früheres arithmetisches Problemlösen möglich (Baccaglini-Frank & Maracci, 2015; Mulligan, 2011).

Ein Ganzes kann dabei in verschiedenen **Repräsentationen** dargestellt werden: symbolisch als Zahlwort oder Ziffer, haptisch als Gruppe an Objekten, ikonisch als Muster an Objekten oder auch als Prozedur wie eine Zählsequenz (Holgersson et al., 2016). Andersherum bietet auch das Zerlegen und Bündeln zahlreiche Anknüpfungspunkte (Baccaglini-Frank & Maracci, 2015). Insbesondere das Zerlegen und Bündeln in Einheiten von Fünf oder Zehn bilden wichtige Grundlagen für Zusammenhänge mit Stellenwertsystem (Baccaglini-Frank & Maracci, 2015). Was zunächst haptisch und ikonisch eingeführt werden kann, sollte schließlich darin münden, dass die Lernenden Operationen wie das Zusammenfügen und Zerlegen mental durchführen können (Ross, 1989). Das Grundprinzip, dass die Quantität des Ganzen sich nicht verändert, unabhängig davon, in wie viele Teile es geteilt wird oder ob die einzelnen Teile anders angeordnet werden, ist dabei entscheidend (Ross, 1989). Haben Kinder dies verstanden, somit in dem Sinne ein flexibles Zahlenverständnis erworben und können dies auf einfache Zahlenkombinationen wie $7 + 2 = 9$ anwenden, gibt ihnen das den Zugang zu komplexeren, mathematischen Operationen wie der Multiplikation oder Division, dem mentalen oder schriftlichen Rechnen mit mehrstelligen Zahlen oder der Verwendung von rationalen Zahlen (Baroody et al., 2009; McMullen et al., 2014, 2015). Damit ist das Teil-Ganze-Verständnis ein essentieller Bestandteil im Lernen von Mathematik (Ladel & Kortenkamp, 2013).

Dass Kinder einfach verstehen, dass Zahlen als Zusammensetzungen aus anderen Zahlen dargestellt werden können und in dem Verständnis weiterdenken, ist nicht voraussetzbar (Gaidoschik & Fellmann, 2015). Dieses Wissen muss **schrittweise erworben** und gefördert werden (Resnick, 1992). Begonnen kann damit bereits im Elementarbereich über einen spielerischen Zugang oder Alltagssituationen mit konkreten Anzahldarstellungen (Benz et al., 2015). Das Teil-Ganze-Verständnis entwickelt sich langsam über mehrere Jahre hinweg, wobei auch auswendig gelernte Zahlzerlegungen eine gute Grundlage für den Erwerb darstellen (Benz et al., 2015; Ross, 1989). Resnick (1992) begründet dahingehend verschiedene Stadien im Verständnis des Teil-Ganze-Verständnisses (Resnick, 1992). Zunächst müsse ein protoquantitatives Schema des Teil-Ganze-Verständnisses erworben werden (Resnick, 1992). Als protoquantitativ wird es deshalb bezeichnet, weil Kinder bereits Wissen über Mengen verfügen, ohne dabei die genaue Anzahl der Elemente zu erfassen (Resnick, 1992; Benz et al., 2015). Damit sind vorrangig die beiden Prinzipien der Kompensation und Kovariation gemeint. Bei der **Kompensation** handelt es sich um das Verständnis, dass sich die Gesamtmenge nicht ändert, wenn von einer ihrer Teilmengen etwas weggenommen und einer ihrer anderen Teilmengen hinzugefügt wird (Resnick, 1992). Unter **Kovariation** versteht Resnick (1992) dann die Erkenntnis, dass, wenn einer Teilmenge etwas hinzugefügt oder weggenommen wird, die Gesamtmenge entsprechend mehr oder weniger wird.

Im nächsten Stadium kann dieses Schema auf konkrete Anzahlen angewendet werden und so Erkenntnisse über die Beziehung zwischen Zerlegungen und Zusammensetzungen erworben werden, z.B. besteht eine Anzahl von sechs Eiern aus vier und zwei Eiern (Benz et al., 2015, S. 136). Dieses Konzept wird weiter verfeinert, indem der Umgang mit konkreten Zahlen nun abstrahiert wird (Benz et al., 2015). Beispielsweise ist Kindern nun bewusst, dass man die Zahl 6 in die Zahlen 2 und 4 zerlegen kann oder aus 2 und 4 die Zahl 6 erhält (Benz et al., 2015, S. 136). Dies kann dann schließlich bei Aspekten der Addition und Subtraktion angewendet werden (Benz et al., 2015).

Ein ausreichend entwickeltes Teil-Ganze-Verständnis zeigt sich im Begründen der Kommutativität und Assoziativität der Addition sowie der Komplementarität von Addition und Subtraktion (Resnick et al., 1991). Aus diesen Grundlagen bilden sich dann die Grundvorstellungen[3] für die Rechenoperationen von Addition und Subtraktion heraus (Benz et al., 2015). Die Vorstellung des **Veränderns, Hinzufügens oder Wegnehmens** von Elementen kann analog auf das Mengenverständnis bezüglich Kovariation und Kompensation übertragen werden (vgl. Benz et al., 2015). Auch Situationen des **Aus- und Angleichens** lassen sich so erklären, sodass über Handlungen Mengen auf die gleiche Anzahl von Objekten gebracht werden (Benz et al., 2015). Das hier jeweils wirkende Teil-Ganze-Verständnis wird konkret daran verdeutlicht, dass bei der Addition zwei Teilmengen zu einer Gesamtmenge miteinander verbunden werden oder beim Subtrahieren eine Gesamtmenge in zwei Teilmengen zerlegt wird (Benz et al., 2015). Aus dem daraus entwickelten Tripel $(Ganzes, Teil1, Teil2)$ können die Operationen geschlussfolgert werden: $Ganzes = Teil1 + Teil2$, $Ganzes = Teil2 + Teil1$, $Ganzes - Teil1 = Teil2$ und $Ganzes - Teil2 = Teil1$ (Ladel & Kortenkamp, 2013).

Weiterhin ist ein vollständig entwickeltes Teil-Ganze-Konzept für die Entwicklung eines **Stellenwertverständnis** nötig (Ladel & Kortenkamp, 2014a; Ross, 1989). Das begründet sich vor allem in der Erkenntnis, dass eine Gesamtanzahl unterschiedlich in Bündel aufgeteilt werden kann (Ladel & Kortenkamp, 2014a, S. 156). Standardisiert ist die maximale Bündelung in 10, 100, 1000, und weiteren Zehnerpotenzen, sodass beispielsweise 437 als vier Hunderter (H), drei Zehner (Z) und sieben Einer (E) aufgefasst wird (Ladel & Kortenkamp, 2014a). Diese Bündelung wird auch als **Standardteilung** (*standard partitioning*) bezeichnet (Ross, 1989). Daran schließt sich das dezimale Teil-Ganze-Konzept an, ein Sonderfall, bei dem nur bestimmte Stufenzahlen zur Zerlegung verwendet werden und jede Stufenzahl höchstens einmal verwendet wird. Alternativ sind auch andere Bündelungen, sogenannte **Nicht-Standardteilungen** (*non-standard partinioning*), möglich (Ross, 1989). An dem Beispiel der 437 wären das unter anderem 3 H 13 Z 7 E oder 1 H 31 Z 27 E oder 3 Z 407 E. Für n-stellige Zahlen gibt es 2^{n-1} strenge Nicht-Standardteilungen (Ladel & Kortenkamp, 2014a).

[3]Die im nachfolgenden, erläuterten Grundvorstellungen beziehen sich explizit auf das Teil-Ganze-Verständnis. Weitere Grundvorstellungen sind u.a. bei Benz et al. (2015, S. 141ff.) nachzulesen.

Diese Art von Bündelungen ist besonders hilfreich beim Anwenden von schnellen und flexiblen Rechenstrategien (z. B. $32 + 59 = (30 + 50) + (9 + 2) = 80 + 11 = 91$) oder beim Verstehen der Alltagssprache, z.B. 1999 als „neunzehnhundertneunundneunzig“ (Ladel & Kortenkamp, 2014a).

Kinder haben dann ein **flexibles Stellenwertverständnis** aufgebaut, wenn sie verschiedene Darstellungen zu einer Zahl finden und zwischen ihren Standard- und Nicht-Standardteilungen wechseln können (Ladel & Kortenkamp, 2014a). Wenn also Lehrkräfte und Forschende vermehrt kritisieren, dass das Stellenwertverständnis von Schüler:innen nur geringfügig ausgeprägt ist, dann erfordert das besonders auch eine Arbeit an dem darunterliegenden Teil-Ganze-Verständnis (Ross, 1989). Auch Schwierigkeiten bei grundlegenden Rechenoperationen wie der Addition können auf ein ungenügendes Teil-Ganze-Verständnis zurückgeführt werden (Riley et al., 1983; Thornton, 1978; Barendregt et al., 2012).

3.4 Anzahlwahrnehmung und -bestimmung

Eine Anzahl an Objekten kann entweder als Menge einzelner Elemente, als Ganzes oder als Zusammensetzung verschiedener Teilmengen wahrgenommen werden (Benz et al., 2015). Auch hier können die Teilmengen als einzelne Elemente oder als Ganzes erkannt werden (Benz et al., 2015). Dazu müssen die Teilmengen identifiziert oder die gesamte Menge in verschiedene Teilmengen strukturiert werden (Benz et al., 2015). Inwiefern bestimmte Strukturen in der Gesamtanzahl wahrgenommen werden, ist von der räumlichen Anordnung der Einzelelemente abhängig (Benz et al., 2015).

Nachdem die einzelnen Elemente der Menge erfasst wurden, wird die Anzahl in einem zweiten Schritt bestimmt (Benz et al., 2015). Hier sind unterschiedliche Prozesse möglich, was sich an dem folgenden Beispiel erläutern lässt: Es werden sieben Eier in einer Zehnerschachtel präsentiert, drei Eier in der oberen Reihe, vier in der unteren (Benz, 2011). Die Teilmengen drei und vier können simultan erfasst werden und Kinder könnten auf Frage nach der Anzahl der Eier „drei und vier“ antworten (Benz, 2011). Wird nach der Gesamtzahl gefragt, dann zählen die Kinder nach oder zählen weiter („drei und dann vier, fünf, sechs, sieben“), sagen sofort „sieben“ oder begründen das: „weil drei plus vier gleich sieben ist“ (Benz, 2011). Als Prozesse der Anzahlbestimmung halten Benz et al. (2015) daher das Zählen fest, aber auch die Simultanerfassung von kleinen Anzahlen, das Wiedererkennen von Figuren wie Würfelbildern oder Fingerbildern, das Weiterzählen, Rechnen und die Quasi-Simultanerfassung. Zusätzlich ist eine Anzahlbestimmung über den Vergleich mit einer Menge, deren Anzahl an Elementen bekannt ist, möglich.

Da diese Prozesse der Anzahlwahrnehmung und -bestimmung die Grundlage für ein Mengen- und später auch Zahlenverständnis darstellen und damit sowohl für den Zahlensinn als auch den Zahlbegriffserwerb von Relevanz sind, werden im Nachfolgenden die wesentlichen drei Prozesse des Zählens, der (Quasi-)Simultanerfassung sowie der Anzahlvergleiche ausführlich dargestellt. Dies entspricht den drei Fähigkeiten, die von Clements (1984) in seinem *Skills Integration Model* hervorgehoben werden.

3.4.1 Zählen

Zählen sei „das Schweizer Taschenmesser des Rechnens, ein Werkzeug, das Kinder spontan für alle möglichen Zwecke nutzen“, behauptet Dehaene (1999, S. 143). Denn „Zählen ist mehr als [das] Nachplappern von Zahlwörtern“ (Lange, 1984, S. 34). Neben dem verbalen Zählen mit dem Aufsagen der Zahlwortreihe gehören auch das Auszählen und das Abzählen von Objekten dazu (Benz et al., 2015).

Um **verbal zählen** zu können, muss die Abfolge der Zahlwörter fehlerfrei aufgesagt werden können (Diephaus, 2015). Hierbei ergeben sich bei den deutschen Zahlwörtern zahlreiche Hürden[4] (Benz et al., 2015). Später soll zudem Vorwärts- und Rückwärtszählen ab einer bestimmten Zahl oder auch das Zählen in Zweier- oder Mehrfach-Schritten möglich sein (Diephaus, 2015). Zuletzt geht es beim Abzählen um die Beantwortung der Frage „Wie viele sind das?“, die darüber erschlossen werden soll (Lange & Meißner, 1983, S. 94).

Grundlage für das Zählen bilden die Zählprinzipien nach Gelman und Gallistel (1986). Die drei „*How-to-Count-Principles*“ geben an, wie gezählt werden muss (Benz et al., 2015). Als eines dieser Prinzipien gibt das **Eindeutigkeitsprinzip** an, dass jedes Element einer Menge und jedes Zahlwort genau einmal berücksichtigt werden und so jedem Objekt genau ein Zahlwort zugeordnet wird (Gelman & Gallistel, 1986). Besonders zwei- oder mehrsilbige Zahlwörter bereiten Kindern hier oft Schwierigkeiten, so werden der „Sieben“ oft zwei Gegenstände, eines pro Silbe, zugeordnet (Benz et al., 2015). Das zweite Prinzip dieser Art ist das **Prinzip der stabilen Ordnung** (Gelman & Gallistel, 1986). Dieses sagt aus, dass die Zahlwortreihe in der richtigen Reihenfolge festgelegt ist und sie jederzeit in eben dieser gleichen Reihenfolge wiederholbar ist (Gelman & Gallistel, 1986). Folglich muss die Zahlwortreihe eine stabile Ordnung haben (Gelman & Gallistel, 1986). Als letztes „*How-to-Count-Principle*“ ist das **Kardinalprinzip** zu nennen (Gelman & Gallistel, 1986). Damit wird beschrieben, dass beim Zählen das zuletzt genannte Zahlwort die Anzahl aller bereits gezählten Elemente angibt und eben nicht nur die des zuletzt benannten Elements (Gelman & Gallistel, 1986). Fuson (1992) bezeichnet das auch als die „*last-word response*“.

Gelman und Gallistel (1986) ergänzen die „*How-to-Count-Principles*“ noch mit zwei weiteren Prinzipien: Das **Abstraktionsprinzip** gilt auch als „*What-to-Count-Principle*“ und bezieht sich auf die zu zählenden Gegenstände (Benz et al., 2015). Es geht dabei darum, dass sowohl das Eindeutigkeits- und Kardinalprinzip sowie das Prinzip der stabilen Ordnung auf jede beliebige Menge angewandt werden können, insofern, als dass Art und Eigenschaften der zu zählenden Objekte keinen Einfluss auf die letztendliche Anzahl ausübt (Benz et al., 2015; Gelman & Gallistel, 1986, S. 80). Das letzte Prinzip, das **Prinzip der Irrelevanz der Anordnung**, bezieht sich auf alle vorherigen Prinzipien (Benz et al., 2015). Demzufolge ist für das Zählergebnis die Anordnung der zu zählenden Objekte irrelevant (Gelman & Gallistel, 1986). Unabhängig davon, in welcher Reihenfolge die Elemente einer Menge gezählt werden, das Ergebnis über die Anzahl bleibt dasselbe (Benz et al., 2015).

[4] Ein kurzer Abriss dazu befindet sich im Anhang.

Obwohl Zählen und der Erwerb der Zahlwortreihe oft erste Zugänge zum Zahlbegriff darstellen, bleibt doch zu diskutieren, ob dies der geeignetste Weg ist. Denn „*a problem in developing arithmetic competence might be that children develop non-productive or counterproductive counting procedures that are not used in a flexible and adaptive way*“ (Holgersson et al., 2016, S. 132). Mehrere Autor:innen bekräftigen, dass ein verfestigtes, zählendes Rechnen und ein einseitiges Zahlenverständnis ein wesentliches Merkmal mathematischer Lernhürden darstellen (Heinz, 2015; Gaidoschik & Fellmann, 2015). Gaidoschik und Fellmann (2015) behaupten sogar, dass es erstrebenswert sei, dass Kinder am Ende des 1. Schuljahres nicht mehr zählend rechnen. Hier startet der Diskussionbedarf, da Kinder oftmals bereits als zählende Rechner:innen aus dem Kindergarten in die Schule kommen (Gaidoschik & Fellmann, 2015). Gaidoschik und Fellmann (2015) legen in diesem Sinne drei Positionen aus.

Die erste Position legt zählendes Rechnen als „eine **notwendige Phase** im Lernprozess jedes Kindes“ aus (Lorenz, 2006, S. 105). Ob diese Kulturtechnik tatsächlich eine Voraussetzung für den weiteren Lernprozess darstellt, ist Gaidoschik und Fellmann (2015) zufolge eher zu verneinen. Schließlich findet Lernen unter vielfältigen Einflüssen statt und so könne der Zahlbegriff auch erworben werden, ohne über das Zählen zu beginnen (Gaidoischik & Fellmann, 2015).

Schassmann und Moser-Opitz (2007) beziehen die zweite Position, in der sie betonen: „Damit sich Kinder vom zählenden Rechnen lösen können, müssen sie – so paradox es erscheinen mag – über eine **sichere Zählkompetenz** verfügen“ (S. 22). Später führt Moser-Opitz zusammen mit Scherer (2010) aus, dass „eine sichere und flexible Zählkompetenz [. . .] Grundlage [ist], um den Anzahlbegriff zu erwerben“ (S. 95). Unklar bleibt jedoch, weshalb bei Betrachtung der zahlreichen Grundlagen des Anzahlbegriffs genau die Zählkompetenz so bedeutend ist und inwiefern dadurch die Ablösung vom zählenden Rechnen durchgeführt wird (Gaidoschik & Fellmann, 2015). Hervorzuheben ist an dieser Stelle, dass der Anzahlbegriff selbst auf keinen Fall mit dem nicht-zählenden Rechnen gleichgesetzt werden kann (Gaidoschik & Fellmann, 2015).

Als letzte Position beschreiben Gaidoschik und Fellmann (2015) die Auffassung, dass Kinder sich zuerst über das **Weiterzählen** oder Zurückzählen Methoden des Addierens oder Subtrahierens aneignen sollten, um aus diesem sicheren, weiterzählenden Rechnen Regeln abzuleiten und Aufgaben zu automatisieren (Schipper et al., 2011, S. 16). Gaidoschik und Fellmann (2015) kritisieren daran jedoch, dass auch bei weiterzählendem Rechnen die Prozedur des Zählens so viel Aufmerksamkeit der Kinder erfordert, dass der Zusammenhang zwischen Aufgabe und Ergebnis nicht zwingend wahrgenommen werden muss. Folglich führt auch das wiederholte, richtige Lösen von Aufgaben nicht zur Automatisierung dieser, stattdessen besteht eher die Gefahr, dass das zählende Rechnen zu einer Gewohnheit wird (Gaidoschik & Fellmann, 2015).

Die Autor:innen Gaidoschik und Fellmann (2015) konkludieren daher, dass es im schulischen Kontext nicht notwendig sei, Strategien des Weiter- oder Zurückzählens einzuüben, um sie später wieder davon abzubringen.

Stattdessen sollten **nichtzählende Alternativen** eingeführt und besprochen werden, die beispielsweise auf dem Teil-Ganze-Verständnis beruhen oder die Einsicht in Rechengesetze sowie die Anwendung prozessbezogener Kompetenzen fördern (Gaidoschik & Fellmann, 2015). Wird eine Zahl als Zusammensetzung aus zwei anderen Zahlen verstanden, kann daraus etwa nichtzählend die Addition und Subtraktion abgeleitet werden, wie sie bereits im Kapitel des Teil-Ganze-Verständnisses erläutert wurde. Zur Ablösung vom Zählen beim Erfassen einer Anzahl wird oft auf die (Quasi-)Simultanerfassung oder auch auf den Anzahlvergleich verwiesen (vgl. Gaidoschik & Fellmann, 2015).

3.4.2 (Quasi-)Simultanerfassung

Menschen werden mit der Fähigkeit geboren, schnell und direkt die Gesamtheit einer Gruppe bzw. die Anzahl von Elementen visuell zu erfassen (Sarama & Clements, 2009, S. 29; Diephaus, 2015, S. 81). Diese „Fähigkeit, die Anzahl kleiner Mengen auf einen Blick wahrzunehmen und sofort zu bestimmen, ohne die Elemente abzählen zu müssen“ wird auch als „**Simultanerfassung**“ oder im Englischen als „*subitizing*“ bezeichnet (Benz et al., 2015, S. 133). Aufgrund der schnellen Erfassung von Anzahlen wird gelegentlich auch von „spontanen Kardinalzahlen“ gesprochen (Lange & Meißner, 1983). Die Simultanerfassung eröffnet damit einen ersten Zugang zur Erfassung von Quantitäten und Kardinalitäten (Butterworth, 2005). Kaufman et al. (1949) grenzen den Begriff der Simultanerfassung von dem des Schätzens ab, indem das Schätzen als ein ungenauer Prozess der Anzahlangabe beschrieben wird, wohingegen die Simultanerfassung akkurater und präziser sei (vgl. Revkin et al., 2008). Der Anzahlerfassungsprozess geschieht dabei in einer Zeitspanne von Millisekunden (Ester et al., 2012). Kinder lernen kleine Anzahlen direkt zu sehen, ohne sie nachzählen zu müssen (Ginsbrug, 1989). Sie nehmen sie beispielsweise *** als Drei wahr, ähnlich dazu wie man einem Buchstaben H den Laut „hah“ zuordnet (Ginsbrug, 1989, S. 38; Resnick & Ford, 1981, S. 70). Die Wiedergabe der Zahl kann verbal geschehen oder durch das Zeigen von Zifferkarten oder einer bestimmten Fingeranzahl (Lange & Meißner, 1983; Tucker & Johnson, 2020).

Studien zeigen, dass die Simultanerfassung meistens nur für Anzahlen von ein, zwei oder drei Elementen auftritt (Dehaene, 2011). Sind mehr als vier Elemente vorhanden, wird der Prozess der Simultanerfassung langsamer und fehleranfälliger (Piazza et al., 2001). Da es sich hierbei um die ausschließlich visuelle Erfassung der Elementanzahl handelt, wird von ***perceptual subitizing*** gesprochen (Clements, 1999). Darunter wird die Kapazität verstanden, die genaue Anzahl von wenigen Objekten direkt erfassen zu können, ohne sie zählen zu müssen (Barendregt et al., 2012). Die Objekte müssen weder gruppiert noch umsortiert werden (Clements et al., 2019; Tucker & Johnson, 2020). Sarama und Clements (2009) sprechen von „*recognizing a number without consciously using other mental or mathematical processes and then naming it*“(S. 44). Jedoch ist es nicht immer eindeutig, ob die Anzahl der einzelnen Elemente tatsächlich bewusst ist oder ob ein bestimmtes Muster, wie die von Würfelbildern, nur einen Namen erhalten haben und so benannt werden (Benz et al., 2015).

Nach Steffe und Cobb (1988) umfasst die Simultanerfassung sowohl den Prozess der Anzahlwahrnehmung als auch den Prozess der Anzahlbestimmung. Das schnelle Erfassen von Anzahlen und Mengenveränderungen erklären Xu und Spelke (2000) anhand zweier verschiedener Repräsentationssysteme, auf denen sich die Simultanerfassung gründet: dem *object-file representation system*, mit dem kleine Anzahlen präzise erfasst werden können, und dem *analog-magnitude representation system*, über welches Mengen näherungsweise bestimmt werden können. Das *perceptual subitizing* gehe damit auf das erste System zurück (Geary, 2006).

Nichtsdestotrotz können auch höhere Anzahlen als Drei schnell wahrgenommen und identifiziert werden (Holgersson et al., 2016). Dies ist zumeist abhängig von der Anordnung der Elemente: So können bekannte Konfigurationen wie die eines Würfels schnell erfasst und bestimmt werden (Holgersson et al., 2016). Dies lässt sich auf das Erkennen von Mustern und Gruppierungen zurückführen, was dem sogenannten ***conceptual subitizing*** zugrunde liegt (Krajcsi et al., 2013; Barendregt et al., 2012). Dieser Prozess wird ebenfalls der Simultanerfassung zugeordnet und findet im Deutschen oft sein Synonym im Begriff der Quasisimultanerfassung (Benz et al., 2015). Begründet werden kann dies unter anderem mit den Studien von Wolters et al. (1987), in denen sie herausstellen, dass der Prozess der Simultanerfassung am ehesten mit dem Erkennen von konstanten Mustern (englisch: *patterns*) zu erklären ist als mit dem Erkennen von Anzahlen, insbesondere, wenn die Objekte zufällig verteilt sind. Die Gesamtanzahl der Elemente werde demnach in kleinere Mengen zerlegt bzw. gebündelt und Strukturen erkannt (Benz et al., 2015). Anschließend werden die einzelnen Teilmengen separat erfasst und dann wieder zu einem Ganzen zusammengesetzt (Benz et al., 2015). Dies ist bereits eine fortgeschrittene Variante der Simultanerfassung und unterstützt die Entwicklung des Zahlensinns (Barendregt et al., 2012). Die Gruppierung der Gesamtmenge in einzelne Teilmengen kann unbewusst stattfinden (Tucker & Johnson, 2020). Es ist unbedingt mit dem Teil-Ganze-Verständnis zu verbinden, da es aus mehreren Teilmengen ein Gesamtes bildet oder andersherum ein Gesamtes in mehrere Teilmengen unterteilt werden kann (Tucker & Johnson, 2020). Untersuchungen von Wästerlid (2020) zeigen, dass das Trainieren des *conceptual subitizing*s einen positiven Einfluss auf das Teil-Ganze-Verständnis von Kindern hat. Besonders nach Übungsphasen in Vorschulgruppen ist dies deutlich geworden (Wästerlid, 2020).

Seit Beginn des 20. Jahrhunderts wird der (Quasi-)Simultanerfassung neben dem Zählen ein **hoher Stellenwert** bei dem Zahlbegriffserwerb und dem Aufbau eines Zahlensinns zugeschrieben (Clements et al., 2019; Douglass, 1925; Freeman, 1912). Wie auch andere arithmetische Fähigkeiten kann die (Quasi-)Simultanerfassung trainiert werden (Butterworth, 2005; Fischer et al., 2008; Fuson, 1992). Dass Quantitäten erkannt werden, beginnt bereits im ersten Lebensjahr (Clements & Sarama, 2009). Das volle Potenzial dieser Fähigkeit wird gemeinsam mit den Prozessen der Komposition und Zerlegung ab einem Alter von fünf bis acht Jahren ausgeschöpft (Clements & Sarama, 2009). Die erworbenen Fähigkeiten werden unter anderem dadurch beeinflusst, inwieweit die Lernenden diesem Prozess in ihrer Entwicklung ausgesetzt waren (Clements & Sarama, 2009). In mehreren Studien wurden dabei folgende Zusammenhänge herausgearbeitet:

- Die Schnelligkeit und Präzision der (Quasi-)Simultanerfassung nimmt mit der Anzahl an Elementen ab (Logan & Zbrodoff, 2003). Dies wird besonders für mehr als drei Objekte deutlich (Tucker & Johnson, 2020).

- Die Schnelligkeit und Präzision der (Quasi-)Simultanerfassung nimmt mit der Wiederholung von bestimmten Mustern zu, indem diese wiedererkannt werden können (Broda et al., 2018; Lassaline & Logan, 1993).

- Bekannte Muster und Formationen der einzelnen Objekte, wie die eines Würfelbilds, werden schneller und akkurater erkannt als Muster derselben Anzahl an Elementen, die in unbekannten oder ungewöhnlichen Formationen gezeigt wurden (Dehaene & Cohen, 1994; Krajcsi et al., 2013). Dies deckt sich mit der Theorie der *pattern recognition* (Krajcsi et al., 2013). Das Muster der Objekte übt einen stärkeren Einfluss ab einer Anzahl von vier Objekten aus (Krajcsi et al., 2013).

Auf Basis dieser Erkenntnisse lässt sich ableiten, dass Aufgaben, die auf die (Quasi-)-Simultanerfassung abzielen, in den **Unterricht** und in die Erfahrungswelt von Kindern integriert werden sollten (Clements & Sarama, 2009). Dabei sollte unbedingt darauf geachtet werden, dass verschiedene Formationen derselben Anzahl an Elementen verwendet werden (Clements & Sarama, 2009) sowie dass das *perceptual* und *conceptual subitizing* über Kompositionen und Zerlegungen miteinander verbunden werden (Tucker & Johnson, 2020). Dazu eignen sich besonders strukturierte, numerische Muster an Objekten (Barendregt et al., 2012). Um Zählstrategien entgegenzuwirken und sich tatsächlich auf die (Quasi-)Simultanerfassung zu beziehen, sollten besonders Teil-Ganze-Strukturen gezeigt werden (Neuman, 1987).

Abgrenzung der (Quasi-)Simultanerfassung vom Zählen

Es wurde lange diskutiert, ob die (Quasi-)Simultanerfassung eine andere Art der Anzahlbestimmung ist als das Zählen und ob sie sich vor oder nach der Zählfähigkeit entwickelt (Benz et al., 2015). **Neurobiologisch** betrachtet spielen sich die beiden Prozesse in denselben Gehirnregionen ab (Piazza et al., 2001). Jedoch gibt es Unterschiede in der beobachteten Intensität und räumlichen Ausdehnung von aktiven Neuronen, abhängig von der Anzahl an Elementen und deren räumliche Anordnung (Piazza et al., 2001). Auf biologischer Grundlage scheinen die Prozesse daher zumindest ähnlich zu sein (Piazza et al., 2001).

Gelman und Gallistel (1986) beschrieben die (Quasi-)Simultanerfassung deshalb ursprünglich als einen schnelleren Zählprozess. 1995 widerlegen Starkey und Cooper diese These, indem sie Kindern 200 ms lang ungeordnete Punkte präsentieren und diese dann die Anzahl der Punkte angeben sollten. Da die Punkte nur sehr kurz sichtbar waren, konnten diese nach Aussage der beiden Forschenden nicht gezählt werden (Starkey & Cooper, 1995). Zusammenfassend hielten sie fest, dass Zweijährige etwa zwei bis drei Elemente simultan erfassen konnten, Dreijährige bis zu vier Elemente und Vier- bis Fünfjährige sogar bis zu fünf Elemente (Starkey & Cooper, 1995). Dies deckt sich in etwa mit den Erkenntnissen des *perceptual subitizing* (Barendregt et al., 2012).

Weitere Studien unterstützen ebenfalls die Perspektive, dass eine **nichtzählende**, simultane Zahlauffassung existiert (Hannula et al., 2007; Feigensohn et al., 2004). In der allgemeinen, mathematikdidaktischen Sichtweise wird die (Quasi-)Simultanerfassung deshalb als eigenständige Kompetenz angesehen (Benz et al., 2015). Sie gilt als ein automatisiert ablaufender, wahrnehmungsbasierter und schneller Verarbeitungsvorgang von Anzahlen (Benz et al., 2009). Sie unterscheidet sich vom Zählen in ihrer unmittelbaren Bestimmung der Gruppengröße, wohingegen beim Zählen ein schrittweises Abzählen erfolgt (Sarama & Clements, 2009).

Hinsichtlich des **Entwicklungszeitpunkts** scheint es so zu sein, dass Simultanerfassung zu einem früheren Zeitpunkt beherrscht werden kann als das Zählen (Starkey & Cooper, 1995). Hierbei entwickelt sich die Simultanerfassung zur Quasisimultanerfassung weiter (Starkey & McCandliss, 2014) oder bildet sich weiter zum Schätzen aus (Anobile et al., 2016; Revkin et al., 2008). Davon ausgehend bleiben jedoch Unstimmigkeiten, inwiefern sich aus der Simultanerfassung der Übergang zum Zählen gestaltet (Ester et al., 2012; Logan & Zbrodoff, 2003). Piazza et al. (2002) schlagen daher die These vor, dass sich (Quasi-)Simultanerfassung und Zählen entlang eines Kontinuums parallel entwickeln.

3.5 Anzahlvergleiche

Kinder sind bereits ab ihrem ersten Lebensjahr in der Lage, Mengen miteinander zu vergleichen (Sarama & Clements, 2009). Zunächst sind Differenzen erkennbar, sofern sich die zu vergleichenden Mengen in ihrer Anzahl an Elementen ausreichend voneinander unterscheiden (Sarama & Clements, 2009). In der Literatur werden dahingehend besonders die Verhältnisse 1:2 oder 2:3 zwischen den Mengen hervorgehoben (Sarama & Clements, 2009). Dies begründet sich darin, dass Kinder sensibel gegenüber großen Unterschieden mit vielen Elementen sind (Sarama & Clements, 2009). Ausgehend vom Säuglingsalter verfeinern sich die Fähigkeiten, Anzahlen miteinander zu vergleichen, stetig (Sarama & Clements, 2009). Sie unterscheiden dabei zwei Ebenen: das *Object Matching* und die *Visual Comparison* (Sarama & Clements, 2009).

Beim ***Object Matching*** handelt es sich vor allem um das Vergleichen anhand von konkreten Materialien (Sarama & Clements, 2009). In diesem Sinne können Kinder bereits im ersten Lebensjahr den Unterschied bei kleinen Mengen mit einem oder zwei Elementen erkennen sowie wenn große Unterschiede vorlegen (Sarama & Clements, 2009). Sarama und Clements (2009) sprechen hier von den Grundlagen des Vergleichens und bezeichnen die Kinder als *Comparison Senser*. Der Mengenvergleich findet eher unbewusst statt (Sarama & Clements, 2009). Ab einem Alter von einem Jahr sind die Kinder bereits in der Lage, zwei sehr kleine Mengen zu vergleichen, sofern sie dieselbe Anzahl an Elementen haben (Sarama & Clements, 2009). Intuitiv verbinden sie dabei immer ein Element der einen Menge mit einem oder mehreren einer anderen, z.B. indem sie mehrere Bausteine derselben Farbe in eine gleichfarbige Kiste tun (Sarama & Clements, 2009). Die Kinder gelten damit als *Many-to-One-Corresponder* (Sarama & Clements, 2009).

Dies wird schließlich so verfeinert, dass ab einem Alter von zwei Jahren eine *One-to-One Object Corresponder*-Rolle eingenommen werden kann und konkrete Materialen als spezifisches Paar interpretiert werden (Sarama & Clements, 2009). Hierbei findet eine 1:1-Zuordnung statt (Sarama & Clements, 2009). Im Alter von zwei bis drei Jahren lernen Kinder darüber hinaus, die Anzahl an Objekten zu vergleichen, indem sie aktiv Paare von zwei Objekten bilden (Sarama & Clements, 2009). Damit werden die Objekte zwar 1:1 zugeordnet, den Lernenden muss jedoch noch nicht bewusst sein, dass dies ebenfalls bedeutet, gleichmächtige Gruppen zu haben bzw. zu bilden (Sarama & Clements, 2009).

Parallel ab einem Alter von zwei bis drei Jahren entwickelt sich die ***Visual Comparison*** (Sarama & Clements, 2009). Die Kinder lernen allein über die Wahrnehmung zu erkennen, welche Menge mehr Elemente enthält (Sarama & Clements, 2009). Sarama und Clements (2009) sprechen zunächst vom *Perceptual Comparer*. Ähnlich wie beim *Comparison Senser* hängen diese Fähigkeiten noch davon ab, dass in kleinen Mengen oder mit bedeutenden Anzahlunterschieden zwischen den Mengen gearbeitet wird (Sarama & Clements, 2009). Analog zum *Object Matching* entwickelt sich dies dann im Alter von drei bis vier Jahren weiter, sodass ähnliche und schließlich auch unterschiedliche Objekte in Anzahlen von eins bis vier miteinander verglichen werden können (Sarama & Clements, 2009). Kinder ab dem Alter von vier Jahren sind dann oft *Matching Comparer*, wobei die Kinder Gruppen von ein bis sechs Elementen über 1:1-Zuordnung miteinander vergleichen können (Sarama & Clements, 2009). Beispielsweise wird jeder Biene eine Blume zugeordnet, dann sind dieselbe Anzahl an Bienen und Blumen vorhanden (Sarama & Clements, 2009). Damit können bereits Anzahlvergleiche durchgeführt werden, bevor das Zählen und die Zahlwortreihe beherrscht werden (Sarama & Clements, 2009).

Die Fähigkeit, Anzahlvergleiche durchzuführen, **entwickelt sich** weiterhin stark, besonders wenn Kinder sicherer im Umgang mit Zahlworten, Zählen und der (Quasi-)Simultanerfassung werden (Sarama & Clements, 2009). Zunächst können sie nur Alltagssituationen beschreiben, ab etwa drei Jahren auch mathematische Aufgaben lösen, die Anzahlvergleiche erfordern (Sarama & Clements, 2009). Ab dem Alter von vier oder fünf Jahren können dann die meisten Kinder Fragen, wie „Was ist mehr? Sieben oder fünf?“, beantworten (Sarama & Clements, 2009). Ab fünf Jahren sollten sie in der Lage sein, Zahlen im Zahlenraum bis 10 zu vergleichen (Sarama & Clements, 2009). Begründungen, weshalb eine Menge mehr Elemente hat, werden in der Regel auf die (Quasi-)Simultanerfassung, das Zählen oder die 1:1-Zuordnung zurückgeführt (Sarama & Clements, 2009). Beim Zählen liegt die Begründung besonders darin, dass eine Zahl später oder früher in der Zahlwortreihe auftritt und daher die zugehörige Menge größer oder kleiner sein muss (Sarama & Clements, 2009). Bei der 1:1-Zuordnung ist die Menge größer, bei der nach dem Zuordnen eines jeden Elements der einen Menge zu einem der anderen Menge etwas übrig bleibt (Benz et al., 2015).

Sowohl der Vergleich zwischen symbolischen Anzahlen, z.B. Ziffern, Zahlwörtern oder verbalen Ausdrücken, als auch der Vergleich zwischen nicht-symbolischen, wie etwa Punkten auf einem Blatt oder konkreten Objekten, sind **wesentliche Grundlagen** für das Lernen von Mathematik (Sarama & Clements, 2009). Daher sollte das Vergleichen von Mengen in das informelle Lernen und Alltagserfahrungen integriert werden (Sarama & Clements, 2009). Dies ist besonders im Kindergarten, etwa durch das Zuordnen von jeweils einem Löffel zu jedem Teller, gut möglich (Benz et al., 2015). Beim Vergleich von (An-)Zahlen eignen sich außerdem weitere 1:1-Zuordnungen wie Spiele, bei denen Karten mit einer Anzahl Karten mit derselben Anzahl an Objekten zugeordnet werden sollen, auch wenn sich die Objekte unterscheiden, z.B. zwei Blumen und zwei Schildkröten (Benz et al., 2015). Auch die Verwendung von Fingerrepräsentationen hilft, indem zwischen den Objekten und den Fingern eine 1:1-Zuordnung, beispielsweise über das Zeigen auf die Objekte, vorgenommen wird (Baccaglini-Frank & Maracci, 2015).

Der Vergleich von Mengen mit konkreten Objekten und großen Anzahlunterschieden fällt Lernenden oft leichter (Sarama & Clements, 2009). Konträr dazu sind die meisten Lernenden schneller darin, Zahlen zu unterscheiden, wenn sie auf dem Zahlenstrahl näher beieinander liegen (Sarama & Clements, 2009). Mulligan et al. (2018) postulieren daher, dass Menschen **zwei verschiedene Systeme** für den Vergleich von Objekten und Zahlen verwenden. In jedem Fall ist der Anzahlvergleich und insbesondere die 1:1-Zuordnung ein wesentlicher Bestandteil in der Entwicklung des Zahlensinns und sollte daher sowohl vor Schuleintritt, als auch während der Schulzeit besonders gefördert werden (Gelman & Gallistel, 1986).

4 Anzahldarstellung mit Fingern hinsichtlich der *Embodied Cognition* und Finger Gnosis

Tucker und Johnson (2020) beschreiben die *Embodied Cognition* als eine physische Handlung, die bei dem Ausführen einer (kognitiven) Aktivität auftritt. Dabei wird besonders die Verbindung zwischen den sensomotorischen Funktionen wie Bewegungen zu den Denkprozessen hervorgehoben (Radford, 2014). Innerhalb der Perspektive der *Embodied Cognition* werden die Prozesse des tatsächlichen Handelns, Berührens und Bewegens als wesentliche Bestandteile des mathematischen Denkprozesses interpretiert (Baccaglini-Frank & Maracci, 2015). Demnach kann eine konkrete Handlung in mathematischen Übungsphasen auch als mathematisches Denken wahrgenommen und demnach Veränderungen in diesem **Handeln als mathematisches Lernen** verstanden werden (Nemirosvsky et al., 2013). Der Prozess des Lernens über physische Handlungen beginnt bereits bei den ersten Phasen der konzeptuellen Entwicklung und bildet die Grundlage auch noch bei fortgeschrittenen Lernprozessen (Baccaglini-Frank & Maracci, 2015).

Vor dem Hintergrund, dass Körpersprache und Gestiken über viele Kulturen hinweg auch beim Zählen verwendet werden, besteht ein Fokuspunkt der mathematikdidaktischen Forschung in den verwendeten **Gestiken beim Zahlerwerb** (Bender & Beller, 2012). Besonders für die Erforschung von Kleinkindern ist die Analyse von Gestiken oft sehr aufschlussreich (Gunderson et al., 2015). Das begründet sich vor allem darin, dass die Ausführung von Gestiken bei Kleinkindern oft präziser ist als deren Sprache, insbesondere für die Quantitäten über ihre beherrschte Zahlwortreihe hinaus (Gunderson et al., 2015). Damit ist eine Untersuchung des Verständnisses möglich, ohne Sprachbarrieren bedenken zu müssen (Gunderson et al., 2015).

Zahlen oder Mengen werden in mehreren Kulturen mithilfe von Fingern visualisiert (Ifrah, 2000). Historisch gesehen wurde bereits mit Fingern zur Anzahlrepräsentation gearbeitet, bevor Zahlwörter oder arabische Ziffern eingeführt wurden (Fuson, 1998; Gracia-Bafalluy & Noël, 2008). Daher spielt die Verwendung von Fingern im Erwerb des Zahlbegriffs stets eine nicht unwesentliche Rolle (Holgersson et al., 2016). Butterworth (2005) behauptet sogar, dass Finger ein Schlüssel zum Verständnis über Zahlenvorstellungen darstellen. Aus der Perspektive der *Embodied Cognition* ist das Verwenden von Fingern eine Form der Zahlenrepräsentation und damit ein Weg, das Lernen des Zahlbegriffs zu variieren und zu bereichern (Holgersson et al., 2016).

Sinclair und Pimm (2015) beschreiben dazu zwei Zählprozesse, bei denen **Finger als Werkzeug** verwendet werden. Einerseits gibt es den Prozess des *counting with fingers*, wobei die Finger als Denkstütze genutzt werden (Sinclair & Pimm, 2015). Andererseits gibt es das *counting on fingers*, wobei den Objekten jeweils ein Finger zugeordnet wird und sie anhand der Finger die Anzahl der Objekte bestimmt werden (Sinclair & Pimm, 2015). Hier greift unter anderem das Wissen über die Anzahlvergleiche und die 1:1-Zuordnung. Finger können außerdem Anzahlen repräsentieren, indem bestimmte Muster erzeugt werden, die spezifische Zahlen signalisieren, sogenannte *finger symbol sets* (Butterworth, 1999).

Dabei kann die Verwendung von Fingern bei Kindern die Ausbildung des Verständnisses fördern, welche Anzahl an Elementen den einzelnen Zahlwörtern zugeordnet wird (Butterworth, 1999; Brissiaud, 2003).

Zusätzlich können Finger ein Werkzeug darstellen, um Rechnungen durchzuführen oder als **Unterstützung beim Zählen** zu dienen (Holgersson et al., 2016). Dabei helfen sie beispielsweise, die bereits gezählten Elemente abzubilden oder Zwischenschritte im Kopfrechnen zu visualisieren (Geary, 2005). Kinder können auf die bereits gezählten Objekte zeigen, was nicht nur hilft, die einzelnen Objekte visuell auseinanderzuhalten, sondern auch das Prinzip der 1:1-Zuordnung verdeutlicht (Gallistel & Gelman, 1992).

Zuletzt sind Finger ein gewinnbringendes Werkzeug, nicht nur, weil sie fast immer verfügbar sind, sondern auch weil zu **Beziehungen zu den Zahlen Fünf und Zehn** aufweisen (Ladel, 2017). Werden Finger einer Hand oder beider Hände zum Zählen oder zur Repräsentation von Zahlen verwendet, kann das das Verständnis von dem dezimalen Stellenwertsystem fördern (Ross, 1989; Gracia-Badalluy & Noël, 2008). Mithilfe von Fingern können daher besonders die Zerlegung von Zahlen bis zur 10 deutlich gemacht werden, die dann auch für die Addition und Subtraktion dienlich sind (Baccaglini-Frank & Maracci, 2015).

Über die Art und Weise, wie Kinder Zahlen mit ihren Fingern repräsentieren, lassen sich entsprechend der *Embodied Cognition* Rückschlüsse auf ihre mentalen Handlungen ziehen (Segal et al., 2014). Demnach zeigen innerhalb der Handlung **konzeptuell kongruente Gesten** die mathematische Vorstellung des Kindes an und eröffnet so neue Anknüpfungspunkte im Lernen (Segal et al., 2014).

Werden zur Zahldarstellung Finger nacheinander bewegt oder die Objekte eins nach dem anderen berührt, dann wird geschlussfolgert, dass das Kind ein **ordinales Zahlenverständnis** besitzt (Sinclair & de Freitas, 2014; Ladel, 2017). Dies begründet sich in der konzeptuellen Kongruenz der sequenziellen Abfolge von Zahlen und demnach auch den Fingern (Tucker & Johnson, 2020). Des Weiteren gehen Tucker und Johnson (2020) bei dieser Form auch von einem zählenden Verständnis aus. Wird hingegen die Zahl simultan dargestellt, demnach alle Finger auf einmal gezeigt bzw. zur Anzahlrepräsentation verwendet, dann wird eher von einem **kardinalen Zahlenverständnis** gesprochen (Ladel & Kortenkamp, 2013). Zudem wird diese Form der Simultandarstellung mit der (Quasi-)Simultanerfassung verknüpft, sodass davon ausgegangen wird, dass Kinder auf diese Art und Weise die Zahl erfassen können (Tucker & Johnson, 2020; Ladel & Kortenkamp, 2013).

Auch bezüglich der Darstellung von **Teil-Ganze-Konzepten** kann die Zerlegung von Zahlen besonders auch auf zwei Hände Aufschluss über die interne Repräsentation der Zahl geben (Ladel & Kortenkamp, 2012). So kann beispielsweise die 5 über die Verwendung aller Finger einer Hand externalisiert werden oder als 2 und 3 (Tucker & Johnson, 2020). Tucker und Johnson (2020) beschreiben, dass mathematisches Lernen stattfinde, wenn Kinder zwei und drei Elemente als Teile sehen und dann fünf Finger als Ganzes zur Anzahldarstellung zeigen würden. Folglich bestehe das Verständnis des Zusammenfügens im Zusammenfassen von zwei Sets in mindestens einer Hand.

Hinsichtlich der Zahldarstellung kann es Unterschiede zwischen der linken und rechten Hand geben (Fischer & Brugger, 2011), wobei die **Händigkeit** weder die Schnelligkeit noch die Präzision der Zahldarstellung, besonders bei der Simultanerfassung, beeinflusst (Broda et al., 2018). Ladel und Kortenkamp (2013) schreiben, dass es irrelevant sei, welche Finger genau das Kind für die Zahldarstellung verwendet. So könne die Zahl 2 mit dem Daumen und Zeigefinger oder mit dem Zeigefinger und Mittelfinger oder auch anders signalisiert werden (Ladel & Kortenkamp, 2013). Zur Erfassung dieser Darstellungen bieten besonders Multi-Touch-Technologien neue Wege, diese Fingerrepräsentationen zu analysieren und so die Konzepte der Kinder zu erfassen (Ladel & Kortenkamp, 2012).

Summa summarum kann die Verwendung von Fingern das Arbeiten mit Zahlen und ersten Rechenoperationen vereinfachen (Andres et al., 2007). Dabei zeigen empirische Studien einen **positiven Zusammenhang** zwischen der konsequenten Verwendung von Fingern und der Entwicklung des Zahlensinns und von Rechenfähigkeiten an (Gracia-Bafalluy & Noël, 2008). Kann ein Kind Elemente zwar zählen, aber nicht die zugehörige Anzahl mit den Fingern anzeigen, ohne jeweils die Finger zu zählen, dann wird das Kind als wenig kompetent im Umgang mit Anzahldarstellungen klassifiziert (Brissiaud, 2003). Butterworth (1999) begründet das damit: „*without the ability to attach number representations to the neural representations of fingers and hands in their normal locations, the number themselves will never have a normal representation in the brain*“ (S. 249f.). Für Butterworth (1999, 2005) gehört zu der Repräsentation von Zahlen und ihren Operationen mehrere Fähigkeiten, darunter hebt er besonders die (Quasi-)Simultanerfassung, feinmotorische Fähigkeiten, wie das Berühren und Auseinanderhalten von eigenen Fingern, sowie die mentale Repräsentation der eigenen Finger hervor.

Parallel zum Ansatz der *Embodied Cognition* wird davon ausgegangen, dass über die Verwendung von Fingern konkrete und abstrakte Repräsentationen von Zahlen, Zahlwörtern und Ziffern erarbeitet werden (Butterworth, 1999). Diese Hypothese wird über spätere Studien bestärkt (Baccaglini-Frank & Maracci, 2015). So wird herausgestellt, dass ein signifikanter Prädikator für das spätere Wissen über das Zahlsystem und über Rechenfähigkeiten die **Finger Gnosis** darstellt (Baccaglini-Frank & Maracci, 2015; Noël, 2005). Definiert wird die Finger Gnosis dabei als „*ability to differentiate one's own fingers when they are touched without any visual clues*“ (Gracia-Bafalluy & Noël, 2008, S. 369).

Marinthe et al. (2001) ziehen aus ihren neuropsychologischen Tests mit fünfjährigen Kindern sogar den Schluss, dass die Ergebnisse in Finger Gnosis Tests bessere Indikatoren für mathematische Fähigkeiten für einen anschließenden Zeitraum von drei Jahren darstellen als Messinstrumente der derzeitigen kognitiven Entwicklung. In weiterführenden Studien von Noël (2005) wurde darüber hinaus deutlich, dass die Entwicklung der Finger Gnosis nicht nur die Leistung in Rechenaufgaben vorhersagte, die stark auf der Repräsentation mit Fingern beruhte, sondern auch die Leistung bei Rechenaufgaben, die kaum auf der Repräsentation einer Anzahl basierte. Außerdem wurde eine signifikante, negative Korrelation zwischen der Finger Gnosis und dem Fehlerquotienten gefunden sowie eine moderate positive Korrelation mit der Bearbeitungsschnelligkeit (Noël, 2005).

Gracia-Bafalluy und Noël (2008) vermuten, wenn Kinder eine gering ausgeprägte Finger Gnosis besitzen, dann können sie ihre Finger nur unzureichend als Hilfsmittel zum Zählen, Rechnen oder Anzeigen von Anzahlen verwenden, was sie in der Entwicklung von guten, numerischen Fähigkeiten hindert. Getestet werden kann diese Hypothese jedoch nicht.

Einen Ansatz, Finger und deren numerische Visualisierung als Beispiel für die *Embodied Cognition* zu verbinden, bietet die **neurowissenschaftliche Analyse** (Fischer et al., 2012). Denn die Gehirnareale, die für die Verarbeitung und Handlungsplanung mit Zahlen und Fingern verantwortlich sind, liegen proximal, also nah beieinander, und überlappen sich teilweise (Dehaene et al., 2003). Sowohl der präzentrale Gyrus, als auch der Scheitellappen des Großhirns sind dabei involviert (Dehaene et al., 2003). Dies könnte das gemeinsame Auftreten von Defiziten in der Verarbeitung von Zahlen und der Fingerrepräsentation erklären (Gracia-Bafalluy & Noël, 2008).

Neben der anatomischen Erklärung kann auch eine **funktionale Verbindung** diese Zusammenhänge begründen (Gracia-Bafalluy & Noël, 2008). Diese Relation zwischen Fingern und Zahlen könnte ausschließlich in den ersten Phasen des Zahlbegriffserwerbs und der Ausbildung arithmetischer Fähigkeiten von Bedeutung sein (Gracia-Bafalluy & Noël, 2008). Gracia-Bafalluy und Noël (2008) behaupten, gäbe es eine funktionale Verbindung, dann müssten sich die arithmetischen Fähigkeiten verbessern, wenn die Finger Gnosis gefördert wird. In ihrer Studie mit 47 Erstklässler:innen untersuchten sie diese Hypothese, indem sie einige Lernenden mit schlechter Finger Gnosis hinsichtlich des Auseinanderhaltens ihrer Finger trainierten (Gracia-Bafalluy & Noël, 2008). Tatsächlich schloss diese Gruppe an Lernenden signifikant besser in den drei Facetten der Anzahlrepräsentation mit Fingern, der Finger Gnosis und der Anzahlerfassung ab als zuvor und im Vergleich zu ihrer Kontrollgruppe (Gracia-Bafalluy & Noël, 2008). Sie scheinen sogar besser im Umgang mit arabischen Ziffern zu sein (Gracia-Bafalluy & Noël, 2008). Zudem erzielten sie bessere Ergebnisse als die Kontrollgruppe in Aufgaben, die auf die (Quasi-)Simultanerfassung abzielten (Gracia-Bafalluy & Noël, 2008).

Zusammenfassend lässt sich sagen, dass Untersuchungen der Entwicklungspsychologie, der Neurobiologie und -psychologie eine Verbindung zwischen Zahlen und Fingern herausarbeiten konnten, wobei besonders der Einsatz von Fingern in der Kindheit wichtig für die mathematische Entwicklung zu sein scheint (Moeller et al., 2012; Gracia-Bafalluy & Noël, 2008).

5 Frühe mathematische Bildung

Das frühe mathematische Lernen wurde einst bewusst aus Kindergartenaktivitäten exkludiert unter der Annahme, Lernen sei erst ab Schuleintritt nötig und sinnvoll (Benz et al., 2015). Doch „Lernen ist immer Weiterlernen“ (Benz et al., 2015, S. 5) und die Entwicklung mathematischer Kompetenzen beginnt deutlich vor Schulanfang (Benz et al., 2015). Vielfach wurde die Kindergartenzeit nur als spielerische Institution verstanden, ohne anzuerkennen, dass bereits hier grundlegende Bildungsprozesse einsetzen und Methodenkompetenzen sowie inhaltliches Vorwissen aufgebaut werden (Benz et al., 2015). Nachdem dies berücksichtigt wurde, wurden auch Orientierungspläne für die frühe Bildung eingeführt (Benz et al., 2015). Benz et al. (2015) analysieren daher genau diesen Entwicklungsabschnitt mit einem Fokus auf den Zielen, Methoden und Inhalten der frühen, institutionellen, mathematischen Bildung, wobei sie entwicklungspsychologische, elementarpädagogische, fachliche und fachdidaktische Perspektiven inkludieren (Benz et al., 2015).

Bereits im ersten Lebensjahr besitzen Kinder **basale, mathematische Fähigkeiten** (Benz et al., 2015). Auf den im Säuglingsalter erkennbaren intuitiven, mathematischen Kompetenzen bauen sowohl das quantitative Verständnis, als auch die Zählfertigkeit auf (Stern, 2009). Stern (2009) spricht von einer „angeborenen Fähigkeit [. . .], die externe Umgebung nach quantitativen Kriterien zu analysieren“ (S. 152f.). Im Rahmen von Habituationsexperimenten bei Säuglingen gelingt es Wynn (1992), basale Fähigkeiten zur Mengenunterscheidung sowie protoquantitative Additions- und Subtraktionsschemata nachzuweisen. Diese hängen unter anderem mit der Veränderung der Flächeninhalte zusammen (Benz et al., 2015).

Die erste Mathematikstunde in der Grundschule stellt damit nicht den Beginn des mathematischen Lernprozesses dar (Benz et al., 2015). Das im Kindesalter erworbene Wissen wird in der mathematikdidaktischen Literatur meist als **informelles Wissen** bezeichnet (Benz et al., 2015). Es wird in Alltags- und Spielsituationen konstruiert (Benz et al., 2015). Konkret wird es als das „Wissen, das Kinder ohne unterrichtliche oder andere formale Unterweisung erwerben“, definiert (Benz et al., 2015, S. 5). Es stellt eine entscheidende Basis für den späteren Erwerb schulmathematischer Kompetenzen dar (Benz et al., 2015). Dies bestätigen empirische Ergebnisse aus der mathematikdidaktischen und kognitionspsychologischen Forschung bereits ab den 1990ern: Zwei wesentliche Hauptkomponenten für den späteren schulischen Erfolg sind die Qualität und Quantität der frühen mathematischen Erfahrungen (Stevenson & Stigler, 1992; Young-Loveridge et al., 1998; Schneider, 2008; Stern, 2009; Weinert & Helmke, 1997).

Aus den Ergebnissen von PISA und IGLU wird deutlich, dass Kinder, die weniger als ein Jahr lang eine Vorschuleinrichtigung besucht haben, durchschnittlich 35 Kompetenzpunkte weniger erreichen als andere, die eine längere Vorschulförderung erfahren haben (Ehmke et al., 2005, S. 250). Die Langzeitstudie LOGIK deckte dahingehend mögliche Erklärungen auf: So konnten die Leistungen von Kindern in der zweiten Klasse bis zu 25 % über die Leistungen aus dem Vorschulalter erklärt werden (Benz et al., 2015). Teilweise waren sogar mathematische Leistungen bis zur 11. Klasse und höher darauf zurückführbar (Benz et al., 2015). Mehrere Studien zur Früherkennung und Vorhersage von Rechenschwierigkeiten legen ähnliche Schlüsse nah: Bereits vor Schulbeginn können Risikofaktoren erkannt werden, die auf Schwierigkeiten beim Rechnen im Anfangsunterricht hindeuten können (Benz et al., 2015). Solche **Prädiktoren** sind unter anderem Defizite in der Mengenerfassung, dem Mengenvergleich und der Erkenntnis bezüglich Mengeninvarianzen sowie dem Vorwissen über Zahlen wie Zählfertigkeiten oder elementare Rechenstrategien (Krajewski, 2003). Hauptindikatoren stellen konkrete, zahlbezogene Kompetenzen wie das Zählen, Abzählen und Erfassen von Anzahlen dar (Dornheim, 2008). Werden vor Schulbeginn in diesen Bereichen Defizite deutlich, dann ist es wahrscheinlich, dass in den ersten beiden Schuljahren eine Rechenschwäche festgestellt wird (Dornheim, 2008). Denn Kinder mit einem schwach ausgeprägten mengen- und zahlbezogenen Wissen zeigen eine deutlich langsamere, mathematische Entwicklung als Kinder mit besseren Mengen-Zahlen-Kompetenzen (Aunola et al., 2004).

Mit gezielter Frühförderung hinsichtlich der mengen- und zahlbezogenen Kompetenzen im letzten Kindergartenjahr, unmittelbar vor Schulanfang oder bei rechenschwachen Kindern im 1. Schuljahr, sind positive Kurz- und Langzeiteffekte erzielt worden, wobei eine hohe Stigmatisierung der potenziellen Risikokinder umgehen werden konnte (Grüßing & Peter-Koop, 2008; Krajewski et al., 2008; Kaufmann, 2003; Benz et al., 2015). Damit wird deutlich, „dass es sich niemand mehr ernstlich leisten kann, die Vorschulerziehung aus der Bildungsdiskussion auszuklammern“ (Wogatzki, 1972, S. 94). Denn besonders in diesem Entwicklungsabschnitt können gezielte Begabungen entwickelt und gefördert werden sowie soziokulturell benachteiligte Kinder unterstützt werden (Wogatzki, 1972; Benz et al., 2015). Puhani und Weber (2007) betonen hierbei jedoch, dass es nicht ausreiche, früher mit schulischem oder an schulischen Methoden orientiertem Lernen zu beginnen. Vielmehr gehe es darum, die Bildungsangebote reichhaltig und **didaktisch durchdacht** zu gestalten (Benz et al., 2015). Wichtig sei demnach vor allem, „wie frühe Bildung stattfindet [. . .] und nicht, wo sie stattfindet“ (Benz et al., 2015, S. 12). Damit inkludieren Benz et al. (2015) auch die Bildungsmöglichkeiten von Kindern, die ihre Vorschulzeit zuhause verbringen.

5.1 Umsetzung der frühen mathematischen Bildung

Im Kindergartenalltag sind Mengen und Anzahlen **allgegenwärtig** (Benz et al., 2015). Es gibt zahlreiche Gelegenheiten, innerhalb von Spiel- und Erkundungsumgebungen den Kindern einen Kompetenzerwerb zu ermöglichen, um später darauf formales, mathematisches Wissen aufbauen zu können (Baroody et al., 2006). Seien es die 1:1-Zuordnungen, wenn beim Tischdecken für jede Person genau ein Teller gedeckt wird, oder dass beim Aufräumen die Gegenstände nach bestimmten Merkmalen oder Eigenschaften, wie ihrer Farbe oder Form, klassifiziert und entsprechend sortiert werden müssen (Benz et al., 2015). Es geht darum, die Würfelzahl zu erkennen und den eigenen Spielstein entsprechend viele Felder weiterzusetzen oder Lagebeziehungen wie oben, unten, links oder rechts beim Bauen oder Nachbauen mit Bausteinen zu verstehen (Benz et al., 2015). Die Erkenntnis, dass Mathematik überall zu finden ist und ein Bestandteil des kindlichen Alltagserlebens darstellt, ist nur ein erster Schritt (Benz et al., 2015).

Das mathematische Lernen geschieht nicht selbstverständlich, sondern benötigt die Unterstützung und Anregung von Erwachsenen, die diese mathematischen Zusammenhänge erkennen und nutzen (Benz et al., 2015). Denn Mathematik entsteht nicht einfach nebenbei, sondern muss **aktiv konstruiert** werden (Benz et al., 2015). Die Lernbegleiter:innen helfen den Kindern dann dabei, die mathematischen Entdeckungen bewusst und so auch für andere Kontexte oder Situationen nutzbar zu machen (Benz et al., 2015). Dies ist oft nicht planbar, sondern erfordert eine hohe didaktische Kompetenz der Betreuenden (Benz et al., 2015). Über Reflexion mit den Kindern sind so vielfältige, mathematische Bildungsprozesse möglich. Entscheidend ist dabei die **Individualisierung und Differenzierung** seitens der Betreuenden in diesen freien Spielphasen, sodass jedem Kind entsprechend der individuellen Präferenzen, Motivationen und Wissensstände Antworten gegeben werden können (Benz et al., 2015). Dieses Eingehen auf die individuellen Interessen und Schwierigkeiten der Kinder ist keineswegs zu unterschätzen, da sich nur so die Lernanreize und -angebote an das Kind anpassen (Benz et al., 2015). So lernen Kinder nicht unter Zwang, sondern in der Auseinandersetzung mit ihren Interessen (Benz et al., 2015). Auch verlangt das ein breites mathematisches, fachdidaktisches und methodisches Wissen über passende Fördermaßnahmen (Benz et al., 2015).

Weiterhin müssen die Kinder auch **sprachlich angemessen** begleitet werden, das heißt, dass die mathematischen Entdeckungen konkret benannt und die Kinder darin unterstützt werden sollten, ihre Ideen, Erkundungen und Beobachtungen sprachlich auszudrücken (Benz et al., 2015). Denn oftmals wird die Sprache als Schlüssel zum Lernen und als Ausdruck des Gelernten aufgefasst (Benz et al., 2015).

Hinsichtlich der Umsetzung der frühkindlichen Förderung lassen sich zwei grundsätzlich verschiedene Vorgehensweisen finden: die spielbasierte, kindorientierte Förderung und der fachlich orientierte Förderansatz im Sinne von verschulten Trainingsprogrammen (Marcon, 1999, 2002). Zwar zeigen die verschulten Trainingsprogramme kurzfristige Erfolge, allerdings wiesen die Kinder, die an einer kindorientierten Förderung teilnahmen, nicht nur höhere mathematische Kompetenzen auf, sondern auch eine höhere Motivation (Marcon, 1999, 2002; Stipek et al., 1995). Aus den Studien von Marcon (1999, 2002) und Puhani und Weber (2007) lässt sich daher ableiten, dass die optimale Organisation des frühkindlichen Lernens nicht über schulische, formale Lernsituationen, sondern über **kindzentrierte, spielerische Ansätze** erfolgen sollte (Benz et al., 2015). In diesem Sinne stellen besonders auch Lernspiele einen geeigneten Zugang zu mathematischen Inhalten dar (vgl. Benz et al., 2015).

5.2 Anschlussfähigkeit der frühen mathematischen Bildung

Untersuchungen aus dem deutschsprachigen Raum zu den mathematischen Vorkenntnissen von Schulanfänger:innen zeigen, dass viele Kinder informelles Wissen in einem hohen Maß aus der Kindergartenzeit mitbringen (Schmidt & Weiser, 1982; Hengartner & Röthlisberg, 1995; Selter, 1995).

Damit besitzen die meisten Kinder bereits bei Schulbeginn umfangreiches, mathematisches Wissen, das sich auf unterschiedliche mathematische Sachverhalte und Zusammenhänge bezieht (Benz et al., 2015; Krajewski et al., 2009). Diese Vorkenntnisse und Erfahrungen sind jedoch oft sehr unterschiedlich, was zu einer großen **Leistungsheterogenität** bei Schulbeginn führen kann (Benz et al., 2015). Nicht nur deshalb ist Differenzierung im Mathematikunterricht unabdingbar, damit die Schüler:innen formale, mathematische Kompetenzen aufbauen können und Schemata etablieren (Benz et al., 2015).

Allerdings entwickeln sich die **gewünschten, formalen Kompetenzen** nicht automatisch aus dem informellen Wissen heraus, wie eine Untersuchung mit brasilianischen Straßenkindern zeigt (Nunes et al., 1993; Schuler, 2013). Die Kinder halfen ihrer Familie beim Verkauf von Produkten auf der Straße, wodurch sie in der Lage waren, die Preise mehrerer Artikel zu addieren und das Wechselgeld zu bestimmen (Nunes et al., 1993). Dieses Wissen über Addition und Subtraktion war jedoch nur im Kontext der Verkaufssituation anwendbar (Nunes et al., 1993). Galt es, das Wissen zu abstrahieren, zeigten sie Schwierigkeiten (Nunes et al., 1993). Schipper (2002, 2009) konkludiert deshalb: „Viele Schulanfänger[:innen] sind gute Straßenmathematiker[:innen], jedoch keine guten Schulmathematiker[:innen]“ (S. 134). Zwar sollen den Kindern vielfältige Möglichkeiten eröffnet werden, informelles Wissen als Grundlage zu erwerben, jedoch muss daraus in der Unterrichtsgestaltung konkret die Formalisierung abgeleitet und eingeübt werden (Benz et al., 2015). Hierbei gilt es, gezielte Anknüpfungspunkte aus dem informellen Wissen zu ermöglichen, sodass die Rechenprinzipien intuitiv erworben werden können (Benz et al., 2015). Je reichhaltiger das informelle Wissen dabei ist, desto mehr Möglichkeiten bietet es, formal ausgebaut werden zu können (Benz et al., 2015). Dadurch wird die Relevanz der vielfältigen frühen mathematischen Bildung erneut deutlich.

6 Digitale Werkzeuge und Multi-Touch-Geräte

Auf Grundlage der stetigen Weiterentwicklung der Technologie eröffnen sich zahlreiche Potenziale und Möglichkeiten zur **Unterstützung mathematischer Lehr- und Lernprozesse** mithilfe von digitalen Werkzeugen (Ladel, 2016). Doch „[s]imply having a piece of technology is not enough to increase student learning“ (Andrews, 2011, S. 474). Die Konzepte für den Einsatz digitaler Medien müssen stets evaluiert und aufbereitet werden und können nicht unüberlegt eingesetzt werden (Ladel, 2016).

Ein oft genanntes Gegenargument zum Einsatz digitaler Medien bei dem Erwerb mathematischer Inhalte ist, dass Kinder nicht an **konkreten Materialien** arbeiten würden (Ladel, 2016). Hintergrund dessen ist, dass sich mathematische Lernprozesse wie der Zahlbegriffserwerb auf Handlungen mit konkreten Materialien, zumindest zu Beginn, stützen (Ladel, 2016). Ladel (2016) hebt diesbezüglich hervor, dass „konkret“ nicht mit „physisch“ gleichgesetzt werden kann. Stattdessen beziehe sich das „konkret“ auf die Zielgerichtetheit und Bewusstheit in der Handlung selbst (Ladel, 2016). Damit sei es irrelevant, ob die Handlungsprozesse physischer oder virtueller Natur sind (Ladel, 2016).

Im Nachfolgenden werden zuerst positive Effekte von wirksam eingesetzten, digitalen Werkzeugen benannt. Anschließend werden konkrete Vorteile und Überlegungen zu Multi-Touch-Geräten dargelegt und schließlich Hinweise zur allgemeinen Gestaltung entlang von Designtheorien zu digitalen Medien erläutert. Im Fokus stehen dabei stets die Aspekte rund um Fingu, sei es das Format, die Aufbereitung oder das mathematische Objekt des Zahlerwerbs.

6.1 Positive Effekte von digitalen Werkzeugen

Metastudien zeigen, dass die Verwendung digitaler Hilfsmittel einen positiven Effekt auf die Lernergebnisse der Schüler:innen im Vergleich zu einer Kontrollgruppe ohne digitale Medien hat (Hillmayr et al., 2020). Im Mathematikunterricht wird dieser positive Effekt in der mathematischen **Leistung und Motivation** deutlich (Gunbas, 2015; Greefrath et al., 2018; Higgins et al., 2019; Huppert et al., 2002; Koklu & Topcu, 2012; Ladel, 2017; Özyurt et al., 2014; Turk & Akyuz, 2016). Ein signifikanter Einfluss stellt hierbei unter anderem die Schulung der Lehrkraft in der Verwendung des digitalen Mediums dar (Hillmayr et al., 2020). Ladel und Kortenkamp (2016) führen als weitere Einflussfaktoren noch die Vorkenntnisse der Schüler:innen sowie die mathematischen, didaktischen und pädagogischen Kompetenzen der Lehrkraft sowie der Klasse insgesamt an. Zuletzt ist der Erfolg eines digitalen Werkzeugs auch immer abhängig von der fachlichen, didaktischen und gestalterischen Aufarbeitung des digitalen Mediums selbst (Ladel, 2017). Hillmayr et al. (2020) stellen verschiedene Hypothesen für den positiven Effekt von digitalen Medien auf:

Die generelle **Veränderung des Unterrichts-Settings** durch den Einsatz von digitalen Werkzeugen kann eine Abwechslung zum gewohnten Unterrichtsformat darstellen und so Einfluss ausüben (Koolstra, 2001; Krauthausen, 2012). Meistens wird betont, dass über das Verwenden digitaler Medien die **Interaktivität** in den Fokus rückt (Hillmayr et al., 2020).

Moreno und Mayer (2007) benennen die dadurch hervorgerufene kognitive Aktivität als Schlüsselelement für tiefgründiges Lernen (S. 312). Darüber hinaus bieten bedeutungshaltige Kontexte, in die die mathematischen Probleme eingebettet sind, Anknüpfungspunkte für eine vielfältige Wissensvernetzung (Koolstra, 2001; Krauthausen, 2012). Auch bei digitalen Spielen auf Multi-Touch-Bildschirmen sind positive Effekte erkennbar (Moyer-Packenham et al., 2015; Risconscente, 2013). Weil in digitalen Spielen Fehler oft nicht als so fatal angesehen und Wiederholungsmöglichkeiten angeboten werden, trauen sich die Lernenden mehr zu und sind aktiver als im traditionellen Unterricht (Koolstra, 2001).

Der entscheidende Vorteil von digitalen Werkzeugen ist das **direkte, individuelle Feedback**, was Lernende meist über visuelle Hinweise erhalten (Hillmayr et al., 2020). Alle Arten von Feedback zeigen dabei bereits positive Effekte (Van der Kleij et al., 2015). Hattie und Timperley (2007) stellen heraus, dass der positive Effekt bei erklärendem Feedback höher ist als bei korrektivem Feedback. Unter korrektivem Feedback verstehen Moreno und Mayer (2007) die Rückmeldung an die Lernenden, ob ihre Antwort richtig oder falsch ist. Erklärendes Feedback inkludiert auch die Erklärung, warum ihre Antwort inkorrekt oder korrekt ist, und hilft damit, Fehlvorstellungen abzubauen (Hattie & Timperley, 2007). Besonders im Fach Mathematik ist der Abbau von Fehlkonzeptionen und das Erkennen von eigenen Fehlern, um sie im Anschluss vermeiden zu können, entscheidend (Lortie-Forgues et al., 2015; Obersteiner et al., 2016).

Außerdem bieten digitale Werkzeuge oft einen Ansatzpunkt für **Differenzierung** und Adaptivität (Koolstra, 2001; Krauthausen, 2012). Meist kann man neben individuellem Feedback auch verschiedene Schwierigkeitsstufen oder Hilfen auswählen, was es ermöglicht, einfacher auf unterschiedliche Lernstände sachgerecht einzugehen (Koolstra, 2001; Krauthausen, 2012). Teilweise sind die Werkzeuge auch so adaptiv, dass abhängig von den Antworten der Schüler:innen unterschiedliche Wege und Erklärungen auftreten (Reinhold et al., 2020). Damit erhalten die Lernenden, abhängig von ihrem Lerntempo oder auch ihrer Lernweise, angepasste Inhalte, was besonders fördernd bei dem Erlernen neuer, abstrakter mathematischer Konzepte ist (Reinhold et al., 2020; Özyurt et al., 2014). Wenn Lernende selbst das Lerntempo bestimmen können, sind nicht nur bessere Lernergebnisse zu erkennen (Hillmayr et al., 2020), sondern werden die Aufgaben auch als weniger kompliziert oder schwierig klassifiziert, als wenn die Lernenden ihr Lerntempo nicht selbst bestimmen konnten (Moreno, 2006).

Darüber hinaus zeigen Studien, dass der Einsatz digitaler Werkzeuge zu einer **produktiveren Gruppenarbeit** unter den Lernenden führe als ohne diese Technologien (Frailich et al., 2009). Diesbezüglich stellt Bayraktar (2001/2002) heraus, dass jedoch der positive Effekt der digitalen Medien höher ist, wenn Schüler:innen die Medien allein nutzen können. Hillmayr et al. (2020) kommen allerdings zu anderen Ergebnissen: Die paarweise Verwendung von digitalen Medien sei dabei die effektivste Variante. Sie hypothetisieren, dass dies an einer erhöhten Interaktivität und Kommunikation von Denkprozessen liegt (Hillmayr et al., 2020). Ladel und Kortenkamp (2013) unterstützen diese Aussage in ihrer Studie zu Multi-Touch-sensitiven, tischgroßen Bildschirmen.

Trotz dieser vielen, positiven Einflüsse betonen Wissenschaftler:innen, dass die Verwendung von digitalen Werkzeugen **in Ergänzung** zu den traditionellen Methoden geschehen sollte und nicht als dessen Ersatz (Hillmayr et al., 2020; Bayraktar, 2001/2002; Cheung & Slavin, 2013). Besonders im frühen Lernen von Mathematik sollten digitale Medien ausschließlich als Zusatz zu physischen Materialien eingesetzt werden (Ladel, 2016).

6.2 Verwendung von Multi-Touch-Geräten

Die Interaktion zwischen Mensch und digitalen Werkzeugen entwickelte sich von der indirekten Bedienung über eine Tastatur oder eine Computermaus hin zur **direkten Bedienung** über eine berührungssensitive Oberfläche, dem Touchscreen (Ladel & Kortenkamp, 2013). Letzteres bildete sich besonders schnell nach der Einführung des iPads aus, sodass rasch Multi-Touch-Bedienungsoberflächen für alle Altersgruppen bereitgestellt wurden (Ladel & Kortenkamp, 2013).

Die Eingabe über eine **Tastatur oder Computermaus** hatte insbesondere für Kleinkinder zahlreiche Nachteile: Das Bedienen erfordert eine ausreichende visuomotorische Koordination, insbesondere eine ausgeprägte Hand-Augen-Koordination, weil die Hand an einer anderen Stelle agiert als die Reaktion am Mauszeiger auf dem Bildschirm zu erkennen ist (Franke, 2008). Zudem entspricht die Strecke, die die Maus bewegt wird, nicht immer der Distanz, die der Mauszeiger auf dem Bildschirm zurücklegt (Ladel & Kortenkamp, 2012). Da die Hand-Augen-Koordination von Kleinkindern oft noch nicht vollständig entwickelt ist, zeigen besonders sie Probleme im Umgang mit diesen Mitteln (Ladel & Kortenkamp, 2012).

Wird hingegen ein **Touchscreen** verwendet, können die Kinder direkt mit den Fingern mit den Objekten am Bildschirm interagieren (Ladel, 2017). Segal (2011) stellt heraus, dass Kinder, die an Touchscreens arbeiteten, bessere Ergebnisse erzielen, als Kinder, die über eine Maus arbeiteten. Dies könnte damit zusammenhängen, dass die **direkte Manipulation** den Kindern mehr Kontrolle über ihre Handlungen gibt und sie sich aufgrund weniger Barrieren eher darauf konzentrieren können, die Aufgabe zu bewältigen, als darauf, wie die Eingabe dazu funktioniert (Segal, 2011). Das zunehmende Aufkommen von Touchscreens und der damit einhergehenden Manipulation von Objekten ermöglicht es Kindern, direkt mit virtuellen Werkzeugen interaktiv und auf einer natürlicheren Art und Weise mit den Elementen zu arbeiten (Ladel & Kortenkamp, 2012). Damit werden die Lernenden darin unterstützt, den Lerninhalt einfach zu erfassen, ohne dem Lernprozess unnötige Komplexität hinzuzufügen (Ladel & Kortenkamp, 2013). Da iPads eine passende Größe besitzen, um eindeutige Berührungen durchführen zu können, ohne dass das Gerät selbst zu sperrig ist, führen immer mehr Vor- und Grundschulen Tablets ein, um Chancen für enaktive Lernprozesse zu eröffnen (Baccaglini-Frank & Maracci, 2015; Ladel, 2016).

Die Errungenschaft, dass bei Multi-Touch-Geräten **mehrere Berührungen** auf dem Bildschirm erkannt und in Aktionen oder Events innerhalb der Bedienungsoberfläche umgewandelt werden können, bildet Raum für vielfältige, mathematische Erfahrungen (Ladel & Kortenkamp, 2013).

So können Kinder mit mehreren Fingern gleichzeitig mit den Elementen arbeiten, statt immer nur einen einzigen Finger verwenden zu dürfen (Ladel & Kortenkamp, 2012). Damit sind sogenannte **kongruente Gesten** möglich, also Aktionen, die mit dem dahinter liegenden, mathematischen Konzept übereinstimmen (Broda et al., 2019; Segal et al., 2014). Dies kann sich positiv auf das Ausbilden mathematischer Konzepte und Grundvorstellungen auswirken (Sinclair & de Freitas, 2014; Tucker, 2018) - auch schon bei Vorschulkindern (Nacher et al., 2015).

Tucker und Johnson (2020) heben das Potenzial von Multi-Touch-Geräten explizit für die Entwicklung und Ausbildung des **Zahlensinns** hervor. Gesten, die Unterschiede zwischen dem Zählen und der Simultandarstellung zulassen, sind besonders interessant für das Repräsentieren von Anzahlen (Baccaglini-Frank et al., 2020; Sedaghatjou & Campbell, 2017; Sinclair & de Freitas, 2014). Exemplarische Gesten dieser Art wären das sequenzielle oder gleichzeitige Berühren von Objekten auf einem Bildschirm. Bei Computereingaben waren stets nur ordinale Konzepte über schrittweises Anklicken zu erfassen, wohingegen Multi-Touch-Bildschirme auch kardinale Konzepte über simultanes Tippen ermöglicht (Ladel & Kortenkamp, 2012). Aus diesen Gründen kann davon ausgegangen werden, dass Kinder durch digitale Hilfsmittel auch in der Entwicklung eines Zahlenverständnisses nachhaltig unterstützt werden können (Ladel, 2016).

6.3 Design von digitalen Lernumgebungen

Damit die digitalen Lernumgebungen tatsächlich die Effekte erbringen können, die eben beschrieben wurden, müssen sie entsprechend gestaltet werden (Bellamy, 1996). In der Auseinandersetzung mit geeigneten Designprinzipien wird sich oft auf die *Cognitive Theory of Multimedia Learning* von Mayer (2014) oder auf die *Cognitive-Affective Theory of Learning with Media* (CATLM) von Moreno und Mayer (2007) bezogen. Nachfolgend werden die Hauptaussagen dieser Theorien zusammengefasst und in dem Modell veranschaulicht.

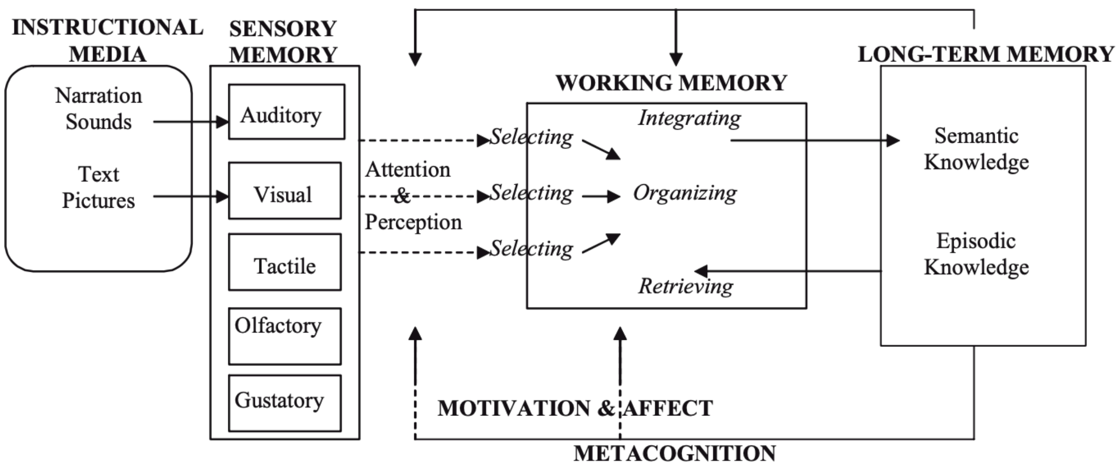

Abbildung 3: Visualisierung der *Cognitive-Affective Theory of Learning with Media* (Moreno & Mayer, 2007, S. 314).

Entsprechend der CATLM bestehen die im Unterricht verwendeten Medien, *the Instructional Media*, aus Geräuschen, Musik, Erzählungen, Texten und Bildern (Moreno & Mayer, 2007). Diese werden über **sensorische Kanäle** aufgenommen und verarbeitet (Moreno & Mayer, 2007). Jeder dieser Kanäle verarbeitet verschiedene Modalitäten der Informationen und ist in dieser Informationsverarbeitung begrenzt (vgl. Baddeley, 1992). Mayer (2014) spricht von der *Limited Capacity* eines Kanals. Das stimmt mit der Theorie von Sweller (1999) überein, dass nur wenige Informationen gleichzeitig im Arbeitsgedächtnis des jeweiligen Kanals verarbeitet werden können. Aus diesem Grund sei es von Vorteil, wenn im Lernprozess mehrere Kanäle stimuliert werden, ohne jedoch eine kognitive Überlastung herbeizuführen (Mayer, 2014).

Abhängig von Aufmerksamkeits- und Wahrnehmungsprozessen findet eine (unbewusste) **Auswahl an Informationen** aus den Kanälen statt (Moreno & Mayer, 2007). Die relevanten, verbalen und non-verbalen Informationen werden dann im Arbeitsgedächtnis mit dem Langzeitgedächtnis verglichen, die Informationen integriert und organisiert oder Informationen aus dem Langzeitgedächtnis abgerufen (Moreno & Mayer, 2007). So findet Lernen statt (Moreno & Mayer, 2007). Motivation und Metakognition wirken sich ebenfalls auf die kognitive Aufarbeitung aus (Pintrich, 2003; McGuiness, 1990; Moreno & Mayer, 2007).

Das Langzeitgedächtnis wird in dieser Theorie als dynamische, sich entwickelnde Struktur interpretiert (Tulving, 1977). Dabei werden unter anderem auch Vorkenntnisse und Fähigkeiten mit dem technischen Medium mit einbezogen (Kalyuaga et al., 2003). Denn das Medium beeinflusst die Interaktivität und damit auch den Lernprozess der Lernenden (Mayer, 2014). Hillmayr et al. (2020) kategorisieren die **Interaktivität** in dialogische Anteile, die Informationen oder Feedback an die Lernenden geben, in kontrollierende Anteile, bei denen die Lernenden über die Schnelligkeit oder Reihenfolge der präsentierten Informationen entscheiden können, und zuletzt die manipulierenden Anteile, bei denen es konkret um die direkte Interaktion und Veränderung der gezeigten Informationen geht, beispielsweise das Vergrößern oder Bewegen von Objekten.

Aus diesen Theorien lassen sich sogenannte *Cognitive Principles of Instructional Design* ableiten (Moreno & Mayer, 2007):

- Das *Verbal Redundany Principle* besagt, dass verbale Informationen ausschließlich über den auditiven Kanal aufgenommen werden sollten, da mehrfach dargestellte Informationen nicht sinnvoll verarbeitet werden können (Moreno & Mayer, 2007).

- Das *Personalization Principle* meint, dass Erklärungen in einem umgangssprachlichen Ton durchgeführt werden sollten, um kognitive Hürden abzubauen (Moreno & Mayer, 2007).

- Verbale und nonverbale Informationen sollten zeitlich und räumlich synchron gezeigt werden (*Temporal Contiguity and Spation Contiguity Principles*) (Moreno & Mayer, 2007).

- Nach dem *Coherence* oder *Redundancy Principle* sollten redundante Informationen nicht inkludiert und sich stattdessen lediglich auf die wesentlichen Informationen fokussiert werden (Moreno & Mayer, 2007).

- Moreno und Mayer (2007) behaupten weiterhin, dass Lernende bessere Ergebnisse erzählen, wenn sie mit einem pädagogischen Mittler interagieren können, die den kognitiven Verarbeitungsprozess leiten – insofern als eine *guided activity* und ausreichend Scaffoldingmöglichkeiten verfügbar sind (Moreno & Mayer, 2007). Das würde ihnen Sicherheit im Lernprozess geben (Moreno & Mayer, 2007).

- Weiterhin sollten Lernende ihre richtigen Antworten reflektieren, um so den Sinn hinter den Prozessen besser zu erkennen (Moreno & Mayer, 2007).

- Sie sollen darüber hinaus Feedback erhalten, besonders erklärendes statt korrektivem (Moreno & Mayer, 2007).

- Schließlich sollen sie ihr Lerntempo und die Auswahl der Materialien selbst beeinflussen können (Moreno & Mayer, 2007).

Unter Einhaltung dieser Designprinzipien sollte eine gewinnbringende, digitale Lernumgebung gestaltet werden können (Moreno & Mayer, 2007).

7 Das Lernspiel Fingu

Die App Fingu wurde als Forschungsinstrument entwickelt, um zu untersuchen, inwieweit Kinder mathematische Fähigkeiten durch die Benutzung eines Spiels ausbilden, welches auf die *Embodied Cognition* abzielt (Barendregt et al., 2012). Sie ist im AppStore kostenlos sowohl für den privaten, als auch für den Schul- und Forschungsgebrauch in englischer sowie in schwedischer Sprache zugänglich (Barendregt et al., 2012). Tucker und Johnson (2020) beschreiben die iPad-App als ein digitales, Multi-Touch-integrierendes Spiel, das auf die Förderung des *early number sense* und die arithmetische Kompetenz der Kinder abzielt und dazu innerhalb eines begrenzten Zeitraums ein bis zehn Elemente darstellt (vgl. Holgersson et al., 2016). Nach der Charakterisierung von Nattland und Kerres (2009) entspricht Fingu einem *Drill and Practice Programm*, das dazu dient, inhaltliches Wissen und Fertigkeiten zu stärken, was ggf. im Vorfeld erworben wurde (Hillmayr et al., 2020). In diesem Fall handelt es sich dabei um das Wahrnehmen von Elementen, das Erkennen von Anzahlen, die Darstellung von Zahlen mithilfe von Fingern, Fingerfertigkeiten und den Entwickler:innen zufolge dem Teil-Ganze-Verständnis (vgl. Holgersson et al., 2016). Die Lernenden können die einzelnen Level in ihrem eigenem Tempo üben und sie so oft wie nötig wiederholen (Hillmayr et al., 2020).

Im Folgenden werden die App und ihre Funktionalitäten ausführlich dargestellt und anschließend Aussagen der Entwickler:innen zur App und zum Design aufgeführt. Abschließend werden diese Erkenntnisse in der theoretischen Analyse nach ACAT aufgegriffen.

7.1 Beschreibung der App und ihrer Funktionalitäten

Beim Starten der App öffnet sich der Startbildschirm. Darauf ist das Logo von Fingu, eine violette Hand mit zwei Augen und einem Mund, sowie ein Fragezeichen zu sehen. Das Anklicken des Logos führt zur Spielübersicht, über das Tippen auf das Fragezeichen öffnet sich eine Erklärungsseite.

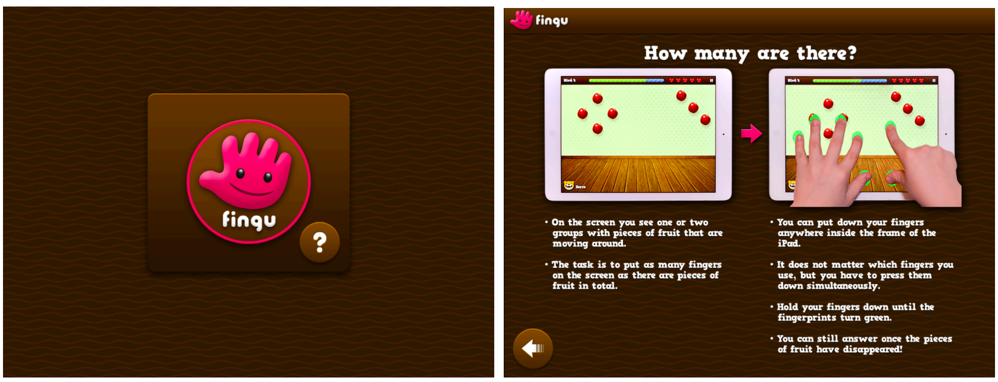

Abbildung 4: Startbildschirm (links) und Erklärungsseite (rechts) von Fingu (eigene Screenshots).

Die **Erklärungsseite** gliedert sich in zwei Spalten. Oben ist jeweils ein weißes iPad abgebildet, worauf die Spieloberfläche zu sehen ist. Auf der linken Seite sind zwei Sets von Früchten zu sehen, eines mit vier und eines mit drei Äpfeln.

Auf der rechten Seite sind Kinderhände zu sehen, die den Bildschirm berühren. Dies wird deutlich an den grünen Fingerabdrücken, die nun zusätzlich unter jedem Finger erscheinen. Es berühren die fünf Finger der linken Hand und der Daumen und Zeigefinger der rechten Hand den Bildschirm[5]. Verbunden werden die beiden Abbildungen über einen violetten Pfeil. Über der Abbildung steht „*How many are there?*“ und unter jedem Bild stehen weitere Erklärungen, die übersetzt aussagen:

- Auf dem Bildschirm sind ein oder zwei Sets von Früchten zu sehen, die sich bewegen.
- Aufgabe ist es, so viele Finger auf dem Bildschirm zu platzieren, wie Früchte insgesamt gezeigt werden.
- Dabei können die Finger überall auf den Bildschirm gelegt werden.
- Es ist weiterhin irrelevant, welche Finger genutzt werden, solange sie gleichzeitig auf den Bildschirm gedrückt und gehalten werden, bis die Fingerabdrücke grün werden.
- Es kann immer noch eine Antwort gegeben werden, nachdem die Früchte ausgeblendet wurden.

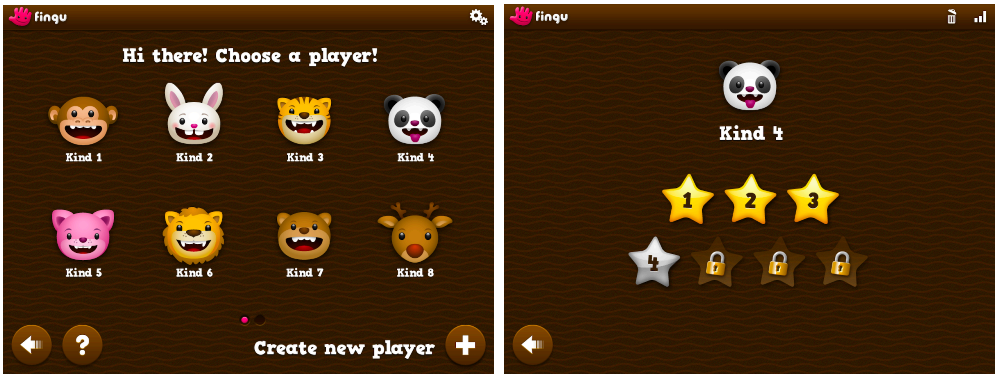

Abbildung 5: Spielübersicht (links) und exemplarisches Profil (rechts) von Fingu (eigene Screenshots).

Bei der **Spielübersicht** werden die Avatare der Spielenden mit Namen angezeigt. Darüber hinaus wird über den Pfeil in der linken, unteren Ecke zurück zum Startbildschirm und über das Fragezeichen zur Erklärungsseite verwiesen. In der oberen, rechten Ecke befindet sich ein Symbol mit Zahnrädern, das bei Berührung die Einstellungen öffnet. Das Plus-Symbol in der rechten, unteren Ecke führt zum Erstellen eines neuen Profils, bei der sich das Kind zuerst ein Avatarbild aus 30 möglichen Figuren ausgesucht und dieses dann benannt wird. Über die Auswahl eines Avatars gelangt man zu seinem Profil. Das Spiel speichert den Fortschritt von bis zu 24 Spieler:innen (Barendregt et al., 2012). Damit können die Spielenden über die Auswahl ihres Avatarbildes auf das Profil das Spiel an der Stelle, an der sie aufhörten, weiter fortsetzen (Barendregt et al., 2012).

[5]Spannend ist hier, dass damit bereits das von den Entwickler:innen gewünschte Teil-Ganze-Verständnis über Darstellung der Zahlen in semi-dezimaler Form visuell implementiert ist, auch wenn die Erklärungen das nicht explizit hervorheben.

Das **Profil** eines Spielenden beinhaltet das Avatarbild und den gewählten Namen sowie die Levelübersicht in Sternform, wobei die Sterne gelb ausgefüllt werden, sobald sie bewältigt wurden. Zudem kann das Profil über das Mülleimer-Symbol in der rechten, oberen Ecke gelöscht sowie Statistiken zu dem Profil über das Balkendiagramm-Symbol aufgerufen werden.

Über das Berühren eines Sterns wird ein **Level** ausgewählt. Das Level selbst ist so aufgebaut, dass im Hintergrund eine Wand und ein Fußboden dargestellt werden, die einen Teil eines Raumes symbolisieren. Darin werden schließlich die Aufgabensets (bewegt) angezeigt. Gleichzeitig entspricht es dem Bereich, wo die Finger zu platzieren sind. Unten auf dem Bildschirm ist das Avatarbild sowie der Name des Profils zu sehen. Oben im Bildschirm ist eine Leiste zu erkennen, bei der von links nach rechts das Level, die Zeitleiste in grün, die Lebensleiste in Herzen und das Pausensymbol aufgereiht sind. Drückt man auf das Pausensymbol, wird das Level an der Stelle angehalten, das Fingu-Logo mit geschlossenen Augen angezeigt, ein Haus-Symbol und ein Weiter-Symbol. Klickt man auf das Haus-Symbol, gelangt man zurück zum Profil. Klickt man auf den Pfeil, wird das Level sofort weitergespielt. Nachdem die Aufgabensets angezeigt wurden, wird Feedback gezeigt: Dabei sieht man eine Zwiebel mit einem ratlosen Gesichtsausdruck bei einer falschen Antwort oder eine tanzende Banane, einen Muffin und ein Eis mit fröhlichen Gesichtern bei einer richtigen Antwort (vgl. Abbildung 6). Läuft die Zeit ab, bevor eine Antwort gegeben wurde, erscheint eine Uhr an deren Stelle.

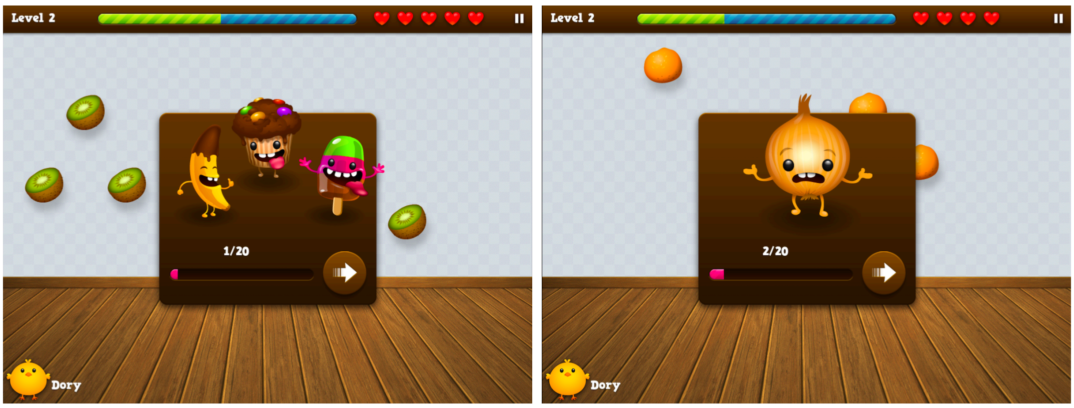

Abbildung 6: Positives Feedback zur Aufgabe 3b+2a (links) und negatives Feedback zur Aufgabe 1a+2a (rechts), beide beantwortet mit allen fünf Fingern der rechten Hand (eigene Screenshots).

Im Hintergrund wird immer **Musik** gespielt. Bei den Leveln ist es eine relativ schnelle, heitere Musik, wobei verschiedene Töne je nach Richtigkeit der Lösung zusätzlich eingespielt werden. In allen anderen Modi der App erklingt eher ruhige Musik.

Um Profile zu löschen oder um die Einstellungen der App anzupassen, muss eine zufällig generierte, höhere Additionsaufgabe gelöst werden, beispielsweise $41 + 36$. Die richtige Lösung muss dann aus sechs möglichen Antworten ausgewählt werden. In den **Einstellungen** können bestimmte Parameter angepasst oder auf ihre ursprünglichen Werte zurückgesetzt, die Logs der Profile abgerufen und ein Passwort für die Einstellungen bestimmt werden.

Über die log-Dateien wird das Spielverhalten der Kinder, inklusive deren Antwortzeit und Platzierung der Finger, für eine weitere Analyse aufgezeichnet (Holgersson et al., 2016). Diese Daten können im System als xml-Dateien gespeichert und für eine weitere Analyse verwendet werden. Das Erstellen einer log-Datei ist optional und soll so die Untersuchung und Beforschung des Programms vereinfachen (Holgersson et al., 2016). Die für die im Weiteren relevanten, anpassbaren Parameter sind:

- *Answer Time First*: Die Zeit zur Bearbeitung einer Aufgabe beim ersten Präsentieren, standardmäßig sechs Sekunden.
- *Answer Time Second*: Die Zeit zur Bearbeitung von Aufgaben, die bereits einmal richtig gelöst wurden, standardmäßig vier Sekunden.
- *Exposure Time First*: Die Erscheinungszeit der Objekte beim ersten Präsentieren, standardmäßig vier Sekunden.
- *Exposure Time Second*: Die Erscheinungszeit der Objekte bei Aufgaben, die bereits einmal richtig gelöst wurden, standardmäßig zwei Sekunden.
- *Lives*: Anzahl an Leben oder Herzen, die zu Beginn eines jeden Levels vorhanden sind, standardmäßig fünf Herzen.
- *Object Distance*: Abstand zwischen den Sets, standardmäßig 100.
- *Object Scale*: Skalierung der Sets, standardmäßig 1.
- *Object Speed*: Geschwindigkeit, mit der sich die Objekte bewegen, standardmäßig 50.
- *Touch Input Latency*: Zeit zwischen dem Berühren des Bildschirms und der Registrierung des Inputs, standardmäßig 0.25 Sekunden.
- *Music Volume*: Lautstärke der Musik, standardmäßig bei 0.5.
- *Sound Volume*: Lautstärke von Sounds, standardmäßig bei 0.8.

7.1.1 Progression im Spiel

Ziel der App ist es, dass die Spielenden „*progress through different levels of the game, making as few wrong answers as possible*“ (Holgersson et al., 2016, p. 125). Jedes Level besteht dabei aus einer Reihe von Aufgaben, wobei die Level zunehmend anspruchsvoller werden (Holgersson et al., 2016). Insgesamt existieren sieben Level, unterdessen in jedem Level eine bestimmte Anzahl von Zahlenkonfigurationen[6] zweimal in unterschiedlicher Reihenfolge gezeigt werden (Barendregt et al., 2012). Insgesamt sind 60 Aufgaben möglich, aus denen zufällig ausgewählt wird (Tucker & Johnson, 2020). Es gibt 20 bis 30 Aufgaben pro Level (Barendregt et al., 2012). Im ersten Level ist die maximale Anzahl an Früchten fünf, im zweiten sechs, im dritten sieben, sodass zehn Früchte ab einem Level von sechs und sieben gezeigt werden (Barendregt et al., 2012).

[6]Es sind 10, 12 oder 15 verschiedene Konfigurationen pro Level (Tucker & Johnson, 2020).

Pro Level werden auch weitere Konfigurationen eingeführt (Barendregt et al., 2012).

Das Kind gelangt zum nächsten Level, wenn es in dem bearbeiteten Level die meisten Aufgaben richtig beantworten konnte (Barendregt et al., 2012). Gibt das Kind eine falsche Antwort, dann verliert es ein Herz (Barendregt et al., 2012). Um zum nächsten Level fortschreiten zu können, dürfen die Spielenden nicht mehr als eine bestimmte Anzahl von Herzen verlieren, die in der oberen rechten Ecke des Bildschirms visualisiert sind (Holgersson et al., 2016). Verliert das Kind alle Herzen, bevor es alle Aufgaben des Levels absolviert hat, muss es an diesem Level neu starten (Barendregt et al., 2012).

7.1.2 Ablauf der Aufgaben

Pro Aufgabe werden ein oder zwei Sets an sich bewegenden Früchten auf dem Bildschirm gezeigt (Holgersson et al., 2016). Die Spielenden sollen dann die **Gesamtanzahl der Früchte** bestimmen und, bevor die Zeit abläuft, entsprechend viele Finger auf dem Bildschirm platzieren (Barendregt et al., 2012). Die Sets an Früchten sind nur für eine kurze Zeitperiode sichtbar (*Exposure Time*) (Barendregt et al., 2012). Nachdem die Früchte ausgeblendet wurden, haben die Spielenden jedoch noch Zeit, um zu antworten (Barendregt et al., 2012). Sobald die Finger auf dem Bildschirm liegen, startet ein Timer zur Registrierung der Antwort (*Touch Input Latency*)(Barendregt et al., 2012). Dieser Timer wird über weiße Fingerabdrücke visualisiert, deren Farbe anzeigt, dass die Antwort eingeloggt wird (Barendregt et al., 2012; Ladel, 2017). Während dieser Zeit kann die Antwort noch verändert werden, indem Spielende Finger hinzufügen oder wegnehmen können oder indem sie die Finger wieder vom Bildschirm lösen und in einer neuen Konfiguration auf dem Bildschirm platzieren (Barendregt et al., 2012). Der Timer wird dann wieder von Neuem gestartet, sodass die Konfiguration lang genug gehalten werden muss (Barendregt et al., 2012). Die Besonderheit hierbei liegt darin, dass die Finger dadurch ungefähr gleichzeitig auf den Bildschirm gelegt werden müssen und ein langsames, schrittweises Hinzufügen zu einer falschen Lösung führt, da die Antwort zu früh registriert wird (Holgersson et al., 2016). Damit soll die Simultandarstellung der Zahlen forciert werden, anstatt die ordinale Zählweise zuzulassen. Ist die Antwort schließlich richtig, leuchten die Fingerabdrücke in grün auf, ist sie falsch, in rot (Barendregt et al., 2012). Anschließend werden die Fingerabdrücke wieder ausgeblendet und das Feedbackfenster wird sichtbar (vgl. Abbildung 6). Damit gibt die App direktes, korrektives Feedback (Holgersson et al., 2016).

Jedes Lösen einer Aufgabe bei Fingu kann Barendregt et al. (2012) zufolge in zwei Phasen eingeteilt werden, die beide die Möglichkeit eröffnen, frühe arithmetische Kompetenzen aufzubauen. In der ersten Phase muss die **Anzahl der Objekte** in jedem Set erfasst werden. Barendregt et al. (2012) formulieren das so, dass in der App ein oder zwei Sets von Früchten gezeigt werden, z.B. zwei und drei Birnen für eine bestimmte Zeit. Das Kind muss dann bestimmte Strategien anwenden, um zu bestimmen, wie viele Objekte in jedem Set vorhanden sind (Barendregt et al., 2012).

In einer zweiten Phase müssen die Kinder nun die korrespondierende **Anzahl an Fingern** auf dem Touchscreen platzieren, um so die Aufgabe zu beantworten (Barendregt et al., 2012). Dazu muss das Kind herausfinden, wie es mit seinen Fingern die passende Anzahl an Objekten widerspiegelt (Barendregt et al., 2012). Dies erfordert die Koordination zwischen dem, was mit den Augen wahrgenommen wird, und dem, was mit den Händen ausgeführt wird (Barendregt et al., 2012).

7.1.3 Aufgabentypen

Es gibt zwei Aufgabentypen: undifferenzierte Ganze, bei denen nur ein Set an Früchten gezeigt wird, beispielsweise ein Set von drei Früchten, und differenzierte Ganze, wobei zwei Sets an Früchten gezeigt werden, beispielsweise ein Set mit einer Frucht und ein Set mit zwei Früchten (Tucker & Johnson, 2020).

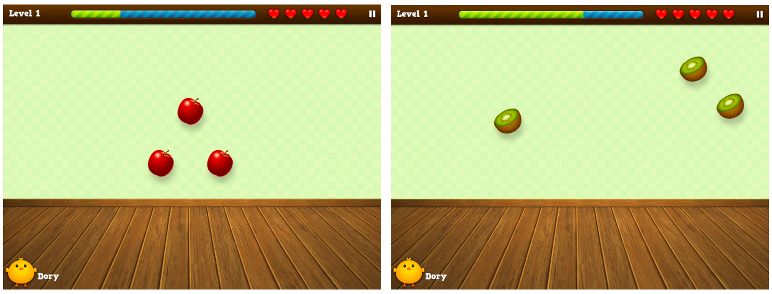

Abbildung 7: Exemplarische Aufgabe eines undifferenzierten (links) und differenzierten (rechts) Ganzen (eigene Screenshots).

In jedem Set sind die Elemente in einer spezifischen Konfiguration angeordnet, wie sie in der nachfolgenden Abbildung visualisiert werden (Tucker & Johnson, 2020). Die 60 verschiedenen Aufgaben ergeben sich aus den unterschiedlichen Kombinationen dieser Konfigurationen und der maximalen Summe von 10 (Holgersson et al., 2016). Zudem kann jede der 60 Aufgaben in zwei Permutationen dargestellt werden, beispielsweise 3a und 1a oder 1a und 3a. Tucker und Johnson (2020) sowie Holgersson et al. (2016) fassen dies als eine Aufgabe (3a+1a) zusammen.

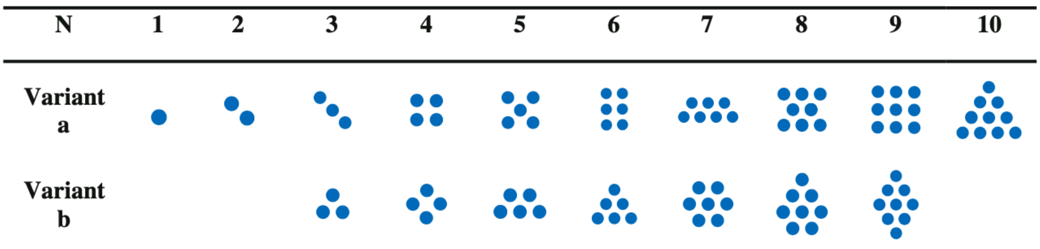

Abbildung 8: Konfigurationen der einzelnen Sets in Fingu, sortiert nach der Anzahl der Elemente (Holgersson et al., 2016, S. 133).

7.2 Aussagen der Entwickler:innen zur App und zum Design

Die App Fingu wurde nach dem ***design-based research approach***, angelehnt an Brown (1992) und Cobb et al. (2003), entwickelt. Dieser Ansatz „*combines theory-driven design of learning environments with empirical research in educational settings, in a series of iterations*“ (Holgersson et al., 2016, S. 127). In der ersten Reihe an Iterationen wurde das ursprüngliche Computerspiel „*The Number Practice Game*“ designt und beforscht, welches auf Grundlage von phänomenographischen Theorien und empirischen Studien entwickelt wurde (Holgersson et al., 2016; vgl. Lindström et al., 2011; Marton & Booth, 1997; Neumann, 1987). In der zweiten Reihe wurde bereits mit dem Spiel „Fingu“ in einem soziokulturellen Rahmen gearbeitet (Holgersson et al., 2016). Schließlich wurden Anpassungen vorgenommen, sodass die App als Forschungsgrundlage dienen und bei Kindern verwendet werden kann, sofern diese von einer *more knowledgeable person*, wie von Lehrkräften, Erzieher:innen, Eltern oder Geschwistern, eingeführt wurden (Holgersson et al., 2016).

Die Standardeinstellungen der App, beispielsweise die Parameterwerte für die *input time*, basieren auf früheren Untersuchungen sowie den Pilotstudien (Barendregt et al., 2012). Mithilfe von *usability tests* wurde eine geeignete Anzahl an Aufgaben pro Level und die passende *Touch Input Latency* ermittelt (Barendregt et al., 2012). Auf Basis dieser wurden zahlreiche Adaptionen am Spiel vorgenommen, um so die Gestaltung und Funktionsweise zu erreichen, wie sie nun veröffentlicht ist (Barendregt et al., 2012).

Ziel des Spiels ist es, das Teil-Ganze-Verständnis sowie die (Quasi-)Simultanerfassung und damit auch den Zahlensinn zu fördern (Holgersson et al., 2016). Dies wird von den Entwickler:innen mehrfach betont (vgl. Holgersson et al., 2016; Barendregt et al., 2012). Um dieser Intention zu entsprechen, wurden verschiedene Designelemente gezielt implementiert:

- **Quantitative Repräsentation von Zahlen:** „*Fingu was not designed as a symbolic activity*“, sagen Holgersson et al. (2016, S. 132). Denn das Spiel soll sinnstiftende, persönlich relevante, motivierende und bedeutsame Lerngelegenheiten schaffen, was über konkrete Visualisierung von Mengen möglich sei (Holgersson et al., 2016). Im Sinne des *inquiry based* Lernansatzes, bei dem autonomes, mathematisches Problemlösen und Begründen im Vordergrund steht, soll Fingu eine Lernumgebung darstellen, die es Kindern ermöglicht, Zahlenkombinationen zu erkunden (Baroody et al., 2013; Barendregt et al., 2012). Dies soll dem reinen Auswendiglernen von Zahlzerlegungen vorbeugen und die Ausbildung eines Zahlensinns fördern (Barendregt et al., 2012).

- **Zunehmende Präsentation differenzierter Ganze:** Bei jeder Aufgabe werden ein oder zwei Sets an Elementen visuell präsentiert (Holgersson et al., 2016). Im Verlauf der Level treten zunehmend zwei Sets, also differenzierte Ganze, auf, was die Fähigkeit zur Erfassung einzelner Teile zunächst fördern und daraus schließlich auch die Quasisimultanerfassung ausbilden soll (Holgersson et al., 2016).

- **Reguläre und symmetrische Konfiguration der einzelnen Sets:** Die Anordnung der einzelnen Elemente soll die Lernenden dazu ermutigen, *perceptual* oder *conceptual subitizing* zu betreiben (Holgersson et al., 2016).

- **Zeitlimitierung der Aufgaben:** Aufgrund der Zeitlimitierung sei den Entwickler:innen zufolge Zählen der einzelnen Sets kaum möglich und damit die (Quasi-)Simultanerfassung der geeignete Weg, die Anzahl der Elemente zu bestimmen und um so die Aufgabe lösen zu können (Holgersson et al., 2016). Barendregt et al. (2012) räumen dahingehend ein, dass *perceptual subitizing* in den ersten Leveln möglich ist, dass die Kinder jedoch fortgeschrittene Formen der Simultanerfassung entwickeln könnten, um schnell größere Anzahlen in höheren Leveln wahrnehmen zu können (Barendregt et al., 2012). Nichtsdestotrotz führen sie auch an, dass es nicht zwingend nötig ist, die Summe beider Sets zu bestimmen, um die Gesamtanzahl der Objekte korrekt anzeigen zu können (Barendregt et al., 2012).

- **Finger zur Anzahldarstellung:** Kinder sollen die visuell präsentierten Teil-Ganze-Beziehungen mit der Relation in Verbindung bringen, bei der Finger zum Beibehalten des Ganzen verwendet werden (Holgersson et al., 2016). Da damit die Antwort in konzeptuell, kongruenten Gesten gegeben werden, soll gemäß der *Embodied Cognition* das Lernen gefördert werden (Tucker & Johnson, 2020).

- **Kurze *Touch Input Latency*:** Ein Schlüsselelement des Designs ist, dass Kinder über die kurze *Touch Input Latency* gezwungen werden, ihre Finger koordiniert gleichzeitig auf den Bildschirm zu legen, anstatt sie nacheinander den Bildschirm berühren zu lassen (Holgersson et al., 2016). Denn Berührungen des Bildschirms werden schnell als finale Antwort registriert, was nur wenig Spielraum für Anpassungen gibt (Barendregt et al., 2012). Holgersson et al. (2016) zufolge wird so die spielende Person eher dazu stimuliert, sich auf die einzelnen Teile und die Gesamtsumme des präsentierten Problems zu fokussieren, anstatt die Objekte nacheinander zu zählen (S. 134).

- **Freie Wahl der Finger:** Da sich die Spielenden aussuchen können, welche Finger sie verwenden und in welcher Zerlegung sie diese zur Beantwortung der Aufgabe nutzen wollen, fördern die Aufgaben eher das Problemlösen hinsichtlich der Teil-Ganze-Beziehungen, anstatt sich auf die motorischen Fertigkeiten zu fokussieren (Holgersson et al., 2016). Holgersson et al. (2016) bezeichnen Fingu daher auch als digitales Werkzeug.

- **Keine Rahmengeschichte**: Nach Aussagen von Holgersson et al. (2016) sei es verbreitet, *embodied mathematics* in eine Rahmengeschichte einzubetten. Dieses Designelement wurde für Fingu gezielt abgelehnt, damit sich die Lernenden eher auf die zu vermittelnden Inhalte konzentrieren können, als über die Spielelemente davon abgelenkt zu werden (Holgersson et al., 2016; vgl. Linderoth, 2012). Hierdurch soll erreicht werden, dass sich die Kinder maximal auf die Teil-Ganze-Verhältnisse fokussieren und somit alle möglichen Teil-Ganze-Beziehungen im Zahlenraum von 1 bis 10 erfahren können (Holgersson et al., 2016).

Das Meistern der verschiedenen Aufgaben und Level sowie das **direkte und korrektive Feedback** wird sowohl über visuelle, als auch auditive Reize visualisiert (Holgersson et al., 2016). Damit kann das Kind diese Signale als Erfolg oder Hinweis wahrnehmen, bevor es weiterarbeitet (Holgersson et al., 2016, vgl. Mehan, 1979). Auf diese Art und Weise sollen sowohl Motivation als auch Lernbereitschaft erhöht werden (Holgersson et al., 2016).

Ferner gibt es weitere, bewusst integrierte Designelemente. Das Naheliegendste ist, dass Fingu fordert, dass Finger nicht zu nah beieinander und ungefähr zur selben Zeit auf dem Bildschirm platziert werden müssen (Barendregt et al., 2012). Dazu benötigen die Kinder eine Kontrolle über ihre Finger (Barendregt et al., 2012). Aus diesem Grund gehen Barendregt et al. (2012) davon aus, dass Fingu nicht nur die mathematischen Fähigkeiten der Kinder fördert, sondern auch deren **Finger Gnosis** (Barendregt et al., 2012).

Da das Spiel Fingu kein Reden oder verbales Erklären der Tätigkeiten erfordert, wird die **Kommunikation** von Kindern über mathematische Inhalte nicht explizit gefördert (Holgersson et al., 2016). Die Entwickler:innen erklären dies „*partly for the reason of avoiding the bias on using simple counting procedures and rote learning that might come with language*“ (S. 133). Dass Fingu damit ein nicht-symbolisches Spiel bleibt, resultiert in dem Problem, dass nicht eindeutig zu erkennen ist, ob Kinder wirklich die Teil-Ganze-Beziehungen erfassen (Holgersson et al., 2016). Unter anderem diese letzte Aussage motiviert zum Durchführen der Studie und der Analyse, die anschließend beschrieben wird. Zuvor werden jedoch Ergebnisse von bereits abgeschlossenen Studien zu Fingu präsentiert.

7.3 Studien zu Fingu

Im Folgenden sollen fünf wesentliche Studien zur Erforschung von Fingu geschildert werden.

Barendregt et al. (2012) führen eine explorative Mikro-Längsstudie mit elf Kindern im Alter von fünf bis sechs Jahren durch. Die Kinder befinden sich in der Vorschule in einer Kleinstadt in Schweden und spielen im Verlaufe von mehreren Wochen das Spiel Fingu (Barendregt et al., 2012). Sie werden an drei verschiedenen Zeitpunkten gefilmt, sodass so Veränderungen im Verhalten bezüglich der Entwicklung von arithmetischen Fähigkeiten festgestellt werden können (Barendregt et al., 2012). In ihren Untersuchungen stellen Barendregt et al. (2012) eine zunehmende Anzahl von korrekten Antworten fest, auch können einige Kinder bestimmte Muster deutlich schneller erkennen, was sie auf das *conceptual subitizing* zurückführen. Außerdem verbessern sich die Kinder darin, Zahlen über ihre Finger darzustellen und die Finger präzise auf dem Bildschirm zu platzieren (Barendregt et al., 2012). Sie schlussfolgern hier auf einen höheren *embodied* Zahlensinn sowie einer verbesserte Finger Gnosis (Barendregt et al., 2012). Viele der Kinder zählen jedoch noch größere Summen (Barendregt et al., 2012).

Zu ähnlichen Ergebnissen kommen **Broda et al. (2019)**, die über einen Monat hinweg die Schnelligkeit und Akkuratheit der Antworten von Kindern anhand von 8153 aufgezeichneten Aufgaben analysieren.

Ihre Ergebnisse zeigen, dass die Kinder im Durchschnitt schneller und präziser werden, besonders Mädchen seien akkurater (Broda et al., 2019). Ältere Kinder scheinen leicht langsamer und weniger akkurat zu sein (Broda et al., 2019).

Holgersson et al. (2016) führen eine ähnliche Studie mit 112 Kindern im Alter von fünf bis sieben Jahren durch, wobei sie einen Prä- und Posttest sowie einen Test 8 Wochen nach der Intervention inkludieren. Zwischen dem Posttest und dem 8 Wochen später stattfindenden Test dürfen die Kinder kein Fingu spielen (Holgersson et al., 2016). Zudem werden individuelle Interviews angesetzt, alles quantitativ analysiert sowie die Effekte des Spielens auf die arithmetischen Fähigkeiten der Kinder untersucht (Holgersson et al., 2016). Sie schließen dabei darauf, dass reguläre Interaktionen mit Fingu die Leistung von Kindern bei standardisierten *early number sense assessments* positiv beeinflussen können (Holgersson et al., 2016). Damit einhergehend zeigen die Kinder eine höhere *subtizing task speed* und *accuracy* mit etwas unterschiedlichen Effekten beim Geschlecht und Alter, jedoch nicht bei der Händigkeit (Broda et al., 2018). Für Gesamtanzahlen von 1 bis 5 verwenden Kinder in der Regel nebeneinander liegende Finger von derselben Hand (Holgersson et al., 2016). Für Quantitäten von 6 bis 10 waren die Antworten entweder semi-dezimal, beispielsweise 5 und 2 Finger für eine Gesamtanzahl von 7 Elementen, symmetrisch, also z.B. jeweils drei Finger einer Hand für eine 6, oder *mapped*, bei gezeigter 4 und 2 werden auch vier und und zwei Finger hingelegt (Holgersson et al., 2016). Falls *mapping* stattfand, haben die meisten Kinder die Objekte nicht gezählt, sondern schienen die Zahlen eher (quasi-)simultan zu erfassen, da diese Strategie effizienter als Zählen sei (Holgersson et al., 2016).

Tucker und Johnson (2020) untersuchen die Entwicklung des frühen Zahlensinns von Vorschulkindern über den Verlauf von vier Wochen in einer *mixed-methods* Studie in der östlichen USA. Dabei arbeiten sie ebenfalls mit dem Spiel Fingu (Tucker & Johnson, 2020). Zu Beginn der Untersuchung zeigen die Forschenden den Kindern, wie mit der App umzugehen ist, und geben jedem Kind Zugang zu einem iPad, um das selbst auszuprobieren (Tucker & Johnson, 2020). Sie geben den Kindern keine spezifischen Strategien oder Antwortmöglichkeiten vor, sondern beschreiben lediglich, dass sie die Anzahl der Früchte mit entsprechend vielen Fingern gleichzeitig auf dem Bildschirm darstellen müssen (Tucker & Johnson, 2020). Tucker und Johnson (2020) führen anschließend eine quantitative Analyse mit Excel durch, in der sie die *accuracy rates* und die *task exposure frequency* bestimmmen. Des Weiteren führen sie eine qualitative Analyse durch, bei der unter anderem Interviews mit den Kindern durchgeführt werden (Tucker & Johnson, 2020). Über ihre Untersuchungen stellen Tucker und Johnson (2020) heraus, dass sich der *embodied number sense* über die Interaktion mit der App entwickelt. Außerdem hätten sie Indikatoren für die Simultanerfassung, (De-)Komposition von Figuren, Zählen, Beziehungen zwischen Gesten, Schätzen und Präzision und mehr identifizieren können (Tucker & Johnson, 2020). In ihrer qualitativen Analyse heben sie hervor, dass in höheren Leveln das direkte *mapping* oder infrequnetes Zerlegen oder Regruppieren von Anzahlen öfter vorkommt, z.B. $4a + 4a$ gezeigt wird und dann als $4 + 4$ und nicht als $5 + 3$ dargestellt wird (Tucker & Johnson, 2020).

Sie deuten an, dass es schwer zu interpretieren sei, ob die Versuchsperson tatsächlich die Anzahl über Quasisimultanerfassung bestimmt hat, indem die beiden simultanerfassten Sets zusammengefügt wurden oder ob sie nur die beiden Sets separat simultanerfasst hat (Tucker & Johnson, 2020). Mit dieser Antwort könnte die Versuchsperson zwar gezeigt haben, dass sie die Kardinalität jedes Sets einzeln erkannt hat, allerdings muss sie diese Kardinalität nicht auf das Ganze übertragen haben (Tucker & Johnson, 2020). Außerdem stellen Tucker und Johnson (2020) heraus, dass sie vor allem ihre dominante Hand zum Antworten verwenden. Zuletzt scheinen die Kinder Probleme zu haben, wenn es nicht möglich ist, die Anzahl 1:1 darzustellen (Tucker & Johnson, 2020). Exemplarisch nennen sie die Präsentation von $6a + 2a$, da 6a sonst öfter symmetrisch in $3 + 3$ geteilt wurde (Tucker & Johnson, 2020).

Baccaglini-Frank und Maracci (2015) untersuchen, welche Strategien die Kinder zur Beantwortung der Aufgaben bei Fingu nutzen. Dabei setzen sie die Entwicklung von ihren motorischen Fähigkeiten bezüglich der Finger Gnosis in den Vordergrund (Baccaglini-Frank & Maracci, 2015). Von ihnen identifizierte Strategien waren unter anderem das Erkennen von der Gesamtanzahl der Objekte ohne verbales Zählen und dem anschließenden Versuch, die Zahl mit entweder einer Hand gleichzeitig (*1-hand-simultaneously*) oder beiden Händen (*2-hands-simultaneously*) darzustellen (Baccaglini-Frank & Maracci, 2015). Ob Kinder eine oder zwei Hände verwendeten, hing nicht direkt mit der Anzahl an gezeigten Sets an Objekten zusammen (Baccaglini-Frank & Maracci, 2015). In zahlreichen Fällen versuchten die Kinder, ihre Finger so nah wie möglich an den Objekten zu platzieren, „um sie zu fangen“ oder um mit ihren Fingern dieselbe räumliche Anordnung, wie abgebildet, zu reproduzieren (Baccaglini-Frank & Maracci, 2015). Baccaglini-Frank und Maracci (2015) bezeichnen diese Strategien als *1-hand-* oder *2-hand-catch*. Nach dem Wahrnehmen der Anzahl und dem lauten Ansagen dieser oder dem Zählen der Früchte, versuchten auch einige Kinder, die Finger nacheinander auf dem Bildschirm zu platzieren (Baccaglini-Frank & Maracci, 2015). Dabei waren sie nicht schnell genug, sodass die Software nicht alle Berührungen in ihre Antwort mit einbezogen hat und die Kinder so negatives Feedback erhielten (Baccaglini-Frank & Maracci, 2015). Trotzdem führten einige Versuchspersonen dies sogar bis zu höheren Zahlen durch, bevor sie von dieser Strategie absahen (Baccaglini-Frank & Maracci, 2015). Andere zählten schnell die Objekte und platzierten dann ihre Finger simultan auf dem Bildschirm (Baccaglini-Frank & Maracci, 2015). Diese Strategie war sehr effektiv, jedoch nicht immer erfolgreich, falls die Kinder aufgrund der Zeitbeschränkungen nicht richtig (zu Ende) zählen konnten (Baccaglini-Frank & Maracci, 2015).

Baccaglini-Frank und Maracci (2015) ordnen jeder dieser Strategien verschiedene Aspekte des Zahlensinns zu, die nachfolgend dargestellt werden:

Strategy	Aspects of number-sense											
	Multiple fingers tapping		Subitizing		Recognizing parts of a whole	One-to-one correspondence	Approximate estimation		Counting principles			
	Simultaneous	Sequential	Simple	Double Subitizing			Small quantities	Large quantities	One-one	Stable order	Cardinal	Order-irrelevance
g-arr	■			■		■						
g-bun	■	■				■	■					
g-count-sim	■					■						■
g-count-seq		■				■						■
g-count-lift												■
g-random												
s1-sim	■		■			■						
s1-seq		■				■	■					
s2-seq		■				■		■				
s2-for	■	■			■	■		■				
s2-back	■	■			■	■		■				

Abbildung 9: Beziehungen zwischen Antwortstrategien von Kindern in Fingu und Aspekten des Zahlensinns (Baccaglini-Frank und Maracci, 2015, S. 20).

Über die Interaktion mit Fingu können mehrere Strategien zur Anzahlerfassung getestet und erworben werden, wobei Fingu einige Strategien, wie das Zählen und Legen der Finger nacheinander, verhindert (Baccaglini-Frank & Maracci, 2015). Wichtig sei es, die verschiedenen Strategien explizit hervorzuheben, zu elaborieren und durchzuführen, besonders, wenn ein Kind mehrere Strategien zeigt (Baccaglini-Frank & Maracci, 2015). Dadurch können die Kinder diese Strategien reflektieren und die effizienteren Strategien durchführen (Baccaglini-Frank & Maracci, 2015). Baccaglini-Frank und Maracci (2015) behaupten, dass kein Kind demotiviert war und das Spiel verlassen wollte. Stattdessen wurde ihnen von Kamerad:innen geholfen und Strategien und Lösungen verbal ausgetauscht, ohne dass jemals das iPad eines Anderen berührt wurde (Baccaglini-Frank & Maracci, 2015).

8 Analyse von Fingu nach ACAT

Zur Beurteilung von Apps entwickelten Etzold et al. (2018) den ACAT-Review-Guide. Dieser Guide setzt sich aus fünf Schritten zusammen, die sich jeweils an einem Schwerpunkt des ACAT-Modells orientieren (Etzold et al., 2018). Diese Schritte sollen der Reihenfolge nach durchgeführt werden (Etzold et al., 2018). Ausgehend von den mathematischen Inhalten wird untersucht, wie die Lernenden mit der App arbeiten (Etzold et al., 2018). Daraus wird schließlich abgeleitet, ob die App in der Vermittlung des gewünschten Inhalts unterstützen kann (Etzold et al., 2018). Abschließend werden konkrete Unterrichtssituationen diskutiert, die für den Einsatz der App geeignet sind (Etzold et al., 2018). An dieses Modell angelehnt erfolgt die nachfolgende Analyse.

8.1 Identifikation des Objekts, des Subjekts und des Artefakts

Zunächst sollten die Schwerpunkte des ACAT-Modells neben Fingu als zentrales Artefakt identifiziert werden (Etzold et al., 2018). Mathematische Gegenstände der App, die **Objekte**, sind eindeutig die Anzahlwahrnehmung und -darstellung. Die gezeigten Elemente müssen erfasst und die entsprechende Anzahl mithilfe der Finger dargestellt werden. Holgersson et al. (2016) benennen zusätzlich den Aufbau eines Teil-Ganze-Verständnisses als Objekt der App, da verschiedene Gesamtanzahlen in Teilungen visualisiert werden. Was bisher wenig Beachtung fand, ist, dass die Aufgaben auch über Anzahlvergleiche gelöst werden können. Bereits die Aufgabenstellung, so viele Finger auf den Bildschirm zu legen, wie Elemente zu sehen sind, deutet darauf hin. Hier wird nicht gefordert, die konkrete Anzahl zu verbalisieren oder zu repräsentieren, sodass eine 1:1-Zuordnung zwischen Fingern und Früchten ebenfalls zu der richtigen Lösung führen kann. Auf Basis dieser Objekte soll ein Beitrag zum Zahlbegriffserwerb sowie zur Entwicklung eines Zahlensinns geleistet werden (Holgersson et al., 2016). Ein Fokus dabei ist das kardinale Zahlenkonzept (Holgersson et al., 2016). Im Kapitel der mathematischen Grundlagen werden die hier aufgeführten Begriffe ausführlich geschildert und charakterisiert.

Unter dem **Subjekt** werden vor allem Vorschulkinder, aber auch Schüler:innen der ersten Klasse verstanden, die die Zielgruppe der App Fingu darstellen (Holgersson et al., 2016). Sie sind diejenigen, die vorrangig mit der App im Kindergarten, im Unterricht oder zuhause, in der Regel allein, interagieren. Die **Tätigkeit**, die dabei im Fokus steht, ist das Platzieren so vieler Finger auf dem Bildschirm, wie Elemente angezeigt werden (vgl. Ladel & Kortenkamp, 2013). Diese Tätigkeit ist hierarchisch in verschiedene Handlungen untergliedert, wie etwa das Wahrnehmen der gezeigten Objekte, ggf. die Anzahlerfassung, die Hand-Augen-Koordination und das Platzieren der entsprechenden Anzahl an Fingern auf dem Bildschirm (vgl. Ladel & Kortenkamp, 2013).

Das zwischen Subjekt und Objekt vermittelnde **Artefakt** ist das Tablet oder konkreter: das digitale Lernspiel Fingu. Darüber werden Anzahlen dargestellt und den Kindern eine Rückmeldung zu ihrer Antwort gegeben. Doch wesentlich sind auch die Finger, die gemäß Verillion und Rabardel (1995) ein **Instrument** sind, um darüber die Vorstellungen der Subjekte zu externalisieren (vgl. Ladel, 2017).

Erst das Zusammenspiel zwischen Fingerverwendung und Fingu führt zu der gewünschten Tätigkeit und der Auseinandersetzung des Subjekts mit dem Objekt. Dazu ist Fingu nach bestimmten Designprinzipien gestaltet worden (Holgersson et al., 2016).

8.2 Interaktionsmöglichkeiten mit dem Objekt

Nachdem nun die Schwerpunkte identifiziert wurden, soll nun geklärt werden, wie man mithilfe der Lernapp mit dem mathematischen Objekt interagieren kann (Etzold et al., 2018). Dazu soll beschrieben werden, welche Handlungen in der App möglich sind, wie das mathematische Objekt repräsentiert ist, wie das Objekt das Verhalten der App beeinflusst und welche Erfahrungen die Lernenden durch die Interaktion machen können (Etzold et al., 2018). Vieles davon wurde bereits in den vorherigen Kapiteln aufgegriffen und wird daher nachfolgend fokussiert erläutert. Besonders relevant sind dabei die durch die Interaktion initiierten Internalisierungs- und Externalisierungsprozesse (Etzold et al., 2018).

Das Spiel selbst besteht darin, die Gesamtanzahl an gezeigten Früchten wahrzunehmen und entsprechend viele Finger auf dem Bildschirm zu platzieren. Dies kann über **verschiedene Subprozesse** wie Simultanerfassung, Simultandarstellung, Anzahlvergleiche oder Zählen geschehen. Fingu selbst gibt dafür nur den Rahmen vor. Außerdem sind weitere Handlungen am Startbildschirm, mit den Charakteren, Statistiken und Einstellungen möglich. Im Folgenden soll sich jedoch vorrangig auf die vom Lernspiel erwünschte Anzahlerfassung und -darstellung sowie die Teil-Ganze-Beziehung fokussiert werden.

Das von den Entwickler:innen vielfach begründete **Teil-Ganze-Verständnis** ist am kritischsten zu betrachten (vgl. Holgersson et al., 2016). Es ist im Artefakt in der Programmierung kodiert, insofern, als dass das von den Entwickler:innen definierte Ganze und seine Teilungen gespeichert und visualisiert werden. Die Früchte werden in verschiedenen Konfigurationen und Sets präsentiert. Holgersson et al. (2016) sprechen hierbei von differenzierten und undifferenzierten Ganzen.

Ein Beispiel für ein differenziertes Ganzes wäre die Aufgabe $5a + 3a$, wobei sowohl die Teile 5 und 3 als auch die Zusammensetzung daraus, nämlich die 8, im Artefakt integriert sein muss (vgl. Ladel & Kortenkamp, 2013). Ziel sei es, dass die Externalisierung 3a und 5a als 8 von den Lernenden internalisiert wird (vgl. Holgersson et al., 2016).

Holgersson et al. (2016) begründen die Verinnerlichung der Teil-Ganze-Beziehung damit, dass die Kinder zu wenig Zeit hätten, um die Früchte zu zählen. Demnach könnten sie die Anzahl nur (quasi-)simultan erfassen und darstellen, indem sie die Teile als Ganzes erkennen und würden so nebenbei auch das Teil-Ganze-Verständnis erwerben (Holgersson et al., 2016). Grundsätzlich können Erfahrungen, die die Kinder mit dieser Lernapp machen, zu dieser gewünschten Internalisierung führen, wahrscheinlich ist sie allerdings nicht (vgl. Ladel & Kortenkamp, 2012).

Zudem kann die Annahme, es sei nur eine (quasi-)simultane Erfassung möglich, kaum mit der Literatur und den Studien begründet werden. Tatsächlich stellt die **(Quasi-)Simultanerfassung** nur einen von mehreren, möglichen Lösungswegen dar.

Bei bis zu drei Elementen ist diese Art der Anzahlerfassung auch nicht unwahrscheinlich, da dort das *perceptual subitizing* durchgeführt werden kann (Dehaene, 2011).

Anzahlen ab vier Elementen müssten dann quasisimultan erfasst werden, indem die Gesamtanzahl in kleinere Sets strukturiert werden, unabhängig davon, ob sie als undifferenzierte oder differenzierte Ganze visualisiert werden (Sarama & Clements, 2009). Dieser Prozess kann die Ausbildung eines Teil-Ganze-Verständnisses unterstützen (Wästerlid, 2020). Demnach könnten bereits Aufgaben mit undifferenzierten Ganzen der Form $x+0$ oder $0+x$[7] die Ausbildung eines Teil-Ganze-Verständnisses unterstützen, was in vielen Untersuchungen unbeachtet blieb. Jedoch gilt für die Quasisimultanerfassung, dass je mehr Elemente vorhanden sind, desto langsamer werden diese erkannt und desto weniger akkurat sind die Aussagen der Lernenden (Logan & Zbrodoff, 2003). Aus diesem Grund liegt es nahe, dass Lernende bei zunehmender Anzahl an Elementen auf **abweichende Strategien** zurückgreifen, um weiterhin eine akkurate Anzahl wiedergeben zu können.

Dass erkannt wird, dass die zwei Sets ein Ganzes bilden (Baccaglini-Frank & Maracci, 2015) und daraus zu schließen, dass das Ganze auch in diese zwei Teile aufgeteilt werden kann (Ross, 1989), stellt einen eher **komplexen Denkprozess** dar, die besonders bei Zahlenkombinationen von mehr als fünf Elementen eher unwahrscheinlich sind. Besonders unter Zeitdruck bleibt weniger Zeit, das Ganze zu bilden und die Repräsentationsform zwischen visuell und haptisch zu ändern, was ebenfalls andere Strategien bevorzugen würde.

Eine Strategie könnte sein, dass undifferenzierte Ganze in zwei Teile zu zerlegen oder beim differenzierten Ganzen beide Sets separat zu erfassen, **ohne sie anschließend zusammenzufügen** und so die Gesamtanzahl zu bestimmen. Bereits der Abstand zwischen den einzelnen Sets kann dazu verleiten, beide Sets als separate Ganze wahrzunehmen (vgl. Benz et al., 2015). Selbst die Entwickler:innen geben zu, dass es nicht nötig ist, die Summe beider Sets zu bestimmen, um die Gesamtanzahl der Objekte korrekt anzeigen zu können (Barendregt et al., 2012). Nur weil sie die richtige Gesamtanzahl gezeigt haben, bedeutet das allerdings nicht, dass sie die Gesamtanzahl als Zerlegung der anderen beiden Zahlen verstanden haben (Gaidoschik & Fellmann, 2015).[8] In diesen Sinne sind beispielsweise bei der Aufgabe 5a+3a auch andere Internalisierungen als die 8 möglich, 5+3 wäre eine davon (vgl. Tucker & Johnson, 2020).

Bei genauerer Betrachtung wird also die Teil-Ganze-Beziehung innerhalb von Fingu lediglich im Sinne des **Zerlegens** deutlich, nicht jedoch im Zusammenfügen – jedenfalls nicht visuell[9] (Holgersson et al., 2016). Auch andere Aspekte des Teil-Ganze-Verständnisses, wie die Kompensation, die Kovariation oder der Zehnerbündelung, werden nicht offensichtlich (vgl. Benz et al., 2015).

[7] Obwohl nicht davon vorausgesetzt werden kann, dass die Kinder die Addition mental durchführen, soll diese Schreibweise für die Repräsentation der Objekte analog zu den vorherigen Studien so beibehalten werden.

[8] Besser erkennbar wäre dies beispielsweise, wenn Fingu die Kinder dazu motivieren würde, verbal die Gesamtanzahl zu benennen.

[9] Das Zusammenfügen kann nur in kognitiven Handlungen wiedergefunden werden, falls ein Ganzes bestimmt werden sollte. Dies ist jedoch nicht voraussetzbar (Gaidoschik & Fellmann, 2015).

Die Schlussfolgerung der Entwickler:innen über die Ausbildung eines Teil-Ganze-Verständnisses über die Interaktion mit Fingu begründet sich damit ausschließlich über die Annahmen hinsichtlich der Quasisimultanerfassung sowie des anschließenden Zusammenfügens der einzelnen Teile. Da dies jedoch nicht auftreten muss, ist dem Teil-Ganze-Verständnis in der Interaktion mit Fingu nur eine geringe Bedeutung zuzuordnen.

Wird die Anzahl nicht über die (Quasi-)Simultanerfassung bestimmt, dann ist auch **Zählen** eine Variante, die Anzahl zu bestimmen. Holgersson et al. (2016) schließen diesen Weg in ihren theoretischen Betrachtungen aufgrund der Zeitlimitierung aus. Nichtsdestoweniger zeigen mehrere Kinder in unterschiedlichen Studien eindeutig zählende Verhaltensweisen (Barendregt et al., 2012; Tucker & Johnson, 2020; Baccaglini-Frank & Maracci, 2015). Offensichtlich ist zumindest in den ersten Leveln oder bei der ersten Begegnung mit einer Aufgabe ausreichend Zeit vorhanden, die Elemente zu zählen und die korrekte Antwort darzustellen. Aufgrund der Zeitlimitierung könnten die Lernenden stattdessen motiviert werden, schnelleres Zählen oder Zählen in Mehrfachschritten zu üben, was eine sichere Zählkompetenz fördert.

Gaidoschik und Fellmann (2015) zufolge sollten trotzdem nicht-zählende Alternativen zur Anzahlbestimmung eingeführt werden, wie etwa die Simultanerfassung oder der Anzahlvergleich. Dies ist mithilfe von Fingu möglich, sofern das explizit thematisiert wird.

Wie bereits angedeutet, können Aufgaben auch über eine **1:1-Zuordnung** und somit über einen **Anzahlvergleich** gelöst werden. Kinder können jeweils einen Finger genau einer Frucht zuordnen, so vergleichen und anschließend gleichzeitig alle Finger auf den Bildschirm legen. Holgersson et al. (2016) benennen diese Strategie in ihrer Studie als *mapping*, Baccaglini-Frank und Maracci (2015) als *catching*. Um eine Zuordnung vorzunehmen, müssen die Kinder weder das Ganze der beiden Sets bilden noch überhaupt die Anzahl konkret bestimmen (Benz et al., 2015). Bei 3 und 5 gezeigten Elementen, reproduzieren sie demnach nur, was sie sehen, anstatt die 8 zu externalisieren. Diesbezüglich muss noch nicht einmal die 3 als eine Anzahl von drei Elementen wahrgenommen werden, sondern kann lediglich als Vorlage für die Finger aufgefasst werden. Der Anzahlvergleich, so viele Finger hinzulegen, wie Früchte zu sehen sind, benötigt demnach nicht die Verwendung von Zahlen (vgl. Baccaglini-Frank & Maracci, 2015) und kann bereits durchgeführt werden, bevor das Zählen und die Zahlwortreihe beherrscht werden (Sarama & Clements, 2009). Dies deckt sich mit der theoretischen Aufarbeitung von Sarama und Clements (2009). Demnach seien Kinder, die die Aufgaben auf diese Art und Weise lösen, *Object Corresponders* und müssten noch nicht verstehen, dass über die 1:1-Zuordnung eine gleichmächtige Menge dargestellt wird. Diese Verstehensstufe ist bereits ab einem Alter von 2-3 Jahren möglich, besonders, da kein symbolischer Vergleich zu einer Ziffer oder verbales Ausdrücken der Zahl nötig ist (Sarama & Clements, 2009).

Die **fehlende sprachliche oder symbolische Komponente**, die von den Entwickler:innen gezielt integriert wurde, um eine barrierefreie Lernumgebung zu gestalten und um Zählen zu vermeiden, führt zu Unklarheiten hinsichtlich der Internalisierungen beim Kind (vgl. Holgersson et al., 2016).

Verbale Äußerungen könnten Aufschluss darüber geben, ob die Kinder aus zwei Sets ein Ganzes bilden oder ob sie jedes Set als ein individuelles Ganzes betrachten. Auch andere Denkprozesse könnten darüber sichtbar gemacht werden (vgl. Ladel, 2017). Baccaglini-Frank und Maracci (2015) heben hervor, dass es wichtig sei, die von den Kindern verwendeten Strategien gemeinsam mit ihnen zu reflektieren. Nur so gelinge ein reichhaltiger Lernprozess (vgl. Baccaglini-Frank & Maracci, 2015).

Holgersson et al. (2016) behaupten, dass Fingu sinnstiftende, persönlich relevante Lerngelegenheiten schaffen soll, bei denen Zahlenkombinationen erkundet und darüber Zahlensinn gefördert wird. Wie bereits diskutiert, müssen die Lernenden jedoch nicht zwingend differenzierte Ganze als Zahlenkombination interpretieren. Wahrscheinlicher ist es daher, dass eher die verschiedenen Konfigurationen einer Zahl miteinander in Verbindung gebracht werden, aber auch dies ist nicht vorauszusetzen. Die Konfigurationen, besonders die kanonischen eines Würfels (1a, 2a, 3a, 4a, 5a, 6a), können auch lediglich **auswendig gelernt** werden. Generell besteht die Option des Einprägens, nachdem die Anzahl der Elemente innerhalb eines Sets das erste Mal zählend oder (quasi-)simultan bestimmt wurde. Insbesondere die reguläre und symmetrische Konfiguration der einzelnen Sets führt zu einem besseren *pattern recognizing*[10] (Dehaene & Cohen, 1994). Folglich könnten sich einige Lernende die Anzahl zu den Konfiguration über Wiederholung merken, anstatt sinnstiftende Zusammenhänge zwischen den Sets und ihrem Erfassungsprozess zu erkennen. Auch hier wäre eine Verbalisierung des Denkprozesses von Vorteil.

Holgersson et al. (2016) konkludieren außerdem, dass der Zahlensinn und auch der Zahlbegriffserwerb über eine Interaktion mit Fingu gefördert werden kann. Diese Aussage lässt sich bezüglich des Zahlensinns theoretisch bekräftigen:

Da der **Zahlensinn** nicht als Unterrichtsinhalt gelehrt werden kann, sondern sich als Beiprodukt des Lernens ergibt (Diephaus, 2015), sollten Zahlen in verschiedenen Kontexten visualisiert und erkundet werden (Howden, 1989). Einer dieser Kontexte kann Fingu sein. Dies kann besonders reichhaltig sein, da ein Wechsel zwischen Repräsentationen stattfindet (Diephaus, 2015). Bei Fingu muss von der ikonischen Darstellung zur enaktiven Repräsentation mit Fingern gewechselt werden. Dabei ist keine symbolische Darstellung von Zahlen in Form von Verbalisierungen oder Ziffern implementiert. Dies kann jedoch vorteilhaft sein, wie Margolinas und Wosniak (2012) betonen. Denn der Zahlensinn oder die Anzahlerfassung sollte auch unabhängig von den Zahlen selbst eingeführt werden, beispielsweise über Gestiken (vgl. Brissiaud, 1992). Über die Handlungen am konkreten Material werden unter anderem Rechengesetze vorbereitet: Exemplarisch ist in Fingu die additive Kommutativität gut sichtbar, weil es irrelevant ist, ob 3a+5a oder 5a+3a gezeigt wird. Es sind immer acht Elemente.

Bezüglich des **Zahlbegriffserwerbs** lassen sich weniger Parallelen ziehen, zumal sich Fingu lediglich auf den Kardinalzahlaspekt bezieht (vgl. Padberg & Benz, 2011). Gemäß des ZGV-Modells kann die Lernapp die Wahrnehmung von Mengen auf der Kompetenzebene 1 fördern (Krajewski & Ennemoser, 2013; Garrote et al., 2015).

[10]Der Aspekt der *pattern recognition* wird gelegentlich der Simultanerfassung zugeordnet.

Das exakte Zuordnen einer Zahl zu einer Menge gehört dann bereits zur zweiten Verstehensebene (Krajewski & Ennemoser, 2013). Dies setzt allerdings auch voraus, dass die Anzahl einer Menge konkret erfasst wird, beispielsweise durch (Quasi-)simultanerfassung oder Zählen. In diesen Fällen würde Fingu beim Erwerb eines Verständnisses unterstützen, dass Zahlen eine bestimmte Größe oder Menge repräsentieren (vgl. Krajewski & Ennemoser, 2013). Sollten die Kinder die Teile zu einem Ganzen zusammenfügen oder das Zerlegen des Ganzen wahrnehmen, ist das auf der dritten Ebene zu verorten (Krajewski & Ennemoser, 2013).

Wird die Aufgabe über den Anzahlvergleich gelöst, indem jedem gezeigten Element ein Finger zugeordnet wird, dann kann damit die **logische Grundoperation** der 1:1-Zuordnung stattfinden (Piaget & Szeminska, 1965). Eine weitere logische Grundoperation ist das Verständnis der Invarianz, welches sich in Fingu wiederfinden lässt (vgl. Piaget & Szeminska (1965). Durch das Zerlegen eines Ganzen in zwei Sets oder durch die Bewegung der einzelnen Sets in dem visualisiertem Raum wird die räumliche Anordnung der Elemente verändert, wobei die Gesamtanzahl dieselbe bleibt. Das Prinzip der Zahlinvarianz lässt sich im ZGV-Modell von Krajewski und Ennemoser (2013) auf der zweiten Ebene verorten.

Das Vorhandensein der Klasseninklusion könnte insofern argumentiert werden, dass bei differenzierten Ganzen beide Sets zu der Gesamtmenge des Ganzen untergeordnet werden müssen. Da das Erkennen der Teil-Ganze-Beziehung allerdings nicht zwingend erfolgen muss, muss diese logische Grundoperation, wenn überhaupt, als nebensächlich betrachtet werden. Andere Prozesse der Seriation und der Klassifikation werden in Fingu nicht explizit gefördert (vgl. Piaget & Szeminska, 1965).

Neben der Anzahlerfassung ist auch der Prozess der **Anzahldarstellung** für die Analyse von Bedeutung. Bei Fingu geschieht dies stets unter Zuhilfenahme der Finger. Im Hinblick auf die *Embodied Cognition* ist es nicht unüblich, über die Fingerdarstellung Rückschlüsse auf die Internalisierung der Konzepte zu treffen (Ladel & Kortenkamp, 2013). Besonders bei Fingu ist die Betrachtung des Fingereinsatzes unumstößlich, denn die Finger stellen hier Instrumente zur Externalisierung der eigenen Vorstellungen am Artefakt dar (Verillion & Rabardel, 1995). Von Vorteil ist der Fokus auf die Finger noch aus einem weiteren Grund: Gestiken von Vorschulkindern sind akkurater als ihre sprachlichen Voraussetzungen für Quantitäten (Gunderson et al., 2015).

Da Kinder verschiedene Konzepte von Zahlen besitzen und darin situationsbedingt variieren, lässt somit die Analyse der *finger symbol sets* Rückschlüsse auf deren Vorstellungen zu (Ladel & Kortenkamp, 2012). Ein entscheidender Vorteil von Fingu ist, dass mithilfe der Multi-Touch-Technologie neben ordinalen Zahlenkonzepten auch kardinale umgesetzt werden können (Ladel & Kortenkamp, 2012). Bereits auf der Erklärungsseite wird visualisiert, dass die Finger zum Beibehalten des Ganzen genutzt werden können (Holgersson et al., 2016). Da dies jedoch nicht notwendig ist, können die Finger auch in anderen Formationen verwendet werden (Tucker & Johnson, 2020). Über kongruente Gesten können die folgenden Externalisierungen unterschieden werden:

- **Ordinales Zahlenkonzept:** Dieses wird vor allem über verbales Zählen oder über sequenzielles Zeigen oder Berühren der Früchte deutlich. Da Fingu über die kurze *Touch Input Latency* solche Handlungen am Bildschirm unterbindet, kann dies auch ohne Berühren des Bildschirms von den Kindern durchgeführt werden. Auch das Abzählen der eigenen Finger gehört zu diesem Zahlenkonzept.

- **Kardinales Zahlenkonzept:** Über die Simultandarstellung und das gleichzeitige Berühren des Bildschirms ohne vorherige, ordinale Prozesse wird das kardinale Zahlenkonzept umgesetzt. Hierbei wird davon ausgegangen, dass die Anzahl der Elemente erfasst wurde.

- **1:1-Darstellung:** In anderen Studien wird diese Art auch als *mapping* oder *catching* bezeichnet (Holgersson et al., 2016; Baccaglini-Frank & Maracci, 2015). Die gezeigten Figuren werden von den Lernenden direkt nachgeahmt, indem die Finger auf den Früchten oder in nahezu derselben Konfiguration wie gezeigt platziert werden. Die Varianten 1a, 2a, 3a, 3b, 4a, 4b, 5a und 5b sowie Kombination daraus können damit 1:1 dargestellt werden. In diesem Fall wird die Anzahlerfassung nicht vorausgesetzt, genauso wenig wird von Teil-Ganze-Verständnis ausgegangen.

- **Teil-Ganze-Konzept:** Werden Gesamtanzahlen kleiner oder gleich 5 in einer Hand oder Gesamtanzahlen von mehr als 5 in einer vollen Hand und nebeneinander liegenden Fingern der zweiten Hand dargestellt, wird auf den kognitiven Prozess des Zusammenfügens verwiesen. In diesem Fall wäre ein Verständnis des Ganzen und demnach des Teil-Ganzen vorhanden.

Zuletzt soll über die Verwendung der Finger die **Finger Gnosis** gefördert werden (Holgersson et al., 2016). Fingu selbst übt die Finger Gnosis jedoch nicht gezielt ein, sondern setzt diese voraus. Im wiederholenden Üben können die motorischen Fertigkeiten aber verfeinert werden. Die freie Wahl der Finger soll dahingehend Hürden abbauen, sodass sich die Kinder eher auf das Problemlösen der Aufgaben, anstatt auf die motorischen Fertigkeiten fokussieren müssen (Holgersson et al., 2016). Nicht selten zeigen Kinder allerdings noch nicht ausgeprägte motorische Fertigkeiten, selbst bei einer freien Wahl der Finger (vgl. Benz et al., 2015).

8.3 Entwicklung der Interaktionen

„In einem erfolgreichen Lernprozess verschieben sich insbesondere Handlungen zu Operationen, um darauf neue, komplexere Handlungen aufbauen zu können“ (Etzold et al., 2018, S. 4). Im Hinblick auf die Hierarchie der Tätigkeiten, Handlungen und Operationen sollten sich die Lernenden über die Interaktion mit Fingu entwickeln (vgl. Etzold et al., 2018). Entsprechend des ACAT-Review-Guides sollen daher mögliche Tendenzen hypothetisch diskutiert werden (Etzold et al., 2018).

Gemäß der Phaseneinteilung der Aufgaben nach Barendregt et al. (2012) gibt es zwei übergeordnete Tätigkeiten: Die Anzahlerfassung und die Anzahldarstellung.

Bezüglich der **Anzahlerfassung** handelt es sich vor allem um die (Quasi-)Simultanerfassung und das Zählen, welche verinnerlicht werden sollen (vgl. Etzold et al., 2018). Zugehörige Handlungen oder Operationen, je nach Entwicklungsstands des Kindes, sind beispielsweise das sichere Beherrschen der Zahlwortreihe oder das korrekte Zusammenfügen der simultanerfassten Teile zu einem Ganzen.

Hinsichtlich der **Anzahldarstellung** steht stets die Externalisierung mithilfe der Finger im Fokus (Ladel, 2017). Dazu müssen zu Beginn kognitive Prozesse zur Auswahl der Finger stattfinden, die motorischen Fertigkeiten zum Verwenden der ausgewählten Finger ausgebildet und schließlich die Finger und Hände zeitgleich auf dem Bildschirm platziert werden. Diese Handlungen sollten den Entwickler:innen zufolge über eine verbesserte Finger Gnosis ausgebildet und schließlich zu Operationen transformiert werden (Holgersson et al., 2016).

Eine weitere Möglichkeit der Aufgabenlösung ist der **Anzahlvergleich**. Nach Sarama und Clements (2009) sind Kinder ab einem Alter von zwei bis drei Jahren bereits *Object Corresponders*. Damit sollte das 1:1-Zuordnen von Fingern und gezeigten Früchten sicher beherrscht werden. Die *Visual Comparison* spielt hierbei eher eine untergeordnete Rolle, da im Falle der Aufgabenlösung stets Finger und damit *Objects* zum Vergleich verwendet werden müssen.

Zuletzt sollte auch das **Teil-Ganze-Verständnis** gefördert werden (Holgersson et al., 2016). Da jedoch keine Handlung in Fingu gezielt darauf aufbaut, ist dahingehend keine Entwicklung von Handlungen zu Operationen feststellbar. Es könnte lediglich gemutmaßt werden, dass, falls das Kind die wahrgenommene Anzahl zunehmend zusammengefasst darstellt, der Prozess des Zusammenfügens gefördert wird.

8.4 Eignung von Fingu für die Vermittlung des mathematischen Objekts

Nachdem nun die möglichen Lernprozesse mit Fingu erläutert wurden, soll nun synthetisiert werden, ob sich die Lernapp für die Vermittlung des mathematischen Objekts eignet (Etzold et al., 2018). Dazu gehören sowohl fachdidaktische und fachliche Überlegungen als auch die Berücksichtigungen von Designprinzipien im Multimediadesign (Etzold et al., 2018).

Diese Frage, ob sich Fingu für die Vermittlung des Objekts eignet, ist nicht so einfach zu beantworten, allein weil nach den mehreren Objekten differenziert werden muss. Grundsätzlich lässt sich hinsichtlich der Anzahlwahrnehmung feststellen, dass sowohl das Zählen als auch die (Quasi-)Simultanerfassung über die Verwendung der App gefördert werden kann (vgl. Tucker & Johnson, 2020).

Die **(quasi-)simultane Wahrnehmung** von Objekten kann trainiert und Muster erkannt werden (Wolters et al., 1987; Wästerlid, 2020). Folglich ist eine Förderung diesbezüglich möglich, weil in Fingu verschiedene Anzahlen in geordneten Sets innerhalb kurzer Zeit bestimmt werden müssen.

Clements und Sarama (2009) beschreiben, dass bei der Entwicklung von Aufgaben, die auf die (Quasi-)Simultanerfassung abzielen, darauf geachtet werden sollte, verschiedene Formationen derselben Anzahl an Elementen zu verwenden (Clements & Sarama, 2009). In Fingu wird dies umgesetzt, indem verschiedene Konfigurationen, a und b, sowie Gesamtanzahlen in undifferenzierten und differenzierten Ganzen visualisiert werden (Tucker & Johnson, 2020). Dies führt Neuman (1987) zufolge außerdem dazu, Zählstrategien entgegenzuwirken und sich auf Basis der gezeigten Teil-Ganze-Strukturen für eine (Quasi-)Simultanerfassung zu entscheiden. Damit lässt sich schlussfolgern, dass Fingu für das Einüben der (Quasi-)Simultanerfassung geeignet sein kann. Nur ist es nicht die einzige Strategie, die von den Lernenden angewandt werden kann.

So erwähnen Tucker und Johnson (2020) darüber hinaus, dass neben der Simultanerfassung eventuell das **Schätzen** eine Rolle spielen könnte. Bei falschen Antworten von fünf und zehn sei davon auszugehen, dass sie geschätzt wurden. Für das Anwenden von Schätzfähigkeiten eignet sich Fingu allerdings nicht, da stets präzise Antworten gefordert werden.

Die von den Entwickler:innen vielfach vermiedene Strategie des **Zählens** wird nicht selten von Kindern umgesetzt (vgl. Baccaglini-Frank & Maracci, 2015). Zwar sollte die Zeitlimitierung und die Teil-Ganze-Darstellung den Fokus auf die (Quasi-)Simultanerfassung lenken (Holgersson et al., 2016; Neuman, 1987), jedoch ist besonders bei der ersten Konfrontation mit einer Aufgabe das Zählen oft noch möglich. Über die Erhöhung der Gesamtanzahl pro Level und der Verkürzung der Zeit, könnte das Kinder dazu motivieren, schnelleres Zählen oder Zählen in Mehrfachschritten zu trainieren. Daher kann Fingu ebenfalls für das Üben von Zählstrategien verwendet werden. Zugegebenermaßen wird das jedoch bei höheren Anzahlen und kürzerer Antwortzeit herausfordernder, sodass dann auf Prozesse der *pattern recognition*, der (Quasi-)Simultanerfassung oder des Anzahlvergleichs zurückgegriffen werden könnte.

Zuletzt spielt der Anzahlvergleich über die **1:1-Zuordnung** von Früchten und Fingern eine Rolle. Auch er kann trainiert werden (Sarama & Clements, 2009). Deshalb sollten bereits vor Schuleintritt Lerngelegenheiten geschaffen werden, die eine 1:1-Zuordnung erfordern (Benz et al., 2015; Gelman & Gallistel, 1986). Die Verwendung von Fingern, beispielsweise über das Zeigen oder hier über das Tippen auf die Objekte, kann dabei dienlich sein (Baccaglini-Frank & Maracci, 2015). Demnach könnte sich Fingu auch hier für die Vermittlung von 1:1-Zuordnungen eignen.

Fingu gibt nicht vor, wie genau Anzahlen erfasst werden soll. Daher sind mehrere Strategien möglich, die alle in der Interaktion mit Fingu gefördert werden können, aber nicht müssen. Deshalb ist es wichtig, Gedanken zu **verbalisieren** oder von den Kindern eingesetzte Strategien explizit zu diskutieren, um so einen Lerneffekt zu bewirken (vgl. Benz et al., 2015). Über die sprachliche Komponente wäre erkennbar, ob die Subjekte zwei Sets als ein Ganzes erfassen oder nur jedes für sich wahrnehmen. Zum derzeitigen Zeitpunkt eignet sich Fingu nur sehr marginal für die Vermittlung des **Teil-Ganze-Konzepts**, insbesondere, wenn es nicht explizit hervorgehoben wird. Denn es ist lediglich relevant, falls mithilfe der Quasisimultanerfassung Teile aktiv zu einer Gesamtanzahl zusammengefügt werden.

In der Anzahldarstellung spielen besonders die **Finger Gnosis** und die Hand-Augen-Koordination eine Rolle (Baccaglini-Frank & Maracci, 2015). Sie werden in Fingu nicht gezielt vermittelt, sondern für das Erreichen höherer Level vorausgesetzt. Über die Wiederholung von Leveln könnten sie jedoch trainiert werden, wie Gracia-Bafalluy und Noël (2008) bestätigen.

Von Holgersson et al. (2016) wird zuletzt die Ausbildung des **Zahlensinns** über die Interaktion mit Fingu beschrieben. Da der Zahlensinn sowohl die Wahrnehmung als auch die Darstellung einer Anzahl an Elementen inkludiert, kann unabhängig der genauen Art dieser Prozesse davon ausgegangen werden, dass Fingu Grundlagen des Zahlensinns ausbildet, einübt und fördert (Tucker & Johnson, 2020). Hierbei steht vor allem der Kardinalzahlaspekt hinsichtlich der Mächtigkeit von Mengen im Vordergrund (Benz et al., 2015). Ein umfassender **Zahlbegriff** wird demnach nicht erworben. Da Fingu nicht konkret fordert, dass den Mengen ein Zahlwort oder eine Ziffer zugeordnet wird, kann abgesehen davon nur noch die 1:1-Zuordnung nach Piaget und Szeminska (1965) dem Zahlbegriffserwerb zugeschrieben werden.

Das **Design von Fingu** unterstützt die Vermittlung dieser Objekte insofern, als dass über die Multi-Touch-Oberfläche des iPads mehrere Externalisierungen deutlich gemacht werden können (Ladel & Kortenkamp, 2013). Diese Art des Inputs limitiert jedoch auch: Handlungen, die Lernende zur Externalisierung ihres Wissens durchführen können, dienen gleichzeitig der Internalisierung von spezifischen Verhältnissen der Elemente (Ladel & Kortenkamp, 2013). Deutlich wird das beispielsweise an der notwendigen Simultandarstellung der Anzahl, anstatt zählende, ordinale Darstellungen ebenfalls zu akzeptieren. Trotzdessen kann mithilfe der Multi-Touch-Technologie die Entwicklung eines Zahlensinns unterstützt werden (Baccaglini-Frank & Maracci, 2015; Ladel, 2017). Wichtig ist dabei vor allem, dass die App Designprinzipien entsprechend berücksichtigt. Bei Fingu lässt sich dahingehend etwas Kritik äußern:

- Entsprechend der **Redundanz-Prinzipien** werden Informationen zu der Anzahl nur über einen sensorischen Kanal dargestellt, nämlich visuell (Moreno & Mayer, 2007). Dafür wird sich dabei nicht nur auf die wesentlichen Informationen beschränkt, sondern weitere Informationen visualisiert: Beispielsweise werden manchmal Äpfel, Orangen, Erdbeeren oder Birnen zur Anzahldarstellung verwendet, anstatt sich auf eine Sorte oder eine Gestaltung zu fokussieren. Die Art der Frucht könnte von der Anzahl ablenken (vgl. Moreno & Mayer, 2007). Auf fachdidaktischer Ebene ist es jedoch sinnvoll, verschiedene Gegenstände zur Anzahlerfassung zu nutzen, um so gemäß des Abstraktionsprinzips kenntlich zu machen, dass diese Anzahlerfassungsprozesse für alle Elemente einsetzbar sind (Benz et al., 2015).

- Wegen der **limitierten Aufnahmefähigkeit** der einzelnen, sensorischen Kanäle, sollten Lerngegenstände auf Grundlage von mehreren Wahrnehmungskanälen präsentiert werden (Mayer, 2014). Die Gesamtanzahl als Früchte zu visuell repräsentieren, stellt dahingehend jedoch nur eine Variante dar. Über die Aufforderung zur Anzahldarstellung mithilfe der Finger wird dann ein zweiter Kanal aktiviert.

Fingu selbst beschränkt sich jedoch auf lediglich die rein visuelle Form. Die auditive Untermalung mit Musik kann zwar über motivationale Faktoren erklärt werden, sie hat jedoch nichts mit dem Lerngegenstand zu tun und könnte daher als Ablenkung und somit kognitive Überlastung empfunden werden (vgl. Sweller, 1999). Dafür ist die visuelle und auditive Gestaltung von Feedback und demnach der dialogischen Anteile im Spiel der Theorie entsprechend aufgearbeitet (vgl. Moreno & Mayer, 2007). Töne und Charaktere werden gemäß des *Temporal Contiguity Principle*s zeitlich nah beieinander darstellt.

- Nach Hillmayr et al. (2020) ist schnelles **Feedback** hilfreich, was in Fingu umgesetzt wird. Hier wird jedoch lediglich korrektives Feedback integriert, obwohl letzteres noch gewinnbringender wäre (Moreno & Mayer, 2007). Die Position der Finger, die ursprünglich mit Fingerabdrücken visualisiert wurden, ist mit Erscheinen des Feedbackfensters nicht mehr deutlich (vgl. Abbildung 6). Genauso wird Anzahl der angezeigten Früchte durch das Feedbackkästchen teilweise verdeckt. Somit ist es den Kindern oft nicht mehr möglich, im Nachhinein ihren Fehler zu erkennen, indem sie beispielsweise die Anzahl ohne Zeitdruck erfassen oder erkennen können, welche ihrer Finger von Fingu (nicht) erfasst wurden. Das Reflektieren der eigenen Antworten ist daher erschwert.

- Dabei ist das selbstständige Reflektieren für den Lernprozess sehr wichtig (Moreno & Mayer, 2007). Zusätzlich sollten Kinder ihren Denkprozess **verbalisieren** (Moreno & Mayer, 2007). Dies wird im Rahmen von Fingu kaum integriert, allerdings auch nicht aktiv verhindert. Die Kinder können durchaus ihre erfasste Anzahl benennen, es bringt ihnen nur keinen Vorteil im Spiel. Ihre Fehler können sie beispielsweise gemeinsam mit einer Lehrperson reflektieren.

- **Scaffolding** ist nur insofern implementiert, als dass Parameter im Vorfeld manuell in den Einstellungen angepasst werden können. Dass bei gehäufter Fehleranzahl automatisch bestimmte Aufgaben mehr Zeit erhalten oder bei gehäuften, korrekten Antworten komplexere Aufgaben gezeigt werden, fehlt in Fingu komplett. Auch das gezielte Üben von Aufgaben ist nicht möglich, beispielsweise wenn es Probleme mit einer konkreten Konfiguration geben sollte. Hilfe ist daher nur von außen, also über verbales Feedback nach Beobachtungen, möglich.

Als Fazit lässt sich also festhalten, dass sich Fingu sowohl für die Vermittlung von der (Quasi-)Simultanerfassung, vom Zählen, vom Anzahlvergleich und ggf. von Simultandarstellungen mit Fingern eignet, keines davon aber je konkret forciert wird. Um später darauf formales Wissen aufbauen zu können, ist die angemessene, sprachliche Begleitung durch *more knowledgeable persons* notwendig (vgl. Benz et al., 2015). Das Teil-Ganze-Verständnis wird kaum aktiv gefördert. Designprinzipien zur Gestaltung digitaler Lernumgebungen wurden größtenteils beachtet, wobei hier an gewissen Aspekten Kritik geäußert werden kann.

8.5 Verwendung von Fingu im Lernkontext

Gemäß des letzten Schritts des ACAT-Review-Guides wird dargestellt, wie die App in Lernsituationen verwendet werden kann (Etzold et al., 2018). Dabei wird nicht nur die zielgruppengemäße Gestaltung und Aufarbeitung des Themengebiets aufgegriffen, sondern auch konkrete Möglichkeiten dargestellt, wie der Einsatz der App vollzogen werden kann (Etzold et al., 2018).

Fingu als Lernspiel zur Förderung des Zahlensinns und des Zahlbegrifferwerbs bereits im Kindergarten einzusetzen, lässt sich vielfältig begründen:

Hinsichtlich der Aufarbeitung des **Themengebiets** bietet Fingu eine kindgerechte Lerngelegenheit, sodass Grundlagen für motorische sowie kognitive Fertigkeiten ausgebildet werden (vgl. Benz et al., 2015). Fingu integriert einige von PIKAS (2023) genannten vorschulischen mathematischen Basiskompetenzen oder zentralen Aktivitäten früher mathematischer Bildung: verschiedene Anzahlen in der Umwelt zu erfassen und wahrzunehmen, konkret Anzahlen bis 4 simultan erfassen zu können, Anzahlen zu vergleichen und Gegenstände zu zählen. Zudem lässt sich Fingu als Aktivität zur Förderung der Hand-Augen-Koordination verstehen, was ebenfalls förderlich ist (PIKAS, 2023). Die Ausbildung dieser Fertigkeiten findet ungefähr im Vorschulalter statt, weshalb diese Objekte der Zielgruppe angemessen sind.

Über Aktivitäten mit Fingu wird **informelles Wissen** bereits vor Schuleintritt aufgebaut, was für die weitere Schullaufbahn von Bedeutung ist (Benz et al., 2015).[11] Mehrere Studien zeigen, dass die Fähigkeiten der Mengenerfassung, des Mengenvergleichs, des Zählens und der Zahlwiedergabe besonders auch mit den Fingern in einem signifikanten Zusammenhang zu späteren Mathematikleistungen stehen (Benz et al., 2015; Krajewski, 2003; Dornheim, 2008). Mit geeigneter Frühförderung kann damit Mathematikschwächen entgegengewirkt werden (Grüßung & Peter-Koop, 2008; Kaufmann, 2003; Benz et al., 2015).

Obwohl keine gezielte Verknüpfung von Vorwissen integriert wird (Hillmayr et al., 2020), ist die **Gestaltung** doch recht intuitiv: Das Design der App ist auf die Verwendung durch junge Kinder ausgelegt, indem vieles vereinfacht dargestellt wird und wenig Anforderungen an die Benutzenden gestellt werden. In den wesentlichen Bereichen der App gibt es kaum Text, stattdessen wird mit wiederkehrenden Bildern und Symbolen gearbeitet. Deshalb ist es auch nicht sonderlich ausschlaggebend, dass die App bisher nur in englischer und schwedischer Sprache verfügbar ist.

Auch wenn die Verwendung von **(Multi-Touch-)Technologien** im Kindergarten oft als kritisch angesehen wird, hält sie doch zahlreiche Vorteile bereit, wie im Kapitel zu den digitalen Werkzeugen beschrieben wurde (vgl. Ladel & Kortenkamp, 2012). Damit ist der Einsatz von Fingu in Ergänzung zu physischen Materialien durchaus vorstellbar und gerechtfertigt.

[11] Genauer beschrieben wurde das im Kapitel der frühen mathematischen Bildung.

Fingu stellt als Lernspiel einen **spielerischen Zugang** zu den mathematischen Objekten dar. Wie Einsiedler (1989) und Marcon (1999, 2002) bereits früh zeigten, erzielt ein spielerischer Zugang zur Mathematik bei Kindern die höchsten Effekte. Damit hat Fingu gute Chancen, die Motivation der Kinder zu gewinnen und zu halten, sodass die eröffneten Lerngelegenheiten auch gerne und aktiv von den Kindern genutzt werden (Benz et al., 2015). Innerhalb von Spielen steigt die kognitive Involvierung bei Kindern (Pintrich, 2003). Dies unterstützt Mayers (2014) Forderung, dass die Lernenden aktiv mit den Lerninhalten interagieren sollen. In der App arbeiten sie aktiv mit den Inhalten und beeinflussen so den Lernprozess.

Über das schrittweise Freischalten der Level wird sichergestellt, dass die Kinder mit Aufgaben gemäß ihres Leistungsstands und ihrer Fähigkeiten konfrontiert werden. Darüber und auf Basis des eigenen Lerntempos erlaubt das **Differenzierung** und kann besonders rechenschwache Kinder zur Auseinandersetzung mit Mathematik anhalten (Heinz, 2015; Koolstra, 2001). Moreno und Mayer (2007) heben außerdem hervor, dass Kinder besser lernen, wenn sie die Geschwindigkeit, in der sie die Materialien bearbeiten und wahrnehmen, selbst bestimmen können. In Fingu ist dies teilweise möglich, indem nach jeder Aufgabe ein Fenster eingeblendet wird und die Kinder selbstständig entscheiden können, wann sie zur nächsten Aufgabe fortschreiten, indem sie auf den Pfeil drücken. Während der Aufgabe selbst können sie ebenfalls pausieren, jedoch läuft die Zeit direkt weiter, sobald sie die Pausierung aufheben. Andere Parameter lassen sich für alle Aufgaben in den Einstellungen anpassen und erlauben so Anpassungen an die Lernenden. Hinsichtlich konkreter Aufgaben oder Aufgabentypen kann jedoch nicht differenziert werden.

Eingesetzt werden kann die App bisher nur **allein**, was produktives, paarweises Arbeiten kaum zulässt (Hillmayr et al., 2020). Lernende können sich lediglich abwechseln oder darüber austauschen. Ein Vorschlag für einen kooperativen Einsatz von Fingu wäre, ein Kind mit der App interagieren zu lassen und ein anderes schaut zu, korrigiert oder muss die Anzahl an Objekten verbalisieren. Auch könnte das Kind, das mit Fingu interagiert, dazu angehalten werden, seine Gedanken und die Gesamtanzahl zu verbalisieren, wobei das zweite Kind das überprüft oder Nachfragen stellt, z.B. „Kann die Gesamtanzahl auch in anderen Teilungen dargestellt werden?"

Die **Rolle der Lehrkraft** oder der Erzieher:innen kann sich hier anders darstellen als in üblichen Lernarragements. Ross (1989) verweist darauf, dass „*[m]aniplative materials can serve as a useful communication tool between teacher and student – they give us something to talk about*" (S. 50). In dem Kommunikations- und Austauschprozess zwischen Lehrenden und Lernenden haben Lehrende und die Fragen, die sie stellen, einen Einfluss auf die Externalisierung des Kindes (Ladel & Kortenkamp, 2012). In der Interaktion mit digitalen Lernspielen wie Fingu werden die Lernenden nun vermehrt angehalten, ihr eigenes Wissen zu Zahlen und und deren Beziehungen zueinander zu konstruieren (Ross, 1989). Im Arbeiten mit digitalen Medien kommunizieren Lernende daher eher aufgabenspezifisch als rollenspezifisch, in dem Sinne, als dass eine Lehrperson eher als ein Coach aufgefasst wird (Ladel & Kortenkamp, 2013). Damit wird eine flachere Hierarchie erzeugt.

Nichtsdestotrotz ist es wichtig, dass Pädagog:innen die Lernenden beobachten und in ihrem Lernprozess unterstützen. Beispielsweise kann die App nicht erfassen, wie die Lernenden mit ihren Fingern agieren, bevor sie den Bildschirm berühren (Ladel & Kortenkamp, 2013). In der Beobachtung wird dann deutlich, ob sie ihre Finger zuerst abzählen, bevor sie sie auf dem Bildschirm platzieren oder ob andere Prozesse stattfinden. Auf Basis dessen können sie Feedback geben und so ggf. Fehlvorstellungen aufdecken. Dazu können differenzierte Impulse gegeben werden, bei denen verschiedene Strategien erprobt werden oder die Gesamtanzahl auch verbalisiert werden sollte (Benz et al., 2015). Dies fördert den Lernprozess.

Zusammenfassend kann daher festgehalten, dass Fingu zielgruppengetreu eingesetzt werden kann und Kinder in der Ausbildung eines kardinalen Zahlenkonzepts unterstützen kann. Für die Aufgabenlösung sind verschiedene Prozesse möglich: die (Quasi-)Simultanerfassung, das Zählen oder der Anzahlvergleich, die über die Interaktion mit der App gefördert werden können, aber nicht müssen. Das in Fingu integrierte Teil-Ganze-Konzept lässt sich nur in Ansätzen rechtfertigen. Um dies effektiv zu behandeln, ist eine Verbalisierung der Gedanken unumgänglich. Dazu ist ein kooperatives Arbeiten sinnvoll. In jedem Fall sollte über die App hinaus erklärendes Feedback von Peers oder Pädagog:innen gegeben werden, um den Lernprozess zu unterstützen.

9 Eigene Studie

Angelehnt an die bereits existierenden Studien zu Fingu wurde im Rahmen dieser Masterarbeit eine Videostudie zu Fingu nach den Grundlagen qualitativen Denkens nach Mayring (1996)[12] geplant, durchgeführt und ausgewertet. Die Forschungsfrage der Studie war:

Wie externalisieren Kinder die von Fingu dargestellten Anzahlen mithilfe ihrer Finger?

Dazu sollten sowohl Anzahlerfassung, als auch -darstellung, genauso wie Anzahlvergleiche und Teil-Ganze-Beziehungen in die Überlegungen und Auswertungen integriert werden. Anhand der in der Studie gewonnenen Erkenntnisse sollen Rückschlüsse gezogen werden, ob und inwiefern Fingu die Ausbildung der gewünschten Kompetenzen unterstützt. Ferner soll abgeleitet werden, wie eine reichhaltige Lernumgebung gestaltet werden kann (vgl. Mayring, 1996). Die Schlussfolgerungen bezüglich der Internalisierungen werden über die *Embodied Cognition* begründet.

9.1 Methoden

Die Videostudie wurde an einem Kindergarten in Potsdam mit zehn Vorschulkindern durchgeführt und die gewonnenen Daten anschließend anonymisiert. Im Vorfeld wurde das Einverständnis der Erziehungsberechtigten zur Videoaufzeichnung erfragt. Dabei wurden sie über den Zweck und Ablauf der Untersuchung informiert. Für diese Studie wurde Videomaterial von insgesamt **104,5 Minuten** erhoben und ausgewertet. Dazu wurden alle erfassten **873 Aufgaben** analysiert. Hervorzuheben ist hierbei, dass die Anzahl an bearbeiteten Aufgaben pro Kind stark variiert: Die empirische Standardabweichung beträgt 47,83. Die geringste Anzahl an bearbeiteten Aufgaben hatte Kind 2 mit 20 Aufgaben, die höchste Kind 4 mit 197.

9.1.1 Durchführung der Studie

Die Untersuchung fand unter **nahezu natürlichen Bedingungen** statt: Jeden Dienstag von 9-11 Uhr üben die Vorschulkinder mathematische Grundlagen. Sie nennen das vor Ort den „Zahlenzirkus“. Hier werden verschiedene Stationen aufgebaut, an denen mathematische Erkundungen stattfinden können. Am Untersuchungstag bestand eine dieser Stationen darin, gemeinsam mit der Versuchsleiterin das digitale Lernspiel Fingu auszuprobieren. Dies fand im angrenzenden Lernraum statt, sodass die meiste Zeit über nur die Versuchsperson und die -leiterin im Raum waren. Die anderen neun Kinder waren zusammen mit dem Erzieher im Nachbarraum, wobei ab und zu Kinder auch vorbeikamen und zuschauten. Der Erzieher unterband dies meist zügig, sodass die Versuchspersonen größtenteils ungestört arbeiten konnten. Zu Beginn des Zahlenzirkus’ stellte sich die Versuchsleiterin mit ihrem Vornamen vor und beschrieb, dass sie ein Spiel auf dem iPad mitgebracht hätte. Ihr Ziel sei es, dieses Lernspiel zu analysieren und dazu hätte sie eine Videokamera mitgebracht.

[12] Erläuterungen zu den Grundlagen qualitativen Denkens sind im Anhang zu finden.

Beim Videographieren seien die Kinder kaum zu sehen und es sei lediglich für die Auswertung des Spiels gedacht. Es gab keine Fragen. Anschließend ging die Versuchsleiterin gemeinsam mit einem Kind in den Lernraum und begann. War ein Kind fertig, begleitete die Versuchsleiterin es zurück und holte das nächste Kind ab.

Über einen **ähnlichen Ablauf** sollten situationsgebundene Störvariablen so konstant wie möglich gehalten werden: alle Kinder arbeiteten am selben Platz, hatten dieselben Versuchsbedingungen und verwendeten dasselbe Tablet. Andere Faktoren, wie die unterschiedlichen Uhrzeiten, zu denen die Kinder begannen, oder auch die zufällig generierten Aufgaben von Fingu, konnten nicht einheitlich gehalten werden.

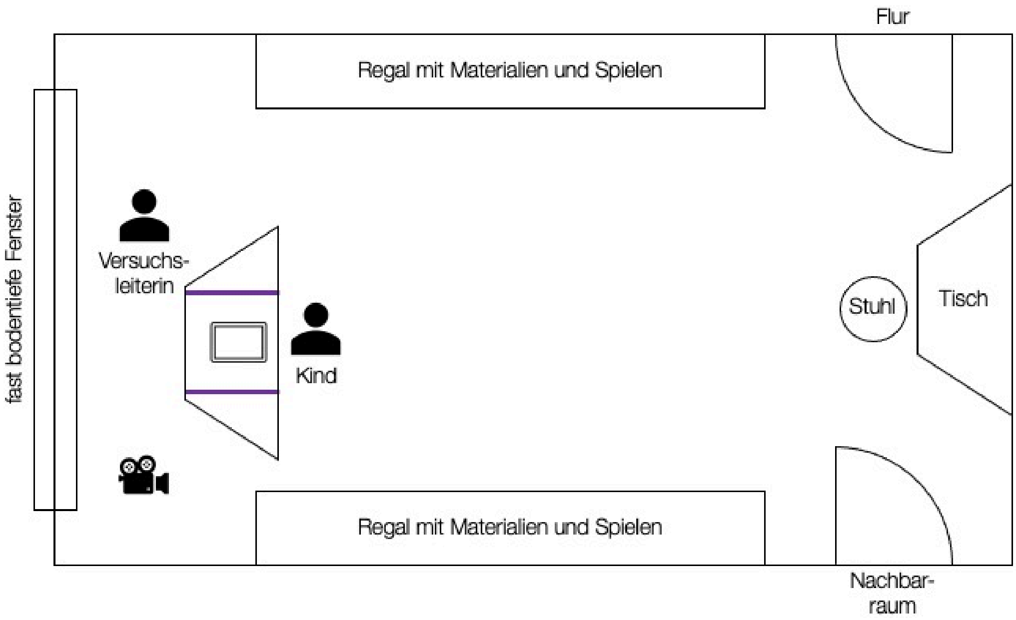

Abbildung 10: Gestaltung des Lernraums (eigene Skizze).

Im **Lernraum** befanden sich zwei Türen, zwei Regale, zwei Tische mit Stühlen und eine Fensterfront. In den Regalen standen Lernmaterialien und Spiele. Wie auf der Skizze zu sehen, setzte sich die Versuchsperson so auf einen Stuhl an den Tisch, dass sie aus dem Fenster schauen könnte. Das sollte eine freundliche Atmosphäre schaffen. Die Kamera stand etwas seitlich, damit sich die Kinder nicht zu sehr von ihr ablenken ließen. Die Kamera stand auf einem Stativ und erfasste von oben die Hände sowie den Bildschirm des iPads. Damit die Kinder das iPad nicht aus dem Sichtfeld der Kamera bewegten, wurden mit buntem Klebeband farbige Markierungen am Tisch angebracht. Die Kinder wurden dazu angehalten, das Tablet innerhalb dieser Grenzen zu halten sowie es nicht vom Tisch abzuheben. Die Versuchsleiterin setzte sich etwas seitlich gegenüber vom Kind hin. So war sie für die Kinder ansprechbar und konnte verfolgen, was auf dem Bildschirm passierte. Gleichzeitig stand sie nicht im Blickfokus, damit sich die Kinder nicht zu sehr von ihr ablenken ließen oder unter Druck gesetzt fühlten.

Auf dem **Weg zum Lernraum** fragte die Versuchsleiterin die Kinder nach dem Namen des Kindes, um es konkret ansprechen zu können. Sie verwies auf den Sitzplatz und startete die Videoaufnahme. Anschließend erklärte sie, wie Fingu funktioniert. Dieses Vorgehen begründet sich in den Aussagen von Holgersson et al. (2016), die meinen, dass Fingu für die Vorschule geeignet sei, sofern die Kinder von einer *more knowledgeable person* eingeführt werden. Für eine höhere Durchführungsobjektivität wurde die **Erklärung** für die Kinder nahezu standardisiert:

- Zuerst erklärte die Versuchsleiterin das Ziel, so viele Finger auf den Bildschirm zu legen, wie Früchte angezeigt werden. Das zeigte sie anhand von zwei bis vier Aufgaben vor. Das Tablet[13] hielt sie dabei so zu den Kindern, als wäre es ein Fernseher. Sie selbst schaute von oben darauf. Dadurch sollten die Kinder die Aufgaben bereits aus der Perspektive sehen, wie sie ihnen im Anschluss auch begegnen. Das soll kognitive Hürden verringern.

- Die Versuchsleiterin achtete beim Antworten darauf, dass sie mindestens einmal zwei Sets mit einer Hand zusammengefasst hat und auch eine Aufgabe in einer anderen Teilung mit den Fingern zeigte, als sie dargestellt waren. Es wurde nicht gezählt und nicht 1:1 dargestellt. Da Fingu Aufgaben zufällig generiert, unterscheiden sich die für die Erklärung genutzten Aufgaben zwischen den Kindern. Je nachdem, wie oft ein oder zwei Sets gezeigt wurden, waren zwei bis vier Aufgaben nötig, um beide Varianten durchzuführen.

- Es wurde nicht gleichzeitig zum Antworten die Gesamtanzahl benannt, da parallel die Erklärungen vorgenommen wurden. Dabei waren diese angelehnt an die Hilfestellungen der Erklärungsseite. Beim Antworten wurde berücksichtigt, dass ...
  - die Finger beim Antworten nicht gezielt auf oder neben den Früchten platziert wurden. Damit sollte gezeigt werden, dass die Finger überall auf den Bildschirm gelegt werden dürfen. Das wurde zudem verbalisiert.
  - die Finger etwas länger auf dem Bildschirm festgehalten wurden, um eine Antwort zu geben. Das wurde nicht explizit verbalisiert. Dafür wurde bei der letzten, gezeigten Aufgabe nur kurz auf den Bildschirm getippt, um zu zeigen, dass ein zu kurzes Halten nicht zum Einloggen der Antwort führt.
  - bei der letzten, gezeigten Aufgabe nach dem Tippen abgewartet wurde, bis die Früchte ausgeblendet waren, um zu antworten. Dazu wurde ebenfalls gesagt, dass, nachdem die Früchte ausgeblendet sind, noch etwas Zeit übrig bleibt, eine Antwort abzugeben.

- Abschließend wurde nach Verständnisproblemen gefragt. Kein Kind äußerte sich dahingehend. Alle begannen daraufhin, sich ihrem Tablet zuzuwenden.

[13] Das war ein anderes iPad als das, was vor den Kindern lag.

Entweder schalteten die Kinder das Tablet an oder, falls sie dahingehend keine offensichtlichen Intentionen zeigten, übernahm die Versuchsleiterin das **Anschalten**. Das Spiel startete direkt auf der Profilseite des Kindes. Zur Vereinfachung und um Zeit zu sparen, wurde im Vorfeld für jedes Kind ein Profil erstellt. Jedes Kind hatte ein zugewiesenes Tier und als Namen wurde standardisiert die Variante „Kind [Nummer]“ gewählt, z.B. „Kind 1“, „Kind 2“, . . . , „Kind 10“.

Die Kinder tippten selbstständig auf den ersten Stern und begannen mit der Bearbeitung der Aufgaben des ersten Levels. Sie wurden nicht aktiv dazu angehalten, verbal ihre Handlungen zu kommentieren, viele taten es jedoch auch ohne Aufforderung. Nach etwa zehn Minuten wurden die Kinder dazu angehalten, ihr Spielen zu beenden. Ihnen wurde jedoch noch gestattet, ein Level zu Ende zu spielen, falls sie dies wünschten. Sollten sie vorher aufhören wollen, war dies erlaubt.

Zunächst sollte, angelehnt an die anderen Studien, nach dem Erklären kaum **verbales Feedback** der Versuchsleiterin erfolgen. Die Kinder sollten nach Spielbeginn selbstständig für sich spielen. Dies wurde bei den ersten drei Kindern so umgesetzt. Keines der Kinder bearbeitete Aufgaben über Level 1 hinaus, sie alle brachen vorzeitig ab.[14] Kurzfristig entschied sich die Versuchsleiterin daher, den Kindern doch Feedback zu geben, auch wenn dadurch die Durchführungsobjektivität verloren war. Damit erhoffte sie sich, dass die nachfolgenden Kinder eine höhere Motivation zeigen würden, mit dem Spiel zu interagieren, und so auch Daten zum Level 2 und höher erfasst werden können. Ab Kind 4 wurden deshalb korrekte Lösungen gelobt mit verbalen Ausdrucken wie „Super!“, „Toll!“ oder „Das war richtig gut!“ Zudem wurde bei falschen Antworten erklärendes Feedback gegeben, z.B. „Eine Hand war etwas zu spät! Beide Hände müssen gleichzeitig auf den Bildschirm gelegt werden“ oder „Du kannst auch noch eine Antwort geben, nachdem die Früchte verschwunden sind.“ Das erklärende Feedback wurde in der Datenerfassung in den Bemerkungen notiert. Alle nachfolgenden Kinder erreichten mindestens das zweite Level und bis auf Kind 5 bearbeiteten sie mindestens 93 Aufgaben.

Zusammen mit Kind 10 ging die Versuchsleiterin zurück in den Nachbarraum zu allen anderen. Es wurde ein Sitzkreis gebildet und diskutiert, was sie heute alles gelernt hatten. Anschließend bedankte sich die Versuchsleiterin für die Teilnahme und die Kinder gingen zusammen mit dem Erzieher zurück in den Spieleraum.

Jedes Kind probierte Fingu einmal am Stück aus. Es kann nicht ausgeschlossen werden, dass sie nicht gemeinsam mit den Eltern im Vorfeld der Untersuchung das Spiel ausprobierten. Dafür gab es jedoch keine Indizien. Diese videographierte Interaktion ist die einzige Erhebung im Rahmen dieser Untersuchung. Weitere Verfahren zur Reliabilitätssicherung, wie das Implementieren von der Retest- oder Paralleltestmethode, wurden nicht eingesetzt.

[14] Kind 1 brach nach 26 Aufgaben ab, Kind 2 nach 20, Kind 3 nach 76. Keines der Kinder blieb länger als sieben Minuten.

9.1.2 Auswertung der Daten

Aus den Videos wurden Daten in tabellarischer Form gewonnen. Dazu wurden die zu beobachtenden Prozesse anhand von theoretisch begründeten Indikatoren festgehalten. Dies stellt bereits einen ersten Interpretationsprozess dar (vgl. Mayring, 1996). Um diesen so objektiv, reliabel und valide wie möglich zu halten, wurden für die einzelnen Kategorien jeweils spezifische Kriterien festgelegt. Diese basieren auf den theoretischen Ausarbeitungen zu den Prozessen der Anzahlerfassung und -darstellung, des Anzahlvergleichs sowie des Teil-Ganze-Verständnisses. Zudem orientieren sie sich an den Beschreibungen der Entwickler:innen sowie der bereits durchgeführten Studien. Sowohl die mathematischen Konzepte als auch die Herleitung der Indikatoren wurden im Verlauf der Arbeit bereits ausführlich beschrieben, weshalb an dieser Stelle auf eine erneute Darstellung verzichtet wird.

Die nachfolgenden, tabellarischen Daten wurden über direkte Beobachtungen aus den Videos entnommen:

- **Zeit:** Der Zeitstempel des Videos wurde notiert. Dabei lag 0:00 bei allen Kindern an dem Zeitpunkt, wo das iPad der Kinder angeschaltet wurde. Dies dient vorrangig der Orientierung, wie lange die Kinder bereits mit Fingu arbeiten. Die Zeitangabe zu der Aufgabe bezieht sich dabei auf den Zeitstempel des Videos zu dem Zeitpunkt, als die Aufgabe begann. Über die Zeitangaben ist nicht erkennbar, wie schnell die Kinder eine Aufgabe gelöst haben, da die Zeit des Feedbacks oder auch Gespräche zwischen Versuchsleiterin und Kind zwischen Beginn der einen Aufgabe und dem Beginn der nächsten ebenfalls inbegriffen ist.

- **Levelnummer:** Die Levelnummer gibt an, welches Level die Lernenden zu dem Zeitpunkt bearbeiten.

- **Aufgabennummer:** Die Aufgaben wurden von der ersten Aufgabe an durchnummeriert. Darüber kann beispielsweise die Gesamtanzahl an Aufgaben pro Kind erfasst werden.

- **Fingu – L und Fingu – R:** Es wird notiert, welche Anzahl an Elementen auf der linken (L) und auf der rechten (R) Seite des Bildschirms von Fingu dargestellt wurden. Damit wird die grundsätzliche Aufgabe für eine weitere Analyse gesichert.

- **Konf – L und Konf – R:** Es wird die Konfiguration der Sets links (L) und rechts (R) entsprechend der Tabelle von Holgersson et al. (2016) festgehalten.

- **Kind – L und Kind – R:** Die Zahl gibt an, wie viele Finger der linken (L) und der rechten (R) Hand zur Anzahldarstellung verwendet werden. Dabei werden auch die Finger gezählt, die außerhalb des Bildschirms, zu spät oder zu kurz, aber scheinbar intendiert verwendet wurden. Demnach muss die hier notierte Anzahl nicht mit der von Fingu registrierten übereinstimmen.

- **Finger – L und Finger – R:** In kodierter Form wird hier registriert, welche Finger der linken (L) oder rechten (R) Hand das Kind konkret zur Anzahldarstellung verwendet. Dabei steht eine 1 für den Daumen, eine 2 für den Zeigefinger, eine 3 für den Mittelfinger, usw.

- **Summe Fingu:** Dies stellt die Gesamtanzahl an Elementen dar, die Fingu anzeigt. Sie wird aus Fingu – L und Fingu – R berechnet.

- **Summe Kind:** Damit wird die Gesamtanzahl an verwendeten Fingern des Kindes dargestellt. Sie setzt sich aus Kind – L und Kind – R zusammen.

Anschließend wird aus den Fingerdarstellungen abgeleitet, ob die Kinder die Teil-Teil-Darstellungen, Zusammenfassungen, symmetrische Darstellungen oder andere Teilungen verwendeten. Dies konnte aus den zuvor erfassten Daten mithilfe von Formeln berechnet werden. Ein grünes Emoji mit weißem Haken symbolisiert, dass diese Form der Darstellung auftritt, ein rotes Kreuz, dass sie nicht auftritt. Es kann sein, dass mehrere oder keine dieser Kategorien bei einer Aufgabe zutreffen. Diese Kategorien werden in der Auswertung als „Externalisierungen“ bezeichnet.

- **L-Teil und R-Teil:** Diese Kategorien treffen zu, wenn die Anzahl des links (L) oder des rechts (R) gezeigten Sets von Fingu in der linken oder rechten Hand des Kindes wiedergefunden wird. Welche Hand dabei verwendet wird, ist irrelevant. Da die Händigkeit der Kinder keinen Einfluss auf die Antwortschnelligkeit und Präzision haben sollte (Broda et al., 2018), kann das links dargestellte Set nicht nur von der linken, sondern auch von der rechten Hand dargestellt werden. Analog begründet sich das rechts. Die Beobachtung, dass Kinder ihre Finger direkt auf den Früchten platzieren, fällt nicht in diese Kategorie. Es geht hierbei lediglich um die gezeigte Anzahl.

- **Teil-Teil:** Diese Kategorie trifft zu, wenn sowohl L-Teil als auch R-Teil als zutreffend markiert sind.

- **Zusammenfassungen:** Gemäß vorheriger Betrachtungen wird eine Fingerdarstellung als Zusammenfassung betrachtet, wenn eine Gesamtanzahl kleiner gleich 5 in einer Hand und eine Gesamtanzahl größer gleich 5 mit einer vollen Hand und nebeneinander liegenden Fingern der anderen Hand dargestellt werden.

- **Symmetrisch:** Holgersson et al. (2016) beschreiben, dass einige Kinder insofern symmetrische Antworten geben, als dass beide Hände dieselbe Anzahl an Finger zeigen. Das wird hier aufgegriffen, wobei unberücksichtigt bleibt, ob das Kind in beiden Händen dieselbe Art von Fingern verwendet, also ob beispielsweise eine Drei mit Daumen, Zeige- und Mittelfinger der einen Hand und Zeige-, Mittel- und Ringfinger der anderen Hand gezeigt wird. Eine symmetrische Darstellung kann nur erfolgen, wenn die Kinder eine gerade Anzahl an Fingern zeigen, da eine ungerade Anzahl in dieser Form nicht dargestellt werden kann.

- **Andere Teilung:** Wird das richtige Ergebnis gezeigt, aber weder eine 1:1-, Teil-Teil- noch eine symmetrische Darstellung oder eine Zusammenfassung verwendet, dann trifft diese Kategorie zu.

Darüber hinaus wurde manuell notiert, auf welche Art und Weise die Anzahlerfassung und -darstellung stattfand, sofern das anhand der nachfolgend beschriebenen Indikatoren ersichtlich war. In der Auswertung wird sich auf diese Kategorien als „Strategien“ bezogen. Auch hier steht der Haken für das Zutreffen und das Kreuz für das Nicht-Zutreffen der jeweiligen Kategorie.

- **Zählen der Früchte:** Wenn Kinder nacheinander auf die Früchte zeigen, dabei ggf. genickt oder verbal in der richtigen Reihenfolge Zahlworte genannt haben, dann wird das als Zählen der Früchte gewertet. Denn der Theorie zufolge liegt bereits bei dem sequenziellen Berühren oder Zeigen auf Elemente ein ordinales Zahlenverständnis vor, weshalb dies innerhalb dieser Kategorie inkludiert wurde.

- **Zählen der Finger:** Analog zur vorherigen Kategorie wird diese als zutreffend markiert, wenn die Kinder ihre Finger nacheinander auf den Bildschirm legen oder nacheinander ausstrecken und so auf das Hinlegen auf den Bildschirm vorbereiten. Dabei können verbale Äußerungen gemäß der Zahlwortreihe stattfinden, müssen sie aber nicht.

- **1:1-Darstellung:** Ähnlich zum *mapping* und *catching* trifft diese Kategorie zu, wenn die Kinder ihre Finger fast genau auf den Früchten positionieren oder zumindest angedeutet die gezeigte Konfiguration mit ihren Fingern nachahmen (vgl. Holgersson et al., 2016; Baccaglini-Frank & Maracci, 2015). Demnach wird jeder Frucht genau ein Finger zugeordnet.

- **Simultandarstellung:** Legen die Kinder die Finger ungefähr gleichzeitig auf den Bildschirm und trifft keine der vorherigen Kategorien zu, dann wird das als Simultandarstellung kategorisiert. Aufgrund des Designs von Fingu müssen die Kinder auch bei den anderen Kategorien die Zahlen simultan darstellen, insofern, als dass sie ihre Finger ungefähr gleichzeitig auf den Bildschirm legen müssen. Nichtsdestotrotz wird hierbei davon ausgegangen, dass keine Zählprozesse oder Vergleiche im Vorfeld stattfinden. Es kann damit ein Indiz für die (Quasi-)Simultanerfassung sein.

Zudem wurde die Kategorie der **Handfläche zum Körper** ergänzt. Ist ein Hand-Emoji zu sehen, dann zeigte die Handfläche des Kindes während der Bearbeitung der Aufgabe mindestens einmal nicht in Richtung des Bildschirms, sondern in Richtung des Körpers bzw. des Gesichts. In der Regel werden dabei verschiedene *finger symbol sets* ausprobiert und visuell kontrolliert, bevor sie auf den Bildschirm gelegt werden. Es kann auch auf motorische Schwierigkeiten hindeuten.

Ferner wurden die Fehler[15] der Kinder oder der App kategorisiert. Nicht jeder dieser Fehler muss dazu führen, dass die Kinder die falsche Anzahl angezeigt haben. Wird ein Fehler gemacht, wird das mit einem roten Kreuz markiert. Es können mehrere Fehler in einer Aufgabe gemacht werden. Woran die Fehlerkategorien genau gemessen werden, wird im Folgenden beschrieben:

- **F – Nur eines von zwei Sets:** Dieser Fehler tritt auf, falls ein Kind bei zwei dargestellten Sets lediglich die Anzahl von einem wiedergibt.
- **F – Volle Hand:** Dieser Fehler tritt auf, falls ein Kind nur alle Finger einer Hand oder die gesamte Handfläche auf den Bildschirm legt, obwohl 5 nicht die Lösung der Aufgabe ist.
- **F – Falsche Zahl:** Dieser Fehler tritt auf, falls ein Kind scheinbar intendiert die falsche Anzahl an Fingern auf den Bildschirm legt. Bekräftigt wird das meistens über verbale Aussagen, in der es die falsche Zahl nennt. In wenigen Fällen bereitet das Kind eindeutig diese Anzahl an Fingern vor, sodass davon auszugehen ist, dass nicht die korrekte Anzahl erfasst wurde. Es wird nicht als zutreffend markiert, wenn nur eines von zwei Sets erfasst wird.
- **F – Feinmotorische Probleme:** Diese Kategorie wird als zutreffend markiert, wenn Kinder deutliche Probleme im Auswählen, Ausstrecken und Platzieren der Finger zeigen. Sie ist gekennzeichnet durch viele Bewegungen in den Fingern, Korrekturen, Hilfen über die andere Hand und dem Versuchen mehrerer *finger symbol sets.*
- **F – Hand zu spät:** Dieser Fehler tritt auf, falls ein Kind zwar mit einer Hand den Bildschirm berührt, die zweite Hand jedoch deutlich zu spät auf den Bildschirm gelegt wird. Demnach wurde die Antwort von lediglich einer Hand von Fingu registriert.
- **F – Finger und Fingu:** In diese Kategorie fallen alle Fehler, bei der das Kind zwar die richtige Antwort gezeigt hat, die App das jedoch nicht korrekt registrieren konnte. Dies inkludiert das zu späte oder zu kurze Hinlegen einzelner Finger, wodurch Fingu eine andere Anzahl registriert als insgesamt gezeigt wurde. Es beinhaltet darüber hinaus den Fall, dass Finger nicht ganz auf dem Bildschirm positioniert wurden. Diese Fehler waren teilweise schwer zu erkennen, da das Kind mit seiner eigenen Hand manchmal den Blick auf einzelne Finger behinderte. Deshalb werden hier auch Fehler inkludiert, die auf andere Ursachen zurückzuführen sind, die mit Fingu zu tun haben oder nicht eindeutig erkennbar waren.
- **F – Zeit:** Dieser Fehler tritt auf, wenn das Kind innerhalb des Zeitlimits keine Antwort abgibt. Das inkludiert Fälle, bei denen nach Ablauf der Zeit noch Antworten gegeben wurden. Diese konnten dann jedoch nicht mehr von Fingu registriert werden.

[15] Es wird der Begriff „Fehler“ genutzt, da bei fast allen dieser Kategorien Fingu die Antwort der Kinder als inkorrekt wahrgenommen hat. Nur bei den Kategorien „Falsche Zahl“ und „Probleme mit den Fingern“ hat Fingu selten positives Feedback gegeben. Die Bezeichnung „Probleme“ wäre ebenfalls zutreffend.

Zuletzt wurden **verbale Äußerungen** des Kindes notiert, die aufgabenspezifisch waren. Einige Kinder erzählten zwischen den Aufgaben von privaten Angelegenheiten oder Erfahrungen, die zum Schutze der Kinder nicht festgehalten wurden. Zahlen wurden in Ziffernform notiert, es sei denn, es lagen Ausspracheschwierigkeiten oder Abweichungen vom Hochdeutschen vor. Verbales Zählen wurde nur festgehalten, wenn es besonders laut, deutlich oder ein Weiterzählen oder Zählen in Mehrfachschritten stattfand. Pausen innerhalb der Aussagen wurden über „...“ gekennzeichnet.

Die verbalen Äußerungen, die Anzahlen aus der Aufgabe beinhalteten, wurden anschließend in die Kategorien T-T-Verbal und Z-Verbal eingeteilt. Unter **T-T-Verbal** wird verstanden, dass die Aussage des Kindes die Anzahl der Sets separat widerspiegelt und es demnach die Teil-Teil-Darstellung benennt. Das sind oft Aussagen der Form „[Zahl] und [Zahl].“ **Z-Verbal** trifft zu, wenn die Gesamtanzahl beider Sets benannt wird. Dazu kann im Vorfeld gezählt werden. Besteht die Aufgabe nur aus einem undifferenzierten Ganzen, dann werden Aussagen, die eine Zahl beinhalten, beiden Kategorien zugeordnet.

Gelegentlich wurde in den **Bemerkungen** Anmerkungen zum Video oder zu nicht aufgabenspezifischen Aspekten notiert. Das sind beispielsweise Handlungen oder Fragen über das Themengebiet hinaus, Anmerkungen der Versuchsleiterin oder Aspekte zu Fingu.

Für die Analyse wurden **alle registrierten Aufgaben** verwendet. In anderen Untersuchungen, wie der von Kortenkamp et al. (2023), wurden die Aufgaben mit undifferenzierten Ganzen ausgeschlossen. Da einige Kinder diese jedoch ebenfalls in zwei Hände aufteilen und demnach das Ganze in zwei Teile zerlegen, wurden diese Aufgaben weiterhin in die Auswertung einbezogen.

In der Analyse wurde sich auf qualitative Veränderungen in der Externalisierung des Kindes fokussiert. Um diese sichtbar zu machen, wurde nach jeder Aufgabe die derzeitige Gesamtanzahl an korrekt gegebenen Antworten (**K-Kumulativ**) erfasst. Analog wurde dies für die Teil-Teil-Darstellungen (**T-T-Kumulativ**), Zusammenfassungen (**Z-Kumulativ**), symmetrische Darstellungen (**S-Kumulativ**) und andere Teilungen (**A-Kumulativ**) sowie für die verbalen Aussagen (**T-T-V-Kumulativ** und **Z-V-Kumulativ**) durchgeführt. Bei diesen sechs kumulativen Darstellungen wird anstatt der Richtigkeit der Antworten lediglich das Auftreten der jeweils zugehörigen Kategorie betrachtet. Ausgenommen der verbalen Aussagen wurde das Verhältnis der kumulativen Daten mit den korrekten Antworten gebildet (**T-T:K**, **Z:K**, **S:K** und **A:K**).

Abschließend wurden Graphen und Diagramme aus den Daten gewonnen.

9.2 Ergebnisse

Holgersson et al. (2016) stellen heraus, dass die Gestaltung von Fingu dazu führen soll, dass Simultandarstellungen und damit auch die Simultanerfassung präferiert genutzt werden. Zählen sollte aufgrund der kurzen Anzeige- und Antwortzeit verhindert werden (vgl. Holgersson et al., 2016). In der Analyse aller zehn Kinder wird deutlich, dass im Durchschnitt der Großteil aller Aufgaben, genauer etwa 60%, über Simultandarstellungen gelöst werden.

Trotzdem nehmen auch das Zählen von Früchten oder Fingern sowie die 1:1-Darstellungen mit jeweils ungefähr 20% keinen unwesentlichen Anteil an Lösungsstrategien ein. Demnach kann festgehalten werden, dass die Simultandarstellung zwar über alle Kinder hinweg die Strategie ist, die am häufigsten genutzt wird, dass andere Strategien, wie das Zählen oder die 1:1-Darstellung, über die Spielgestaltung aber nicht ausgeschlossen werden.

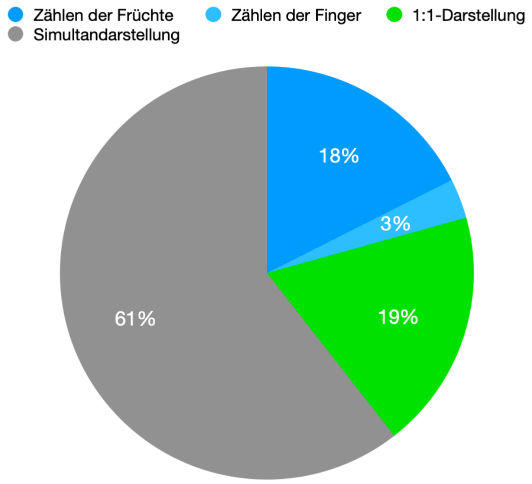

Abbildung 11: Durchschnittlicher Anteil der Anzahlerfassungs- bzw. -darstellungsprozesse (eigene Visualisierung).

Zwischen den Kindern sind dahingehend jedoch große Unterschiede zu erkennen: Fast alle Kinder haben eine **dominante Strategie**, mithilfe welcher sie meist etwa 75% oder mehr ihrer Aufgaben lösen. Fünf Kinder (Kind 1, Kind 5, Kind 7, Kind 9, Kind 10) verwenden zum Antworten vor allem die Simultandarstellung, Kind 2 zählt, Kind 3 und 4 stellen vorrangig die Anzahlen 1:1 dar. Kind 6 und Kind 8 zeigen in etwa zur Hälfte Prozesse der Simultandarstellung und zur anderen Hälfte Zählprozesse. Unklar ist, ob sich dieses Verhältnis an Antwortstrategien aus der Interaktion mit Fingu ergibt oder bereits zuvor auf Grundlage der Vorkenntnisse und Erfahrungen mit Anzahlerfassungen ausgeprägt war. Lediglich bei Kind 6 und Kind 8 wird deutlich, dass die Kinder zunächst Anzahlen über Simultandarstellung wiedergeben, dass dann allerdings spätestens ab Level 2 das Zählen als Strategie vermehrt auftritt. Wenn davon ausgegangen wird, dass bei einer simultanen Darstellung die Kinder die Anzahl (quasi-)simultan erfasst haben, dann kann diese Veränderung über die höheren Anzahlen und unbekannteren Konfigurationen ab Level 2 erklärt werden. Da dadurch die (Quasi-)Simultanerfassung weniger präzise ist (Logan & Zbrodoff, 2003; Lassaline & Logan, 1993), könnte auf alternative Strategien wie das Zählen zurückgegriffen werden, um weiterhin korrekte Antworten geben zu können.

Hinsichtlich der Externalisierungen der Kinder lassen sich gemäß der *Embodied Cognition* Rückschlüsse ziehen. Dabei fällt zunächst eines auf: Nur etwa 23% aller analysierten Aufgaben haben eine Summe größer als 5 und erfordern demnach zwingend die Benutzung beider Hände.[16]

[16] Das begründet sich in Fingus Levelaufbau, da im ersten Level nur Aufgaben bis zu einer Gesamtsumme von 5 auftreten, ab Level 2 erst eine Gesamtsumme von 6, wobei stets auch Aufgaben mit einer kleineren Summe gezeigt werden (vgl. Holgersson et al., 2016).

Trotzdessen verwenden die Kinder in etwa 47% der Aufgaben beide Hände, also in etwa doppelt so vielen Aufgaben, wie nötig wäre. Um dieses Verhalten und mögliche Ursachen dazu herauszuarbeiten, wurden die Kinder einzeln analysiert und auf Basis ihrer Externalisierungen in vier Typen eingeteilt. Grundlage dieser Typen sind die Kategorien Teil-Teil-Darstellungen, Zusammenfassungen, symmetrische Darstellungen und andere Teilungen und deren Vorkommen im Verlauf der Interaktion. Das Verhältnis dieser Kategorien zu den korrekten Antworten wurde in Graphen visualisiert und anhand dieser die Typen bestimmt. Zwar sind diese Einteilungen nicht immer eindeutig und scharf voneinander zu trennen, allein deshalb, weil es bei den Kategorien Teil-Teil und Zusammenfassungen bei undifferenzierten Ganzen Überlappungen gibt. Trotzdem geben sie einen ersten Anhaltspunkt für die weitere Erkenntnisbetrachtung.

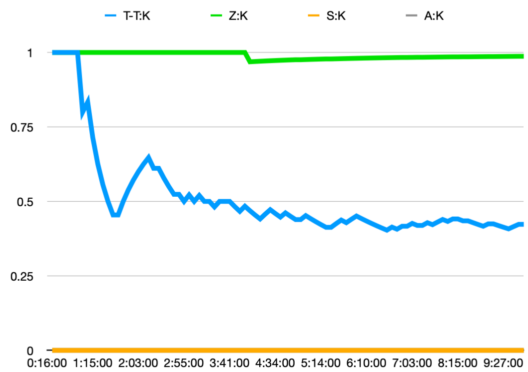

Abbildung 12: Relative Häufigkeitsverteilung der Externalisierungen bei Typ 1, am Beispiel von Kind 8 (eigene Visualisierung).

Typ 1 zeichnet sich vor allem durch den hohen Anteil an **Zusammenfassungen** aus. Keine der anderen Externalisierungen tritt so dominant auf wie diese. Zu erkennen ist dies bei den Kindern 1 und 8. Alle verbalen Äußerungen von Kind 8 hinsichtlich der Anzahl der wahrgenommenen Elemente unterstützen diese Zuordnung. Beide Kinder antworten vorrangig mit der linken Hand. Finger der rechten Hand werden bei Kind 1 gar nicht verwendet. Da Kind 1 nur Aufgaben des ersten Levels bearbeitet, ist das auch nicht nötig. Kind 8 hingegen löst Aufgaben bis zum 4. Level, benutzt hierbei stets die rechte Hand nur, wenn alle Finger der linken Hand gezeigt werden (außer in Aufgabe #41). Weil die Kinder des Typ 1 zwei angezeigte Sets zu einem Ganzen zusammenfügen und als Ganzes wiedergeben, kann davon ausgegangen werden, dass sie ein Teil-Ganze-Verständnis besitzen.

Die Kinder unterscheiden sich in ihren Anzahlerfassungsstrategien sowie in ihren Fehlern: Kind 1 verwendet vorrangig Simultandarstellungen. Es hat vor allem Probleme feinmotorischer Natur oder berührt den Bildschirm mit seinen Fingern zu kurz. Im Gegensatz dazu sind die wesentlichen Fehler von Kind 8, dass eine falsche Zahl oder nur eines von zwei Sets erkannt wird. Es scheint weniger motorische Probleme zu haben. Wie Kind 1 beginnt es mit Simultandarstellungen, ab Ende des zweiten Levels zählt das Kind 8 zunehmend.

Weiterhin deutet sich eine Entwicklung insofern an, als dass das Kind 8 in der Aufgabe #36 und #37 nicht in der Lage ist, eine Antwort abzugeben, da die Früchte ausgeblendet wurden. In #36 wird es darauf hingewiesen, dass es nach dem Ausblenden noch möglich ist, zu antworten. In #37 werden die Früchte ausgeblendet, bevor das Kind zu Ende zählen kann. Als eine ähnliche Situation gegen Ende der Spielzeit bei Aufgabe #94 wiederkehrt, ist das Kind 8 in der Lage, trotz ausgeblendeter Früchte weiterzuzählen und die richtige Antwort wiederzugeben. Das zeugt davon, dass eine mentale Repräsentation der Sets vorhanden war.

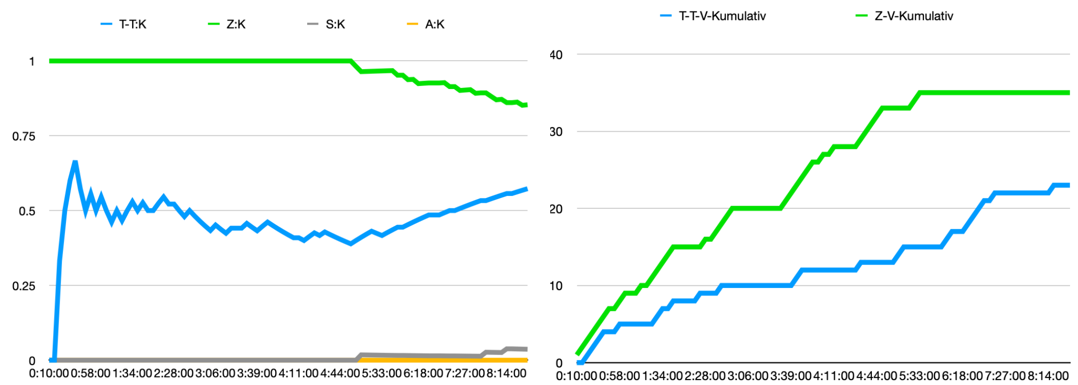

Abbildung 13: Relative Häufigkeitsverteilung der Externalisierungen (links) und kumulative Häufigkeitsverteilung der verbalen Äußerungen (rechts) bei Typ 2, am Beispiel von Kind 10 (eigene Visualisierung).

Der **Typ 2** ähnelt dem ersten, insofern, als dass die Kinder diesen Typs vorrangig Zusammenfassungen verwenden. Sie unterscheiden sich jedoch von Typ 1 in der Hinsicht, dass der Anteil an Zusammenfassungen ab einem bestimmten Zeitpunkt abfällt und dafür die anderen Externalisierungen, besonders die Teil-Teil-Darstellungen, an Bedeutung zunehmen. Die Kinder 6, 7 und 10 können diesem Typen zugeordnet werden. Zwar interagieren die Kinder unterschiedlich lange mit der App, bis der Abfall sichtbar wird (Kind 6 bei 6:10 min, Kind 7 bei 4:09 min, Kind 10 bei 5:06 min). Allerdings findet das in etwa zu einem gleichen Spielstand statt: Kind 6 verwendet weniger Zusammenfassungen bereits ab Ende des zweiten Levels, sowohl Kind 7 als auch Kind 10 starten damit zu Beginn des dritten. Somit findet eine Veränderung in der Externalisierung ab dem Zeitpunkt statt, als höhere Anzahlen und unbekanntere Konfigurationen auftreten. Dies geht damit einher, dass Kind 6 und Kind 7 etwa zu gleicher Zeit beginnen, weniger simultan darzustellen und stattdessen die Anzahlen zu zählen. Nur Kind 10 bleibt bei der Strategie, alles simultan darzustellen. An wenigen Stellen zeigen die Kinder, dass sie auch nach dem Ausblenden der Früchte weiterzählen können und somit wahrscheinlich eine mentale Repräsentation aufgebaut haben. So könnte für Typ 2 abgeleitet werden, dass sie zu Beginn ein Teil-Ganze-Verständnis zeigen, weil sie beide Sets zu einem Ganzen zusammenfügen. Die Kinder wenden sich allerdings schließlich von dieser Strategie ab und verwenden eher Teil-Teil-Darstellungen ab Ende des zweiten Levels. Das lässt sich möglicherweise auf die reduzierte, kognitive Belastung zurückführen, wenn nur die Summe eines Sets bestimmt werden muss. Hier ist nicht mehr von einem Teil-Ganze-Verständnis auszugehen.

Als Hauptfehlerquelle häuft sich bei Kind 7, dass die falsche Anzahl dargestellt wird. Motorische Probleme hinsichtlich des zeitgleichen Platzierens der Finger oder Hände zeigt es aber auch. Ähnlich ist es bei Kind 10: Hier häufen sich zum Ende hin motorische Fehler, wie das Zuspätkommen einer Hand oder feinmotorische Probleme, die vorher kein Problem zu bereiten schienen. Bei Kind 6 hingegen treten zu Beginn vor allem Zeitfehler auf, später vermehrt Fehler der falschen Zahl, der vollen Hand oder dass nur eines von zwei Sets wahrgenommen wurde.

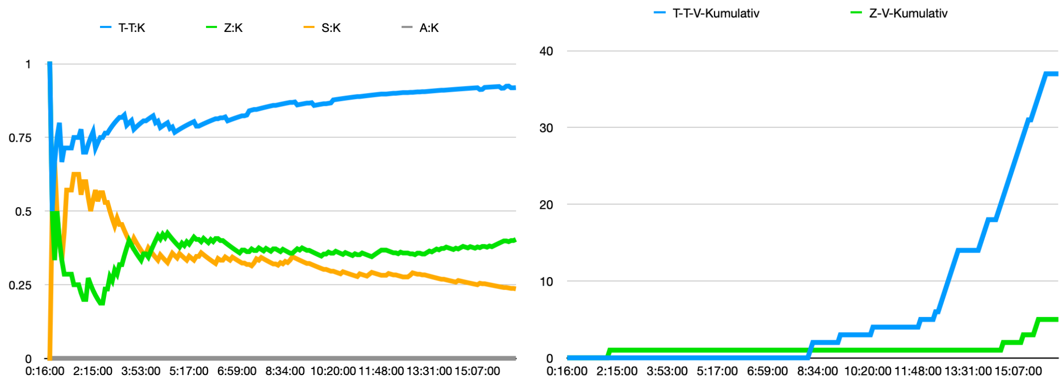

Abbildung 14: Relative Häufigkeitsverteilung der Externalisierungen (links) und kumulative Häufigkeitsverteilung der verbalen Äußerungen (rechts) bei Typ 3 , am Beispiel von Kind 4 (eigene Visualisierung).

Die Kinder 4, 5 und 9 werden als **Typ 3** kategorisiert. Sie haben gemeinsam, dass sie vor allem **Teil-Teil-Darstellungen** nutzen und Zusammenfassungen eher nebensächlich sind. Dies wird besonders deutlich an den Verbalisierungen von Kind 4, welches oft die Anzahl beider Sets separat voneinander benennt. Für Typ 3 lässt sich daher hinsichtlich des Teil-Ganze-Verhältnisses nur erahnen, dass die beiden Sets separat voneinander erkannt werden. Von einem kognitiven Zusammenfügen ist nicht auszugehen.

Obwohl nur Kind 4 vorrangig 1:1-Darstellungen verwendet und die Antworten der anderen beiden Kinder eher auf Simultandarstellungen beruhen, zeigen sie alle überwiegend motorische Probleme: sei es das Platzieren der gesamten Hand bei Kind 5, das nicht eindeutige Aufsetzen der Finger oder zu kurzes Halten. Besonders mit der Darstellung einer Fünf scheinen die Kinder zu Beginn Probleme zu haben: Sie schauen ihre Handfläche an, zählen ihre Finger (Kind 5) oder bewegen die Finger auf dem Bildschirm zu sehr (Kind 4). Bei Kind 5 treten besonders gegen Ende auch zunehmend Fehler der falschen Zahl auf. Dies könnte allerdings über einen Konzentrations- und Motivationsabfall erklärt werden, weil das Kind kurze Zeit später aufhört. Eine Strategieveränderung deutet sich marginal bei Kind 4 an: Die Konfigurationen 5b und 7b wurden gezählt, alles andere eher 1:1-dargestellt. Folglich scheint es, höhere Anzahlen und unbekannte Konfigurationen nicht ohne Weiteres 1:1 darstellen zu können.

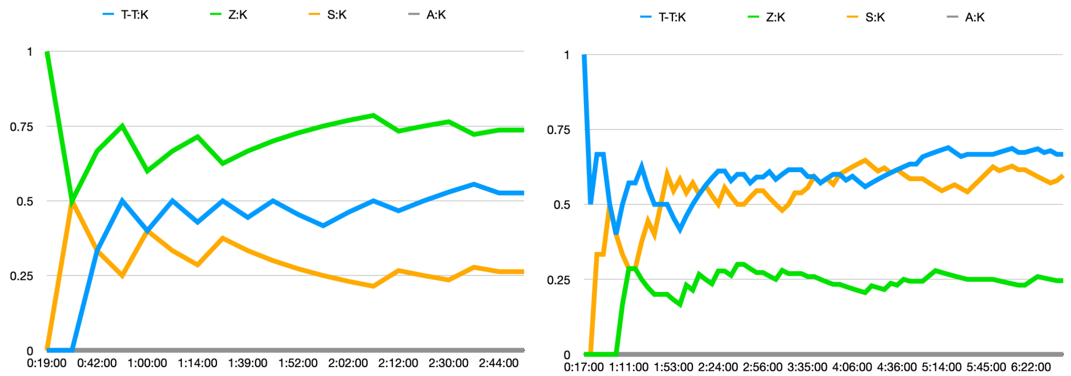

Abbildung 15: Relative Häufigkeitsverteilung der Externalisierungen bei Typ 4, am Beispiel von Kind 2 (links) und Kind 3 (rechts) (eigene Visualisierung).

Zuletzt beschreibt der **Typ 4** die Externalisierungsform, dass, wenn möglich, **symmetrische Darstellungen** präferiert werden. Dieser Typ ist nicht klar zuzuordnen, da symmetrische Darstellungen nur bei Aufgaben mit geradem Ergebnis auftreten können und demnach in dem Verhältnisgraphen nicht stark gewichtet werden. Aus diesem Grund unterscheiden sich auch die Graphen der beiden Kinder diesen Typs stark. Um die Zuordnung trotzdem so eindeutig wie möglich zu halten, wurde für jedes Kind berechnet, welchen Anteil an Aufgaben mit geradem Ergebnis sie symmetrisch dargestellt haben. Liegt dieser Anteil über 50%, dann werden sie diesem Typ zugeordnet. Das trifft für die Kinder 2 und 3 zu. Kind 2 löste 55% aller geraden Aufgaben symmetrisch, Kind 3 sogar 77%. Ähnlich wie bei Typ 3 ist es bei Typ 4 eher unwahrscheinlich, dass Prozesse des Zusammenfügens beider Teile stattfinden. Bei Kind 2 ist jedoch das Potenzial offensichtlich, dass das Zusammenfassen noch geschehen könnte. Kind 3 scheint eher keine Anzahlerfassungen vorzunehmen, sondern 1:1 Teil-Teil-Darstellungen zu verwenden. Da beide Kinder nur das Level 1 und wenige Aufgaben bearbeiteten, ist es nicht klar, ob bei einer intensiveren Interaktion mit Fingu ein anderer Typ auftreten würde.

Beide Kinder verfolgen unterschiedliche Strategien der Anzahldarstellung: Kind 2 zählt 75% aller Aufgaben und zeigt nur wenige, motorische Probleme. Da Fingu viele undifferenzierte Ganze anzeigte, treten sowohl Zusammenfassungen als auch Teil-Teil-Darstellungen oft auf, was sich im Graphen widerspiegelt. Darstellungen der 4 werden immer symmetrisch mit zwei Fingern der linken und zwei der rechten Hand beantwortet. Das ist unabhängig davon, ob Fingu die 4 als $4 + 0$, $3 + 1$ oder $2 + 2$ anzeigt. Kind 3 hingegen verwendet vor allem die 1:1-Darstellung, wodurch oft Teil-Teil- und symmetrische Darstellungen auftreten. Sobald die Früchte verschwinden, wird keine Antwort mehr gegeben. Daher ist davon auszugehen, dass das Kind die Anzahl nicht erfasst, sondern die Muster eher nachahmt.

Die Erkenntnisse jeden Typs sind in der nachfolgenden Tabelle kurz zusammengefasst:

Typ	Externalisierungen	Strategien	Fehler	Bemerkungen
Typ 1	hoher Anteil an Zusammenfassungen	Simultandarstellungen (Kind 1 und 8); zum zweiten Level hin vermehrt Zählen (Kind 8)	feinmotorische Probleme (Kind 1), Fehler in Anzahlerfassung (Kind 8)	Beide Kinder antworten vor allem mit der linken Hand.
Typ 2	hoher Anteil an Zusammenfassungen, Abfall um den Beginn des dritten Levels herum, Zunahme an Teil-Teil-Darstellungen	Simultandarstellungen (Kind 6, 7 und 10); ab dritten Level vermehrt Zählen (Kind 6)	motorische Probleme (Kind 6, 7 und 10), Fehler in Anzahlerfassung (Kind 7)	Das dritte Level scheint ausschlaggebend zu sein.
Typ 3	hoher Anteil an Teil-Teil-Darstellungen	1:1-Darstellungen (Kind 4), Simultandarstellung (Kind 5 und 9)	motorische Probleme (Kind 4 und 9), Fehler in Anzahlerfassung (Kind 5)	Darstellungen der 5 scheinen ohne Hilfen der Versuchsleiterin Probleme zu bereiten.
Typ 4	über 50% der Aufgaben mit geraden Anzahlen symmetrisch gelöst	v.a. Zählen (Kind 2), 1:1-Darstellungen (Kind 3)	motorische Probleme (Kind 2 und 3), Fehler in Anzahlerfassung (Kind 3)	Nach Verschwinden der Früchte kann Kind 2 eine Antwort geben, Kind 3 nicht.

Aus der Tabelle wird deutlich, dass über alle Typen hinweg Simultandarstellungen möglich sind. Auf zählende Strategien wird vermehrt ab Ende des zweiten Levels zurückgegriffen, wenn höhere Anzahlen von Fingu gezeigt werden. Fehler in der Anzahlerfassung sowie motorische Probleme treten bei allen Typen auf, wobei die motorischen Probleme je nach Kind mit dem Level zunehmen oder auch abnehmen. Interessant ist auch, dass besonders Kinder, die die Aufgaben über 1:1-Darstellungen lösen, motorische Probleme hinsichtlich der Fingerplatzierung zeigen. Konfigurationen wie 5a oder 3a scheinen ihnen dahingehend am meisten Schwierigkeiten zu bereiten. Ferner lässt sich bei diesen Kindern das Problem wiederfinden, dass sie keine Antwort geben können, nachdem die Früchte ausgeblendet werden. Teilweise könnte das darauf zurückzuführen sein, dass sie verunsichert sind. Jedoch sticht das im Vergleich zu den Kindern hervor, die zählen oder die Anzahl simultan darstellen, da diese oft in der Lage sind, auch nach dem Ausblenden der Früchte die Anzahl wiederzugeben. Daher könnte vermutet werden, dass die Kinder, die nach dem Ausblenden noch eine Antwort geben können, eine mentale Repräsentation der Quantität besitzen und somit konkrete Anzahlerfassungsprozesse kognitiv durchführen, wohingegen die Kinder, die zu keiner Antwort mehr fähig sind, eher den simplen Anzahlvergleich zwischen Fingern und Früchten vernehmen.

Als letzten Aspekt soll der **motivationale Faktor** des Spiels hervorgehoben werden. Baccaglini-Frank und Maracci (2015) betonen in ihrer Studie, dass kein Kind unmotiviert war und sie sich sogar gegenseitig halfen. Unter den hiesigen Rahmenbedingungen konnten die Kinder nicht miteinander interagieren, was einen Einfluss auf die Motivation gehabt haben kann (vgl. Chen et al., 2018). Denn es brachen vier von zehn Kindern das Spielen selbstständig ab. Die Kinder 1 und 3 artikulieren verbal, dass sie keine Lust mehr hätten, und beenden das Spiel, bevor sie das erste Level abschlossen. Die Kinder 2 und 5 absolvieren das erste Level ab, Kind 2 sogar beim ersten Versuch. Trotzdem möchte Kind 2 das zweite Level nicht mehr starten. Kind 5 versucht noch 21 Aufgaben des zweiten Levels, nach dem ersten Game Over in Level 2 scheint es jedoch keine Motivation oder Konzentration mehr zu haben und antwortet eher flüchtig. Die Nachfrage, ob das Kind 5 noch Lust hätte, weiterzuspielen, verneint es.

Bei den übrigen Kindern beendet die Versuchsleiterin das Spiel mit der Begründung, dass die anderen Kindern ebenfalls die Chance bekommen sollen, Fingu auszuprobieren. Kind 4, 6 und 7 fragen explizit nach, ob sie später weiterspielen könnten. Kind 6 scheint besonders traurig zu sein, aufhören zu müssen. Alle anderen Kinder wirken grundsätzlich interessiert am Spielen, aber auch nicht enttäuscht, mit dem Spielen aufhören zu müssen.

Auffällig ist dahingehend der Unterschied in der Motivation der Kinder, vor und nach der Veränderung des Verhaltens von der Versuchsleiterin ab Kind 4. Bei den ersten drei Kindern verzichtet die Versuchsleiterin auf jegliche Kommentare und verbales, erklärendes sowie positives Feedback zu ihrer Leistung. Alle drei Kinder brechen freiwillig ab und bewältigen das erste bzw. das zweite Level nicht. Ab Kind 4 gibt die Versuchsleiterin positives sowie erklärendes Feedback. Fast alle Kinder verbessern zeitnah ihr Verhalten entsprechend des Feedbacks und können so die Aufgaben besser absolvieren. Das Feedback bezieht sich beispielsweise darauf, wie und wann die Kinder ihre Hände und Finger auf dem Bildschirm positionieren sollen. Zudem scheinen sie durch das positive Feedback bei Fehlern weniger demotiviert zu sein und ihre Erfolge stärker wertzuschätzen. Dies wird besonders an den verbalen Äußerungen von Kind 6 deutlich, das oft artikuliert, wie viel Spaß ihm das Spiel mache oder dass einige Aufgaben schwerer seien. Dass Kind 5 nach dieser Intervention trotzdem vorzeitig aufhört, lässt sich ggf. mit dem Konzentrations- oder Motivationsabfall nach dem Game Over erklären. Eventuell kann sich das Kind dann nicht mehr konzentrieren, weil es sich bereits fünf Minuten stark darauf fokussierte, oder es kann frustriert sein, dass es das Level nicht schafft.

Obwohl diese Ergebnisse auch auf interpersonale Unterschiede zurückzuführen sein können, liegt trotzdem die Vermutung nahe, dass die motivationalen Elemente von Fingu, beispielsweise die Charaktere, die Musik, die Herzen, nicht ausreichen, um die Motivation und Aufmerksamkeit der Kinder zu halten. Zum einen könnten sie die Zielgruppe nicht konkret ansprechen und eher ablenken. Zum anderen sind sie eher auf Verluste als Kompetenzerleben ausgerichtet.[17]

[17] Erläutert wird dies konkret im Diskussionsteil.

Außerdem ist es für die Lernenden schwierig, ihre Antworten zu reflektieren, da das Antwortfenster die Aufgabe verdeckt und ihre Eingaben ausgeblendet werden (vgl. Abbildung 6). Aufgrund dessen kann es nötig sein, dass von außen verbales, positives und erklärendes Feedback einer erwachsenen Person gegeben wird, damit die Kinder motiviert und aufmerksam bleiben und aus ihren Fehlern lernen können. Ausgenommen dem Kind 5 haben alle übrigen Kinder mindestens 93 Aufgaben gelöst und arbeiteten bis zum Abbruch durch die Versuchsleiterin mit.

9.3 Diskussion

Diese Arbeit beginnt mit dem Zitat „*Understanding comes only from thinking*“ (Ross, 1989, S. 50). Daran angelehnt sollte Fingu die Lernenden dazu anregen, sich mit den Anzahlerfassungs- und -darstellungsprozessen auseinanderzusetzen, einen Zahlensinn zu entwickeln und ein Teil-Ganze-Verständnis aufzubauen. Doch die dafür nötigen Rahmenbedingungen sind von Fingu nicht zwingend gegeben. Im Folgenden soll daher die Ergebnisse der Studie hinsichtlich der eben aufgeführten Aspekte diskutiert werden und entsprechende Vorschläge angebracht werden, wie eine Lernapp in diesem Sinne effektiver oder auch anders gestaltet werden könnte.

9.3.1 Das Teil-Ganze-Verständnis

Die Ergebnisse deuten an, dass die Kinder in der Interaktion mit Fingu eher dazu tendieren, Teil-Teil-Darstellungen als Zusammenfassungen zu verwenden. Erkennbar wird das an den acht Kindern der Typen 2, 3 und 4. Da die Kinder von Typ 3 und 4 die Teil-Teil- oder symmetrischen Darstellungen bereits ab Beginn der Interaktion zeigen, könnte das allerdings auch auf andere Faktoren neben Fingu zurückgeführt werden. Typ 2 stellt dafür ein Indiz dar, dass die Gestaltung von Fingu einen Einfluss auf die Darstellungsform hat. Denn diese Kinder beginnen zuerst, die beiden Sets zusammenzufassen. Spätestens ab einer Gesamtsumme von 7, folglich ab dem dritten Level, zeigen sie dahingehend Schwierigkeiten und ändern ihre Strategie zu Teil-Teil-Darstellungen. Begründet werden kann dies in der zunehmenden Schwierigkeit des Spiels und den Zeitbeschränkungen. Beide Sets separat voneinander zu erfassen und wiederzugeben, könnte für die Kinder einen geringeren kognitiven Aufwand bedeuten. Aufgrund der Tatsache, dass es für die Bearbeitung von Fingus Aufgaben nebensächlich ist, ob Zusammenfassungen verwendet werden oder nicht, können auch die ggf. weniger komplexen Teil-Teil-Darstellungen zu einer korrekten Lösung führen.

In der ACAT-Analyse wurde bereits herausgestellt, das Fingu nicht alle Aspekte des Teil-Ganze-Verständnisses integriert: Das Zerlegen einer Gesamtanzahl in zwei Sets ist implementiert, nicht jedoch das Zusammenfügen. Um vielfältige Erfahrungen mit Teilen und Ganzen zu schaffen und so das Verständnis zielgerichtet auszubauen, könnten auch weitere Facetten des Teil-Ganze-Verständnisses eingebaut werden:

- **Das Zusammenfügen** beschreibt, dass aus mehreren Teilmengen ein Ganzes gebildet werden soll (Diephaus, 2015). Demnach wären Aktivitäten gewinnbringend, bei denen ein Ganzes als Ziel vorgegeben wird und dann Teilmengen so miteinander verknüpft werden sollen, sodass sie dieses Ganze bilden. Dies kann beispielsweise über Zuordnungen geschehen. Eine weitere Variante, wenn auch etwas eintönig im Spielkontext, ist das Üben in intelligenten Päckchen (vgl. Leuders, 2005). Innerhalb diesen Modus können gezielt verschiedene Teilungen einer Zahl eingeübt werden, z.B. $0+7$, $1+6$, $2+5$, $3+4$, $4+3$, $5+2$, $6+1$ und $7+0$. Damit wird herausgestellt, dass all diese Aufgaben mögliche Teilungen derselben Zahl darstellen. Darüber könnten Teilungen erfahren und memorisiert werden. Wichtig wäre hierbei, dass die Kinder nicht nur dieselbe Fingeranzahl mehrfach auf den Bildschirm legen müssen, sondern tatsächlich die Verknüpfung beider Sets durchführen. Dazu könnte innerhalb eines Levels zwei oder drei verschiedene Gesamtsummen eingeübt werden.

- Fingu gibt Teilungen bereits vor. Für einen Lerneffekt könnte es trotzdem auch positiv sein, wenn die Kinder selbstständig eine Gesamtanzahl teilen oder **Bündelungen** vornehmen. Dies könnte beispielsweise darüber umgesetzt werden, dass um Elemente einer Gesamtmenge ein Kreis gezogen oder eine Linie auf dem Bildschirm gezeichnet wird und sich dadurch eine Teilmenge abgespaltet. Zur Beibehaltung des Multi-Touch-Aspekts könnte weiterhin eine bestimmte Anzahl an Fingern auf dem Touchscreen platziert werden, die dann der Anzahl einer Teilung entspricht. Um dahingehend Denkprozesse anzuregen, könnte ein Spielmodus in der Mitte des Bildschirms eine Quantität anzeigen, links und rechts im Bildschirm eine symbolische Zahl. Es soll dann die Quantität gemäß dieser Zahlen aufgeteilt werden, indem die einzelnen Elemente auf die Ziffern bewegt werden und zwar so viele, wie dem Wert der Zahl entspricht. Für einen höheren Schwierigkeitsgrad könnten mehrere Zahlen zur Auswahl stehen. Das Kind müsste demnach die Gesamtanzahl der Quantität erfassen, ihre Teilungen kennen und den Ziffern Zahlen zuordnen. Ein anderer Spielmodus könnte die Kinder dazu auffordern, dieselbe Zahl in möglichst vielen Teilungen dazustellen, sei es über Berührungen mehrerer Finger oder dem Zuordnen ikonischer Repräsentationen. Beide Spielmodi würden die Kinder dabei unterstützen, zwischen den Repräsentationen zu wechseln und demnach Verständnis aufzubauen.

- Zur Vorbereitung der Addition und Subtraktion ist die Grundvorstellung des **Auffüllens** nicht unwesentlich. Eine Aufgabe zum Auffüllen könnte sein, dass Fingu eine Gesamtanzahl vorgibt, ebenso wie ein Set, und das Kind daraufhin so viele Finger auf den Bildschirm legen soll, wie noch zur Gesamtanzahl fehlen. Die Gesamtanzahl könnte sowohl symbolisch als auch ikonisch dargestellt werden. Wenn beispielsweise eine Acht dargestellt werden soll, zeigt Fingu bereits fünf Elemente an. Die Kinder sollen dann drei Finger auf dem Bildschirm positionieren.

- Die Eigenschaft der **Kommutativität** von der Addition kann über zwei Teil-Ganze-Darstellungen visualisiert werden (Baroody et al., 2009). In Fingu ist dies bereits insofern implementiert, als dass es unwesentlich ist, welches Set mit welcher Hand dargestellt wird, weil die Fingerwahl generell offen gelassen wird. Dies könnte noch stärker hervorgehoben werden, indem die Kinder ggf. eine Aufgabe erstellen sollen, bei der sie die Reihenfolge der angezeigten Sets gezielt vertauschen müssen.

Holgersson et al. (2016) betonen, dass für einen Aufbau der Teil-Ganze-Beziehungen verschiedene Repräsentationen angeboten werden sollten. In Fingu wird dies bereits ikonisch und enaktiv über Finger umgesetzt, doch auch die Darstellungen mit Ziffern oder dem Markieren des Ganzen auf einer Zahlengerade könnte andere Repräsentationen einbeziehen. Zuletzt sollten die Kinder stets dazu angehalten werden, ihre Erkenntnisse zu verbalisieren.

9.3.2 Anzahlerfassung und -darstellung

Die von den Entwickler:innen präferierte Strategie der **Simultandarstellung** und -erfassung kann in 60% der Aufgaben wiedergefunden werden. Fünf der zehn Kinder verwenden vorrangig diese Strategie, sieben der zehn zu mindestens 50%. Damit wird deutlich, dass diese Form dominiert. Folglich kann davon ausgegangen werden, dass Fingu diese Strategie zur Anzahlerfassung und -darstellung fördert.

Wolters et al. (1987) und Wästerlid (2020) untermauern das mit der Erkenntnis, dass die (quasi-)simultane Erfassung trainiert werden kann, unter anderem, indem Kinder wiederholt mit denselben Mustern konfrontiert werden. Fingu setzt dies um. Trotzdem scheint, statt eines Trainingseffekts, teilweise eher eine Abkehr von der Strategie zu finden zu sein. Besonders deutlich wird das bei Kind 8, bei welchem ein Wandel von der Simultandarstellung zum Zählen erkennbar ist. Da auch andere Kinder in höheren Leveln auf zählende Strategien zurückgreifen, besonders bei höheren Anzahlen wie 7 oder unbekannteren Konfigurationen der Form b, scheinen die Gründe dafür in dem Design von Fingu zu liegen. Da die Präzision und Schnelligkeit der (Quasi-)Simultanerfassung bei höheren Anzahlen und weniger familiären Konfigurationen abnimmt, könnten die Kinder auf andere Strategien wie das Zählen ausweichen. Dabei zählen sie oft alle Objekte. Gemäß Gaidoschik und Fellmann (2015) sollten die Pädagog:innen die Kinder eher dazu anhalten, nichtzählende Varianten umzusetzen. Wegen des geringen Mehrwerts der 1:1-Darstellung für die Anzahlerfassung entspricht das erneut der Simultanerfassung. Kinder können aber nicht dazu gezwungen werden, diese Strategie umzusetzen. Stattdessen könnten sie dazu motiviert werden, nicht alles zu zählen, sondern ggf. eines von zwei Sets simultan zu erfassen und das zweite über Weiterzählen zu integrieren. Dann würde ein Kompetenzaufbau zumindest hinsichtlich des Zählens möglich sein.

Krajcsi et al. (2013) arbeiten heraus, dass zum Trainieren von der Simultanerfassung auch **unstrukturierte Bilder** von mehr als vier Elementen genutzt werden sollten. In Fingu treten jedoch ausschließlich strukturierte Bilder auf. Es könnte daher ergiebig sein, mehr Konfigurationen als a und b zu integrieren oder zufällige Konfigurationen zu nutzen. Neumann (1987) und Barendregt et al. (2012) führen dahingehend ein Gegenargument an: Die symmetrische Struktur der Sets vereinfacht die Simultanerfassung und kann dienlich sein, sich von zählenden Strategien abzuwenden. Hier bleibt es also abzuwägen, welche Variante geeigneter sei.

Dass die Kinder 2, 3 und 4 eindeutig **andere, dominante Strategien** als die Simultandarstellung zeigen, muss nicht auf die Interaktion mit Fingu zurückgeführt werden. Kind 2 zählt, Kind 3 und 4 stellen ihre Antworten bereits von Beginn an 1:1 dar. Daraus lässt sich lediglich schließen, dass Fingu auch Strategien neben der Simultandarstellung zulässt und Kinder möglicherweise mit einer anderen, präferierten Strategie beginnen.

Hinsichtlich der Anzahldarstellung fällt weiterhin auf, dass **motorische Probleme** immer wieder auftreten. Zwar sollten diese über die freie Wahl der Finger und der Möglichkeit, die Finger überall auf dem Bildschirm zu positionieren, verringert werden. Trotzdessen scheinen die Kinder immer wieder Schwierigkeiten darin zu haben, die Finger oder Hände zeitgleich zu positionieren oder ihre Finger gemäß des *finger symbol sets* auszustrecken. Wie oft die Kinder diese Probleme im Verlauf der Interaktion zeigen, unterscheidet sich von Kind zu Kind. Einige Kinder zeigen zu Beginn die meisten (fein-)motorischen Probleme, die dann im Verlaufe der Interaktion abnehmen. Das entspricht Gracia-Bafalluy und Noëls (2008) Schlussfolgerungen, dass die Finger Gnosis trainiert werden kann. Dazu passt auch, dass die meisten Kinder ihre Handflächen eher zu Beginn als am Ende anschauen, vielleicht, weil sie sich dann sicherer im Zeigen der Anzahlen fühlen. Demnach kann Fingu eventuell die Finger Gnosis trainieren. Eindeutig ist das allerdings nicht, denn bei anderen Kindern treten motorische Schwierigkeiten eher bei höheren Leveln auf. Das liegt möglicherweise daran, dass ihnen die Fingerformationen zu den höheren Anzahlen und Konfigurationen noch nicht geläufig sind. Die Finger Gnosis kann sonst auch unabhängig von Fingu über das Antippen der einzelnen Finger oder über Bewegungsspiele gefördert werden (Baccaglini-Frank & Maracci, 2015).

9.3.3 Anzahlvergleiche

Fingu kann darin unterstützen, **1:1-Zuordnungen** vorzunehmen. Das wird hier anhand von Fingern und visualisierten Früchten deutlich. Es wäre allerdings konkreter, wenn die Finger genau auf die Früchte gesetzt werden müssten oder sich die Früchte anschließend an die Positionen bewegen würden, wo die Finger lagen. Das würde außerdem Feedback geben, insoweit, als dass über das Fehlen einer Frucht oder Vorhandensein einer nicht-zugeordneten Frucht deutlich wird, falls ein Finger zu viel oder zu wenig aufgesetzt wurde. Diese Form des Anzahlvergleichs setzen vorrangig die Kinder 3 und 4 um. An Kind 4 wird deutlich, dass trotz der fehlenden Anzahlerfassung und des vorrangigen *Matchens* der Finger sehr Aufgaben bearbeitet werden können.

Würden die Entwickler:innen neben den 1:1-Zuordnungen auch weitere Aspekte des Anzahlvergleichs einbeziehen wollen, wären Aufgaben nützlich, bei denen die Lernenden entscheiden müssen, welche Menge größer oder kleiner ist. Um zeitgleich das Prinzip der stabilen Ordnung zu implementieren (vgl. Gelman & Gallistel, 1986), könnte in Fingu eine Menge gezeigt werden und dann von den Kindern die nächstgrößere Menge aus einer Auswahl identifiziert werden müssen. Es wäre auch möglich, Bilder von Quantitäten von klein nach groß zu ordnen. Das kann ikonisch passieren, über die Zuordnung zu Positionen am Zahlenstrahl oder auch anhand von symbolischen Repräsentationen.

Dies würde zudem Darstellungswechsel integrieren. Um neben dem Anzahlvergleich auch das Teil-Ganze-Verständnis zu fördern, könnte die App eine Summe in einer Teilung darstellen, z.B. $3 + 5$. Aus einer Auswahl von Teilungen, wie $4 + 4$, $4 + 3$ oder $4 + 5$, muss dann diejenige ausgewählt werden, die dieselbe Gesamtanzahl besitzt. Somit müssen die Gesamtanzahlen der Darstellungen verglichen werden, genauso wie verschiedene Teilungen einer Zahl explizit visualisiert und miteinander verknüpft werden müssen.

9.3.4 Der Zahlensinn und Zahlbegriffserwerb

Howden (1989) beschreibt, dass sich der Zahlensinn aus der Erkundung und Visualisierung von Zahlen in verschiedenen Kontexten entwickelt. Fingu kann einer dieser Kontexte sein. Hilfreich ist es, wenn dahingehend verschiedene **Repräsentationen** verzahnt werden. Das wird in Fingu bereits in Ansätzen umgesetzt, es besteht jedoch noch das Potenzial, diese mit symbolischen und verbalen Aspekten zu erweitern.

Bezüglich des Zahlbegriffserwerbs ist Fingu sehr fokussiert auf den **Kardinalzahlaspekt**. Auch andere Zahlaspekte wie der Ordinalzahl-, Rechenzahl- oder Maßzahlaspekt könnten integriert werden (vgl. Padberg & Benz, 2011). Letzteres wäre beispielsweise allein schon dann in Ansätzen vorhanden, wenn statt einer Frucht ein Kilogramm Mehl visualisiert wird.

In den bisherigen Erläuterungen wurden bereits zahlreiche Aspekte aufgegriffen, wie Fingu den Zahlbegriffserwerb oder die Ausbildung des Zahlensinns fördern könnte. Bisher nicht genannte Hinweise beziehen sich auf das Verständnis der Kovariation und der Invarianz. Um das Verständnis der **Kovariation** zu fördern, könnte von den Kindern erwartet werden, dass sie nicht die Zahl darstellen, die Fingu zeigt, sondern die nächstgrößere oder nichtkleinere Zahl. Das erfordert das Zusammenrechnen beider Sets oder zumindest das Verständnis, dass, wenn in einem Set ein Element weggenommen oder hinzugefügt wird, sich dann die Gesamtanzahl ändert. Resnick (1992) zufolge entspricht das dem Verständnis der Kovariation.

Für den Aufbau des Verständnisses über die **Invarianz** einer Zahl auch bei räumlicher Änderung (Benz et al., 2015) scheint Fingu zunächst geeignet. Die beiden Sets bewegen sich und die Gesamtanzahl bleibt trotzdem dieselbe. Von den Kindern könnte zusätzlich gefordert werden, die Elemente selbst räumlich umzustrukturieren. Dabei könnte das Verschieben einzelner Elemente von einem Set in das andere auch Vorstellungen der Kompensation begünstigen (Resnick, 1992).

9.3.5 Lernmöglichkeiten

Fingu ist ein **digitales Lernspiel** mit einer Multi-Touch-Umgebung. Wie im Kapitel der digitalen Werkzeuge herausgestellt wurde, kann dies viele Vorteile mit sich bringen (vgl. Moyer-Packenham et al., 2015). In der Studie ist es offensichtlich gewesen, dass keines der Kinder Probleme mit der Interaktion der App an sich zeigte. Dies lässt sich auf die kindgerechte Gestaltung mit vielen Bildern sowie die direkte Interaktion mit den Elementen der App zurückführen, die ein Touchscreen ermöglicht.

Trotzdem schienen einige Lernenden in der Aufgabenbewältigung mit der App mehr Schwierigkeiten zu haben, als ohne sie. Das wird beispielsweise in der Interaktion zwischen Kind 4 und Versuchsleiterin bei #19 deutlich, als das Kind der Versuchsleiterin problemlos eine Fünf mit den Händen zeigen konnte, es allerdings vorher Schwierigkeiten hatte, diese auf den Bildschirm zu übertragen. Diesbezüglich könnte eine Kombination physischer und digitaler Mittel hilfreich sein. Fingu könnte weiterhin die Anzahlen anzeigen, die Kinder halten ihre Antwort als *finger symbol set* hoch, was über eine Kamera erfasst und ausgewertet wird. Alternativ könnten Aufgaben zur Teilung und zum Zusammenfassen im Rahmen einer *Augmented Realitiy* gegeben werden, indem die Aufgabe auf dem Bildschirm dargestellt wird und mit haptischen Materialien diese nachgestellt oder gelöst werden soll. Auch dies könnte über die Kamera erfasst und analysiert werden.

Mehrfach wird betont, dass Kinder ihre Erkenntnisse **verbalisieren** sollten (vgl. Moreno & Mayer, 2007; Benz et al., 2015). Fingu könnte die Kinder dazu explizit motivieren, beispielsweise indem die Ausdrücke von der App erfasst werden und Antworten eingesprochen werden können. Diese Variante schlägt das Kind 6 aus eigener Initiative vor (#81). Zusätzlich sollte stets ein ansprechender Rahmen um die App herum implementiert werden. Das inkludiert anregende Gespräche oder Diskussionen über die verwendeten Strategien oder Teil-Ganze-Verhältnisse. So kann aktiv Wissen konstruiert werden (Benz et al., 2015).

Moreno und Mayer (2007) beschreiben, dass *Guided Activities* einen höheren Lernerfolg zu verzeichnen hätten. In diesem Sinne sei Scaffolding von einer externen Personen oder von der App selbst sehr wichtig (Belland et al., 2017; Ma et al., 2014). Auch wenn sich aktiv gegen eine Rahmengeschichte entschieden wurde (Holgersson et al., 2016), könnte dennoch ein Rahmen mit Erläuterungsphasen und wiederkehrenden Charakteren einen ersten Anhaltspunkt dafür geben. So könnte beispielsweise der Avatar des Kindes Aspekte des Spiels erklären oder innerhalb von kleinen Videosequenzen verdeutlichen, dass beispielsweise die Hände gleichzeitig auf den Bildschirm gelegt werden müssen. Dies wäre auch ohne Text und Sprache möglich. Auf diese Art und Weise würde den Lernenden eine kindgerechte Unterstützung gegeben werden, besonders, weil Fingu nur korrektives Feedback gibt und es den Kindern daher schwer fallen könnte, selbstständig ihre Fehler zu identifizieren (vgl. Abbildung 6).

Kinder sollten ihre Antworten reflektieren (Benz et al., 2015). Fingu unterstützt sie allerdings dabei kaum: Es gibt lediglich korrektives **Feedback** und nicht erklärendes (Hattie & Timperley, 2007). Offensichtlich kann Fingu über die Eingabe am Bildschirm nicht erkennen, ob Finger fast auf dem Bildschirm platziert wurden oder Probleme anderer Art auftraten. Das ist nur über Beobachtung möglich. Es könnte die Fingerabdrücke der Finger aber nach der Eingabe sichtbar lassen, sodass die Kinder selbstständig ihre Antworten vergleichen können. Eine Idee dazu wäre das Einfügen eines Zwischenbildschirms, bevor das Fenster mit den Desserts oder der Zwiebel auftaucht und die Antwort verdeckt. Nachdem die Antwort des Kindes eingeloggt wurde, könnten alle Fingerabdrücke und Früchte sichtbar bleiben. Das Kind könnte dann über das Tippen auf einen Daumen hoch oder herunter entscheiden, ob die eingeloggte Antwort richtig oder falsch ist.

Somit besteht die Möglichkeit, die Früchte oder die eingeloggte Anzahl an Fingern nachzuzählen, (quasi-)simultan zu erfassen oder miteinander zu vergleichen und darüber die eigene Antwort zu reflektieren. Das schult nicht nur wieder diese Fähigkeiten, sondern führt außerdem dazu, dass das Kind so erkennen kann, ob ein bestimmter Finger nicht richtig den Bildschirm berührte oder eine Hand zu spät genutzt wurde. An diesen Stellen würden dann die passenden Fingerabdrücke fehlen. Vielleicht kann hier auch eine Wiederholungsmöglichkeit eingebaut werden, falls das Kind entscheiden sollte, dass die eingeloggte Antwort falsch sei. Erst danach könnte das korrektive Feedback der App gezeigt werden.

9.3.6 Motivation

Für das Kind ist eine kindgerechte, spielerische Aufarbeitung wichtig (Griffiths, 2011). Daher ist die Musik, die kleinen Figuren mit Gesichtern und die Verwendung von Früchten durchaus passend, auch wenn sie in keinem direkten Zusammenhang mit den mathematischen Objekten stehen. Gemäß der Motivationstheorie von Deci und Ryan (2010) sollte das Spiel Autonomie, Kompetenzerleben und soziale Eingebundenheit fördern, um motivierend zu sein. Dies wird in Maßen umgesetzt:
Kinder können in der Interaktion mit Fingu insofern **Autonomie** zeigen, als dass sie ihr Lerntempo und das Abarbeiten der Aufgaben selbstständig beeinflussen können. Nachdem eine Aufgabe erledigt ist, wird nicht direkt zur nächsten übergegangen, sondern die Kinder können eigenständig entscheiden, wann sie auf den Pfeil tippen. Außerdem können sie aus den bisher freigeschalteten Leveln auswählen, wobei sich bei dieser Studie alle Kinder dafür entschieden, das nächste Level zu bearbeiten. Darüber hinaus ist theoretisch noch ein Einfluss auf ihren Avatar und den Profilnamen möglich, was aus Gründen zur Zeitersparnis in dieser Studie nicht stattfand. Zu hinterfragen ist hierbei allerdings, wie viel Einfluss das Auswählen eines Profilnamens auf die Motivation hat, zumal viele Vorschulkinder, abgesehen von ihrem Namen, meist noch nicht lesen können.

Bezüglich des **Kompetenzerlebens** visualisiert werden wenige Erfolge visualisiert: Die Levelaufstiege werden über ausgefüllte Sterne im Profil sichtbar. Eine richtige Aufgabe wird mithilfe von Tönen und des Feedbackfensters untermalt. Zeitgleich wird der Fortschritt innerhalb eines Levels mithilfe einer Statusleiste sowie über Zahlen, z.B. „4/20“, dargestellt. Letzteres kann im Vorschulbereich wenig ergiebig sein, wenn Kinder noch sehr unsicher mit der Zifferndarstellung sind, insbesondere im Zahlenraum über 10. Die Zeitleiste visualisiert weniger, wie viel (bzw. wenig) Zeit sie für die Aufgabenlösung benötigten, sondern eher, wie viel Zeit noch zur Verfügung stand. Deutlich wird das darüber, dass die Zeitleiste von rechts nach links weniger wird. Um das Kompetenzerleben zu fördern, wäre es geeigneter, die verbrauchte Zeit zu visualisieren. Das heißt, dass sich die Zeitleiste von links nach rechts auffüllt. Demnach hätten die Kinder nach sehr kurzer Zeit geantwortet und können das direkt ablesen. Ein ebenfalls wesentlicher Aspekt hinsichtlich des Kompetenzerlebens ist der Umgang mit Fehlern. Da Fingu kein erklärendes Feedback gibt oder die Reflexion der eigenen Antworten ermöglicht, ist es für die Lernenden schwierig zu erkennen, wie sie diesen Fehler in Zukunft vermeiden können. Stattdessen wird über die Herzen visualisiert, wenn sie etwas nicht geschafft haben.

Der **soziale Aspekt** von Fingu fehlt fast vollständig. Natürlich kann zum Austausch untereinander angeregt werden und scheinbar kann dies zu einer höheren Motivation führen (vgl. Baccaglini-Frank & Maracci, 2015), doch die Kinder können nicht gemeinsam an dem Spiel arbeiten. Es besteht nicht die Möglichkeit, in Teams zu agieren oder Wettkämpfe untereinander auszutragen. Aufgrund der geringen Größe eines iPads ist dies auch schwer umzusetzen. Besser geeignet wäre dazu vielleicht ein Multi-Touch-Tisch, wie ihn Ladel und Kortenkamp (2013, 2014, 2014a) in ihren Untersuchungen einsetzen. Diese haben eine größere Benutzeroberfläche und erlauben es so, gemeinsam Aufgaben zu lösen. Da zeitgleiches Hinlegen der Hände über mehrere Kinder hinweg wahrscheinlich nicht möglich ist, könnte jedes Kind einzeln Aufgaben lösen, die dann gemeinsam mit dem anderen Kind zusammengefügt werden.

9.4 Grenzen der Studie

Für diese Studie wurden zehn Vorschulkinder eines Kindergartens untersucht, die wahrscheinlich das erste Mal mit Fingu interagierten. Es ist nicht auszuschließen, dass die Kinder bei einer erneuten Interaktion, zu einem anderen Zeitpunkt oder in einer anderen Situation, andere Ergebnisse zeigen würden. Zugleich wirken Selektionseffekte, da die ausgewählten Personen Merkmale besitzen können, wodurch die hier festgestellten Effekte nicht auf die Interaktion mit Fingu, sondern auf die Merkmale zurückgeführt werden können. Daher und da diese Studie eine qualitative Untersuchung darstellt, sind die getätigten Aussagen nicht generalisierbar auf andere Personengruppen, andere pädagogische Einrichtungen oder zukünftige Zeitpunkte. Die Ergebnisse und Diskussionsgrundlagen müssten stets im Einzelfall geprüft werden.

Einen Einfluss hat weiterhin die **Versuchsleiterin** als beteiligte Person in der Studie. Würde eine andere Person die Studie durchführen, könnten ebenfalls andere Ergebnisse erzielt werden. Besonders, da sie verbales Feedback gab, kann dies von Kind zu Kind unterschiedlich aufgefasst worden sein.

Zudem wurde zwar versucht, eine möglichst natürliche Umgebung für die Studie zu schaffen, trotzdem waren die Versuchspersonen von den anderen Kindern entfernt und wurden videographiert. Kind 3 schaut als einzige Person explizit zur **Kamera** hin. Es könnte sein, dass sich die Kinder dadurch unter Druck gesetzt oder abgelenkt fühlten.

Zuletzt kann die **Parameterwahl** bei Fingu einen Effekt ausüben: Wird variiert, wie lange die Elemente sichtbar sind, wie schnell sie sich bewegen, wie lange die Finger gehalten werden müssen, wie laut die Musik ist oder wie viele Leben die Kinder haben, könnten andere Darstellungsweisen oder motivationale Faktoren festgestellt werden. Möglicherweise wurden die 1:1- und Teil-Teil-Darstellungen nur wegen des Zeitdrucks gewählt und bei mehr Zeit würden sie eher auf Zusammenfassungen zurückgreifen.

9.5 Ausblick

Die Studie gibt bereits einen Einblick über Entwicklung der Interaktionen mit Fingu. Interessant wäre zu betrachten, welche Veränderungen bei diesen Kindern über einen längeren Zeitraum hinweg auftreten würden. Auch der Einfluss von den Parametern auf die Externalisierungen und Strategien könnte ergiebig sein. Zudem könnte die Stichprobe erweitert werden.

Bei einer erneuten Durchführung der Studie könnte zudem darauf geachtet werden, dass iPad-Modelle genutzt werden, die einen sehr schmalen Rand haben. Dadurch könnte verhindert werden, dass Kinder die Finger zwar auf dem Tablet, aber nicht auf dem touchsensitiven Bereich positionieren. Außerdem sollte sich im Vornherein klar entschieden werden, wann und wie den Kindern Feedback gegeben werden soll.

10 Fazit

Im Rahmen dieser Arbeit wurde das Lernspiel Fingu theoretisch analysiert und auf Basis einer Studie untersucht. Dafür wurde zuerst die Artifact-Centric Activity Theory aus der Tätigkeitstheorie hergeleitet und beschrieben. Anschließend wurde die theoretische Grundlage für die mathematischen Objekte von Fingu gelegt, indem der Zahlensinn der Zahlbegriffserwerb sowie das Teil-Ganze-Verständnis auf Basis der Literatur und hinsichtlich ihrer Entwicklung dargelegt wurden. Zudem wurden das Zählen, die (Quasi-)Simultanerfassung und die Anzahlvergleiche definiert und deren Kennzeichen benannt. Dies war relevant, um den mathematischen Inhalt von Fingu genauer zu beschreiben sowie auf Basis der *Embodied Cognition* die Externalisierungen der Kinder bestimmen zu können. Anschließend wurde begründet, inwiefern die frühe mathematische Bildung einen Einfluss auf den mathematischen Erkenntnisgewinn ausübt und wie sie optimal durchgeführt wird. Mithilfe dieser Erkenntnisse lässt sich der Einsatz von Fingu in der Zielgruppe der Vorschulkinder begründen. Da Fingu nicht zuletzt ein digitales Lernspiel darstellt, wurde ebenfalls erklärt, welche positiven Effekte durch den Einsatz digitaler Werkzeuge hervorgerufen werden können und warum der Multi-Touch-Aspekt für den Lerngegenstand gewinnbringend sein kann. So wurde der Rahmen für die Analyse und die Studie der App geschaffen.

Bevor jedoch eigene Analysen und Erkenntnisse angeführt wurden, wurde Fingu detailliert beschrieben, sein Design aus Sicht der Entwickler:innen begründet und Studien dazu angeführt. Auf Basis all dieser Informationen wurde schließlich die Analyse, orientiert am ACAT-Review-Guide, durchgeführt (vgl. Etzold et al., 2018). Dabei stellte sich vor allem heraus, dass sich Fingu dazu eignen kann, die (Quasi-)Simultanerfassung, das Zählen sowie 1:1-Zuordnungen zu trainieren. Für die Ausbildung eines Teil-Ganze-Verständnisses scheint es allerdings weniger geeignet zu sein.

Die Ergebnisse der Studie unterstützen diese Aussagen. Unter Betrachtung der Forschungsfrage, wie die Kinder die von Fingu dargestellten Anzahlen mithilfe ihrer Finger externalisieren, konnten die Kinder in vier Typen mit verschiedenen Externalisierungen eingeteilt werden. Von diesen vier Typen zeigt nur einer (Typ 1) über die gesamte Interaktion hinweg gleichbleibend Zusammenfassungen. Alle anderen Typen und damit acht von zehn Kindern verwenden, spätestens ab dem dritten Level, vorrangig Teil-Teil-Darstellungen.

Ferner wurde konkludiert, dass über die Interaktion mit verschiedenen Mengendarstellungen eine Förderung des Zahlensinns stattfinden kann. Der Zahlbegriffserwerb wird jedoch nur wenig unterstützt, da innerhalb der Lernumgebung fast ausschließlich der kardinale Zahlaspekt im Fokus steht. Dies bildet keine ausreichende, vernetzte Grundlage, um von einem entwickelten Zahlbegriff zu sprechen.

„Wenngleich insgesamt feststeht, daß [sic] Kleinkinder und Kinder im Vorschulalter durch Spieltätigkeiten vieles [sic] lernen, bleibt doch das Problem der Zufälligkeit des Lernens. Je nach Spielform treten mehr oder weniger interne kognitive Aktivitäten auf.“
(Einsiedler, 1989, S. 297).

Für Fingu bedeutet das vor allem eines: Allein eingesetzt, bietet es nur wenig Anknüpfungspunkte für komplexere kognitive Aktivitäten (vgl. McGuinness, 1990). Es scheint eher zur Automatisierung und zum Trainieren fester Muster zu tendieren. Dies wurde sowohl in der Analyse, als auch in der Studie deutlich. Zusammen mit Hilfestellungen, der Leitung durch Pädagog:innen oder der Möglichkeit, eigene Antworten zu reflektieren, kann es aber nicht nur Strategien der Anzahlerfassung und -darstellung sowie des Anzahlvergleichs fördern, sondern auch Aspekte des Teil-Ganze-Verständnisses vermitteln. Vorschläge dazu wurden in eben diesen Kapiteln geschildert. So können die Kinder schließlich, gemäß des Titels dieser Arbeit, Zahlen in den Fingern zeigen. Fingu hat demnach viel Potenzial, das Verstehen der Kinder zu fördern, sofern Anpassungen vorgenommen werden.

11 Literaturverzeichnis

Andres, M., Seron, X., & Oliver, E. (2007). Contribution of hand motor circuits to counting. *Journal of Cognitive Neuroscience, 19*, 563–576.

Andrews, D. R. (2011). Integer operations using a whiteboard. Integrating interactive technology enhances student engagement and understanding of a common middle school topic. *Mathematics Teaching in the Middle School, 16*(8), 474 – 479. https://doi.org/10.5951/MTMS.16.8.0474

Anobile, G., Cicchini, G. M., & Burr, D. C. (2016). Number as a primary perceptual attribute: a review. *Perception, 45*(1–2), 5–31. https://doi.org/10.1177/0301006615602599

Artigue, M. (2002). Learning mathematics in a CAS environment: The genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 7*(3), 245-274. https://doi.org/10.1023/A:1022103903080

Aunola, K., Leskinen, E., Lerkkanen, M.-K., & Nurmi, J.-E. (2004). Developmental Dynamics of Mathematical Performance from Preschool to Grade 2. *Journal of Educational Psychology, 96*(4), 699-713. https://doi.org/10.1037/0022-0663.96.4.699

Baccaglini-Frank, A., & Maracci, M. (2015). Multi-touch technology and preschoolers' development of number-sense. *Digital Experiences in Mathematics Education, 1*(1), 7–27. https://doi.org/10.1007/s40751-015-0002-4

Baccaglini-Frank, A., Carotenuto, G., & Sinclair, N. (2020). Eliciting preschoolers' number abilities using open, multi-touch environments. *ZDM, 52*, 779–791. https://doi.org/10.1007/s11858-020-01144-y

Baddeley, A. (1992). Working memory. *Science, 255*, 556–559.

Barendregt, W., Lindström, B., Rietz-Leppänen, E., Holgersson, I., & Ottosson, T. (2012, June). *Development and Evaluation of Fingu: A Mathematics iPad Game Using Multitouch Interaction* [Paper presentation]. IDC '12: Proceedings of the 11th International Conference on Interaction Design and Children, Bremen, Germany. https://doi.org/10.1145/2307096.2307126

Baroody, A. J., Lai, M.-L., & Mix, K. S. (2006). The Development of Young Children's Number and Operation Sense and its Implications for Early Childhood Education. In B. Spodek, & O. Saracho (Eds.), *Handbook of Research on the Education of Young Children* (pp. 187–221). Erlbaum.

Baroody, A. J., Bajwa, N. P., & Eiland, M. (2009). Why can't Johnny remember the basic facts? *Developmental Disabilitites Research Reviews, 15*, 69-79. https://doi.org/10.1002/ddrr.45

Baroody, A. J., Eiland, M., Purpura, D. J., & Reid, E. E. (2013). Can computer-assisted discovery learning foster first graders' fluency with the most basic addition combinations? *American Educational Research Journal, 50*(3), 533–573. https://doi.org/10.3102/0002831212473349

Bayraktar, S. (2001/2002). A meta-analysis of the effectiveness of computer-assisted instruction in science education. *Journal of Research on Technology in Education, 34*(2), 173–188. https://doi.org/10.1080/15391523.2001.10782344

Bellamy, R. K. E. (1996). Designing educational technology. In B. A. Nardi (Ed.), *Context and Consciousness* (pp. 126-146). MIT Press.

Belland, B. R., Walker, A. E., Kim, N. J., & Lefler, M. (2017). Synthesizing results from empirical research on computer-based scaffolding in STEM education: A meta-analysis. *Review of Educational Research, 87*(2), 309–344. https://doi.org/10.3102/0034654316670999

Bender, A., & Beller, S. (2012). Nature and culture of finger counting: diversity and representational effects of an embodied cognitive tool. *Cognition, 124*(2), 156–182. https://doi.org/10.1016/j.cognition.2012.05.005

Benz, C. (2011). Den Blick schärfen. In M. Lüken & A. Peter-Koop (Hrsg.), *Mathematischer Anfangsunterricht. Befunde und Konzepte für die Praxis* (S. 7–21). Mildenberger.

Benz, C., Peter-Koop, A., & Grüßing, M. (2015). *Frühe mathematische Bildung. Mathematiklernen der Drei- bis Achtjährigen.* Springer Spektrum. https://doi.org/10.1007/978-3-8274-2633-8

Berch, D. B. (2005). Making sense of number sense: implications for children with mathematical disabilities. *Journal of Learning Disabilities, 38*(4), 333–339.

Bottino, R., & Chiappini, G. (2008). Using Activity Theory to study the relationship between technology and the learning environment in the arithmetic domain. In L. English, & M. Bussi (Eds.), *Handbook of international research in mathematics education* (pp. 838-861). Routledge.

Brissiaud, R. (1992). A toll for number construction: Finger symbol sets. In J. Bidaud, C. Meljac, & J.-P. Fischer (Eds.), *Pathways to number. Children's developing numerical abilities.* Lawrence Erlbaum Associates.

Brissiaud, R. (2003). *Comment les Enfants Apprennent à Calculer.* Retz.

Broda, M., Tucker, S. I., Ekholm, E., Johnson, T. N., & Liang, Q. (2018). Small fingers, big data: Preschoolers' subitizing speed and accuracy during interactions with multitouch technology. *Journal of Educational Research, 112*(2), 211–222. https://doi.org/10.1080/00220671.2018.1486281

Brown, A. L. (1992). Design experiments: Theoretical and methodological challenges in creating complex interventions in classroom settings. *The Journal of the Learning Sciences, 2*(2), 141– 178. https://doi.org/10.1207/s15327809jls0202_2

Butterworth, B. (1999). *The Mathematical Brain.* Macmillan.

Butterworth, B. (2005). The development of arithmetical abilities. *Journal of Child Psychology and Psychiatry, 46*(1), 3-18. https://doi.org/10.1111/j.1469-7610.2004.00374.x

Chen, J., Wang, M., Kirschner, P. A., & Tsai, C. C. (2018). The role of collaboration, computer use, learning environments, and supporting strategies in CSCL: A meta-analysis. *Review of Educational Research, 88*(6), 799–843. https://doi.org/10.3102/0034654318791584

Cheung, A. C. K., & Slavin, R. E. (2013). The effectiveness of educational technology applications for enhancing mathematics achievement in K-12 classrooms: A meta-analysis. *Educational Research Review, 9*, 88–113. https://doi.org/10.1016/j.edurev.2013.01.001

Clements, D. H. (1984). Training Effects on the Development and Generalization of Pigetian Logical Operations and Knowledge of Number. *Journal of Educational Psychology, 76*(5), 766–776. https://doi.org/10.1037/0022-0663.76.5.766

Clements, D. (1999). Subitizing: What is it? Why teach it? *Teaching Children Mathematics, 5*(7). https://doi.org/10.5951/TCM.5.7.0400

Clements, D. H., & Sarama, J. (2009). *Learning and teaching early math: the learning trajectories approach.* Routledge. https://doi.org/10.1037/0096-1523.20.5.958

Clements, D. H., Sarama, J., & MacDonald, B. L. (2019). Subitizing: the neglected quantifier. In A. Norton, & M. W. Alibali (Eds.), *Constructing number: merging perspectives from psychology and mathematics education* (pp. 13–45). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-030-00491-0_2

Cobb, P., Confrey, J., diSessa, A., Lehrer, R., Schauble, L., & Sessa, A. (2003). Design experiments in educational research. *Educational Researcher, 32*(1), 9–13. https://www.jstor.org/stable/3699928

Deci, E. L., & Ryan, R. M. (2010). *Self-determination.* The Corsini encyclopedia of psychology. https://doi.org/10.1002/9780470479216.corpsy0834

Dehaene, S. (1999). *Der Zahlensinn. Oder warum wir rechnen können.* Springer.

Dehaene, S. (2011). *The number sense.* Oxford University Press.

Dehaene, S., & Cohen, L. (1994). Dissociable mechanisms of subitizing and counting: neuropsychological evidence from simultanagnosic patients. *Journal of Experimental Psychology: Human Perception and Performance, 20*(5), 958–975. https://doi.org/10.1037/0096-1523.20.5.958

Dehaene, S., Piazza, M., Pinel, P., & Cohen, L. (2003). Three parietal circuits for number processing. *Cognitive Neuropsychology, 20*, 487–506. https://doi.org/10.1080/02643290244000239

Diephaus, A. (2015). *Zahlengefühl 2000.* WTM Verlag.

Drijvers, P., Doorman, M., Boon, P., & van Gisbergen, S. (2011). Instrumental orchestration: Theory and practice. In V. Durand-Guerrier, S. Soury-Lavergne, & F. Arzarello (Eds.), *Proceedings of the congress of the European Society for Research in Mathematcis Education* (pp. 1349–1358), January 28–February 1, 2009, Lyon, France.

Dohrmann, C., Kortenkamp, U., & Ladel, S. (2012, July 8-15). *An Activity-Theoretic View on Multitouch Devices in Mathematics Education* [Paper Presentation]. Presentation on the 12th International Congress on Mathematical Education. ICME 12, Seoul, Korea.

Dornheim, D. (2008). *Prädiktion von Rechenleistung und Rechenschwäche: Der Beitrag von Zahlen-Vorwissen und allgemein-kognitiven Fähigkeiten.* Logos.

Douglass, H. R. (1925). The Development of Number Concept in Children of Preschool and Kindergarten Ages. *Journal of Experimental Psychology, 8*, 443–470. https://doi.org/10.1037/h0065267

Ehmke, T., Siegle, T., & Hohensee, F. (2005). Soziale Herkunft und Ländervergleich. In PISA-Konsortium Deutschland (Hrsg.), *PISA 2003. Der zweite Vergleich der Länder in Deutschland – Was wissen und können Jugendliche?* (S. 235–268). Waxmann.

Einsiedler, W. (1989). Zum Verhältnis von Lernen im Spiel und intentionalen Lehr-Lern-Prozessen. *Unterrichtswissenschaft, 4*(17), 291–308.

Einsiedler, W., Heidenreich, E., & Loesch, C. (1985). Lernspieleinsatz im Mathematikunterricht der Grundschule. *Spielmittel, 5*(2), 2–10.

Engeström, Y. (1991). Activity Theory and Individual and Social Transformation. *Activity Theory, 7*(8), 6-17.

Engeström, Y. (2008). *Entwickelnde Arbeitsforschung. Die Tätigkeitstheorie in der Praxis.* Lehmanns Media.

Ennemoser, M., & Krajewski, K. (2007). Effekte der Förderung des Teil-Ganzes-Verständnisses bei Erstklässlern mit schwachen Mathematikleistungen. *Vierteljahreszeitschrift für Heilpädagogik und ihre Nachbargebiete, 76*, 228–240.

Ester, E. F., Drew, T., Klee, D., Vogel, E. K., & Awh, E. (2012). Neural measures reveal a fixed item limit in subitizing. *Journal of Neuroscience, 32*(21), 7169–7177. https://doi.org/10.1523/JNEUROSCI.1218-12.2012

Etzold, H., Kortenkamp, U., & Ladel, S. (2018). ACAT-Review-Guide – Ein tätigkeitstheoretischer Blick auf die Beurteilung von Mathematik-Apps. In S. Ladel, U. Kortenkamp, & H. Etzold (Hrsg), *Mathematik mit digitalen Medien – konkret. Ein Handbuch für Lehrpersonen der Primarstufe. Bd. 4. Lernen, Lehren und Forschen mit digitalen Medien.* WTM Verlag. Abgerufen am 02.07.2023 unter https://dlgs.uni-potsdam.de/sites/default/files/u3/ACAT-Review-Guide-de.pdf

Feigensohn, L., Dehaene, S., & Spelke, E. (2004). Core Systems of Number. *Trends in Cognitive Sciences, 8*(7) 307–314. https://doi.org/10.1016/j.tics.2004.05.002

Fischer, M. H., & Brugger, P. (2011). When digits help digits: spatial–numerical associations point to finger counting as prime example of embodied cognition. *Frontiers in Psychology, 2*. https://doi.org/10.3389/fpsyg.2011.00260

Fischer, M. H., Kaufmann, L., & Domahs, F. (2012). Finger counting and numerical cognition. *Frontiers in Psychology, 3*, 1. https://doi.org/10.3389/fpsyg.2012.00108

Fischer, B., Köngeter, A., & Hartnegg, K. (2008). Effects of Daily Practice on Subitizing, Visual Counting, and Basic Arithmetic Skills. *Optometry & Vision Development, 39*(1), 30-34.

Fischer, H., & Wannemacher, K. (2013). (E-Learning-)Innovationen im Lehralltag. Theoriegeleitete Ein- und Ausblicke. In C. Bremer, & D. Krömker (Hrsg.), *E-Learning zwischen Vision und Alltag: zum Stand der Dinge* (S. 85-94). Waxmann. https://doi.org/10.25656/01:10734

Frailich, M., Kesner, M., & Hofstein, A. (2009). Enhancing students' understanding of the concept of chemical bonding by using activities provided on an interactive website. *Journal of Research in Science Teaching, 46*(3), 289–310. https://doi.org/10.1002/tea.20278

Franke, M. (2008). *Didaktik der Geometrie in der Grundschule (Mathematik Primarstufe und Sekundarstufe I+II)*. Spektrumverlag.

Freeman, F. N. (1912). Grouped Objects as a Concrete Basis for Number Ideas. *Elementary School Teacher, 8*, 306–314.

Fritz, A., & Ricken, G (2009). Grundlagen des Förderkonzepts „Kalkulie". In A. Fritz, G. Ricken & S. Schmidt (Hrsg.), *Handbuch Rechenschwäche* (S. 374–395). Beltz.

Fritz, A., Ehlert, A., & Balzer, M. (2013). Development of mathematical concepts as basis for an elaborated mathematical understanding. *South African Journal of Childhood Education, 3*(1), 38–67. https://doi.org/10.4102/sajce.v3i1.31

Fuson, K. C. (1988). *Children's Counting and Concepts of Number*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-1-4612-3754-9

Fuson, K. C. (1992). Research on whole number addition and subtraction. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 243-275). MacMillan.

Gaidoschik, M., & Fellmann, A. (2015). Zählendes Rechnen im 1. Schuljahr: (Vermutlich) weder notwendig noch förderlich. In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten, & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht* (S. 296-299). WTM Verlag.

Gallistel, C. R., & Gelman, R. (1992). Preverbal and verbal counting and computation. *Cognition, 44*, 43–74. https://doi.org/10.1016/0010-0277(92)90050-R

Garrote, A., Moser Oppitz, E., & Ratz, C. (2015). Mathematische Kompetenzen von Schülerinnen und Schülern mit dem Förderschwerpunkt geistige Entwicklung. Eine Querschnittstudie. *Empirische Sonderpädagogik, 7*(1), 24-40. https://doi.org/10.25656/01:10280

Geary, D. C. (2005). Les troubles d'apprentissage en arithmétique: Rôle de la mémoire de travail et des connaissances conceptuelles. In M. P. Noel (Ed.), *La Dyscalculie: Trouble du Développement Numérique de l'Enfant* (pp. 169-191). SOLAL.

Geary, D. C. (2006). Development of Mathematical Understanding. In D. Kuhn, R. S. Siegler, W. Damon, & R. M. Lerner (Eds.), *Handbook of Child Psychology. Volume 2: Cognition, Perception, and Language* (S. 777–810). Wiley.

Gelman, R., & Gallistel, C. R. (1986). *The Child's Understanding of Number*. Harvard University Press. https://doi.org/10.4159/9780674037533

Giest, H. (2010). *Tätigkeitstheorie und (Wissens-)Gesellschaft: Fragen und Antworten aus tätigkeitstheoretischer Forschung und Praxis*. Lehmanns Media.

Gracia-Bafalluy, M. & Noël, M.-P. (2008). Does finger training increase young children's numerical performance? *Cortex, 44*, 368-375. https://doi.org/10.1016/j.cortex.2007.08.020

Greefrath, G., Hertleif, C., & Siller, H.-S. (2018). Mathematical modelling with digital tools—a quantitative study on mathematising with dynamic geometry software. *ZDM Mathematics Education, 50*(1), 233–244. https://doi.org/10.1007/s11858-018-0924-6

Griffin, S. A., Case, R., & Siegler, R. S. (1994). Rightstart: Providing the central conceptual prerequisites for first formal learning of arithmetic to students at risk for school failure. In K. McGilly (Ed.), *Classroom lessons: Integrating cognitive theory and classroom practice* (pp. 24–49). MIT Press.

Griffiths, R. (2011). Mathematics and Play. In J. Moyles (Ed.), *The Excellence of Play* (pp. 169–185). Open University Press.

Grüßing, M., & Peter-Koop, A. (2008). Effekte vorschulischer mathematischer Förderung am Ende des ersten Schuljahres: Erste Befunde einer Längsschnittstudie. *Zeitschrift für Grundschulforschung, 1*(1), 65–82.

Gunderson, E. A., Spaepen, E., Gibson, D., Goldin-Meadow, S., & Levine, S. C. (2015). Gesture as a window onto children's number knowledge. *Cognition, 144*, 14–28. https://doi.org/10.1016/j.cognition.2015.07.008

Gunbas, N. (2015). Students' mathematics word problem-solving achievement in a computer-based story. *Journal of Computer Assisted Learning, 31*(1), 78–95. https://doi.org/10.1111/jcal.12067

Hannula, M. M., Räsänen, P., & Lehtinen E. (2007). Development of Counting Skills: Role of Spontaneous Focusing on Numerosity and Subitizing-Based Enumeration. *Mathematical Thinking and Learning, 9*(1), 51–57. https://doi.org/10.1080/10986060709336605

Hattie, J., & Timperley, H. (2007). The power of feedback. *Review of Educational Research, 77*(1), 81–112. https://doi.org/10.3102/003465430298487

Heinz, F. (2015). Spiele zum Rechnenlernen? Erste Erfahrungen. In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten, & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht* (S. 364-367). WTM-Verlag.

Hengartner, E., & Röthlisberger, H. (1995). Rechenfähigkeit von Schulanfängern. In H. Brügelmann, H. Balhorn, & I. Füssenich (Hrsg.), *Am Rande der Schrift* (S. 66–86). Libelle.

Higgins, K., Huscroft-D'Angelo, J., & Crawford, L. (2019). Effects of technology in mathematics on achievement, motivation, and attitude: A meta-analysis. *Journal of Educational Computing Research, 57*(2), 283–319. https://doi.org/10.1177/0735633117748416

Hillmayr, D., Ziernwald, L., Reinhold, F., Hofer, S. I., & Reiss, K. M. (2020). The potential of digital tools to enhance mathematics and science learning in secondary schools: A context-specific meta-analysis. *Computers & Education, 153*, 103897. https://doi.org/10.1016/j.compedu.2020.103897

Holgersson, I., Barendregt, W., Emanuelsson, J., Ottosson, T., Rietz, E., & Lindström, B. (2016). Fingu—a game to support children's development of arithmetic competence: theory, design and empirical research. In P. S. Moyer-Packenham (Ed.), *International perspectives on teaching and learning mathematics with virtual manipulatives* (pp. 123–145). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-319-32718-1_6

Howden, H. (1989). Teaching Number Sense. *Arithmetic Teacher, 36*(6), 6-11. https://doi.org/10.5951/AT.36.6.0006

Huppert, J., Lomask, S. M., & Lazarowitz, R. (2002). Computer simulations in the high school: Students' cognitive stages, science process skills and academic achievement in microbiology. *International Journal of Science Education, 24*(8), 803–821. https://doi.org/10.1080/09500690110049150

Ifrah, G. (2000). *The universal history of numbers: From prehistory to the invention of the computer.* Wiley.

Johnson, M. L. (1999). Embodied reason. In I. G. Weiss & H. F. Haber (Eds.), *Perspectives on embodiment: The intersections of nature and culture* (p. 81-102). Routledge.

Kaufman, E. L., Lord, M. W., Reese, T. W., & Volkman, J. (1949). The discrimination of visual number. *American Journal of Psychology, 62*, 498–525. https://doi.org/10.2307/1418556

Kaufmann, S. (2003). *Früherkennung von Rechenstörungen in der Eingangsklasse und darauf abgestimmte remediale Maßnahmen.* Lang.

Koolstra, G. (2001). *A memo about the add-on value of applets.* Abgerufen am 02.01.2023 von www.fi.uu.nl/wisweb

Kortenkamp, U., Larkin, K., Ladel, S., & Dahl, D. (2023, July 10-14). *Investigating the effect of learning part-part instead of part-whole concepts using the Fingu App from an ACAT perspective* [Paper presentation]. TWG 24: Representations in Mathematics Teaching and Learning, Proceedings of the Thirteenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME13), Budapest, Hungary.

Krajcsi, A., Szabó, E., & Mórocz, I. Á. (2013). Subitizing is sensitive to the arrangement of objects. *Experimental Psychology, 60*(4), 227–234. https://doi.org/10.1027/1618-3169/a000191

Krajewski, K. (2003). *Vorhersage von Rechenschwäche in der Grundschule.* Kovač.

Krajewski, K. (2008). Vorschulische Förderung mathematischer Kompetenzen. In F. Petermann & W. Schneider (Hrsg.), *Angewandte Entwicklungspsychologie* (S. 275–304). Hogrefe.

Krajewski, K., & Ennemoser, M. (2013). Entwicklung und Diagnostik der Zahl-Größen-Verknüpfung zwischen 3 und 8 Jahren. In M. Hasselhorn, A. Heinze, W. Schneider, & U. Trautwein (Hrsg.), *Diagnostik mathematischer Kompetenzen. Tests & Trends. Bd. 11* (S. 225-240). Hogrefe Verlag.

Krajewski, K., Grüßing, M., & Peter-Koop, A. (2009). Die Entwicklung mathematischer Kompetenzen bis zum Beginn der Grundschulzeit. In A. Heinze & M. Grüßing (Hrsg.), *Mathematiklernen vom Kindergarten bis zum Studium. Kontinuität und Kohärenz als Herausforderung für den Mathematikunterricht* (S. 17–34). Waxmann.

Krajewski, K., Renner, A., Nieding, G., & Schneider, W. (2008). Frühe Förderung von mathematischen Kompetenzen im Vorschulalter. H. G. Roßbach, & H. P. Blossfeld (Hrsg.), *Frühpädagogische Förderung in Institutionen.* VS Verlag für Sozialwissenschaften. https://doi.org/10.1007/978-3-531-91452-7_7

Krauthausen, G. (2012). *Digitale Medien im Mathematikunterricht der Grundschule.* Spektrum. https://doi.org/10.1007/978-3-8274-2277-4

Ladel, S. (2013). „Garantierter Lernerfolg“ oder „Digitale Demenz“? Zum frühen Lernen von Mathematik mit digitalen Medien. In G. Greefrath, F. Käpnick, & M. Stein (Hrsg.), Beiträge zum Mathematikunterricht (S. 54-61). WTM-Verlag.

Ladel, S. (2016). Lehren und Lernen von Mathematik mit digitalen Medien – ein Blick in die (nahe) Zukunft. In M. Peschel, & T. Irion (Hrsg.), *Neue Medien in der Grundschule 2.0. Grundlagen – Konzepte – Perspektiven* (S. 247-257). Grundschulverband – Arbeitskreis Grundschule e.V. https://doi.org/10.25656/01:17715

Ladel, S. (2017). Ein TApplet für die Mathematik. Zur Bedeutung von Handlungen mit physischen und virtuellen Materialien. In J. Bastian & S. Aufenanger (Hrsg), *Tablets in Schule und Unterricht. Forschungsmethoden und -perspektiven zum Einsatz digitaler Medien* (S. 301-326). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-658-13809-7_13

Ladel, S., & Kortenkamp, U. (2012). *Early maths with multi-touch – an activity-theoretic approach.* CERMAT.

Ladel, S. & Kortenkamp, U. (2013). An activity-theoretic approach to multi-touch tools in early maths learning. *The International Journal for Technology in Mathematics Education, 20*(1), 3-8.

Ladel, S., & Kortenkamp, U. (2014). Number Concepts – Processes of Internalization and Externalization by the Use of Multi-Touch Technology. In U. Kortenkamp, B. Brandt, C. Benz, G. Krummheuer, S. Ladel, & R. Vogel (Eds.), *Early Mathematics Learning. Selected Papers of the POEM 2012 Conference* (pp. 237-253). Springer. https://doi.org/10.1007/978-1-4614-4678-1_15

Ladel, S., & Kortenkamp, U. (2014a). Tätigkeitsorientiert zu einem flexiblen Verständnis von Stellenwerten – Ein Ansatz aus Sicht der Artefact-Centric Activity Theory. In S. Ladel, & C. Schreiber (Hrsg.), *Von Audiopodcast bis Zahlensinn. Lernen, Lehren und Forschen mit digitalen Medien* (S. 151-176). WTM-Verlag.

Ladel, S. & Kortenkamp, U. (2016). Artifact-Centric Activity Theory – A Framework for the Analysis of the Design and Use of Virtual Manipulatives. In P. S. Moyer-Packenham (Ed.), *International Perspectives on Teaching and Learning Mathematics with Virtual Manipulatives* (pp. 25-40). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-32718-1_2

Lange, B. (1984). *Zahlbegriff und Zahlgefühl. Eine Analyse von Zahlbegriff und Zahlgefühl zum Zwecke des Einsatzes von drei Taschenrechnerspielen im Mathematikunterricht der Grundschule*. Dissertation, Universität Münster.

Lange, B., & Meißner, H. (1983). Zum Lernprozess im Bereich Arithmetik. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 2*, 92-101.

Lassaline, M. E., & Logan, G. D. (1993). Memory-based automaticity in the discrimination of visual numerosity. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory, and Cognition., 19*(3), 561. https://doi.org/10.1037/0278-7393.19.3.561

Leuders, T. (2005). Intelligentes Üben selbst gestalten! – Erfahrungen aus dem Mathematikunterricht. *Pädagogik, 11*(5), 29-32.

Lindström, B., Marton, F., Emanuelsson, J., Lindahl, M., & Packendorff, M. (2011). Preschool children's learning of number concepts in a game-enhanced learning environment. In J. Emanuelsson, L. Fainsilber, J. Häggström, A. Kullberg, B. Lindström, & M. Löwing (Eds.), *Voices on learning and instruction in mathematics* (pp. 119-141). National Centre for Mathematics Education: University of Gothenburg.

Leontjew, A. N. (1982). *Tätigkeit, Bewußtsein, Persönlichkeit. Studien zur Kritischen Psychologie*. Pahl-Rugenstein.

Logan, G. D., & Zbrodoff, N. J. (2003). Subitizing and similarity: toward a pattern-matching theory of enumeration. *Psychonomic Bulletin & Review, 10*(3), 676–682. https://doi.org/10.3758/BF0319653

Lorenz, J. H. (2006). Grundschulkinder rechnen anders – Die Entwicklung mathematischer Strukturen und des Zahlensinns von „Matheprofis". In E. Rathgeb-Schnierer, & U. Roos (Hrsg.), *Wie rechnen Matheprofis? Ideen und Erfahrungen zum offenen Mathematikunterricht* (S. 113-122). Oldenbourg.

Lorenz, J. H. (2012). *Kinder begreifen Mathematik: Frühe mathematische Bildung und Förderung*. Kohlhammer.

Lortie-Forgues, H., Tian, J., & Siegler, R. S. (2015). Why is learning fraction and decimal arithmetic so difficult? *Developmental Review, 38*, 201–221. https://doi.org/10.1016/j.dr.2015.07.008

Ma, W., Adesope, O. O., Nesbit, J. C., & Liu, Q. (2014). Intelligent tutoring systems and learning outcomes: A meta-analysis. *Journal of Educational Psychology, 106*(4), 901–918. https://doi.org/10.1037/a0037123

Marcon, R. (1999). Differential Impact of Preschool Models on Development and Early Learning of Inner-City Children: A Three Cohort Study. *Developmental Psychology, 35*, 358–375. https://doi.org/10.1037/0012-1649.35.2.358

Marcon, R. (2002). Moving up the grades: Relationship between preschool model and later school success. *Early Childhood Research and Practice, 4*(1). Abgerufen am 21.06.2023 von https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED464762.pdf

Marinthe, C., Fayol, M., & Barrouillet, P. (2001). Gnosies digitales et développement des performances arithmétiques. In A. Van Hout, C. Meljac, & J. P. Fischer (Eds), *Troubles du Calcul et Dyscalculies chez l'Enfant* (pp. 239-254). Masson.

Margolinas, C., & Wosniak, F. (2012). *Le nombre à l'école maternelle. Une approche didactique.* De Boeck.

Marton, F., & Booth, S. (1997). *Learning and awareness.* Lawrence Erlbaum Associates. https://doi.org/10.4324/9780203053690

Mayer, R. E. (2014). Cognitive theory of multimedia learning. In R. E. Mayer (Ed.), *Multimedia Learning* (pp. 31–48). Cambridge University Press. https://doi.org/10.1016/S0079-7421(02)80005-6

Mayring, P. (1996). *Einführung in die qualitative Sozialforschung. Eine Anleitung zum qualitativem Denken.* Beltz.

McGuinness, C. (1990). Talking about thinking: The role of metacognition in teaching thinking. In K. Gilhooly, M. Deane, & G. Erdos (Eds.), *Lines of thinking* (pp. 310–312). Academic.

McMullen, J., Hannula-Surmonen, M. M., & Lehtinen, E. (2014). Spontaneous focusing on quantitative relations in the development of children's fraction knowledge. *Cognition and Instruction, 32*(2), 198–218. https://doi.org/10.1080/07370008.2014.887085

McMullen, J., Hannula-Surmonen, M. M., & Lehtinen, E. (2015). Preschool spontaneous focusing on numerosity predicts rational number conceptual knowledge 6 years later. *ZDM Mathematics Education.* https://doi.org/10.1007/s11858-015-0669-4

Mehan, H. (1979). „What time is it Denise?": Asking known information question in classroom discourse. *Theory into Practice, 28*(4), 285–289. https://doi.org/10.1080/00405847909542846

Meißner, H., & Diephaus, A. (2009, August 23-28). The Development of Number Sense. In J. Novotná, & H. Moraová (Eds.), *Proceedings of the International Symposium Elementary Maths Teaching* (pp. 176-184). Charles University.

Moeller, K., Fischer, U., Link, T., Wasner, M., Huber, S., Cress, U., & Nuerk, H.-C. (2012). Learning and development of embodied numerosity. *Cognitive Processing, 13*(1), 271–274. https://doi.org/10.1007/s10339-012-0457-9

Moreno, R. (2006). Optimizing learning from animations by minimizing cognitive load: Cognitive and affective consequences of signaling and segmentation methods. *Applied Cognitive Psychology, 21*, 1–17. https://doi.org/10.1002/acp.1348

Moreno, R., & Mayer, R. (2007). Interactive multimodal learning environments: Special issue on interactive learning environments: Contemporary issues and trends. *Educational Psychology Review, 19*(3), 309–326. https://doi.org/10.1007/s10648-007-9047-2

Moyer-Packenham, P. S., Shumway, J. F., Bullock, E., Tucker, S. I., Anderson-Pence, K. L., Westenskow, A., Boyer-Thurgood, J., Maahs-Fladung, C., Symanzik, J., Mahamane, S., MacDonald, B., & Jordan, K. (2015). Young children's learning performance and efficiency when using virtual manipulative mathematics iPad apps. *Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching, 34*(1), 41–69. https://www.learntechlib.org/primary/p/147356/

Mulligan, J. (2011). Towards understanding the origins of children's difficulties in mathematics learning. *Australian Journal of Learning Difficulties, 16*(1), 19–39. https://doi.org/10.1080/19404158.2011.563476

Mulligan, J., Verschaffel, L., Baccaglini-Frank, A., Coles, A., Gould, P., He, S., Ma, Y., Milinković, J., Obersteiner, A., Roberts, N., Sinclair, N., Wang, A., Xie, S., & Yang, D.-C. (2018). Whole number thinking, learning and development: Neuro-cognitive, cognitive and developmental approaches. In M. G. Bartolini Bussi & X. H. Sun (Eds.), *Building the Foundation: Whole Numbers in the Primary Grades: The 23rd ICMI Study* (pp. 137–167). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-319-63555-2_7

Nacher, V., Jaen, J., Navarro, E., Catala, A., & González, P. (2015). Multi-touch gestures for pre-kindergarten children. *International Journal of Human-Computer Studies, 73*, 37–51. https://doi.org/10.1016/j.ijhcs.2014.08.004

National Council of Teachers of Mathematics [NCTM] (Ed.) (2000). *Principles and Standards for School Mathematics.* Reston.

Nattland, A., & Kerres, M. (2009). Computerbasierte Methoden im Unterricht [Computer-based Methods in Class]. In K.-H. Arnold, U. Sandfuch, & J. Wiechmann (Eds.), *Handbuch Unterricht* (pp. 317–324). Julius Klinkhardt.

Neuman, D. (1987). *The origin of arithmetic skills. A phenomenographic approach.* Acta Universitatis Gothoburgensis.

Noël, M.-P. (2005). Finger gnosia: a predictor of numerical abilities in children? *Child Neuropsychology, 11*, 413-430. https://doi.org/10.1080/09297040590951550

Nunes, T., Schliemann, A. M., & Carraher, D. W. (1993). *Street Mathematics and School Mathematics.* Cambridge University Press.

Obersteiner, A., Hoof, J. V., Verschaffel, L., & Dooren, W. V. (2016). Who can escape the natural number bias in rational number tasks? A study involving students and experts. *British Journal of Psychology, 107*(3), 537–555. https://doi.org/10.1111/bjop.12161

Özyurt, Ö., Özyurt, H., Güven, B., & Baki, A. (2014). The effects of UZWEBMAT on the probability unit achievement of Turkish eleventh grade students and the reasons for such effects. *Computers & Education, 75*, 1–18. https://doi.org/10.1016/j.compedu.2014.02.005

Padberg, F., & Benz, C. (2011). *Didaktik der Arithmetik*. Spektrum.

Piaget, J. (1958). Die Genese der Zahl beim Kinde. *Westermanns Pädagogische Beiträge, 10*, 357–367.

Piaget, J., & Inhelder, B. (1973). *Die Psychologie des Kindes*. Klett.

Piaget, J., & Szeminska, A. (1965). *Die Entwicklung des Zahlbegriffs beim Kinde*. Klett.

Piazza, M., Mechelli, A., Butterworth, B., & Price, C. J. (2002). Are subitizing and counting implemented as separate or functionally overlapping processes? *NeuroImage, 15*(2), 435–446. https://doi.org/10.1006/nimg.2001.0980

PIKAS (2023). *Frühe mathematische Bildung.* Abgerufen am 05.07.2023 von https://pikas.dzlm.de/unterricht/schulanfang/frühe-mathematische-bildung

Pintrich, P. R. (2003). Motivation and classroom learning. In W. M. Reynolds, & G. E. Miller (Eds.), *Handbook of psychology: Educational psychology* (pp. 103–122). Wiley.

Puhani, P. A., & Weber, A. M. (2007). Does the Early Bird Catch the Worm? Instrumental Variable Estimates of Early Educational Effects of Age of School Entry in Germany. *Empirical Economics, 32*, 359–386. https://doi.org/10.1007/s00181-006-0089-y

Radford, L. (2014). Towards an embodied, cultural, and material conception of mathematics cognition. *ZDM, 46*(3), 349–361. https://doi.org/10.1007/s11858-014-0591-1

Reinhold, F., Hoch, S., Werner, B., Richter-Gebert, J., & Reiss, K. (2020). Learning Fractions with and without Educational Technology: What Matters for High Achieving and Low-Achieving Students? *Learning and Instruction, 65*, 101264. https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2019.101264

Resnick, L. B. (1983). A Development Theory of Number Understanding. In H. P. Ginsburg (Ed.), *The Development of Mathematical Thinking* (pp. 110–151). Academic Press.

Resnick, L. B. (1989). Developing mathematical knowledge. *American Psychologist, 44*(2), 162–169. https://doi.org/10.1037/0003-066X.44.2.162

Resnick, L. B. (1992). From Protoquantities to Operators: Building Mathematical Competences on a Foundation of Everyday Knowledge. In G. Leinhardt, R. Putnam & R. Hattrup (Eds.), *Analysis of Arithmetic for Mathematics Teaching* (pp. 373–429). Erlbaum.

Resnick, L. B., & Ford, W. W. (1981). *The Psychology of Mathematics for Instruction.* Routledge. https://doi.org/10.4324/9780203056622

Resnick, L. B., Bill, V., Lesgold, S., & Leer, M. (1991). Thinking in arithmetic class. In B. Means, C. Chelemer, & M.S. Knapp (Eds.), *Teaching advanced skills to at-risk students: Views from research and practice* (pp. 27-53). Jossey- Bass.

Revkin, S. K., Piazza, M., Izard, V., Cohen, L., & Dehaene, S. (2008). Does subitizing reflect numerical estimation? *Psychological Science, 19*(6), 607–614. https://doi.org/10.1111/j.1467-9280.2008.02130.x

Reys, B. (1991). *Developing Number Sense in the Middle Grades. Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics.* Reston.

Riley, M. S., Greeno, J. G., & Heller, J. I. (1983). Development of Children's Problemsolving Ability in Arithmetic. In H. P. Ginsburg (Ed.), *The Development of Mathematical Thinking* (pp. 153-196). Academic Press.

Ross, S. H. (1989). Parts. Wholes, and Place Value. A Developmental View. *The Arithmetic Teacher, 36*(6), 47-51. Abgerufen am 02.06.2023 unter http://www.jstor.org/stable/41194463

Royar, T. (2015). *Wo Piaget irrte – Zahlbegriffsentwicklung im Vorschulalter*. Abgerufen am 03.03.23 unter https://www.kita-fachtexte.de/fileadmin/Redaktion/Publikationen/KiTaFT_Royar_2015End.pdf

Sarama, J., & Clements, D. H. (2009). *Early Childhood Mathematics Education Research: Learning Trajectories for Young Children*. Routledge.

Scherer, P. (2006). *Produktives Lernen für Kinder mit Lernschwächen: Fördern durch Fordern*. Persen.

Schipper, W. (2002). „Schulanfänger verfügen über hohe mathematische Kompetenzen.“ Eine Auseinandersetzung mit einem Mythos. In A. Peter-Koop (Hrsg.), *Das besondere Kind im Mathematikunterricht der Grundschule* (S. 119–140). Mildenberger.

Schipper, W. (2009). *Handbuch für den Mathematikunterricht an Grundschulen*. Schroedel.

Schipper, W., Wartha, S., & Schroeders, N. (2011). *BIRTE 2. Handbuch zur Diagnostik und Förderung*. Schroedel.

Schmidt, R. (1982). Die Zählfähigkeit der Schulanfänger: Ergebnisse einer Untersuchung. *Sachunterricht und Mathematik in der Primarstufe, 10*(12), 371–376.

Schmidt, S., & Weiser, W. (1982). Zählen und Zahlverständnis bei Schulanfängern. *Journal für Mathematik-Didaktik, 3*(3/4), 227–236. https://doi.org/10.1007/BF03338666

Schneider, W. (2008). *Entwicklung von der Kindheit bis zum Erwachsenenalter. Befunde der Münchner Längsschnittstudie LOGIK*. Beltz.

Schuler, S. (2013). *Mathematische Bildung im Kindergarten in formal offenen Situationen. Eine Untersuchung am Beispiel von Spielen zum Erwerb des Zahlbegriffs*. Waxmann.

Schupp, H. (2004). Allgemeinbildender Stochastikunterricht. *Stochastik in der Schule, 24*(3), 4-13.

Sedaghatjou, M., & Campbell, S. R. (2017). Exploring cardinality in the era of touchscreen-based technology. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 48*(8), 1225–1239. https://doi.org/10.1080/0020739X.2017.1327089

Segal, A. (2011). *Do gestural interfaces promote thinking? Embodied interaction: Congruent gestures and direct touch promote performance in math.* PhD thesis, Columbia University.

Segal, A., Tversky, B., & Black, J. (2014). Conceptually congruent actions can promote thought. *Journal of Applied Research in Memory and Cognition, 4*(3), 124–130. https://doi.org/10.1016/j.jarmac.2014.06.004

Selter, C. (1995). Zur Fiktivität der Stunde Null im arithmetischen Anfangsunterricht. *Mathematische Unterrichtspraxis, 16*(2), 11–19.

Sinclair, N., & de Freitas, E. (2014). The haptic nature of gesture. *Gesture, 14*(3), 351–374. https://doi.org/10.1075/gest.14.3.04sin

Sinclair, N., & Pimm, D. (2015). Mathematics using multiple senses: developing finger gnosis with three- and four-year-olds in an era of multi-touch technologies. *Asia-Pacific Journal of Research in Early Childhood Education, 9*(3), 99–109. http://dx.doi.org/10.17206/apjrece.2015.9.3.99

Spiegel, H., & Selter, H. (2021). *Kinder & Mathematik. Was Erwachsene wissen sollten.* Friedrich Verlag.

Starkey, P., & Cooper, R. G. (1995). The Development of Subitizing in Young Children. *British Journal of Developmental Psychology, 13*, 399–420. https://doi.org/10.1111/j.2044-835X.1995.tb00688.x

Starkey, G. S., & McCandliss, B. D. (2014). The emergence of „groupitizing“ in children's numerical cognition. *Journal of Experimental Child Psychology, 126*, 120–137. https://doi.org/10.1016/j.jecp.2014.03.006

Steffe, L. P., & Cobb, P. (1988). *Construction of Arithmetical Meanings and Strategies.* Springer. https://doi.org/10.1007/978-1-4612-3844-7

Stern, E. (2009). Früh übt sich: Neuere Ergebnisse aus der LOGIK-Studie zum Lösen mathematischer Textaufgaben. In A. Fritz, G. Ricken, & S. Schmidt (Hrsg.), *Handbuch Rechenschwäche* (S. 151–164). Beltz.

Stevenson, H., & Stigler, J. (1992). *The Learning Gap: Why Our Schools are Failing and what We Can Learn from Japanese and Chinese Education.* Summit.

Stipek, D., Feiler, R., Daniels, D., & Milburn, S. (1995). Effects of Different Instructional Approaches on Young Children's Achievement and Motivation. *Child Development, 66*(1), 209–223. https://doi.org/10.1111/j.1467-8624.1995.tb00866.x

Sweller, J. (1999). *Instructional design in technical areas.* ACER Press.

Thornton, C. A. (1978). Emphasizing Thinking Strategies in Basic Fact Instruction. *Journal for Research in Mathematics Education, 9*, 214-227. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.9.3.0214

Trouche, L. (2004). Managing the complexity of human/machine interactions in computerized learning environments: Guiding students' command process through instrumental orchestrations. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 9*, 281–307.

Tucker, S. I. (2018). Applying the Modification of Attributes, Affordances, Abilities, and Distance for Learning Framework to a child's multi-touch interactions with an idealized number line. In L. Ball, P. Drijvers, S. Ladel, H.-S. Siller, M. Tabach, & C. Vale (Eds.), *Uses of technology in primary and secondary mathematics education* (pp. 35–57). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-76575-4_3

Tucker, S. I., & Johnson, T. N. (2020). Developing number sense with Fingu: a preschooler's embodied mathematics during interactions with a multi-touch digital game. *Mathematics Education Research Journal, 34*, 393-417. https://doi.org/10.1007/s13394-020-00349-4

Tulving, E. (1977). Episodic and semantic memory. In E. Tulving, & W. Donaldson (Eds.), *Organization of memory* (pp. 381–403). Academic.

Turk, H. S., & Akyuz,D. (2016). The effects of using dynamic geometry on eighth grade students' achievement and attitude towards triangles. *International Journal for Technology in Mathematics Education, 23*(3), 95–102. https://doi.org/10.1564/tme_v23.3.01

Van der Kleij, F. M., Feskens, R. C., & Eggen, T. J. (2015). Effects of feedback in a computer-based learning environment on students' learning outcomes: A meta-analysis. *Review of Educational Research, 85*(4), 475–511. https://doi.org/10.3102/0034654314564881

Verillion, P., & Rabardel, P. (1995). Cognition and artifacts: A contribution to the study of thought in relation to instrumented activity. *European Journal of Psychology of Education, 10*(1).

Vygotsky, L. (1930). *The Instrumental Method in Psychology.* Text of a talk given in 1930 at the Krupskaya Academy of Communist Education.

Wager, A. A. (2013). Practices that Support Mathematics Learning in a Play-Based Classroom. In L. D. English, & J. T. Mulligan (Eds.), *Reconceptualizing Early Mathematics Learning* (p. 163181). Springer.

Wästerlid, C. A. (2020). Conceptual Subitizing and Preschool Class Children's Learning of the Part-Part-Whole Relations of Number. *Problems of Education in the 21st Century, 78*(6), 138. https://doi.org/10.33225/pec/20.78.1038

Weinert, F. E., & Helmke, A. (Hrsg.). (1997). *Entwicklung im Grundschulalter*. Beltz.

Winter, H. (1995). Mathematikunterricht und Allgemeinbildung. *Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik, 61*, 35-41.

Wogatzki, R. (1972). Ansätze und Modelle einer revidierten Vorschulförderung im Lande Niedersachsen. In E. Schmalohr, & K. Schüttler-Janikulla (Hrsg.), *Bildungsförderung im Vorschulalter. Zur Reform der Vorschulerziehung* (S. 94–109). Finken.

Wolters, G., van Kempen, H., & Wijlhuizen, G.-J. (1987). Quantification of Small Numbers of Dots: Subitizing or Pattern Recognition. *The American Journal of Psychology, 100*(2), 225-237. Abgerufen am 16.05.2023 von http://www.jstor.com/stable/1422405

Wynn, K. M. (1992). Addition and subtraction by human infants. *Nature, 358*, 749–750. https://doi.org/10.1038/358749a0

Xu, F., & Arriaga, R. I. (2007). Number Discrimination in 10-Month-Old Infants. *British Journal of Developmental Psychology, 25*, 103–108. https://doi.org/10.1348/026151005X90704

Young-Loveridge, J., Peters, S., & Carr, M. (1998). Enhancing the Mathematics of Four Year-Olds. An Overview of the EMI-4S Study. *Journal for Australian Research in Early Childhood Education, 2*, 82–93.

12 Anhang

12.1 Zahlaspekte nach Padberg und Benz

Zahlen stellen ein abstraktes Konstrukt zur Beschreibung von verschiedenen Aspekten dar (Benz et al., 2015). Unter welchem Aspekt die Zahl interpretiert werden kann, wird unter den Zahlaspekten beschrieben (Padberg & Benz, 2011). Beim **Kardinalzahlaspekt** wird sich auf die Mächtigkeit von Mengen, also die Anzahl der Elemente, fokussiert, z.B. drei Schafe (Padberg & Benz, 2011). Drückt die Zahl eher einen (Rang-)Platz in einer geordneten Reihe aus, wird sie unter dem **Ordinalzahlaspekt** betrachtet, z.B. die vierte Perle ist blau (Padberg & Benz, 2011). Stehen Maßzahlen oder Einheiten wie Zeiteinheiten, Temperaturen, Längen oder Geld im Vordergrund, wird vom **Maßzahlaspekt** gesprochen (Padberg & Benz, 2011). Zur Bezeichnung von Objekten, z.B. Telefonnummern oder Hausnummern, werden Zahlen unter dem **Codierungsaspekt** verstanden (Padberg & Benz, 2011). Im **Operatoraspekt** kann die Zahl auch als Vielfachheit einer Handlung oder eines Vorgangs aufgefasst werden, z.B. $3 \cdot 2$ als „Ich gehe dreimal in den Keller und hole jeweils zwei Kisten“ (Padberg & Benz, 2011). Zuletzt sprechen Padberg und Benz (2011) vom **Rechenzahlaspekt**, welcher in den algebraischen und algorithmischen Aspekt eingeteilt werden kann (Benz et al., 2015). Beim algebraischen Aspekt steht im Vordergrund, dass natürliche Zahlen und algebraische Gesetzmäßigkeiten unter Betrachtung ihrer Eigenschaften zum Rechnen benutzt werden können, z.B. $3 + 5 = 5 + 3 = 8$ (Benz et al., 2015). Beim algorithmischen Aspekt handelt es sich eher um das Verständnis hinter dem Aufbau von Zahlen, sodass beispielsweise mehrstellige Zahlen aus den Ziffern multipliziert mit ihrem Stellenwert dargestellt werden oder beim schriftlichen Addieren auf dieser Grundlage nur mit der Ziffer gerechnet werden kann (Benz et al., 2015).

Lorenz (2012) fügt der Sammlung noch drei weitere Zahlaspekte hinzu: der geometrische Aspekt hinsichtlich geometrischer Zusammenhänge, z.B. haben Dreiecke drei Ecken, der narrative Aspekt, der besonders die symbolische Bedeutung von Zahlen wie die 13 als Unglückszahl aufgreift, und der relationale Aspekt, in dem Zahlen in Beziehung zu anderen Zahlen gesehen werden, z.B. ist die 5 nahe der 6 auf einem imaginären Zahlenstrahl.

12.2 Abriss zu sprachlichen Hürden deutscher Zahlwörter

Deutsche Zahlwörter bieten zahlreiche Schwierigkeiten im Erlernen der Zahlwortreihe. Dazu gehört, dass die ersten zwölf Zahlwörter im Deutschen wegen ihrer **unregelmäßigen Bildung** gelernt sowie sich weitere Zahlwörter über Analogien erschlossen und so gebildet werden müssen (Diephaus, 2015). Allerdings ist die dekadische Struktur von den Zahlen Elf und Zwölf nicht anhand des Zahlworts zu erkennen (Benz et al., 2015). Die damit einhergehende additive Struktur von Zahlen wird erst ab der „ein*und*zwanzig“ über das „und“ deutlich, bei Hunderten fehlt dies jedoch wieder (Benz et al., 2015). Außerdem fehlt hier ein Hinweis auf die multiplikative Struktur: so heißt es „vierhundert“ anstatt „vier *mal* einhundert“ (Benz et al., 2015).

Für viele Lernenden ist es weiterhin ein Problem, dass mehrstellige Zahlen oft **invertiert gesprochen** werden, z.B. „achtzehn“, „achtundzwanzig“ (Benz et al., 2015). Damit wird die Reihenfolge der Stellenwerte nicht direkt deutlich (Benz et al., 2015). Andere Schwierigkeiten sind beispielsweise das Erkennen und Einhalten von **Wortgrenzen** innerhalb der Zahlwortreihe (Diephaus, 2015). Dabei sind besonders zweisilbige Zahlworte wie „sieben“ oder „dreizehn“ Hürden (Scherer, 2006). Weitere sprachliche Hindernisse im verbalen Zählen führen etwa Schmidt (1982), Scherer (2006) und Benz et al. (2015) auf.

12.3 Grundlagen qualitativen Denkens nach Mayring

Mayring (1996) begründet in fünf Postulaten die Grundlagen qualitativen Denkens. Diese bilden die Basis für einen qualitativen Forschungs- und Erkenntnisprozess (Mayring, 1996). Da die im Rahmen dieser Arbeit durchgeführte Studie an diesen Grundlagen orientiert ist, sollen sie nachfolgend kurz dargestellt und erläutert werden.

- „Postulat 1: Gegenstand humanwissenschaftlicher Forschung sind immer Menschen, **Subjekte**. Die von der Forschungsfrage betroffenen Subjekte müssen Ausgangspunkt und Ziel der Untersuchungen sein“ (Mayring, 1996, S. 9). Mayring (1996) kritisiert damit, dass Fokus vieler Studien nicht der Mensch sei, sondern die Methode oder die Theorie. Aus diesem Grund sollte eher in den Vordergrund gestellt werden, was die Erkenntnisse der Studie den Menschen bringen (Mayring, 1996).

- „Postulat 2: Am Anfang jeder Analyse muß [sic] eine genaue und umfassende Beschreibung (**Deskription**) des Gegenstandsbereiches stehen“ (Mayring, 1996, S. 11). Erst anschließend sollten erklärende Konstruktionen aufgeführt werden (Mayring, 1996, S. 11).

- „Postulat 3: Der Untersuchungsgegenstand der Humanwissenschaften liegt nie völlig offen, er muß [sic] immer auch durch **Interpretation** erschlossen werden“ (Mayring, 1996, S. 11). Mayring (1996) folgt der Philosophie, dass vom Menschen Hervorgebrachtes immer mit subjektiven Intentionen verbunden sei. Demnach können beobachtbare Handlungen für unterschiedliche Akteure und/oder Beobachter:innen andere Bedeutungen haben, die durch Interpretationen erschlossen werden (Mayring, 1996). Es ist wichtig, sich dieser Interpretationen bewusst zu sein (Mayring, 1996).

- „Postulat 4: Humanwissenschaftliche Gegenstände müssen immer möglichst in ihrem **natürlichen, alltäglichen Umfeld** untersucht werden“ (Mayring, 1996, S. 12). Mayring (1996) zufolge kritisieren qualitative Ansätze oft die Verallgemeinerbarkeit aus Laborergebnissen, da humanwissenschaftliche Phänomene stark situationsabhängig seien. Menschen reagieren demnach im Labor anders als im Alltag, da sie sich dann zusätzlich Gedanken über den Sinn des Laborexperiments machen könnten (Mayring, 1996). Die vermeintlichen Vorteile der Laborsituation, was die Isolation und Kontrolle betreffen, werden dadurch verworfen (Mayring, 1996).

- „Postulat 5: Die **Verallgemeinerbarkeit** der Ergebnisse humanwissenschaftlicher Forschung stellt sich nicht automatisch über bestimmte Verfahren her; sie muß [sic] im Einzelfall schrittweise begründet werden“ (Mayring, 1996, S. 12). Mayring (1996) betont, dass menschliches Handeln zu großen Teilen situativ gebunden, historisch geprägt und mit subjektiven Bedeutungen behaftet ist. Dahingehend kann eine Verallgemeinerung nicht über das Verfahren wie das der repräsentativen Stichprobe garantiert werden (Mayring, 1996). Allgemein wird in qualitativen Analysen eher mit kleinen Fallzahlen gearbeitet (Mayring, 1996). Daher muss die Anwendbarkeit der Schlussfolgerungen stets im Einzelfall geprüft werden (Mayring, 1996).

12.4 Informationen und Daten zur Studie

Die Eltern der Kinder wurden im Vorfeld über die Durchführung der Studie informiert. Die Informations- und Einverständniserklärungen dazu sind in ihrer Rohversion hier zu finden: https://bit.ly/3D86GF8

Die tabellarischen Daten und graphischen Darstellungen zu allen Kindern sind ebenfalls abrufbar unter: https://bit.ly/3rnHNmq Auf der letzten Seite werden die Graphen der Kinder entsprechend in die vier Typen sortiert und Aussagen zu allen Kindern berechnet. Die Tabelle kann als Numbers-Datei heruntergeladen werden: https://bit.ly/3PRn1pl

13 Selbstständigkeitserklärung

Hiermit versichere ich, Dorothee Sophie Dahl, dass ich die vorliegende Arbeit „Zahlen in den Fingern. Eine Analyse des Lernspiels Fingu in Bezug auf den frühkindlichen Zahlerwerb im Rahmen der Artifact-Centric Activity Theory“ selbstständig und ohne Zuhilfenahme anderer als der angegebenen Quellen und Hilfsmittel angefertigt habe. Wörtlich oder inhaltlich entnommene Stellen der verwendeten Quellen sind als solche kenntlich gemacht. Weiterhin versichere ich, dass weder ich noch andere diese Arbeit bereits in der vorliegenden oder in einer abgewandelten Form als Leistungsnachweis in einer anderen Veranstaltung verwendet haben.

Die „Richtlinie zur Sicherung guter wissenschaftlicher Praxis für Studierende an der Universität Potsdam (Plagiatsrichtlinie) - Vom 20. Oktober 2010“ habe ich zur Kenntnis genommen.

Es handelt sich bei dieser Arbeit um meinen ersten Versuch.

Ort, Datum	Studierende