Helmut Assing

Die Logik der Schulmathematik

Neue Grunderkenntnisse und neue Denkhürden

Vorgeschlagene Zitation bezogen auf die Originalveröffentlichung:
Assing, Helmut: Die Logik der Schulmathematik: Neue Grunderkenntnisse und neue Denkhürden, Darmstadt: wbg Academic in Wissenschaftliche Buchgesellschaft (wbg), 2023.
ISBN 978-3-534-40776-7

Monographie | Version of record

Zweitveröffentlichung auf dem Publikationsserver der Universität Potsdam in der Reihe:
Zweitveröffentlichungen der Universität Potsdam : Philosophische Reihe; 187
ISSN: 1866-8380
https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:kobv:517-opus4-604671
DOI: https://doi.org/10.25932/publishup-60467

Helmut Assing

Die Logik der Schulmathematik

Neue Grunderkenntnisse und neue Denkhürden

wbg Academic

Helmut Assing

Die Logik der Schulmathematik

Helmut Assing

Die Logik der Schulmathematik

Neue Grunderkenntnisse und neue Denkhürden

wbg Academic

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation
in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische
Daten sind im Internet über www.dnb.de abrufbar.

wbg Academic ist ein Imprint der wbg

Die Herausgabe des Werkes wurde durch die
Vereinsmitglieder der wbg ermöglicht.
Satz und eBook: Satzweiss.com Print, Web, Software GmbH
Gedruckt auf säurefreiem und
alterungsbeständigem Papier
Printed in Germany

Besuchen Sie uns im Internet: www.wbg-wissenverbindet.de

ISBN 978-3-534-40776-7

Elektronisch ist folgende Ausgabe erhältlich:
eBook (PDF): 978-3-534-40777-4

Inhalt

Vorwort 9

Einleitung: 15
Was für eine Logik ist der Schulmathematik angemessen(er)? 15

Kapitel 1: 25
Allgemeine sprachlogische Grundfragen 25
1.1 Sprache und Logik in ontologischer Sicht 27
1.1.1 Syntax, Semantik und Pragmatik einer Sprache 27
1.1.2 Die logischen Eigenschaften der Sprache 29
1.1.3 Logische Fragen der Genese des Sprachverständnisses 35
1.2 Sprache und Logik in regelbezogener Sicht 37
1.2.1 Objektsprache und Metasprache 37
1.2.2 Die metasprachlichen Regeln 39
1.3 Zum Gegenstand der Logik und zu ihrer Rolle in der Schulmathematik 48

Kapitel 2: 51
Historischer Abriss des Wechselverhältnisses von logisch-umgangssprachlichen Untersuchungen und logischen Neubestimmungen 51
2.1 Logisch-kombinatorische Fortschritte bis zum ersten Höhepunkt in Syllogistik und Stoa im 4. und 3. Jahrhundert v. Chr. 51
2.1.1 Die Anfänge und die Charakteristika der Syllogistik 51
2.1.2 Die Charakteristika der Stoa 55
2.2 Der lange Weg zu den logischen Kunstsprachen des 19. Jahrhunderts 57
2.3 Die direkten Auswirkungen der axiomatisch konstruierten logisch-mathematischen Kalküle auf die anderweitigen wissenschaftlichen Auffassungen 66
2.3.1 Neuansätze in der Sprachlogik der Mathematik 66

2.3.2 Erste Versuche einer Abgrenzung zwischen den beiden Sprachsystemen ... 71
2.3.3 Die Entstehung einer doppelgleisigen Sprache der Mathematik ... 80
2.4 Die nach Reichenbach verbleibende Ineffektivität der spezifischen Inhaltsbestimmungen für die umgangssprachlichen logischen Operatoren. Die zunehmende Breite mathematisch-logischer Anwendungen ... 82

Kapitel 3: ... 91
Schambergers Kalkül als jüngster logisch-umgangssprachlicher Systematisierungsversuch ... 91
3.1 Schambergers Anspruch und Zielstellung ... 91
3.2 Nutzen und Fehlerhaftigkeit des Kalküls ... 93
3.2.1 Die Widersprüchlichkeit des Vorworts ... 93
3.2.2 Zum Verhältnis von klassischer und deduktiver Gültigkeit ... 96
3.2.3 Detailbemerkungen zur ersten Variante einer veränderten Konditionaleinführung ... 100
3.2.4 Detailbemerkungen zur zweiten Variante einer veränderten Konditionaleinführung ... 103
3.2.5 Methodische Bemerkungen zur ganzheitlichen Analyse des Schambergerschen Kalküls ... 112
3.2.6 Analyse der restlichen strittigen Argumenttypen Schambergers ... 114
3.2.6.1 „Ex falso quodlibet“ und „verum ex quolibet“ (in traditioneller Verallgemeinerung) ... 115
3.2.6.1.1 Die allgemeinen Fassungen ... 116
3.2.6.1.2 Die Spezifizierungen ... 121
3.2.6.2 Schluss aus einer Disjunktion auf eine Implikation ... 126
3.2.6.3 Prämissentausch bei Implikationen ... 128
3.2.6.4 Schluss aus einer konjunktiv-molekularen Implikation auf eine molekulare Disjunktion ... 132
3.2.6.5 Schluss aus einer disjunktiv-molekularen Implikation auf eine molekulare Disjunktion ... 135
3.2.6.6 Schluss aus einer negierten Konjunktion auf eine Implikation ... 138

3.2.6.7 Schluss aus einer negierten Existentialaussage auf eine Allaussage ... 141
3.2.6.8 Schluss aus einer negierten Implikation auf eine Konjunktion ... 146
3.2.6.9 Schluss aus einer negierten Allaussage auf eine Existentialaussage ... 148
3.2.6.10 Der Disjunktive Syllogismus ... 149
3.2.6.11 Die Disjunktionseinführung ... 155
3.2.6.12 Der Kettenschluss ... 158
3.2.6.13 Die Antezedenserweiterung ... 172
3.2.6.14 Die Kontraposition ... 175
3.2.6.15 Zusammenfassung ... 180

Kapitel 4: ... 183
Vorschlag für ein logisches Grundgerüst der Schulmathematik ... 183
4.1 Die „Entdeckung“ einer ersten logisch-schulmathematischen Besonderheit ... 183
4.2 Die ontologischen Eigenschaften und Relationen der schulmathematischen Logik in Wechselwirkung von Umgangssprache und Kalkülsprache ... 190
4.2.1 Informationen zum syntaktischen Aufbau ... 191
4.2.2 Informationen zum semantischen Aufbau ... 192
4.2.2.1 Logische Operatoren ... 193
4.2.2.1.1 Allgemeine Vorbemerkungen ... 193
4.2.2.1.2 Die aussagenlogischen Operatoren und ihre Negationen ... 194
4.2.2.1.3 Die prädikatenlogischen Operatoren und ihre Negationen ... 207
4.2.2.2 Logische Termini und synthetische Termini ... 214
4.2.2.3 Aussagen ... 215
4.2.2.4 Logikdouble und Sprachwahl ... 218
4.3 Logische Schlussregeln ... 221
4.3.1 Die Bedeutung logischer Schlussregeln ... 222
4.3.2 Die Umwandlung der logischen Operatoren ineinander ... 225

4.3.2.1 Die Umformungen der aussagenlogischen Operatoren 226
4.3.2.2 Die Umformungen der prädikatenlogischen Operatoren 240
4.3.3 Schlussverfahren im Rahmen philosophischer Bedingungsgefüge 246
4.3.4 Überlegungen zum schrittweisen Aufbau schulmathematischer Schlussverfahren 252
4.3.4.1 Die korrekte Absicherung der logisch-strukturellen Beziehungen eines Schlusses 253
4.3.4.2 Die Erkundung des Einstiegs für den Schlussvorgang 255
4.3.4.3 Adjunktive Schlüssigkeit als notwendige Bedingung für normale schulmathematische Schlussgültigkeiten 256
4.3.4.4 Konnektiv-schulmathematische Schlüssigkeit 257
4.3.4.5 Redundante Aussagen als Störungen logischer Folgerichtigkeit 261
4.3.5 Übersicht über die wichtigsten schulmathematischen Schlussverfahren 263
4.3.5.1 „Logische“ Schlussverfahren 263
4.3.5.2 Finite Schlussverfahren 266

Appendix: Ist das berüchtigte „Ziegenproblem“ wirklich gelöst? 269

Schlussbemerkungen 277

Literatur 281

Personenregister 287

Sachregister 291

Vorwort

Schon der Titel wird etwas Verwunderung erregen, da die Meinung, dass den Sprachen einheitliche logische Prinzipien zugrunde liegen, weit verbreitet ist und vermutlich gerade unter halbwegs kundigen Laien dominiert. Bekannt dürfte aber andererseits sein, dass seit langem die Sprache der Mathematik von vielen Menschen nicht verstanden wird, so dass von daher die Möglichkeit nicht auszuschließen ist, dass in der Mathematik eine andere Logik als in der Umgangssprache im Spiele ist. Nicht wenige Fachleute vertreten diesen Standpunkt und sehen deshalb in der Sprache der Mathematik mehr als eine Präzisierung der Umgangssprache.

Dem entsprechen deutlich fassbare historische Vorgänge. In der 2. Hälfte des 19. Jahrhunderts entwickelten die Logiker George Boole (1815–1864) und Gottlob Frege (1848–1925) sprach- und logikverändernde Theorien, die die Mathematiker in der Folge mehr und mehr als neue wissenschaftliche Basis ihrer Tätigkeit anerkannten. Im täglichen Leben und in den meisten anderen Wissenschaften blieb die Umgangssprache jedoch zumindest tonangebend, so dass die sprachlichen Unterschiede innerhalb ein und desselben Volkes messbar größer wurden und die Frage provozierten, ob es nicht ausreiche, von nunmehr zwei Sprachen auszugehen.

Wie dem aber auch sei: Für die Schulmathematik – womit wir beim Thema wären – ist dadurch möglicherweise eine eigenartige Situation entstanden. Als Mathematik ist sie ihrer Wissenschaft verpflichtet und mit ihr historisch eng verbunden, doch sie verließ anscheinend im Prinzip nicht die Umgangssprache und ging den Weg zu den logisch veränderten Kunstsprachen nicht mit. Diese Diskrepanz ist völlig unzureichend erforscht. Die in Einheit mit Mathematik agierenden Logiker konstruierten ihre Logiksysteme fast nur mit Blick auf die komplizierteren mathematischen Probleme, und die philosophisch orientierten Logiker taten aus ihrer Sicht das gleiche, indem sie in ihren Analysen zu strukturbestimmenden umgangssprachlichen Einzelfragen die Schulmathematik weitgehend ausklammerten.

Hier besteht Nachholbedarf, und die vorliegende Arbeit ist ein erster Versuch, die Besonderheiten eines logischen Gerüsts der Schulmathematik genauer zu analysieren und anschließend zu erklären, wieso, wenn die Unterschiede zum Vorgehen in der Wissenschaft der Mathematik bestätigt sein sollten, trotzdem (fast ausnahmslos[1]) die gleichen mathematischen Ergebnisse erzielt werden. Unsere Sprache wird dabei zugunsten des Verständnisses der wohl meisten Leser auf Symbolik maximal verzichten und auch anderweitig so einfach wie möglich gehalten werden. Die Mathematik-, Physik- und Chemielehrer – sowie mit einigen Abstrichen die der übrigen Fächer ebenfalls – werden dieses Buch daher vermutlich begrüßen, und es wird in letzter Konsequenz die Strukturen ihres Unterrichtsstoffes deutlich klarer werden lassen. Voraussetzung ist jedoch, dass die für Lehrpläne und Schulbücher zuständigen Bildungspolitiker reagieren und die neu angebotenen logischen Zusammenhänge in ihre Überlegungen aufnehmen.

Der Entwicklungsstand der beiden Logikkomponenten, die in der Schulmathematik (irgendwie) zu berücksichtigen sind, könnte unterschiedlicher kaum sein. Während auf der mathematischen Seite systematisch entwickelte Logikkalküle vorliegen – im Folgenden meist als „*klassische logische Kalküle*“ bezeichnet –, sind *ganzheitlich* auf die Umgangssprache zielende logische Analysen Mangelware geblieben. Lediglich die zweifellos wichtige Wenn-dann-Problematik ist, zumeist in Auseinandersetzung mit den konstruierten logischen Kalkülen, in unzähligen Untersuchungen unter Vernachlässigung der anderen für logische Zwecke bestimmten umgangssprachlichen Ausdrücke behandelt worden. Meines Erachtens können neben meiner 1979 eingereichten B-Dissertation (der DDR-Variante der Habilitation) *Das konditionallogische System K. Ein Beitrag zur logischen Analyse der Umgangssprache* nur die schon 1947 und 1954 (als Nachlass) von Hans Reichenbach veröffentlichten Arbeiten sowie die erst jüngst erschienene Schrift „Logik der Umgangssprache“ von Christoph Schamberger als umfassende logische Forschungen zur Umgangssprache bezeichnet werden. Diese beiden Autoren nehmen daher hier auch einen besonderen Platz ein.

Die ungleichen Voraussetzungen wirken sich auf den Aufbau der Arbeit aus und tragen wesentlich zum mehrfach erörternden (und nicht immer gleich abschließenden) Stil bei. Nach Vorwort, Einleitung und einem notwendigen Einblick in die allgemeinen sprachlogischen Grundfragen im 1. Kapitel werden wir im 2. Kapitel in einer historischen Übersicht die Leistungen Freges und Hans

[1] Allein weichen, wie es scheint, die mathematischen Umformungen der systembedingten Basisdefinitionen voneinander ab; vgl. die Ausführungen im Anhang.

Reichenbachs unter Darlegung der Grundzüge ihrer Lehrmeinungen besonders würdigen und darüber hinaus die bisherigen Bemühungen, wissenschaftlich das Verhältnis von logischer Exaktheit und Mathematik bzw. Umgangssprache zu erfassen, sichtbar machen. Im 3. Kapitel sollen dann mit der Analyse des Schambergerschen Angebots sowohl der aktuelle Rückstand logisch-umgangssprachlicher Forschung als auch in Rückwirkung der übrigen Erörterungen Präzisierungen des eigenen Standpunktes detailliert erkennbar werden. Das 4. Kapitel leistet schließlich „Aufholarbeit" und richtet die erzielten Ergebnisse zweckmäßig sowie nunmehr vereinheitlicht auf die Schulmathematik aus. Insgesamt verweist meine jetzige Auffassung dabei auf eine vorrangig tiefere Erkenntnis der logisch-umgangssprachlichen Beziehungen überhaupt. Leider und gegen jede Hoffnung kommen wir allerdings wegen der dortigen Unsicherheiten in der Bestimmung der Denkstrukturen zu keinem logisch-schulmathematischen Kalkül. Die Bilanz dürfte trotzdem als aussagekräftiges mehrgliedriges logisches System verstanden werden, das hinsichtlich der Semantik und der Schlussregeln eindeutig neue Erkenntnisse bringt. Darüber hinaus sollte die hieraus erwachsene Kritik an der jetzigen Lösung des berüchtigten „Ziegenproblems", die noch wissenschaftlich unwidersprochen im Raum steht, jedoch in ihrer Absolutheit wohl nicht haltbar sein kann, nicht unterbewertet werden. Sie wird Wellen werfen und nicht zuletzt auch dem Ruf international renommierter Mathematiker und Logiker wie Paul Erdős dienen, die zunächst gegen die Lösung ihre Stimme erhoben hatten, dann aber nach Anwendung m. E. umstrittener Überzeugungsmethoden, in denen unkorrekt von der Masse auf den Einzelfall geschlossen wurde, schwiegen.

Ich bin nicht mehr der Jüngste und möchte deshalb ein paar Worte dazu verlieren, warum ich in einem relativ hohen Alter noch einmal große wissenschaftliche Mühen auf mich genommen habe. Schon immer riefen logisch-mathematische Fragen mein besonderes Interesse hervor, doch meine berufliche Entwicklung ging nach einem Geschichts- und Mathematikstudium leider oft andere Wege. Sie brachten allerdings auch einen wichtigen Nebeneffekt, indem sie mein logisches Wissen über die Mathematik hinaus erweiterten. Lange Jahre befasste ich mich mit schwierigen quellenkritischen Problemen der mittelalterlichen Geschichte, die mich in umgangssprachlicher Form logisch forderten und den Wunsch erzeugten, verallgemeinert Beziehungen zwischen Umgangssprache und Logik zu untersuchen. In den 70er Jahren fand sich endlich Gelegenheit dazu, die zu der erwähnten Arbeit von 1979 führte. Dem schloss sich ein kriminelles Kapitel an, das einen tiefen Einblick in wissenschaftliche Verzerrungen der DDR-Bildungspolitik gewährt und erstmals in einer wissenschaftlichen Arbeit zur Sprache kommt.

Meine B-Dissertation zur Logik lag im Sommer 1979 vor, als bekannt wurde, dass Alexander A. Sinowjew, der zu den führenden sowjetischen Logikern zählte und auch in meiner Untersuchung eine Rolle spielte, nach berechtigter logischer Kritik namhafter sowjetischer Philosophen des Landes verwiesen wurde. Die offizielle Protestwelle gegen ein derart „abtrünniges“ Verhalten erreichte selbstverständlich auch Berlin und veranlasste den damaligen Dekan der Philosophischen Fakultät der Humboldt-Universität zu Berlin, den Erstgutachter meiner B-Dissertation, Herrn Prof. Dr. Horst Wessel, unter Androhung von Konsequenzen zu zwingen, meine Arbeit erst anzunehmen, wenn der Name „Sinowjew“ gänzlich gestrichen wäre. Er musste sich beugen und ich mich mit ihm, wobei es uns oft gelang, Erstideen von A. A. Sinowjew mit denen seines Schülers, meines Erstgutachters, zu verbinden, wodurch dieser jedoch fälschlich vom zweiten Platz auf den ersten aufstieg; im Grunde ein Skandal, der bis heute verschwiegen wurde.

Von einer zuvor versprochenen Logik-Professur an der Pädagogischen Hochschule Potsdam war nun keine Rede mehr. Als modifizierte Einlösung könnte die folgende Entscheidung gewertet werden, die eigentlich einen zweiten Skandal darstellt: Wegen meiner jahrelangen vorherigen Arbeit in mittelalterlicher Geschichte und einer dortigen Dissertation (A) 1965 zur Spezifik brandenburgisch-bäuerlicher Verhältnisse des 14. Jahrhunderts erhielt ich eine Dozentur, die unterste Stufe in den Hochschullehrerrängen der DDR, für dieses Fachgebiet: eine Mittelalter-Dozentur aufgrund einer Logik-Arbeit (!). So blieb es bis zur „Wende 1989/90“, in der der erste Wissenschaftsminister Brandenburgs, Herr Hinrich Enderlein (FDP), meine desolate Situation vorfand, sie aber nur dadurch mildern und rehabilitieren konnte, dass ich von ihm eine „ordentliche“ Professur zur mittelalterlichen Geschichte bekam. Bis zum Rentnerdasein 1998 änderte sich daran dann nichts mehr.

Logik und Mathematik blieben aber bevorzugte Gedankenobjekte, und so war es kein Zufall, nach 1998 Gymnasiasten Nachhilfe in Mathematik anzubieten, die dann schnell in prinzipielle Vorschläge an verschiedene Bildungsministerien für eine verbesserte Mathematikausbildung bis zum Abitur ausuferte. Diese Arbeit ergab viel Ärger und Streit mit mehreren Ministern, mit Landtagsfraktionen und Schulfunktionären, auf der anderen Seite aber auch 2019 einen kleinen ministeriell bestätigten bildungspolitischen Erfolg und vor allem eine neue Erweiterung meiner Logikkenntnisse Richtung Schulmathematik mit dem überraschenden Ergebnis, dass solch eine wichtige Disziplin derzeit vernachlässigt dasteht. Wahrscheinlich hätte ich es bei der Feststellung belassen, wenn nicht Schamberger 2016 die Kühnheit besessen hätte, in seiner Untersuchung zur Logik der Umgangssprache seinen großen Vorgänger Reichenbach, der Mitstreiter gewaltiger Koryphäen wie Albert Einstein und Bertrand Russell gewesen war, gänzlich zu übergehen: Weder im Literaturverzeichnis noch an irgendeiner Stelle im Text taucht Reichenbachs Name auf. Diese Unfairness war für mich der entscheidende Anlass, schließlich selbst zur Feder zu greifen, um einiges „geradezurücken". Im Nachdenken über die Art und Weise, wie dies am besten geschehen sollte, kam ich zu dem Ergebnis, dass nicht auf Dauer die Schulmathematik ausgeschlossen bleiben dürfe. So entstand eine Arbeit in Einheit von ehrender Erinnerung an Reichenbach und schöpferischer Weiterentwicklung seiner Gedanken.

Informativ und abschließend sollen einige Worte technischer Art zu den Anmerkungen und Registern folgen. Fremdveröffentlichungen erscheinen in der ersten Anmerkung, in der sie erwähnt sind, im vollen Wortlaut des Titels und danach mit beginnendem Nachnamen bzw. erstem Sachsubstantiv und verständlicher Abkürzung. Das Sachregister bringt im Unterschied zum Namensregister nicht alle Erwähnungen, sondern konzentriert sich auf aussagekräftige Angaben.

Die üblichen Danksagungen am Ende des Vorworts fallen etwas knapp aus, denn ich war fast immer als Einzelkämpfer ohne fremde Hilfe tätig. Zwei Personen müssen aber genannt werden: meine Frau und meine Enkeltochter Kora. Ohne deren technische Hilfe gerade bei der Nutzung des Internets läge längst noch kein Abschluss vor. Meine Frau leistete obendrein im „Hintergrund" eine immense Arbeit und hielt mir in vielfacher Hinsicht den Rücken frei. Ich widme ihr dieses Buch.

Einleitung:

Was für eine Logik ist der Schulmathematik angemessen(er)?

Eine Arbeit zur Logik sollte bekanntlich besonders darauf achten, in einer sehr *klaren* Sprache abgefasst zu sein, die außerdem wie jede andere Sprachäußerung auch *verständlich* sein muss. Mitunter ist aber nicht zu vermeiden, dass die beiden Prinzipien nicht richtig zueinander passen: Die von Unsicherheiten durchsetzte Alltagssprache kann zunächst verständlicher sein als eine zwar klarer, doch schwieriger aufgebaute Wissenschaftssprache, und so wäre ihr in der Einleitung der Vorzug zu geben. Diese behandelt in einem Beispiel, mit dessen Hilfe der Leser die Problematik erkennen soll, Fachausdrücke wie „logischer Schluss“ ohne vorherige „verwissenschaftlichte“ Definition, bleibt demnach im „unteren“ umgangssprachlichen Verständnis und reduziert insofern erklärende Einblendungen, die den harmonischen Grundgedanken stören würden. Wie sich gleich zeigen wird, erfüllt diese Methode aber wahrscheinlich den beabsichtigten Zweck.

Das ausgesuchte Beispiel beginnt recht harmlos, nimmt dann jedoch eine überraschende Entwicklung. Den Anfang bildet eine bekannte mathematische Regelmäßigkeit, die in der Schule logisch-intuitiv bewiesen wird und eine erhebliche Rechenerleichterung bedeutet:

Wenn 16104 durch 3 und durch 8 teilbar ist, ist 16104 auch durch 24 teilbar.

Danach genügt es, die Quersumme von 16104 auf Teilbarkeit durch 3 und die drei hinteren Ziffern auf Teilbarkeit durch 8 zu prüfen, um definitiv zu wissen, ob diese recht große Zahl durch 24 teilbar ist: Die Teilbarkeit durch 24 ist eine Konsequenz der beiden anderen Teilbarkeiten. Ein solches Ergebnis ist schon viel wert, doch es könnten ja eventuell noch weitere Erleichterungen möglich sein, so dass die Frage des Lehrers berechtigt wäre, ob z. B. die Schüler bereit seien, die Aussage

> „Wenn 16104 durch 3 teilbar ist, ist 16104 auch durch 24 teilbar, oder es ist so, dass, wenn 16104 durch 8 teilbar ist, 16104 durch 24 teilbar ist“

als Schlussfolgerung aus dem Beispiel zu akzeptieren. Wenn das möglich sein sollte, wäre wegen „oder“ mindestens eine der beiden Wenn-dann-Aussagen im Verständnis der Schüler wahr, so dass vielleicht gleich bei der ersten Probe allein die ermittelte Quersumme weiterhelfen würde. Doch obwohl ein solcher Zusammenhang bei den Schülern sicher Gefallen gefunden hätte, müssten sie den Schlussvorgang, das sog. *„Argument“*, mit der Begründung ablehnen, dass die Schlussfolgerung, die *„Konklusion“*, falsch sei, ganz im Unterschied zur im Beispiel genannten *„Prämisse“*. Denn weder ist die Teilbarkeit durch 24 allein bei Teilbarkeit durch 3 noch allein bei Teilbarkeit durch 8 gesichert, wie es in der Konklusion im allgemeinen Verständnis behauptet wird. Beide Teilaussagen sind daher falsch und erlauben es nicht, die Konklusion sowie das gesamte Argument zu akzeptieren. Und da sprachliche Undeutlichkeiten in der Erklärung anscheinend fehlen, dürfte die Wertung der Schüler, wenn sie so käme, ohne Einschränkung in allen deutschen Schulen gebilligt werden.

Nach dieser kurzen einführenden Begründung soll der verwendete Sprachzusammenhang zum gleichen Zweck genauer aufgegliedert werden. Besonders wichtig sind dabei, wie wir später immer wieder erfahren werden, die verknüpfenden Sprachausdrücke, von denen die Prämisse, also das Beispiel selbst, einmal „wenn-dann“ und einmal „und“ aufweist, die Konklusion dagegen zweimal „wenn-dann“ und einmal „oder“. Wir werden sie *„logische Operatoren“* nennen, und sie sind für die Sprachstruktur verantwortlich. Was drücken sie im Beispiel aus? Im Vorderglied der Prämisse – als Wenn-dann-Aussage in unserer Sprache eine *„Implikation“* – steht „und“ und informiert darüber, dass zwei Teilbarkeiten herangezogen sind, also eine Doppelexistenz vorliegt. Diese *„Grundbedeutung“* dürften alle Ausdrücke mit „und“ besitzen, und in unzähligen Fällen wird auch nur diese Eigenschaft erfasst. Hier ist es anders. Die Prämisse wird so verstanden, dass beide Teilbarkeiten *„notwendig“* sind, um etwas Bestimmtes über das Hinterglied sagen zu können. „Notwendig“ ist ein sogenannter „modaler“[2] Operator, der hier sprachlich aber gar nicht erscheint, sondern eine Teilbedeutung

---

2 Neben „möglich“ und „unmöglich“ bestimmt dieser Operator die Art und Weise (lateinisch: modus), unter der die erwähnten Gegebenheiten erscheinen.

von „und“ ist. Da dies jedoch, wie gerade betont, bei „und“ nicht immer gilt, stoßen wir anfangs gleich auf eine sehr, sehr wichtige „Neben“-Erkenntnis, dass nämlich zumindest ein umgangssprachlicher logischer Operator nicht eindeutig bestimmt ist.

Der nächste Operator wäre „wenn-dann“, der bei jeder Verwendung beinhaltet bzw. erlaubt, dass unter (irgendwie) ausgewählten Bedingungen, die im Vorderglied der Implikation stehen, etwas davon Abweichendes (oder im fast sinnlosen Extremfall „Gleichbleibendes“) im Hinterglied definitiv behauptet werden kann bzw. darf. Das Hinterglied ist dreimal dasselbe, und es fällt auf, dass in der Prämisse zwei Bedingungen genannt sind, in der Konklusion aber jeweils nur eine Bedingung. Ja, mehr noch: Gemäß unserer Analyse sind in der Prämisse beide Bedingungen erforderlich, notwendig für die Bejahung des Hintergliedes. Da wirkt es besonders eigenartig, dass die Konklusion sich zweimal mit einer Bedingung zufrieden gibt. Alles hängt nunmehr davon ab, wie die beiden Implikationen verknüpft sind, demnach davon, was „oder“ zu bedeuten hat. Dafür genügt eine kurze Sprachbeobachtung: Der Operator wird hier in seiner Grundbedeutung verstanden, der zufolge diese Oder-Verknüpfung wahr ist, wenn mindestens eine der Teilaussagen wahr ist. Doch das ist nicht der Fall: Die Konklusion ist falsch und somit der Schluss ungültig, wobei die Ungültigkeit vor allem daraus erwächst, dass „und“ eine Sonderbedeutung besitzt, wonach beide Teilaussagen erfüllt sein *müssen* (während nach dem Wortlaut der Konklusion eine ausgereicht hätte).

Nach dieser „verwissenschaftlichten“ zweiten Stufe der Begründung könnte man zu der Auffassung gelangen, dass die logischen Grundlagen für das Beispiel ausgeschöpft seien. Leider ist dem jedoch nicht so, obwohl logisch-intuitive Gedanken deutlich zur Vertiefung beigetragen haben. Denn als Wissenschaft ist die Mathematik in logischer Hinsicht, wie im Vorwort ausgeführt, seit gut 100 Jahren nicht auf die Umgangssprache, sondern auf künstliche Sprachsysteme eingestellt, die von Boole und Frege geschaffen wurden. Von deren Änderungen spielt eine an dieser Stelle eine besondere Rolle, die herauszuheben wäre: Soweit die logischen Operatoren Aussagen verknüpfen, war für die beiden Logiker nur noch von Grundinteresse, ob die eingesetzten *Einzelaussagen* wahr oder falsch sind. Auf dieser Basis konstruierten sie dann mittels der erwähnten Grundbedeutungen von „und“ und „oder“ sowie der von „nicht“ – verstanden als Umkehrung des Wahrheitswertes – und unter möglichem Einbau der Quantoren „alle“ und „mindestens einmal“ *molekulare* Aussagen, die wiederum allein nach ihrem Wahrheitswert beurteilt werden sollten, ohne die beabsichtigte Analogie zur Umgangssprache zu beseitigen.

Die zugehörigen Operatoren werden, in unsere Terminologie übersetzt, die Namen „non“ (nicht), „et“ (und), „vel“ (oder), „aut“ (entweder-oder), „seq“ (wenn-dann) und „äq“ (genau dann-wenn) führen. Damit wiederholen wir nicht den seitdem in den nachfolgenden Anwendungen der Logikkalküle anzutreffenden Fehler, die Relativierung „Analogie“ zu übersehen. Er zeigt sich darin, dass es sich eingebürgert hat, die vereinfachten neuen Operatoren gegen die der Umgangssprache unter gleichem Namen auszutauschen. Eigentlich hätte man von Anfang an mit der Gefahr rechnen müssen, dass die Änderungen an den logischen Operatoren sich auch auf die Schlussgültigkeit auswirken könnten, doch so weit ging kaum jemand. Die vielen Beispiele aus dem täglichen Leben einschließlich der schulmathematischen Aufgaben, die in so gut wie allen Einführungsschriften zur Logik im Angebot sind, lassen sich ja meist problemlos einordnen, und das reichte offenbar aus. Ausnahmen wären jedoch genug vorhanden gewesen, und dazu gehört unser schulmathematisches Beispiel: Der vorgestellte Schluss ist nicht gültig, während, wie später nachzuweisen ist, die Kalküllogik bei traditioneller Übersetzung einen gültigen Schluss liefert. Da nun die wissenschaftsgebundene Höhere Mathematik mit den Logikkalkülen arbeitet, folgt daraus, dass die Schulmathematik nicht deren logische Prinzipien fortsetzt. Es handelt sich um zwei verschiedene Logiksysteme mit jeweils eigener Sprache, eine sehr wichtige Erkenntnis, die leider bis heute unter den Logikern und Mathematikern – mein akademischer Lehrer, Herr Prof. Dr. Horst Wessel, davon ausgenommen[3] – unbekannt geblieben ist, auch wenn ich 1979 in meiner B-Dissertation schon darauf einging. Wer den Unterschied fernerhin abzulehnen gedenkt, hätte zu begründen, dass aus der Differenzierung zwei „Mathematiken“ mit voneinander abweichenden Schlussgültigkeiten entstehen müssten. Wir sehen das anders und schließen nicht aus, dass an ein und dieselbe Problematik sprachlogisch unterschiedlich herangegangen werden kann. Man hat allerdings stets im Auge zu behalten – und damit sind wir beim springenden Punkt des gesamten Büchleins –, dass z. B. die mit Kalküloperatoren modellierte Aussage

[3] Horst Wessel, Logik (Logische Philosophie, Bd. 2), Berlin 1998, S. 280: Schulmathematik abgehoben.

> „((16104 ist durch 3 teilbar) et (16104 ist durch 8 teilbar)) seq (16104 ist durch 24 teilbar)“

nicht in der oben analysierten umgangssprachlichen Normalbedeutung

> „Wenn 16104 durch 3 und durch 8 teilbar ist, dann ist 16104 durch 24 teilbar“

verstanden werden darf. Diese Aussagen drücken nicht die gleichen Zusammenhänge aus, so dass, falls trotzdem z. B. die hier anstehenden Operatoren „und“ und „wenn-dann“ in einem klassischen Kalkül benutzt werden, unbedingt zu betonen ist, dass nun nicht mehr deren umgangssprachlicher Normalinhalt gemeint ist, sondern das, das G. Frege bzw. G. Boole in die Analogieoperatoren an Bedeutung hineingelegt haben. Jede andere Erklärung würde zu den obigen Bedenken führen.

Die verbreitete Gleichsetzung der verschiedenartigen logischen Operatoren bis hin zu den Namen geht somit völlig daneben und hätte eigentlich in wissenschaftlichen Texten überhaupt nicht auftreten dürfen. Erst recht gilt das für Wissenschaften wie Logik und Mathematik mit ihren hohen Ansprüchen an Exaktheit und Korrektheit. Doch es waren leider mit G. Boole und G. Frege einige ihrer renommiertesten Vertreter, die einen geradezu verhängnisvollen Startschuss dafür gaben. Vieles wäre wissenschaftlich normal verlaufen, wenn die Begründer der klassischen Kalküle ihren konstruierten *logischen Operatoren* eigenständige Namen gegeben hätten und die späteren Generationen der Logiker, Mathematiker und Philosophen ihnen darin gefolgt wären. Doch für G. Boole und G. Frege galten die Konstruktionen als Verbesserung der umgangssprachlichen logischen Operatoren wie „und“, „oder“ und „wenn-dann“, als gedankliche Verfeinerung ihrer Bedeutung, so dass die vorgefundenen Namen gerade bei diesen wichtigsten Verknüpfungen beibehalten wurden.

Diese verständliche Erklärung, wieso es überhaupt zu einem solchen Irrweg kam, verhinderte aber nicht, dass insbesondere die Schulmathematik wegen der Gleichbezeichnung wichtiger logischer Operatoren, die verschiedenartigen logischen Systemen angehören, in eine logische Schieflage geriet, die bis heute anhält. Verursacht wurde sie selbstverständlich nicht von den Hauptleidtragenden des logischen Mankos, von der Schülerschaft und den logischen Laien, sondern von profunden Sprachkennern vor allem aus philosophischen und sprachwissenschaftlichen Kreisen, denen gerade seit Bestehen paralleler Sprachsysteme auffiel, dass die logischen Operatoren nicht sprachlich sauber gehandhabt werden, und die sich deshalb berechtigt mittels eigener Veröffentlichungen einmischten. Boole und Frege tragen daran keine Schuld. Das Recht, ihre Begriffe frei zu wählen, hatten sie: in Anwendung der Erkenntnis, dass Definitionen keine Feststellungen, sondern Festlegungen sind. Zu nennen wären jedoch ihre fachlichen Nachfolger. Sie hätten sich – inzwischen sind weit über 100 Jahre vergangen – viel stärker bemühen müssen, mehr „logische“ Ordnung in die Wechselwirkungen der hochgradig verzahnten logischen Operatoren sowie in eine effektivere wissenschaftliche Verwendung der Umgangssprache überhaupt zu schaffen. Stattdessen stehen die großen Könner heute ziemlich abseits der Diskussionen, und die übrigen bieten ein buntes auf „wenn-dann“ zugeschnittenes Bild, in dem sinnlose Beispiele und auch anderweitig sinnentstellend genutzte logische Parameter, unklar formulierte Richtungsveränderungen mit unnötigen Sprachverschiedenheiten sowie schließlich gegenseitig erhobene Vorwürfe oder Verdächtigungen bis hin zu Paradoxiebehauptungen für logikbezogene Aussagen nicht fehlen und das Ansehen der vielleicht exaktesten Wissenschaft schmälern.

Nicht alle haben jedoch diese Entartungen hingenommen. Schon vor längerer Zeit äußerte sich mit Reichenbach einer der großen Logiker sehr treffend dazu, ohne dass allerdings seine Worte von der überwiegenden Mehrheit der Fachleute angenommen wurden. Sie seien deshalb hier noch einmal wiederholt, da ich in diesem Buch versuchen werde, sie vertiefend mit einigen neuen Gedanken zur Spezifik der Logiken zu verbinden, die soeben kurz erwähnt worden sind. Reichenbach schrieb damals:

> The deviations of adjunctive implication [dem „wenn-dann“ ähnlichen klassischen logischen Operator, H. A.] from the connective usage [der Hauptbedeutung des umgangssprachlichen Operators „wenn-dann“, H. A.] have sometimes been called the ‚paradoxes of implication‘. […] Thus we have „snow is black implies there will be an earthquake tomorrow“, and „there is an earthquake implies sugar is sweet“. There is of course nothing paradoxical in these statements. We must realize that the word „implies“ here has not the same meaning as in conversational language; the implication in this case simply adjoins one statement to the other without connecting the statements. […] The struggle between the adherents of adjunctive

> and connective operations […] has sometimes been confused by the claim that one type of operation is the correct one. Such pretensions indicate a misunderstanding of the situation. In introducing adjunctive implication into our language we make use of the right of the scientist to construct his own simplified concepts. This does not preclude the use of connective implication in other propositions; we should demand only that it be clear which kind of operation is meant.[4]

Besonders der abschließende dringende Wunsch wird Richtschnur für die nachfolgenden Ausführungen sein.

Mit unserer deutlichen Zurückweisung der sprachlichen Unsauberkeiten und Verzerrungen ist noch nicht alles gesagt. Denn ausgeklammert blieb in den Erörterungen, wie die Schulmathematik in das auf Kalkülbasis umgebaute Gesamtsystem der Mathematik einzugliedern ist, ja, ob dies überhaupt gelingt. Dafür liegt eine Lösung nämlich nicht auf dem Tisch: Die kalkülbasierte Logik ist, wie wir gesehen haben, „leichtgewichtig" unter alleiniger Beachtung der Wahrheitswerte bestimmt, während die Schulmathematik mit logischen Zusätzen arbeitet, die kalkülmäßig gar nicht gefragt sind. Doch sie fällt nicht aus dem „mathematischen Rahmen", womit eine Neuigkeit hinzutritt: Sie geht über das bereits dargelegte Nebeneinander der Sprachsysteme hinaus und lässt sich anscheinend allein so erklären, dass die Schulmathematik nicht nur traditionell logisch-intuitiv unter direktem Einbau ihrer logischen Eigenarten entwickelt werden kann, sondern auch mit Hilfe „leichtgewichtig"-kalkülmäßig, sozusagen *minimallogisch* entstandener *mathematischer* Formeln. Im Ergebnis wäre damit die vermutete zweite Wurzel der Schulmathematik als mathematische Modifizierung logischer Kalküle etabliert. Doch wie ist eine derartige Hilfe überhaupt zu bewerkstelligen und zu verstehen?

Ein direkter Weg vom logischen Kalkül zu den logischen Operatoren der Umgangssprache scheidet aus. In unserem Beispiel hat der Übergang zum Kalkül von einem ungültigen zu einem gültigen Schluss geführt, so dass die Umkehrung keine Sicherheit gibt: Aus der Gültigkeit des Kakülschlusses folgt nicht die des umgangssprachlichen Schlusses. Die Brauchbarkeit der zweiten Wurzel könnte

4 Hans Reichenbach, Elements of Symbolic Logic, New York/London 1947 (im Folgenden zit. unter ESL), S. 30.

demnach nur aus der mathematischen Modifizierung resultieren, die berechtigt als Beschränkung der Anwendungsbreite der Kalkülschlüsse zu verstehen wäre und dasselbe bewirken müsste wie die umgangssprachliche logische „Verstärkung". Dazu werden wir später eine eigene Auffassung zur Diskussion stellen[5].

Doch wie dem im Einzelnen auch sei: Bis heute ist nur die logisch-intuitive Herkunft von Lehrern, Schülern und vielen interessierten Laien angenommen worden. Zumindest die Schüler kennen außer der Umgangssprache nichts logisch Verwertbares. Vordergründig werden sie, wie gezeigt, etliche anderweitige Ergebnisse ablehnen und der eigenen Intuition folgen.

Den Mathematikdidaktikern und den Schulfunktionären sind diese Diskussionen weitgehend unbekannt geblieben. Man gewinnt den Eindruck, dass das einzige logische Interesse darin besteht, den Schülern die kaum in der heutigen Schulmathematik verankerte klassische Logik näherzubringen. Die immer wieder bekundeten Bemühungen waren aber erfolglos, so dass viele Vertreter der Pädagogenzunft es inzwischen aufgegeben haben, geistige Kraft in die logische Seite der Schulmathematik zu investieren. Das derzeit hoch im Kurs stehende Handbuch „Mathematik-Didaktik"[6] lässt die Logik so gut wie gänzlich „links liegen". Selbst der erste Beitrag „Was ist und was leistet Mathematikdidaktik?"[7], verfasst vom Herausgeber, verzichtet trotz seiner grundsätzlichen Fragestellung auf Ausführungen zur Logik. Auch von Stephan Hußmanns Beitrag „Umgangssprache – Fachsprache"[8], der ja unmittelbar in unsere Thematik hineinführt, wäre etwas zu erwarten gewesen. Doch man wird enttäuscht. Der philosophierende Stil verklausuliert vieles und arbeitet nirgends die Stellung der Logik klar heraus. Selbst dort, wo man ein Herumreden nicht mehr für möglich hält, fehlt Substanz wie nach dem erkenntnisreichen Satz „Mathematik in der Schule ist nicht Hochschulmathematik"[9], auf den die Abwertung folgt, dass „auch dieser die deduktive Struktur als erkenntnistheoretisches Prinzip nicht immer gut zu Gesichte steht"; der Verfasser schließt mit der nichtssagenden Floskel, dass „[i]n

5 Vgl. besonders Abschnitt 4.2.2.4 und Anhang.

6 Timo Leuders (Hrsg.): Mathematik-Didaktik. Praxishandbuch für die Sekundarstufe I und II, 8. Aufl., Berlin 2018.

7 Mathematik-Didaktik, S. 9–14.

8 Mathematik-Didaktik, S. 60–75.

9 Ein sehr schöner Satz, zu dem dann fast nichts mehr kommt.

der Schule hingegen mathematische Grundausbildung vermittelt werden [soll]"[10]. Das ist zu wenig und deutet darauf hin, dass in logischer Hinsicht theoretisch nichts Neues gesehen wird.

Es müsste aber etwas geschehen. Aus unseren Ausführungen geht hervor, dass die Schüler ihre schulmathematischen Fachausdrücke und Zusammenhänge logisch fast nur umgangssprachlich nutzen. Dem wäre deshalb in unserer Untersuchung der Vorrang zu geben, woraus folgt, vor allem dazu beizutragen, dass die Rückstände dieser Logik in der Aufhellung von Systematik und Aussagekraft der logischen Operatoren, so gut und so schnell es möglich ist, sich verringern. Von maximaler „Schadensbegrenzung" sei deshalb die Rede. In diesem Sinne dürfte das Buch auch eine Hilfestellung für eine neue Universitätsausbildung der Mathematik- und Physiklehrer sein, in der die klassischen Kalküle zugunsten logisch-umgangssprachlicher Unterweisungen in den Hintergrund treten müssten.

10 Mathematik-Didaktik, S. 67.

Kapitel 1:

Allgemeine sprachlogische Grundfragen

Unterrichtsstunden, in denen die Schulmathematik eine Rolle spielt – also die „Mathe-Stunden“ im engeren Sinne und zumindest auch die der Fächer Physik und Chemie –, kommen ohne Nutzung der Wertungen „logisch“, „nicht ganz logisch“ oder „unlogisch“ für Äußerungen der Schüler selten oder gar nicht vor. Diese Begriffe sind deshalb in allen Altersgruppen, soweit sie die Schule hinter sich haben, sehr bekannt, und darin ist wohl die Erklärung zu finden, warum man sich um eine nähere Bestimmung nicht bemüht hat. Eigentlich wäre dies aber längst erforderlich gewesen, denn fragt man den jeweiligen Lehrer, was er darunter versteht, kommen oft oder sogar meistens verschwommene Ausdrücke, und die betroffenen Schüler werden noch weniger genau sagen können, was sie in dieser Hinsicht gut oder schlecht gemacht haben. Das ist kein Wunder, da der zentrale Begriff „Logik“ meiner Untersuchung selbst unter den Fachleuten sehr umstritten ist. Trotz dieser Meinungsverschiedenheiten besteht jedoch (fast) Einmütigkeit darin, dass „logisch“ vordergründig eine Eigenschaft der Sprache ist, fernerhin dann auch des Denkens, doch kann hier die erweiterte Sicht, die mit besonderen sprachphilosophischen Schwierigkeiten verbunden ist, vernachlässigt werden.

In meinem Verständnis folgt daraus, dass logische Grundlegungen mit einer Analyse der Sprache beginnen müssen, so dass gleich das erste Kapitel dazu Stellung nehmen soll. Dabei wäre zunächst zu fragen, aus welchen Zwecksetzungen heraus die werdenden Menschen Sprachen schufen, worauf geantwortet werden könnte, dass schon erste sprachliche Ansätze sich als gutes Mittel erwiesen, um untereinander Wissen, Gedanken, Sorgen und andere Befindlichkeiten auszutauschen, darüber hinaus aber auch Selbstbetrachtungen bis hin zu neuen individuellen Erkenntnissen zu speichern. Besonders der erstgenannte Sprachzweck brachte es mit sich, den entstehenden Sprachen *Regeln* zu geben, da nur regelartige Verallgemeinerungen es vermögen, Verständigung zu erzeugen. Eine solche wurde auch relativ schnell in brauchbarer Form erreicht und fortlaufend verbessert, doch die in die Sprache eingebauten Regeln sind bis heute ziemlich dunkel geblieben und geben nunmehr schon über Jahrtausende Anlass, sie genauer zu untersuchen, um vor allem ihre Vielfalt und den Grad ihrer Korrektheit beurteilen zu können. Im Zuge dieser Untersuchungen zeigte sich schließlich, dass unser immer komplizierter werdendes Wissensgebäude im Rahmen der natürlich entstandenen Sprachen zunehmend nicht mehr zu erfassen war, so dass zusätzlich von der Mitte des 19. Jahrhunderts an klar und eindeutig formulierte Kunstsprachen geschaffen wurden, die sich gerade in den fortgeschrittensten Wissenschaften als sehr erfolgreiche Mittel erwiesen. Wie schon sichtbar gemacht, wurde auch die Schulmathematik in diesen Prozess einbezogen, doch nur am Rande und insofern inkonsequent. Im zentralen Blick blieb das allgemeine Verhältnis zwischen den Kunst- und den Umgangssprachen, deren sowieso nur partiell bekannte Regelmäßigkeiten unter dem Aspekt ihrer logischen Eigenschaften in der Schulmathematik überhaupt noch nicht systematisch analysiert worden sind. Um auf diesem Wege weiterzukommen, wie es ja das Ziel der vorliegenden Arbeit ist, müssen in diesem theoretischen Kapitel erst einmal das Grundgerüst einer Sprache, ohne zwischen Sprachkonstruktion und Sprachnatürlichkeit zu unterscheiden, und die Rolle, die die Logik darin spielen sollte, dargelegt werden, woraus eine klare Bestimmung des Gegenstandes der Logik erwachsen dürfte.

Wegen der Vielfalt der wissenschaftlichen Meinungen ist es leider nicht möglich, über deren Breite auch nur annähernd zu informieren, und erst recht nicht, sie begründet zu bewerten. Jede Auswahl bringt andererseits ein verzerrtes Bild und würde deshalb die Balance verschieben. So dürfte es der beste Weg sein, sich hier auf die eigenen Überlegungen zu den sprachlogischen Theoriebezügen zu konzentrieren. Summarisch sei nur an den Anfang gestellt, dass ich mich den Auffassungen von Reichenbach, Sinowjew und Wessel besonders verpflichtet fühle. Sie gehen mehrfach nicht in die gleiche Richtung, und schon deshalb kann ich nicht längere Meinungskopien anbieten. Meine Arbeit gibt von einer eigenständigen theoretischen Basis aus einen erstmaligen systematisch aufgebauten Einblick in die Logik der Schulmathematik unter besonderer Berücksichtigung der Gedanken dieser Forscher.

1.1 Sprache und Logik in ontologischer Sicht

1.1.1 Syntax, Semantik und Pragmatik einer Sprache

Es gibt verschiedene Wege, sich dem Inneren einer Sprache zu nähern. Wir wollen ganz neutral beginnen und eine Sprache zunächst ontologisch betrachten, d. h. ihre Seinszüge als System mit *in sich ruhender Struktur* darstellen. Von daher erweist sie sich als eine riesige *Zeichenmenge*, in der aber nicht jede Zeichenzusammenstellung erlaubt ist. Befragt man Kenner unserer Sprache nach solchen Sprachanordnungen, so werden sie z. B. „Tisch" als zugehörigen Ausdruck ansehen, während „Brisch" keinen Niederschlag darin gefunden hat. Offenbar sind unbekannte Gewohnheiten beteiligt, doch ist längst nicht alles undurchsichtig. Fest steht u. a., dass die deutsche Sprache auf 26 Grundbuchstaben und 3 Umlauten nebst „ß" beruht, die von Hilfszeichen wie Punkten, Kommas, Klammern usw. flankiert werden. Etwas verworren ist dagegen die Bildung neuer zugehöriger Zeichen, wie das Beispiel schon zeigt. Aber auch hier sind ansatzweise Regeln erkennbar. Die Klassifizierung „Zeichen mit den Endungen ‚-en', ‚-eln' und ‚-ern'" erfasst beispielsweise so gut wie alle Infinitive der deutschen Verben. Die Kunstsprachen machen davon dann grundsätzlich Gebrauch unter Verzicht auf einen inhaltlichen Sinn; nur allgemeinere Klassifizierungen wie z. B. „Zeichen für Aussagen" erhalten vorläufig Namen, von denen das weitere Verstehen abhängt. Wie in vielen Logikbüchern soll für das sprachliche Ergebnis dieses Verfahrens die Bezeichnung „*syntaktische* Eigenschaft/Regel" verwendet werden[11].

Dem dürfte sich unmittelbar ein zweiter Aspekt anschließen, da die syntaktische Sicht Grenzen besitzt: Die Zeichenmenge „2 mal 2 = 4" darf als wahr und „2 mal 2 = 5" als falsch bezeichnet werden, womit über die „sinnfreie" Zeichensetzung hinausgegangen wird. Nicht so scheint es bei dem Ausdruck „2 mal 2" zu sein, der sich einem Urteil dieser Art entzieht. Doch er lässt sich anderweitig ergänzen, indem man ihn als Synonym für die Zahl 4 bezeichnet oder – vielleicht besser ausgedrückt – als Name für eine Eigenschaft der Zahl 4. Die Zeichen einer Sprache haben demnach nicht nur eine syntaktische Anordnung, sondern darüber

[11] Abgeleitet von den griechischen Wörtern „syn" (= „zusammen") und „taxis" (= „Ordnung").

hinaus die überaus wichtige Eigenschaft, auf etwas anderes hinzuweisen, das selbst gar nicht genannt ist, sogenannte Fremdheiten, wozu z. B. Wahrheitswerte wie die Zahl 4 gehören. Diese Eigenschaft, die in Zukunft als Bedeutung einer Sprache und daher als deren *Semantik* verstanden werden soll[12], macht somit eine neue, über die Syntax hinausgehende Beziehung sichtbar, die eine vorliegende Sprache mit davon zu unterscheidenden Fremderscheinungen verbindet. Sehr oft handelt es sich um Objekte der materiellen Realität, doch kommen auch, wie in den beiden Multiplikationsaussagen, Abstrakta bis hin zu den mathematischen und zu den anderen sprachlichen Zeichen in Frage. Die dortigen Worte bilden die gegebene Zeichenmenge, die auf ungenannte Objekte bezogen ist, nämlich auf unsere Zahlordnung in Verbindung mit ausgewählten Rechenregeln. Dieser „Fremd"-Bezug, der nicht direkt zeichenmäßig fassbar ist, stellt dann die Bedeutungsbestimmung dar. In der Schulmathematik konzentrieren sich wie in der Mathematik überhaupt die letzteren Fälle, so dass sie vorrangig beachtenswert bleiben müssen. Meist ist der Zusammenhang zwischen der betrachteten Zeichenmenge und dem „fremden" Objekt recht leicht zu erkennen, und die Beispiele ordnen sich der Beziehung zwischen Sprache und materieller Welt ein, wie es bei

„Der Jupiter ist der größte Planet unseres Sonnensystems"

geschieht: Nach einer detaillierten Beobachtung des tatsächlichen Sonnensystems erhält die Aussage den Wert „wahr".

Damit sind die der Semantik innewohnenden Schwierigkeiten allerdings noch nicht ausgeräumt, da für einige sprachliche Ausdrücke ein solcher Objektbezug, wie oben schon einmal vermutet, wirklich nicht zuzutreffen scheint. So lässt sich keine Erscheinung nennen, auf die sich z. B. „oder" bezieht, doch man möchte deswegen diesem Wort eine Bedeutung nicht absprechen. Ein Ausweg bahnt sich an, wenn ins Auge gefasst wird, dass die schon Jahrtausende geübte Sprachpraxis die Menschen zu der Erkenntnis geführt hat, dass die gegebenen Zeichen nur dann zu sinnvollen Ausdrücken vereinigt werden können, wenn vermittelnde, verknüpfende Wörter wie „oder" in den Zeichenvorrat aufgenommen sind. Die Spezifik der Vermittlung macht deren Bedeutung aus. So ist das bloße Nebeneinander von „Obstsorte", „Apfel", „Birne", „Kirsche" ziemlich unverständlich, während man

[12] Abgeleitet von „semainein" (= „bedeuten", „bezeichnen").

bei der Aussage „Äpfel, Birnen und/oder Kirschen … sind Obstsorten" weiß, was gemeint ist. Ohne die Sprachverknüpfungen lässt sich die beabsichtigte Bedeutung nicht erkennen.

Die Sicht auf Syntax und Semantik einer Sprache erschöpft deren Fragenkreis nicht hinreichend; ein dritter Aspekt fehlt noch: die die Sprache benutzenden Menschen. Als *Objekte* sind sie mit ihren vielfältigen Eigenschaften zwar schon berücksichtigt, jedoch nicht als *Akteure* mit der Fähigkeit, ihr Befinden in der Sprache zu äußern. Die Aussage

> „Ich glaube, dass das Bild der Funktion ‚$f(x) = x^2$' ein Maximum hat"

bedeutet etwas anderes als

> „Das Bild der Funktion ‚$f(x) = x^2$' hat ein Maximum".

Die erstere wäre, Ehrlichkeit vorausgesetzt, wahr, während die andere eindeutig falsch ist, so dass die sich äußernde Person Einfluss auf den Wahrheitswert genommen hat. Dieser letzte Aspekt gilt allgemein als die *pragmatische* Eigenschaft einer Sprache[13] und erlaubt zusammen mit den beiden anderen Aspekten, dem syntaktischen und dem semantischen, ein prinzipiell abgerundetes Urteil über den Platz der Sprache in der Gesellschaft.

1.1.2 Die logischen Eigenschaften der Sprache

Unser Anliegen zielt bekanntlich in diesem Kapitel nicht auf die Sprache schlechthin. Die bisherigen Ausführungen, obwohl für uns grundlegend und von Wichtigkeit, brachten noch nicht zum Ausdruck, woran die Logik, umgangssprachlich-intuitiv gemessen, Interesse zeigen müsste. Das wäre nunmehr nachzuholen, wobei sich der intuitive Maßstab nur ungefähr in Worte kleiden lässt, aber auf alle Fälle etwas mit Folgerichtigkeit im Sprechen und im Denken zu tun hat, woraus sich ergibt, dass es in der Logik in irgendeiner Form um die Wahrheit geht. Daran

---

13 Abgeleitet von „pragma" (= „Handlung", „Tat", „Sache") bzw. genauer „pragma(tike/techne)" (= „Kunst, richtig zu handeln").

wäre in dem sich anschließenden Versuch, auf wissenschaftlich höherer Stufe den Gegenstand der Logik zu bestimmen, anzuknüpfen.

Schaut man unter Beachtung dieser Gedanken auf die drei behandelten Grundeigenschaften einer Sprache, so schält sich die Semantik deutlich als „Feld" der Logik heraus. Doch auch die Syntax und die Pragmatik dürfen auf keinen Fall zu kurz kommen, da die Syntax die logischen Zeichen bereitstellen muss und die Pragmatik wegen der Einengung unseres Anliegens auf die Logik der Schulmathematik eine zu betonende Rolle spielen wird. Aussagen wie

„Ich glaube, dass das Bild der Funktion ‚$f(x) = x^2$' ein Maximum hat"

bestimmen angesichts der verbreiteten mathematischen Unsicherheit vieler Schüler den Alltag des Mathematik- oder des Physikunterrichts mit. Trotzdem sollten Semantik und Pragmatik nicht auf die gleiche Stufe gestellt werden. Wie schon hervorgehoben, lässt das Beispiel zwar erkennen, dass pragmatische Sprach-„Färbungen" sich auf die Wahrheitsbeziehungen auswirken können, doch diese selbst gehören zur Semantik, und gerade daran ist die Logik interessiert. Die Pragmatik sieht in der Entzifferung eines solchen Einflusses auch nicht ihren einzigen Zweck; es ist ein Nebenaspekt, der sicher nicht unwichtig ist. Für die Semantik ist die Wahrheitsfrage dagegen dominierend und dies ebenso für die Logik. Das Verhältnis zwischen Sprache und Logik ist daher in Gesamtsicht eindeutig semantisch geprägt, doch darf nicht vergessen werden, dass andere Wissenschaften ebenfalls an der weiteren Erkenntnis der Wesenszüge der Wahrheit arbeiten. Deren Interesse erwächst vor allem aus der Wichtigkeit dieser Problematik für uns Menschen, denn selbst unsere Existenz hängt entscheidend davon ab, ob das, was wir gesagt oder geschrieben haben, stimmt oder neu formuliert werden muss. Für die Logik bedeutet das allerdings, dass sie etwas entlastet ist und nicht die alleinige Verantwortung für den Wahrheitsgehalt menschlicher Äußerungen trägt. Es könnte jedoch noch die Hauptverantwortung bleiben, und so wäre dringend zu fragen, worin der spezifische Anteil der Logik besteht.

Grundlegend dürfte zunächst sein zu wissen, wann eine sinnvolle Zeichenmenge einer Sprache so zusammengesetzt ist, dass Äußerungen über ihre Wahrheit möglich sind. Darin legt sich die Logik jedoch nicht eigenmächtig fest; sie übernimmt ganz wesentlich sprachphilosophische Auffassungen zu den Bedingungen, die für eine Zeichenmenge ausreichen, dass darauf sich der wahrheitsbezogene

Begriff „Aussage“ anwenden lässt. Sie ist an strukturellen Überlegungen interessiert und insofern an *Aussageformen*, die unbestimmte *Variable* enthalten und nach deren Belegung zu Aussagen werden, falls die Belegung die philosophischen Bestimmungen eingehalten hat. Im wahrheitstauglichen Ausdruck

> „Das Weltall entstand im Prozess eines Urknalls“

übernimmt sie z. B. die Entscheidung über dessen Wahrheit von der Astronomie, selbst wenn diese erklärt, dass ein definitiver konkreter Wahrheitswert darüber nie möglich sein wird. Ihr genügt die allgemeine Anerkennung der Hypothese als sinnvolle wahrheitsgebundene Äußerung. Sobald, philosophisch begründet, ein Wahrheitswert bestimmt ist, tritt sie in Aktion und untersucht, welchen Einfluss die Struktur auf die Wahrheit nimmt. Das Ergebnis eines solchen Vorgehens sind neue, doch strukturell-wahrheitsmäßig abgeleitete Aussagen bis hin zu Abstraktionen wie

> „Oder-Aussagen sind mehrdeutig“ oder

> „Aus Allaussagen folgt nicht, dass mindestens eines der genannten Objekte existiert“.

Für solche „innerlogischen“ Aussagen fühlt die Logik sich dann auch *inhaltlich* zuständig, sozusagen in sekundärer Hinsicht. Sie ist im Kern aber *wahrheitsstrukturell* ausgerichtet, womit sie trotz dieser Einseitigkeit eine sehr bedeutsame „Wahrheits“-Wissenschaft bleibt, so dass es gerechtfertigt ist, die *Elementaraussage*, die nicht in zwei oder mehr Aussagen zerlegbar ist und daher den grundlegenden Wahrheitsträger darstellt, als wichtigste logische Einheit zu verstehen.

Übergehen können wir die an sich sehr bedeutsame Frage, wie viele Wahrheitswerte zu unterscheiden sind. Unsere Ausführungen gingen bisher mit dem Ton der Selbstverständlichkeit von zwei Wahrheitswerten aus, womit wir den philosophischen Grundsatz der Urväter der Logik, dass es etwas Drittes nicht gibt, anerkannten. Doch dieser gehört heute zu den umstrittensten philosophischen Weisheiten, und er darf hier nur deshalb fehlen, weil die Schulmathematik mit zwei Wahrheitswerten auskommt, auch wenn in der Stochastik wissenschaftlich mit mehr Wahrheitswerten gerechnet wird. Die in der Schule anfallenden stochastischen Grundlagen können aber unschwer mit zwei Werten gemeistert werden. So hat die Aussage

„Beim Werfen einer Münze hat ‚Zahl' die Wahrscheinlichkeit 0,5"

den Wert „wahr", während beliebige andere Zahlen zwischen 0 und 1 jederzeit dem Wert „falsch" genügen und nicht in unendlich viele Wahrheitswerte aufgegliedert werden müssen. Die Logik legt sich in ihren einzelnen Systemen darauf nicht selbstständig fest, sondern spricht die Zahl der Wahrheitswerte mit den Wissenschaften oder Lehren ab, von denen sie den Aussageninhalt übernommen hat.

Mit der Erkenntnis, dass logische Untersuchungen wahrheitsstrukturelle Ergebnisse anstreben, sind wir dem Gegenstand der Logik schon erheblich näher gekommen, doch machten unsere bisherigen Ausführungen auch klar, dass die Logik sich genauso für sprachliche Ausdrücke zuständig fühlt, bei denen die Menschen es ablehnen, eine Wahrheitsbestimmung überhaupt zu versuchen. Es handelt sich um die *Bezeichnungen* und um die *Sprachverknüpfungen*, deren Eigenheiten noch zu wenig in Augenschein genommen sind. Möglicherweise modifiziert ihre Beschaffenheit unsere (vorläufige) generelle Logikbestimmung, wenn auch hinzuzufügen wäre, dass die darauf gerichteten Untersuchungen aber nicht losgelöst neben denen zur Wahrheitsstruktur stehen, sondern ihnen untergeordnet sind.

Zuerst sollen die *Sprachverknüpfungen* näher zu betrachten sein. Gerade sie sind es, die für die Sprachstrukturen verantwortlich sind und somit das „logische Herz" der Sprache bilden. In der Regel handelt es sich um selbstständige Wörter, doch die zivilisierten Sprachen verwenden daneben oft substantivische, verbale und adjektivische Wortbeugungen für sprachliche Strukturbestimmungen. So hat in der Aussage

„Die Symbolik gibt der Schulmathematik eine klarere Ausdrucksweise"

das Dativobjekt „der Schulmathematik" eine andere logische Funktion als das Akkusativobjekt „eine klarere Ausdrucksweise". Diese Verknüpfungsvariante wird nicht vergessen, tritt aber gegenüber den eigenständigen Wörtern gleicher Funktion etwas in den Hintergrund. Für sie verwenden wir, wie es schon in der Einleitung beispielbezogen geschah, den treffenden Namen *„logische Operatoren"*.

Soweit sie Aussagen verknüpfen, konzentrieren wir uns auf die in der Schulmathematik vorherrschenden logischen Operatoren „nicht“, „und“, „oder“, „entweder-oder“, „wenn-dann“ sowie „genau dann wenn“ und spezifizieren die zugehörigen Aussagen (in gleicher Reihenfolge) als Negationen, Konjunktionen, Disjunktionen, Kontravalenzen, Implikationen und Äquivalenzen. Vollständig und somit umfassender als in der Einleitung wird im dritten und im vierten Kapitel ihren Eigenschaften in der Umgangssprache nachgegangen sowie detailliert nach ihren Beziehungen zu den entsprechenden Operatoren der konstruierten logischen Kalküle gefragt.

Die logischen Operatoren sind noch in anderer Hinsicht von Wichtigkeit. Die Formulierung „8 ist durch 4 teilbar“ ist anerkanntermaßen eine wahre Aussage, während eine Formulierung wie „durch 4 teilbar“ von uns als Bezeichnung für eine Eigenschaft der Zahl „8“ zu charakterisieren wäre. Bemerkenswert ist nun, dass die Ergänzung „8 ist“ aus der Bezeichnung eine Aussage macht, während umgekehrt die Aussage „8 ist durch 4 teilbar“ nach Streichung der Zeichen „8 ist“ zu einer Bezeichnung geworden ist. Diesen Zusammenhang kann man korrekt, doch übersichtlicher so ausdrücken, dass selbst Elementaraussagen zerlegbar sind. Zu den Bestandteilen gehören Bezeichnungen, und im Beispiel liegen davon vier vor: „4“, „8“, „teilbar“ und „durch 4 teilbar“. Es verbleiben „ist“ und (isoliert verstanden) „durch“, die verknüpfend wirken und somit die Struktur bestimmen, so dass sie zu den logischen Operatoren zählen. Dies würde zunächst, vorsichtig ausgedrückt, besagen, dass Aussagen sich aus Bezeichnungen und logischen Operatoren zusammensetzen *können*; unzählige neue Beispiele erlauben aber die Verallgemeinerung, dass es immer so ist. An dieser generellen Zerlegungsmöglichkeit ist die Logik wegen des erkennbaren Anteils der logischen Operatoren, die für die Sprachstruktur stehen, maßgeblich beteiligt, und so soll sie noch tiefer durchleuchtet werden. Vor allem fehlen bisher genauere Hinweise zur Sprachform „Bezeichnungen“, die, wie gleich sichtbar wird, relativ kompliziert aufgebaut ist.

Traditionell werden hierfür die Ausdrücke „*Term/Terminus*“ oder „*Begriff*“ verwendet, und wir schließen uns dieser Terminologie an, möchten aber nun wissen, welche Rolle diese Sprachform im Detail spielt. Schon das Beispiel zeigt, dass die Termini unterschiedlich in den Aussagen „verankert“ sind: „4“ und „8“ bezeichnen irgendwie als existent verstandene abstrakte Gegenstände, die als Zahlen vom Menschen geschaffen sind, im allgemeinen aber Konkretheiten der realen Welt Platz machen wie in

„Einstein ist ein berühmter deutscher Wissenschaftler".

„Teilbar" und „durch 4 teilbar" bezeichnen dagegen *Eigenschaften,* auf die die beiden Termini „4" und „8" mittels der logischen Operatoren „ist" und „durch" bezogen[14] sind. Der Eigenschaftscharakter stellt dabei nur eine Möglichkeit dar. Solche Ausdrücke sind daneben und vor allem in den schwierigeren Zusammenhängen Bezeichnungen für *Relationen,* d. h. für Beziehungen zwischen mindestens zwei Termini, wofür „größer" in der Aussage „3 ist größer als 2" ein Beispiel wäre. Darin wird eine gewisse Abhängigkeit der Termini „2" und „3", die wie soeben „4" und „8" *„Subjekte"* heißen sollen, vom Term „größer" erkennbar, der den sog. *„Prädikaten"* zugerechnet wird, womit wir einen Unterschied aussprechen, der noch von Wichtigkeit werden wird. Zur Gesamtstruktur einer Aussage wäre bei Einbeziehung dieser neuen Sprachformen dann zu sagen, dass mittels logischer Operatoren die Variablen p, q, r (allgemein: x) für die Subjekte mit den Variablen P, Q, R für die Prädikate zu *Aussageformen* P(x), Q(x), R(x) verknüpft sind, die, sobald ihre Variablen inhaltlich belegt sind und ergänzende logische Quantoren wie „alle" oder „mindestens einmal" erhalten haben, als Aussagestrukturen gelten können. Dabei erfassen die Prädikate die Subjekte mengenmäßig. Liegt eine Eigenschaft vor, wird von *einstelligen* Prädikaten gesprochen, während bei Relationen von *mehrstelligen* Prädikaten die Rede ist. Bei den Termini sind daher von vornherein recht unterschiedliche Funktionen von Bedeutung, die den Wahrheitswert der Aussagen beeinflussen.

Haben nun die Ausführungen zu den sprachlichen Verknüpfungen und zu den Termini unseren Blick dafür verschärft, was unter „Logik" zu verstehen ist? Es dürfte klar geworden sein, dass die an den Aussagen gemessenen Sprachstrukturen eine äußere Seite zwischen den Aussagen und eine zweite innerhalb der Aussagen besitzen, in denen Regelmäßigkeiten in verschiedener Art zumindest mitbestimmend sind. Beide Seiten unterliegen wissenschaftlichen Analysen, die im Normalverständnis der Logik zugeschrieben werden, und diese Sicht sollte beizubehalten sein. Das wäre ein weiterer Schritt in der Erfassung spezifisch logischer Züge, der aber, wie gleich zu zeigen ist, noch nicht der letzte sein wird.

[14] „Bezogen" versteht sich hier noch als intuitiv vorgegeben, und dies gilt auch für etliche folgende Ausdrücke. Im vierten Kapitel werden wir dann von einer funktionalen Beziehung sprechen, d. h. von einer unseres Erachtens besonderen Prädikatform.

Doch bevor wir darin fortfahren, sollte, nachdem sprachlogische Basiskenntnisse geschaffen wurden, die Antwort auf die ontologische „Urfrage", ob und wie die Anfänge der Sprache sich überhaupt verstehen lassen, nachgeholt werden, damit fortan durchweg gesicherter Boden für die neu aufzubauenden Kenntnisse besteht.

1.1.3 Logische Fragen der Genese des Sprachverständnisses

Bei der Erörterung der Aussagen ist schon angeklungen, dass besondere erkenntnistheoretische Schwierigkeiten die allgemeinen Untersuchungen begleiten, die sich zu vermitteln bemühen, unter welchen Mindestbedingungen eine Zeichenmenge einen Wahrheitswert und damit den Namen „Elementaraussage" erhalten darf. Diese Schwierigkeit erhöht sich noch, wenn es zusätzlich um die Bezeichnung der Urtermini oder die Verknüpfungsart der logischen Uroperatoren einer Sprache geht. Für die übrigen Termini und logischen Operatoren gibt es eine gängige, immer wieder von den Menschen angewandte Methode, unverständliche Bezeichnungen oder Verknüpfungen informativ zu machen: Man wählt andere sprachliche Formulierungen, die der Betreffende kennt und die in der Summe dasselbe bedeuten, womit dann auch der neue Terminus oder Operator bekannt ist. Kennt ein Schüler z. B. den Terminus „Trapez" noch nicht und wird dieser ihm als gleichbedeutend mit der Formulierung „Viereck mit zwei parallelen Seiten" erklärt, so weiß er nunmehr über Trapeze Bescheid, wenn er alle erklärenden Worte kannte. Ein solcher Vorgang wird als „*Definition*" bezeichnet, und seine konkrete Durchführung ist wiederum nicht leicht zu bewerkstelligen und sogar mit wissenschaftlichen Meinungsverschiedenheiten verbunden. Im nächsten Abschnitt und im vierten Kapitel werden wir uns noch dazu äußern[15]. Prinzipiellen Einwänden gegen derartige Definitionen ist dort aber sicher nicht zu begegnen; die Sachlage erscheint klar und übersichtlich. Trotzdem ruft sie ein sehr großes Problem hervor: Führt der Definitionsweg zu immer einfacheren Termini oder Operatoren, sind irgendwann keine erklärenden Worte der jeweiligen Sprache mehr verfügbar; wird dagegen – in den heutigen Wissenschaften zunehmend angewandt – bei irgendwelchen einfachen Termini oder logischen Operatoren

[15] Vgl. u. a. Abschnitte 4.2.2.1.1 und 4.3.3.

begonnen und definitorisch immer kompliziertere sprachliche Gebilde geschaffen, so endet das Verfahren zwar nicht vor einer leeren Menge, aber man besitzt eine Anfangsbasis aus ungeklärten Ausdrücken und baut insofern auf Sand. Die Mathematik und die künstlichen logischen Kalküle behelfen sich heute damit, dass sie solche Termini und Operatoren zu letztlich unbewiesenen wahren Aussagen unter dem Namen „*Axiome*“ zusammensetzen und von dort aus ihr Wissenschaftssystem errichten. Gewonnen ist damit allerdings nicht viel, denn die sprachliche Basis bleibt unerklärt. Die Schulmathematik eifert diesem Vorgehen auch nicht nach und bemüht sich in relativ lockerer Art um ein Verständnis ihrer Fachtermini, indem sie von irgendwie intuitiv verstandenen Grundbegriffen ausgeht, aus denen dann ein etwas undurchsichtiges Begriffssystem wird. Die logischen Operatoren überlässt sie gar ganz der Intuition, ergänzt sie aber hier und da durch geringfügige Erläuterungen. Unseren Wünschen genügt selbstverständlich keiner dieser den Definitionen vorgelagerten Ersteinstiege in Sprachen, denn man fragt sich, wie bei einer derart unsicheren Anfangslage überhaupt irgendeine Sprache zu verstehen ist. Die Erklärung liegt auch nach wie vor in den Sternen, und auf Erden hält der wissenschaftliche Streit darüber an. Trotzdem wollen wir nicht daran vorbeigehen. Denn ein wissenschaftliches Buch, das zumindest diese Grundsatzfrage streift, muss einen Erklärungsversuch wagen. Dabei sei der direkte Kontakt zwischen Anschauung und Sprachentstehung ins Spiel gebracht, entweder in unmittelbarer Abbildung wie „Baum“, „Vogel“ usw. oder nach Vergleichen: Zwei Menschen z. B. werden in verschiedenen Positionen beobachtet, woraus sich Ausdrücke wie „vor“ und „neben“ oder auch „und“ und „oder“ ergeben. Ähnliches gilt für diverse Situationen, bis ein Sprachstamm vorhanden ist, der die Ableitung weiterer Termini und Operatoren sowie schließlich von Aussagen erlaubt. Das wären einige vorsichtig ersterklärende Worte, die nicht mehr als das sein können. Hinzuzufügen wäre aber, dass eine heutige Rekonstruktion des vermuteten Weges aus der fertigen Sprache heraus höchstens angenähert möglich ist. Einzelne Schritte sollen später versucht werden, wobei die logischen Operatoren im Mittelpunkt stehen. Eine Übernahme der axiomatischen Methode ist dagegen für die Schulmathematik wegen Überforderung völlig undenkbar. Auch sie kann sich sowieso von unerklärten Sprachbildungen nicht lösen, diese lediglich einschränken. Uns bleibt deshalb für die Schulmathematik nur übrig, den intuitiven Anteil zu belassen und ihre Sprache mit Hilfe kalkülmäßiger Einblendungen ein wenig durchsichtiger zu machen.

1.2 Sprache und Logik in regelbezogener Sicht

Um die Sprachproblematik ganz zu verstehen, reicht es nicht aus, nur aufzuzeigen, wie eine beliebige Sprache sich in ruhender Form in den gesellschaftlichen Zusammenhang einordnet, welche ihrer Seiten dabei zu unterscheiden sind und was für die Logik an der Sprache besonders nennenswert zu sein hat. Zu kurz erwähnt sind bisher die Funktionen der auf Strukturveränderung bedachten *sprachlichen Regeln,* so dass über den Umgang der Logik mit diesen Regeln auch noch nichts gesagt ist. Das sei jetzt nachgeholt, wobei zu betonen ist, dass die Auslassung kein Versehen ist. Denn erst nach Darlegung dessen, was sich unmittelbar bzw. unkompliziert bei ruhender Struktur an sprachlogischen Eigenschaften erkennen lässt, ergibt sich nunmehr die Möglichkeit, *mittels der Sprache auf* die mit nicht immer einfachen Wiederholungen der Sprachvorgänge verbundenen *Sprachregeln einzugehen*. Damit deutet sich eine offenbar bewusst wahrzunehmende *Sprachstufung* an, die zuerst prinzipiell zu behandeln wäre, ehe direkt etwas zu den Sprachregeln gesagt wird.

1.2.1 Objektsprache und Metasprache

Die Sprachstufung wird in der täglichen Rede so gut wie nicht beachtet, obwohl sie eigentlich geradezu ein Dauergast ist. Nehmen wir als Beispiel die beiden Aussagen

> „Berlin ist die Hauptstadt der Bundesrepublik Deutschland“

und

> „‚Berlin‘ ist der Name für die Hauptstadt der Bundesrepublik Deutschland“.

Die Abfolge der Wörter beider Aussagen ist zwar sehr ähnlich, doch meinen die Aussagen sehr Verschiedenes: Die erstere äußert sich zu einer Stadt, die zweite zu einem Wort. Um dies in der Niederschrift kenntlich zu machen, hat es sich eingebürgert, einen der beiden „Berlin“-Ausdrücke in Anführungsstriche zu setzen, womit jedoch noch nicht bekannt ist, was sich dahinter verbirgt. Weitere Vergleiche führen schließlich zu zwei verschiedenen Sprachebenen, die im Beispiel getrennt sind: in eine Aussage über ein bestimmtes Objekt der realen Welt und eine zweite Aussage über ein Wort der ersteren, d. h. über eine abgehobene Zeichengruppe. Die auf die Sprache ausgerichtete zweite Aussage ist somit der anderen, die in die reale Welt weist, übergeordnet, und es wäre nach der Übertragung dieses Vorgehens auf innermathematische Beziehungen zu fragen. Die Aussage

„7 ist durch 3 teilbar"

unterscheidet sich offenbar von

„‚7 ist durch 3 teilbar' ist falsch",

denn die erste Aussage ist, ohne dass es ausgedrückt wird, falsch, und die zweite ist wahr. Nicht eine der beiden Aussagen bezieht sich aber irgendwie auf die Realität; in jeder geht es allein um mathematisch-logische Äußerungen. Eine Verallgemeinerung des Zusammenhangs ist daher vonnöten und lenkt die Aufmerksamkeit darauf, dass die erste Aussage *in der* „gewöhnlichen"[16] Sprache der Mathematik formuliert ist, während die zweite sich über die „gewöhnliche" Sprache der Mathematik äußert. Die gleiche Unterscheidung, in analoger Form auf das Berlin-Beispiel bezogen, lässt sich im Begriff „Grundstufe" fassen: Die erste Aussage spricht *in der* Grundstufe (über die reale Welt), die zweite über die Grundstufe (speziell über das zur Grundstufe gehörende Wort „Berlin"). Dieses Verständnis sollte bleiben; es macht eine sich verkomplizierende Sprache deutlich, die die Logik spezifisch analysiert. Dabei zeigt sich schon jetzt, dass die zweite Sprachebene reichhaltiger ist als die erstere: Ausdrücke wie „bezeichnen", „wahr", „falsch" sind nur sinnvoll verwendbar, wenn etwas über eine Sprache gesagt wird. Die zweite Sprachebene sei deshalb als *Metasprache* verstanden[17] und die andere – in Anknüpfung an die Objekte der realen Welt, die vorherrschend dort sprachlich widergespiegelt sind – als *Objektsprache*.

---

16 Ausdruck von Dirk W. Hoffmann zu den Bereichen bis zu den komplexen Zahlen (Grenzen der Mathematik. Eine Reise durch die Kerngebiete der mathematischen Logik, 3. Aufl., Berlin 2011–2018, S. 72).

17 Abgeleitet von „meta" (= „nach", „hinter"), da nur eine nachgeordnete Sprache über eine andere sprechen kann.

Das weitere Verständnis wird nun dadurch erschwert, dass dieses Nacheinander der Sprachstufen nur für den jeweiligen Einzelfall vorliegt. Darüber hinaus werden aus dem Sprachsystem, das zur Verfügung steht, objektsprachliche Fragen parallel zu metasprachlichen herausgegriffen oder auch vor diesen. Denn beide Aspekte sind in der täglichen Sprachpraxis in einer Sprache vereinigt, in der Umgangssprache bzw. der Sprache der Schulmathematik, so dass sie sich als Mixturen von Objekt- und Metasprache erweisen und deren Stufung weitgehend unbekannt bleibt. Eine Erklärung ist nicht einfach, und es liegt auch keine fertige Lösung vor. Wir beziehen wieder die Sprachgeschichte mit der Überlegung ein, dass sich Elemente der Sprachstufung bereits parallel zur Sprachentstehung entwickeln mussten, weil ohne Wahr-falsch-Bezüge, hinter denen sich u. a. eine solche Stufung verbirgt, die Existenz der werdenden Menschen bedroht war. Sprachmixturen von Objekt- und Metasprache in einem geschlossenen Sprachsystem, wie es die Umgangssprache darstellt, waren damit nicht zu vermeiden, und sie sind heute mitverantwortlich dafür, dass die Menschen grammatikalisch nicht gut mit der Umgangssprache zurechtkommen. Dies gilt ebenso für die schulmathematisch verwendete mathematisch-strukturell verbesserte Sonderform, um deren weiteren Ausbau wir uns innerhalb des unvermeidlichen Rahmens der Sprachmixturen bemühen, ohne daran zu denken, dass ein Ausweichen in die Sprachform der Höheren Mathematik möglich wäre. Sie würde, unverbunden und absolut genutzt – wie wir schon gesehen haben –, bei Schülern zum Unverständnis der Schulmathematik führen. Gleich gar träte dies bei zusätzlicher Nutzung der mathematischen Kalküle ein, die als Ergebnis der metasprachlichen Verwendung der „gewöhnlichen" Mathematik noch einmal sprachliche Differenzen erzeugen. Das dürfte aber zu verschmerzen sein angesichts des wissenschaftlichen Gewichts der verdeutlichten Trennung von Objekt- und Metasprache. Darauf werden wir im nächsten Kapitel noch etwas ausführlicher eingehen.

1.2.2 Die metasprachlichen Regeln

Obwohl schon angesprochen, sei noch einmal im theoretischen Teil wiederholt, dass eine regellose Sprache wegen ihrer Aufgabe, der zwischenmenschlichen Verständigung zu dienen, nicht vorstellbar ist und dass deshalb in den logischen sowie mathematischen Kalkülen Regeln von vornherein festgelegt sind, während in der Umgangssprache die ursprünglichen Sprachregelungen mit ihren späteren Abänderungen im Dunkel der Geschichte verschwanden und nunmehr seit Jahrhunderten von Wissenschaftlern mühsam gesucht werden. Dabei stießen diese auf den schon beschriebenen Umstand, dass sie im Kern die unkorrekte Umgangssprache verwenden können, um deren metasprachliche Regeln rückwirkend zu ergänzen bzw. zu verbessern. Die künstlichen Sprachen leisten dabei nur hier und da Hilfe, so dass es wieder erstaunlich zu sein scheint, dass das Verfahren mit am Ende eben doch besseren Regelkenntnissen, d. h. exakteren Kenntnissen gelingt, und die Erklärung ist für mich auch diesmal, dass die Anschauung unter Einsatz von Vergleichen einbezogen ist. Absolute Korrektheit des Suchergebnisses ist allerdings wegen der sprachlich verschwommenen Mittel unerreichbar, und so muss, wie die künstlichen Systeme es vorgemacht haben, jede explizierte Regel letztlich festgelegt werden. Regeln unterliegen somit menschlichen Entscheidungen und können demzufolge weder wahr noch falsch sein, da diese Ausdrücke sich auf Feststellungen beziehen[18]. Für die Schulmathematik gilt deshalb: Ihre logischen Regeln sind metasprachliche *Festlegungen,* unabhängig davon, auf welchem empirischen Weg sie bis dahin gewonnen wurden.

Wie lassen sich nun die Regeln sinnvoll untergliedern? Es dürfte nicht zweckmäßig sein, sie dem Grundaufbau der Objektsprache hier schon anzupassen. Zu den syntaktischen Regeln ist hinsichtlich unseres Anliegens allgemein bereits genug gesagt, und detailliert sind sie unseres Erachtens im vierten Kapitel besser aufgehoben. Zusätzliche Bemerkungen zur Pragmatik wollen wir ebenfalls einsparen, da in den konkreten Schlussverfahren von Kapitel 4 mehrfach ihre Besonderheit mit der semantischen Hauptaufgabe gut zu vereinigen ist. Anders sieht es aber bei den semantischen Regeln aus, deren logischer Aspekt aus intuitiver Sicht recht verschieden ist. Wir wollen zwei semantische Regelarten unterscheiden:

Bedeutungserzeugende Regeln gelten vor allem den logischen Operatoren, indem sie festlegen, wie diese einzusetzen sind. So entspricht die Aussage

> „Für die Bestimmung des Maximums einer Funktion ist die 1. Ableitung zu bilden und gleich null zu setzen“

[18] Sollte die Festlegung in sich widersprüchlich sein, werden wir von „*unverständlich*“ sprechen.

gewiss der Absicht des Lehrers, aber

> „Für die Bestimmung des Maximums einer Funktion ist die 1. Ableitung gleich null zu setzen und zu bilden“

vermutlich nicht, wie das gleichgebaute sarkastische Beispiel vom Autostart deutlich macht: „Er stieg ins Auto und fuhr gegen einen Baum“, woraus sinnlos

> „Er fuhr gegen einen Baum und stieg ins Auto“

würde. Der Operator „und“ ist hier nicht gemäß seiner vermutlichen „Ur“bedeutung genutzt worden, sondern drückt eine *strukturelle Reihung* aus, die uns noch beschäftigen wird.

Mitunter reicht die Kenntnis der logischen Operatoren jedoch nicht aus. In der Aussage

> „2 gehört zu den ganzen Zahlen“

ist alles klar gesagt, und der Wahrheitswert steht fest.

> „Der Schüler sucht die ganzzahlige Lösung von ‚ $\sqrt{3}$ ‘“

lässt dagegen offen, ob es eine ganzzahlige Lösung gibt. Der Terminus „suchen“ wirkt demnach über die logischen Operatoren hinaus auf die Wahrheitsstruktur ein.

Überhaupt haben die Termini einen breiten Aktionsradius, denn in verschiedenen Definitionsregeln, die zur bestimmenden bedeutungseinführenden Form gehören, spielen ihre gegenseitigen Beziehungen sogar die Hauptrolle, wenn auch hier die logischen Operatoren nicht vergessen werden dürfen. Doch der entscheidende Fehler erwächst z. B. in

> „Der Ausdruck ‚Funktion‘ ist genau dann gerechtfertigt, wenn in einer Gleichung beide Seiten ausgetauscht werden können“

daraus, dass die angebotene Beziehung zwischen den Termini „Funktion“ und „beide Seiten einer Gleichung austauschbar“ nicht zu den anerkannten Definitionen beider Begriffe passt. „Anerkannt" wäre aber zu betonen, denn die Definitionsregeln sind wie alle Regeln Festlegungen, und das ist in dem klassischen Begriff der „*Definitionsfreiheit*" sogar hervorgehoben.

Über die Regeln der Bedeutungseinführung hinaus müssen zweitens (endlich!) die Regeln ihren Platz finden, die für nicht wenige Logiker der alleinige Gegenstand der Logik sind, die sogenannten *Schlussregeln*. Sie machen von der Möglichkeit Gebrauch, durch menschliche Eingriffe die Struktur innerhalb einer ruhenden Sprache zu verändern. Die riesige Menge an Wörtern lädt fast dazu ein, wenn, wie es bei den Schlussregeln der Fall ist, die Verschiebungen den Zweck haben, die Zahl der wahren Aussagen zu vergrößern. Mehr wahre Aussagen zu haben drückt einen Gewinn an Wissen aus, mit dem die Menschen mehr Einfluss auf die Gesamtheit der weltlichen Bedingungen in ihrem eigenen Interesse nehmen können, und so steht diese Frage obenan, auch wenn die Einordnung der Schlussregeln in die bekannte Sprachgliederung damit erschwert ist: Manche Logiker möchten diese Regeln der Pragmatik zuordnen, während andere sie trotz ihrer praktischen Wirkungen als semantische oder sogar als syntaktische Regeln verstehen. Wir gehen hier über diesen Streit hinweg und konzentrieren uns auf die Mechanismen, die *garantieren,* dass die Verschiebungen nicht von wahren zu falschen Aussagen führen. Dabei wird großzügig eingeräumt, dass die Ausgangsaussagen, die *Prämissen,* nicht unbedingt wahr sein müssen, so dass die *Definition des Begriffs „logischer Schluss*" wie folgt formuliert werden könnte:

Unter der Annahme der Wahrheit der Prämisse liegt *ein* (*gültiger*) *logischer Schluss genau dann* vor, wenn die Konklusion ebenfalls mit Gewissheit oder beliebig angenähert wahr ist.

Anders gesagt: Es gilt das absolute *Gebot des angenommenen oder tatsächlichen Wahrheitstransfers* in unterschiedlicher Gewissheit, mehr jedoch nicht.

Diese frühe Grenze prägt das Extrembeispiel von Reichenbach in fast überdeutlicher Form:

> Prämissen: If this piece of wood is heavier than an equal volume of water,
> it will float.
> This piece of wood is heavier than an equal volume water.
> Konklusion: This piece of wood will float.[19]

[19] Reichenbach, ESL, S. 68.

Beide Prämissen sind falsch; sie widersprechen unseren physikalischen Erkenntnissen und sind nur als wahr angenommen. Trotzdem ist auf einem zunächst eigenartig wirkenden Wege eine tatsächlich wahre Konklusion herausgekommen. Was ist passiert? Die Annahme, dass Holz, auch wenn es zu den Gegenständen gehört, die schwerer als Wasser sind, schwimmt, schließt eine bewusste und – wegen des Prinzips der Definitionsfreiheit – erlaubte Bedeutungsänderung für „schwer" ein, wenn man „schwimmen" konstant lässt. Da nun nach der zweiten Prämisse Holz diese (indirekt neu definierte Eigenschaft) besitzt, darf mit einer umgangssprachlich ebenfalls stets benutzten Regel in gültiger Form auf die Konklusion geschlossen werden.

In abgeschwächter Form und leicht modifiziert ist dieses Vorgehen in der Mathematik bis hin zur Schulmathematik als *indirekter Schluss* weit verbreitet. Im Unterschied zum *direkten Schluss* wird die Prämisse als falsch und ihr Gegenteil als wahr angenommen, wozu verdeckt, wie soeben dargelegt, mindestens eine Definitionsänderung gehört. So kann beispielsweise in einer vierten Klasse der Nachweis, dass 74 nicht durch 4 teilbar ist, damit begonnen werden, dass man 74 fälschlich zu den durch 4 teilbaren Zahlen zählt, so dass 74 eine neue Definition erhalten hätte. Anders als in der obigen Variante belässt man es aber dabei nicht, sondern konfrontiert die Annahme mit korrekt-üblichen mathematischen Erkenntnissen oder Festlegungen, so dass ein Widerspruch entsteht, der unter dem Vorbehalt der bereits erwähnten Zweiwertigkeit den Schluss erlaubt, dass 74 im Gegensatz zur Annahme nicht durch 4 teilbar ist. Wir fassen deshalb noch einmal zusammen, dass beim Schluss der Wahrheitstransfer entscheidend ist, nicht unbedingt die Wahrheit der Prämisse, und es ist zu fragen, wie dieser Transfer zu bewerkstelligen ist. Dafür hat die Logik untereinander verzahnte Einzelregeln erarbeitet, die sich aufeinander zurückführen lassen. Vielfach werden einige von ihnen *als Grundregeln* ausgewählt, vor allem

- die Abtrennungsregel, die Aussagen eines Schlusses vereinzelt;
- die Einsetzungsregel, die die Aussagenmenge eines Schlusses vergrößert; und
- die Quantifizierungsregel, die noch unbelegte sprachliche Zeichen durch Quantoren bindet und sie dabei zu verwendungsfähigen Aussageformen vereinigt.

Sie dominieren auch bei uns, können aber wegen der Mehrdeutigkeit der umgangssprachlichen logischen Operatoren nicht streng gereiht an den Anfang gestellt werden.

Soviel zum Hauptmerkmal eines Schlusses, für dessen tieferes Verständnis nun *ergänzende Merkmale* heranzuziehen sind. Dabei sollte zuerst zu beachten sein, ob die Schlüsse die erkennbaren Elementaraussagen unverändert lassen und verändernd nur innerhalb der molekularen Aussagen wirken oder ob ihre Neustrukturierungen auch die inneren Beziehungen der Aussagen beeinflussen. Für diese sehr zweckmäßige und daher allgemein genutzte Unterscheidung haben sich seit Boole und Frege die Namen „Aussagenlogik“ und „Prädikatenlogik“ eingebürgert, die als Richtschnur für den Einstieg in die Logik stehen. Gemessen an der Bedeutung, die auch wir den Aussagen beilegen, dürfte das ein kluger Weg sein, auf dem zuerst nur die Aussagen in Verbindung mit den logischen Operatoren analysiert werden und danach, diese Basis erweiternd, zusätzlich auch die Termini.

Im nächsten Merkmal sei darauf aufmerksam gemacht, dass Schlüsse nicht voraussetzungslos sind und immer erst dann angewandt werden können, wenn sprachliche Formulierungen in Aussageform als Voraussetzung existieren, die aber möglicherweise nur gedacht sind und nicht formuliert vorliegen. Das Ausmaß dieser sog. „stillen Voraussetzungen“ ist nicht generell festlegbar; subjektive Erwägungen fließen ein und müssen gerade im Schulunterricht öfters abgesprochen werden. Ein Streitfall wäre vielleicht schon der simple Schluss aus

> „Wenn es regnet, wird die Straße nass“ und
> „Es regnet“ auf
> „Die Straße wird nass“,

denn er ist nur zulässig, wenn die Straße nicht überdacht oder nicht – wie in heißen Erdregionen durchaus nicht selten – überhitzt ist. Diese Einschränkungen werden jedoch in Deutschland, wo der „Regen“-Schluss als Standardbeispiel fungiert, meist mit Selbstverständlichkeit still hingenommen, wenn man nicht absichtlich provozieren will.

Die umgangssprachlichen Schlüsse unterliegen überhaupt einer extremen Sprachverkürzung. Beobachtet man die Ausdrucksweise der Schüler im Unterricht, so kann man schnell feststellen, dass sie sich kaum von ihrer täglichen Rede und der der anderen Menschen im Privatleben unterscheidet. Die dort geübte sprachverkürzende Tendenz ist demnach mit der gleichen Eigenheit im Unterricht anzutreffen. Trotz der darin enthaltenen logischen Schwierigkeit, mit den „stillen“ Voraussetzungen umzugehen, wird davon aber in einem Maße Gebrauch gemacht, dass sogar die direkte Handhabung des logischen Schließens irreführend beeinflusst ist: Nicht wenige Schüler deuten „neutrale“ Aussagen bereits als Schluss und erzielen dadurch verfrüht neue Informationen. Besonders bei einfachen Schlüssen besteht diese Gefahr, die den Lehrer dann irgendwann zur Unterbrechung der Gedankengänge der Schüler zwingt. Das geht soweit, dass fast alle Schüler den obigen „Regen“-Schluss nicht nur als umständlich, sondern als unnötige Verdopplung ansehen: Die Aussage

> „Wenn es regnet, wird die Straße nass“

gilt schon als Schluss. Im Unterricht setzt sich diese „Praxis“ dann fort: So wird sicher

> „Wenn 315 durch 105 teilbar ist (leicht erkennbar), ist 315 (wegen $105 = 7 \times 15$) auch durch 7 teilbar (schwerer erkennbar)“

als Schlussbehauptung verstanden, obwohl sie weiter nichts als eine zunächst unbewiesene „Objekt“Aussage ist. Diese verdeckte „stille“ Mehrdeutigkeit von „wenn-dann“, die sogar über Sprachstufen hinausgeht, ist dafür verantwortlich, darf den Lehrer aber nicht davon abhalten, den Schülern mit einfachen Worten zu erklären, dass der fragliche Satz eine objektsprachliche Aussage und keine metasprachliche Regel ist.

Andererseits dürfte es nicht nötig sein, dass der Lehrer beim Beweis der 180°-Winkelsumme im Dreieck hervorhebt, es handele sich um zwei- und nicht um dreidimensionale Dreiecke, obwohl in der Abiturvorbereitung derartige „ungewohnte“ Dreiecke auftreten könnten. Alles in allem bleibt aber der Grundsatz, dass die Aussagenmenge, aus der die Prämissen gewählt werden, möglichst erkennbar sein soll und dass Prämissen nicht schon als Schlussfiguren verstanden werden. Auch in der Schulmathematik wird daher der bewusste Blick auf die vorausgesetzte Grundmenge eines Schlusses immer wieder von Wichtigkeit sein.

Damit zum letzten Ergänzungsmerkmal, das vermutlich etwas überraschend festhält, dass ein Schluss an sachlicher Substanz nichts Neues bringen kann, sondern nur neue Erkenntnisse zum Beziehungsgeflecht bisheriger Sachinformationen. Angesichts der Tatsache, dass menschliche Erkenntnisse zu einem nicht geringen Teil auf Schlussweisheiten beruhen, scheint das eine Abwertung zu sein, doch steht dagegen, dass unser Wissen weitgehend durch Sachrelationen geprägt ist, die alle in unterschiedlicher Form Schlussverfahren voraussetzen. Ihr Ziel sind *Umformungen* schon sprachlich fixierten Wissens, um weitere noch ungenannte oder erstmalige *Sachverbundenheiten* zu finden. Sachlich-substantiell ist es von daher nicht möglich, dass die Konklusion über die Prämisse hinausgeht, und wir sprechen deshalb auch vom *Entailment*-Charakter eines Schlusses. Dagegen wird leider oft, doch unmerklich verstoßen, so dass im Ergebnis etwas weiterhin Unerschlossenes als Schluss verkündet wird. Behauptet die Prämisse z. B. nur, dass es für ein wahres „oder" ausreicht, dass „wahr-wahr", „wahr-falsch" oder „falsch-wahr" gilt, so wäre es unschlüssig, in der Konklusion ein „oder" zu vertreten, in dem wie in

„Dreiecke sind spitzwinklig oder rechtwinklig oder stumpfwinklig"

alle Varianten belegt sein müssen. Derartige unschlüssige „Erweiterungen" führen vereinzelt sogar zu Paradoxien, mit denen der „Täter" dann gar nichts mehr anfangen kann. Auch das letzte Merkmal, dass die Konklusion de facto nicht über die Prämisse hinausgehen kann, dass sie „unentdeckt" in der Prämisse enthalten ist, dürfte daher von Wichtigkeit sein.

Über die Analyse der Merkmale hinaus gilt es nunmehr, in allgemeiner Form den Regelgebrauch in der Schulmathematik von dem in der Höheren Mathematik abzugrenzen. In den konstruierten Logiksystemen sind die Schlussvorgänge in ein starres Schema eingebaut, das mit (unbewiesenen) Axiomen beginnt und mittels fester syntaktischer und semantischer Definitionen und Regeln fungiert. Ein solches Vorgehen ist in der schulmathematischen Logik nach unserer in der Einleitung erläuterten Bevorzugung umgangssprachlich-logischer Ungenauigkeiten völlig undenkbar. Ja, es ist nicht einmal möglich, ein vollständiges System des sogenannten *natürlichen Schließens* zu entwickeln. Diese Systeme sind schon mehrere Jahrzehnte in der „gewöhnlichen" Mathematik als Ersatz für die axiomatische Methode in Gebrauch und insofern von gleicher Leistungsfähigkeit. Sie sind den gebräuchlichen Wegen beim Schließen aber stärker angepasst und stellen statt der Axiome ausgewählte, doch zuvor erprobte Verfahren bereit. Dem Nutzer überlassen sie, sollten mehrere im Erstangebot sein, wovon er ausgehen möchte, um dann in vorgezeichneter Weise den Schluss zu Ende zu führen. Die einfache Übernahme dieser Grundidee auf die Logik der Schulmathematik scheitert jedoch an den Mehrfachbedeutungen der dortigen logischen Operatoren, woraus sich dann wieder parallel zu verwendende Schlussreihen ergeben.

Das wurde bis jetzt allerdings als einfache Feststellung hingenommen, womit die hier anstehenden Theorieerörterungen nicht zufrieden sein können. Somit wäre nach den Gründen für ein so „unzuverlässiges" Verhalten gerade der wohl wichtigsten logischen Operatoren zu fragen. Dabei wird sich herausstellen, dass als Hauptfaktor und vielleicht sogar als einziger Faktor die der historisch fortschreitenden *Sprachbereicherung* dienende Gewohnheit, „*Seiteneinflüsse*" von benachbart auftretenden Termini und Aussagen zur Verdeutlichung zu nutzen, in Frage kommt. Die mathematisch-logischen Kalküle sind davor dank ihrer starr von Anfang an bestimmenden Axiome und Regeln geschützt, doch die in der Schulmathematik gebräuchliche lebendige Umgangssprache reagiert anders. So erweist es sich z. B. offenbar nicht nur ein- oder zweimal als günstig, die Aussagenverbindung „A und B" nicht schlechthin allein als ein Nebeneinander zu begreifen, sondern zusätzlich als ein gemeinsames „Muss". Die bereits mehrfache diskutierte Aussage

> „Wenn eine Zahl durch 2 teilbar ist und durch 3 teilbar ist, dann ist sie durch 6 teilbar"

drückt *wegen mathematischer, d. h. außerlogischer Eigenarten* aus, dass erst die Gemeinsamkeit der „Wenn"-Teilbarkeiten eine Aussage über die Teilbarkeit durch 6 gestattet. Der derart gestärkte Zusammenhang zwischen den Teilaussagen hätte aber immer noch die Aussageform

> „(Wenn p und q), dann r"

zur Grundlage, die auch wahrheitsneutrale Belegungen gestattet, worin zur Kombination „w-f" nur „falsch" gehört und nicht „nicht möglich", wie es die obige Belegung aus *mathematischen* Gründen verlangt. Es sind demnach die „Seiteneinflüsse", die in diesem Fall zuerst die Konjunktion sowie als Folge die Implikation modifizieren und somit *semantisch dehnbar* machen.

Sie verwerfen aber nicht, weil sie auf sehr, sehr vielen Wiederholungen beruhen, den Weg der Regelsuche. Wir halten es nur für erforderlich, die Schlussverfahren, soweit sie umgangssprachlich bzw. schulmathematisch formuliert sind, nochmals zu klassifizieren. In Anlehnung an David Hilbert und Paul Bernays sollen *„finite“ Schlüsse*[20], die unter dem Einfluss des Aussageninhalts stehen, von den stets gültigen *„rein logischen“ Schlüssen* unterschieden werden. Um die als Folge aufgezeigten Zersplitterungen der logischen Operatoren möglichst gering zu halten, wollen wir versuchen, die Operatoren in *Hauptvarianten* einzugliedern. Eine solche Methode lässt die Grenzen nach oben offen, so dass auch eigene Interpretationszusätze der Lehrer willkommen sind. Und sie könnten in der gymnasialen Oberstufe so weit führen, dass die umgangssprachlichen logischen Parameter den schwierigeren Zusammenhängen der Schulmathematik nicht mehr gewachsen sind und unverständlich erscheinen. Als Ausweg würde sich dann der schrittweise Übergang zum natürlichen Schließen Richtung klassischer Logiksysteme anbieten, doch es dürfte entschieden besser sein, dort die Grenze für die Schwierigkeitsvermittlung zu setzen. Wichtig ist vor allem, die regellogischen Verfahren in ihrer Breite zu unterrichten, unter Vernachlässigung der klassischen Logik.

1.3 Zum Gegenstand der Logik und zu ihrer Rolle in der Schulmathematik

Wir haben in diesem Kapitel die Sprache zunächst in ruhender Struktur betrachtet und als eine *erste zentrale Aufgabe der Logik* bestimmt, dass sie die Bedeutung konkreter Strukturbeziehungen beliebiger Aussagen in korrekter, widerspruchsfreier Form fixiert oder gegebenenfalls, sofern eine solche Form nicht verwirklicht ist, die betreffende Bedeutung korrigiert. Sollte es sich um die Neufassung einer Sprache handeln, kontrolliert sie die strukturelle Korrektheit der einzelnen Schritte bis hin zur endgültigen Konstituierung der sprachlichen Neugründung. Detailliert ist damit der Blick der Logik primär auf die Bedeutung der logischen Operatoren gerichtet, und dies in doppelter Form: zuerst und absolut dominierend in aussagenbildender Hinsicht, so dass die *Wahrheitsstrukturiertheit* der wichtigste Gegenstand logischer Untersuchungen ist, daneben aber auch und dieser Frage

[20] Grundlagen der Mathematik I, 2. Aufl., (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Bd. 40), Berlin/Heidelberg/New York 1968, S. 20 ff., besonders S. 32. Deren Definition weicht im Detail von unserer Auffassung ab, doch berührt der Unterschied nicht das Anliegen des Buches.

untergeordnet bezüglich ihrer Beziehung zu den Termini. Weitergehend verlangt dann deren gegenseitige Anordnung in den Aussagen bis hin zur selbstständigen Beeinflussung der logischen Operatoren die Aufmerksamkeit der Logik in vollem Umfange.

Die *zweite zentrale Aufgabe der Logik* erwuchs aus unseren Überlegungen zu ihrem Anteil an den Strukturbewegungen der Sprache, die die Menschen mittels der von ihnen geschaffenen Regeln bewerkstelligen. Auch unter diesem Gesichtspunkt bleibt, wie es gar nicht anders möglich ist, die semantische Seite für die Logik bestimmend, selbst wenn die dominierenden Schlussregeln einen pragmatischen Akzent besitzen. Die Logik erweist sich dabei, so war unser Ergebnis, als Untersuchungsmethode für die strukturelle Abhängigkeit der Schlussregeln und der Regeln der Bedeutungseinführung von den definierten logischen Operatoren und Termini mit dem Ziel, wahre Aussagen zu *garantieren*. Verbindet man diesen Gedanken mit den obigen Ausführungen zur ersten Hauptaufgabe, ließe sich der *Gegenstand der Logik,* wie es nunmehr geschehen soll, als *normierende und wahrheitsorientiert regelsetzende Strukturwissenschaft* bestimmen.

Da die vorliegende Arbeit die debattierten Grundfragen einer Sprache unter dem einengenden Blick der Schulmathematik behandelt, ist es vonnöten, abschließend zunächst ihre zentrale logische Besonderheit hervorzuheben, dass sie logisch nicht der wissenschaftlich betriebenen Mathematik folgt, aber auch von dort – neben dem normalen logisch-intuitiven Zugang – inhaltlich erreichbar ist. Dem wäre allerdings unbedingt hinzuzufügen, dass sie ihre mathematischen Probleme wie bisher nur sehr begrenzt mit Hilfe der klassischen Kalküle angehen sollte, sondern vorrangig auf der Basis der allerdings dringend verbesserungsbedürftigen umgangssprachlichen Logik. Daneben wäre zudem nicht zu vergessen, dass die Mehrdeutigkeit der logischen Operatoren sowie nachfolgend die Mehrgliedrigkeit der Schlussverfahren, die besonders oder überhaupt den „Seiteneinflüssen" zu verdanken sind, kein geschlossenes System mit festen syntaktischen und semantischen Regeln erlauben. Doch konnte dies nicht verhindern, dass als Modifizierung ein logisch verzweigtes schulmathematisches System mit darauf aufbauenden Schlussregeln entstand, das dem Lehrer Gestaltungsmöglichkeiten gab und gibt. Über diese positive Besonderheit hinaus muss aber als überaus nachteilig die starke Tendenz zu „stillen Voraussetzungen" und Schlussverkürzungen hinzugefügt werden. Auch die zweckmäßige Unterteilung in Aussagenlogik und Prädikatenlogik wird immer wieder aufgebrochen, da eine systemunabhängige

Beispielbezogenheit im Mittelpunkt steht. Harmonie und Geschlossenheit können somit in unserem ersten Versuch einer wissenschaftlichen Analyse der schulmathematischen Logik nur bedingt demonstriert werden, doch sind die erzielten Teilerkenntnisse nicht ohne Wert.

Kapitel 2:

Historischer Abriss des Wechselverhältnisses von logisch-umgangssprachlichen Untersuchungen und logischen Neubestimmungen

Diese wechselseitige historische Behandlung umgangssprachlicher und neubestimmter logischer Beziehungen schließt notwendig Grundsatzbemerkungen zur Geschichte der Mathematik ein, so dass – erstmals in umfassenderer Form – das folgende Kapitel eine kombinierte Darstellung der Geschichte der Logik und der der Mathematik beinhaltet.

2.1 Logisch-kombinatorische Fortschritte bis zum ersten Höhepunkt in Syllogistik und Stoa im 4. und 3. Jahrhundert v. Chr.

2.1.1 Die Anfänge und die Charakteristika der Syllogistik

Die Bemühungen um die logisch-wissenschaftliche Erfassung unserer täglichen Sprache gehen weit in die Anfänge menschlicher Zivilisation zurück, haben aber, wie dieser Überblick zeigen wird, immer noch keine irgendwie abschließenden Ergebnisse erreicht. Der Ausweg über künstlich geschaffene Logiksysteme war schon deshalb erforderlich und hat darüber hinaus immense gedankliche Mittel für den Erkenntnisfortschritt beliebiger Art bereitgestellt. Unsere Forschungen zur vernachlässigten schulmathematischen Logik betten sich hierin mit einigen neuen Gedanken vortrefflich ein und sind unter Einbeziehung des historischen Werdegangs logischer Weisheiten besser verständlich.

Die ersten logischen Erkenntnisversuche in den frühen babylonischen, ägyptischen, chinesischen und indischen Hochkulturen fanden bis ins 2. und 1. Jahrtausend v. Chr. sehr wahrscheinlich, so ist zu vermuten, in konkret-umgangssprachlicher Form ihren Niederschlag und waren auf qualitative Unterschiede in den Sprachformen ausgerichtet, während ungefähr gleichzeitig, doch womöglich personell abgehoben davon, mit mathematisch-zahlenmäßigen Methoden quantitativen Unterschieden nachgegangen wurde. Beide Untersuchungsreihen erbrachten dann auch in der ersten Hälfte des letzten Jahrtausends v. Chr. in Griechenland erste fassbare generellere Formalisierungen.

Gemessen am unterschiedlichen Abstraktionsgrad, der in der Logik ja noch stärker ausgeprägt ist als in der Mathematik, dürfte es nicht zufällig sein, dass die ersten mathematischen Gesetzmäßigkeiten, die Personen wie Thales von Milet und Pythagoras zugeschrieben werden können, schon von ungefähr 600 v. Chr. an bekannt werden, während die Logik in dieser Hinsicht fast zwei Jahrhunderte später kommt und erst mit den genialen Gelehrten Sokrates, Platon und Aristoteles im 5. und 4. Jahrhundert v. Chr. namentliche Zuordnungen logischer Gesetzeserkenntnisse (im Rahmen ihres philosophischen Gesamtwerkes) in formalisierten Ansätzen bringt. Vielleicht ist sogar die allgemeinere Differenzierung erlaubt – nicht wenige Gelehrte äußern sich derart –, dass der höhere Abstraktionsgrad der Logik diese in der Antike im Niveau nicht an die Mathematik herankommen ließ.

Gemäß dem normalen menschlichen Vorgehen begann die Analyse der logischen Ausdrücke und Beziehungen bei den sprachlichen Einzelformen, den Termini und den sie verbindenden logischen Operatoren unter Beachtung der Modalitäten „notwendig", „möglich" und „unmöglich". Die summarische Sicht auf die Aussagen, die heute, tieferen Einsichten geschuldet, als Aussagenlogik durchweg den Anfang logischer Einführungen bildet, fehlte dagegen fast gänzlich. Die ersten systematischen Schritte waren demnach prädikatenlogisch orientiert, mussten jedoch wegen damals unlösbarer Schwierigkeiten begrenzt bleiben. Die aufgegriffenen Teilfragen fanden aber dank Aristoteles gleich eine meisterliche, akribische Bearbeitung, die ohne größere Veränderung über Jahrhunderte das Niveau der prädikatenlogischen Analysen bestimmte. Aristoteles' logische Analysen konzentrierten sich unter dem Sammelnamen „Syllogismus"[21] weitgehend auf drei Termi-

[21] Abgeleitet von „syllogismos" (= „Zusammenzählen", „Aufzählung"). Anscheinend ist es ein von Aristoteles geprägter Begriff zur Kennzeichnung der nachfolgend charakterisierten Schlüsse.

ni beliebiger Art und auf die drei logischen Operatoren „nicht", „für alle geltend" und „mindestens einmal geltend" in genau drei Aussagen, die er in verschiedenster Weise strukturell zergliederte und wieder neu zusammensetzte, womit er zwar wichtige logische Beziehungen aufdeckte, aber eben doch über Stückwerk nicht hinauskam. Als Beispiel sei der „ferio" genannte Syllogismus genommen, der einen Schluss von

> „Kein M ist P"

und

> „Mindestens ein S ist M"

auf

> „Mindestens ein S ist nicht P"

zulässt, wozu als Beispiel der Schluss von

> „Kein parabelförmiger Kegelschnitt ändert seine Krümmungsrichtung"

und

> „Es gibt mindestens ein Funktionsbild, das ein parabelförmiger Kegelschnitt ist"

auf

> „Es gibt mindestens ein Funktionsbild, das seine Krümmungsrichtung nicht ändert"

gehört, der sicher nicht weltbewegend schwierig ist, aber dennoch – wie die anderen auch – zumindest abstrakt in der Schule bei Gelegenheit geübt werden sollte, da erfahrungsgemäß die Schüler schon auf dieser einfachen Schwierigkeitsstufe Fehler begehen. Diese können selbst solch ein Beispiel betreffen, indem man fälschlich – unter Einbeziehung bekannter, aber gar nicht im Schluss enthaltener Kenntnisse – auf

> „Nicht alle Funktionsbilder ändern ihre Krümmungsrichtung nicht"

schließt, wodurch die Schlussmöglichkeit überschritten wird. Denn die zweite Prämisse eröffnet in Verbindung mit der ersten für die zu M, P und S gehörenden Elementemengen drei Varianten: M liegt immer außerhalb von P, aber S liegt in M oder schneidet sich mit M oder schneidet sich mit P und M, so dass möglicherweise alle S zu Nicht-P gehören. Es ist sehr fraglich, ob viele Schüler einer 9. bis 12. Klasse diese Variantenbildung vollständig meistern, so dass die aristotelischen Syllogismen, obwohl eingeengt auf drei Termini und drei Aussagen, gar nicht „ganz ohne" sind und auf keinen Fall im Unterricht übergangen werden dürften. Wir werden sie deshalb auch im vierten Kapitel in unsere Untersuchungen zur Prädikatenlogik einbeziehen.

Die aristotelische Syllogistik basiert auf der Grundannahme, die die alltägliche Sprache teilt und nach der das, worüber im *positiven Sinne* gesprochen oder geschrieben wird, in irgendeiner Form existent ist. Diese Grundannahme führt zu der logischen Regel, dass aus der Aussage „Alle S sind P" auf „Einige S sind P" geschlossen werden darf. Auch die Schüler folgen dieser Regel, doch die Schulmathematik käme in Schwierigkeiten. Denn mit Sicherheit erhalten die Schüler spätestens in der Abiturstufe Kenntnis von mathematischen Mengen, die leer sind, also null Elemente enthalten. Sie sehen aber Aussagen wie

> „Alle echten Brüche, die Quadratzahlen von ganzen Zahlen sind, werden mit Kleinbuchstaben beschrieben"

als sinnvolle sprachliche Äußerungen an, da sie erwarten, dass es solche Brüche gibt. Doch ist dies, wie bekannt, nicht der Fall. Der Schluss wäre falsch, so dass man überlegen sollte, ob das Schlussgerüst

> „Aus ‚Alle S sind P' folgt ‚Einige S sind P'"

in der modernen Mathematik bis hin zur Schulmathematik ungültig zu sein hätte.

Wenden wir uns der gegenteiligen „Schlussaufweichung" mit dem Schluss von „kein" auf „nicht alle" zu, so gilt bei leeren Mengen selbstverständlich ebenfalls das Verbot, derart zu schließen – wenn nichts da ist und die Grundmenge leer ist, ist eben dementsprechend alles da –, doch die Schlussbereitschaft der Schüler sinkt hier, anders gerichtet, vereinzelt selbst bei Schlüssen, in denen S und P per Definition stets belegt sind und die in der alltäglichen Rede meist als akzeptabel gelten, unter ihr Limit der Anerkennung. Es ist anscheinend das genaue Wissen der Schüler über bestimmte Zusammenhänge, das es z. B. nicht zulässt, dass der Schluss

> „Aus ‚Keine ungerade Zahl ist durch 2 teilbar' folgt ‚Nicht alle ungeraden Zahlen sind durch 2 teilbar'"

akzeptiert wird. Er wird als falsch verstanden – trotz Mathematik und anderweitiger Anerkennung durch die Umgangssprache.

Schon die Syllogistik hat es also in sich!

2.1.2 Die Charakteristika der Stoa

Noch zu Lebzeiten von Aristoteles oder kurz danach, wahrscheinlich in Auswirkung seiner prädikatenlogischer Erfolge, fanden die Philosophen schließlich auch Interesse an sprachwissenschaftlichen Versuchen, aussagenlogische Schlüsse systematisch zu erfassen, wobei gleich die hochkomplizierten Wenn-dann- und Oder-Aussagen im Mittelpunkt standen. Theophrastos, ein Meisterschüler von Aristoteles, könnte als erster sich damit zielgerichtet beschäftigt haben, doch dann griffen Philosophen wie Diodoros Kronos und Philon von Megara (beide um 300 v. Chr.), die einer benachbarten und unter dem Namen „Stoa"[22] berühmt gewordenen philosophischen Strömung angehörten, diese Gedanken – mit modaler Prägung und sogar zeitlogisch erweitert – auf, um u. a. umgangssprachlich als Basis einer quasisystematischen Logik fünf sogenannte hypothetische Syllogismen zu entwickeln:

[22] „Säulenhalle". In der „Stoa Poikile", einer großen Säulenhalle in Athen, begann am Ende des 4. Jahrhunderts v. Chr. eine Gruppe griechischer Philosophen mit Vorträgen über neuartige logische Fragen und benannte sich schließlich danach.

> Wenn A, dann B.
> Nun A.
> *Also:* B.
>
> Wenn A, dann B.
> Nun nicht B.
> *Also:* Nicht A.
>
> Entweder A oder B.
> Nun A (bzw. B).
> *Also:* Nicht B (bzw. nicht A).
>
> Entweder A oder B.
> Nun nicht A (bzw. nicht B).
> *Also:* B (bzw. A).
>
> Nicht: A und B.
> Doch A (bzw. B).
> *Also:* Nicht B (bzw. nicht A).

Ein Beispiel für den letzten Syllogismus wäre:

> Es gilt nicht, dass M (eine feste Größe) eine Wurzellösung ist und dass M ein echter Bruch ist.
> M ist ein echter Bruch (z. B. ⅔).
> *Also:* M ist keine Wurzellösung.

Wieder wird richtig sein, dass längst nicht jeder Schüler damit klarkommt, so dass auch die „stoischen" Schlüsse noch nicht zu vergessen sind. Dafür gibt es sogar einen tieferen Grund, denn uns ist die Diskussion zwischen Diodoros Kronos und Philon von Megara überliefert, wonach Philon die in den Syllogismen nicht näher erläuterten Wenn-dann-Aussagen, die aber, wie bekannt, hochgradig umstritten sind, einzig genau dann für falsch hielt, wenn sie mit Wahrem beginnen und mit Falschem enden, also für wahr, wenn irgendeine andere Wahrheitswertbeziehung vorhanden ist[23]. Wie wir noch sehen werden, ist dies ohne die geringsten Abstriche die Auffassung, die Boole und Frege Jahrhunderte später in ihren Kalkülen entwickelten und die heute zur logischen Basis der modernen Mathematik gehört.

Philons wichtigster Gegenspieler in der Stoa war offenbar Diodoros Kronos, der die alleinige wahrheitsfunktionale Bestimmung der Implikation ablehnte und gerade für das umgangssprachliche Verständnis „notwendig“ als Vorgängerbegriff einbaute: Bei wahrem Vorderglied reicht es nicht aus, nur den Wahrheitswert des Hintergliedes zu beachten. Für ihn ging es darum, dass die Implikation weder in Falschem enden konnte noch kann, also in sich mit einem „Muss“ verbunden ist[24]. Von diesem Standpunkt sind wir nicht weit entfernt, und er liegt uns viel näher als der von Philon. Schon das dritte Kapitel wird mehr dazu sagen.

2.2 Der lange Weg zu den logischen Kunstsprachen des 19. Jahrhunderts

Auch wenn Aristoteles und die Logiker der Stoa in ihren dreigegliederten Syllogismen symbolische Abkürzungen verwendeten, waren diese Logiken im Kern weiterhin der Umgangssprache verpflichtet und können noch nicht als kunstsprachliche Schöpfungen verstanden werden, weil sie hinsichtlich der Haupteigenschaften der logischen Operatoren, die letztlich eine Sprache charakterisieren und einordnen, bei der Umgangssprache verblieben. Der dadurch in beiden Syllogismus-Reihen entstandene Dualismus mit der Dopplung „symbolisch-verbal“ scheint aber sehr den damaligen wissenschaftlichen Bedürfnissen entsprochen zu haben, denn über Jahrhunderte lassen sich keine größeren Veränderungen innerhalb der Logik erkennen. Namhaft muss aber trotzdem der wohl größte Mathematiker der Antike, Archimedes (284–212 v. Chr.), hervorgehoben werden, der bald nach Aristoteles die zu sehr nebeneinander stehenden logischen und mathematischen Systeme in vielfältige Zusammenhänge brachte, die vor allem in der Schulmathematik bis heute Bedeutung besitzen. Vielleicht wäre es für das Verständnis des

23 Umfassender Günter Schenk: Zur Geschichte der logischen Form, Bd. 1: Einige Entwicklungstendenzen von der Antike bis zum Ausgang des Mittelalters, Berlin 1973, S. 225.

24 Dazu auch: J. M. Bocheński: Formale Logik, 2. erweiterte Aufl. (Orbis academicus, Bd. III,2), Freiburg i. Br./München 1956–1962, S. 135, Nr. 2008.

wissenschaftlichen Fortschritts sogar günstiger, Aristoteles, die Stoa und Archimedes in Einheit zu sehen und diese schöpferische Periode von der nachfolgenden abzugrenzen, die, gemessen an unserem Untersuchungsgegenstand, weitgehend durch Stagnation geprägt war. Claudius Galen (um 1130–1200 n. Chr.) dürfte als Ausnahme zu erwähnen sein, der an den beiden Logiken zwar auch nicht gerade rüttelte, doch sich in einer berühmt gewordenen Einführung in die Logik für Mediziner erstmals nach Archimedes wieder um deutlichere Mathematisierungen ihrer Strukturen bemühte. Er behandelte alle Syllogismen gleichberechtigt, obwohl das Interesse an der Stoa schon im Sinken begriffen war, vielleicht in Auswirkung der logischen „Empfindung", dass einige der hypothetischen Syllogismen Selbstverständlichkeiten seien. Dieser Prozess setzte sich in den folgenden Jahrhunderten fort, während die aristotelische Logik im 12. und 13. Jahrhundert unter dem Einfluss der Araber sogar noch einmal einen Aufschwung erfuhr. Diese förderten als neue historische Kraft maßgeblich diese Logik, allerdings ohne hier selbst schöpferische Leistungen einzubringen – ganz im Unterschied zur Mathematik, wo sie herausragende neue Erkenntnisse erzielten. Dadurch trugen sie aber nicht wenig dazu bei, dass im Laufe des Mittelalters der geistige Abstand zwischen Mathematik und Logik erheblich anwuchs, auch wenn z. B. Pierre Abaelard (Petrus Abaelardus, 1079–1142) – er eventuell mit den bedeutsamsten Beiträgen – die Erhöhung des Gewichts logischer Beweisführung für die Überzeugungskraft der scholastischen Ideen immer wieder herausstrich. Inhaltlich ging er im Prinzip über die aristotelische Logik nicht hinaus, und die umgangssprachlichen logischen Operatoren blieben tonangebend. Auf der anderen Seite schliefen auch die europäischen Mathematiker nicht und hielten mitunter wie der Pisaner Fibonacci (um 1180–1241) mit ihren Ergebnissen den Anschluss an die arabischen Gelehrten. Die beste Zeit für eine Spitzenstellung der Logik war es nicht.

Als Hauptgrund für diese Situation möchten wir heute die fehlende Formalisierung der logischen Operatoren sehen, in der man nicht vorankam. Galen war eine „Eintagsfliege", und selbst ein Allround-Gelehrter internationaler Größe wie Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716), der offenbar diesen Kern des „Übels" erkannt hatte, wurde von seinen Mitgelehrten darin nicht für voll genommen. Ja, mit der Begründung der Differential- und Integralrechnung trug er wie Isaac Newton sogar in hohem Maße dazu bei, dass die aristotelische Logik und die sowieso bereits vernachlässigten stoischen Syllogismen diese nun noch schwierigeren mathematischen Probleme überhaupt nicht mehr folgerichtig in den Griff bekamen.

Um so höher muss deshalb anerkannt werden, dass auch nach Leibniz und Newton dank der Leistungen solch genialer Wissenschaftler wie Leonhard Euler, Carl Friedrich Gauß, Évariste Galois, Bernhard Riemann und anderer weiterhin hervorragende mathematische Ergebnisse erzielt wurden, obwohl im Grunde dafür eine hinreichend ausgearbeitete logische Basis vonnöten gewesen wäre. Mit eigenen, letztlich intuitiv und ad hoc entwickelten logischen Kombinationen gingen diese Gelehrten weit über Aristoteles und die Stoa hinaus, doch ist ihre Logik ziemlich stilles wissenschaftliches Heldentum geblieben. Denn in der Literatur verlautet fast nichts darüber, und selbst die Akteure reflektierten kaum ihr logisches Tun. So befand schon 1958 Wilhelm Ackermann, „dass vor Frege und Peano niemand eine restlose Analyse der in der Mathematik verwendeten Schlussweisen vorgenommen hat“[25], woran sich meines Wissens bisher nicht viel geändert hat: Wir wissen weiterhin nicht genau, auf welchen logischen Wegen diese Großen zu ihren mathematischen Ergebnissen gelangt sind.

Auch für unser Anliegen ist die Unkenntnis der damaligen logischen Praxis ein nicht geringes Manko, denn die anspruchsvolleren Bereiche der Schulmathematik entstanden vornehmlich in diesen Jahrhunderten, und es darf hinzugefügt werden, dass ungefähr zeitgleich mit Frege die Schulmathematik so gut wie vollständig vorlag, nachdem „quasi in letzter Minute“ Hermann Günther Grassmann (1808–1877) die Vektorrechnung begründet hatte[26]. Ein wenig überspitzt lässt sich deshalb sagen, dass der wissenschaftliche Gehalt der Schulmathematik vor 1850 unter Nutzung der in der Antike entwickelten Syllogismussysteme vor allem intuitiv-logisch mit immer noch nicht hinreichend explizierten Methoden begründet wurde.

Wenn man so will, kann man von einem kleinen (Zwischen)-Abschluss sprechen, denn die Spitzenforschung der Mathematik hatte, obwohl dies viele

[25] David Hilbert/Wilhelm Ackermann: Grundzüge der theoretischen Logik, 6. Aufl., Berlin/Heidelberg/New York 1972, S. 66. Die 6. Aufl. ist ein Nachdruck der 4. Aufl. von 1958, die W. Ackermann nach dem Tod von D. Hilbert allein anfertigte und leicht abänderte. Daher abgekürzt fortan: Ackermann, Theoretische Logik.

[26] Die Schulmathematik erfuhr über die 2. Hälfte des 19. Jahrhunderts hinaus keine namhafte inhaltliche Erweiterung mehr. Die mengentheoretischen Versuche des 20. Jahrhunderts, die vielleicht als Gegenargument genannt werden, können m. E. als gescheitert bezeichnet werden; außer auch umgangssprachlich fassbaren Selbstverständlichkeiten wurde die Mengenlehre wieder aus dem Unterricht ausgeklammert.

Fachleute nicht sahen, ihre logischen Möglichkeiten ausgeschöpft und brauchte neue Anregungen. Daneben war auch vom Unendlichkeitsbegriff der Zahlentheorie her in der Mathematik Bedarf gegeben. Das Erfordernis einer Lösung zeichnete sich dringend ab.

1847 veröffentlichte der Engländer George Boole (1815–1864) seine Schrift „Mathematical Analysis of Logic“[27] und leitete damit den Aufstieg der Logik auf eine höhere Stufe ein. Vorbild waren für ihn die algebraisch-arithmetischen Strukturen, die er in einer Mischung aus Aussagenalgebra und elementaren klassenlogischen Mengenbeziehungen allein mit Wahr-falsch-Beziehungen nachzubilden suchte[28]. 1854 erschien sein Hauptwerk „An Investigation of the laws of Thought, on which are Founded the Mathematical Theories of Logic and Probabilities“, in dem er sein oberstes Ziel, die Anpassung der zugehörigen logischen Operatoren an die der Mathematik, d. h. die Arithmetisierung der Logik, zu verwirklichen suchte.

Die Unendlichkeitsfrage war die andere Schwachstelle. Sie veranlasste Georg Cantor (1845–1918) seit Anfang der 1870er Jahre, den Zahlbegriff auf den Mengenbegriff zurückzuführen, mithin die damalige Mathematik in seine neue Mengenlehre einzugliedern, wodurch es ihm als seine Haupterkenntnis möglich wurde, Unterschiede in den Unendlichkeiten festzustellen, die auch die Zahlen der Schulmathematik berührten. Es zeigte sich gegen den sog. „gesunden Menschenverstand“, dass eine und dieselbe Unendlichkeitsstufe von den natürlichen Zahlen bis zu den algebraischen Zahlen wie „√2“ unter Einschluss aller Bruchzahlen reicht, dass aber die reellen Zahlen, die nicht selten die Grundmenge bei Schülerübungen bilden, zu einer höheren Unendlichkeitsstufe gehören. Noch verwunderlicher war dann gewiss, dass zum einen diese „Erhöhung“ den transzendenten Zahlen geschuldet ist, von denen die Schüler ausführlich nur das trigonometrische π und das exponentiale ε näher kennenlernen, und dass zum anderen die Menge der Zahlen zwischen „0“ und „1“ in der Unendlichkeit ihrer Elemente mit der Menge aller reellen Zahlen auf einer Stufe steht. In Negierung der Wertung „Paradoxie“ war für G. Cantor eine Erklärung dieser Erscheinungen möglich: Unendliche Mengen haben

[27] Dazu Karel Berka/Lothar Kreiser: Logik-Texte. Kommentierte Auswahl zur Geschichte der modernen Logik, Berlin 1971, S. 10–15.

[28] Die erstere Seite werden wir nachfolgend bei G. Frege etwas näher in Augenschein nehmen.

gegenüber endlichen Mengen neben gemeinsamen Eigenschaften eigenständige, nur zu ihnen gehörende Eigenschaften, die bis dato nicht untersucht waren und daher fremd erschienen. Beide gelte es in Zukunft zu bearbeiten, womit er ausdrückte, dass für die Mathematik eine die erweiterten Zahlen- und Mengeneigenschaften zu berücksichtigende Untersuchungsbasis neu zu schaffen sei.

Wieder einige Jahre später, 1879, meldete sich mit Gottlob Frege erneut ein Logiker mit einer umwerfenden Idee zu Wort, indem er vorschlug, die gesamte Mathematik einer von ihm konstruierten Logik unterzuordnen bzw. sie darin einzugliedern, also im Unterschied zu Boole nicht die Logik zu mathematisieren, sondern die Mathematik zu logifizieren. Das somit sichtbar werdende Prä einer anscheinend künstlich geschaffenen Logik musste jedoch über die Mathematiker hinaus allen umgangssprachlich denkenden Menschen erläutert werden, und so findet sich in seiner Erstinformation von 1879 unter dem Titel „Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens“[29] ein schönes Gleichnis, in dem er sein wissenschaftliches Ziel verständlich darzulegen suchte: „Das Verhältnis meiner Begriffsschrift zu der Sprache des Lebens glaube ich am deutlichsten machen zu können, wenn ich es mit dem des Mikroskops zum Auge vergleiche. Das Letztere hat durch den Umfang seiner Anwendbarkeit, durch die Beweglichkeit, mit der es sich den verschiedensten Umständen anzuschmiegen weiss, eine große Ueberlegenheit vor dem Mikroskop. […] Sobald aber wissenschaftliche Zwecke grosse Anforderungen an die Schärfe der Unterscheidung stellen, zeigt sich das Auge als ungenügend“[30]. Es ging ihm demnach von Anfang an um die Veredlung der menschlichen Sprachpraxis unter Einschluss der Sprache der Mathematiker, die sich bis dahin über die Formeln hinaus nicht von der Logik der Umgangssprache gelöst hatten. Offenbar wollte er keine neue Logik im strengen Sinne, und so betonte er deshalb im selben Buch einige Seiten weiter noch einmal die enge Beziehung zu den Kernwörtern der alltäglichen Logik: „Es möchte ferner der Nachweis des Zusammenhanges zwischen den Bedeutungen der Wörter: wenn, und, nicht, oder, es gibt, einige, alle u. s. w. Beachtung verdienen“[31].

---

[29] Die rd. 100seitige Schrift erschien 1879 in Halle (Saale). Von den nachfolgenden Arbeiten sind wohl die „Grundgesetze der Arithmetik“ (2 Bde., Jena 1893 und 1903) am bedeutsamsten.

[30] Zitiert nach Berka/Kreiser: Logik-Texte, S. 49.

[31] Berka/Kreiser, Logik-Texte, S. 51. Frege verwendet „zwischen“, denkt aber an den Zusammenhang seiner Logik *mit* den nachstehenden Operatoren.

Wie die gerade zitierten Ausdrücke „einige", „alle" schon erkennen lassen, erfasste Frege im Unterschied zu Boole nicht nur die Aussagenlogik, sondern auch die Grundform der Prädikatenlogik, so dass erstmals ein vollständig konstruiertes logisches Gesamtgerüst geboten wurde.

Den Bedürfnissen der mathematischen Forschung entsprachen seitdem vor allem die von Frege eingeführten Neuerungen gegenüber denen von Boole, auch wenn das vor 20/30 Jahren entstandene Internet vor allem an Booles Idee von der mathematischen Fundierung logischer Aussagensstrukturen anknüpft. Für die von uns angestrebte logische Vertiefung der Schulmathematik wird es sich als ebenso günstig erweisen, die Hauptelemente des fregeschen Kalküls hier etwas gründlicher darzustellen. Die logische Breite im Herangehen Freges deckt, von einigen Randergänzungen abgesehen, hinreichend unser Anliegen ab. Die Zweiwertigkeit seiner Logik, d. h. die alleinige Berücksichtigung der Wahrheitswerte „wahr" und „falsch", wurde schon mehrfach genannt, und sie bildet auch die Begrenzung, auf der alle unseren folgenden Festlegungen und Feststellungen beruhen, in der Summierung selbstverständlich in deutlich von Freges System verschiedener Form.

Die erste und wichtigste Besonderheit seines Systems ist der wahrheitsfunktionale Aufbau, den er als „Formelsprache des reinen Denkens" verstand und der aussagenlogisch klar definiert wird, um sich von daher bestimmend auf die Prädikatenlogik auszuwirken. Dieser Aufbau benötigt vor allem so unmissverständlich wie möglich definierte logische Operatoren, die aber nicht frei erfunden werden können, sondern irgendwie an die Umgangssprache anknüpfen müssen. Frege wählte als sprachliche Basis gemäß seiner Absicht die anscheinend unkompliziertesten *umgangssprachlichen* Ausdrücke „nicht", „und", „oder/und", „für alle gilt" und „mindestens einmal gilt", so dass die noch fehlenden Operatoren mit deren Hilfe zu definieren waren. Zunächst galt es aber, für die ersten drei „Ur"-Operatoren ein Definitionsschema zu finden, in dem jeder Kombination von „wahr (w)" und „falsch (nicht wahr) (f)" *genau einer* dieser beiden Wahrheitswerte in folgender Weise zugeordnet ist, wobei wir, wie in der Einleitung dargelegt, als Namen für die neuen Operatoren die lateinischen Übersetzungen der deutschen Ausdrücke verwenden wollen[32].

[32] Berka-Kreiser, Logik-Texte, S. 51. Vgl. den ersten kurzen Hinweis in der Einleitung. Frege geht hier etwas umständlich vor und koppelt die Ur-Operatoren sowie „wenn-dann" aus. Wir haben die Stelle etwas gestrafft und vereinfacht.

Entsprechung für „nicht A“: non A
„non A“ ist wahr, „A“ ist nicht wahr (falsch).
„non A“ ist nicht wahr (falsch), „A“ ist wahr.

Entsprechung für „A und B“: A et B
„A et B“ ist wahr: „A“ ist wahr, und „B“ ist wahr.
„A et B“ ist falsch: („A“ ist wahr und „B“ ist nicht wahr (falsch)) oder („A“ ist nicht wahr
(falsch), und „B“ ist wahr) oder („A“ ist nicht wahr (falsch), und „B“ ist nicht wahr (falsch)).

Entsprechung für „A oder/und B“: A vel B
„A vel B“ ist wahr: („A“ ist wahr, und „B“ ist wahr) oder („A“ ist wahr, und „B“ ist nicht wahr
(falsch)) oder („A“ ist nicht wahr (falsch), und „B“ ist wahr).
„A vel B“ ist falsch: „A“ ist nicht wahr (falsch), und „B“ ist nicht wahr (falsch).

Analog ist dann das Vorgehen bei den noch fehlenden aussagenlogischen Operatoren

„entweder-oder“	(A aut B),
„wenn-dann“	(A seq B),
„genau dann-wenn“	(A äq B).

Übertragen in eine Wahrheitsmatrix mit den üblichen Symbolen für Aussagen, entsteht das folgende Standardschema:

A	B	non A	A et B	A vel B	A aut B	A seq B	A äq B
w	w	f	w	w	f	w	w
w	f	-	f	w	w	f	f
f	w	w	f	w	w	w	f
f	f	-	f	f	f	w	w

Noch einmal sei eingeschaltet, dass Frege mit diesen „veredelnden“ Definitionen die umgangssprachlichen Namen „nicht“, „und“ usw. in seinen Kalkül übernahm, dass wir dagegen viel vorsichtiger in den „veredelten“ Operatoren nur die Analogien von „nicht“ usw. sehen, diese selbst aber als längst noch nicht hinreichend bestimmt.

Frege hat diese direkte Bestimmung, wie schon gesagt, für die drei ersten etwas umständlich vorgenommen und die anderen als sinnvolle Abkürzungen für einige kompliziertere „Ur“-Definitionen aufgefasst, die sich in sprachlich nicht ungünstiger Form anboten:

A aut B: (A vel B) et non (A et B),
A seq B: non (A et non B) / non A vel B,
A äq B: non (A aut B) (von dort weiter zu „non“, „et“, „vel“).

In den heutigen Kalkülen wird meist neben „non“ nur „seq“ verwendet, so dass entgegen dem historischen Werdegang „et“ und „vel“ von „seq“ aus definiert werden, was sich wegen der Äquivalenzbeziehung zwischen den aufgeführten Ausdrücken leicht bewerkstelligen lässt:

A et B: non (A seq non B),
A vel B: non (A seq B).

Darauf bauen nun die ausgewählten aussagenlogischen Axiome auf und darauf schließlich auch die zugehörigen Schlussregeln, die sich auf molekulare Aussagen beschränken. Zwei davon sind in unserem Verständnis grundlegend:

- die Abtrennungsregel und
- die Einsetzungsregel,

während alle weiteren möglichen Schlussregeln davon abgeleitet werden können.

Die Abtrennungsregel beinhaltet den sprachlichen Übergang von „(A seq B) et A“ zu B“, und die Einsetzungsregel ermöglicht, in allgemeingültigen Aussagen (in deren Matrix nur „w“ erscheint“) wie „A vel non A“ beliebig Aussagen auszutauschen: „A et B“ für „A“ ergibt „(A et B) vel non (A et B)“, und auch diese Aussage ist allgemeingültig.

Soweit wichtige Informationen zur Aussagenlogik Freges. Daran schließt sich die Prädikatenlogik an, die, wie bereits betont, erstmals von Frege einen systematischen Grundaufbau erhielt, die die Aussagenlogik als neuen Logikstrang zu einer nunmehr allseitig zu verwendenden Wissenschaftsmethode ergänzt und in ihrer Bedeutung kaum überschätzt werden kann. Sie gliedert gemäß den Ausführungen im ersten Kapitel auch Einzelaussagen auf: in Termini, die als Subjekte/Elemente für Prädikate fungieren; in Termini, die für die Merkmale der Prädikate stehen; und in logische Operatoren, zu denen über die in der Aussagenlogik benutzten Operatoren hinaus noch „für alle gilt“ und „mindestens einmal gilt“ treten. Als Schreibweise verwenden wir für die Subjekte „x“, „y“ usw. oder „x_1“, „x_2“ usw.; für die Prädikate „P“, „Q“ usw. oder „P_1“, „P_2“; für deren funktionale Verbindung[33] mit den Subjekten z. B. „P(x)“; für den Alloperator „∀“ und für den Existentialoperator „ ∃ “, demnach „∀(x)P(x)“ für die Aussage „Für alle x gilt: x hat das Merkmal P“. Die letzteren Operatoren werden bei Frege konsequenter als in den aristotelischen Syllogismen behandelt, wozu vor allem die erörterte Eigenart gehört, dass „alle“ nicht einschließt, dass überhaupt etwas da ist: „Für alle x gilt“ klammert die mathematisch überaus bedeutsame Nullmenge nicht aus und verweigert den Schluss auf „Es gibt mindestens ein x“. Für die Schulmathematik ist diese Konsequenz, worauf ja schon eingegangen wurde, hochgradig problematisch, und es wird noch zu beraten sein, ob die Schulmathematik logisch besser Aristoteles oder Frege folgt oder sich ganz anders entscheiden soll. Wie dem aber auch sei: Die recht komplizierte Prädikatenlogik bringt andererseits nur eine dritte Basisschlussregel hinzu, den Schluss von freien auf gebundene Variablen mittels des Alloperators, wonach es gestattet ist, in einer stets wahren Formel für einige oder alle Variable den Alloperator zu verwenden, bevor die Gesamtformel mit diesen Variablen den Alloperator erhält. So darf

„(f(x) seq g(x)) vel (f(x) et non g(x))“

als wahre Formel umgewandelt werden zu

„(∀(x)f(x) seq ∀(x)(g(x)) vel (f(x) et non g(x)))“,

33 Sie besitzt Prädikatcharakter.

ohne dass die neue Gesamtformel einen Operator besitzt.

Soweit zur Kennzeichnung des Fregeschen Kalküls. Frege hatte 1879 noch kein geschlossenes System seiner Ideen vorgelegt, sondern mehr in Gestalt recht allseitiger Andeutungen Auskunft darüber gegeben. Erst 1893 erschien dann der erste Band seines Hauptwerkes „Grundgesetze der Arithmetik", in dem er die zentralen Gedanken seiner neuen Auffassung in axiomatischer Formalisierung veröffentlichte. Diese Methode war seit der Antike bekannt und besonders von Aristoteles, Euklid und Archimedes meisterhaft angewandt worden, ohne dass sie allerdings eine in sich stimmige Gesamttheorie der Axiomatik hinterließen. Danach blieb es um die zugehörigen Fragen über Jahrhunderte recht ruhig, bis im Zusammenhang mit den bedeutenden abstrakten methodologischen Änderungen durch Boole, Cantor und Frege in der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts auch in ihre Erforschung Bewegung kam, die bereits 1899 mit dem von David Hilbert (1862–1943) verfassten Standardwerk „Grundlagen der Geometrie" einen Höhepunkt erreichte. Damit war innerhalb von gut 50 Jahren für die beiden Spitzenwissenschaften Mathematik und Logik eine völlig neue Grundlage als ein zunächst theoretisches Angebot entstanden, das wir den vier großen Wissenschaftlern Boole, Cantor, Frege und Hilbert verdanken. Denn sie fand schließlich über holprige Wege ihre Anerkennung, so dass es kaum noch möglich sein wird, dass überhaupt irgendein neuer wissenschaftlicher Gedanke daran vorbeigeht.

2.3 Die direkten Auswirkungen der axiomatisch konstruierten logisch-mathematischen Kalküle auf die anderweitigen wissenschaftlichen Auffassungen

2.3.1 Neuansätze in der Sprachlogik der Mathematik

Die neuen Ideen hatten es schwer. Allein die axiomatische Methode erreichte dank des 1899 von D. Hilbert vollendeten genialen Beispiels der Neuformulierung der euklidischen Geometrie schnell verbreitete Zustimmung, und sie begleitet bis heute an führender Stelle die logisch-mathematischen Fortschritte. Unwidersprochen blieb sie jedoch nicht. Ihre unvermeidliche Umständlichkeit war besonders unter den Philosophen wenig beliebt, und so wurde dort die Axiomatik kaum gepflegt. Auch Mathematiker hatten mitunter ihre Schwierigkeiten, so dass Bestrebungen nach einer bequemeren direkteren Methode erkennbar wurden, die man vor allem von den Philosophen erwartete. Doch die Philosophie lieferte nichts und überließ die Lösung den Mathematikern, die wohl wegen ihrer Erfahrungen mit den Vorzügen und Mängeln der Axiomatik schließlich in der Lage waren, mit dem sogenannten „natürlichen Schließen“ einen verständlicheren Weg anzubieten. Wie im vorigen Kapitel ausgewiesen, handelt es sich dabei um einen regellogischen Aufbau, in dem einige Grundregeln ohne Beweis akzeptiert werden und mit deren Hilfe dann alle anderen gültigen Regeln zu gewinnen sind. Die ersten Systeme dieser Art entstanden 1934 fast gleichzeitig und unabhängig voneinander dank der Untersuchungen von Gerhard Gentzen[34] und Stanisław Jaśowski[35], deren Gedanken nicht zuletzt in philosophischen Untersuchungen beachtlichen Zuspruch fanden.

Die anderen Vordenker wurden dagegen über Gebühr mehrheitlich von den Logikern und Mathematikern zunächst abgelehnt. Ein wichtiger Grund für diese eigentlich seltsame Reaktion – denn neue Gedanken wurden ja gebraucht – dürfte der in der Menschheitsgeschichte immer wiederkehrende skeptische Grundsatz „Veränderungen ja, doch nie/nicht so!“ gewesen sein, da zu viele ungewohnte Sprachbeziehungen und obendrein angeblich auch Unlogik angeboten wurden. Die meisten Mathematiker und Logiker blieben deshalb vorerst bei ihren traditionellen Methoden. Einige wenige stellten aber die üblichen und die neuen Grundauffassungen in Frage, so dass das logisch-mathematische Bild nunmehr bunter erschien.

Als ersten traf es Boole, obwohl bedeutende Gelehrte wie Charles Sanders Peirce (1839–1914) sowie Ernst Schröder (1841–1902) ihn anerkannten und Guiseppe Peano (1858–1939), der 1889 das erste Axiomensystems für natürliche Zahlen veröffentlichte, ansatzweise auf seine Grundgedanken zurückgriff. Die große Mehrheit der Mathematiker ging nicht mit, und so macht es heute zufrieden, dass das Internet seit den 1990er Jahren dem booleschen Kalkül mit dem Ziel einer tieferen Mathematisierung logischer Verknüpfungen eine späte Rechtfertigung gibt.

34 Untersuchungen über das logische Schließen I–II, in: Mathematische Zeitschrift 39 (1934/35), S. 176–210 und 405–431.

35 On the Rules of Suppositions in Formal Logic, in: Studia Logica, Bd. 1, S. 5–32.

Bei Cantor, dessen Ideen stärker direkt auf die Mathematik ausgerichtet waren, ließ die allgemeine Anerkennung nicht so lange auf sich warten, doch gerade er brauchte sie noch schneller und starb wegen seiner ungerechten Verkennung schließlich 1918 nach jahrelangem Leiden als gebrochener Mensch. Er wird deshalb wohl nicht mitbekommen haben, dass seine Ideen 1908 einen Durchbruch erzielt hatten: Ernst Zermelo (1871–1953) legte umgangssprachlich ein Axiomensystem vor, das erstmalig die Grundpositionen Cantors vollständig enthielt und in das er das Axiomensystem Peanos für natürliche Zahlen als Teilmenge einzuordnen vermochte, so dass wegen der Folgewirkungen dieses Systems der Einbau der reellen und komplexen Zahlen in die Mengenlehre damit vollendet war. Zermelos Axiomatik erwies sich gegenüber der der Mathematik als breiter angelegt und wurde in der Folgezeit nach modifizierenden Verbesserungen rasch zunehmend zur Hauptbasis mathematischer Forschung.

Frege, der Dritte im Bunde, wäre sogar fast ganz gescheitert. Noch 1906, 27 Jahre nach seiner „Begriffsschrift", beschwerte er sich bitter darüber: „Es sind nun fast 28 Jahre her, seit ich diese Erklärung [gemeint sind seine neuen Grundgedanken, H. A.] ausgesprochen habe. Damals glaubte ich, ich brauchte nur anzutippen, und die andern wüssten bald mehr als ich. Und jetzt, nachdem mehr als ein Vierteljahrhundert vergangen ist, hat die große Mehrzahl der Mathematiker keine Ahnung von der Sache, und ebenso wird es bei den Logikern sein. […] Dass es zunächst befremdlich ist, glaube ich gern, aber wenn es das nicht wäre, wäre es längst gefunden. Muss man sich denn durch den ersten flüchtigen Eindruck bestimmen lassen? Hat man gar keine Zeit, darüber nachzusinnen? […] Man vermisst wahrscheinlich eine innere Verbindung zwischen den Gedanken; es will nicht recht einleuchten, dass von dem Gedanken nur in Betracht kommen soll, ob er wahr oder falsch ist, gar nicht eigentlich der Gedankeninhalt selbst."[36].

Zum Glück erkannte schließlich doch einer der ganz großen Denker, Bertrand Russell (1872–1970), den Kern des Fregeschen Anliegens, der bis heute und darüber hinaus in der maximalen Formalisierung logischer Strukturen bei der Gewinnung neuer wissenschaftlicher Erkenntnisse besteht. Im ersten Band der

[36] Gottlob Frege: Schriften zur Logik. Aus dem Nachlass (Philosophische Studientexte), Berlin 1973, S. 77.

berühmten „Principia Mathematica" von 1910 legte er mit leichten Modifizierungen[37] Freges Kalkül dar und wandte ihn zusammen mit Alfred North Whitehead in den übrigen Abschnitten der bis 1913 vollständig erschienenen drei Bände souverän an, so dass sich dieser Kalkül mehr und mehr in der Mathematik durchsetzte und inzwischen mit Abstand die logische Hauptbasis der gegenwärtigen Mathematik ist[38].

Auf dem Wege dahin mussten jedoch auch Unstimmigkeiten zwischen den beiden Erneuerungslinien, der logischen und der mathematischen, ausgeräumt werden, denn die Protagonisten waren nicht einer Meinung und griffen sich in verschiedenen Fragen gegenseitig an. Symbolisch für die zukünftige prinzipielle Gemeinsamkeit im weiteren wissenschaftlichen Fortschreiten war in meinem Verständnis dann 1929 die prädikatenlogische Fassung der 1908 von Zermelo begründeten mengentheoretischen Axiome durch Thoralf Skolem in seinem Aufsatz „Über einige Grundlagenfragen der Mathematik"[39], woraus – in meiner Interpretation – bezüglich der Abstraktionsstufe die Gleichwertigkeit der Mengenlehre Cantors mit dem Logikkalkül Freges folgte, so dass die konkreteren „rein" mathematischen Kalküle seitdem davon abgehoben werden können.

Diese neu erkannte Beziehung ist zumindest für die „gewöhnliche" zweiwertige logisch-mathematische Wissenschaftsdisziplin gültig, wurde aber nie so verstanden, dass nunmehr erkenntnismäßig alles abgeschlossen sei. Schon zwei Jahre später konnte 1931 Kurt Gödel (1906–1978) nachweisen, dass die Menge aller wahren arithmetischen Sätze nicht axiomatisierbar ist, und Alonzo Church (1903–1995) zeigte 1936 sogar auf[40], dass es keine geschlossene Entscheidungsprozedur für prädikatenlogische Folgerungen gibt. Die einstigen Traumvorstellungen von Cantor

---

37 Er hatte am 16.6.1902 in einem berühmten Brief an Frege die wissenschaftlichen Grenzen von dessen Ansprüchen aufgezeigt und ihm damit den ersten großen Schlag versetzt, Doch er „schüttete das Kind nicht mit dem Bade aus" – wie viele andere es taten – und blieb „Fregianer", wie in den „Principia" sichtbar wird. Sein Brief traf übrigens neben Frege auch Cantor, der sich im Unterschied zu diesem nicht öffentlich dazu äußerte, obwohl er zu Modifizierungen gezwungen war.

38 Damit ist das Werk in seiner logisch sauberen Vorgehensweise gemeint und von Russells „Typentheorie" unterschieden, die einige Einseitigkeiten besitzt.

39 In: Matematisk-naturvidenskapelig klasse 7 (1929), S. 1–49.

40 A Note on the Entscheidungsproblem, in: Journal of Symbolic Logic 1 (1936), Nr. 1, S. 40 f.

und Frege, die Mathematik in eine und nur eine vorgegebene Methodologie einzubinden, waren damit endgültig überholt.

Die geschilderten „Reibungsverlust“, mit denen die führenden Vertreter dieser logisch-mathematischen „Hauptlinie“ zu kämpfen hatten, erwuchsen nicht zuletzt aus den in der Umbruchzeit nach 1850 entstandenen Gegenauffassungen. Um Einfluss auf die gleiche Personengruppe mit anderweitigen Argumenten bemüht, erzielten sie substantielle Wirkungen, zu denen noch nichts namentlich genannt ist. Wir beschränken uns dabei mit dem Intuitionismus auf die damalige Hauptrichtung dieser etwas „abseitigen“ Denklehren, ohne eine Gesamtcharakteristik oder selbst eine Namensinterpretation zu wagen. Der Name stammt von Luitzen E. J. Brouwer (1881–1966), der 1907 in der beschriebenen Unendlichkeitsfrage Cantor massiv angriff und seine Konzeption in den 1920er Jahren auch auf etliche Grundsätze der Fregeschen Logik ausdehnte[41]. Arend Heyting (1898–1980) rundete dann 1930 den Intuitionismus erstmals axiomatisch ab[42] und verhalf ihm dadurch zu erhöhtem Ansehen. Für mathematische Diskussionen unter Schülern könnte die Ablehnung der unbedingten Gültigkeit des Zweiwertigkeitsprinzips wegen der intelligenten Begründung wichtig sein, und nur darauf wollen wir deshalb etwas näher eingehen. Der Intuitionismus macht die Anerkennung der Aussage „p oder nicht p“, des berühmten Satzes vom ausgeschlossenen Dritten, davon abhängig, dass eine der beiden Aussagen beweisbar ist. Sofern das nicht gelingt, kann oder muss etwas Drittes wahr sein, womit ein Schluss etabliert ist, der sicher auch für Gymnasiasten diskussionswürdig ist.

Damit wäre in den Grundzügen das neue logisch-mathematische Gesamtbild skizziert, wie es ungefähr in der Mitte des 20. Jahrhunderts zum Abschluss einer hundertjährigen Veränderungswelle erreicht war. In abstrakter Verallgemeinerung dürften als struktureller Hauptextrakt aller vorgelegten Systeme – und so ist es geblieben – die folgenden Parameter genannt werden, obwohl in nicht wenigen globalen mathematischen Darstellungen der logische Aspekt nicht deutlich erkennbar ist oder sogar gänzlich fehlt:

---

41 Grundlegend: Intuitionistische Zerlegung mathematischer Grundbegriffe, in: Jahresbericht der Deutschen Mathematikervereinigung, Leipzig/Berlin/Stuttgart, Bd. 33 (1924).

42 Die formalen Regeln der intuitionistischen Logik (Sitzungsberichte der preußischen Akademie der Wissenschaften, Physikalisch-mathematische Klasse), Berlin 1930.

- Syntax und Semantik der Zeichen,
- mathematische Axiome (in wechselnder Auswahl),
- logische Axiome (in wechselnder Auswahl),
- logisch-mathematische Schlussregeln.

Daran werden auch wir uns sinngemäß analog halten.

2.3.2 Erste Versuche einer Abgrenzung zwischen den beiden Sprachsystemen

Leider bleibt immer wieder unbetont, dass die Reformen von Boole und Frege sowie deren schließliche Anerkennung die Sprachsituation quasi in allen Ländern der Erde verkompliziert haben: Die beiden Logiker schufen die Basis für noch nie dagewesene Kunstsprachen, die von da an neben den Umgangssprachen existierten und besonders von der mathematisch-naturwissenschaftlichen Elite eines jeden Volkes genutzt wurden. Ihr Unterschied zu den „Volks"-Sprachen entpuppte sich bald als so groß, dass immense Schwierigkeiten entstanden, sprachlich verständlich von dem einen Sprachsystem zum anderen zu kommen. Dies wurde schon bald nach Etablierung der Kunstsprachen erkannt und führte zu intensiven wissenschaftlichen Diskussionen bis hin zu den Philosophen, die nunmehr über Aristoteles und die Stoa hinaus nach Kenntnisnahme der Kalküle Booles und Freges die logischen Beziehungen umfassender verfolgten, so dass dort intensiver an der Entschlüsselung der zahlreichen Bedeutungsvarianten in den logischen Operatoren der Umgangssprache gearbeitet wurde. Es zeigte sich aber bald, dass der Operator „wenn-dann" über Gebühr auf Kosten der übrigen Operatoren das logische Interesse auf sich zog, veranlasst durch erweiterte Interpretationen seiner wahrheitsfunktionalen Beziehungen. Hier trafen sich die Überlegungen, die von mathematischer und philosophischer Seite geäußert wurden. Denn nicht wenige Vertreter beider Wissenschaften erklärten jetzt eine Aussage wie

> „Wenn Wasser aus Stein ist, dann neigt es zur Explosion"

für wahr, woran Frege wegen seines unglücklichen Dualismus einer beschränkten Sicht auf die logische Bewältigung der Mathematik und absolut allgemein gewählter Definitionen für logische Operatoren nicht ganz unschuldig war. Übersehen hatte er solche Konsequenzen aber nicht, denn gleich in der „Begriffsschrift" 1879 heißt es, dass Sätze ohne vernünftige Verknüpfung nicht geäußert werden können[43]. Das war im Grunde allerdings nicht sein Recht und resultierte daraus, dass die Umgangssprache nicht seine Welt war. Besser und vor allem – gemessen an der täglichen Rede - korrekter wäre gewesen, er hätte, worauf schon hingewiesen wurde, in seinem System auf „wenn-dann" verzichtet.

Zu erwarten war, dass angesichts dieser Situation bald ein sinnvoller Vorschlag zur besseren Kopplung der Operatoren „seq" und „wenn-dann" erscheinen würde, und er kam auch 1912, als der Philosoph Clarence Irving Lewis in seinem Aufsatz „Implication and the algebra of logic"[44], dessen Gedanken er in weiteren Arbeiten[45] auf modallogischer Basis ausbaute, seine „strict implication" zur Diskussion stellte. Seinem Bemühen, dem logischen Inhalt von „wenn-dann" näher zu kommen oder gar eine Lösung vorzustellen, war jedoch trotz einiger guter Ansätze kein Erfolg beschieden. So ließen sich zwar verschiedene schwer einsichtige logische Theoreme wie z. B. das Recht,

> „Wenn A, dann B" als wahr zu akzeptieren, wenn „B" wahr ist,

nicht im Rahmen seiner strikten Implikationen beweisen, dafür aber philosophisch ebenfalls umstrittene wie

> „Wenn A, dann B oder nicht B".

Doch dies sind in meinem Verständnis Randerscheinungen: Der Blick auf Freges neues Herangehen war es, das ihn in die Irre führen sollte. Denn die übrigen neuen logischen Operatoren veränderte er nicht und blieb bei Frege, so dass die „strict implication" an halbherzigen Prinzipien scheiterte.

Eine namhafte kritische Erwiderung auf Lewis in direkter Form außerhalb der klassischen Kalküle ließ länger auf sich warten und kam diesmal von einem

---

43 Berka/Kreiser: Logik-Texte, S. 56.

44 Erschienen in: Mind, N.S. 21 (1912), S. 522–531.

45 Besonders in dem anerkannten Lehrbuch „A Survey of Symbolic Logic", Berkeley, Calif., 1918.

Mathematiker. Wilhelm Ackermann, ein enger Mitarbeiter und Schüler von Hilbert, hatte noch 1928 zusammen mit seinem Lehrer die klassisch-logische Standardschrift „Grundzüge der theoretischen Logik“ verfasst, rang sich dann aber, vor allem nach dem Tode Hilberts 1943, dazu durch, auch der nichtklassischen Logik etwas abzugewinnen und der „strict implication“ eine „strenge“ Implikation entgegenzusetzen, die dann 1956 etwas spät erschien[46]. Sie fand größere Anerkennung, obwohl es Ackermann nur um einige Theoreme in der „strict implication“ ging, zu deren Billigung bzw. Ablehnung er eine andere, ja, eine verständlichere Meinung als Lewis hatte. Die gute Aufnahme seiner Korrekturen täuscht jedoch darüber hinweg, dass er, da er ansonsten seiner klassisch-logischen Vergangenheit treu bleiben wollte, andere gültige Theoreme einriss. Wieder war demnach prinzipielle Inkonsequenz im Spiel, so dass er ebenfalls die Wenn-dann-Problematik nicht löste.

Überhaupt war der neue Versuch eine unnötige Einseitigkeit, weil nach Lewis, doch einige Jahre vor Ackermann mit Hans Reichenbach (1891–1953), der Veröffentlichungen in Logik, Philosophie, Mathematik, Physik und Sprachwissenschaft vorweisen konnte, einer der damaligen All-round-Wissenschaftler um Russell, Hilbert, Max Planck und Albert Einstein weitsichtig sich bemüht hatte, die Logik der Umgangssprache ganzheitlich zu erfassen und sie dadurch insgesamt von den kunstsprachlichen Schöpfungen abzugrenzen. 1947 legte er unter dem Titel „Elements of Symbolic Logic“ einen ersten Versuch vor, dessen Überarbeitung er nicht vollenden konnte, da er 1953 frühzeitig verstarb. Seine Frau besorgte dann 1954 mit „Nomological Statements and Admissible Operations“ postum das Erscheinen. Es waren die ersten wissenschaftlichen Arbeiten, die in globaler und tiefgründiger Form die überaus wichtigen Beziehungen zwischen Kunst- und Umgangssprache untersuchten, und sie blieben zum Nachteil des menschlichen Erkenntnisstrebens die einzigen. An sie hätte Ackermann anknüpfen müssen, und es wären bei seinem Können sicher bedeutsame methodologische Fortschritte herausgekommen. Doch er hatte in diesen Fragen leider nur Lewis im Auge – weshalb übrigens wir auf ihn vor Reichenbach eingingen –, so dass wir seine die Logik

46 Wilhelm Ackermann: Begründung einer strengen Implikation, in: Journal of Symbolic Logic 21 (1956), Nr. 2. Inzwischen hatte es zahlreiche logische „Vermittlungs“versuche gegeben, von denen wohl der von Rudolf Carnap in „Logische Syntax der Sprache“ (Wien 1934 als Bd. 8 der Schriften zur wissenschaftlichen Weltauffassung) der bedeutendste und wertvollste ist.

verändernden Bemühungen als relativ geringwertig einordnen können. Reichenbach soll dagegen als unser Vorbild im Folgenden eine etwas ausführlichere Würdigung erhalten.

Lewis sowie Rudolf Carnap und die große Schar an Sprachreformern waren bis in die 1940er Jahre davon entfernt geblieben, das Beziehungsproblem zwischen den mittlerweile fest verankerten Sprachsystemen in Mathematik, Physik und Logik einerseits sowie in den übrigen gesellschaftlichen Bereichen andererseits zu lösen. Unsinnige Satzbildungen, von denen schon mehrfach die Rede war, ließen sich nicht einfach aus der Sprache entfernen und verlangten zumindest eine Erklärung. Es drohte der Logik, die spätestens nach den „Principia Mathematica" (1910–13) als eine der gedanklich saubersten Wissenschaften der Welt galt, eine schwer zu verkraftende Rufschädigung. Die Zeit rief eigentlich danach, in die Gesamtsystematik der logischen Operatoren beider Sprachsysteme eine neue sowie sinnvolle Ordnung zu bringen.

Wie meist in der Weltgeschichte fand sich mit Reichenbach auch diesmal ein Mann, der in meinem Verständnis zumindest die Wegrichtung für die Lösung entdeckte. Ihm war klar geworden, dass ein „Herauspicken" der Wenn-dann-Problematik keine Lösung bringen kann, dass aber andererseits Umgangssprachen ihren Sinn erst durch Regelmäßigkeiten erhalten und ihre Erforschung sich deshalb lohnen würde. In Anwendung dieser Erkenntnis unterzog er die Umgangssprache und die damalige Sprachwissenschaft in Gegenüberstellung zu den konstruierten Logiksystemen einer umfassenden Kritik. Die lange Existenz des Forschungs-„Lochs", das er damit schloss, war für ihn aber nicht nur und wohl nicht in erster Hinsicht ein Ergebnis besonderer wissenschaftlicher Schwierigkeit des Inhalts, sondern mehr ein Ergebnis der traditionellen Unlust vieler Logiker, ihre Kraft auch logisch-umgangssprachlich einzusetzen. Gleich zu Beginn seiner Überarbeitung charakterisiert er in deutlichen kritischen Worten diese Situation:

> „Those who have studied the construction of artificial languages are often sceptical as of the possibility of finding rules that govern conversational language. They are disappointed by the vagueness of the term used in the language of everyday life, and point to apparent inconsistencies in actual usage of language. Yet on closer inspection, it turns out that a natural language is by no means as inconsistent as is sometimes believed. If it is difficult to find rules, one must not conclude that no rules exist. Physical

> phenomena, too, do not always openly display the rules followed by them; but physicists have been able to show that all such phenomena are controlled by very precise rules, though the formulation of these rules may be extremely complicated. A natural language is a complex system of psychological and sociological phenomena, and one cannot expect its laws to be visible to the untrained eye. Those who are not afraid to search for its laws, however, have been surprised to discover that rather precise laws can be constructed into actual usage of language, and that, once laws have been abstracted from single examples, they cover large parts of usage practically without exceptions.“[47]

Diese warnenden Worte blieben anscheinend unerhört: Die enorme Bedeutung seiner Erkenntnisse für die Klarheit und Folgerichtigkeit gerade der philosophischen Sprache verstand offenbar, wie aus dem nächsten Unterabschnitt hervorgeht, kaum einer der Philosophen.

Worin darf nun das wegweisend Neue in Reichenbachs Auffassung gesehen werden? Wir konzentrieren uns bei der Wiedergabe auf die Bedürfnisse der Schulmathematik, sind aber sicher, dass wir auch mit dieser Einschränkung alle wichtigen Gedanken Reichenbachs berücksichtigt haben. Zunächst sei noch einmal wiederholt, dass es für uns die Logik die Wissenschaft ist, die die sprachlichen Strukturen daraufhin bearbeitet, wie sie angelegt sein müssen, dass sie zu wahren Aussagen führen. Damit sind die sogenannten logischen Operatoren der Hauptgegenstand der Logik, und Frege war insofern auf dem richtigen Wege, als er einen Kalkül aufbaute, der für die Unterscheidung der Operatoren allein deren spezifischen Beitrag zur Wahrheitsfindung nahm. Zu fragen wäre aber – und diese Frage stellte *als erster* H. Reichenbach –, warum es genügen soll, in Wahrheitsmatrizen als Basis die atomaren Wahrheitswerte „wahr“ und „falsch“ *isoliert zeilengleich* zu betrachten, wie G. Frege es tat, und nicht obendrein auch in kombinierter Zeilenverschiedenheit unter Beachtung modifizierender struktureller Zusätze. Es zeigte sich nämlich, dass dadurch die an der Wahrheit gemessene Korrektheit des Vorgehens nicht zerstört, sondern nur verändert wurde, so dass die Ausdrucksvielfalt sich erhöhen ließ und womöglich die umgangssprachlichen logischen Operatoren

47 Hans Reichenbach, Nomological Statements and Admissible Operations (Studies in Logic and the Foundations of Mathematics), Amsterdam 1954, S. 14.

stärker angenähert erfassen würde. Dieser Wunscheffekt trat tatsächlich auch ein, worin eine bedeutsame Entdeckungsleistung H. Reichenbachs zu sehen ist. Sie hört sich in seinen Worten wie folgt an:

> „The truth tables can be read in two directions. The first is from right to left, i. e., from the statement containing the operation, or compound statement, to the elementary propositions. They then state that, if the compound statement is true, one of its T-cases is true. (By a T-case of a compound proposition we understand any of those combinations of the elementary propositions to which a ‚T' is coordinated in the column of the compound proposition.)
>
> For instance, if ‚A vel B' is true, we know that either ‚A' is true and ‚B' is true, or ‚A' is true and ‚B' is false, or ‚A' is false and ‚B' is true.
>
> The second direction is from left to right, i. e., from the elementary proposition to the compound statement. The tables then state that, if one of the T-cases is true, the corresponding operation holds.
>
> For instance, if we know that ‚A' is true and ‚B' is false we shall say that ‚A vel B' is true.
>
> We shall call the interpretation in which the truth tables are read in both directions the adjunctive interpretation of the truth tables. The interpretation in which the tables are read only in the first direction, i. e., from right to left, will be called the connective interpretation of the truth tables.[48]

Gleich anschließend erläutert H. Reichenbach diese Beziehungen an einem sehr aussagekräftigen Beispiel, das klar zeigt, dass die konnektiven logischen Operatoren nicht wahrheitsfunktional im Sinne G. Freges konstruiert sind, so dass H. Reichenbach in dieser sehr entscheidenden Frage logisches „Neuland“ betreten hat. Zu vermuten ist, dass er im Beispiel bewusst das immer wieder von den Logikern strapazierte „wenn-dann“ vernachlässigt und dafür „oder“ in den Mittelpunkt gestellt hat, um allein dadurch zu dokumentieren, dass es ihm ganzheitlich um die logischen Operatoren der Umgangssprache ging. Das Beispiel wird noch mehrfach herangezogen und hier im Wortlaut gebracht:

---

48 Reichenbach, ESL, S. 27 f.

> „A surgeon who is treating a serious case admits that he does not know whether the patient can be saved; but he adds: ‚The patient will have be operated upon or he will die.' Let us assume that the operation is made and that the patient does not die. Does this prove that the surgeon's statement was true? If we use the adjunctive interpretation it would indeed be proved, since one of the T-cases of the ‚or' has occurred. Using the connective interpretation, however, we would say that what has happened merely conforms with the surgeon's statement without proving its truth. In order to prove the truth we would have to show that no other possibility of recovery was left, that if the patient had not been operated on he would have died. In this interpretation the statement establishes a connection between the T-cases such that, if one of the T-cases does not happen, one of the other T-cases is bound to happen. It is obvious therefore that one observation cannot prove the truth of the statement since it show only one of the T-cases to hold, without informing us about other possibilities. Only a disproof of the statement could be given by one observation: if for in-stance the patient is not operated on and does not die, the surgeon's statement was certainly false."[49]

Das Beispiel macht deutlich, dass Reichenbach mit seiner neuen Methode dem (oder vielleicht einem der) umgangssprachlichen „oder" zumindest sehr nahe gekommen ist, so dass man prinzipiell fragen darf, wie es sich seines Erachtens überhaupt mit der Verteilung auf die logischen Operatoren verhält. Seine Antwort lautet:

> „The distinction between adjunctive and connective interpretation, which we explained for the or-operation, holds similarly for the other operations. An operation used mostly in the connective interpretation is ‚implication'. Here the mere coincidence, i. e., the case that ‚a' is true and ‚b' is true, is usually not taken as proof of the implication. […] Adjunctive implication is scarcely ever used in conversational language. Similarly, equivalence (and also the exclusive ‚or') is used mostly in the connective sense. The inclusive ‚or' is used in both interpretations; the ‚and' mostly in the adjunctive interpretation. The ‚and', unlike the other operations, has only one T-case;

[49] Reichenbach, ESL, S. 28.

> we therefore cannot speak here of a connection between T-cases. However, there is also a connective interpretation of the ‚and', meaning that no other case can happen. Like the ‚and', negation is mostly used adjunctively; in the connective interpretation, ‚non a' means: ‚a' is necessarily false. Incidentally, we see from these considerations that the question of connective operations is closely related to the analysis of the modalities, i. e., the terms ‚necessary', ‚possible', ‚impossible'."[50]

In dieser Gegenüberstellung von adjunktiven und konnektiven Verknüpfungen der logischen Operatoren in jeweils spezifischer Form kommt für mich die die Logik betreffende Hauptleistung Reichenbachs zum Ausdruck. Er hat damit – so möchten wir jetzt schon sagen, obwohl der Nachweis der Berechtigung dafür noch aussteht – das Tor für den richtigen Lösungsweg zur Entschlüsselung geöffnet. Ihre logisch-ontologische Basis war im Kern entdeckt und verlangte nach weiterer Fundierung. Doch die Hauptlast verlagerte sich nunmehr auf die Regellogik der Umgangssprache, zu der H. Reichenbach nur wenig gesagt hatte.

Als ich vor nunmehr knapp 50 Jahren erstmals von Reichenbachs Ideen erfuhr, war ich insofern nicht ganz glücklich, als meine frisch selbstständig erarbeiteten Ergebnisse, die im Prinzip in die Richtung Reichenbachs gingen und heute noch gehen, für mich an originärem Wert verloren hatten, doch andererseits stimmte mich sehr froh, dass einer der bedeutendsten Logiker in sehr ähnlicher Form wie ich auf die folgende hochwichtige Doppelerkenntnis gestoßen war: Die umgangssprachlich geäußerten logischen Operatoren führen zu Wahrheitswerten der Aussagenverknüpfungen, die meist nicht schlechthin von den isoliert als wahr oder falsch verstandenen Elementaraussagen, sondern in bestimmendem Maße von der mengenmäßig-strukturellen Spezifik der Wahrheitsbeziehungen zwischen den Elementaraussagen mit jeweils *wechselnden inhaltlichen* Bedeutungen abhängen, so dass sie *obendrein* keine eindeutigen Aussagen liefern. Der jetzige Weg ist als schöpferische Fortsetzung der skizzierten Grundideen Reichenbachs gedacht.

Mit diesen Erkenntnissen und dem damit verbundenen Begriffspaar „adjunktiv-konnektiv", das wir in unsere Sprache übernehmen werden, hatte Reichenbach ein logisches Grundgerüst für die Umgangssprache geschaffen, in dem es danach für ihn vor allem darum ging, neben „adjunktiv", worunter er Freges Methode

[50] Reichenbach, ESL, S. 29.

verstand, den Begriff „konnektiv“ so genau wie möglich inhaltlich auszufüllen. Zur Verfügung hatte er, wie bereits angedeutet, die modalen Ausdrücke „(un) möglich“ und „notwendig“, aber auch den den Naturwissenschaften entnommenen Gesetzesbegriff. Er entschied sich für eine „Ur“-Analyse des Begriffs „nomological formula“ und leitete sowohl die Definition der modalen Ausdrücke wie auch „konnektiv“ davon ab. Der erste Versuch 1947 erreichte dabei nicht ganz sein Ziel und wurde von ihm – auch in Auswertung kritischer Fremdstimmen – vor 1954 in den „Nomological Statements“ überarbeitet. Der Weg kann hier aus Platzgründen nicht vollständig unter Verwendung seiner verfeinerten und vielfältig aufgegliederten Ideen wiedergegeben werden, doch informieren zahlreiche sporadische Anknüpfungen nachfolgend über sein Herangehen.

Nicht unerwähnt darf aber bleiben, dass die Rückführung von „konnektiv“ auf den Gesetzesbegriff unnötige Verengungen der Bedeutung mit sich bringt, da dieser Begriff mit einer relativ hohen Verallgemeinerung verbunden ist, während der Begriff der Konnektivität sich schon viel eher sinnvoll benutzen lässt. Dabei denken wir an wissenschaftliche Verallgemeinerungen, die zu geringfügig sind, um unter den Begriff „Gesetz“ zu fallen, oder an verallgemeinerte Zufälligkeiten. Unsere Beschränkung auf die Schulmathematik mit ihren gesetzesartigen Erkenntnissen führt uns andererseits wieder an Reichenbach heran, doch dürfte es auch dann zweckmäßiger sein, den Gesetzesbegriff über ein vorgeschaltetes „konnektiv“ von den umgangssprachlichen Operatoren und den Modalitäten abzuleiten. Von daher wird für uns Reichenbachs Beobachtung wichtig, dass „wenn-dann“ *meist* und „oder“ *recht neutral* konnektiv zu verstehen ist. Wir haben im vorliegenden Abschnitt bereits darüber informiert und werden später zum gleichen Ergebnis kommen, mit den sich anschließenden Fragen, wie viele Bedeutungsvarianten sich ermitteln lassen und wodurch sie charakterisiert sind. Dies werden einige unserer Hauptfragen sein, die uns zeigen, dass „oder“ wegen der erwähnten Neutralität vielleicht späteren Forschungen die größte Schwierigkeit bereiten wird und nicht „wenn-dann“, so dass auch aus diesem Grunde der Gesetzesbegriff, der ja ideal mit „wenn-dann“ verbunden ist, nicht die Basis sein sollte. Wir trennen uns daher von der einseitigen Wenn-dann-Bevorzugung noch stärker als Reichenbach und nehmen wegen erkenntnismäßiger Vorteile für die Schulmathematik einen kleinen Umweg über die *Gesamtbewertung* der umgangssprachlichen Logik in Kauf, wobei am Ende deutlich wird, dass über Reichenbach hinaus neue Einsichten in die logischen Sprachzusammenhänge zu gewinnen waren.

2.3.3 Die Entstehung einer doppelgleisigen Sprache der Mathematik

Den Begriff „Schulmathematik“ erwähnten wir zuletzt, als wir den Entwicklungsstand der Mathematik vor den 1847 von Boole begonnenen großen Sprachreformen charakterisierten. Daraus ging hervor, dass für eine gesonderte logische Untersuchung des Weges, den das für heranwachsende Schüler abgezweigte mathematische Wissen bis dahin nahm, kein Grund erkennbar ist und somit auch nicht vorliegt. Denn dieses Wissen entstand über viele Jahrhunderte nach den in gleicher Weise vorherrschenden „misslichen“ intuitiv-logischen Verfahren wie das schwierigerer Art, und der Werdegang verlief in engem Zusammenwirken aller mathematischen Seiten und Schwierigkeitsstufen. Es gab gar keine einigermaßen befriedigende Zäsur für die Absonderung einer spezifischen Schulmathematik.

Erst die Spracheingriffe der von Boole und Frege konstruierten logischen Kalküle führten zu einer neuen Situation. Nachdem die Kalküle in den ersten Jahrzehnten nach 1900 von den Mathematikern schließlich anerkannt waren, bildeten sie die logische Hauptbasis für die zukünftigen mathematischen Erkenntnisse, und so ist es bis heute geblieben. Ja, mehr noch: Neben dem historisch gegebenen logisch-mathematischen Entwicklungsweg, der mit zwei Modifizierungen, den antiken Syllogismen, bis in die zweite Hälfte des 19. Jahrhunderts intuitiv begründet war, wurde eine adjunktiv konstruierte, von Axiomen ausgehende chronologisch deutbare Entwicklungslinie geschaffen, die keine mathematischen Ergebnisse der Vergangenheit auszulassen gedachte und für neue Erkenntnisse immer offen sein wollte.

Trotzdem ist zu beobachten, dass seitdem in der mathematischen Praxis nicht wenige Mathematiker immer wieder traditionell intuitiv gefundene logische Schritte, die meist von konnektiver Natur sind, in ihre formalisierten adjunktiven Schlussketten einbauen. Schon Ackermann machte darauf aufmerksam: „In der Mathematik und auch in anderen Gebieten, in denen man eine axiomatische Grundlegung wählt, werden die Schlussfolgerungen aus den Axiomen meist gezogen, ohne eine formalisierte Logik zu benutzen.“[51] Eine Erklärung für diesen eigenartigen Umstand brachte er leider nicht. Nicht auszuschließen

[51] Ackermann, Theoretische Logik, S. 111.

ist, dass überspielte Schlussfehler daran beteiligt sind, indem in Unkenntnis des Unterschiedes von adjunkiven auf konnektive Aussagenkombinationen geschlossen wurde. Sicher gehört aber dazu, dass ein bedeutsamer mathematischer Teilbereich weiterhin beispielhaft logisch traditionell arbeitete: Die Schulmathematik ging den gerade beschriebenen Weg nicht mit und musste ihn auch nicht mitgehen: denn sie erfuhr nach 1850 quasi keine inhaltlichen Erweiterungen mehr. Die mengentheoretischen Schulversuche im 20. Jahrhundert, die vielleicht ein Gegenargument sein könnten, sind m. E. bald gescheitert; außer umgangssprachlich fassbaren Selbstverständlichkeiten wurde die Mengenlehre wieder ausgeklammert.

Seit gut 100 Jahren bestehen demnach im Kern zwei mathematische Welten: eine schulmathematisch geprägte Welt mit historisch entstandener intuitiv-logischer Begründung und eine rational durchkonstruierte, historisch fortschreitende Gesamtfolge mathematischer Formeln mit kalkülmäßigen Logiken als Basis, letztlich somit eine vornehmlich konnektiv und eine adjunktiv bestimmte mathematische Logik. Alle bisherigen Indizien sprechen nunmehr dafür, dass die schulmathematisch gewonnenen Zusammenhänge sich nicht nur logisch-intuitiv entwickeln lassen, sondern auch aus den logisch-mathematischen Kalkülen abgeleitet werden können. Die Erklärung dafür ist schwer und stößt möglicherweise an Grenzen, da Konnektivität abstrakt-logisch nicht aus Adjunktivität zu erschließen ist. Hier geht es aber um Mathematik, deren Axiome ebenfalls zu berücksichtigen sind und die, worauf bereits Bezug genommen ist, die Wirksamkeit der logischen Axiome nicht unbedingt in gleicher Weise fortsetzen. Wie dort betont, ist nur auf diesem Wege eine Problemlösung denkbar, und es wäre zu untersuchen, wie er sich finden lässt.

Auch wenn eine gute Beweisführung gelingen sollte, dürften die Schüler überfordert sein, woraus folgt, dass es in der Schulmathematik primär nur um eine Niveauerhöhung der bisher verwendeten umgangssprachlichen Logik und wahrscheinlich noch um eine methodische Nutzung der logischen Kalküle gehen kann. Wie schon mehrfach angedeutet, heißt das, dass die logischen Operatoren der Umgangssprache für schulmathematische Zwecke maximal zu explizieren sind. Mit anderen Worten ist in einer solchen Aussage, vielleicht überraschend, aber als mögliches Negativum enthalten, dass in der Schulmathematik nunmehr bewusst mit einer weitgehend anderen Logik zu arbeiten ist als in der Höheren Mathematik.

2.4 Die nach Reichenbach verbleibende Ineffektivität der spezifischen Inhaltsbestimmungen für die umgangssprachlichen logischen Operatoren. Die zunehmende Breite mathematisch-logischer Anwendungen

Mit Reichenbachs Neuentdeckungen war für mich der berühmte Würfel hinsichtlich der Erkenntnis der umgangssprachlichen Logik insofern gefallen, als nunmehr der Weg zu einer brauchbaren Theorie über deren Gesamtstruktur mit ihren zahlreich sichtbar werdenden Verästelungen gefunden war. Doch musste ich schnell feststellen, dass offenbar nicht ein Logiker meine Meinung teilte. Mir ist bis heute wenigstens die Sinowjew-Wessel-Gruppe bekannt geworden, zu der gleich etwas gesagt wird, die sich differenziert kritisch mit Reichenbach auseinandergesetzt hat; im übrigen hat man diese Seite seiner Tätigkeit meist totgeschwiegen bis hin zur Übergehung seiner Arbeiten im Literaturverzeichnis, wie es selbst ein Christoph Schamberger fertig brachte, der sein Buch entgegen solcher Handlungsweise „Logik der Umgangssprache" betitelte. Die Betrübnis, die meine Alleinposition natürlich auslöste, wurde dank eines tieferen Blickes in die Geschichte der Mathematik gemildert, denn mit den geradezu umwerfenden Ideen von Frege und Cantor – weitere Beispiele erübrigen ist – ging man sehr ähnlich wie mit Reichenbachs logischer Analyse der Umgangssprache um, so dass der Optimismus, dass dessen Leistung doch noch anerkannt wird, bleibt, und er soll in diesem Buch auch neu genährt werden.

Damit zu denen, die ihn zur Kenntnis nahmen. In der Kritik der stellvertretend heran-gezogenen Gruppe um Sinowjew und Wessel ist die Mühe erkennbar, ihn zu achten und ihn partiell zu verstehen[52]. Denn bei aller Kritik fielen auch

[52] Die generelle Aufgeschlossenheit dieser Gruppe gegenüber der sog. „bürgerlichen" Forschung, die sich von der sonstigen sowjetisch-sozialistischen Einstellung abhob, wird u. a. in ihrem Hauptwerk sichtbar: Alexander A. Sinowjew/Horst Wessel: Logische Sprachregeln. Eine Einführung in die Logik, Berlin 1975. Speziell zu Reichenbach siehe nachfolgend Evelyn Dölling.

mehrfach anerkennende Worte, und beide Denkrichtungen standen sich vermutlich näher, als dies der unter sowjetischen Bedingungen ausgetragene Streit zeigte. Dafür spricht ein interessanter Brief Wessels aus dem Jahre 1977 an mich, in dem er meine damals schon keimhaft vorhandenen Gedanken zur Schulmathematik akzeptierte, obwohl sie ein Ausfluss meiner Reichenbach ähnlichen Position waren. Ihren Niederschlag fand diese Episode dann sogar in Wessels „Logik" von 1998, wo er – einmalig in der gesamten mir bekannten Logikliteratur – der Schulmathematik (in einem kurzen, aber klaren Satz) zumindest partiell ein anderes logisches Maß als der Höheren Mathematik zuschrieb[53]. Man darf bei der Bewertung der vor Gorbatschow geführten ideologischen Diskussionen zwischen den beiden Weltlagern nicht vergessen, dass die sowjetische Seite die Wissenschaftler fast zwang, bei der Gegenseite zumindest Fehler zu entdecken, und diesem Zwang unterlagen Sinowjew und Wessel auch. Theoretisch hätten sie spätestens nach 1989 ihre Meinung revidieren können, doch sie überließen die hier anstehenden Fragen weitgehend Uwe Scheffler[54], der die Konditionalität zwar auf neuen Wegen deutlich von der klassischen Implikation unterschied, diesen Operator jedoch unzureichend mit den anderen Operatoren verband.

Wie dem aber auch sei: 1977 erhielt Evelyn Dölling offenbar den Auftrag, sich gründlich und relativ ausführlich mit der Logik empirischer Zusammenhänge in Auseinandersetzung mit einigen bedeutenden „bürgerlichen" Logikern, worunter Reichenbach fiel, zu beschäftigen[55]. Sie löste die Aufgabe in jeweiliger Abhängigkeit vom ideologischen „Muss" schlecht und recht zugleich, würdigte Reichenbach aber sogar als ersten Logiker, der sich umfassend mit einer logischen Analyse empirischer Aussagen befasst hat[56]. Sinowjew hatte dabei die generelle „Linie" schon 1967 vorgegeben, allerdings etwas undeutlich. Denn er engte die Kritik, dass Reichenbach „uns nicht über den Rahmen der Zeichen der klassischen Logik

53 Wessel: Logik, S. 280.

54 Wessel vermerkt im Vorwort, S. 8, vorsichtig, dass das 13. Kapitel zur Konditionallogik „unter Mithilfe meines Mitarbeiters Uwe Scheffler grundlegend überarbeitet" wurde. Scheffler hatte schon in seiner Dissertation diese Thematik bearbeitet und war zu einigen neuen interessanten Thesen gelangt, die ich in meinem Gutachten allerdings nicht generell für richtig befand.

55 Evelyn Dölling: Einige Aspekte einer Logik empirischer Zusammenhänge, in: Logik und empirische Wissenschaften, hrsg. von Horst Wessel, Berlin 1977, S. 130–149.

56 Dölling: Einige Aspekte, S. 136.

hinausgelangen lässt“, auf das Prinzip der vollständigen Exhaustion ein[57], und er erläuterte nicht, wie seine Formulierung zu verstehen sei. Sollte er nur die Kernausdrücke „wahr“ und „falsch“ gemeint haben, aber trotzdem schon im kritischen Sinne, so hätte er Reichenbach zu oberflächlich gelesen, denn unter Beibehaltung dieses Dualismus beinhaltet die konnektive Variante Kombinationen, die in einfacher Analogie Frege und die Wahrheitsfunktionen übersteigen sowie u. a. mindestens eine neue Deutung für „wenn-dann“ erlauben. Sinowjew dürfte das jedoch, berücksichtigt man die vielen anderweitigen Äußerungen, nicht einmal angedeutet haben, und so las Dölling bei Reichenbach in treuer Gefolgschaft heraus, dass dieser „den Rahmen der klassischen Logik nicht überschreitet“[58], woraus in Fortsetzung ihrer Feststellung dann der offene Türen eintretende Vorschlag erwuchs, dass einige seiner (angeblichen) Schwierigkeiten sich vermeiden ließen, wenn er einen speziellen Operator für konditionale Aussagen eingeführt hätte[59]. Sie sah nicht, dass aus Reichenbachs Konnektivität mehr als ein Konditionalitätsoperator gefolgert werden könnte, doch darf eingeräumt werden, dass nicht immer leicht erkennbar ist, dass die Wahrheitsfunktionen in Reichenbachs Gesamtsicht möglicher Wahrheitsbeziehungen nur eine Teilmenge bilden. Der andere Hauptvorwurf von Dölling an Reichenbach ist dagegen einfach nicht nachvollziehbar: „Er hat aber nicht erkannt, dass es nicht Aufgabe der Logik ist, Kriterien zu formulieren, nach denen *allein sich* von einer gegebenen Allaussage aus entscheiden lässt, ob sie eine Gesetzesaussage ist oder nicht.“[60] Reichenbach hat sich dazu in klarer Unterscheidung von analytischen und synthetischen konnektiven Operationen mehrfach geäußert. Wir wählen die folgenden Formulierungen als Beleg, dass ihm ein solcher Fehler nicht angelastet werden darf:

> „The question, therefore, arises: how do we know whether a connective operation is true? If the connective operation is of the analytic kind, however, the answer is easily given since we have simple rules defining a tautology. If the connective operation is synthetic, however, the answer cannot be given

[57] Alexander A. Sinowjew: Die logische und die physische Folgebeziehung, in: Studien zur Logik der wissenschaftlichen Erkenntnis, Berlin 1967, S. 179.

[58] Dölling: Einige Aspekte, S. 136.

[59] Dölling: Einige Aspekte, S. 136.

[60] Dölling: Einige Aspekte, S. 136.

> within a theory of deductive logic since this determination requires the whole apparatus of induction. Statements saying that all bodies expand on heating, or that all dogs have hearts, are demonstrable only with the use of inductive inference. We therefore leave to inductive logic the task of answering the question of verification of connective operations of the synthetic kind."[61]

Und weiter, zugeschnitten auf Implikationen:

> „What we mean by a reasonable synthetic implication is an implication associated with *inductive confidence*, i. e., an implication which we are ready to assert also for individual instances not yet experienced. Since the present book is not concerned with problems of induction we cannot discuss methods of verifying statements of this kind of generality. What we can do, however, is to introduce conditions which rule out all noninductive forms of verification. This is the method to be followed by our investigation."[62]

Die Fahrlässigkeit der Beschuldigung dürfte damit erwiesen sein, doch sei trotzdem auch an dieser Stelle mildernd hinzugefügt, dass Dölling nicht, wie es eigentlich üblich war, ein schwarz-weißes Bild von Reichenbach gezeichnet hat, sondern mehrfach Objektivität anklingen ließ. Überhaupt überstieg in beliebigen Streitfragen die Toleranz im Verhalten der Gruppe Sinowjew-Wessel die der anderen Logiker jeglicher philosophischer Herkunft. Und so ist mir, dies bestätigend, seit der Arbeit von Dölling (1977!) nicht ein Logiker mehr mit Studien zu Reichenbachs umgangssprachlichen Analysen bekannt geworden. Ich verblieb der einzige, der aus einer Außenseiterposition heraus 1979 in seiner B-Dissertation „Das konditionallogische System K. Ein Beitrag zur logischen Analyse der Umgangssprache" Reichenbachs Ideen, denen ich schon vorher nahe gekommen war, aufgriff und sie entgegen der gewählten Überschrift schöpferisch über die Konditionalität hinaus weiterentwickelte. Meine damaligen Bemühungen sollen hier nicht wiederholt werden. Sie sind in der vorliegenden Arbeit unter Ausmerzung einiger Einseitigkeiten und Überzeichnungen verarbeitet worden.

---

61 Reichenbach, ESL, S. 359.

62 Reichenbach, ESL, S. 359 f.

Die eigentlich unsinnige Ausklammerung von Reichenbach muss trotzdem nicht ausschließen, dass sich Logiker mit der Zielsetzung fanden, die Umgangssprache umfassend logisch zu analysieren. Doch der erhoffte Sprung in die Allseitigkeit blieb in meinem Verständnis bis vor kurzem aus. Die umgangssprachlich ausgerichteten logischen Untersuchungen zeigen nun seit gut einhundert Jahren einseitig ein übermäßiges Interesse an der Wenn-dann-Problematik, das, wie es in einem der jüngsten Urteile darüber heißt, offenbar nicht abebbt[63].

Begleitend zu diesem Interesse trat die schon von Lewis und Ackermann praktizierte Tendenz, „Schulen" und Lehrrichtungen auszubilden, mit zunehmender Dauer immer stärker hervor und führte zu Unterscheidungen wie „Filterlogik", „Relevanzlogik", „parakonsistente Logik", „Supervaluationstechnik", die aber leider oft unsinnig und willkürlich abgrenzten und nicht immer garantierten, dass selbst angenähert die Logiker mit ihrer Eigenbewertung darin eingeordnet sind[64]. So sollen nach Schamberger Sinowjew und Wessel als Filterlogiker zu verstehen sein[65], wozu, wie der Name es ziemlich klar ausdrückt, diejenigen zu zählen sind, die den klassischen Kalkülen Beschränkungen auferlegen möchten. M. E. ist für beide aber die Erweiterung der klassischen logischen Operatoren zumindest um das Konditional typisch, und genauso sehen sie sich auch selbst[66]. Von Filterlogik ist in ihren Veröffentlichungen gar keine Rede, so dass bald anzunehmen ist, dass sie von dieser Begriffsbildung nicht viel hielten. Überhaupt könnte man hinsichtlich der Entstehung des Begriffs Schamberger fragen, wie er dazu kommt, Timothy Smileys 1959 erschienenen Aufsatz „Entailment and Deducibility"[67] eine „Erstarbeit zur Filterlogik" zu nennen, obwohl sich Smileys Bewertung der klassischen Logik kaum von der unterscheidet, die z. B. Lewis schon 1912 äußerte. Schamberger

---

63 So schreibt Niko Strobach: Einführung in die Logik (Philosophie kompakt), 5. aktualisierte Aufl., Darmstadt 2019, 159: „Weiterhin großes Interesse besteht z. B. gegenwärtig daran, die inhaltliche Komponente der Wenn-dann-Verbindung […] nachzuvollziehen."

64 Trotzdem ist der Überblick, den z. B. Graham Priest gegeben hat, nicht wertlos: An introduction to Non-Classical Logic. From if to is; second edition, Cambridge University Press 2008. Leider kommt das Schrifttum des ehemaligen sowjetischen Staatenblocks etwas kurz weg.

65 Christoph Schamberger: Logik der Umgangssprache (Neue Studien zur Philosophie, Bd. 29), Göttingen 2016, S. 86 ff. Abkürzung fortan: Schamberger, LUS.

66 Vgl. besonders Abschnitt 4.1.

67 Erschienen in: Proceedings of the Aristotelian Society 59 (1959), S. 233–254.

räumt selbst bei sich seine Bedenken, ein Filterlogiker zu sein, nicht gänzlich aus, gibt sich dann jedoch mit dem Titel sehr zufrieden. Hier ist demzufolge viel Subjektivismus im Spiele, so dass noch erhebliche Gedankentiefe für brauchbare Gliederungen erforderlich wäre. Unser Problem soll dies aber nicht sein.

Angesichts der jahrzehntelangen Vernachlässigung umfassender logisch-umgangs-sprachlicher Forschungen überraschte es dann doch etwas, als 2016 mit Schamberger sich noch einer der Philosophen aufraffte, in einer „Logik der Umgangssprache" zumindest vom Titel her darauf eine Antwort zu geben. Schaut man allerdings genau hin, dreht sich auf theoretischer Ebene, versehen mit neuen Überlegungen und einer neuen Strategie, wieder alles um „wenn-dann", so dass der Titel mehr verspricht, als er hält. Die Vielzahl der Beispiele geht aber aus meiner Sicht weit darüber hinaus und erlaubt die auf die gesamte Umgangssprache bezogene Verallgemeinerung, auch wenn die Verarbeitung der zahlreichen problemgebundenen Andeutungen zu kurz kommt. Dazu wird noch Etliches zu sagen sein. Schon hier darf jedoch die im Vorwort erwähnte Ungehörigkeit wiederholt werden, dass der Altmeister der logisch-umgangssprachlichen Analyse, Reichenbach, nicht einmal im Literaturverzeichnis genannt ist. Schamberger hat ihn völlig übergangen, wofür mir jedes Verständnis und obendrein jede Erklärung fehlt.

Dennoch hat Schamberger den eigenen berechtigten Anspruch, dass ihm Gerechtigkeit widerfahre, und so sei der Kritik hinzugefügt, dass seiner Grundeinstellung, die Umgangssprache von Regelmäßigkeiten geprägt zu sehen, die es verdienen, wissenschaftlich erforscht zu werden, meine volle Unterstützung zukommt. Dieser Gedankenrichtung steht jedoch weiterhin eine breite Phalanx entgegen, die auch von namhaften Logikern wie Peter Frederick Strawson vertreten wird, für den – zeitgleich mit Reichenbach – gilt, dass „the ordinary language has no exact logic"[68]. Fragt man bei solchen Äußerungen nach, ob denn die in der Umgangssprache genutzten regelartigen Ansätze völlig übersehen worden sind, so erhält man eine vielleicht unerwartete Antwort. Wir lassen Strawson selbst zu Wort kommen:

> „The formal logician now aims at an exact and highly systematic logic, comparable in these respects with mathematics. But he cannot give the

68 „On referring", in: Mind 59 (1950), S. 344. Bis zu seinem Tode 2006 gab er anscheinend diesen Standpunkt nicht auf.

> exact and systematic logic of expressions of everyday speech; for these expressions have no exact and systematic logic. What he can, and does, do is to *devise* a set of rules which satisfies his requirements, and, at the same time, while not doing full justice to the complexities of ordinary usage, and diverging from it in many ways, does touch ordinary usage at some vital points.“[69]

Die Regelmäßigkeiten sind demnach – was ja auch kaum zu glauben war – nicht übersehen worden, doch sie sollen für logische Zwecke *erfunden* worden sein, so dass es auch möglich ist, sich wieder davon zu trennen. Die Kontrahenten haben sich somit etwas einfallen lassen, und das „Feld“ muss demnach noch „freigekämpft“ werden, so dass wir mit Schambergers Buch gerade in dieser Kernproblematik die fragende Hoffnung verbinden dürfen, ob ihm ein deutliches Plus gelungen ist.

Soviel zum inzwischen traditionellen Dualismus zwischen Umgangssprache und den klassischen Kalkülen, der noch durch einige wichtige Bemerkungen zum zunehmenden Anwendungsfeld nichtklassischer mathematisch-logischer Kalküle zu ergänzen wäre. Zum Intuitionismus, dessen logische Besonderheiten nach wie vor die Forschung beschäftigen, hatten wir die Abseitigkeit dieser Probleme für unser Anliegen betont[70], doch sollte man jetzt das Gewicht besser partiell auf Ähnlichkeit mit andersartigen logisch-mathematischen Fragen verlagern, wobei insbesondere an die Quantenlogik zu denken wäre. Sie sei hier deutlich von der Quantenphysik abgegrenzt, die schon zu Zeiten Reichenbachs entstand und an der er mitgewirkt hatte. Es geht für uns erneut allein um die Sprache, in der über die Bewegungen der Quanteneigenschaften gesprochen werden muss. Die Schwierigkeit der korrekten Wortwahl ist erst seit ungefähr 20–30 Jahren tiefer erkannt, als die Forschungen zu Quantencomputern begannen. Sie arbeiten wie alle Computer letztlich „nur“ auf der Basis logischer Umwandlungen, deren Sprache und deren Schlussformen jedoch weitgehend ungelöst sind und vermutlich – wie es uns in eigener Sache sehr bekannt vorkommt – von den klassischen Kalkülen abweichen. U. E. geht es nicht an, irgendeinem Quantenobjekt z. B. die Fähigkeit

---

69 Peter Frederick Strawson: Introduction to Logical Theory, London 1952, S. 57. Mit diesem Buch erreichte er übrigens eine gewisse Breitenwirkung.

70 Vgl. Abschnitt 2.3.1.

zuzuschreiben, dass es *gleichzeitig* Wellennatur und Materialität zeigt oder dass das Materielle sich als Welle äußert. Solche Formulierungen scheitern ganz besonders an „gleichzeitig", das in der „normalen" wissenschaftlichen Sprache eindeutig auf die Null-Dimension bezogen ist und insofern einen Prozess wie „Wellennatur zeigen", der immer mehr als die Null-Dimension braucht, nicht ausdrücken kann. An dieser Stelle wird nun meine Bitte wichtig, auch auf Ähnlichkeiten zu den Logiken der Umgangssprache zu achten: Als Boole und Frege in ihren Kalkülen u. a. „wenn-dann" und „oder" verwendeten, trafen sie in keiner Weise das, was die Menschen auf der Straße damit verbanden, so dass, wie wir mehrfach betonten, andere Ausdrücke besser gewesen wären. Trotzdem blieben sie dabei und hatten jetzt aber zu erklären, dass die alten Ausdrücke neu bestimmt sind. Dieser Weg wäre selbstverständlich auch in der Quantenlogik vertretbar: Man legt „Gleichzeitigkeit" nicht ab und definiert dafür veränderte logische Operatoren. Die seit ungefähr 1960 entwickelte sog. Nichtstandard-Mathematik stellt dafür mit den hyperreellen Zahlen als zusätzlicher Basis[71] in unserem Verständnis brauchbare Überlegungen zur Verfügung. Wie bei Cantor ist diese Anschauung zwar im Hintertreffen, doch selbst die Schüler profitieren davon, da solche Zahlen u. a. bei unendlich kleinen Größen das Dividieren erlauben. Der wissenschaftliche Nutzen sollte wieder der oberste Maßstab sein.

Damit ist aus historischer Sicht, gemessen an unserem Vorhaben, fast alles gesagt, doch fehlt im Geschichtsbild noch das abrundende I-Tüpfelchen dazu, wie denn bis heute die Logik der Schulmathematik wissenschaftlich spezifisch durchleuchtet worden ist. Es lässt sich leicht ausrechnen, dass angesichts der erörterten allgemeineren Defizite und einer einzigen Erwähnung des Begriffs „Schulmathematik" bei Wessel wohl kaum jemand oder niemand sich groß darum gekümmert hat; selbst unter Einschluss Reichenbachs charakterisiert dies die Situation. Die mathematisch ausgerichteten Logiker machten zwar um schulmathematische Beispiele keinen Bogen, verwendeten sie aber nur zur Erläuterung der konstruierten Kalküle, indem sie die Beispiele aussuchten, bei denen keine Verständniskomplikationen auftraten. Von solchen Beispielen gab es freilich nicht wenige, und besonders Alfred Tarski nutzte diese Möglichkeit in der ersten Fassung seiner

[71] Grundlegend z. B. Detlef Langwitz: Infinitesimalkalkül. Kontinuum und Zahlen – Eine elementare Einführung in die Nichtstandard-Analysis, Mannheim/Wien/Zürich 1978.

„Einführung in die mathematische Logik“ rege[72]. In späteren Auflagen und in anderen Veröffentlichungen nahm er davon dann doch Abstand, denn es waren wie bei den „mathematischen“ Logikern überhaupt letztlich die in der Höheren Mathematik versteckten logischen Probleme, deren Lösung ihn vornehmlich reizte. Die Schulmathematik hätte diese Logiker in nicht geringem Maße von ihren Kalkülen abgelenkt und der Umgangssprache zugeführt, dem Hauptgegenstand der logikinteressierten Philosophen. Sie beachteten jedoch dieses Gebiet nie und haben demnächst wohl auch nicht vor, es zu tun. Dafür spricht, dass weder Schamberger noch die drei mir bekannten Rezensenten seiner Schrift[73] irgendwie darauf aufmerksam machen, dass die Lehrer im Unterricht vor nicht geringen logischen Besonderheiten stehen, wie unser Einführungsbeispiel es schon andeutet. Eine kleine Bemerkung von Schamberger, sicher belanglos hingeschrieben, zeigt aber viel mehr. Die Analyse eines seiner Beispiele enthält den Satz, dass er, Schamberger, „sogar ein mathematisches Gegenbeispiel“ auf seiner Seite habe[74], aus dem wegen „sogar“ ziemlich klar hervorgeht, dass er diesen Befund als Seltenheit ansieht. Doch die Schulmathematik liefert, worauf wir immer wieder Bezug nehmen werden, unzählige solcher Kombinationen, von denen Schamberger demnach nichts weiß. Und so ist zu vermuten, dass er die Schulmathematik völlig unzureichend kennt, obwohl man vor dem Studium seines Buches erwartet hätte, dass derjenige, der im Titel die Allseitigkeit seiner Untersuchung proklamiert, die Schulmathematik berücksichtigt. In Zukunft werden deshalb die Philosophen kaum gründliche Analysen zu deren Logik anbieten. Da die Lehrer jedoch dringend brauchbare logische Hinweise für den Unterricht benötigen, erhöht dieser Umstand die Bedeutung des vorliegenden Buches: Es wird wahrscheinlich demnächst allein auf dem Markt die logischen Fragen der Schulmathematik behandeln.

---

72 Alfred Tarski: Einführung in die mathematische Logik, 2., neubearbeitete Aufl., Göttingen 1966. Im Vorwort von 1964 informiert er darüber, dass das Buch in seiner 1. Aufl., die 1936 in polnischer und 1937 in deutscher Sprache erschien, populärwissenschaftlichen Charakter besaß.

73 Gerhard Schurz: Zwischen logischer Eleganz und inhaltlicher Bedeutung; Timm Lampert: Logische Gültigkeit umgangssprachlicher Argumente. Beide Rezensionen erschienen in: Zeitschrift für philosophische Forschung, Bd. 71 (2017), S. 110–122.
Georg Brun: Die Zähmung der logisch Widerspenstigen, in: Deutsche Zeitschrift für Philosophie, Bd. 65 (2017), S. 613–619.

74 Schamberger, LUS, S. 62.

Kapitel 3:

Schambergers Kalkül als jüngster logisch-umgangssprachlicher Systematisierungsversuch

Nach den allgemeinen Grundlegungen und ihrer historischen Einordnung, in der Schamberger schon global erwähnt ist, soll nun die neueste Veröffentlichung zur umgangssprachlichen Logik näher und vor allem kritisch begutachtet werden. Schambergers Kalkül wurde 2016 unter dem Titel „Logik der Umgangssprache“ vorgelegt, dessen Geltungsbereich er allerdings nicht ganz so allgemein verstand, da er die im Grunde bedeutungsvollen Modalausdrücke schon im Vorwort aus den zu untersuchenden umgangssprachlichen Argumenten ausgliederte[75]. Die Fülle der Beispielvarianten rechtfertigt aber eine explizierte Auseinandersetzung, auch wenn er, worauf bereits hingewiesen wurde, als weitere Auslassung die Schulmathematik kaum streifte.

3.1 Schambergers Anspruch und Zielstellung

Schamberger bekennt sich deutlich zu der Gruppe von Logikern, für die die Umgangssprache hinreichend forschungsinteressante logische Regelmäßigkeiten aufweist, so dass gleich anfangs zu untersuchen wäre, welchen Maßstab er für seine Auffassung gewählt hat. Dazu äußert er sich mehrmals selbstbewusst in allgemeiner Form: „Ich möchte eine exakte Logik der Umgangssprache entwickeln, die möglichst viele Paradoxien vermeidet, ohne regelmäßig verwendete Schlussregeln … aufzugeben.“ (S. 10 f.) Noch deutlicher dann etwas weiter unten: „Habe ich recht, so ist Strawsons Skepsis ausgeräumt: Die Umgangssprache hat eine exakte Logik, und deren Regeln lassen sich mit formalen Mitteln exakt angeben.“[76] Kurz-

[75] Schamberger, LUS, S. 11 (im Folgenden in diesem Kapitel in Klammern im Text zitiert).

[76] LUS, S. 11. Zu Strawson, Introduction, Aufl. von 1985, S. 57.

zeitig war er allerdings weniger von seinen starken Worten überzeugt, denn er schreibt: „Im strengen Sinne kann ich nicht beweisen, dass die in der Einleitung aufgezählten Schlüsse … ungültig sind.“ (S. 110) Doch schon einige Seiten weiter ist er wieder voller Selbstzufriedenheit: „Die Umgangssprache hat eine exakte Logik, und deren Regeln lassen sich mit formalen Mitteln exakt angeben.“ (S. 114) Der Höhepunkt kommt aber erst im Nachwort, als er auf die Kritiken zweier Rezensenten antwortet:

> „Sie zeigen mir, es hätte nicht geschadet, einige Thesen etwas vorsichtiger zu formulieren oder einzuschränken. Dennoch halte ich an meinem Anspruch fest, dass mein filterlogischer Kalkül des natürlichen Schließens F die beste verfügbare Logik der Umgangssprache ist.“[77]

Die Verabsolutierung „beste“ spricht nicht gerade für Bescheidenheit, doch soll er daran gemessen werden, indem wir seine in der Einleitung in drei Thesen zusammengefasste Zielstellung und einige ergänzende Äußerungen zur Basis nehmen:

> „Damit vertrete ich in dieser Arbeit hauptsächlich die folgenden drei Thesen:
> These (1): Einige klassisch gültige Argumente der Umgangssprache sind nicht deduktiv gültig; sie seien im weiteren *paradoxe Argumente* genannt (Kapitel 1 und 2).
> These (2): Die paradoxen Argumente lassen sich durch präzise Einschränkungen der klassischen Logik herausfiltern, wie sie eine Filterlogik bietet; auf diese Weise lässt sich der Begriff der logischen Folgerung auch für umgangssprachliche Argumente definieren (Kapitel 3).
> These (3): Die Reichweite der klassischen Logik und der darauf aufbauenden Filterlogik erstreckt sich auch auf umgangssprachliche Argumente, die weder wahr noch falsch sind (Kapitel 4).“ (S. 14)

Um sein Ziel zu erreichen, hat Schamberger sich für einen Kalkül des natürlichen Schließens entschieden, den er unter dem Namen „F“ filterlogisch aufgebaut

[77] Christoph Schamberger: Repliken, in: Zeitschrift für philosophische Forschung, Bd. 71/1 (2017), S. 123.

hat. Und er meint, für andere Logiker etwas überraschend, dass er das mit einer einzigen Änderung der klassischen Grundregeln schafft: Nur die Konditionaleinführung schränkt er zweifach ein. Im Vorwort beschreibt er dies wie folgt: „Vereinfacht gesagt ist es nur dann zulässig, mit der Konditionaleinführung auf ‚α seq β' zu schließen, wenn ‚z' ohne Anwendung der Konjunktionseinführung oder des Disjunktiven Syllogismus aus ‚α' hergeleitet werden konnte."[78] Wir werden sehen, wie er derart zu einer verwissenschaftlichten Struktur der Umgangssprache kommen will.

3.2 Nutzen und Fehlerhaftigkeit des Kalküls

3.2.1 Die Widersprüchlichkeit des Vorworts

Die im letzten Absatz übermittelte Einschränkung der klassischen Grundregeln gehört gleich dem Vorwort an, d. h., sie findet sich dort, wo Schamberger das Programm seines ganzen Buches absteckt, und insofern an nicht unwichtiger Stelle. In seine Verallgemeinerung bezieht er etwas undeutlich, doch im Prinzip erkennbar ein vorheriges Beispiel ein, das seines Erachtens als umgangssprachlicher Schluss ungültig ist. Wir wollen ihm vorläufig darin folgen, kehren aber später noch einmal auf die allgemeine Formulierung zurück. Schamberger schreibt:

> „So ist die logische Form des folgenden Arguments in den klassischen Kalkülen gültig, obwohl die Prämisse wahr und die Konklusion falsch ist: ‚Passau hat momentan über 50.000 Einwohner und ist eine Universitätsstadt. Also: Wenn Passau momentan über 50.000 Einwohner hat, dann ist Passau eine Universitätsstadt.'" (S. 9.)

Diese Wertung grenzt er nachfolgend ab gegen die Logiker, für die die Konklusion mit der klassisch-logischen „Seq"-Funktion gleicher Bauart identisch sei, so dass für sie der Schluss gültig ist. Kein Wort fällt aber dazu, warum er

[78] LUS, S. 11, unter Verwendung unserer bereits in der Einleitung erläuterten Bezeichnung für die Fregeschen Operatoren.

hier überhaupt eine Einschränkung der klassisch-logischen Schlussverfahren fordert, d. h., warum das Beispiel klassisch-logisch einen gültigen Schluss liefern würde. Er behauptet es lediglich und enthält sich danach jeder Begründung, die, so fügen wir hinzu, auch kaum gelingen könnte: Wie soll denn eine durchkonstruierte klare Logik eine solche Aussagenzusammenstellung wie im Beispiel zu einem gültigen Schluss erklären? Schamberger dürfte – wie es leider vielen, vielen Logikern vorher ebenfalls erging – ein bekannter Fehler unterlaufen sein, den er möglicherweise gar nicht als Fehler ansieht. Worin besteht er?

Schamberger strukturiert die von ihm ausgewählte wahre Aussage

> „Passau hat momentan über 50.000 Einwohner (A) und ist eine Universitätsstadt (B)“

mit

> (1) „A et B“

korrekt klassisch-logisch und sucht anschließend eine molekulare Aussage, deren Struktur klassisch-logisch aus (1) abgeleitet werden kann, z. B.

> (2) „A seq B“:

A	**B**	**(A et B)**	**folglich**	**(A seq B)**
w	w	w		w
w	f	f		f
f	w	f		w
f	f	f		w

Diesen Ausdruck übersetzt er nun falsch in

> „Wenn Passau momentan über 50.000 Einwohner hat, dann ist Passau eine Universitätsstadt“

(anders ausgedrückt: setzt ihn damit gleich) und stellt fest, dass es kein gültiger Schluss mehr ist, worin er wohl Recht hat. Was hat er aber übersehen? Zunächst ist in Anwendung des Fregeschen Kalküls[79] gültig, dass aus der Wahrheit von „w-w" folgt, dass eine der Möglichkeiten „w-w", „f-w", „f-f" wahr ist; mehr besagt „A seq B" nicht. „Wenn A, dann B" hat dagegen, wie inzwischen bekannt, eine viel stärkere Aussagekraft: So *muss* z. B. „w-w" erfüllt sein, und „w-f" *darf nicht* erfüllt sein. Eine solche Aussage geht aus „A et B" nicht hervor; sie steht in ihrem „Gewicht" weit über einem einfachen „A seq B".

Dieses Ergebnis bedeutet, dass an der klassischen Logik nichts verändert oder ausgeschlossen werden muss und dass sich auch keine Paradoxie ergibt, wenn man nicht so verfährt, wie er es tut. Der Grund für das angebliche Dilemma liegt in einem fundamentalen logischen Fehler Schambergers, der mit Hilfe einer unzulässigen Gleichsetzung von Ungleichem nachweist, dass die Ungleichheit wirklich besteht. Weniger philosophisch ausgedrückt, bleibt zumindest der Fehler der in sich verschränkten Doppelbestimmung logischer Operatoren der Umgangssprache, der vom Vorwort aus das gesamte Buch durchzieht.

Im analysierten Beispiel ist die Doppelbestimmung sogar nur auf die Konklusion begrenzt, da die Prämisse in der Grundbedeutung von „und" erfasst werden kann. In der Regel sind beide Seiten eines Arguments von einer Sinnverzerrung betroffen, wodurch Schambergers Vorgehen noch widersprüchlicher würde und wohl gänzlich schief liefe. Es dürfte deshalb kaum möglich sein, dass er seinen Ansprüchen und Zielen genügen wird.

Für uns vereinfacht sich wegen der Widersprüchlichkeiten der kritische Weg, da zu einer gehobenen Polemik gegen ihn, wie wir sie vorhaben, Rede und Gegenrede gehören, die von eindeutigen Antworten beider Partner profitieren. Der frühe Platz der prinzipiellen Widersprüchlichkeiten im Vorwort erlaubt es dagegen, auf immer wiederkehrende *vergleichende* Äußerungen zu den logischen Mängeln zu verzichten. Die folgenden Kritiken konzentrieren sich deshalb auf den jeweils vorliegenden Text zu den von ihm bearbeiteten Problemen. Das beeinträchtigt allerdings die Möglichkeit, in seiner Thematik auf größere Zusammenhänge einzugehen. Wir nehmen dies in Kauf, da es in unserer Sicht vorrangig um den Nachweis geht, dass Schambergers Formalisierung der Umgangssprache nicht zutreffend ist.

[79] Vgl. Abschnitt 2.2.

3.2.2 Zum Verhältnis von klassischer und deduktiver Gültigkeit

Nach der grundlegenden Kritik des kalkülmäßigen Anliegens Schambergers und der Klarstellung unseres Interesses daran wäre seine in der Einleitung formulierte eigenartige These (1), dass einige klassisch gültige Argumente der Umgangssprache nicht deduktiv gültig seien, an den Anfang zu stellen. Fast lässt sich sagen, dass er mit den dortigen Worten den erörterten Fehler des Vorworts wiederholt, doch sind die akzentualen Unterschiede trotz abstrakter Ähnlichkeit für uns so groß, dass wir sie ohne unnötige Abschweifungen und gemäß unserem angekündigten Vorgehen besser eigenständig diskutieren wollen.

Die in These (1) erwähnte (angebliche) Paradoxie ist selbstverständlich die des Vorworts, aber all das bleibt an der geäußerten Stelle völlig dunkel, denn erst auf den nächsten Seiten erfährt man, wie die neuen Begriffe zu begreifen sind. Nachdem er kurz erklärt hat, dass für ihn die klassische Logik die durch Frege entwickelte zweiwertige Prädikatenlogik erster Stufe mit Identität ist, heißt es zunächst: „Klassisch gültig nenne ich ein Argument genau dann, wenn es mindestens eine klassisch gültige logische Form hat“ (S. 15), wovon er über mehrere Genau-dann-Beziehungen zur allgemein anerkannten Feststellung gelangt, dass klassisch gültige Argumente Tautologien der klassischen Logik sind. Den noch fehlenden Ausdruck „deduktiv gültig“ schließt er – wieder mit Aufschub – an: „Deduktiv gültig ist ein umgangssprachliches Argument genau dann, wenn es unmöglich ist, dass die Prämissen wahr sind und die Konklusion falsch ist“ (S. 16). Damit erzeugt er ein Rätsel: Einige klassisch gültige Argumente, d. h., wie wir jetzt auch von Schamberger wissen, einige Tautologien, sollen nunmehr in Anwendung der These (1) möglicherweise wahre Prämissen und eine falsche Konklusion besitzen. Doch das kann unmöglich wahr sein: Die Definition des Begriffs „Tautologie“ schließt diesen Fall aus. Trotzdem bemüht sich Schamberger offenbar um ein Verständnis, denn einige Zeilen weiter schreibt er: „Vom Begriff der deduktiven Gültigkeit ist der Begriff der logischen Gültigkeit zu unterscheiden. Logisch gültig ist ein Argument genau dann, wenn es aufgrund seiner logischen Form unmöglich ist, dass die Prämissen wahr sind und die Konklusion falsch ist“ (S. 16 f.). Die klassische Gültigkeit gehört, wie von ihm selbst ausgeführt, zu den logischen Gültigkeiten, und so scheint es, dass er gegen die erwähnte Definition behauptet, dass logisch Gültiges deduktiv ungültig sein könnte, ja, er bestätigt sogar den „Schein“ ausdrücklich: „Im Falle der sogenannten paradoxen Argumente fallen der Begriff der klassischen Gültigkeit und der Begriff der deduktiven Gültigkeit auseinander. Paradoxe Argumente sind klassisch gültig, nicht aber deduktiv gültig. Denn es ist möglich, dass ihre Prämissen wahr sind und die Konklusion falsch ist“ (S. 18). Was ist hier los? Da nicht anzunehmen ist, dass Schamberger die gesamte klassische Logik aushebeln möchte, erwächst die Annahme, dass er etwas ganz anderes meint. Zum Glück folgt nach der zuletzt zitierten Aussage gleich ein Beispiel, das vielleicht Aufschluss gibt:

> „‚In Berlin leben mehr Ausländer als in München, zugleich ist die Kriminalitätsrate in Berlin höher als in München. Also: Wenn in Berlin mehr Ausländer leben als in München, dann ist die Kriminalitätsrate in Berlin höher als in München.‘ Dieses Argument ist […] logisch inakzeptabel. Das wird deutlich, wenn man eine seiner Aussagen durch eine beliebige andere ersetzt: ‚Der Kölner Dom hat zwei Türme, zugleich ist die Kriminalitätsrate in Berlin höher als in München. Also: Wenn der Kölner Dom zwei Türme hat, dann ist die Kriminalitätsrate in Berlin höher als in München.‘“

Ehe wir mit der eigenen Analyse beginnen, sei kurz darauf aufmerksam gemacht, dass Schamberger das Beispiel als „logisch unakzeptabel“ bezeichnet. Wieso denn das? Beabsichtigter Ausgangspunkt war doch eine Kombination von logischer Gültigkeit und deduktiver Ungültigkeit, und auf einmal ist von logischer Ungültigkeit die Rede. Diese Diskrepanz zeigt an, dass ein Irrtum, eine Verwechslung im Spiele ist.

Nun zur Analyse des Beispiels. Wir übersetzen – gegen unsere Überzeugung – die umgangssprachlichen Operatoren 1:1 in die Sprache des Fregeschen Kalküls und weisen zuerst nach, dass der Schluss unter dieser Bedingung einen tautologischen Charakter besitzt:

A: In Berlin leben mehr Ausländer als in München.

B: Die Kriminalitätsrate ist in Berlin höher als in München.

A	B	(A et B)	folglich	(A seq B)
w	w	w		w
w	f	f		f
f	w	f		w
f	f	f		w

Die Kombination „w-f“ fehlt in Prämisse und Konklusion gleichermaßen, also kann der Schluss als klassische Tautologie aufgefasst werden.

Bei der nunmehrigen Rückübersetzung in die Umgangssprache gilt es – gegen den gerade erfolgten 1:1-Operatorentausch – zu beachten, dass Frege, wie im zweiten Kapitel ausgeführt, bei der Konstruktion seines Kalküls nicht beabsichtigte, die Ungenauigkeiten der Umgangssprache beizubehalten. Die Rückübersetzung kann somit nur bis zur von Frege genutzten umgangssprachlichen „Startaussage“ gehen, wie es ja bereits im vorhergehenden Abschnitt 3.2.1 geschah. In erneuter Anwendung G. Freges und mit genauer Aufsplitterung der Wahrheitsbedingungen gilt deshalb in unserem Fall unter Nutzung der umgangssprachlichen Operatoren „und“ und „oder“:

Prämisse: A et B
„A et B“ ist wahr: „A“ ist wahr und „B“ ist wahr.
„A et B“ ist falsch: („A“ ist wahr und „B“ ist falsch) oder („A“ ist falsch und „B“ ist wahr) oder („A“ ist falsch und „B“ ist falsch).

Konklusion: A seq B
„A seq B“ ist wahr: („A“ ist wahr und „B“ ist wahr) oder („A“ ist falsch und „B“ ist wahr) oder („A“ ist falsch und „B“ ist falsch).
„A seq B“ ist falsch: „A“ ist wahr und „B“ ist falsch.

Verglichen mit der oberen Tabelle, ist demnach die übersetzte Prämisse nur in der 1. Zeile wahr, in den Zeilen 2, 3 *oder* 4 dagegen falsch, während die übersetzte Konklusion in den Zeilen 1, 3 *oder* 4 wahr ist, doch nur in der 2. Zeile falsch. Damit sind nach der Übersetzung auch die Detailbeziehungen zwischen „und“ und „oder“ deutlich erkennbar: Umgangssprachlich gilt zwischen den W- bzw. den F-Zeilen kein „und“ im üblichen Verständnis, sondern in gleicher Weise ein „oder“.

Auf die konkreten Termini der Aussagen haben wir aus Gründen der Übersichtlichkeit verzichtet; sie sind selbstverständlich Teil der Übersetzung, haben aber in dieser Konstruktion nur Einfluss darauf, ob A bzw. B bei „wahr" oder „falsch" eingeordnet wird. Daraus ergibt sich, dass die Prämisse in die erste Zeile gehört und die Konklusion ebenso. Der Übergang von

> „A et B" zu „A seq B"

bedeutet demnach umgangssprachlich nicht mehr, als dass bei Wahrheit von „w-w" immer die schwächere Aussage

> „w-w oder f-w oder f-f" (mit einem „oder" im Grundverständnis)

gleichfalls wahr ist und „w-f" unter diesen Umständen nicht wahr ist, so dass der Schluss gemäß der Definition Schambergers nicht nur klassisch, sondern auch deduktiv gültig sein muss. Man darf nur nicht über diese (korrekte) Rückübersetzung hinausgehen und in der Konklusion eine falsche Implikation behaupten, die – wie sich im Dom-Beispiel zeigt – z. B. ausschließen soll, dass jemals die Kriminalitätsrate Berlins die Führung gegenüber der Münchens verliert, solange der Kölner Dom zwei Türme hat. Schambergers erster Schritt, den wir bewusst fälschlich 1:1 übernahmen, war im Gegensatz zu „1:1" logisch eine Abschwächung, aus der heraus er nicht in der Rückübersetzung – nunmehr überziehend – bis zu „wenn-dann" gehen durfte. Ein Schluss ist eben nicht mehr als eine Entailment-Beziehung, und gegen sie hat Schamberger verstoßen, *womit* er sich eine Paradoxie einhandelte. Denn in unserer Rückübersetzung ist von Paradoxie nichts zu erkennen, und es darf sogar hinzugefügt werden, dass die Gegenbegründung so angelegt ist, dass bei korrekter Übersetzung *nie* eine Paradoxie auftreten kann: Ein klassisch gültiger Schluss ist stets ein deduktiv gültiger Schluss; die Trennung ist überflüssig und sinnlos. Für uns ist das Thema „Paradoxie" in dieser Fassung deshalb fortan „vom Tisch"!

Eine andere, eine zusätzliche Frage, die aber von Schamberger gar nicht gestellt wird, wäre möglicherweise auf die *Brauchbarkeit* eines solchen Schlusses gerichtet. Er scheint in korrekter Form völlig oder ziemlich belanglos zu sein, gemessen am heutigen Wissen. Doch das Wissen ändert sich ständig, und die Schlussvorgänge haben ihren eigenständigen Wert. Wohl die meisten Logiker und Mathematiker haben das längst erkannt. Unzählige Erkenntnisse dieser beiden Wissenschaften sind ohne die geringste Anwendung. Sie liegen auf „Reserve“, und niemand weiß, wann sie einmal benötigt werden. Jenseits aller Paradoxie ist ihr wissenschaftlicher Wert dadurch in keiner Weise beeinträchtigt.

3.2.3 Detailbemerkungen zur ersten Variante einer veränderten Konditionaleinführung

Der Entschluss, über angeblich klassische Schlussparadoxien nicht mehr sprechen zu wollen, belässt den Vorwurf an Schamberger, dass er – unterschiedlich im Ausmaß – im ersten Übersetzungsschritt bei allen bisherigen Beispielen die Beziehungen zwischen Prämisse und Konklusion leichtfertig logisch abschwächte. Denn er teilt ja meine Meinung, „wenn-dann“ sei ein eigenständiger logischer Operator neben dem Fregeschen Kalkül. Doch er erkannte offenbar nicht die Gedankenrichtung Freges und übersah die mit dem Operator „seq“ verbundene abschwächende Wirkung, sofern „wenn-dann“ analog übersetzt ist. Entschuldigend bleibt zwar, dass Frege den umgangssprachlichen Namen „wenn-dann“ beibehielt, aber es muss wiederholt werden, dass Schamberger wie all die vielen Logiker, die es ihm im Verständnis von „wenn-dann“ gleichtun, verpflichtet war, allein Freges Definition zu beachten. Es ist anders gelaufen, und so werden sich für uns auch unter dem neuen Aspekt der zwei Beschränkungsvarianten nicht geringe Bedenken fortsetzen, dass Schamberger die Umgangssprache gut trifft. Möglich wäre es vielleicht; und er würde dann auf einem neuen Weg – quasi „durch die Hintertür“ – die Gleichsetzung aufheben.

Analysiert sei zunächst die erste Variante, wonach – um deren Kern noch einmal deutlich zu nennen – der Schluss von „A und B“ auf „Wenn A, dann B“ nicht erlaubt ist. Die Erörterungen werden Gelegenheit geben, Schambergers Standpunkt zu den umgangssprachlichen Operatoren tiefer zu erfassen, denn bisher ist fast ausschließlich nur punktuell behandelt, dass „seq“ und „wenn-dann“ für ihn zwei verschiedene Operatoren sind. Doch worin unterscheidet sich nach Schamberger der letztere in umfassender Begründung detailliert vom ersteren?

Die schon erwähnten Beispiele bringen die angesprochene Verkettung von „und“ mit „wenn-dann“, fügen sich deshalb in diese Fragestellung sehr genau ein und sind in einem neuen Sinne nützlich, auch wenn sie von Schamberger paradox

„zurechtgestutzt" sind. Der genauere Blick auf die Konstellation der Termini und Operatoren soll vor allem dessen Begründung für die Ungültigkeit der Schlüsse erkunden, doch leider beendet er sie schnell: Als Beweis für die Unschlüssigkeit dient schon, dass die Ersetzung der Prämisse durch die Aussage

> „Der Kölner Dom hat zwei Türme"

noch unsinniger wirkt oder dass die Konklusion

> „Wenn Passau momentan über 50.000 Einwohner hat, dann ist Passau eine Universitätsstadt"

falsch ist (S. 9 und 18). Offen lässt er, woran das liegen könnte; ohne bei „und" und „wenn-dann" angekommen zu sein, bricht er seine Erörterung ab, so dass er nicht erklärt, warum die gewachsene Unsinnigkeit gerade mit der Schlussform und nicht mit anderen Umständen zu tun hat. Und überhaupt: Ist denn die Konklusion der Beispiele wirklich falsch? Das wäre gegen alle vorschnellen Rassismusvorwürfe und gegen die Einordnung der Passauer Universität erst einmal zu beweisen. Schaut man gründlich hin, sieht es so aus, als ob er das anscheinend gar nicht vorhat: Die Bewegung der Kriminalitätsrate bzw. die Eigenheiten der Universitätsstädte sollen an sich, allein durch ihre Nennung, zeigen, dass eine solche Aussage falsch sein muss. Ohne Kommentar ist das aber gar nicht zu erkennen, so dass einige erläuternde Sätze nicht überflüssig gewirkt hätten. Die Aussage zur Passauer Universität eignet sich sogar dazu, unproblematische sachliche Einwände zu äußern. Sie darf, wie es in der Umgangssprache üblich ist, als Kurzfassung der Aussage

> „Wenn Passau zu den Städten mit mehr als 50.000 Einwohnern gehört, ist es eine Universitätsstadt"

zu verstehen sein, die wohl nicht von vornherein falsch ist[80]. Für Deutschland wäre sie zu überprüfen, und danach erst könnte eventuell/wahrscheinlich

[80] Nimmt man das Land Brandenburg mit ähnlichen Belegen zur Grundlage, könnte die Implikation (fast) wahr sein.

gesagt werden, dass nicht jede dieser Städte eine Universität besitzt. Sowie Beispiele zunächst nicht erkannte sachliche Zusammenhänge enthalten können oder andererseits gegenteilig ursprüngliche Behauptungen nicht gelten, ist stets davon in Abhängigkeit die Schlussmöglichkeit neu zu bewerten. Die ergänzenden Untersuchungen erlauben dann ein Urteil darüber, ob ein Schluss getätigt werden darf.

Das Beispiel zum Anteil der Ausländer in Berlin und München sei deshalb noch einmal herangezogen, wobei die Frage wieder lautet, ob der Schluss logisch-strukturell haltbar ist. Die Prämisse, um damit zu beginnen, hat mit „und" nur einen aussagenverbindenden logischen Operator, und er stellt die bloße Existenz zweier Sachverhalte ohne Beachtung irgendwelcher Zusammenhänge *fest*. Anders die Konklusion. Der Operator „wenn-dann" negiert hier den Fall „w-f" und schweigt zu „f-w" und „f-f". Dadurch entsteht eine *zielende* Wirkung auf „w-w", wonach diese Belegung – wir wiederholen uns – so zu verstehen ist, dass „w-f" nicht schlechthin nur negiert wird, sondern im Unterschied zu „w-w" nicht sein kann oder nicht sein darf. Da nur ein Fall vorliegt, muss mit dem Begriff der Möglichkeit gearbeitet werden. Die Möglichkeit lässt sich messen an bekannten Gesetzmäßigkeiten beliebiger Art oder zumindest an deren Plausibilität, wobei die Unbestimmtheit von „plausibel" eine vorherige Eigendeutung verlangt. Hier dürfte allerdings, wie schon kurz erwähnt, offensichtlich sein, dass die Kriminalitätsrate in München möglicherweise die in Berlin übersteigen wird, so dass die Wenn-dann-Aussage, für sich genommen, falsch ist. In der Prämisse ist davon aber nichts zu hören oder zu sehen, so dass die Konklusion sprachlich mehr ausdrückt als die Prämisse. Auch auf diesem Wege kommen wir somit wieder zu dem Ergebnis, dass die Konklusion gegen die notwendige Bedingung für die Anwendung eines Schlusses verstößt, im Aussagebereich der Prämisse zu bleiben. Sie erfüllt diese Bedingung nicht, und so kann der Schluss erneut nicht aufgestellt werden.

Dieses wichtige letzte Ergebnis scheint die Konditionaleinführung über die Konjunktion weitgehend zu begleiten, und es findet sich, kalkülmäßig aufbereitet, schließlich in tiefsinnigerer Form auch bei Schamberger (S. 97), doch leider unter Voraussetzung der widersinnigen Doppelbestimmung von „wenn-dann", dass er dessen Gleichsetzung mit „seq" zum einen für legitim hält und daraus klassisch-logische Gültigkeit ableitet, zum anderen aber merkt, dass niemand einen solchen Schluss anerkennt, woraufhin er nun völlig unnötig an dem in sich ausgewogenen und korrekt konstruierten Fregeschen Kalkül Veränderungen vornimmt. Mit anderen Worten bedeutet das, dass eine Eingliederung von „wenn-dann“ in den klassisch-logischen Kalkül für ihn zunächst möglich ist und danach wieder nicht möglich ist, so dass er sich in Widersprüchlichkeiten bewegt, anstatt unabhängig daneben ein eigenes Gedankengebäude mit nichtklassischen Operatoren zu errichten. Unsere Überlegungen gehen dahin, und sie erwachsen aus den Beobachtungen der logischen Operatoren der Umgangssprache. Unwahrscheinlich bleibt dagegen, dass auch Ch. Schamberger sein Ziel erreicht.

3.2.4 Detailbemerkungen zur zweiten Variante einer veränderten Konditionaleinführung

Die Endübereinstimmung der ersten Variante mit meinen Vorstellungen, dass umgangssprachlich nicht von einer einfachen Konjunktion auf eine einfache Implikation geschlossen werden darf, macht es trotz sehr verschiedener Begründungen spannend, ob Schambergers zweite Einzelkorrektur am klassischen Kalkül ebenfalls dahin führt. Es geht um das Argument

> „Aus ‚A oder B‘ folgt ‚Wenn nicht A, dann B‘“,

das er genauso dominant ablehnt, auch wenn er, noch eigenartiger als bei der ersten Variante, die zugehörigen Beispiele inmitten der aufgereihten ungültigen Schlüsse vermerkt[81].

Die ähnliche klassische Schlussform hat die Struktur einer Tautologie, denn Prämisse und Konklusion haben die gleiche Matrix:

---

[81] Schamberger, LUS, S. 53, 91, jeweils im Rahmen der Punkte g) – i) der Statistiken. Die Analyse der aussagen-logischen Form in g) ist für uns ausreichend. Schon die die erste Variante erläuternden Beispiele sind isoliert und insofern systematisch unschön einleitend vorgezogen, ohne noch einmal in den Übersichten auf S. 52 f., 64 und 91 erwähnt zu werden. Lapidar heißt es nur auf S. 53: „So ist die logische Form des in der Einleitung angeführten Arguments über Kriminalität und Ausländerzahl nicht angeführt: (A et B) folglich (A seq B).“ Als Erklärung wird angeboten, dass die Logik nicht alle Argumente „aufzuklauben“ hat, obwohl die Statistiken richtungweisend sein sollen und gerade diese Beispiele der Erläuterung einer der Kernfragen von Schamberger dienen. Derartige Verletzungen der Systematik häufen sich leider im Buch.

A	B	A vel B	folglich	(non A) seq B
w	w	w		w
w	f	w		w
f	w	w		w
f	f	f		f

Ch. Schamberger übersetzt, wie wir es uns bereits denken können, das folgende Beispiel unbegründet in diese Tautologie, obwohl die Konklusion wieder eine implikative Struktur hat und er deren Unterschied zu „seq" anerkennt. Daher kann es gar nicht wundern, dass er sich wieder in Widersprüche verstrickt, letztlich aber deutlich dem Beispiel die Schlüssigkeit abspricht, wie es ja auch wirkt:

> Morgen fliege ich nicht in die USA (A), oder der US-Präsident wird morgen zurücktreten (B).
> Also: Wenn ich morgen in die USA fliege (nicht A), dann wird der US-Präsident morgen zurücktreten (B). (S. 59)

Abgesehen davon, dass solch einen Unsinn kaum jemand sagen wird, werden Prämisse und Konklusion zunächst wieder getrennt mit Blick auf die Wahrheitswerte der Elementaraussagen A und B hin analysiert. Dabei treten diesmal schon Schwierigkeiten bei der Prämisse auf, weil der logische Operator „oder" mit Ungewissheiten verbunden ist. Eine davon ist seit Jahrhunderten bekannt und heute weitgehend unproblematisch. Sie bezieht sich darauf, ob „oder" in einer bestimmten Aussage disjunktiv, d. h. im sog. einschließenden Sinne, der „wahr (w)" für die Konstellation „w-w" erlaubt, oder kontravalent, d. h. im ausschließenden Sinne, der „falsch (f)" für diese Konstellation fordert, zu verstehen ist. Im klassischen Kalkül dienen dazu „A vel B" bzw. „A aut B", wobei Ch. Schamberger Im Beispiel für die Übersetzung gewiss „A vel B" gewählt hat, da nicht im Geringsten sichtbar wird, dass der morgige Flug und der morgige Rücktritt des Präsidenten nicht zusammen möglich sein sollten.

Viel schwieriger ist dagegen eine zweite Ungewissheit zu beurteilen, die in kaum einem Logikbuch überhaupt erwähnt ist. Auch Ch. Schamberger übergeht sie. Das Problem lässt sich so charakterisieren,

dass zahllose Oder-Aussagen schon als „wahr" gelten, wenn eine der Konstellationen „w-f" oder „f-w", jede für sich betrachtet, wahr ist, bzw. als falsch, sofern sich „f-f" ergibt, und ebenso zahllose andere, die erst die Bewertung „wahr" erhalten können, wenn für „w-f" und für „f-w" jeweils mindestens eine Belegung möglich ist, bzw. die Bewertung „falsch", wenn „f-f" nicht auszuschließen ist.

Die erste Variante deckt sich mit den obigen klassischen Operatoren, die H. Reichenbach „*adjunktive*" Verknüpfungen nannte [82]. Wir haben dort diese Bezeichnung übernommen und mit „konnektiv" die für die andere mögliche Variante, doch ohne uns auf H. Reichenbachs Einzelbestimmungen generell festzulegen[83]. Hier wäre nur zu fragen, welcher Variante die Prämisse des Beispiels angehört. Es scheint, dass die vier Konstellationen zusammenhanglos sind, aber nicht eine nicht realisiert werden könnte. Doch der Sprecher möchte „nicht A – nicht B" nicht wahrhaben. Eine Begründung für diese Entscheidung ist bei Ch. Schamberger nicht zu finden, womit die Prämisse des Beispiels als adjunktiv geprägte neutrale Feststellung zu werten wäre. Die Konklusion lässt sich dagegen wegen der auswählenden Andeutung in „wenn-dann" hier nur konnektiv interpretieren[84] und benutzt somit einen anderen logischen Operator: U. a. *fordert* er die Realisierung von „nicht A – B", geht daher über die Prämisse hinaus und verwirkt den Schluss auf „Wenn nicht A, dann B". Darauf war Ch. Schamberger zwar auch gestoßen, doch auf unkorrektem Wege und insofern ohne wissenschaftlichen Wert.

In einem anderen seiner Beispiele tritt sein Durcheinander noch klarer hervor:

> „Die Cornell University liegt in New York City oder im Bundessstaat New York.
> Also: Wenn die Cornell University nicht im Bundesstaat New York liegt, dann liegt sie in New York City." (S. 60)

Die Prämisse ist eine (etwas sonderbare) legitime adjunktive Oder-Aussage mit der Erfüllung „w-w", denn New York City liegt im Bundesstaat New York. Während im ersten Beispiel in der Prämisse alle Konstellationen möglich sind, ist hier nur eine neben dreier falscher Möglichkeiten wahr, so dass überhaupt kein Recht besteht, in der Konklusion eine der falschen Kombinationen willkürlich

---

82 Vgl. Abschnitt 2.3.2.

83 Vgl. dazu Abschnitt 2.3.2.

84 Vgl. die Erläuterungen zu Schambergers obiger erster Variante der Abänderungen in Abschnitt 3.2.3 und die Ausführungen in der Einleitung.

auszuwählen und sie neutral als wahre Prämisse zu werten. Diese beiden Beispiele grenzen daher die Spanne der adjunktiven Oder-Aussagen ab, die für Schlüsse auf konnektive Wenn-dann-Aussagen nicht als Prämisse verwendet werden können.

Bis dahin – wir greifen isoliert das einzige Positivum seiner Beispiele heraus – hat Ch. Schamberger demnach insofern Recht, dass nicht geschlossen werden darf, doch es fehlen noch die wichtigeren konnektiven Oder-Aussagen als Prämissen eines Schlusses auf eine implikative Konklusion. Für viele dieser Aussagen wie z. B.

> „Eine zu einem Funktionsbild gehörige Tangente, die parallel zur x-Achse verläuft, beruht auf einem dortigen Extrempunkt (Aussage A) oder Sattelpunkt (Aussage B)"

bilden erkannte gesetzliche Zusammenhänge die Basis, die „f-f" ohne direktes menschliches Zutun ausschließen, Belegungen für „w-f" und „f-w" zur Verfügung stellen und vor allem *erfordern*. Damit könnte es scheinen, dass die Oder-Bedingungen für den Schluss auf

> „Wenn nicht A, dann B"

generell gegeben seien, sobald unter Ausschluss von „f-f" für „A" und für „B" Belegungen vorliegen. Die Anforderungen, „B" nachfolgend aus der Verneinung von „A" zu erschließen, wären damit zwar gegenüber dem adjunktiven „oder" erhöht, aber leider reicht diese Begründung oft nicht aus. Denn es könnte sein, dass eine dritte Möglichkeit anstelle der in der Oder-Aussage angeführten Fälle existiert. So ist es z. B. legitim, zwischen spitzen und stumpfen Dreiecken zu unterscheiden, doch die Aussage

> „Ein Dreieck ist spitzwinklig oder stumpfwinklig"

wird zumindest von guten Schülern nicht akzeptiert, denn es fehlen die rechtwinkligen Dreiecke. Die Umgangssprache offenbart eine weitere Unexaktheit, indem sie – fast widersinnig – „ein Dreieck" in Ausdrücken wie

> „ein Dreieck ist …"

als „alle Dreiecke“ bzw. „jedes Dreieck“ versteht:

> Für jedes Dreieck gilt, dass es spitzwinklig, rechtwinklig oder stumpfwinklig ist.

Im Kern geht es demnach um ein Zusammenwirken von „oder“ und „alle“, das noch genauer zu untersuchen ist. Es ist sehr wahrscheinlich ohne hinreichendes Sprachempfinden nicht zu entdecken, das wiederum nicht bei allen Schülern vorausgesetzt werden kann. So ist es legitim, in einem Umweg allein mit weiteren Anforderungen an konnektive „Oder“-Ausdrücke zum Ziel zu kommen: Erfasst ein solcher Ausdruck *alle* zu einem bestimmten „oder“ gehörenden Varianten, darf geschlossen werden. Die Unvollständigkeit führt dagegen bei konnektivem „oder“ in der Regel zur Ungültigkeit, es sei denn, dass es sich in der Konklusion um eine der seltenen adjunktiven Implikationen handelt. In diesem Fall ist in der Prämisse auch ein adjunktives „oder“ verwendbar. Um diese Unsicherheit auszuschließen, ließen sich als dritte (und vielleicht beste) Erklärungsmöglichkeit modale Operatoren nutzen, wie es H. Reichenbach in seinem von uns zitierten Arztbeispiel getan hat[85]. Auf unsere Beispiele angewandt, müssten die Aussagen

> „Verläuft die Tangente bei P parallel zur x-Achse und liegt dort kein Extrempunkt vor, hat dort notwendigerweise/kann dort nur ein Sattelpunkt (zu) sein“

und

> „Ist das Dreieck nicht spitzwinklig, hat es notwendigerweise/kann es nur stumpfwinklig (zu) sein“

überzeugend wahr sein. Die erste Aussage erfüllt diese Forderung, die zweite nicht, womit der Unterschied, um den es geht, genau getroffen ist.

Gerade die Schulmathematik verlangt hierzu trotzdem noch Ergänzungen. Denn die oftmalige Unwissenheit der Schüler erzeugt konnektive Oder-Aussagen, die das Ziel überschreiten. So steht für Wissende fest, dass die Winkelsumme im

---

85 Vgl. Abschnitt 2.3.2.

zweidimensionalen Dreieck 180° beträgt. Es gibt jedoch nicht wenige Schüler, deren mathematische Wissenslücken sie unsicher machen, ob die Winkelsumme bei 180° oder vielleicht über 180° oder vielleicht unter 180° liegt. Unter solchen Umständen wäre die konnektive Oder-Aussage

> „Die Winkelsumme im zweidimensionalen Dreieck beträgt 180° oder mehr als 180°

möglich, die als legitim gelten würde, wenn die Zweifel der Schüler bis dahin vollständig abgesteckt wären. Doch da in der Regel die Unsicherheit in beide Richtungen geht, läge noch ein unvollständiger Ausdruck vor, der dann korrekt ergänzt oder – bei einer gefundenen Lösung – vollständig gelöscht werden könnte.

Die mit „oder" verbundenen Schwierigkeiten sind trotzdem immer noch nicht gänzlich überwunden. Es ist sachlich berechtigt, die Frage der Winkelsumme im Dreieck *ohne die Fehlauffassung* von Schülern zu betrachten. Dann ist es möglich, in *konnektiver* Bewertung der Wahrheit die Aussage

> „Für alle Dreiecke gilt: Die Winkelsumme beträgt weniger als 180° oder 180° oder mehr als 180°

als falsch zu bezeichnen. Sie enthält Möglichkeiten, die es gar nicht gibt, doch in der Regel sogar – wegen verbreiteter *adjunktiver* Interpretation derartiger mathematischer Gegebenheiten – existent zu verstehen sind. Unvollständig ist sie keineswegs, aber „alle" ist nicht anwendbar, wenn es, eigentlich wie immer, um einen korrekten Ausdruck, hier im konnektiven Verständnis, gehen soll. Die Schulmathematik verlangt demnach unter Umständen eine Abgrenzung für „alle" nach beiden Seiten.

Die letztere modale Erklärung könnte dagegen unverändert übernommen werden, wenn man den Konjunktiv zusätzlich zuließe:

> Wenn nicht (unter 180°) und nicht (180°), dann MÜSSTE (mehr als 180°).

Doch das ist nicht der Fall.

Diese Zusammenhänge sind an Schamberger, der gleich unüberlegt zum klassisch-logischen Kalkül fand, vorbeigegangen. Dadurch gelangen ihm schon in der

Prämisse mit „oder" nur Halbheiten, und er musste von Anfang an diesen Kalkül wieder unnötig in Mitleidenschaft ziehen.

Damit ist hinsichtlich der Oder-Aussagen erst einmal genug gesagt, doch zur implikativen Konklusion stehen noch wichtige Bemerkungen an, die ein bisschen in die Breite gehen werden. Als Ausgangspunkt wählen wir die Wahrheitsmatrix des zuletzt herausgeschälten konnektiven „oder" unter Fixierung seines Zusatzmerkmals und setzen ein neues Beispiel mit einem möglichst ähnlichen „wenn-dann" dagegen.

Erläuterungsbeispiel: Die Lösungen einer vorliegenden Gleichung sind durch 3 teilbar (A) oder größer als 100 (B). (Interpretation: Die ausgewählte Gleichung kann beide Lösungen aufweisen.)

Folgt daraus: Wenn eine Lösung einer vorliegenden Gleichung nicht durch 3 teilbar ist (nicht A), ist sie größer als 100 (B)?

Zunächst die Matrizen mit zusätzlichen Erläuterungen:

A	**B**	**(A oder B)**	**folglich(?)**	**(wenn nicht A, dann B)**	**Erklärung**
w	w	w (kann)		w (kann)	(aus f-w)
w	f	w (muss)		w („fast" (?) muss)	(aus f-f)
f	w	w (muss)		w (muss)	(aus w-w)
f	f	f (nicht möglich)		f (nicht möglich)	(aus w-f)

<u>Zeile w-w</u> der Matrix: wahr

Dazu würden die Lösungen größer als 100 gehören, die durch 3 teilbar sind, doch müssen sie wegen „oder" nicht existieren. Kann-Fall!

Die Implikation macht sprachlich nicht sichtbar, wie mit durch 3 teilbaren Zahlen zu verfahren ist, schließt sie aber auch nicht aus. Gegen Freges Deutung als Kann-Fall wäre nichts einzuwenden.

<u>Zeile w-f</u> der Matrix: wahr

Mindestens eine der Lösungen ist kleiner als 101 und durch 3 teilbar sein. Muss-Fall!

Die Implikation äußert sich auch zu dieser Zeile nicht, doch machten wir schon darauf aufmerksam[86], dass „wenn" einen auswählenden Akzent besitzt, so dass

[86] Vgl. Einleitung und Abschnitt 1.2.3.

indirekt ausgedrückt werden soll, dass mindestens eine Belegung für „(A=w)/(B=f)" vorhanden ist. Erfüllen Aussagen eine solche Bedingung nicht, d. h., hat der „Dann"-Teil einen festen Wahrheitswert, lehnt die Umgangssprache Beispiele dieser Art in der Regel ab wie in

> „Wenn die Winkelsumme im Dreieck 180° beträgt, gilt der Pythagoras"

als sinnvolle Äußerung ab, wobei wohl eine Rolle spielt, dass „wenn" als überflüssig angesehen wird. Leider liegen aber *zahlreiche* akzeptable Ausnahmen vor, so dass wir in der Tabelle „fast" mit Fragezeichen versehen haben. Denn eine Aussage wie

> „Wenn 18 durch 6 teilbar ist, dann ist 18 auch durch 3 teilbar"

wird nicht abgelehnt, obwohl beide Wahrheitswerte fest sind und man wie beim Pythagoras zur Begründung der Ablehnung sagen könnte, dass „18:3" immer gilt, nicht nur bei „18:6". Die Akzeptanz ist dadurch jedoch bei Schülern nicht aufgehoben, und sie sollte in einer Wissenschaft, als die sich die Logik versteht, auch hingenommen werden. Was verbirgt sich eventuell dahinter? Die Lösung führt über unsere Erörterungen zum Begriff des Schlusses: Die Konklusion unterliegt dem Entailment-Prinzip und der sprachverkürzenden Wirkung der Umgangssprache. So wird nicht selten der Schluss aller Schlüsse, der „modus ponendo ponens" mit der Struktur

> „Aus ‚Wenn A, dann B' und ‚A' folgt ‚B'",

gar nicht expliziert, sondern nur die elementare Implikation verwendet und sie zum Symbol dieses Schlusses erklärt. Hierzu gehört die Aussage

> „Wenn 18:6 eine ganze Zahl ergibt, dann auch 18:3",

die als Schluss

> „Aus ‚Wenn 18:6 eine ganze Zahl ergibt, dann auch 18:3' und ‚18:6 ergibt eine ganze Zahl' folgt ‚18:3 ist ganzzahlig'"

verstanden und *wegen der Anwendung eines mathematischen Gesetzes* akzeptiert wird. Der längere Satz gilt sogar als unnötige Verdopplung. Bei der implikativen Verknüpfung von Winkelsummensatz und Pythagoras ist es anders: Bis heute fehlt für die Schüler jede Begründung, dass der Pythagoras als wahr anzuerkennen ist, wenn der Winkelsummensatz als wahr erwiesen ist. Die entsprechende Implikation bleibt ohne sachliche Basis, so dass einem solchen Satz ein Sinn abgesprochen wird. Die Normalstruktur von Wenn-dann-Sätzen verlangt eben „w-w" und „f-f".

Diese Zusammenhänge lassen erkennen, dass bei konnektivem „oder" die Unterschiede zwischen Prämisse und Konklusion größer sein können als ursprünglich erwartet. Unsere derzeit untersuchte Variante, wie es mit dem Schluss von „oder" auf „wenn-dann" steht, wird davon zwar nicht beeinflusst – die Konklusion ordnet sich sogar noch stärker der Prämisse unter, und der Schluss ist dementsprechend gültig –, der Rückschluss von „wenn-dann" auf „oder" scheidet aber aus. Die der adjunktiven Verknüpfung (als Tautologie) entsprechende Gleichbedeutung ist unter konnektiven Bedingungen zerstört, da „oder" eine Belegung für „w-f" verlangt und „wenn-dann" unter Ausnahmebedingungen darauf verzichtet. Das letztere Beispiel würde in der Umkehrung die Konklusion in eine sinnlose Oder-Verknüpfung verwandeln:

> „18:6 ergibt keine ganze Zahl oder 18:3 ist ganzzahlig" als Schluss aus
> „Wenn 18:6 eine ganze Zahl ergibt, dann auch 18:3"

zu nehmen, fände bei den Schülern keine Anerkennung: Ein Schluss von einer konnektiven Wenn-dann-Aussage auf eine konnektive Oder-Aussage ist nicht schlechthin möglich.

Das sei hier passend, doch etwas vorausschauend eingeflochten, und so kann die Erörterung der beizubehaltenden Variante – nun schon eingeordnet – beendet werden. Es geht abschließend um die *Zeilen „f-w" und „f-f"*, und sie werfen keine neuen Probleme auf. *Zeile „f-w"* ist bei „oder" der zweite „Muss-Fall", und die Implikation zielt genau auf diese Zeile, während beide Aussagen *Zeile „f-f"* eine Belegung verweigern, so dass Übereinstimmung besteht.

Soweit unsere Überlegungen zu Schambergers zweiten Eingriff in die Konditionaleinführung. Danach hat sich seine generelle Ablehnung des Schlusses von

„A oder B“

auf

„Wenn nicht A, dann B“,

sofern B in üblicher Weise unter Anwendung des Disjunktiven Syllogismus abgeleitet ist (S. 11 und später mehrfach) nicht bestätigt, und es wurde noch deutlicher, dass er die vielfältigen Wirkungen der logischen Operatoren unzureichend aufgedeckt hat. Als besonders vernachlässigt erwies sich der Oder-Operator, wofür auch spricht, dass ihm im jüngsten Fall nicht auffiel, dass bestimmte Disjunktionstypen einen Schluss auf Implikationen in Normalstruktur erlauben.

Schamberger könnte erwidern, dass sein Urteil sich global auf Disjunktionen bezieht und dann schon gerechtfertigt ist, wenn sich nicht aus allen Disjunktionen gültige Schlüsse auf Implikationen ziehen lassen. Dem wiederum wäre zu entgegnen, dass der gemeinsame Ausdruck „oder“ täuscht, da er sachlich unterschiedliche logische Operatoren in sich vereinigt, ohne deren namentlich-definitionsmäßige Trennung die Schüler nicht wenige mathematische Probleme nicht logisch korrekt lösen würden. Der Oberbegriff „oder“ leistet dafür nicht genug[87].

3.2.5 Methodische Bemerkungen zur ganzheitlichen Analyse des Schambergerschen Kalküls

Da die Analyse der beiden Einschränkungen die logischen Mängel Schambergers noch klarer hervortreten ließ und die Bedenken, die in der Zurückweisung seiner Unterscheidung von klassisch-logischer und deduktiver Schlussgültigkeit bereits zu Wort kamen, bestätigte, darf von der Quasigewissheit gesprochen werden, dass sein Kalkül wohl nicht einmal angenähert die Umgangssprache logisch bewältigen

87 Die hier angewandten Analysen der logischen Operatoren sind der Polemik gegen Schamberger angepasst. Deren grundsätzliche Bewertung in Kapitel 4 wird darüber hinausgehen und z. B. die Kompliziertheit des Oder-Operators noch erhöhen: Erscheint „oder“ mit „nicht“ verbunden, entwickelt sich in Abhängigkeit von der Aussage umgangssprachlich ein adjunktiver Sinn für „oder“. Eine ähnliche Tendenz zeigt sich auch bei negierten Implikationen.

wird. Es dürfte deshalb die prinzipielle Frage nach der Brauchbarkeit des Kalküls für einen solchen Anspruch überflüssig geworden sein, so dass von jetzt an nur noch wichtig ist, woran sich im Einzelnen die Missdeutungen Schambergers zeigen. Unter normalen Bedingungen wäre dazu nunmehr der Kalkül zu analysieren und zu bewerten, woraus sich aber ein unschöner „unmathematischer" Umweg ergeben würde, ehe die Schulmathematik erreicht wäre. Schamberger eröffnet jedoch in seinem Kapitel „Umgangssprachliche Argumente" einen zweckmäßigeren Weg. Gleich zu Beginn heißt es dort: „In diesem Kapitel *entscheidet sich*, was eine Logik der Umgangssprache leisten muss. […] In Abschnitt 2.1 befasse ich mich mit […] Fragen zu meiner Methode. In Abschnitt 2.2 biete ich eine systematische Sammlung paradoxer Argumente, also klassisch gültiger Argumente mit (möglicherweise) wahren Prämissen und falscher Konklusion. Demgegenüber verteidige ich in Abschnitt 2.3 einige umstrittene Schlüsse" (S. 43). Im 3. Kapitel bringt er diese seine Einstellung zur Bekräftigung noch einmal: „Was F [sein Kalkül, H. A.] leisten soll, wurde im vorigen Kapitel *entschieden*" (S. 90). Es ist daher völlig korrekt und legitim, den Kalkül, wie Schamberger ihn im 3. Kapitel entwickelt hat (S. 90 ff.), nicht an seiner abstrakten Struktur zu messen, sondern an der Fülle seiner Beispiele, die als unser Hauptziel darüber hinaus einen besseren Einblick in die Fehlerquellen ermöglichen.

Die Allseitigkeit der soeben zitierten Aussagen Schambergers gäbe uns das Recht, die Beispielmethode in positiver wie in negativer Hinsicht für die Bewertung seines Kalküls grundlegend anzuwenden, aber ein positives Urteil hätte wenig Wert: Selbst wenn alle aufgeführten Schlüsse logisch gelängen, wäre dies noch keine Antwort darauf, ob sein Kalkül *stets* der Umgangssprache genügen würde. Schon das nächste Beispiel eines Schlusses könnte zu Komplikationen führen, entweder so, dass Schamberger gegen die anerkannte Intuition dem Schluss Gültigkeit bescheinigt, oder entgegengesetzt, dass er sie, wieder gegen die Intuition, abspricht. Zwischen den Zeilen wird sichtbar, dass er einverstanden wäre, sich einer Prüfung auf korrekte Verallgemeinerung zu stellen, doch schließlich möchte er seinen Anspruch auf Absolutheit und Fehlerlosigkeit retten, und so findet sich im Zusammenhang mit den von ihm abgelehnten Schlüssen dieser Satz: „Die Schlüsse (a) bis (p) stehen *stellvertretend* für *alle* Schlüsse, die in umgangssprachlichen Argumenten das Prinzip des Wahrheitstransfers verletzen" (S. 53). Das ist selbstverständlich nicht mehr als eine beweislose Behauptung, doch wir werden sie großzügig zur Kenntnis nehmen, da, wie erläutert, für uns allein der andere

Fall dahingehend Wichtigkeit besitzt, ob und wie die Beispiele konkret Schambergers Mängel aufzeigen. Dabei werden in unseren Analysen seiner Beispiele auch logische Bezüge zur Schulmathematik eine Rolle spielen, so dass ganz nebenher sporadische Vorleistungen für unser eigentliches Anliegen sogar in doppelter Form erbracht werden können, nämlich nicht nur für unser umgangssprachliches Allgemeinverständnis, sondern obendrein hinsichtlich der schulmathematischen Besonderheiten. Der Weg über Schambergers Beispiele zur umfassenden und endgültigen Zurückweisung seines Kalküls ist deshalb, auch wenn er ebenfalls etwas lang wirkt, erheblich kürzer als der, der eigentlich zu beschreiten wäre.

Uns sind drei kritische Rezensionen bekannt geworden[88], die in unterschiedlicher Wertung und anders, als es von uns beabsichtigt ist, sich mit Schamberger auseinandergesetzt haben. So fehlt z. B. die für uns wichtige Unterscheidung von adjunktiven und konnektiven logischen Operatoren völlig, wovon anscheinend kaum einem Logiker etwas bekannt ist. Einige ihrer Kritiken sind trotzdem meiner Auffassung ähnlich, doch da sie eng mit von unserem Thema wegführenden oder von uns abgelehnten Einschätzungen verbunden sind, haben wir die Rezensenten nur dann hier genannt, wenn wir deren Kritiken direkt übernommen haben.

3.2.6 Analyse der restlichen strittigen Argumenttypen Schambergers

Der in dieser Überschrift etwas eigenartig wirkende Bezug auf die noch zu analysierenden Argumenttypen ist dem unsystematischen Vorgehen Schambergers geschuldet, der die zu seinen beiden Einschränkungen gehörenden Typen einmal heraushob und ein andermal, wie bereits dargelegt, als Unterpunkt (g) eingliederte, womit er seine Statistiken (S. 52 f., 93) zerriss. Obendrein behandelte er den Typ der Kontraposition gesondert (S. 38 ff.), so dass eine Restmenge von 22 strittigen bzw. ungültigen Argumenttypen oder Schlussfiguren verbleibt. Davon sind für ihn 15 ungültig, während er 7 (mit der Kontraposition) nach Diskussion akzeptiert[89]. Betont sei jedoch von vornherein, dass Schambergers nachfolgende

88 Vgl. Abschnitt 2.4.

89 Mit einer Extrastatistik für sechs Typen auf S. 64.

Ausführungen zu den einzelnen Argumenttypen die in grundsätzlicher Form widersprüchlich dargestellten Beziehungen zwischen Umgangs- und Kunstsprache in sich tragen, wozu wir uns ja schon mehrfach kritisch geäußert haben. Sie werden im Folgenden mitunter sprachlich etwas vernachlässigt, um unsere neuen objektbezogenen kritischen Anlässe deutlicher in den Mittelpunkt stellen zu können.

Ausgangspunkt sind für ihn auch in der Feinanalyse der Argumenttypen die umgangssprachlichen logischen Operatoren, die er sofort uneingeschränkt in die Lesart Freges übersetzt, um dadurch eventuell – das sei zu seinen Gunsten einmal eingeflochten – zu anregenden Widersprüchen zu gelangen. Diese soweit nützliche Methode kommt aber nun in der sich entwickelnden sprachlichen Erörterung kaum zur Anwendung, da er bei der Doppelbestimmung der logischen Operatoren bleibt und obendrein mit Hilfe erst noch zu beweisender Thesen neue Einsichten erzielen will, so dass Widersprüche bzw. Zirkelschlüsse entstehen[90]. Dieser Grundfehler wird in den folgenden Untersuchungen der Einzelbeispiele alle problematischen Argumenttypen berühren.

Unsere Absicht, mit den für ungültig erklärten Schlussfiguren zu beginnen, wird wegen einer methodischen Besonderheit Schambergers quasi verhindert: Die in mittelalterlich-lateinischer Diktion überlieferten klassischen Schlüsse „ex falso quodlibet“ und „verum ex quolibet“ zerfallen bei ihm in eine allgemeinere (S. 52–54) und eine speziellere Variante (S. 64–67), von denen er die letztere unter den neuen Namen „ex contradictione quodlibet“ bzw. „tautologia ex quolibet“ akzeptiert und die andere ablehnt. Eine getrennte Untersuchung wäre wegen ihres engen Zusammenhangs fast unsinnig, und so werden die acht Schlussfiguren – sechs für die allgemeinere und zwei für die speziellere Form – zu Beginn in traditioneller Bezeichnung en bloc analysiert.

---

90 Auf einen generellen und somit übergreifenden Zirkelschluss macht T. Lampert aufmerksam: „Will man hingegen unter Berufung auf eine Argumentationspraxis einen formalen Kalkül begründen und unter Berufung auf formale Beweisführungen in diesem Kalkül die Argumentationspraxis beurteilen, dann ist dies zirkulär“ (Lampert, Logische Gültigkeit, S. 118).

3.2.6.1 *„Ex falso quodlibet" und „verum ex quolibet" (in traditioneller Verallgemeinerung)*

Es handelt sich sehr wahrscheinlich um die beiden berühmtesten und gleichzeitig umstrittensten weltgeschichtlich genutzten Schlussfiguren. Die Berühmtheit verdanken sie ihrer wohl nicht mehr zu überbietenden Abstraktion und die Strittigkeit den Interpretationen ihrer lateinischen Fassung[91] sowie ihren unterschiedlichen Formalisierungen. Schamberger versteht offenbar „ex falso" bzw. „ex quolibet", gemessen an seinem allerdings nicht ganz eindeutigen Kontext, bedingungslos wörtlich, so dass die Ausdrücke sich auf

> logische Widersprüche bzw. logische Tautologien

oder/und

> auf sachliche Unrichtigkeiten bzw. sachliche Gegebenheiten

beziehen können. Die erstere Teilmenge sondert er dann ab und ordnet sie – anders als den Gesamtausdruck – bei den gültigen Schlüssen in selbstständiger Form ein.

3.2.6.1.1 *Die allgemeinen Fassungen*

Wir wenden uns zuerst den beiden allgemeinen Fassungen zu und beschränken uns, ohne die Allseitigkeit unserer Aussagen zu drosseln, auf die aussagenlogische Interpretation. Ihre Spezifik gegenüber den prädikatenlogischen Varianten ist in den lateinischen Ausdrücken nicht ausgewiesen, so dass als deren Übersetzungen in die deutsche Sprache etwas frei die Aussagen

> „Wenn eine Aussage falsch ist, lässt sich Beliebiges daraus folgern"

---

[91] Die Schlüsse wurden sehr wahrscheinlich erstmals von Aristoteles in griechischer Sprache formuliert und später in lateinischer Diktion weltberühmt.

sowie

> „Wenn eine Aussage wahr ist, folgt sie aus Beliebigem"

zu verantworten wären.

Diese unmittelbare Übersetzung aus dem Lateinischen ins Deutsche findet sich bei Schamberger nicht; er wählt gleich als angeblich annehmbare Formalisierung die Strukturen

> „Aus ‚non A' folgt ‚A seq B'"

sowie

> „Aus ‚A' folgt ‚B seq A'" (S. 52),

aus deren Prämissen jedoch nur – wie die deutschen Übersetzungen gleich zeigen werden – über Umwege, die an Korrektheit etwas einbüßen, folgt, dass „ex falso" und „verum" gemeint sind.

Zunächst seien seine Beispiele zu „ex falso quodlibet" näher betrachtet. Zum ersten Beispiel heißt es:

> „Es ist nicht der Fall, dass die SPD in der nächsten Bundestagswahl die absolute Mehrheit erreicht.
> Also: Wenn die SPD in der nächsten Bundestagswahl die absolute Mehrheit erreicht, wird Udo Lindenberg Bundeskanzler." (S. 54)

Sein anschließender Kommentar beginnt gemäß seiner umständlichen Formalisierung mit der vom Leser kaum erwarteten Feststellung, dass die Prämisse wahrscheinlich wahr und die Konklusion sicherlich falsch ist, denn es sollte ja um einen Schluss „ex falso" gehen. Das Beispiel trifft somit erst im zweiten Schritt das Anliegen: Zu kommentieren wäre allein die Konklusion

> „Wenn die SPD in der nächsten Bundestagswahl die absolute Mehrheit erreicht, wird Udo Lindenberg Bundeskanzler"

gewesen, wofür die (von ihm und von uns nicht anerkannte) umgangssprachliche Schluss-form

„Aus ‚Prämisse ist falsch' folgt (beliebiges) ‚B'"

als nur eine Möglichkeit hätte benutzt werden können. Vielleicht hätte er dann seine Konklusion nicht als Übersetzung von „A seq B" verstanden und nicht behauptet, dass das umgangssprachliche (Rest-)Argument klassisch gültig sei (S. 54). Die nachfolgende Begründung bezieht sich allein auf diesen Kalkül, und nur wegen seiner Fehlübersetzung erlaubt er sich, sie auch auf sein konkretes Beispiel anzuwenden. Damit würde er aber, d. h. bei einer solchen Übersetzung, gegen seine Behauptung die aus dem konkreten Text abgeleitete Möglichkeit verwirken, von deduktiver Ungültigkeit und Paradoxie zu sprechen. Das scheint er selbst zu merken, denn nun knüpft er isoliert an den umgangssprachlichen Wortlaut an und verliert sich in einem widersprüchlichen logischen Durcheinander, auch wenn sein Ergebnis, für sich genommen, nicht zu bezweifeln ist.

Wir wollen anders herangehen und an den Anfang die Überlegung setzen, dass eine falsche Prämisse keine eigenständigen Mittel aufweist, um irgendetwas Wahres definitiv zu behaupten. Von dort sind keine neuen Erkenntnisse erreichbar, so dass auch ein Schluss keinen wissenschaftlich-geistigen Gewinn oder Nutzen bringen kann. Jede Konklusion bleibt eine unbewiesene sprachliche Ergänzung und ist insofern überflüssig. Die Situation lässt sich daher auch so ausdrücken, dass nichts geschlussfolgert werden kann. Sehr wahrscheinlich sehen die Schüler das genauso. Wie alles, das im Unterricht eine Rolle spielt, hat ein logischer Schluss ebenso zur Erweiterung der Kenntnisse, Fähigkeiten und Fertigkeiten der Schüler beizutragen. Sobald jedoch ein und dieselbe Prämisse ohne Sinnänderung beliebig um eine Konklusion ergänzt wird – was nur klappt, wenn die Prämisse falsch ist –, erlischt eine solche Funktion und damit der ganze Schluss. Es läuft demnach aufs selbe hinaus, ob von der fehlenden Schlussmöglichkeit oder vom Schluss auf Beliebigkeiten gesprochen wird. Für die Schüler ist die erstere Formulierung aber mit Sicherheit verständlicher, und so soll hier auf den Schluss „ex falso quodlibet" unter bedingter Billigung eines gleich zu analysierenden Spezialfalls fortan verzichtet werden. Er ist ja letztlich auch nicht „echt".

Damit zu „verum ex quolibet“ mit dem Standardbeispiel

> „Der nächste Präsident der USA wird Hillary Clinton sein.
> Also: Wenn Hillary Clinton auf eine Präsidentschaftskandidatur verzichtet, dann wird der nächste Präsident der USA Hillary Clinton sein.“ (S. 56)

Selbstverständlich nimmt Schamberger keinen Anstoß daran, dass er „wenn-dann“ zunächst (ohne Worte) in „seq“ übersetzt hat, um danach (verbal und quasi äquivalenzbejahend!) die Rückübersetzung zu behaupten, wobei er eigenartigerweise die als wahr geforderte Aussage aufweicht, indem er betont, dass er ihren Wahrheitswert offen lässt (S. 56). Sein umgebauter Schluss entspricht daher wieder nicht wörtlich seinem Anliegen, wonach ja Clintons Präsidentschaft eine stets wahre Aussage ist. Unter dieser Bestimmung erübrigt es sich, dass er seine Konklusion deswegen für falsch hält, weil Hillary Clinton wegen ihres Verzichts (eigentlich) sowieso nicht Präsident werden kann. Auch dann müsste sie laut Beispiel aber Präsident werden, und das ist sogar denkbar: Maßstab für sein Wahrheitsurteil ist allein seine nicht näher erläuterte Interpretation, die sicher wegen eines möglichen Sinneswandels Clintons niemand offiziell autorisiert hat. So ist es gerechtfertigt, unsere obige Übersetzung noch drastischer als (legitime) Volksmeinung auszudrücken:

Was wahr ist, bleibt wahr, unabhängig davon, was überhaupt passiert ist oder passieren kann bzw. gesagt ist. Durch keine willkürlich davorgesetzte Prämisse kann Wahres unwahr/falsch werden. Auf das (allerdings etwas unglückliche Zukunfts-)Beispiel bezogen, heißt das, dass Hillary Clinton, sollte es göttlich vorprogrammiert sein, Präsident der USA wird.

Das klingt sehr klar und ist es auch, doch entstehen logische Schwierigkeiten, wenn diese Erkenntnis unter Verwendung von „wenn-dann“ ausgesprochen wird. Denn keine einzige Wenn-dann-Aussage erfasst ihren Sinn vollständig, ja, scheint ihm sogar zu widersprechen, da sie zielend und auswählend einen möglichen Wechsel des Wahrheitswertes ins Verständnis zieht. Kompensiert werden diese Einzeltendenzen jedoch mittels einer quasi-mathematischen Integration der unendlich vielen möglichen Wenn-dann-Aussagen, wodurch deren jeweilige Einzelbeschränkung sich aufhebt und „wahr“ als festes Konklusionsergebnis herauskommt.

Der Übergang ins Unendliche hat somit die Gesamtwirkung von „wenn-dann" verändert, und dem Beispiel darf daher kein vereinzelter Sinn gegeben werden. Eine sprachliche Wendung wie

> „selbst wenn Hillary Clinton (vorher) verzichtet haben sollte"

wäre treffend, womit die integrative Richtung deutlich stärker sichtbar würde. Auch völlig Unsinniges könnte über ähnliche Zusatzworte besser eingeordnet wirken: In Schambergers Beispiel für Formulierungen mit dem Existentialoperator wird aus dem Dasein einer über 100 Jahre alten Person geschlossen, dass, wenn sie unter 18 Jahre alt wäre, sie dieses Alter hätte (S. 57). In der Diktion leicht verändert, wäre

> „Die betreffende Person ist nun mal über 100 Jahre alt, auch dann (ex quolibet!), wenn sich dies aus einem (gleichzeitigen) Alter von unter 18 Jahren ergäbe"

unseres Erachtens bereits eine nicht ganz abwegige Formulierung. Wie dem aber auch sei: Wir wollen uns für den erörterten Sinn von „verum ex quolibet" als Quintessenz aus einer gleichgerichteten Menge unendlich vieler Konditionalaussagen entscheiden und den Schluss – im Unterschied zu Schamberger – als gültig anerkennen. Er behielte in dieser Interpretation sein philosophisches Gewicht.

Eine Rückkehr in „endliches" Denken wäre aber für die Schulmathematik wohl angemessener. Denn Schüler neigen in jedem Fach dazu, Lehrer in Diskussionen zu verstricken, um fragwürdige Eigenergebnisse doch noch „an den Mann" zu bringen. Standhafte Lehrer berufen sich dann auf unseren Schluss, wonach u. a. mathematische Wahrheiten eben mathematische Wahrheiten bleiben und es z. B. nie ein Schüler schaffen wird, für irgendeine reelle Zahl einen festen Nachfolger ausfindig zu machen, auch wenn ihm alles andere nicht einleuchtet.

Dieser spezifisch pädagogische Gedanke sei nachträglich und rückwirkend auch auf „ex falso" angewandt, obwohl er dort weniger Gewicht hat. Mitunter ist es jedoch recht hilfreich, wenn ein Schüler z. B. auf

> „ $\sqrt{90}$ ist eine rationale Zahl"

beharrt, darauf

„ $\sqrt{2}$ müsste dann auch eine rationale Zahl sein“

zu antworten, da Schüler diesen Ausdruck und seine Tücken meist gut kennen. Einem derartigen Nutzen könnte entsprochen werden, indem für „verum ex quolibet“ zusätzlich und für „ex falso quodlibet“ bedingt „pädagogisch“ gültige logische Operatoren eingeführt würden, für die sich umgangssprachlich „auch wenn/auch dann“ oder „selbst wenn/selbst dann“ verwenden ließen.

3.2.6.1.2 Die Spezifizierungen

Soweit zum allgemeinsten Verständnis der lateinischen Schlussformen, womit das Urteil zu Schambergers erster Spezifizierung „ex contradictione quodlibet“ schon festgelegt wäre, da unsere Begründung für die Nichtexistenz einer Schlussmöglichkeit übergreifend angelegt ist und Schambergers nunmehrige Bejahung ebenfalls ausschließt. Anders dagegen bei seiner zweiten Spezifizierung „tautologia ex quolibet“, in deren Anerkennung wir uns von ihm nicht unterscheiden, aber ziemlich gewiss in der zugehörigen Begründung, so dass seine Auffassung zu untersuchen wäre. Sie konzentriert sich formal auf die Verteidigung des Umstandes, dass die Konklusion nicht die gleiche Aussagenvariable wie die Prämisse besitzt, so dass sie vordergründig gegen die Relevanzlogiker gerichtet ist, für die solche Schlüsse zu inhaltsverschieden sind. Bei „ex contradictione quodlibet“ fehlt diese Begründung, doch es hätte schon etwas gesagt werden können oder sogar müssen, denn dort findet sich derselbe Umstand. Dadurch kommt Schamberger nicht umhin, rückwirkend auch diese Spezifizierung einzubeziehen, so dass es für uns zweckmäßig sein dürfte, einige übergreifende Gedanken zu ergänzen und seine Argumentation hinsichtlich *beider* Spezifizierungen zu beachten.

Zu „ex contradictione quodlibet“:

„A et (non A)“ folglich „B“ (S. 64 f., 91).

Hierbei will sich Schamberger nicht lange aufhalten; er meint, die Gültigkeit dieses Schlusses – und die des zweiten Schlusses in schneller Verallgemeinerung ebenso – „könnte man mit einer einfachen Überlegung verteidigen: Da widersprüchliche Prämissen notwendigerweise falsch sind, erfüllen Argumente mit widersprüchlichen Argumenten automatisch das Kriterium des Wahrheitstransfers: Es ist unmöglich, dass deren Prämissen wahr sind und die Konklusion falsch ist. Entsprechendes gilt für Argumente mit logisch wahren Konklusionen" (S. 65). Wir erinnern uns an die „einst" gegebene Definition des Begriffs „Wahrheitstransfer", doch sie passt wohl nicht zu „ex contradictione": „Deduktiv gültige Argumente sind wahrheits*erhaltend* und weisen einen Wahrheitstransfer auf: Wenn die Prämissen wahr sind, überträgt sich deren Wahrheit notwendigerweise auf die Konklusion" (S. 16). Diese Definition macht Schambergers jetzige Begründung zumindest sonderbar: Der „Schluss" erreicht nie die für den Wahrheitstransfer erforderliche Stufe „w-w" und verharrt bei „f-w" oder „f-f". Der im ersten Zitat dem Doppelpunkt folgende Satz, der anscheinend Schamberger Recht geben soll, wirkt aber überhaupt nicht aufklärend, solange „w-w" fehlt. Seine richtige Idee, den Wahrheitstransfer als wichtiges Kriterium für eine „echte" Schlussgültigkeit herauszustellen, kann daher keine Anwendung finden. Schlimmer noch: Man kommt aus der widersprüchlichen Prämisse nicht einmal auf ein gesichertes „f-f", d. h. auf eine (isoliert stehende) falsche Aussage. Es ist eben alles möglich.

Hier stände nunmehr die zweite Spezifizierung an, doch wegen der eingangs erwähnten Gültigkeit, die beide Spezifizierungen seines Erachtens in gleicher Weise besitzen, wendet sich Schamberger zunächst ziemlich direkt noch einmal „ex contradictione quodlibet" zu und entwickelt im Anschluss an ein Beispiel des mittelalterlichen Philosophen Alexander Neckam (1157–1217) gegen die Relevanzlogiker eine modifizierte Auffassung vom inhaltlichen Zusammenhang, die zumindest diesen Schluss einbezieht (S. 65 f.). Dazu wird gleich etwas gesagt; hier ist aber für uns erst einmal wichtig, dass er anscheinend seine „einfache Überlegung", die er als einziges Argument für die erste Spezifizierung nennt, unbeabsichtigt als Folge der Anerkennung Neckams aufgibt (S. 65 f.). Dieser wundert sich nämlich darüber, dass manche es ablehnen, aus „ex falso" Beliebiges zu folgern, und beginnt seine Überlegungen mit der Frage, ob denn Sokrates nicht ein Mensch ist, wenn Sokrates ein Mensch ist und nicht ein Mensch ist, woraus er logisch korrekt schließt, dass Sokrates ein Mensch ist. Darauf wendet er dann „oder" in *adjunktiver* Form an, die ja in der Umgangssprache anzutreffen ist, und behauptet – umgangssprachlich etwas sinnlos, aber nicht falsch – „Sokrates ist ein Mensch oder ein Stein". Die Aussage ist allein wegen des Menschseins von Sokrates wahr, und er müsste nun bei dieser Bedeutung von „oder" bleiben, wozu gehört, dass er konnektive Oder-Aussagen mit jeweils zwei Belegungs-erfordernissen beiseite zu lassen hat. Doch er kennt diesen Unterschied genauso wenig wie Schamberger, und daher wechselt er anschließend zum anderen „oder“, mithin unkorrekt zu einem neuen logischen Operator. Zunächst kehrt er zu „Sokrates ist ein Mensch und ist nicht ein Mensch“ zurück, um auf „Sokrates ist nicht ein Mensch“ schließen zu können. Damit ist in der obigen Oder-Aussage „Sokrates ist ein Mensch“ falsch, woraus für ihn – jetzt „oder“ konnektiv verändert, da ‚Mensch oder Stein‘ adjunktiv nur wegen ‚Mensch‘ wahr ist – folgt, dass Sokrates ein Stein ist.

Zu diesem Ergebnis Neckams, der auf der Stufe des „Oder“-Wissens von Schamberger operiert und dessen Vorgehen von diesem anerkannt wird, lässt sich hinsichtlich der „einfachen Überlegung“, dass der Wahrheitstransfer gesichert ist, sagen, dass, wenn Sokrates als Stein erschließbar wäre, davon wohl kaum noch die Rede sein kann: Bei Neckam wird die Prämisse wegen unzulässiger Verstrickungen mit „oder“ letztlich wahr, doch es bleibt falsch, dass Sokrates ein Stein ist. Schamberger schweigt dazu – vielleicht ein Eingeständnis seines Fehlers – und weicht zu seinem Hauptziel aus, da er ja vor allem auf der Basis des klassischen Kalküls nachzuweisen versucht, dass Neckams Beispiel durchaus den inhaltlichen Zusammenhang enthält, den die Relevanzlogiker fordern. Aus der Annahme von „A“ (Prämisse) innerhalb des logischen Widerspruchs „A et (non A)“ schließt er auf „A vel B“, das adjunktiv wegen „A“ wahr ist. Darauf wendet er dann – wieder aus der Prämisse genommen – „non A“ an und schließt wie Neckam aus einem nunmehrigen konnektiven „oder“, das der klassische Kalkül nicht kennt, auf „B“.

Wegen dieser Unkorrektheit dürfte der Nachweis eines inhaltlichen Zusammenhangs als missglückt gelten. Noch wichtiger ist jedoch, dass man selbst mit einer solchen Schummelei nichts am Widerspruch ändert. Denn zusätzlich könnte dieses Verfahren mit „non B“ durch-geführt werden, womit „B et (non B)“ nachgewiesen wäre. Neckam betont sogar, dass es ihm um Beliebigkeit geht, so dass sein Schlussbeispiel nicht isoliert werden darf, sondern als Element oder Teilmenge einer Allmenge begriffen werden muss. Sokrates ist in Wirklichkeit ja kein Stein, und so wäre er unter Einbeziehung des von Neckam akzeptierten „Ex-falso“-Schlusses in widersprüchlicher Form Stein und nicht Stein, womit beide Urteile zu ungesicherten Konklusionen würden. Mehr kann Neckam nicht anbieten, so dass andere das Recht behalten, sein Vorgehen als Scheinschluss zu bezeichnen. Dem müsste sich auch Schamberger beugen.

Damit zu „tautologia ex quolibet“:

„A“, folglich „B vel (non B)“ (S. 64 f., 91).

Die Situation wäre hier für Schamberger unkomplizierter, denn für einen Wahrheitstransfer „w-w“ gibt es unendlich viele Beispiele, wobei die „Neben“erkenntnis, dass die Menge aller „w-w“ nur mit einem adjunktiven „oder“ voll ausgeschöpft werden kann, nicht nebensächlich wäre: Ihr darf kein konnektives „oder“ Bindungen auferlegen. Eine so vernünftige und wichtige Aussage wie

„Zahlen sind reell oder komplex“ (= nicht reell),

die im Unterricht gar nicht anders als konnektiv zu verstehen ist, muss im Kontext „beliebiger“ Erörterungen deshalb adjunktiv erweitert werden.

Die „f-w“-Beispiele der Art

„Auch aus einer „nichtirrationalen“ Zahl e folgt/würde folgen, dass jede Zahl reell oder komplex (= nicht reell) ist“

sind davon nicht berührt, bestätigen aber ebenso wegen des logisch-tautologischen Charakters der Konklusion deren Wahrheitssicherheit. Gerade sie benötigen jedoch für eine überzeugende Begründung der absoluten Schlussgültigkeit die bereits erörterte Integration aller „w-w“- und „f-w“-Einzelfälle. Denn aus keinem Einzelbeispiel lässt sich z. B. erschließen, dass die Zahl e mit der neuen Eigenschaft nicht doch „reell- nicht reell“ überschreitet.

Schamberger unterzieht sich dieser Mühe nicht, obwohl er wie wir „Tautologia ex quolibet“ als unter allen Umständen gültigen Schluss einstuft. Bei ihm bleibt dieser Schluss letztlich unbewiesen, wie er überhaupt die meisten Ausführungen dieses Abschnitts gar nicht den logischen Tautologien widmet, sondern rückwirkend den Schlüssen aus einem logischen Widerspruch heraus. Die Tautologien spielen nur eine relativ kleine Rolle in seiner gezielten Polemik gegen die Relevanzlogiker, ob und wie inhaltliche Beziehungen zwischen Prämisse und Konklusion zu berücksichtigen seien. Substantiell wichtige Passagen dieses Themas finden sich hinsichtlich der Tautologien eigentlich gar nicht, und so dürfte, da zu dem anderen Spezialfall genug gesagt ist, das Thema abgeschlossen sein.

Der Leser erwartet wegen der letzten Feststellung in diesem Abschnitt sicher keine weiteren Ausführungen mehr, doch berücksichtigt er dann nicht die unsystematische Eigenart Schambergers. Denn gegen Ende des Abschnitts ändert er seine bisherige Diktion etwas plötzlich ab und geht zu sehr prinzipiellen Bemerkungen über, die m. E. überhaupt nicht in den vorliegenden Unterabschnitt gehören, auch wenn dieser den Anlass dazu gegeben hat. Die von Schamberger gewählte Form kann deshalb den theoretischen Kern der neuen Thematik auch nicht in klassischer Abstraktion vorstellen, doch seien seine Gedanken zunächst mitgeteilt:

> „Wie ich bereits im methodischen Abschnitt 2.1 ausgeführt habe, lässt sich die Diskussion um das relevanzlogische Kriterium der Folgerung nicht durch zwingende Gründe entscheiden. Ich denke aber, es gibt doch einen starken Grund dafür, an ‚ex contradictione quodlibet' festzuhalten: Wer innerhalb eines transitiven und zugleich monotonen Kalküls die Ableitung von B aus A und non-A blockieren möchte, muss eine der in der obigen Ableitung benutzten Schlussregeln[92] aufgeben, also den Disjunktiven Syllogismus oder die Disjunktions-Einführung. Beide Optionen sind allerdings äußerst unattraktiv, weil diese Schlussregeln tief in der Umgangssprache verankert sind und regelmäßig eingesetzt werden.
> Stattdessen könnte man auf die Entwicklung eines monotonen und zugleich transitiven Kalküls verzichten. Diese beiden Optionen, der Verzicht auf Monotonie oder Transitivität, ist aber für die meisten Logiker noch unattraktiver, weil Systeme ohne diese Eigenschaften um einiges komplizierter sind. Gewiss ist die Komplexität eines logischen Systems nicht eindeutig zu bestimmen, und die Logiker haben hierzu unterschiedliche Intuitionen. […]
> Mir persönlich scheint es am attraktivsten, an einer modelltheoretischen Idee festzuhalten: Folgerung, Gültigkeit und Wahrheitstransfer fallen zusammen, […]. Diese Überzeugung lässt sich […] nicht durch allgemeine Überlegungen begründen, sondern durch einen Vergleich. Wie ich im folgenden zeigen möchte, gibt es schwer wiegende Gründe für die Beibehaltung des Disjunktiven Syllogismus und der Disjunktions-Einführung.

[92] Der Verweis bezieht sich auf seine Analogiebetrachtung zu Neckam (S. 66), die ja logisch nicht ganz sauber ist.

> Im Vergleich dazu sind die besprochenen Gründe gegen ‚ex contradictione quodlibet' und ‚tautologia ex quolibet' zu vernachlässigen."[93]

Dieses etwas längere Zitat gibt einen recht guten Einblick in die vielfältigen willkürlichen Festlegungen der Logiker bei ihren Entscheidungen über das, was sie „Schlussregel" bzw. „Folgerichtigkeit" nennen wollen. Die Willkürlichkeiten paaren sich selbstverständlich auch mit Sprachanalysen, doch dürfte der Eindruck für den Laien nicht täuschen, dass man etwas unsicheren Boden betritt, wenn man sich dem Ablauf logischer Schlüsse und ihren Ergebnissen gemäß Schamberger anvertraut. Zu kurz kommt bei ihm die konkrete Analyse der umgangssprachlichen logischen Operatoren und Termini, aus denen heraus vornehmlich über Schlussmöglichkeiten zu entscheiden sein sollte. Ihr wäre so viel Gewicht zu geben, dass sie den immer wieder zu beobachtenden unbegründeten Ausschluss verwendeter Beispiele einzuschränken vermag und somit für ein richtiges Maß sorgt. Schamberger setzt selbst einen beachtenswerten Akzent, wenn er den Disjunktiven Syllogismus und die Disjunktionseinführung mit der Begründung bevorzugt, dass die beiden Schlussregeln tief in der Umgangssprache verankert sind, wobei es nicht schlecht gewesen wäre, wenn er dies erklärt und für die Anwendung der Regeln Differenzierungen gefunden hätte. Denn die summarische Beobachtung der umgangssprachlichen Logikpraxis allein reicht nicht aus.

Die auf die Theorie zielende Frage, die für die Logik der Umgangssprache noch zu lösen ist, besteht, so seien diese Ausführungen zusammengefasst, m. E. darin, unter den Logikern die Erkenntnis durchzusetzen, dass die gewissenhafte Erforschung der Sprachstrukturen basisbestimmend für Klassifizierung und Inhalt der Schlussmöglichkeiten zu sein hat. Damit ist nicht gesagt, dass die Logik der Umgangssprache nicht auch wie jede andere Logik mit willkürlichen Festlegungen arbeiten muss. Doch das Prä gehört der Empirie, die aufs Äußerste korrekt zu beachten bzw. zu betreiben ist.

[93] Schamberger, LUS, S. 66 f. Der Text ist dem Abschnitt „tautologia ex quolibet" entnommen und findet sich deshalb hier. Vor allem bringt er aber neben allgemeinen Gedanken Hinweise zu „ex contradictione quodlibet". Sehr eigenartig!

3.2.6.2 Schluss aus einer Disjunktion auf eine Implikation

Wie jetzt sicher erkennbar ist, besitzen die gerade beendeten Überlegungen für die Schulmathematik kein außerordentliches Gewicht, durften jedoch wegen ihres Stellenwertes in der Logik auf keinen Fall übergangen werden. Von hier an können Schambergers Beispiele dagegen unmittelbar schulmathematisch recht nützlich sein und werden nunmehr auch darauf hin gründlich untersucht. Wir folgen dabei der schon wiederholt verwendeten Methode, die logischen Operatoren der Umgangssprache über ihre empirisch gegebenen Abweichungen von den sauber durchkonstruierten Prinzipien und Regeln der klassischen Kalküle zu identifizieren. Damit unterscheiden wir uns, um das noch einmal zu betonen, grundlegend von Schamberger, der die logischen Operatoren seiner umgangssprachlichen Beispiele zunächst in angepasster Form und daher meist verändert in die Terminologie der klassischen Kalküle als Schlussstruktur einordnet, um dann in einem sofortigen zweiten Schritt erneut umgangssprachlich zu verfahren und für einen einzigen Fall, der „wenn-dann“ betrifft, die Eigenständigkeit näher zu ermitteln. Damit sind, wie wir schon wissen, gedankliche Unkorrektheiten nicht zu vermeiden, und wir werden uns im Folgenden weiterhin systematisch bemühen, sie heraus zu „filtern“.

In Rationalisierung des Vorgehens wird die anfängliche Schrittfolge möglichst standardisiert geboten und die klassisch-logische Form, in die Schamberger das jeweilige Beispiel zuerst übersetzt hat, an den Anfang gestellt. Dem folgen dann das Beispiel und dessen Kommentierung, die Aufschluss darüber geben soll, ob bzw. wie die Formalisierung den Inhalt des Beispiels verändert hat.

Schon der erste Versuch

„‚A vel B‘, folglich ‚(non A) seq B‘“

bringt allerdings Komplikationen mit sich, da es dort um die zweite prinzipielle Einschränkung geht, die bereits mit Ausnahme einer erweiterten Struktur, die sich am Ende seines Unterabschnitts befindet (S. 60), abgehandelt ist. Unter Verwendung eines beigefügten Beispiels, doch ohne Begründung wird sie als „beeindruckende“ Variante des Hauptarguments vorgestellt:

„(A seq (B vel C)) (et) (non C)“, folglich „A seq B“.

In unserem Verständnis ähnelt diese Struktur aber mehr dem Disjunktiven Syllogismus

> „(A vel B) (et) (non A)" folglich „B" (S. 67 f.),

von dem sie sich nur durch ein vorgesetztes „A seq" (in Prämisse und Konklusion) unterscheidet. Schamberger erwähnt sie trotzdem hier, da er eine Schlussmöglichkeit wie bei der obigen Standardform ablehnt. Unsere Ausführungen zum Diskunktiven Syllogismus werden dann hinreichend Klarheit bringen.

3.2.6.3 Prämissentausch bei Implikationen

Klassisch-logisch lautet die gültige Schlussfigur:

> „(A seq B) (et) (C seq D)", folglich „(A seq D) vel (C seq B)".

Schambergers Beispiel:

> „Wenn John in Paris ist, dann ist er in Frankreich.
> Wenn John in Istanbul ist, dann ist er in der Türkei.
> Also: Wenn John in Paris ist, dann ist er in der Türkei, oder wenn er in Istanbul ist, dann ist er in Frankreich." (S. 61)

Verbal erfahren wir von ihm nur, dass es kein gültiger Schluss sei mit der Zusatzbemerkung, dass „das keines Kommentars bedarf". So fehlen die zu erwartenden Wertungen „paradox" oder „deduktiv ungültig", was anscheinend damit zusammenhängt, dass er gar nicht erst fragt, inwiefern dieses Beispiel eine solche Übersetzung in den klassisch-logischen Kalkül erlaubt. Für uns ist das ausgeschlossen: Nie kommt der „Schluss" in die von Schamberger vorgeschlagene Form, und so sei erkundet, worin er, da er wohl konnektiv zu interpretieren ist, davon abweicht und was er wirklich besagt.

Zunächst sei die Matrix vorgestellt:

A	**B**	**C**	**D**	**((A seq B) et (C seq D))**		**Folglich**	**((A seq D) vel (C seq B))**		
w	w	w	w	w	w	W	w	w	w
w	w	w	f	w	f	W	f	w	w
w	w	f	w	w	w	W	w	w	w
w	w	f	f	w	w	W	f	w	w
w	f	w	w	f	w	W	w	w	f
w	f	w	f	f	f	W	f	f	f
w	f	f	w	f	w	W	w	w	w
w	f	f	f	f	w	W	f	w	w
f	w	w	w	w	w	W	w	w	w
f	w	w	f	w	f	W	w	w	w
f	w	f	w	w	w	W	w	w	w
f	w	f	f	w	w	W	w	w	w
f	f	w	w	w	w	W	w	w	f
f	f	w	f	w	f	W	w	w	f
f	f	f	w	w	w	W	w	w	w
f	f	f	f	w	w	W	w	w	w

Sie weist zur Bestätigung der behaupteten Schlussgültigkeit die Beziehung „w-f" zwischen Prämisse und Konklusion nicht auf, so dass es sich nicht um eine Formalisierung des Beispiels handeln kann, das offenbar unschlüssig ist. Ihr Nutzen für dessen Einordnung geht aber wegen einer eigenartigen Kompliziertheit weit darüber hinaus. An Hand der Matrixzeilen sollen wieder die Kombinationsmöglichkeiten zwischen den Aussagen (in Detail- oder in Gesamtsicht) und ihren Wahrheitswerten genauer in Augenschein genommen werden, um die umgangssprachliche Schlussungültigkeit formal sauberer begründen zu können. Das Verfahren erfordert etwas Durchhaltevermögen, denn es ist aufwendig und langwierig.

Unter den Voraussetzungen

A: J. ist in Paris,

B: J. ist in Frankreich,

C: J. ist in Istanbul,

D: J. ist in der Türkei

sowie ohne Verstoß gegen geographisches und physikalisches Wissen in der Prämisse seien die Zeilen der Matrix als Zeitpunkte zu verstehen, auf die sich die konnektiven logischen Operatoren in der bisher von uns ermittelten Beschaffenheit anwenden lassen[94].

Zur Prämisse:

a) „Wenn A, dann B“ (im üblichen konnektiven Verständnis)
erfordert hinsichtlich „w-w“ Belege für
Zeile 4: w-w-f-f (in Paris und Frankreich, aber nicht in Istanbul und der Türkei)
und hinsichtlich „f-f“ Belege für
Zeile 13: f-f-w-w (nicht in Paris und Frankreich, aber in Istanbul und der Türkei) oder
Zeile 15: f-f-f-w (weder in Paris noch in Frankreich überhaupt oder in Istanbul, doch in der Türkei) oder
Zeile 16: f-f-f-f (weder irgendwo in Frankreich noch irgendwo in der Türkei)
und schließt die Zeilen 5–8 zumindest wegen „(A = w) – (B = f)“ aus.
b) „Wenn C, dann D“ (im üblichen konnektiven Verständnis)
erfordert hinsichtlich „w-w“ Belege für
Zeile 13: f-f-w-w (nicht in Paris und Frankreich, aber in Istanbul und der Türkei).
und hinsichtlich „f-f“ Belege für
Zeile 4: w-w-f-f (in Paris und Frankreich, aber nicht in Istanbul und der Türkei)
oder
Zeile 12: f-w-f-f (in Frankreich, aber nicht in Paris und auch nicht in Istanbul und der Türkei)
oder
Zeile 16: f-f-f-f (weder irgendwo in Frankreich noch irgendwo in der Türkei)
und schließt die
Zeilen 2, 6, 10 und 14 zumindest wegen „(C = w) – (D = f)“ aus.

Damit fehlt für die vollständige Prämissenstruktur nur noch die Struktur der Konjunktion der beiden Implikationen, die als adjunktives „und“ verstanden werden kann, so dass sich folgendes Bild ergibt:

---

[94] Ein geographischer Verstoß dürfte von vornherein ausgeschlossen sein. Physikalisch sollte aber darauf aufmerksam gemacht werden, dass sich hinter angereihten geographischen Gegebenheiten Zeitbeziehungen verbergen, denen in konkreten Aussagen zu entsprechen ist. Paris und Frankreich bzw. Istanbul und die Türkei erfüllen mit Zeitgleichheit diese Bedingung.

In einer erstgewählten Bedingung „wenn A, dann B“ verlangen Beachtung die Zeitpunkte Zeile 4 und (Zeile 13) oder (Zeile 15) oder (Zeile 16) bei Ausschluss der Zeilen 5–8, und

in einer zweitgewählten Bedingung „wenn C, dann D“ verlangen Beachtung die Zeitpunkte Zeile 13 und (Zeile 4) oder (Zeile 12) oder (Zeile 16) bei Ausschluss der Zeilen 2, 6, 10 und 14.

Zusammengefasst heißt das, dass die Konstellationen der Zeilen 4 und 13 einmal eintreten müssen und einmal wie die anderen als stets zu berücksichtigender Wechselfall bei 13-15-16 bzw. bei 4-12-16.

Zur Konklusion:

Die Strukturierung der einzelnen Implikationen führt zu erheblichen Schwierigkeiten, da schon bei „Wenn A, dann D“ der erste Beleg, der zu Zeile 7 mit „w-f-f-w (in Paris und in der Türkei, aber weder in Frankreich noch in Istanbul)“ gehört, nicht nur gegen geographisches, sondern auch gegen physikalisches Wissen verstößt, denn er verletzt zusätzlich das Prinzip der Zeitverschiedenheit, das in dieser Konstellation für die Beziehung zwischen Paris und der Türkei gilt. Für „Wenn C, dann B“, wonach er sich zeitgleich in Istanbul und in Frankreich aufhält, sieht es nicht besser aus. Beide Implikationen sind daher nicht nur schlechthin falsch; sie negieren einfache Erkenntnisse anderer Wissenschaften oder allgemeines Wissen und wirken dadurch auch auf die Schüler unsinnig. Der Schluss gestattet nicht die von Schamberger ohne jede Begründung vorgenommene Übersetzung in eine klassisch-logisch gültige Form; er ist überhaupt nicht statthaft.

Damit ist kein Wort zur methodischen Bedeutung dieser sprachlichen Anordnung gesagt. Sie ist sogar recht hoch zu bewerten. Denn der sachlich verursachte Doppelfehler macht es unmöglich, unsere „Leitmatrix“ direkt einzusetzen: Gegen die eingangs getroffene Festlegung weist bei dieser Belegung die eine oder andere Zeile mehrere Zeitebenen aus. Der Verwendungszweck ist damit aber nicht aufgehoben; er ist nur eingeschränkt, da die Matrix bei Teilproblemen, wie sie z. B. in der geographischen Einordnung von Städten gegeben sind, geholfen hat, den logischen Kern des Fehlers zu entziffern.

Es existieren demnach in der Umgangssprache mindestens zwei Stufen der Abweichung vom klassischen Kalkül: eine einfachere, bei der bereits mehrere Matrixzeilen im Komplex zur Aufhellung des Inhalts beitragen, und eine kompliziertere, in der für die genaue Fixierung der Konnektivität zusätzliche

Methoden einzusetzen sind. Dabei stellte sich heraus, dass derartige sprachliche Formulierungen bei positiver Einordnung unbedingt zu logischen Fehlschlüssen führen und übergangen werden können. Die erweiterte Differenzierung der Konnektivität als zusätzliches Prüfmittel hilft demnach, die logischen Operatoren der Umgangssprache auf ihren oft so undurchsichtigen Spielraum hin tiefer zu durchleuchten. Schamberger dagegen bleibt hier mit seiner abrupten Kürze weit unter den Möglichkeiten, die Umgangssprache noch stärker logisch auszuschöpfen.

3.2.6.4 Schluss aus einer konjunktiv-molekularen Implikation auf eine molekulare Disjunktion

Klassisch-logisch lautet die gültige Schlussfigur:

> „(A et B) seq C“, folglich „(A seq C) vel (B seq C)“ (S. 61 f.).

Sie wurde bereits im Beispiel der Einleitung analysiert, wo sehr wichtige Gedanken zur Sprache kamen. Die dort zurückgestellten Beweise sind inzwischen im Kapitel 2 und im Zusammenhang mit der zweiten Einschränkung Schambergers (Abschnitt 3.2.4) behandelt worden, und so darf ihre Kenntnis hier vorausgesetzt werden. Wir konzentrieren uns deshalb im Folgenden auf bedeutsame ergänzende Überlegungen, die Schambergers Beispiele einbeziehen.

Die Matrix verdeutlicht noch einmal den Überblick:

A	**B**	**C**	**(A et B) seq C**		**(A seq C) vel (B seq C)**		
w	w	w	w	w	w	w	w
w	w	f	w	f	f	f	f
w	f	w	f	w	w	w	w
w	f	f	f	w	f	w	w
f	w	w	f	w	w	w	w
f	w	f	f	w	w	w	f
f	f	w	f	w	w	w	w
f	f	f	f	w	w	w	w

Auch diesmal fehlt die Konstellation „w-f" für die Beziehung zwischen Prämisse und Konklusion; der Schluss ist klassisch gültig.

Schambergers Beispiele:

> Beispiel 1: Wenn man sowohl Schalter S als auch Schalter T betätigt, dann startet der Motor.
>
> Also: Wenn man Schalter S betätigt, dann startet der Motor, oder wenn man Schalter T betätigt, dann startet der Motor.
>
> Beispiel 2: Wenn ich in den Kaffeeautomaten einen Euro einwerfe und per Tastendruck die Zubereitungsart „Cappuccino" wähle, dann produziert der Kaffeeautomat einen Becher Cappuccino.
>
> Also: Wenn ich in den Kaffeeautomaten einen Euro einwerfe, dann produziert der Kaffeeautomat einen Becher Cappuccino; oder wenn ich per Tastendruck die Zubereitungsart „Cappuccino" wähle, dann produziert der Kaffeeautomat einen Becher Cappuccino.

Wenn wir anschließend noch einmal den Blick auf das Beispiel unserer Einleitung werfen, so erscheinen die bestimmenden logischen Operatoren „und" und „wenn-dann" dort – so unsere jetzige Terminologie – eindeutig konnektiv interpretiert, und das dürfte korrekt sein. Von da her könnte Schambergers Übersetzung für die neuen Beispiele auch unzutreffend sein. Die Frage ist, ob die umgangssprachliche Schlussfigur stets verletzt wird oder ob sie eventuell als Regel für Teilmengen an Aussagen gültig ist. Für uns zeigen sich Schwachpunkte, und selbst Schamberger äußert bei seinem ersten Beispiel Bedenken, wobei aber trotz Berufung auf andere Autoren nicht klar wird, was ihm daran nicht gefällt. Zumindest wählt er deswegen ein zweites Beispiel aus, so dass er wieder ausweicht, um seine generelle Ablehnung – nach fragwürdiger Übersetzung in den klassisch-logischen Kalkül – zu retten. Das klappt ohne Widerlegung möglicher Einwände selbstverständlich nicht, und so liegt hier bei ihm noch einiges im Argen.

Der wunde Punkt ist für mich bei beiden Beispielen, dass die strukturell bestimmenden Begriffe „betätigen" bzw. „einwerfen" und „wählen" unzureichend definiert sind. Sie können zu den Verben gezählt werden, die den Wahrheitswert von Aussagen offen lassen[95]. Versteht sich z. B. „betätigen“ nicht im Sinne von „richtig betätigen“, so wird der Motor öfters nicht starten, selbst wenn beide Schalter bedient sind. Die umgangssprachliche Prämisse wäre demnach unter diesen Bedingungen eines Hin und Her falsch, da sie behauptet, dass der Motor immer startet. Es lässt sich also eine Menge von Beispielen aussondern, in denen der Schluss mit falscher Prämisse beginnt, so dass er unter die mittelalterliche Schlussform „ex falso quodlibet“ fällt, die klassisch-logisch gültig ist, für uns aber zur nutzlosen Unbestimmtheit führt. Das Beispiel der Einleitung gehört dazu aber nicht: Dessen Prämisse ist immer wahr. Die neuen Belege gehen darüber hinaus, beeinflussen trotzdem unsere Ablehnung der Schlussfigur nicht. Sie verlangen sogar *adjunktiv* eine andere Strukturierung mit

„(w-w-f) – wahr“

statt der bisherigen 2. Matrixzeile

„(w-w-f) – falsch“.

Damit ist zwar „ex falso“ erfasst, doch bringt das außer einer pragmatischen Panne keine neuen Erkenntnisse, so dass die anfänglich auf die Bewertung der Schlussfigur bezogenen Bedenken ausgeräumt sind.

Wie Schamberger dazu denkt, erfahren wir nicht, da der von ihm gewählte Weg diese Überlegungen nicht einbezieht. Er beinhaltet wie bisher eine unzulässige Doppelbestimmung, obwohl die Ablehnung der Schlussgültigkeit ein Ergebnis ist, das wir teilen.

Zu dem „Sonder“-Schluss aus einer falschen Prämisse, den wir ja wegen seiner Sinnlosigkeit ablehnen, muss aber noch etwas gesagt werden. Er beweist, dass sehr ähnliche Beispiele existieren, die mit unterschiedlichen konnektiven und adjunktiven logischen Operatoren verbunden sind. Die dazugehörigen Aussagen sind nun nicht unsystematisch in der Umgangssprache verteilt, sondern sind mit den Verben verbunden, die Einfluss auf den jeweils zuständigen Wahrheitswert nehmen, der dadurch unbestimmt werden kann. Es wären deshalb dergestalt zwei Argumenttypen zu unterscheiden, die semantisch nicht weit auseinander liegen, deren Trennung aber den für die Schüler wichtigen Aspekt der Sinnhaftigkeit berücksichtigt.

95 Vgl. Abschnitt 1.1.2.

Schambergers Beispiele geben Anlass zu einer weiteren gedanklichen Ergänzung. Wir greifen zufällig den „Kaffeeautomaten“-Schluss heraus, der in der „Normalbedeutung“, d. h. bei wahrer Prämisse, ungültig ist. Geprüft werden soll, ob wieder wie bei dem im vorhergehenden Abschnitt erläuterten Fall die zweite Stufe der Abweichung vom klassischen Kalkül betroffen ist.

Der Grad der Fehlerhaftigkeit klärt sich über den Vergleich der Struktur der Konklusion mit den Matrixbeziehungen, wenn die Zeilen „w-w-f“, „w-f-w“ und „f-w-w“ konnektiv en bloc herangezogen werden. „w-w-f“ bleibt bei einem funktionierenden Automaten ausgeschlossen, doch in den beiden anderen Fällen genügt der Automat den formulierten Wahrheitsbeziehungen nicht: Deren Konstellation lässt sich nicht realisieren; der letzte Wahrheitswert lautet gegen die obigen Formulierungen immer „f“. Der Schlussfehler wird somit schon nach Erkenntnis dieses Verstoßes sichtbar, so dass die schwächere Stufe vorliegt, die die meisten Schüler sicher noch geistig verkraften. Eine solche Diktion betont übrigens die Wahrheitswerte, um die es geht, und dies im Unterschied zum verschwommenen Begriff „fehlender inhaltlicher Zusammenhang“, der von fast allen Logikern immer wieder gern ins Spiel gebracht wird. Für die begründete Aufhellung logischer Fehler sollte in der Schule diese Stufe aber die Schwierigkeitsgrenze bilden.

Schamberger führt hier quasi als „überraschende“ gedankliche Erweiterung dieses Abschnitts das am Ende des zweiten Kapitels erwähnte mathematische Gegenbeispiel an[96], wonach die geometrischen Eigenschaften „rechteckig“ und „gleichseitig“ den Begriff „Quadrat“ erlauben, aber nicht eine der Eigenschaften allein. Die weite Verbreitung solcher Beispiele in der Mathematik mit oder ohne „Schwachpunkt“ ist ihm, wie schon erwähnt, demnach unbekannt und kann nicht zur Vertiefung seiner umgangssprachlichen Betrachtungen beitragen.

3.2.6.5 Schluss aus einer disjunktiv-molekularen Implikation auf eine molekulare Disjunktion

Klassisch-logisch lautet die gültige Schlussfigur

„‚A seq (B vel C)‘, folglich ‚(A seq B) vel (A seq C)‘“ (S. 62 f.),

[96] Schamberger, LUS, S. 62. Wir wiederholen diesen Umstand wegen seiner Absonderlichkeit.

wozu folgende Matrix gehört:

A	B	C	(A	seq	(B vel C))	folglich	((A seq B)	vel	(A seq C))
w	w	w	w	w	w		w	w	w
w	w	f	w	w	w		w	w	f
w	f	w	w	w	w		f	w	w
w	f	f	w	f	f		f	f	f
f	w	w	f	w	w		w	w	w
f	w	f	f	w	w		w	w	w
f	f	w	f	w	w		w	w	w
f	f	f	f	w	f		w	w	w

Als Beispiel wählt Schamberger – wie bereits betont: *zeitlich vor* obigem Kalkül

> „Wenn ich eine rote Karte ziehe (A), dann ziehe ich Herz (B) oder Karo (C). Also: Wenn ich eine rote Karte ziehe (A), dann ziehe ich Herz (B), oder wenn ich eine rote Karte ziehe (A), dann ziehe ich Karo (C)." (S. 62)

Schon die Analyse der Prämisse weist bei Schamberger Unvollständigkeit auf, denn die dortige Oder-Verknüpfung des Beispiels ist eindeutig konnektiv zu verstehen: Es *muss* wenigstens einmal möglich sein, dass eine Herzkarte gezogen wird, und dasselbe gilt analog für die Karo-Karte. Es ist zu wenig, wenn nur die 50-prozentige Wahrscheinlichkeit genannt ist. Mit der Übersetzung in eine klassisch-logische Formel wird diese Bedingung dann sogar gänzlich negiert: Nunmehr würde für ihn genügen, eine der beiden Oder-Seiten zu belegen. Die Situation wiederholt sich modifiziert mit dem „oder" der Konklusion: Erneut handelt es sich um ein konnektives „oder", so dass beide Implikationen eine Belegung verlangen. Die Aussagekraft der Prämisse wie auch die der Konklusion sind somit auf einem *unlogischen* Wege abgeschwächt worden: Aus der Forderung, dass mehrere Belegungen zu erfüllen sind, folgt nicht, dass eine Belegung ausreicht. Der umgangssprachliche Schluss ist entstellt.

(Fast) ganz sauber lassen sich diese Gedanken in der gekürzten[97] Matrix nachvollziehen:

---

[97] Ungekürzt wäre der Nachweis wegen der an sich bestehenden Klarheit des Falles zu lang.

M	N	M vel N	M oder N (konnektiv) (mit unterschiedlicher Belegung)
w	w	w	kann sein
w	f	w	muss sein
f	w	w	muss sein
f	f	f	darf nicht sein

Hinter M und N verbergen sich hier gemäß der obigen vollständigen Matrix sowohl die Oder-Seiten der Prämisse als auch die der Konklusion, wobei zu beachten ist, dass es in der Konklusion Implikationen sind, die „oder“ verbindet.

Die zum klassischen Kalkül gehörende erstgenannte Matrix erfüllt die Bedingungen des umgangssprachlichen Beispiels daher nicht. Sie ist im Vergleich der entscheidenden Zeilen 2 und 3 wie überall als „oder“ zu verstehen, während die konnektiv verpflichtete zweite Matrix auf ein „und“ zwischen beiden Zeilen besteht. Obwohl Schambergers erste Übersetzung somit schon unakzeptabel ist, folgt noch eine Steigerung, indem er die abgeschwächte „Kalkül“-Übersetzung in die Umgangssprache unter Verstoß gegen die Entailment-Forderung rückübersetzt, wodurch er den logischen Inhalt von „oder“ noch einmal verändert. Die Schlussfigur ist nun wieder ungültig, wie sie es ja auch ist, doch sein Weg dahin ist unnötig umständlich und vor allem logisch unkorrekt.

Seine Begründung für die Unschlüssigkeit des Beispiels dringt sowieso nicht bis zu den logischen Operatoren der klassisch-logischen Form vor und lässt offen, warum diese Form gültig ist: „Doch die Konklusion ist nicht wahr, weil keiner der mit „oder“ verbundenen Teilsätze für sich betrachtet wahr ist“ (S. 62). Wie kann er von einem solchen Satz aus weiterhin die kalkülmäßige Wertung „Gültigkeit“ vertreten? Selbst für die umgangssprachliche Richtung verlangt der Satz wegen des Einzelfalls und wegen der Kompliziertheit von „wenn-dann“ und „oder“ in Prämisse und Konklusion ergänzende Überlegungen. In Auswertung der umgangssprachlich interpretierten Matrix wäre in diesem Fall dabei vorrangig an „oder“ zu denken. Aus dem Vergleich der Matrix der Prämisse mit der der Konklusion geht deutlich hervor, dass das konnektive „oder“ der Prämisse zu einer Belegung der Zeilen 2 und 3 zwingt: Nach Zeile 2 wird *erwägend* eine Herzkarte gezogen, aber keine Karokarte, nach Zeile 3 ist es umgekehrt. Jede Kartenart setzt unter der Bedingung, dass eine rote Karte gezogen wird, einmal in der Erwägung aus. Doch die Konklusion behauptet, dass bei einer roten Karte immer eine Herzkarte oder immer eine Karokarte gezogen wird, wodurch sie sich nunmehr eindeutig als falsch erweist.

In der Schulmathematik ist dieses „oder“ in einer Prämisse wie z. B.

> „Wenn zu einem Funktionsbild eine zur x-Achse parallele Tangente gehört, befindet sich dort ein Extrem- oder ein Sattelpunkt“

oft anzutreffen, so dass die Schüler von dort aus schnell dazu neigen, bei jedem „oder“ in obiger Konstellation den Schluss zu verweigern. Es wäre jedoch erst zu untersuchen, ob wirklich nicht derartige sinnvolle konnektive Oder-Verknüpfungen in der Umgangssprache und insbesondere in der Schulmathematik als Konklusion existieren. Die oftmalige Einengung des mathematischen Stoffes begünstigt zumindest zahlreiche Grenzfälle, die eine Entscheidung (des Lehrers) erfordern, ob ein Schluss erlaubt ist. Beispielsweise könnte der Lehrer vor einer Klausur den Schülern mitgeteilt haben, dass er sich bereits entschieden habe, welche Integrationsform, die Produkt- oder die Substitutionsintegration, er wählen würde, wenn eine Integrationsaufgabe vorkommen sollte. Unter dieser Voraussetzung dürfte eine gültige konnektive Deutung denkbar sein, da die Implikationen der Konklusion abwechselnd als „wahr“ angenommen werden könnten. Allerdings ist auch noch ein konnektives „wenn-dann“ vorhanden, dessen Einfluss hier offen bleibt.

Zusammengefasst ist für mich die Schlussfigur zumindest im analogen adjunktiven Sinne stets gültig und als schlüssige konnektive Form zuzulassen, sobald eine entsprechende Grundmenge eindeutig abgegrenzt ist.

3.2.6.6 Schluss aus einer negierten Konjunktion auf eine Implikation

Klassisch-logisch lautet die gültige Schlussfigur:

> „non (A et B)“, folglich „A seq (non B)“ (S. 63),

wozu folgende Matrix gehört:

A	**B**	**(non (A et B))**	**folglich**	**(A seq (non B))**
w	w	f		f
w	f	w		w
f	w	w		w
f	f	w		w

Nach Schamberger wird „wohl niemand“ die Konklusion seines Erstbeispiels äußern, doch er bringt es trotzdem:

> „Es stimmt nicht, dass der Präsident von einer Bombe getroffen und verletzt wurde.
>
> Also: Wenn der Präsident von einer Bombe getroffen wurde, dann wurde er nicht verletzt.“

Seine Bedenken erklärt er nicht; sie dürften der mehrdeutigen Prämisse geschuldet sein: In sie kann ohne weiteres hineingelesen werden, dass der Präsident weder von einer Bombe getroffen noch verletzt wurde. Nach einer solchen Interpretation fehlt dann jeglicher Grund, einen Bombentreffer, über den gar nichts verlautete, als Annahme für irgendetwas anderes zu wählen. Schambergers Einstieg in diesen Argumentationstyp ist daher zumindest sehr sonderbar.

Nicht zufällig widmet er sich deshalb noch einem zweiten Beispiel, das für ihn unschlüssig ist. Jemand traut seinen gesammelten Pilzen nicht und beschließt, sie nicht zu essen. Danach äußert er:

> „Es ist nicht der Fall, dass ich diese Pilze esse und gesund bleibe.
>
> Also: Wenn ich diese Pilze esse, dann bleibe ich nicht gesund.“

Schamberger stellt richtig fest, dass die Prämisse immer wahr ist, weil der Betreffende in Einengung der Grundmenge auf den Verzehr der Pilze verzichtet. Ihre zentrale Konjunktion vereinigt aber zwei Aussagen, von denen eine modal ausgedrückt ist: Die erste Teilaussage *ist* falsch, die zweite *ist möglicherweise* falsch. Sie wirken innerhalb des Schlusses deshalb verschieden, vor allem aber berücksichtigt der klassisch-logische Kalkül keine Modalitäten, so dass dieses Beispiel nicht direkt bzw. analog in einen solchen Kalkül übersetzt werden kann. Es beinhaltet eine neue abweichende Besonderheit, die Schamberger übersehen hat. Überhaupt hat er wenig hingeschaut, denn die mit „möglich“ verbundene Ungewissheit offenbart noch einen weiteren Aspekt, der ebenfalls außerhalb des klassischen Kalküls steht: Die Aussage über die mögliche Krankheit ist eine *Zukunftsaussage*, deren Wahrheitswert noch nicht bestimmbar ist, so dass Schambergers Beispiel in mehrfacher Hinsicht über die „normale“ umgangssprachliche Schlussfigur

> „Es ist nicht wahr, dass A und B gelten.
> Also: Wenn A gilt, gilt B nicht“,

die allein an ihren festen Wahrheitswerten gemessen werden sollte, hinausgeht. Wir werden deren Prüfung auf Schlussmöglichkeiten im Folgenden anhand der Aussagen

> „Es gilt nicht, dass eine Funktion $f(x) = x^2$ heißt und ein Maximum hat“

und

> „Es gilt nicht, dass eine Funktion $f(x) = x^2$ heißt und die Winkelsumme im zweidimensionalen Dreieck größer als 180° ist“,

die beide als Prämissen dienen, jetzt nachholen und dabei feststellen, dass der Schluss auf die Implikation der Konklusion im Falle

> „Wenn $f(x) = x^2$, dann hat die Funktion kein Maximum“

(von den Schülern) gebilligt wird, doch nicht der auf

> „Wenn $f(x) = x^2$, dann ist die Winkelsumme im zweidimensionalen Dreieck nicht größer als 180°“.

Beide Prämissen besitzen in abstrakter Form einen adjunktiven Charakter, während „wenn-dann“ der Konklusionen ein konnektiver Operator ist. Rein logisch lässt sich deshalb kein Schluss ziehen, doch findet er sich schulmathematisch in großer Zahl. Den Grund dafür liefert offenbar die Mathematik, die nur im ersten Beispiel kenntlich zur Grundlage genommen ist und den Wert der Prämissen konnektiv erhöht. So wird z. B. die Aussage

„(f(x) = x^2) und (f(x) hat ein Maximum)"

nicht schlechthin als falsch, sondern stets so interpretiert, dass sie unmöglich wahr sein kann. Es dürfte deshalb richtig sein, umgangssprachliche Schlussfiguren zu stufen: Einige sind an sauber durchkonstruiertes Wissenschaftsmaterial gebunden, wie es auch die Schulmathematik bereithält, und daher begrenzt gültig, sobald die Prämisse „fachlich" aufgewertet ist und konnektiv verstanden wird. Andere sind allgemeingültig oder zumindest allgemeingültiger. Für die Schulmathematik ist diese Unterscheidung insbesondere deswegen wichtig, um der traditionellen Suche der Schüler nach Regelmäßigkeiten im Schulstoff zu entsprechen, d. h. um zu verhindern, dass die begrenzten Schlüsse mit ihrem breiten logischen Gleichklang vorschnell als „Abfall" verworfen werden.

Zusammengefasst liegt demnach ein „finit" erschlossenes Beispiel vor, das die Begrenztheit bestimmter Schlussfiguren aus den jeweils verwendeten realwissenschaftlichen Gesetzen erklärt, d. h. aus modifizierten logischen Beziehungen. Schamberger wurde darauf anscheinend nicht aufmerksam und kam daher zu der überzogenen Entscheidung, diesen Schlusstyp generell als gültig abzulehnen.

3.2.6.7 Schluss aus einer negierten Existentialaussage auf eine Allaussage

Wir wollen für diese Schlussfigur einen etwas veränderten Weg nehmen, der sich aus deren besonderen Umständen und aus den Unüberlegtheiten Schambergers ergibt. Er bietet wie bisher ihre klassisch-logische Formel

„non ∃ (x)(F(x) et G(x))", folglich „∀(x)(F(x) seq (non G(x))" (S. 63)

an, übersieht aber anscheinend, dass sie die äquivalente Umwandlung einer klassisch-logischen Existentialaussage in eine ebensolche Allaussage beinhaltet, die bereits von der Definition dieser Strukturveränderung her keinerlei Probleme bereiten kann: Der Schluss ist immer gültig[98]. Ob das gleichfalls für die umgangssprachliche Entsprechung gilt, die von fast allen Logikern und wohl auch von Schamberger, der sich nicht direkt dazu äußert, sogar als gleichbedeutend aufgefasst wird, wäre aber noch zu prüfen. Zurückgreifen werden wir dabei auf die kategorischen Syllogismen, die Aristoteles sehr gründlich untersuchte und nach denen

> „Kein S ist P“

und

> „Alle S sind nicht P“

äquivalent sind. Seine Voraussetzung war allerdings, dass „alle“ die Belegung von „S“ einschließt. Trotzdem hielten es die meisten Logiker für korrekt, über die legitime Aussage

> „Aus ‚Es gibt nicht ein x, für das F(x) und G(x) gilt‘ folgt ‚Für alle x gilt, dass, wenn x für F gilt, es nicht für G gilt‘“

zur Äquivalenz mit der obigen klassisch-logischen Formel zu gelangen, obwohl dort die Beschränkung in der Regel aufgehoben ist.

Auch das scheint Schamberger nicht beachtet zu haben, denn nicht ein Wort fällt dazu. Es muss aber hinzugefügt werden, dass, wenn man jetzt sein Erläuterungsbeispiel heranzieht, er diesen Standpunkt anscheinend nicht teilt. Wir werden uns das näher ansehen.

Zunächst fällt auf, dass er sich in seinem Vorgehen etwas schwertut. Sein erstes Beispiel

> „Niemand war ein Kind Platons und verheiratet.
> Also: Die Kinder Platons waren nicht verheiratet.“ (S. 63)

[98] Dazu gehört allerdings, dass die Existenz von „x“ sehr abstrakt beschrieben werden muss. Hoffmann, Grenzen der Mathematik, S. 153, wählt die folgende Formalisierung, die u. E. für die Einbeziehung der Nullmenge gut geeignet ist: $\exists(x)\big(\forall(y)(y\,non \in x)\,et\,x \in z\big)\,mit\,(Nullmenge \in z)$.

streicht er gleich selbst verbal, weil es seine Ablehnung der Schlussgültigkeit nicht überzeugend bestätigt:

> „Man könnte einwenden, die Konklusion sei aufgrund der Verneinung wahr – dann wäre das Argument kein Gegenbeispiel." (S. 63)

Diese Bedenken resultieren aus den Undeutlichkeiten der Umgangssprache, mit denen man immer wieder zu rechnen hat. Geringfügig verändert wäre das Beispiel für Erörterungen anwendbar gewesen, doch Schamberger nimmt ein zweites Beispiel, und das ist für ihn – aber ohne jede Begründung – ein eindeutiges „Gegenbeispiel":

> „Niemand war ein Kind Platons und nicht verheiratet.
> Also: Die Kinder Platons waren verheiratet." (S. 63)

„Gegenbeispiel" heißt, daran sei noch einmal erinnert, dass die Übersetzung in die klassisch-logische Schlussform, obwohl er sie ausspricht, nicht in jeder Hinsicht vertretbar ist: Er möchte darauf hinaus, dass der umgangssprachliche Schluss keine Gültigkeit besitzt.

Wir beginnen unsere Analyse mit der Bestätigung der Gültigkeit der klassisch-logischen Variante und führen den Beweis, dass beide Aussagen wahr sind, über die erlaubte Beziehung zur Umgangssprache:

> Nicht für ein x (einen Menschen) gilt: ((x ist ein Kind Platons) et/und (x ist nicht verheiratet)).
> Also: Für alle x gilt ((x ist ein Kind Platons) et/und (x ist nicht verheiratet) VEL/ODER (x ist kein Kind Platons) et/und (x ist nicht verheiratet) VEL/ODER (x ist kein Kind Platons) et/und (x ist verheiratet)).

Daraus ergibt sich:

Die erste Teilaussage der in der Prämisse befindlichen Konjunktion ist, gemessen an der Überlieferung, falsch. Die Konjunktion ist deshalb ebenfalls falsch, woraus sich eine wahre Prämisse ergibt. In der Konklusion beginnen wir mit dem ausgeschlossenen Fall, wonach mindestens ein Kind Platons unverheiratet war. Dieser Fall wird richtig erfasst, denn es existierte kein unverheiratetes Kind

Platons. Erfüllt sind auch die von der klassischen Implikation eingeräumten Möglichkeiten, dass mindestens ein Kind eines anderen Menschen verheiratet bzw. unverheiratet war. Von verheirateten Kindern Platons ist dagegen nichts überliefert, doch beeinflusst dieser Umstand den Wahrheitswert von „seq“ nicht: Die drei aufgezählten Möglichkeiten sind durch „VEL“ verbunden, so dass eine Belegung genügt. Auch die Konklusion ist somit wahr; der Schluss ist gültig.

Die umgangssprachliche Variante weicht nun davon ab. Ihre Prämisse ist zunächst ebenfalls wahr, aber der Konklusion fehlt die wichtigste Voraussetzung für eine Anwendung: Das umgangssprachliche „alle“ verlangt stets, also über Aristoteles hinaus, der dies nur richtig erkannt hatte, mindestens eine Belegung für ein unverheiratetes Kind Platons, die nicht vorliegt, weil Platon gar keine Kinder hatte. Die Menge der Kinder Platons ist fachterminologisch *leer,* und mit solchen Mengen kann die Umgangssprache nichts anfangen. In unserer bisherigen abstrakten Betrachtung zu „wenn-dann“, das sich hinter dem Alloperator „verbirgt“, hört sich das so an, dass „w-w“ nicht erfüllt ist, womit eine Wenn-dann-Aussage noch nicht getätigt werden kann. Wieder anders ausgedrückt, erlaubt eine adjunktive Prämisse nicht, ohne weitere Parameter definitiv eine konnektive Konklusion zu behaupten[99]. Die Definitionsbedingungen sind mit dem Einsatz einer *leeren* Menge verletzt; umgangssprachlich sind daher unseres Erachtens, wie ausführlich erläutert, die Voraussetzungen für einen Schluss nicht erfüllt[100]. Für Schamberger ist der Schluss als akzeptable gleichbedeutende Variante ungültig[101], und so hat es den Eindruck, dass sein Ergebnis korrekt erzielt ist. Doch der Schein trügt: Er wechselt ohne sprachliche Explizierung unerlaubt die Grundmenge von leer zu nichtleer bzw. in umgekehrter Richtung und kommt letztlich mit einem Verstoß gegen das Normalverständnis der Umgangssprache zum Ziel, indem er die leere Menge dort verwendet. Sein Ergebnis basiert daher auf einer unkorrekten Methode und ist nun nicht mehr akzeptabel.

---

99 Der Zusatz, dass „alle“ erst mit Belegung verständlich wird, erhöht den Aussagewert der Prämisse und lässt einen Schluss zu. Wenn es anders wäre, hätte Aristoteles nicht den Sprung von „Kein S ist P“ (adjunktiv!) auf „Alle S sind nicht P“ (konnektiv!) geschafft.

100 Hätten wir „Schlussungültigkeit“ erweitert definiert, wäre unsere Erkenntnis, dass unter gleichen Bedingungen, analog gesehen, zu einem ungültigen umgangssprachlichen Schluss nicht unbedingt auch ein ungültiger klassisch-logischer Schluss gehört, bestätigt worden.

101 Vgl. Abschnitt 3.2.6.1.1 mit dem dortigen sprachlichen Durcheinander.

Jedoch gilt auch für diese Beziehungen, dass umgangssprachliche Tücken stets erhöhte Aufmerksamkeit erfordern und schon bei kurzen Konzentrationsstörungen schnell übersehen werden können. Dieser Umstand entschuldigt Schamberger ein wenig. So scheint es, dass die Schlüsse aus den Aussagen

> „Es gilt nicht, dass irgendeine Tangente an ein Funktionsbild schräg-winklig zur x-Achse verläuft und dort zu einem Sattelpunkt gehört"

bzw.

> „Es gilt nicht, dass irgendeine Tangente an ein Funktionsbild schräg-winklig zur x-Achse verläuft und irgendein Wahrscheinlichkeitsverhältnis zwischen Teil und Ganzem den Wert 1 überschreitet"

auf die Aussagen

> „Für jede Tangente gilt: Wenn sie in einem Funktionsbild schräg-winklig zur x-Achse verläuft, trifft sie auf das Funktionsbild nicht bei einem Sattelpunkt"

bzw.

> „Wenn in einem Funktionsbild eine Tangente schräg-winklig zur x-Achse verläuft, dann überschreitet irgendein Wahrscheinlichkeitsverhältnis zwischen Teil und Ganzem nicht den Wert 1"

in der Struktur gleich sind. Doch die Schüler folgen dem offenbar nicht. Sie akzeptieren den ersten Schluss sicher ohne weiteres, den zweiten aber – wohl genauso sicher – nicht. Beim Versuch, die Konklusionen in die Form „Alle S sind P" zu bekommen, zeigen sich dann die Unterschiede: Etwas umständlich und ungewohnt zwar, kann diese Aussage im Falle

> „Für alle Tangenten gilt: Wenn sie zu den schrägwinklig zur x-Achse verlaufenden Erscheinungen gehören (S), gehören sie nicht zu den Erscheinungen, die bei Sattelpunkten auf das Funktionsbild treffen (P)"

verantwortet werden, doch im zweiten Schluss besteht keine Möglichkeit, das gleiche Subjekt „Tangente" auf beide Prädikate zu beziehen, da im Hinterglied der Implikation das Wort „Tangente" gar nicht auftritt. Es ist eine gänzlich andere Struktur, die uns aber wieder Gelegenheit gibt, den beliebten, doch verschwommenen Ausdruck „kein inhaltlicher Zusammenhang" präzise durch Strukturbegriffe zu ersetzen: Konkret lässt sich hier sagen, dass die Prädikate nicht durch das gleiche Subjekt verbunden sind, so dass der Schluss von da her in Frage gestellt ist.

3.2.6.8 Schluss aus einer negierten Implikation auf eine Konjunktion

Klassisch-logisch lautet die gültige Schlussfigur:

> „(non (A seq B))", folglich „A et (non B)".

Strukturell heißt das:

A	B	Non	(A seq B)	folglich	A et (non B)
w	w	f	w		f
w	f	w	f		w
f	w	f	w		f
f	f	f	w		f

Schambergers Beispiel:

> „Folgendes ist falsch: Wenn es einen Gott gibt, dann haben die Atheisten Recht.
> Also: Es gibt einen Gott, und die Atheisten haben nicht Recht." (S. 64)

Zur Prämisse, bei der mit der falschen Implikation zu beginnen ist, wonach behauptet wird, dass, sofern es einen Gott gibt, die Existenz dieses Gottes und die

Hauptaussage der Atheisten immer zusammen wahr/gegeben sein sollen[102]. Tatsächlich ist es so – womit „nicht" einbezogen ist –, dass das nie der Fall sein kann: Entweder gilt „w-f" oder „f-w", so dass die umgangssprachliche Prämisse zwar wahr ist, aber die Konstellation des klassischen Kalküls, die Schamberger herausgesucht hat, ihr nicht entspricht. Die Konklusion stimmt dagegen, für sich genommen, mit der Matrix sogar im adjunktiven Sinne überein, folgt jedoch nicht der Prämisse: Nach der Prämisse sind zwei Konstellationen im Wechsel wahr, und so kann in der Konklusion nicht feststehen, dass eine der beiden wahr ist.

Die Beispielstrukturen sind verschiedener Art sowie mitunter überaus kompliziert, und so sei streng objektsprachlich noch eine zusätzliche Form verwendet:

> Es gilt nicht, dass, wenn 18:3 lösbar ist, auch 18:9 lösbar ist.
> Also: 18:3 ist lösbar und 18:9 ist nicht lösbar.

Die Implikation in der Prämisse zielt fälschlich – gegen mathematische Erkenntnisse – darauf, dass die Teilbarkeit durch 3 zwingend auf die Teilbarkeit durch 9 wirkt, und ist somit konnektiv falsch bestimmt. Wird eine solche Implikation, wie es in der Prämisse geschieht, negiert, so bezieht die Umgangssprache die Negation nur auf den Ausschluss und der implikativen Verknüpfung, hält den Fall „w-f" aber für *möglich,* so dass sich eine wahre adjunktive Aussage ergibt, die aber wegen der unerwarteten *modalen* Erweiterung offen lässt, welche Zeilen hierfür in Frage kommen. Das bedeutet nun, dass die übermittelten Informationen nicht ausreichen, auf eine der möglichen Varianten zu schließen, wie es allerdings passiert. Der Schluss ist ungültig, und er bliebe sogar ungültig, wenn die Konklusion zufällig wahr wäre: Aus der Prämisse allein folgt die Wahrheit nicht. Für die Folgerichtigkeit wäre mindestens eine weitere Aussage mathematischen Inhalts erforderlich gewesen. Wir weichen daher bei negierten umgangssprachlichen Implikationen recht stark vom klassischen Kalkül ab: Ohne jede Paradoxie führen selbst unsere adjunktiven Wertungen zu anderen Strukturen, so dass darüber hinaus unser Vorgehen nichts mit der von Schamberger zunächst gewählten klassischen Kalkülform zu tun hat. Er selbst lässt auch jedes Wort einer Erklärung fehlen.

---

[102] Die Kopplung eines metasprachlichen Dann-Teils an einen objektsprachlichen Wenn-Teil macht es sehr schwer, dies passend auszudrücken.

3.2.6.9 Schluss aus einer negierten Allaussage auf eine Existentialaussage

Dies ist die letzte der Schlussfiguren, die Schamberger als Beispiele herausgegriffen sowie für ungültig erklärt hat (S. 64), und sie erregt wieder Aufsehen. Die klassisch-logische Schlussfigur, die er anbietet,

> „non ∀(x)(F(x) seq G(x))“, folglich „ ∃ (x)(F(x) et non G(x))“,

enthält die gleiche Äquivalenz wie die Schlussfigur in Abschnitt 3.2.6.7, und man fragt sich, warum er daraus zwei Schlussfiguren gemacht hat. Sein Vorgehen ist deshalb – fast notwendig – dasselbe: Er dehnt die Anwendungsmöglichkeiten der Nullmenge auf die Umgangssprache aus und findet dadurch (in seinem Sinne) ungültige Schlussbeispiele:

> „Es ist nicht der Fall, dass Personen, die täglich 100 g Kokain konsumieren, drogenfrei leben.
> Also: Es gibt Personen, die täglich 100 g Kokain konsumieren und nicht drogenfrei leben.“ (S. 64)

Durch die hier ausgetauschte Platzierung der Quantoren – mit einem Alloperator in der Prämisse und einem Existenzoperator in der Konklusion – hat sich sogar ein weiterer Fehler eingeschlichen:

In Schambergers Diktion beginnen alle Schlussfiguren mit der (angeblich) klassisch-logischen Form, doch tatsächlich bildet, worauf doch noch einmal hinzuweisen ist, das umgangssprachliche Beispiel den Anfang. Schaut man sich darin die Prämisse genauer an, so ist kein Alloperator erkennbar. Wörtlich drückt sie

> „Es gibt keine Person, die täglich 100 g Kokain konsumiert und drogenfrei lebt“

aus, woraus er eigenmächtig – und korrekt im eingeschränkten Sinn Aristoteles’ – die Aussage

> „Nicht für alle Personen gilt, dass, wenn sie 100 g Kokain konsumieren, drogenfrei leben"

ableitet. Dieser Schluss ist aber, wenn die Grundmenge die Nullmenge einbezieht – wie es bei Schamberger der Fall ist –, nicht zugelassen, und so passen Formel und Beispiel nicht zusammen: Seine Gesamtstruktur ist widersprüchlich aufgebaut, so dass die weitere Analyse abgebrochen werden kann.

Vielleicht hat aber gerade die Widersprüchlichkeit, sollte er sie intuitiv wahrgenommen haben, dazu beigetragen, dass wenigstens in der Zweitbehandlung derselben Schlussfigur – die folgenden Worte hätten schon in Abschnitt 3.2.6.7 kommen müssen – das Problem explizit vorgetragen ist:

> „Die letzte Argumentform wirkt auf den ersten Blick [eigentlich ‚überhaupt', H. A.] unproblematisch. Denn es scheint natürlich, aus einer Aussage wie ‚Nicht alle Deutschen machen Urlaub auf Mallorca' zu schließen auf ‚Es gibt Deutsche, die nicht auf Mallorca Urlaub machen'. Dieser Schluss geht aber nur solange gut, als es Gegenstände gibt, die unter das erstgenannte Prädikat (in diesem Fall ‚x ist ein Deutscher') fallen. Wenn das Prädikat hingegen leer ist, so kann die Prämisse wahr und die Konklusion falsch sein." (S. 64)

Die darin enthaltene indirekte Empfehlung, der Erweiterung der in der Umgangssprache genutzten Mengen hinsichtlich der Nullmenge zuzustimmen, macht sichtbar, dass Schamberger die daraus erwachsenden Komplikationen nicht gänzlich überschaut. Allein die mit „ex falso quodlibet" verbundenen sinnlosen Schlüsse, die dann nicht ausgeschlossen werden dürften, wären für die Schüler eine unzumutbare Belastung.

3.2.6.10 Der Disjunktive Syllogismus

Auf die vorgezogenen Varianten zu „ex falso quodlibet" und „verum ex quolibet"[103] folgt bei Schamberger im neuen Abschnitt „umstrittene Schlussfiguren", in denen

---

[103] Vgl. Abschnitt 3.2.6.1.

er sich zumindest bedingt für die Gültigkeit entschieden hat, der Disjunktive Syllogismus (S. 67 f.), der antike Wurzeln besitzt und – bereits in dieser Anrede – von den Stoikern stammt[104]. Er sei in umgangssprachlicher Form, die die Stoiker als gültig auffassten, noch einmal genannt:

> Es gilt (prinzipiell) die Aussage A oder die Aussage B, doch gilt derzeit nicht die Aussage A. Folglich gilt die Aussage B.

Unter Verwendung von „wenn-dann“ würde/könnte er lauten:

> Wenn A oder B gilt, doch A nicht gilt, dann gilt B.

Im Gefolge Freges übersetzen fast alle Logiker den Erstausdruck klassisch-logisch in die Formel

> „(A vel B) et (non A))“, folglich „B“,

wozu die folgende Wahrheitsmatrix gehört:

A	B	„(A vel B)	et	(non A)“	folglich	„B“
w	w	w	$\underline{f}$	f		$\underline{w}$
w	f	w	$\underline{f}$	f		$\underline{f}$
f	w	w	$\underline{w}$	w		$\underline{w}$
f	f	f	$\underline{f}$	w		$\underline{f}$

Gemäß den von Frege eingeführten Definitionen sind sämtliche logische Operatoren dieser Schlussfigur adjunktiv zu verstehen, und daher wäre zunächst zu fragen, wie die entsprechenden Operatoren der Umgangssprache in wechselnden Sprachsituationen gedeutet werden sollten. Es geht um „oder“, „und“ und „nicht“, von denen bisher bekannt ist, dass bei „und“ und „nicht“ die adjunktive Form vorherrscht, während sie für „oder“ abgewogen angewandt wird. Eine größere Teilmenge an Beispielen muss sich deshalb finden lassen, die dieser Struktur nicht

[104] Vgl. Abschnitt 2.1.2, wo eine kurze Einführung gegeben wird.

genügen, und genauso ist es auch. Schamberger verzichtet jedoch im Unterschied zu seinen anderen Schlussfiguren auf jegliches Beispiel, obwohl er einen Satz wie

> „Der Disjunktive Syllogismus ist freilich nicht ganz harmlos“ (S. 68)

verwendet, den er allerdings nicht unter Einbeziehung der Verschiedenheiten von „adjunktiv“ und „konnektiv“ versteht, da er davon gar nichts weiß.

Um der Gültigkeit des Disjunktiven Syllogismus näher zu kommen, vergleichen wir ihn mit der sehr ähnlichen und bereits analysierten Schlussfigur

> „Aus ‚A oder B‘ folgt ‚wenn nicht A, dann B‘“,

die (fast) immer zu einem konnektiven Ausdruck führt und insofern nicht immer gültig ist[105]. Deren Beispiele seien hier zur Erläuterung wiederholt. So war für uns

> „Morgen fliege ich nicht in die USA, oder der US-Präsident wird morgen zurücktreten“

eine (sinnlose) adjunktive Verknüpfung, die diesen Schluss nicht erlaubt, aus der jetzt aber mit dem Zusatz, dass der US-Präsident morgen nicht zurücktritt, anscheinend folgen würde, dass ich nicht in die USA fliegen werde.

An dieser Stelle dürfte wieder Verwunderung entstehen, da meist, sofern man sie vergleicht, kein Unterschied zwischen den Schlüssen gesehen wird. Ein Erklärungsversuch ist nicht einfach und knüpft an das andere von Schamberger übernommene Beispiel an, das auch in dieser Schlussform abgelehnt wird:

Aus

> „Die Cornell University liegt in New York City oder im Bundesstaat New York, doch nicht in New York City“

folgt nicht

105 Vgl. Abschnitt 3.2.4 zur Vollständigkeit der zu „oder“ gehörenden Möglichkeiten. Unsere dortigen Erörterungen erklären die Schlussungültigkeit bei Unvollständigkeit allein aus Eigenschaften von „oder“.

„Die Cornell University liegt im Bundesstaat New York“,

da die Cornell University in New York City liegt. Die Prämisse ist falsch und ermöglicht nur den Schluss „ex falso quodlibet“, den wir ja ganz ausschließen. Somit ist für uns die Prämisse lediglich eine *partiell* entwickelte adjunktive Aussage: Gemessen an der Matrix ist allein die 2. Zeile mit „w“ belegbar, die für die Prämisse „f“ bringt. Ansonsten ist dieses Beispiel genauso zusammenhanglos, d. h. adjunktiv, wie das andere: Der Unterschied ist, dass das erste Beispiel, wenn Zusätze fehlen, als *vollständig* entwickelte adjunktive Prämisse interpretiert wird. Fest steht dies nicht. Es könnte durchaus sein, dass ich morgen definitiv in die USA fliegen werde, so dass Veränderungen im Wahrheitswert der Prämisse nur vom Verhalten des US-Präsidenten abhängen würden. Sobald er bliebe, wie jetzt behauptet, läge ebenfalls ein Schluss „ex falso“ vor.

Der weitere Weg sollte nun nicht so aussehen, dass zwischen schlussfähigen und schlussunfähigen adjunktiven Aussagen zu trennen ist, wodurch in ungünstiger Weise die sich anbahnende Unübersichtlichkeit der zu nutzenden Regeln gefördert wird. Als zweckmäßiger erweist sich eine andere Methode, und das vor allem im Vergleich mit dem Präsidentenbeispiel: Trotz oder wegen der Sinnlosigkeit solcher Satzbildungen wäre wenigstens bei einer Oder-Interpretation festzulegen, dass alle Kombinationen der Wahrheitswerte erwägbar zu sein haben, auch wenn sie sprachlich gar nicht gegeben sind. Die gerade erwähnte Sprachpraxis neigt sogar dazu, und so könnte von einer adjunktiv gültigen Schlussfigur gesprochen werden.

Es dürfte überhaupt eine günstige Entscheidung für den Unterricht auch in anderen Schulfächern sein, selbst wenn eine solche Sprachbreite es dem Lehrer sehr schwer macht, im Einzelfall die richtige Wertung zu finden. Entscheidungsmöglichkeiten wären ihm einzuräumen, denn es würde nicht selten offen bleiben, wie man objektiv feststellt, ob es in den Beispielen um vollständig entwickelte adjunktive Oder-Aussagen geht bzw. wann „oder“ überhaupt sinnvoll benutzt ist. Gerade im Zusammenhang mit „oder“ sind Schüler schnell zu Fragen dieser Art bereit, doch leider hätten wir keine Möglichkeit, feste Trennungsgrenzen zu ziehen. Die Aussage

„Albert Einstein oder Karl der Große hat die Relativitätstheorie formuliert“

müssten wohl schon Schüler der Mittelstufe als sinnlos adjunktiv ansehen, da für sie klar wäre, dass es nie Karl der Große gewesen sein kann. Das Ergebnis dürfte trotzdem im Unterricht von Klasse zu Klasse verschieden sein, worauf die Lehrer eingestellt sein sollten. In vielleicht den gleichen Klassen wäre dagegen

> „Albert Einstein oder Werner Heisenberg hat die Relativitätstheorie formuliert“

eine sinnvolle adjunktive Herausforderung.

Nach diesen vor allem auf die eigene Bewertung gerichteten Erörterungen muss nun Schambergers Auffassung stärker einbezogen werden. Es zeigte sich schon, dass er den Kern der logischen Problematik des Disjunktiven Syllogismus nicht kennt, so dass seine Formulierungen unklar bleiben. Er beginnt mit Einwänden der Relevanzlogiker gegen die Akzeptanz dieses Syllogismus, die wir weitgehend vernachlässigen wollen. Der Spielraum, den er ihnen zubilligt, trifft anscheinend besonders auf selbst-bezügliche Aussagen zu, wozu wir uns am Ende dieses Abschnitts äußern werden. Dann legt er jedoch großen Wert darauf, dass es „starke Gründe für die Beibehaltung des Disjunktiven Syllogismus“ gibt.

Die Begründung, die er dafür bringt, ruft zumindest erneut einiges Erstaunen hervor, da er diesmal überhaupt nicht an logischen Beziehungen misst, sondern am logischen Können der Menschen: Die Regel würde im Alltag und in der Wissenschaft regelmäßig angewandt, worunter er nach einer nachfolgenden Information „immerhin gut 71% der Befragten“ (S. 68) versteht, die er sofort widersprüchlich gegen diese Worte mit „gewiss nicht beeindruckend“ selbst wieder abwertet. Auf diesem „dünnen Eis“ – das sich aber gegen ihn verstärken ließe, wenn man nur weitere Faktoren berücksichtigt – folgert er dann kühn: „Insofern ist der Disjunktive Syllogismus ein unverzichtbarer Bestandteil einer Logik der Umgangssprache“ (S. 68).

Es dürfte unnötig sein, eine solche Begründung ausführlicher zu kommentieren. Wie auch in diesem Abschnitt von uns detailliert dargelegt, werden Schlussfiguren immer vorrangig danach beurteilt, was die verwendeten logischen Operatoren in wissenschaftlicher Hinsicht ausdrücken sollen und wie sie eingesetzt sind, nicht aber nach dem, was logische Laien mit ihnen anrichten. Auf dieser Erkenntnisstufe fasst Schamberger dann seinen Standpunkt zusammen und gibt einen Ausblick: „Der Disjunktive Syllogismus ist freilich nicht ganz harmlos: In klassischen Kalkülen erlaubt er es *unter bestimmten Umständen*, aus einer Formel mit Disjunktion eine Formel mit Konditional abzuleiten. […] Der filterlogische Kalkül, den ich im nächsten Kapitel behandle, unterscheidet deshalb zwischen akzeptablen und inakzeptablen Anwendungen des Disjunktiven

Syllogismus; die Ableitung von ‚non A seq B' aus ‚A vel B' verbietet er aufgrund einer Einschränkung der Konditionaleinführung."[106] Zu all dem ist in diesem Abschnitt schon Etliches deutlich gesagt worden, so dass eine Wiederholung sich erübrigt.

Es könnte der Eindruck entstehen, dass eine ständige Kritik an Schamberger vorprogrammiert sei. Das wäre gegen unsere Absicht gerichtet, und hier ist auch Gelegenheit gegeben, konkret eine gewisse Ähnlichkeit der Auffassungen zu konstatieren, da er zu Beginn seiner Ausführungen zum Disjunktiven Syllogismus dessen Anwendung auf selbstbezügliche Aussagen zusätzlich – über seine zweite Einschränkung hinaus – ablehnt[107] und damit, wie wir es ebenfalls sehen, mehr „Schwachstellen", als von ihm geplant, zugibt. Die Begründung verschiebt er allerdings auf das Ende seines Buches (S. 139 ff.), worin wir ihm nicht folgen wollen. Gleich hier soll abschließend kurz dazu etwas gesagt werden, da in der Schulmathematik die Sprachstufung bei selbstbezüglichen Aussagen, um die es (vermeintlich) geht, wegen Überforderung der Schüler nicht theoretisch erörtert wird.

Als Ausgangspunkt sei gefragt, welche besondere Problematik sich z. B. hinter der Aussage

„Dieser Satz ist falsch"

verbirgt. Sie scheint sich auf sich selbst zu beziehen, doch gerät man in logische Schwierigkeiten, wenn man dies wie Schamberger und andere Logiker akzeptiert. Unter der Annahme, dass sie wahr ist, würde eine solche Interpretation bedeuten, die Aussage so zu nehmen, wie sie formuliert ist, und das heißt, dass sie falsch ist. Sie wäre demnach wahr und falsch, wenn sie als wahr angenommen wird. Zum gleichen Ergebnis kämen wir, wenn sie falsch sein sollte: Jetzt stellen wir ihre Wahrheit, dass sie gemäß ihrer Formulierung falsch ist, in Frage, womit sie wahr wäre, so dass aus „falsch" folgt, dass sie wiederum falsch und wahr zugleich ist.

Ein derartiges Ergebnis wäre mit einer Anwendung des Disjunktiven Syllogismus nicht vereinbar. Er „lebt" ja vom sinnvollen Wechsel der Wahrheitswerte, der

106 Schamberger, LUS, S. 68. Hier übernehme ich mit „seq" und „vel" Schambergers Bezeichnungen (und Verwechslungen!), denn es geht um „wenn-dann" und „oder". Den klassischen Kalkül hätte er deshalb hier in Ruhe lassen können.

107 Schamberger, LUS, S. 67: „Eine Ausnahme sind selbstbezügliche Aussagen, die von der Lügner-Paradoxie betroffen sind."

von der konstanten Verdopplung „wahr und falsch“ zunichte gemacht würde. Und auch die Umgangssprache könnte dies nicht verkraften; die Aussage wäre für sie nutzlos[108]. Dem steht nun aber entgegen, dass gerade in der Schulmathematik mit dieser Aussage ständig sinnvoll gearbeitet wird und die Schüler sie gut verstehen. Es bleibt deshalb nur der Ausweg, dass sie mindestens noch eine zweite Interpretation besitzt, und diese gibt es selbstverständlich auch. Ein bisschen muss sie jedoch gesucht werden, da die Umgangssprache wieder objekt- und metasprachliche Sprachanteile miteinander verwoben hat. Wegen „ist falsch“ hat die Aussage für uns eindeutig einen metasprachlichen Aspekt und dürfte von daher nicht auf sich bezogen sein. Anscheinend beansprucht sie das auch gar nicht, sondern möchte ausdrücken, dass etwas Ungenanntes – z. B. die objektsprachliche falsche Schüleraussage „2 mal 2 = 5“ – falsch ist. Genauso versteht ein Schüler sie und akzeptiert sie, wenn sie vom Lehrer stammt, sicher irgendwann. Gegenstand der Aussage ist bei dieser *sinnvollen* Interpretation die Objektsprache; die Wahrheitsbewertung der Metasprache wird nicht berührt: Die angenommene Lehreraussage ist nach wie vor jeweils konstant wahr oder falsch in Abhängigkeit davon, was für eine Schüleraussage vorliegt. Ihre Funktion besteht darin, den Wahrheitswert einer objektsprachlichen Äußerung zu *bestätigen*. Damit ist sie, worauf es hier ankam, dem Disjunktiven Syllogismus wieder oder überhaupt zugänglich, denn das dortige „oder“ hat, an den realen Möglichkeiten gemessen, konnektiven Charakter. Schamberger hat es dagegen schwerer, da er Aussagen der analysierten Art als selbstbezügliche Aussagen anerkennt. Doch muss er nun in seitenlangen Erörterungen erklären, warum trotz einer weiteren „Schwachstelle“ sein Disjunktiver Syllogismus wertvoll bleibt. Letzterem stimmen wir aber unter Einsparung der Erörterungen um die Selbstbezogenheit von Aussagen ausdrücklich zu.

3.2.6.11 Die Disjunktionseinführung

Klassisch-logisch lautet die gültige Schlussfigur:

„A“, folglich „A vel B“,

[108] Anderweitige Denkansätze in der Quantentheorie gehen unseres Erachtens in die falsche Richtung, wozu in Abschnitt 2.4 einige Überlegungen vorgetragen wurden.

wozu folgende Matrix gehört:

A	B	„A“	folglich	„A vel B“
w	w	w		w
w	f	w		w
f	w	f		w
f	w	f		f

Gleich in der ersten Aussage will Schamberger seinen wissenschaftlichen Kontrahenten den Schneid mit der Information abkaufen, dass so gut wie jeder Kalkül diese Schlussregel als gültig enthält (S. 68). Auf ein eigenes Beispiel verzichtet er wieder, entwickelt seine Meinung diesmal aber an einem Gegenbeispiel von Gerhard Schurz:

> „Assume a satellite is going to crash into the earth, and a journalist asks a scientist where the point of impact will be. The scientist answers „in the Atlantic Ocean“, and the journalist, applying the law of addition [Disjunktions-Einführung], writes next day in big letters in his newspaper „it follows from scientific calculations that the satellite will come down in London or in the Atlantic Ocean“ – with the effect that the sale rate of his journal increases rapidly.“[109]

Leider gehen mehrere Aussagen bei beiden Kontrahenten daneben, so dass eine Auswahl genügen muss. Das „law of addition“ erlaubt eine isolierte Ergänzung einer beliebigen Aussage, so dass Schamberger es nicht „anstößig“ nennen kann, wenn eine „frei erfundene“ Aussage gewählt ist. Mehr ist aber auch nicht geboten: Die Ergänzung wird zusätzlich dem Wissenschaftler unterstellt, der eine solche Möglichkeit gar nicht erwogen hat, und so hätte wegen dieser *Entstellung* Schurz, der selbst von Betrug spricht, sehen müssen, dass es kein Gegenbeispiel ist. Schamberger wiederum konzediert fälschlich, dass der „Wahrheitstransfer sichergestellt“ sei, denn er pflichtet dem Betrugsvorwurf, der den Wahrheitstransfer ja aufhebt, ausdrücklich bei. Das Beispiel trifft deshalb nicht die logische Streitfrage. Doch das hält Schamberger nicht davon ab, die Zweigleisigkeit von Betrug und

[109] Belege bei Schamberger, LUS, S. 68 und 152.

Wahrheitstransfer trotz „Unbehagen“ mit undeutlichen, wechselnden Wertungen fortzusetzen. So zieht er Paul Grice als Hilfe heran[110], für den eine Konversationsmaxime besagt, dass die Informationen dem jeweiligen Zweck angepasst werden müssen. Dem stimmt er bedingt zu und erklärt die Aussage des Journalisten für unangebracht, doch mit dem Zusatz, sie sei wortwörtlich wahr. Damit greift er in unserem Verständnis die adjunktive Wertung von „oder“ heraus, aber ohne erklären zu können, dass sie gemeint ist. Auch erkennt Schamberger nicht, dass in der Aussage „oder“ nur partiell entwickelt ist und daher am besten unberücksichtigt bleiben sollte. Vielleicht denkt er genauso, denn er verlässt ohne Kommentar das Journalistenbeispiel, um nunmehr Grice, der ihm gerade helfen musste, wegen dessen Wenn-dann-Auffassung zu attackieren. Zumindest drückt diese Ablenkung unseres Erachtens Scheitern aus.

Am Ende des Abschnitts hat Schamberger seine zwischenzeitlichen Schwierigkeiten offenbar völlig vergessen. Er bezeichnet jetzt den Schluss von „A“ auf „A oder B“ sogar als „aus logischer Sicht unproblematisch“ und sieht seine umgangssprachliche Form als eine (gültige) „logische Folgerung“ an.

Vielleicht wäre er zur entgegengesetzten Auffassung gelangt, wenn er das (missratene) Beispiel von Schurz zur Annahme umfunktioniert hätte, dass bereits der Wissenschaftler das „law of addition“ anwandte, womit dann kein Betrug entstanden wäre. Doch als freie Erfindung eines Absturzes über London hätten logische Laien wie die Schüler auch das veränderte Beispiel abgelehnt, wenn eine Begründung dafür fehlen würde. Mit anderen Worten heißt das, dass „oder“ hier von vornherein konnektiv zu verstehen ist, und es darf sicher hinzugefügt werden, dass die Oder-Verbindungen dieser Schlussfigur überhaupt (fast) immer konnektiven Charakter tragen, wie es z. B. auch in

> „Eine zur x-Achse parallele Tangente ist mit einem Extrempunkt oder mit einem Sattelpunkt verbunden“

der Fall ist, einer Aussage, die nicht aus

> „Eine (vorliegende) zur x-Achse parallele Tangente ist mit einem Extrempunkt verbunden“

[110] Belege bei Schamberger, LUS, S. 69, 149 und 150.

erschlossen werden kann: Der Sattelpunkt bedarf – etwas salopp ausgedrückt – einer gesonderten Beweisführung.

Adjunktive Beispiele bleiben auch im empirischen Normalverständnis fraglich. So lässt sich vielleicht

> „Quadratische Gleichungen haben mitunter irrationale Lösungen oder mitunter rationale Lösungen"

adjunktiv aus

> „Quadratische Gleichungen haben mitunter irrationale Lösungen"

erschließen, doch wird wohl eher von einem konnektiven verkürzten Schluss unter Verwendung des Wissens um den Zahlenaufbau auszugehen sein.

Gegen Schamberger muss deshalb betont werden, dass die Umgangssprache wohl kaum gestattet, eine Aussage zu einer Oder-Verbindung mit einer beliebig anderen zu erweitern. Der logische Operator „oder" versteht sich in einer solchen Konstellation vielleicht in ganz wenigen empirischen Ausnahmen adjunktiv, ansonsten aber konnektiv, und die Begründungen für die Existenz oder die Möglichkeit beider Oder-Seiten sind nicht voneinander abhängig, so dass nicht aus einer der Aussagen auf die Disjunktion geschlossen werden darf. Ch. Schamberger hat sich bei dieser Schlussfigur in Unkenntnis adjunktiver und konnektiver Oder-Verbindungen völlig verrannt.

3.2.6.12 Der Kettenschluss

Dieser Abschnitt verlangt einige Vorbemerkungen. Zunächst fällt auf, dass er sich in der Länge deutlich von allen anderen Beispielerörterungen abhebt. Gut neun Seiten für den Kettenschluss stehen maximal jeweils drei Seiten für die übrigen Schlussfiguren gegenüber, so dass offenbar Schamberger hierin eine Schwerpunktaufgabe sieht und wir ihm in der Gründlichkeit folgen wollen.

Ferner wäre zu bemerken, dass er zwar nach einer Pause wieder mit einem eigenen Beispiel beginnt, aber nicht zum Kettenschluss, sondern zum Modus ponens, um die Methodik seiner Verteidigung des Kettenschlusses in verallgemeinernder Form zeigen zu können. Dabei jongliert er derart mit den Wahrheitswerten der im Schluss enthaltenen Aussagen, dass eine der Prämissen falsch wird und der gesamte Modus ponens dadurch für uns ungültig. Auch bei ihm heißt es dann:

> „Da also die erste Prämisse nicht wahr ist, ist das [veränderte, H. A.] Argument kein Gegenbeispiel gegen die Gültigkeit des Modus ponens. Ich behaupte nun, die angeblichen Gegenbeispiele gegen den Kettenschluss lassen sich auf ganz ähnliche Weise kommentieren und zurückweisen." (S. 71)

Diese Aussagen verwundern nun, denn einige Seiten zuvor hatte er beim Schluss „ex falso quodlibet" die Teilmenge „ex contradictione quodlibet" als gültig ausgeklammert, so dass für ihn aus der falschen Prämisse allein keine Ungültigkeit führen dürfte. Er hätte erst prüfen müssen, ob nicht (irgendwie) „ex contradictione quodlibet" im Spiele ist. Da er das unterlassen hat bzw. fortan unterlassen will, besitzen seine folgenden Ausführungen eine in seinem Verständnis unsichere Grundlage.

Mit dieser Einschränkung verfolgen wir den weiteren Weg Schambergers, bleiben aber großzügig, wenn unseres Erachtens keine „contradictio" vorliegt. Immerhin verteidigt er eine der berühmtesten und ältesten Schlussfiguren der Logikgeschichte. Umgangssprachlich lautet sie:

> Wenn A, dann B.
> Wenn B, dann C.
> Also: Wenn A, dann C.

Schon bei Aristoteles und den Stoikern ist sie zu finden, wurde aber nicht immer als gültig angesehen. Erst Frege wies dann nach, dass sie *gemäß seinem Sprachsystem* ausnahmslos gilt. Wir bringen dafür die aussagenlogische Form:

A	B	C	„(A seq B)	et	(B seq C)“	folglich	„(A seq C)“
w	w	w	w	w	w		w
w	w	f	w	f	f		f
w	f	w	f	f	w		w
w	f	f	f	f	w		f
f	w	w	w	w	w		w
f	w	f	w	f	f		w
f	f	w	w	w	w		w
f	f	f	w	w	w		w

Nach diesem auf die Sprache Freges bezogenen Beweis gingen die meisten Logiker trotzdem dazu über, recht unkritisch ohne nochmalige Überprüfung die Schlussfigur auch auf die Umgangssprache als gültig zu übertragen. Wie gerade gezeigt, entschied sich Schamberger gleichfalls für dieses Vorgehen, um es nunmehr in seinem Buch als berechtigt zu beweisen. Dafür zieht er, wie er schreibt, „eines der bekanntesten und meist diskutierten (Gegen-, H. A.) Beispiele“ heran, das er von Ernest Adams übernimmt:

> „Wenn Brown die Wahl gewinnt, wird Smith sich ins Privatleben zurückziehen.
> Wenn Smith vor der Wahl stirbt, wird Brown die Wahl gewinnen.
> Also: Wenn Smith vor der Wahl stirbt, wird Smith sich ins Privatleben zurückziehen.“[111]

Die Sprachsituation ist diesmal sehr kompliziert, denn wir teilen Adams’ Standpunkt, dass der Kettenschluss nicht allgemeingültig ist, halten sein Beispiel aber als Nachweis für ungeeignet. Dadurch kommen wir Schamberger nahe, für den ebenso „das Argument kein Gegenbeispiel gegen die Gültigkeit des Kettenschlusses“ ist (S. 74) und der sich in seiner Wertung des eigenartigen Textes wegen schon bestätigt sieht. Es dürfte deshalb zweckmäßig sein, die Bedenken gegen das Beispiel an den Anfang zu stellen und danach erst Schambergers weitergehende Interpretation zu hinterfragen.

111 Belege bei Schamberger, LUS, S. 71 und 147.

Zunächst steht wieder fest, dass die Prämisse des umgangssprachlichen Beispiels nicht ohne weiteres in den klassischen Kalkül übertragen werden kann, ja, sich bei zwei konnektiven Implikationen klar davon unterscheidet. Trotzdem liefert die Teilmenge der Kettenschlüsse mit nur atomaren Implikationen, zu der das Beispiel gehört, stets gültige Formen, sofern sie korrekt gebildet sind. Wir machten aber schon darauf aufmerksam, dass die Umgangssprache immer wieder den Geltungsbereich ihrer Aussagen verkürzt[112]. Anders ausgedrückt: Die Abgrenzungslinie zwischen den zu berücksichtigenden *sowie* sprachlich ausgewiesenen Aussagen und den übrigen, die ebenfalls Einfluss besitzen, jedoch nicht genannt werden müssen, ist oft nicht klar erkennbar und wäre mitunter sogar für Einzelfälle zu präzisieren, wenn bei der Äußerung Anspruch auf Exaktheit erhoben werden soll. Auch das vorliegende Beispiel ist etwas verworren, allerdings in dem Sinne, dass das Anliegen nicht zum Text passt. Die erste Prämisse besagt gewiss, dass Smith nach der Wahl noch eine Weile lebt, während die zweite Prämisse erwägt, dass er vor der Wahl stirbt. Eine partielle Formalisierung mit dem Wahltag als Nullpunkt ergäbe, dass A (Brown) und B (Smith) gemäß der ersten Prämisse im Minus- und im Plus-Bereich anzutreffen sind, während nach der zweiten Prämisse B im Plusbereich möglicherweise fehlt. Es wären somit zwei Varianten zu beachten: Wenn B nur dem Minusbereich angehört, ist die zweite Prämisse unter Umständen wahr, doch die erste Prämisse wird falsch. Die Schlussfigur würde damit nur der Form „ex falso quodlibet" genügen, die wir bekanntlich als umgangssprachlich sinnlos ablehnen. Mit anderen Worten bedeutet das, dass Prämisse 1 als wahre Aussage nur die andere Variante zulässt, dass Smith nicht vor der Wahl stirbt. Prämisse 2 verlangt dagegen wegen ihres konnektiven Charakters, dass Smith' Tod vor der Wahl genauso möglich sein muss wie eine Zeitlang nach der Wahl. Die stete Widersprüchlichkeit dieser drei Aussagen erlaubt es nicht, einen Kettenschluss in der gegebenen Art aufzustellen. Adams' Beispiel geht prinzipiell an dessen Anwendungsmöglichkeiten vorbei und erschüttert ihn daher nicht. Auf solch einem Wege ist diesem Schluss nicht beizukommen.

Das heißt, worauf wir bereits hinwiesen, selbstverständlich nicht, dass ein umgangssprachlich formulierter Kettenschluss, sobald die Bedingungen seiner Anwendung erfüllt sind, berechtigt ist. Schamberger, der den Kettenschluss ja verteidigt, muss deshalb in seiner Argumentation über den Nachweis, dass das

112 Vgl. Abschnitt 1.1.2.

Gegenbeispiel ungeeignet ist, hinausgehen; er müsste mehr sagen. Sein Vorgehen wäre daher jetzt zu betrachten.

Die Situation ist für ihn aber nicht einfach. Der Leser weiß schon, obwohl Schamberger noch nicht seine Theorie in ihrer Gesamtheit vorgestellt hat, dass er Frege nur hinsichtlich der Einführung der Implikation korrigiert, wozu hier keine Möglichkeit besteht: Zum Beispiel gehören von Anfang an ausformulierte Implikationen. So hätte er eigentlich mit Hilfe des Frege-Kalküls nachweisen können, dass die Prämissen und die Konklusion wahr seien, womit Adams widerlegt und der Kettenschluss gerettet wäre. Doch er sieht anscheinend wie andere, dass eine Zeitkomponente im Beispiel mitwirkt, so dass Frege, der eine solche Komponente gar nicht kennt, sich nicht unmittelbar anwenden lässt. Gerade sie ist aber dafür verantwortlich, dass umgangssprachlich die Konklusion des Beispiels für falsch gehalten wird, obwohl in keiner der drei Aussagen des Arguments ein Zeitbezug explizit erkennbar ist.

Der auch von uns beachtete Ausweg kann deshalb für Schamberger, wenn er „ex contradictione quodlibet" vernachlässigen möchte, nur darin bestehen, der Umgangssprache verkürzte Aussagen vorzuwerfen und zu fragen, ob man unter Einsatz ausgewählter wahrheitsmäßig gegebener, doch ungenannter Aussagen zum Ziel kommen kann. Unsere nachfolgende Wiedergabe seiner Gedanken gleicht dabei Abschweifungen, Umwege und Verzerrungen aus, die er auch in diesem wichtigen Abschnitt immer wieder in seine Argumentationen einbaut, wodurch sie keine strenge Folgerichtigkeit besitzen. So findet sich der unseren Überlegungen ähnliche Nachweis, dass das Gegenbeispiel von E. Adams nicht überzeugt, nicht am Anfang dieses Teilabschnitts – wo es unbedingt hingehört –, sondern relativ weit am Ende (S. 73 f.), nachdem er eine erste Aussagenbegrenzung für die Anwendung des Kettenschlusses bereits erläutert hat. Trotzdem kann diese unglückliche Reihung genutzt werden, um hier mehr über seine Begrenzung zu erfahren. In Verallgemeinerung der Überlegungen Nelson Goodmans lautet sie:

> „Wenn wir einen Bedingungssatz äußern, legen wir uns stillschweigend auf die Wahrheit bestimmter Aussagen fest, welche die *relevanten* Umstände beschreiben, unter denen wir von der Wahrheit des Antezedens auf die Wahrheit des Konsequens schließen könnten (Goodman, [The Problem of Counterfactual Conditionals, H. A.], 1947, S. 116, äußert sich nur über kontrafaktische Bedingungssätze; seine These lässt sich aber verallgemeinern.)" (S. 73)

Der Begriff „Relevanz" lässt tiefere Gedanken annehmen, doch man wird enttäuscht: „Die Rede von relevanten Umständen ist natürlich vage. Im Rahmen einer Semantik von Bedingungssätzen wäre sie genauer zu explizieren. Für diese Arbeit reicht jedoch ein ungefähres Verständnis davon" (S. 73). Das „ungefähre Verständnis" sollen dann einige wenige konkrete Aussagen bringen, zu denen nichts Allgemeineres gesagt ist. „Relevanz" wird quasi nicht definiert; man erfährt nur, dass eine bestimmte Aussage irgendwie wichtig für den Schluss sein muss.

Im Grunde ist sein Versuch damit gescheitert, so dass er nur noch bei „ex contradictione quodlibet" Hilfe finden könnte. Doch er wirft aus dieser verwässerten Lage heraus den Blick auf Adams' Beispiel und tut so, als ob er irgendetwas geklärt hätte:

> „Wenn wir die Aussagen eines Arguments hinsichtlich ihres Wahrheitswerts beurteilen, müssen wir bei jeder Aussage *alle* Umstände in Betracht ziehen, *die* im Kontext des Arguments *relevant* sind; dies gilt insbesondere für die Umstände, die darin explizit erwähnt werden." (S. 74)

Wie soll denn so etwas klappen, wenn unbekannt bleibt, was überhaupt „relevant" bedeutet? Schamberger verletzt einfache Überlegungen, die aus undefinierten Begriffen erwachsen, und schafft es demzufolge ohne Ergänzungen auch nur, die Prämisse unter weitgehender Verwendung des geschriebenen Textes als möglicherweise falsch zu werten, so dass das Gegenbeispiel wenigstens seine Funktion verlieren könnte. Da wir jedoch nachwiesen, dass es das von ihm übersehene „ex contradictione quodlibet" beinhaltet, lässt sich nur sagen, dass er auf halbem Wege seine Überlegungen abbricht und mit diesem mageren Ergebnis von seiner Ankündigung total abweicht.

Trotzdem gibt er noch nicht auf und wendet sich mittels eines neuen Beispiels, das von David Lewis stammt, wieder seinen Verallgemeinerungen zu, die er eigentlich schon mit der Einschätzung, dass sowohl indikativische als auch konjunktivische bzw. kontrafaktische Bedingungssätze dem Kettenschluss genügen (S. 74), abgeschlossen hatte. Offenbar fühlte er sich von Lewis provoziert, der den Kettenschluss gar nicht generell ablehnt, sondern nur für kontrafaktische Bedingungssätze. Daraus entwickelt Schamberger eine längere Polemik, die nicht übergangen werden sollte. Denn kontrafaktische Annahmen kommen im mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterricht nicht selten vor, so dass die gewünschte

Gründlichkeit auch uns weiterhelfen könnte. Allerdings ist das Beispiel wie das vorherige leider wieder fern jeder realen Wichtigkeit. Es lautet:

> „If Otto had gone to the party, then Anna would have gone.
> If Anna had gone, then Waldo would have gone.
> Therefore: If Otto had gone, then Waldo would have gone.“ (S. 74)

Den *Hintergrund* bilden die folgenden Umstände im Wortlaut Lewis':

> „The fact is that Otto is Waldo's successful rival for Anna's affections. Waldo still tags around after Anna, but never runs the risk of meeting Otto. Otto was locked up at the time of the party, so that his going to it is a far-fetched supposition; but Anna almost did go. Then the premises are true and the conclusion false.“ (S. 74)

Das Argument ist korrekt mit wahren Prämissen aufgebaut und gibt nicht den geringsten Anlass, die Konklusion als wahr anzuzweifeln. Doch der Zusatz wirkt verwirrend, wonach Waldo „never runs the risk of meeting Otto“, so dass, legt man die Semantik der Umgangssprache an, die Wahrheit der Konklusion aufgehoben wäre. Wie noch näher zu zeigen ist, würden die Prämissen ebenfalls fragwürdig, so dass Lewis die Situation in seinen drei Sätzen nebst Zusatz widersprüchlich „eingefangen“ hätte, und zwar in einem solchen Maße, dass selbst im Wissen um statthafte Sprachverkürzungen sie nicht konsistent rekonstruiert werden könnte. All das setzt aber, wie gesagt, voraus, dass die Semantik der Umgangssprache vorliegt.

Es kommt jedoch anders. Denn Lewis vertritt eine recht eigenartige Semantik, die zu den „Mögliche-Welten-Semantiken“ gehört und in den Worten Schambergers folgendes zu den Wahrheitsbedingungen einer kontrafaktischen Implikation ausdrückt:

> „Lewis' Semantik kontrafaktischer Bedingungssätze erlaubt es, jeden Satz für sich zu betrachten: Er ist wahr genau dann, wenn es entweder keine mögliche Welt gibt, die dessen Antezedens wahr macht, oder wenn mindestens eine mögliche Welt, die sowohl das Antezedens als auch das Konsequens wahr macht, unserer Welt insgesamt ähnlicher ist als alle möglichen

> Welten, die das Antezedens wahr und das Konsequens falsch machen (Lewis 1979, S. 41).“ (S. 75)

Daran gemessen, ergäben die drei Aussagen des Arguments unter Verwendung des Zusatzes angenähert folgende Version:

Für die erste Prämisse heißt das, dass für die „Welt“ von Otto und Anna die Möglichkeit des gemeinsamen Besuchs der Realität viel, viel näher liegt als die Möglichkeit des Besuchs von Otto ohne Anna. Die erste Prämisse ist nach dieser Semantik wahr. In der zweiten Prämisse ist wieder die Möglichkeit eines gemeinsamen Besuchs, diesmal von Anna und Waldo, gegenüber der des Einzelbesuchs von Anna dominierend. Also ist die zweite Prämisse ebenfalls wahr. Doch die Konklusion passt nicht dazu: Im Antezedens heißt es zunächst, dass eine „far-fetched“ Möglichkeit für Ottos Partybesuch besteht, so dass von daher die Wahrheit verletzt wäre. Und auch die andere Wahrheitsbedingung scheidet aus, da es die mögliche Welt des gemeinsamen Besuchs von Otto und Waldo gar nicht gibt. Die Konklusion ist demnach falsch, der Kettenschluss ungültig – und das bei Einhaltung der vorgesehenen Semantik. Schamberger hätte verloren.

Wie hat er darauf reagiert? Nachdem er im Prinzip korrekt Lewis wiedergegeben hat, beginnt er die Widerlegung mit dem folgenschweren Satz, dass sich Lewis „mit unabhängigen Gründen angreifen“ lasse (S. 75). Darunter versteht er, dass dessen Semantik seinem umgangssprachlichen Verständnis nicht entspricht. Offenbar möchte Lewis auf eine Umgangssprache hinaus, die einige Schattenseiten nicht besitzt; daran vorbeigehen möchte er jedoch sicher nicht. Insofern ist Schambergers Formulierung überzogen. Denn „unabhängige Gründe“ gibt es nicht. Jeder Logiker hat selbstverständlich das Recht, eine beliebige Semantik zu konstruieren, nur muss er sagen, worauf er hinauswill. Sollte es eine spezifische Form der Umgangssprache sein, wäre es nicht zulässig, bei ihren Eckwerten an der ungefähr abzusehenden Bedeutung zu rütteln. Das Problem besteht in der Frage, ob eine gewählte Semantik die logischen Hauptausdrücke der Sprache erfasst, die man im Auge hat. Und da sagten wir schon zu Frege, dass er seinen Definitionen der logischen Operatoren nicht die Namen „wenn-dann“, „oder“ usw. hätte geben sollen, es sei denn, er hätte in Deutschland kundgetan, dass er in Zukunft anders als die übrigen Deutschen sprechen werde. Lewis erging es quasi genauso, denn er löste sich mit der vorliegenden Anwendung seiner Semantik auf die drei Sätze selbstherrlich aus der Umgangssprache, z. B. dort, wo er willkürlich in der zweiten

Prämisse eine konjunktive Allaussage von Ja-Möglichkeiten formuliert, obwohl er weiß, dass die Nein-Möglichkeit „Anna – nicht Waldo“ eintreten kann. So, wie er es gemacht hat, darf man die Bedeutung der alltäglichen logischen Bezüge nicht verändern.

Leider erkennt Schamberger dieses Manko der *Abseitigkeit* der Semantik Lewis’ unzureichend. Er möchte dessen Fehler fast ausschließlich in der Vernachlässigung der stillschweigenden Voraussetzungen sehen und hier besonders die Wichtigkeit der Relevanz herausstellen, die er aber weiterhin nicht definiert. Seine Meinung verfügt daher über keinen sicheren Boden, so dass sein Vorwurf an Lewis, wegen der angeblichen Vernachlässigung „stiller“ relevanter Umstände mit falschen Prämissen zu operieren, gleichfalls unbewiesen im Raum bleibt.

Vorsichtig gesagt bleibt die Allgemeingültigkeit des Kettenschlusses für die Umgangssprache deshalb in der Diskussion; Schamberger hat hier keine „Punkte“ sammeln können, wozu nicht unerheblich beiträgt, dass er am Ende seiner Ausführungen zum Kettenschluss die Rolle falscher Prämissen ohne Beachtung seiner Ex-contradictione-Theorie noch selbstsicherer verabsolutiert als zu Beginn:

> „Es gibt keinen Grund, kontrafaktische Bedingungssätze anders zu behandeln als indikativische. *Alle* vermeintlichen Gegenbeispiele haben eine falsche Prämisse und sind daher nicht geeignet, die Gültigkeit des Kettenschlusses in Frage zu stellen.“ (S. 77)

Darüber hinaus fragt man sich, wie Schamberger es fertigbringen kann, angesichts der geringen Zahl von fünf einbezogenen Logikern und bei Übergehen jeder zusammengesetzten Implikation nach zwei bis drei als geglückt empfundenen Verteidigungen zu behaupten, dass *alle* Gegenbeispiele aus dem Wege geräumt seien. Er müsste doch erkannt haben, dass diese zu schmale Basis seiner Überzeugung kaum einen hinreichenden Halt gibt, einer Kritik standzuhalten. Schon die eigentlich noch relativ einfache Verbindung der logischen Operatoren „wenn-dann“ und „oder“ in einer gemeinsamen Implikation, die wir gleich heranziehen werden, hätte ausgereicht, sein Urteil in Schwierigkeiten zu bringen.

Andererseits wird auch Lewis mit seiner Sonderdeutung der kontrafaktischen umgangssprachlichen Implikationen kein Verständnis finden: Seine Semantik verlangt eine *erweiterte* Übersetzung des von ihm beabsichtigten Beispielinhalts in die Umgangssprache, die demnach mehr als die drei Aussagenverknüpfungen ausdrücken muss. Die Richtung der Neubewertung sei mit der folgenden Formalisierung einmal vorgegeben:

Die Aussagen des Beispiels seien abgekürzt unter „Otto", „Anna" und „Waldo" – für „… kommt möglicherweise zur Party" – erkennbar. Die Eintragungen kombinieren die Aussagen sowie die Zusatzinformationen mit den links außen genannten Wahrheitswerten *parallel*. „Sicher" bedeutet dann, dass z. B. Anna, wenn „w-w" für „A und C treten ein (sind eingetreten)" gelten würde, ebenfalls käme (gekommen wäre), während z. B. Waldo mit Sicherheit nicht käme, sobald „w-w" für „A und B" gilt (Zeile 2). Die Beziehung zur dazwischen geschalteten Aussage wird erst in der anschließenden Auswertung sichtbar.

			Otto	**Anna**	**Anna**	**Waldo**	**Otto**	**Waldo**
A	B	C	((Wenn A, dann B) und (wenn B, dann C)) gelten, gilt auch (wenn A, dann C)					
w	w	w	kaum	sicher	sicher	nicht	kaum	nicht
w	w	f	kaum	sicher	sicher	sicher	kaum	sicher
w	f	w	kaum	nicht	nicht	nicht	kaum	nicht
w	f	f	kaum	nicht	nicht	sicher	kaum	sicher
f	w	w	fast sicher	neutral	neutral	sicher	fast sicher	sicher
f	w	f	fast sicher	neutral	neutral	nicht	fast sicher	nicht
f	f	w	fast sicher	neutral	neutral	neutral	fast sicher	neutral
f	f	f	fast sicher	neutral	neutral	neutral	fast sicher	neutral

Alle drei Implikationen würden wahr, wenn „wahr-wahr" sowie „falsch-falsch" belegt sein sollten und „wahr-falsch" ausgeschlossen ist. In der ersten Prämisse existiert für „w-w" eine sehr schwach-mögliche Belegung und für „f-f" eine normal-mögliche; „w-f" ist ausgeschlossen. Die zweite Prämisse ist dagegen in Abhängigkeit von Ottos Partybesuch, d. h. in Abhängigkeit von 2 zusätzlichen Varianten, wahr oder falsch, und die Konklusion vermehrt sogar noch die sprachlichen Unstimmigkeiten: Sie ist generell falsch, und es finden sich keine Belege für die wichtige Konstellation „w-w".

Aus dieser Formalisierung geht zunächst klar hervor, dass eine Schlussmöglichkeit in der jetzigen Form ausscheidet. Das Satzgefüge der drei molekularen Aussagen kann nicht als Kettenschluss verstanden werden. Für eine Neukonstruktion wären jedoch ideale Bedingungen geschaffen, und es bietet sich schnell eine *dreiwertige* Logik mit „sicher", „möglich" und „unmöglich" an. Zu fragen bliebe aber, ob diese Verkomplizierung nötig ist. Besser wäre es in meinem Verständnis, auf eine solche Semantik zu verzichten, denn sie nähert sich sinnlosen Spielereien. Mehr soll hier nicht gesagt werden; schon die nächsten Beispiele, die endlich den Kettenschluss an realen, bedeutsameren Situationen messen werden, dürften neuen Aufschluss geben.

Sie gehen dabei über die Grundstruktur des Kettenschlusses hinaus, indem sie für C eine molekulare Aussage verwenden.

Ein erstes Beispiel lautet:

> Wenn ein Dreieck gleichseitig ist, ist es auch gleichschenklig.
> Wenn ein Dreieck gleichschenklig ist, hat es 2 oder 3 gleiche Winkel.
> *Also*: Wenn ein Dreieck gleichseitig ist, hat es 2 oder 3 gleiche Winkel.

Wieder verstößt ein Beispiel gegen die bei einfachen Kettenschlüssen gegebene Akzeptanz, doch diesmal kann von Unsinnigkeit wie bei den gerade zurückgewiesenen Konstruktionen keine Rede sein. Die Konklusion ist schlichtweg falsch, mehr nicht. Und die Erklärung liegt für uns auf einer ganz anderen Ebene: Der neu aufgenommene Ausdruck „oder“ ruft die Ungereimtheiten hervor[113]. Er wird hier eindeutig in beiden Erwähnungen konnektiv verstanden, d. h. mit Belegforderungen für beide Teilaussagen, während bei Frege eine „Vel“-Aussage mit A und B wahr ist, sobald eine der beiden Aussagen wahr ist. Nur diese Bedingung erfüllt die Konklusion, die konnektive Forderung dagegen nicht, und so wird sie als falsch angesehen[114]. Im gesamtsprachlichen Bereich ist dadurch bis heute Verwirrung entstanden: Gerade beim Kettenschluss, der ja über die Mathematik hinaus generell in der Umgangssprache intensiv genutzt wird, ist ein solcher Unterschied unbekannt, und so bleibt der Kettenschluss hinsichtlich seiner Wechselhaftigkeit unverstanden. Eine theoretische Basis hat die Linguistik dafür auch noch nicht geliefert, und vor Frege war man vom Kettenschluss anscheinend sowieso viel weniger überzeugt. Erst durch ihn wurde er aufgewertet und zu einer gültigen

[113] Die Grundproblematik dieses logischen Operators ist in Abschnitt 3.2.4 unter Verwendung dreier Deutungsvarianten ausführlich erläutert. Die zusätzliche Kopplung von „wenn-dann“ und „oder“ verlangt im Folgenden weitere Erklärungen.

[114] Hinzugefügt sei aber immer wieder, dass die analoge Beziehung der ähnlich verwendeten Formeln beider Logiksysteme Voraussetzung ist.

logischen Schlussfigur erhoben, allerdings bezogen auf seinen klassisch-logischen Kalkül. Nicht wenige Logiker, vermutlich fast die gesamte Lehrerschaft und andere logische Laien gingen danach aber – geschuldet dem gewachsenen Ansehen der nunmehr „verwissenschaftlichten“ Logik – weit darüber hinaus und gaben ihm einen überhöhten Stellenwert mit unzumutbaren wahrheitsentstellenden Wirkungsmöglichkeiten, wenn man an so wichtige Disziplinen wie Justiz und Medizin denkt.

Die Schulmathematik, die wie Schamberger den Kettenschluss ausnahmslos anerkennt, bringt viele fragwürdige Anwendungen. Als ein zweites Beispiel sei die Lösung von Wurzelgleichungen gewählt, die in der 8./9. Klasse eingeführt wird. Uns interessiert dabei nicht vornehmlich die Lösung selbst, sondern die Art, in der der Kettenschluss genutzt wird. Die in den Schulbüchern ausnahmslos sichtbare Reihung mathematischer Gleichungen dokumentiert die fortgesetzte Anwendung des Kettenschlusses, die mitunter an einer Stelle dann ein „Achtung!“ unterbricht. Den Schülern wird erklärt, dass von hier an nicht alle bisher erzielten Ergebnisse unbedingt gültig sind, wobei der Kettenschluss unerwähnt bleibt und man die meist fehlende Äquivalenz der dortigen Gleichungsumformung dafür verantwortlich macht. In „Elemente der Mathematik“ für das 9. Schuljahr in Berlin-Brandenburg heißt es beispielsweise im Abschnitt „Wurzelgleichungen“ unter der Überschrift „Quadrieren einer Gleichung ist keine Äquivalenzumformung“:

> „Das hat *zur Folge*, dass nicht jede Lösung der quadrierten Gleichung eine Lösung der Wurzelgleichung sein muss. […] Nach dem Lösen einer Wurzelgleichung muss man *daher* stets die Probe durchführen.“[115]

Daran ist zwar (fast) richtig, dass das Quadrieren keine Äquivalenzumformung ist – äquivalente Einzelfälle gibt es in Verbindung mit 0 selbstverständlich, ohne dass sie allerdings an der anfänglichen Ungewissheit etwas ändern –, doch wo ist denn ausgewiesen, dass das logische Schließen auf einer Äquivalenzumformung beruht? Ein durchgängiger implikativer Zusammenhang genügt vollends, und an anderen Stellen der Schulbücher wird das auch hinreichend betont. Die Erklärung kann demnach nicht befriedigen, so dass der Vorgang näher angeschaut sei.

[115] 1. Aufl., Braunschweig 2017, S. 38.

Am Anfang steht der Nachweis, dass, wenn eine beliebige quadratische Wurzelgleichung eine Lösung hat (1), auch ihre Quadrierung diese Lösung besitzt (2), dass also die Implikation „Wenn (1), dann (2)“ stets wahr ist. Beschränken wir uns jetzt als Beispiel auf einen Term in der Wurzel, der neben einer 2. Potenz von x maximal eine Konstante und eine 1. Potenz von x enthält, so wäre die quadrierte Gleichung eine ganzrationale Gleichung zweiten Grades, die die für (1) angenommene Lösung als einzige Lösung (3) oder als eine von zwei Lösungen (4) besäße. Ein Kettenschluss würde dann besagen, dass aus der Aussagenkombination

„(Wenn (1), dann (2)) und (wenn (2), dann (3) oder (4))“

die Aussage

„Wenn (1), dann (3) oder (4)“

folgt. Der Schluss hat die gleiche Struktur wie der „Dreiecks“-Schluss, wirkt aber nicht abwegig, weil er – anscheinend gemäß den Forderungen der Umgangssprache – Belegungen für beide „Oder“-Seiten enthält, während im Falle der Dreiecke Gleichseitigkeit mit nur zwei gleichen Winkeln unbelegbar bleibt. Trotzdem ist auch dieser Kettenschluss angreifbar, wie eine Detailanalyse aufzeigt: Die Belege erfüllen nicht für jeden Einzelfall bei „wenn-dann“ *und* „oder“ die Dopplung, wie die Umgangssprache sie offenbar fordert. Im Beispiel

$$\sqrt{17-2x} = x - 1$$

liegt dieser Fall vor; die Quadrierung

$$17 - 2x = (x - 1)^2$$

hat *zwei* Lösungen („4“ und „–4“), die Wurzelgleichung aber nur *eine* Lösung („4“).

Das bedeutet, dass letztlich ein korrekter Kettenschluss im konnektiven umgangssprachlichen Sinne wie im anderen mathematischen Beispiel nicht zum Ziel führt. Eine „saubere“ Fortsetzung des Schlussvorgangs mit nunmehr zwei Doppelbelegungen hätte zwei Lösungen der Wurzelgleichung verlangt, was sich aber nicht realisieren lässt. Gemessen an der schon bekannten Matrix Freges entspricht dem Beispiel die Zeile „(1) wahr, (2) wahr, (3) falsch, (4) wahr", die im Vergleich der Prämissen mit der Konklusion nur eine Wahrheitsmöglichkeit ist und insofern für einen allgemeinen umgangssprachlich-logischen Schluss noch keine Gelegenheit gibt. In Verbindung mit den mathematischen Forderungen tritt sie aber definitiv ein. Diesen Zusammenhang sehen die Schulbuchautoren jedoch nicht und leiten die Sicherheit fälschlich vom Fehlen einer Äquivalenz ab, mithin von einer rein logischen Gegebenheit.

Bemerkenswert ist nun, dass dieses zufällige und dem Beispiel geschuldete mathematisch-logische Zusammenspiel, das die Autoren ja nicht sehen, genau zum adjunktiven klassisch-logischen Kalkül passt, so dass sie quasi mit *verändertem* „Oder"-Verständnis die Lösung vollendet haben. Ausgewiesen ist dieses Durcheinander wegen deren Unkenntnis nicht, doch es bleibt ein logischer „Knick" zurück, in dem m. E. der Kern des „Dilemmas" zu suchen ist, dass die Schüler gegen ihre Erwartung – auf der Basis des bisher genutzten „oder" der Umgangssprache – nicht immer beide Lösungen der quadratischen Gleichung für die Wurzelgleichung nutzen können, nicht im Vorhandensein oder Nichtvorhandensein einer Äquivalenz. Das Erfordernis der Probe erwächst dabei notwendig aus der Ungewissheit, ob „oder" als konnektive Bindung erkannt ist oder, wenn man so will, als „vel". Die „Äquivalenzthese" geht jedenfalls als Erklärung daneben; das Problem liegt darin, dass der Kettenschluss – jetzt deutlich gegen Schamberger ausgesprochen – nicht allgemeingültig ist und hier nur in (verschleierter) inkorrekter Anwendung hilft, den Schülern fehlende Lösungsmöglichkeiten begreiflich zu machen. Einräumen lässt sich lediglich, dass im Falle atomarer Implikationen, die auch in der Mathematik vorherrschend eine Rolle spielen, der Kettenschluss Gültigkeit besitzt. Bis dahin – aber eben nicht weiter – darf man deshalb auch Schamberger Recht geben.

Das Beispiel ist noch in anderer Hinsicht lehrreich. Da uns kein Schulbuch bekannt geworden ist, das auf die Begrenztheit der Anwendung des Kettenschlusses hinweist, ist es sicher erlaubt, den im Schulbetrieb dafür tätigen Funktionären vorzuwerfen, dass sie die logische Kompliziertheit der Schulmathematik unzureichend kennen. Erst recht gilt dies für die Schüler, und so zeigt sich erneut an wichtiger Stelle der allgemeine Nachholbedarf in schulmathematisch-umgangssprachlicher Logik: Die logischen Praktiken der Umgangssprache müssen in angenäherter explizierter Form für die Schulmathematik ebenso vermittelt werden wie die Grundlagen des Fregeschen Systems für die Höhere Mathematik. Nur auf diesem Wege – das werden die weiteren Ausführungen bestätigen und untermauern – lässt sich Mathematik in Schule und Universität fundiert unterrichten.

3.2.6.13 Die Antezedenserweiterung

Klassisch-logisch lautet die gültige Schlussfigur:

> „A seq B", folglich „(C et A) seq B" (S. 78 f.),

wozu folgende Matrix gehört:

A	B	C	(A seq B)	folglich	((C et A) seq B)		
w	w	w	$\underline{w}$		w	$\underline{w}$	w
w	w	f	$\underline{w}$		f	$\underline{w}$	w
w	f	w	$\underline{f}$		w	$\underline{f}$	w
w	f	f	$\underline{f}$		f	$\underline{w}$	f
f	w	w	$\underline{w}$		f	$\underline{w}$	w
f	w	f	$\underline{w}$		f	$\underline{w}$	w
f	f	w	$\underline{w}$		f	$\underline{w}$	f
f	f	f	$\underline{w}$		f	$\underline{w}$	f

Wieder steht eine Implikation sowohl in der Prämisse als auch in der Konklusion, so dass die Übertragung des nachfolgenden Beispiels in den klassisch-logischen Kalkül erneut fraglich ist:

> „Wenn ich über den Rasen ginge, würde der Rasen nicht beschädigt werden. Also: Wenn ich und jeder andere über den Rasen gingen, würde der Rasen nicht beschädigt werden. (Zitiert nach Lewis, [Counterfactuals, H. A.], 1986, S. 10)" (S. 78)

Ohne die Umformung anzufechten, bemüht Schamberger jetzt seine Relevanzthese in konkreter Form gegen die Gültigkeit des (Gegen-)Beispiels, indem er hinzufügt, dass die Prämisse nur unter der Bedingung akzeptabel sei, wenn höchstens einige Personen den Rasen beträten. Da das nun nicht der Fall sei, wäre die

Prämisse falsch, weshalb kein gültiges Gegenbeispiel vorläge. Dagegen müsste schon moniert werde, dass er seine Akzeptanz von „ex contradictione quodlibet“ wiederum vergessen hat, doch wäre unser Einwand gegen Lewis, dass die Grundmenge der berücksichtigten Rasenflächen gar nicht ausgewiesen ist, sicher wichtiger: Woher ist denn bekannt, dass die Prämisse nicht ausschließlich widerstandsfähige Rasenflächen meint, von denen es z. B. in England unzählige gibt? Die Prämisse ist nicht unbedingt falsch, aber der Schluss ist wirklich ungültig oder nicht formulierbar, weil die Konklusion die Entailment-Forderung der Prämisse gegenüber nicht einhält: Die Prämisse lässt offen, ob viele Menschen den Rasen beschädigen würden, während die Konklusion, deren „und“ aus Sicht des in der Prämisse vereinzelten „ich“ konnektiv ist, sich dagegen ausspricht, so dass sie nicht aus dieser Prämisse folgt. Schambergers Begründung kann demnach nicht zugestimmt werden.

Darüber hinaus kommt er mit seinen Gedanken zur Rasenbeschädigung wieder nicht zum Beweis der Schlussgültigkeit, weil er schon dort zu einem neuen Beispiel mit einer anderen Funktion übergeht, wo er es nur geschafft hat, den angeblichen Nachweis der falschen Prämisse dieses Gegenbeispiels zu beenden. Das reicht jedoch nicht schlechthin für die Annahme aus, dass der kalkülmäßige „gegnerische“ Schluss nicht gültig sei. Warten wir deshalb den zweiten Versuch ab, zu dem es einleitend heißt, dass er im Gegensatz zum vorigen eine wahre Prämisse habe:

> „Wenn deine Wohnung brennt, dann kommt dir die Feuerwehr zu Hilfe.
> Also: Wenn deine Wohnung brennt und du eine Hausratsversicherung abgeschlossen hast, dann kommt dir die Feuerwehr zu Hilfe.“ (S. 78)

Am Ende der nachfolgenden Erörterungen soll herauskommen, dass das Beispiel, das logische Laien gewiss als „logisch“ ablehnen, gegen deren Intuition ein logisch gültiges Argument ist. Sie schließen Schambergers Teilkapitel „Umstrittene Argumente“ ab und sind leider ein Höhepunkt im mehrfachen (illegalen) Austausch umgangssprachlicher und kalkülmäßiger logischer Operatoren, bei dem er selbst seine Überzeugung vergisst, dass „wenn-dann“ von „seq“ verschieden ist. Obendrein ist ihm ja unbekannt, dass die logischen Operatoren in der Umgangssprache adjunktiv und konnektiv genutzt werden, und so ergibt sich eine Gedankenfolge, die kaum nachzuvollziehen ist. Trotzdem glauben oder hoffen wir, dass unser

Kommentar es erreichen wird, die Leser in ihrer vermuteten intuitiven Meinung zu bestärken.

Schambergers Begründung beginnt mit diesen Worten:

> „Das Argument wirkt ungültig, weil die Konklusion einen Zusammenhang zwischen Hausratsversicherung und Feuerwehreinsatz auszudrücken scheint, der in Wirklichkeit gar nicht vorliegt. Dies scheint ein Grund zu sein, die Konklusion im Gegensatz zur Prämisse für falsch zu halten."
> (S. 78)

Die zweimalige Verwendung von „scheint" relativiert unnötig und verwässert dadurch die Sachlage: Wie in unserer Einleitung beim Satzteil „wenn durch 2 und durch 3 teilbar" wird auch in dieser Konklusion „und" umgangssprachlich konnektiv verstanden: Beide Sachverhalte *müssen* für den Einsatz der Feuerwehr erfüllt sein. Da das aber nicht stimmt, tritt für die Implikation der Konklusion die erforderliche Wahrheitswertekombination „w-w" nicht ein; sie wäre damit in ihrer Konnektivität falsch oder nicht formulierbar. Die Konklusion fordert ganz einfach zu viel; der Schluss ist nicht gültig. Für das analoge „(A et C) seq B"[116] würde dies dagegen nicht gelten; die Formel lässt es offen, ob einer der beiden Sachverhalte, für sich genommen, ein hinreichender Grund für B sei. Das sieht auch Schamberger so, doch liest er die Formel nicht, wie es sich gehört hätte, in der Sprache des klassisch-logischen Kalküls, sondern umgangssprachlich, wo das Gegenteil ausgedrückt ist. Die von ihm angerichtete Verwirrung ist damit perfekt und verlangt den Ausweg, dass die umgangssprachliche Konklusion nicht kalkülmäßig symbolisiert werden darf. Schamberger hat sie, als sie ihm vorlag, falsch übersetzt, um dann noch wie folgt fortzufahren:

> „Wer die Konklusion aus diesem Grunde für falsch hält, verwechselt allerdings Aussagen der Form (A et C) seq B mit Aussagen der Form (A vel C) seq B. Eine Aussage der Form (A vel C) seq B ist die folgende:
> Wenn deine Wohnung brennt oder du eine Hausratsversicherung abgeschlossen hast, dann kommt dir die Feuerwehr zu Hilfe." (S. 78 f.)

[116] Die Zuordnung zu den umgangssprachlichen Aussagen dürfte ablesbar sein.

Wie kann man denn auf so etwas kommen? Abgesehen von der falschen Verknüpfung der logischen Operatoren „wenn-dann“ und „seq“, die er eigentlich nicht hätte übersehen dürfen, beinhaltet das veränderte Argument doch genau das Gegenteil seiner Interpretation: Es ist unbedingt gültig, denn bereits die Wiederholung der Prämisse in der Konklusion belegt diese Wertung. Danach verstärkt er seine falsche Linie durch neue Verwechslungen, auf die wir nicht mehr eingehen wollen, weil entgegen seiner Abschlussbetonung die Konklusion mehr besagt als allein darauf hinzuweisen, dass „*auch* das gemeinsame Auftreten von A und C hinreichend für B“ ist [Hervorh. H.A.]. Die umgangssprachliche Aussage wird mit „auch“ nicht erfüllt; sie fordert die Ausschließlichkeit des gemeinsamen Auftretens. Damit ist die Entailment-Bedingung für Schlüsse jedoch verletzt: Der Schluss ist ungültig.

3.2.6.14 Die Kontraposition

Umgangssprachlich lautet sie aussagenlogisch:

> Wenn A, dann B.
> Also: Wenn nicht B, dann nicht A.

Klassisch-logisch gilt für die analoge gültige *Schlussfigur*:

> „A seq B“, folglich „(non B) seq (non A)“.

Matrix:

A	**B**	**(A seq B)**	**folglich**	**((non B) seq (non A))**
w	w	w		w
w	f	f		f
f	w	w		w
f	f	w		w

Sie gehört im Grunde bei Schamberger ebenfalls in seinen Abschnitt „Umstrittene Argumente“, doch er hielt es anscheinend für wichtiger, sie bereits im ersten Kapitel gesondert abzuhandeln[117]. Die zunächst etwas vernachlässigten konzessiven Wenn-Sätze, worunter er „Sätze mit Ausdrücken wie ‚auch wenn', ‚wenn auch', ‚sogar wenn', ‚selbst wenn' und ‚wenngleich'" (S. 33 f.) versteht, werden nunmehr von ihm recht ausführlich unter Einbeziehung der Kontraposition von den bedingenden Wenn-Sätzen unterschieden. In einem ersten Beispiel stellt er die zwei Sätze

> „Wenn Sie an der Veranstaltung teilnehmen, werde ich nicht kommen.
> Selbst wenn Sie an der Veranstaltung teilnehmen, werde ich nicht kommen." (S. 34)

gegenüber, wobei er ihre entgegengesetzte Aussagerichtung – einmal mit fast beleidigendem Inhalt, dann aber in würdigender Form – betont. Das ist allerdings nicht immer der Fall; im Beispiel

> „Wenn zwei negative Zahlen multipliziert werden, ergibt sich ein positives Ergebnis.
> Selbst wenn zwei negative Zahlen multipliziert werden, ergibt sich ein positives Ergebnis."

weichen die Wenn-Sätze nur darin voneinander ab, dass aus der zweiten Aussage zusätzlich noch ein anderer Weg hervorgeht, ein positives Zahlenergebnis zu erzielen. Dadurch gilt es nun aber herauszustellen, worin sich beide „Wenn"-Arten generell unterscheiden, worauf, vielleicht etwas überraschend, zu antworten wäre, dass gerade die Kontraposition die bedingenden und die konzessiven Wenn-Sätze voneinander trennt: Auf die letzteren lässt sich – wir stimmen Schamberger ausdrücklich zu (!) – die Kontraposition nicht korrekt anwenden (S. 36 f.). Auch unser Beispiel bestätigt dies: Nach der Kontraposition ist „selbst wenn" nicht mehr erkennbar.

---

117 Schamberger, LUS, Abschnitt 1.5: Konzessive Wenn-Sätze und das Problem der Kontraposition (S. 36–39). Er verwendet die Ausdrücke „Wenn-Sätze" bzw. „Bedingungssätze" in diesem Abschnitt fast absolut, während wir sie generell kaum heranziehen. Um aber dem Leser deutlicher zu zeigen, wo wir über dasselbe Problem schreiben wie Schamberger, übernehmen wir hier seine Diktion.

Für unsere Untersuchung bedeutet das, die Kontraposition bei Bedingungssätzen noch genauer in Augenschein zu nehmen. Schon die Stoiker untersuchten sie systematisch, und sie hat in letzter Zeit erhöhtes Interesse gefunden, weil einige Logiker die im Prinzip über Jahrhunderte einheitlich vertretene Schlussgültigkeit bestreiten[118]. Wir kommen deshalb nicht umhin, darauf näher einzugehen, wobei gleich hinzugefügt sei, dass unsere Auffassung mit der Schambergers in der Anerkennung der Schlussfigur (zwar erneut) übereinstimmt, dass daneben aber deren Einordnung Probleme aufwirft.

Nach Schamberger, um mit ihm zu beginnen, lassen sich die Gegenbeispiele in zwei Gruppen einteilen. Zur ersten bemerkt er:

> „Diejenigen der ersten Gruppe wirken auf den ersten Blick ungültig, weil die Leser dazu neigen, in die Konklusion einen kausalen Zusammenhang hineinzulesen […]:
> Wenn es regnet, trage ich kein T-Shirt.
> Also: Wenn ich ein Shirt trage, dann regnet es nicht. […] Die meisten Bedingungssätze drücken einen kausalen Zusammenhang aus. Deshalb liegt es nahe, die Konklusion […] so zu verstehen, als ob damit behauptet würde, ein T-Shirt habe die geradezu magische Kraft, den Regen zu verhindern. […] Die Konklusion lässt sich [aber, H. A.] auch so verstehen, dass sie einen zeitlichen Zusammenhang beschreibt: In dem Zeitraum, in dem ich ein T-Shirt trage, regnet es nicht. Vorausgesetzt, dass die Prämisse wahr ist, ist die Konklusion ebenfalls wahr." (S. 38)

Im Kern ist gegen Schambergers Verteidigung eigentlich „nur" einzuwenden, dass er zu wenig verallgemeinert, so dass nicht erkennbar ist, dass die Kontraposition immer gilt. Er erreicht allerdings daher wieder nicht sein Hauptziel, doch dazu später. Zum Beispiel selbst bringt er eine akzeptable Gegenbegründung, obwohl sich das eine oder andere noch genauer sagen ließe. Dazu würde u. a. gehören, dass die „ungesagten" Begleitumstände nur eingesetzt werden dürfen, um eine vorliegende Aussage zu präzisieren, nicht aber, um sie gegen ihren Text zu erweitern oder einzuengen, auch wenn freilich im Einzelnen die Entscheidung, was denn

118 Belege bei Schamberger, LUS, S. 36 f.

nun zutreffend ist, oft umstritten bleibt. Das Beispiel dürfte in dieser Hinsicht ein Grenzfall sein: Sollte im Konsequens der Konklusion das Futur stehen, also

> „Wenn ich ein T-Shirt trage, dann wird es nicht regnen"

formuliert sein, wäre es m. E. berechtigt, die Aussage kausal zu interpretieren. Doch dann ist es keine Kontraposition mehr, weil der Prämissenteil „wenn es regnet" in der Konklusion verändert worden ist: Die kausale Interpretation lässt Regen nicht mehr zu. Dem Beispiel ist solch eine Deutung aber kaum anzusehen; da wäre schon Böswilligkeit im Spiel. Wer trotzdem anders wertet, gewinnt aber nichts: Denn jetzt erfüllt bereits das Beispiel durch das erläuterte Neuverständnis nicht die Bedingungen für die Kontraposition. Die Gültigkeit der Kontraposition hängt demzufolge nicht davon ab. Sie bleibt ungefährdet, da sie selbstverständlich nur bei eindeutigen Aussagen angewandt werden kann. Solange noch Mehrdeutigkeiten existieren, sind diese entweder durch eine angenäherte Beweisführung oder per Entscheidung, z. B. eines Lehrers Schülern gegenüber, zu beseitigen.

Die Aussagen einer zweiten Gruppe „vermeintlicher Gegenbeispiele", die Schamberger heranzieht, sehen seines Erachtens nur wie Bedingungssätze aus, sind aber Konzessivsätze. Ein berühmtes Beispiel, das Schamberger zitiert, stammt von Adams:

> „If it rains tomorrow, there will not be a terrific cloudburst.
> Therefore: If there is a terrific cloudburst tomorrow, it will not rain." (S. 38)

Schambergers anschließende Argumentation läuft auf zwei Deutungen hinaus: Wird die Prämisse, wie in der englischen Sprache (nach Schamberger) anscheinend durchweg möglich, als wahrer Konzessivsatz aufgefasst, wäre der Schluss wegen der falschen Konklusion ungültig, doch die Kontraposition nicht verletzt, da sie für Konzessivsätze nicht definiert ist. Andererseits könnte die Prämisse auch ein Bedingungssatz sein, woraus sich Unsinnigkeit ergäbe, so dass – ohne deutlichen Wahrheitswert – irgendeine Einordnung in eine Schlussfigur nicht möglich wäre. Im Prinzip kann man auch diese Überlegungen Schambergers akzeptieren; die angeführten Beispiele widerlegen die Kontraposition nicht.

Problematisch ist dann allerdings seine Schlussempfehlung, mit dem klassischen Konditional ausschließlich Bedingungssätze zu formalisieren (S. 39). Dies lässt zwar eine „bedenkenlos[e]“ Anwendung der Kontraposition zu, stuft jedoch zumindest die Aussagekraft solcher Beispiele wie

> „Wenn ich Dich besuchte, warst Du nicht zu Hause“,

in denen zufällig entstandene Zusammenhänge implikativ ausgedrückt sind, herab. Auf diese Thematik wird noch etwas genauer eingegangen.

Der vorliegende Abschnitt wäre soweit abgearbeitet, wenn man darauf verzichtet, die allgemeine Gültigkeit der Kontraposition vollständig nachzuweisen, wie Schamberger es eigentlich selbst tun wollte. Für uns heißt das, den Nachweis auf die konnektiven umgangssprachlichen Implikationen auszurichten, die sowieso fast ausschließlich vorliegen. Die übrigen sind, wie bekannt, mit „Seq“-Aussagen identisch, deren Kontraposition ja zu Beginn dieses Abschnitts bewiesen wurde.

Innerhalb der konnektiven Implikationen sind wiederum die Normalformen – ganz gleich, ob die Verknüpfungen zufälligen oder gesetzesbedingten Charakter haben – gewiss unproblematisch. Wir gehen beide Aussagen parallel Schritt für Schritt durch und unterlassen es, an konkreten Beispielen Erläuterungen vorzunehmen:

In der ersten Aussage muss zunächst „A–B“ belegt sein, und es darf nicht „A – nicht B“ belegt sein. In der zweiten Aussage muss dagegen „nicht B – nicht A“ belegt sein und es darf nicht „nicht B–A“ belegt sein. Also ist jeweils allein „A –nicht B“ ausgeschlossen. Ansonsten sind verschiedene Zeilen angesprochen, doch da es um die Normalformen geht und „wenn“ sich einschränkend versteht mit Wirkungen auf „dann“, darf in der ersten Aussage für „nicht A – nicht B“ und in der zweiten Aussage für „A–B“ ohne deren direkte Nennung ein Beleg erwartet werden. Damit sind die Aussagen als umgangssprachlich äquivalent nachgewiesen, und es kann sogar doppelt geschlossen werden.

So fehlen nur noch die konnektiven Implikationen mit festen Wahrheitswerten, die am schwersten zu beurteilen sind, doch bereits erörtert wurden[119]. Wir knüpfen daran an und wählen

> „Wenn 18:9 ganzzahlig lösbar ist, dann 18:3 ebenso.“

119 Vgl. Abschnitt 3.2.4.

Obwohl hier nur „w-w“ mathematisch existent ist, wird diese Implikation logisch akzeptiert, weil sie eine Konkretisierung des gesetzmäßigen mathematischen Zusammenhangs

> „Wenn eine beliebige Zahl ganzzahlig durch 9 teilbar ist, ist sie auch durch 3 ganzzahlig lösbar“

ist.

Die Kontraposition setzt nun

> „18:3 ist nicht ganzzahlig lösbar“

ins Antezedens und kommt zu

> „Wenn 18:3 nicht ganzzahlig lösbar ist, dann 18:9 ebenfalls nicht.“

Jetzt ist nur „f-f“ mathematisch existent, doch handelt es sich um die gleiche mathematische Aussage wie in der Prämisse. Die Konklusion besagt demnach nichts Neues, erfüllt somit die Entailment-Forderung und ist insofern in gleichem Maße wie die Prämisse die Konkretisierung desselben mathematischen Gesetzes. Die Kontraposition ist daher anwendbar, und es wird sichtbar, dass die mathematischen Besonderheiten dieser Implikationen keinen Einfluss auf die Kontraposition haben. Damit sind alle Konstellationsmöglichkeiten durchgespielt mit dem Ergebnis, dass die Kontraposition eine stets gültige Schlussfigur ist.

3.2.6.15 Zusammenfassung

Die Auseinandersetzung mit Schamberger im 3. Kapitel brachte für uns zahlreiche neue Erkenntnisse, die aber nicht am Ende dieses Kapitels, das ja ihm galt, zusammengefasst werden sollen. Sie werden sich in die systematische Darlegung der eigenen Gedanken zur Logik der Schulmathematik einordnen, die für das vierte Kapitel geplant ist. Hier geht es abschließend um die Frage, ob und wie Schamberger die hohen Ansprüche, mit denen er angetreten war, verwirklichen konnte. Wir wollen sie gleich am Anfang summarisch mit Verweis auf seinen

Grundfehler, den auch die mir bekannten Gutachten sehen, verneinen: Eine einzige nicht gerade umwerfende Änderung des klassischen Fregeschen Kalküls, die lediglich „wenn-dann" betrifft, dürfte kaum hinreichend sein, den logischen Kern der Umgangssprache hinreichend herauszufinden. Die Grundanforderungen an die Eigenständigkeit der Umgangssprache, mit denen Schamberger seine Überlegungen begann, waren einfach zu niedrig. Dazu hat sicher beigetragen, dass er mit Hans Reichenbach den wohl bedeutendsten Logiker, der sich mit umgangssprachlichen logischen Fragen beschäftigt hat, völlig überging, so dass dessen Gedankentiefe nicht bis zu ihm vordrang. Gerade. Reichenbachs Unterscheidung zwischen konnektiven und adjunktiven logischen Operatoren hätte Schambergers Blick zunächst über „wenn-dann" hinaus zumindest auf „oder" erweitert und danach wahrscheinlich systemübergreifend beeinflusst. Im Gefolge dieses Mankos blieb ihm dann auch die Einsicht verwehrt, dass die umgangssprachlichen Operatoren in differenzierter Form konnektiv und adjunktiv verteilt sind und dass sie überhaupt einen wechselnden und parallel wirkenden Bedeutungsinhalt besitzen, so dass selbst der Konditionaloperator, der in seinen Beispielen immer wieder überbetont vertreten ist, andererseits nicht allseitig genug abgearbeitet wurde. Den Höhepunkt seiner Versäumnisse bildet aber die widersprüchliche Anwendung der von ihm gebilligten Sonderstellung des Wenn-dann-Operators: Jedes umgangssprachliche Beispiel ordnet er erst meist fälschlich in den Fregeschen Kalkül ein, um dann in einer oft widersprüchlich begründeten Rückübersetzung davon partiell wieder Abstand zu nehmen.

Bei der Beurteilung der wissenschaftlichen Leistung Schambergers wählten wir den Weg über die angebotenen Beispiele und nicht über die abstrakten Grundregeln, was sich methodisch für unser Hauptanliegen, die schulmathematischen Zusammenhänge logisch zu analysieren, als sehr vorteilhaft erwies, da eigene Überlegungen immer wieder überprüft und teilweise modifiziert werden mussten. Besonders wurde dadurch aber das soeben gerügte inkonsequente Denken Schambergers deutlich, das einen nicht geringen Anteil an den insgesamt nicht befriedigenden Ergebnissen trägt.

Gegenstand der Erörterungen waren, wie bereits vermerkt[120], 24 Schlussfiguren, die bis auf die über die Konjunktion verlaufende Einführung des Konditionals und die Kontraposition bei Schamberger tabellarisch zusammengefasst

[120] Vgl. Kap. 3.2.6!

und systematisch behandelt worden sind. 17 davon lehnte er ab, und 7 anderen stimmte er – z. T. mit Modifizierungen – zu. Unsere Analyse seiner Ausführungen korrigiert nun die überwiegende Mehrheit seiner Ergebnisse, meist vollständig, mitunter aber auch in komplizierter partieller Form, wie sie sich z. B. bei den Standardschlüssen „ex falso quodlibet“ und „verum ex quolibet“ ergab. Seine Lösungen basieren ganz einfach auf zu flachen Analysen, doch wäre es ungerecht, alles über einen Leisten zu schlagen. Einige wenige Wertungen, z. B. die zur Kontraposition, sind angesichts seines recht bedeutsamen Grundfehlers beachtlich. Doch insgesamt ist sein Versuch, die Logik der Umgangssprache angenähert korrekt zu erfassen, erfolglos zu nennen. Das heißt dann auch, dass die logisch-umgangssprachliche Seite der Schulmathematik weiterhin nicht hinreichend abgesichert ist und deren viel tiefere Erkundung die Hauptaufgabe des nächsten Kapitels sein wird.

Kapitel 4:

Vorschlag für ein logisches Grundgerüst der Schulmathematik

Das abschließende vierte Kapitel, das nun endlich unsere Auffassung zur Logik der Schulmathematik geschlossen und systematisch darlegen soll, beginnt mit einer kleinen Reminiszenz, die die historisch erstmalige Erörterung einer logisch bedingten Sonderstellung der Schulmathematik kundtut und damit womöglich – wie wir etwas selbstbewusst und hoffnungsstark sagen wollen – den Anfang einer bald anerkannten eigenständigen logischen Teildisziplin dokumentiert. Diesem kurzen historischen Vorlauf folgt dann anhand der prinzipiellen Leitlinien, wie wir sie allgemein im ersten Kapitel charakterisiert haben, und gemäß den detaillierten Erörterungen des dritten Kapitels der Aufbau unseres logischen „Grundgerüsts“ der Schulmathematik.

4.1 Die „Entdeckung“ einer ersten logisch-schulmathematischen Besonderheit

Sie gehört erst dem Jahr 1977 an, unseres Erachtens ein sehr spätes Datum, das sich wohl aus der bereits erwähnten Besonderheit in der jüngeren Entwicklung logischer Forschungen[121] ergibt, dass sie historisch parallel und oft wenig abgestimmt unter vorrangig philosophischem oder mathematischem Aspekt stattfanden. Ohne sonderliche Beachtung der Schulmathematik favorisierten die meisten Philosophen immer die Umgangssprache und die Mathematiker seit Etablierung der logisch-mathematischen Kalküle die für ihre Zwecke geschaffenen künstlichen Sprachen. Für die „philosophischen“ Logiker – ausgenommen die Anhänger analytischer Philosophien – war und ist die Logik der Mathematik und

[121] Vgl. Abschnitt 2.3.3.

insofern auch die der Schulmathematik Angelegenheit der sogenannten „mathematischen" Logiker, die sich nun aber mit ihrem Blick auf die Wissenschaft der Mathematik um deren unterrichtliche Handhabung für die heranwachsende Generation bisher nicht gerade intensiv gekümmert haben. Schulmathematische Erläuterungsbeispiele sind zwar immer wieder gegenwärtig, doch sind sie fast durchweg so ausgewählt, dass sie sich in die „kunst"-logischen Kalküle eingliedern lassen. Sogar die seit Jahrhunderten umstrittene Wenn-dann-Problematik hat nach meinen Beobachtungen bisher um die Schulmathematik einen weiten Bogen gemacht, und selbst für Reichenbach blieb sie am Rande. Es entstand keine eigenwertige Unterrichtslogik im Sinne eines abgegrenzten Sprachsystems, in das die logischen Besonderheiten der Schulmathematik einbezogen werden konnten. Als Folge erhielt die alltägliche Logik von der Schulausbildung zu wenig Impulse und wirkte ihrerseits nachteilig darauf zurück. Die vielen Tests logischer Kenntnisse für Kinder, Jugendliche und Erwachsene sind mit ihren mageren Resultaten der beste Beweis dafür, dass sich bis heute nicht viel in puncto Folgerichtigkeit im Denken getan hat.

Diese schon vor ungefähr 50 Jahren gegebene Situation fand ich damals vor und stieß hinsichtlich der Konditionalität auf die Divergenz im logischen Schließen zwischen Höherer Mathematik und Schulmathematik. 1977 waren meine Überlegungen dann so weit gereift, dass ich sie den auf Logik spezialisierten Mathematikern der damaligen Pädagogischen Hochschule Potsdam als Vortrag anbot. Ausnahmslos vertraten diese die strenge klassische Kalkülauffassung für mathematische Zusammenhänge, so dass ich mit einer strikten Ablehnung meiner Worte rechnen musste. Sie blieb aber zu meiner Überraschung aus: Die verwendeten Beispiele, die für mich logisch-schulmathematisch im Unterschied zur praktizierten Umsetzung in die Logik der Höheren Mathematik ungültige Schlüsse darstellen, lehnten auch sie in Übereinstimmung mit meinem Verständnis als gültig ab. Auf eine eventuelle eigene Begründung verzichteten sie, und zu weiteren Gesprächen zwischen uns kam es nicht mehr. Ich entschloss mich aber, meinen Vortrag schriftlich zu Papier zu bringen und ihn dem damals schon international anerkannten Berliner Logiker Wessel zuzuschicken, der sich *außerhalb der Schulmathematik* mit solchen Fragen in origineller Weise seit Jahren beschäftigte. So hatte er sich zusammen mit Sinowjew 1975[122] gegen

[122] Sinowjew/Wessel: Logische Sprachregeln.

die Mehrheit der Mathematiker und Logiker mit allerdings nicht ganz überzeugender Begründung dafür ausgesprochen, dass die logischen Operatoren „seq“ und „wenn-dann“ verschieden seien. Eines seiner dortigen Beispiele hatte ich im Vortrag vor den Potsdamer Mathematikern aufgegriffen und hielt es nun für angebracht, auch Wessel gegenüber daran meine Meinung zu entwickeln. Sie wich nämlich von den *Logischen Sprachregeln* ab, in denen die Konditionalfrage für mich zu inkonsequent behandelt war. Trotz dieser kritischen Einstellung ging meine Erwartung aber Richtung wissenschaftlicher Ehrlichkeit, und sie wurde auch nicht enttäuscht.

Meine Gedanken entwickelte ich damals (mit anderen Zahlen) an dem Beispiel, das in der jetzigen Einleitung wieder aufgegriffen wird, doch war mein Herangehen entgegengesetzt, so dass die Gegenüberstellung vielleicht noch tiefere Einsichten der Leser bewirkt. In der Einleitung bildet die Sprache der Schüler den Ausgangspunkt, woraus mit Hilfe des empirisch vorhandenen Sprachmaterials nachgewiesen wird, dass der angebotene Schluss ungültig ist. Erst im zweiten Schritt ist dann die Mathematik mit erklärenden Worten an der Reihe, wieso es sich dort in analoger Sicht[123] um einen gültigen Schluss handelt. 1977 ging es dagegen um den Versuch der *Logischen Sprachregeln,* von „seq“ aus die Konditionalität (und auch *nur* die Konditionalität) in Umgangssprache und Mathematik generell streng zu trennen, also „wenn-dann“ und „seq“ in dieser Weise als zwei verschiedene Operatoren zu betrachten. Der umstrittene Schlussweg verlief demnach von „seq“ zu „wenn-dann“, so dass damals der klassische Kalkül mit dem Beispiel

> „Aus ‚(A et B) seq C‘ folgt ‚(A seq C) vel (B seq C)‘“

Ausgangspunkt war, aus dem nach den *Logischen Sprachregeln* nicht auf

> „Wenn ‚(Wenn A und B), dann C‘, dann ‚(Wenn A, dann C) oder (Wenn B, dann C)‘“

[123] Auch zu Beginn dieses Kapitels sei betont, dass wir jeden Versuch einer direkten Beziehung zwischen „wenn-dann“ und „seq“ als „analog“ bezeichnen.

geschlossen werden darf. Sie argumentierten wie folgt[124]:

> Unter der Annahme, dass „C = (A et/und B)“[125] gelte, gilt sowohl „(A seq (A et B)“ als auch
> „B seq (A et B)“, und der Schluss ist gültig, doch
> „Wenn A, dann (A und B)“ und „Wenn B, dann (A und B)“ können sich beide als falsch erweisen, so dass der Schluss ungültig ist.

Dieser Begründung stimmte ich zu und untermauerte sie mit einem Beispiel zur Teilbarkeit natürlicher Zahlen unter Verallgemeinerung dieser Beziehung für 2, 3 und 6:

> Aus „Für alle x gilt: Wenn x durch 2 (A) und durch 3 (B) teilbar ist, ist x durch 6 (C) teilbar“ folgt nicht
> „Für alle x gilt: Wenn x durch 2 teilbar ist, ist x durch 6 teilbar, oder wenn x durch 3 teilbar ist, ist x durch 6 teilbar“.

Formalisiert steht dafür:

> Aus „∀*x(Wenn* (*Ax und Bx*)*, dann Cx*)“ folgt nicht
> „∀x((Wenn Ax, dann Cx) oder (Wenn Bx, dann Cx)“.

Zumindest in der Schulmathematik, so schloss ich 1977, muss demnach wie in der alltäglichen Sprache zwischen „seq“ und „wenn-dann“ unterschieden werden, so dass für mich die folgende Feststellung der *Logischen Sprachregeln* fragwürdig wurde:

> „Die Identifizierung von ‚wenn-dann‘ und ‚seq‘ in der Logik ist eine Folge davon, dass in der Mathematik, für die die mathematische Logik ja ausgearbeitet wurde, die Antezedente und Konsequente der

124 Sinowjew/Wessel, Logische Sprachregeln, S. 299.

125 Die Dopplung bei „und“ soll ausdrücken, dass Sinowjew und Wessel die Konjunktion nicht in ihre Argumentation einbezogen, so dass die in beiden Logiken vorkommende Grundform für sie ausreichte.

> konditionalen Aussagen universale Aussagen sind, d. h. Aussagen, deren Wahrheitswerte sich nicht in Abhängigkeit von Bedingungen, Ort und Zeit ändern. […] Kurz gesagt, hier werden aus der Klasse der konditionalen Aussagen nur solche ausgesondert, die a priori auf Grund des Auswahlverfahrens als klassische Subjunktionen betrachtet werden können.“[126]

Als Gegenerklärung hieß es dann in meinem Schreiben an Wessel:

> „Der Trennungsstrich sollte rigoros gezogen werden: Eine Logik mit dem Operator ‚seq‘ ist das eine, eine Logik mit dem Operator ‚wenn-dann‘ ist (zunächst) das andere. Und wenn Wissenschaften den Operator ‚wenn-dann‘ verwenden und mit diesem Operator Schlüsse ziehen, so kann man beim Überprüfen dieser Schlüsse nicht einfach aus ‚wenn-dann‘ ‚seq‘ machen, wie es fast überall passiert. Der Schluss, der ‚seq‘ enthält, mag stimmen; für den Schluss mit ‚wenn-dann‘ besagt das noch gar nichts. Und deshalb bleibt die heute in fast allen Einführungsbüchern zur Logik praktizierte ‚Anwendung‘ der klassischen Logik auf Texte, die den Operator ‚wenn-dann‘ enthalten, immer Krampf.“

Diese prinzipielle Betonung der Verschiedenheit der beiden Operatoren ließ noch offen, woran es in genauerer Sicht liegen könnte, dass „wenn-dann“ sich nicht in den klassischen Kalkül einfügte, so dass mein Schreiben an Wessel sich auch dazu äußern musste. Als Einstieg wählte ich die Überlegung, dass die Prädikatenlogik vielleicht genug Mittel zur Verfügung hätte, wenn man sich – allerdings bereits etwas ungewöhnlich – entschließen würde, dem umgangssprachlichen Operator „wenn-dann“ zwei klassisch-logische Operatoren zuzuordnen. Historisch fand ich in Russell ein Vorbild, der, ohne dabei die Schulmathematik im Auge zu haben, in ähnlicher Form vorging und seinen Versuch als gelungen bewertete. Besonders Reichenbach widersprach dem allerdings[127], und so hielt ich es für zweckmäßig, Wessel einen eigenen Beweis mit schulmathematischem Bezug anzubieten.

Den Anfang bildete die Beobachtung, dass

---

[126] Sinowjew/Wessel, Logische Sprachregeln, S. 299.

[127] Zur Kontroverse: Reichenbach, ESL, S. 85 f.

„Wenn x durch 4 teilbar ist, ist x durch 2 teilbar"

umgangssprachlich als wahre Aussage akzeptiert wird, obwohl x gar nicht belegt ist und insofern die Teilausdrücke noch keine Aussagen sind. „Wenn-dann" versteht sich aber in solchen Zusammenhängen als „immer wenn-dann", so dass unausgesprochen der Alloperator dabei ist:

Immer wenn x durch 4 teilbar ist, ist x durch 2 teilbar
(formalisiert: ∀x(Wenn x durch 4 teilbar, dann x durch 2 teilbar)).

Damit läge schon ein Operator vor, doch es fehlt noch der, der beide Aussagen verknüpft. Sollte es „seq" sein, wäre der Abstand zum klassischen Kalkül noch in engen Grenzen und auf die ungewöhnliche Verdopplung reduziert. Mein indirekter Beweis brachte jedoch 1977 unter Bezug auf das Anfangsbeispiel – und somit ohne Nullmenge – ein anderes Ergebnis:

Grundannahme:
(Wenn Dx, dann Cx) ↔ ∀x(Dx seq Cx) mit Dx = (Ax und Bx)[128]

Beispiel:
(Wenn Ax und Bx, dann Cx) ↔ ∀x∀x((Ax und Bx) seq x)

Allquantierung:
∀x(Wenn Ax und Bx, dann Cx) ↔ ∀x∀x((Ax und Bx) seq x)

Aufhebung Entartung.:
∀x(Wenn Ax und Bx,, dann Cx) ↔ ∀x((Ax und Bx) seq Cx)

Anwendung der Grundannahme.:
∀x((Wenn Ax, dann Cx) oder (Wenn Bx, dann Cx)) ↔ ∀x(∀x(Ax seq Cx)
oder ∀x(Bx seq Cx))

[128] Im Folgenden „und" und „oder" in der „Ur"bedeutung.

Allgemein gilt:
Aus „∀r(Fr oder Gr)“ folgt „∀rFr oder ∃rGr“.

Demnach auch:
Aus „∀x(∀x(Ax seq Cx) oder ∀x(Bx seq Cx))“ folgt „∀x∀x(Ax seq Cx) oder ∃x∀x(Bx seq Cx)“.

Beseitigt man im Konsequens die entarteten Operatoren, so würde eine Gleichsetzung von

„∀x(Wenn Ax und Bx, dann Cx)“

und

„∀x((Wenn Ax, dann Cx) oder (Wenn Bx, dann Cx))“

bedeuten – die obige Annahme selbstverständlich vorausgesetzt –, dass

„∀x((Ax und Bx) seq Cx)“

und

„∀x(Ax seq Cx) oder ∀x(Bx seq Cx)“

fälschlicherweise semantisch äquivalent sind. Unsere (provozierte) Annahme war daher falsch: In der Schulmathematik bedeutet zumindest dieses dominierende „wenn-dann“ etwas anderes als „seq“ und folgt daraus nicht, so dass ich dem Zitat aus den „Logischen Sprachregeln“ nicht meine volle Zustimmung geben konnte. Die Idee einer eigenständigen Logik der Schulmathematik, die nicht die der mit „seq“ verbundenen Höheren Mathematik in gleicher Weise „nach unten“ verlängert, war geboren.

Soweit zu meinem Schreiben an Wessel von 1977. Er antwortete damals recht selbstkritisch: „Das Beispiel aus der Mathematik überzeugt mich. Unsere Auffassung, dass man in der Mathematik ‚wenn-dann‘ durch ‚seq‘ ersetzen kann, war ein *unbedachtes* Zugeständnis an die klassischen mathematischen Logiker, um sie nicht zu sehr zu verärgern und ihnen ihre Domäne zu lassen. ‚Wenn-dann' ist meiner Auffassung nach ein selbstständiger Operator, der nicht auf andere reduzierbar ist."

Das (indirekte) Lob hat mich damals sehr beeindruckt, und es dürfte zum Erfolg meiner (Quasi-)Habilitation 1979 beigetragen haben. Die neue Bewertung der Schulmathematik selbst blieb aber auf der Strecke, auch wenn Wessel – m. E. als einziger – später noch einmal deren logische Sonderstellung betonte[129]. Ansonsten tat sich nichts; gerade die *tiefere Erklärung* ihrer Eigenarten fehlt bis heute, und so möge unser nachfolgender Vorschlag diesen Zustand beenden sowie einen brauchbaren Start bringen.

4.2 Die ontologischen Eigenschaften und Relationen der schulmathematischen Logik in Wechselwirkung von Umgangssprache und Kalkülsprache

Wir knüpfen an unsere gleich im Vorwort betonte Zielstellung an, dass für uns vordergründig wichtig ist, welche typischen Eigenarten die Logik der Schulmathematik besitzt, worin demnach ihre Eigenständigkeit besteht. Daran gemessen, würde es zu weit vom Thema wegführen, wenn über das 1. Kapitel hinaus beabsichtigt wäre, erst die grundlegenden logischen Begriffe und Verfahren detaillierter darzulegen. Wir lassen daher Einiges weg, sind aber trotzdem gemäß unserer Erfahrung davon überzeugt, dass der Text verstanden wird und eigene ergänzende Fundierungen gelingen werden.

Der Detailaufbau unseres Logiksystems beginnt mit ausgewählten Informationen zu den schon skizzierten Hauptseiten einer Sprache, zu Syntax, Semantik und Pragmatik[130], übergeht also die in vielen Arbeiten zur Logik vernachlässigte Pragmatik nicht. Sie hat für die Schulmathematik außerordentliche Bedeutung, so dass sie wegen ihres Einflusses auf die Semantik darin integriert erscheint. Unsere Basis bildet dabei die Umgangssprache in ihrer Gesamtheit

129 Wessel, Logik, S. 280.

130 Vgl. Abschnitt 1.1.1.

mit all ihren vielfältigen Sprachäußerungen, wie es Zeit- und Raumbezüge, Feststellungen, Fragen, Aufforderungen, Erwägungen, Annahmen oder Verunsicherungen darstellen. Die logischen Kalküle sind dafür weniger oder nicht geeignet, so dass kunstsprachlich auch auf Speziallogiken zurückgegriffen werden muss. So gehört

> „Die Funktion ‚$f(x) = e^{\sin x}$' könnte integrierbar sein"

der Modallogik an, während

> „Bei zwei gegebenen Dreieckswinkeln von 45° darf die Skizze mit 90° begonnen werden"

eine deontische Aussage ist. Wir folgen dem nicht und betrachten all diese Varianten als Bestand unseres Systems, wohl wissend, dass noch viel Nachholbedarf besteht, die sprachlichen Strukturen tiefgründiger zu gliedern.

4.2.1 Informationen zum syntaktischen Aufbau

Die Zahl der sprachlichen Zeichen, die auf die Logik der Umgangssprache Einfluss nehmen, ist unüberschaubar, so dass nur eine Auswahl geboten werden kann. Sie soll selbstverständlich an der Häufigkeit des Vorkommens der Zeichen gemessen werden, wobei die Einschränkungen vor allem für die logischen Operatoren und die logischen Prädikate gelten, die hochgradig differenziert und sogar nicht selten mit täuschenden Namensgleichheiten in der Umgangssprache vertreten sind, während die Zeichen für die Aussagen und die meisten Termini bzw. für deren Variable, wenn es nicht um Einzelbeispiele geht, so gut wie nicht davon betroffen sind. Im konkreten Sprachtyp wird aber immer umstritten bleiben, welche Zeichen heranzuziehen sind, und so dürfte dem Lehrer hier eine weitgehende Entscheidungsfreiheit zugestanden werden.

Unser Vorschlag soll unter Beifügung der Symbolik wie folgt gestaffelt sein:

Aussagen	: a, b, c (in selbstständiger Form)
Aussagenvariable	: p, q, r (dito)
Termini, untergliedert in	
Subjekte	: a, b, c (Prädikaten zugeordnet)
Prädikate	: A, B, C
Variable für Termini, untergliedert in	
Subjektvariable	: x, y, z (Prädikaten/-variablen zugeordnet)
Prädikatenvariable	: X, Y, Z
Negationen	: nicht, non
Konjunktionen	: und, et
Disjunktionen	: oder, vel
Kontravalenzen	: entweder-oder, aut
Implikationen	: wenn-dann, falls, seq
Äquivalenzen	: genau dann-wenn, äq
Allquantoren	: ∀
Existentialquantoren	: ∃
Funktionen	: A(a), B(x), A(a,b), B(x,y), A(a,y), B(x,b)
Funktionsvariable	: P(a), Q(x) (analog weiter), mathematisch: f(x)
Modale Prädikate	: M, N, U

Es fallen zwei Inkonsequenzen auf: die Sonderbezeichnungen für mathematische Funktionen und die für modale Ausdrücke. Sie erklären sich aus sachlichen Besonderheiten, die in den nachfolgenden Abschnitten zur Semantik besser behandelt werden. Bei den logischen Operatoren legen Erfahrungen es nahe, über Wortkurzformen nicht hinauszugehen. Eine vollständige symbolische Formalisierung brächte zu viele Sinnverwechslungen mit sich.

4.2.2 Informationen zum semantischen Aufbau

Als zweckmäßige Grundlage wählen wir die im ersten Kapitel aus semantischer Sicht erläuterte Gliederung der Sprache in Aussagen, logische Operatoren und Termini, beginnen aber nicht mit der wichtigsten Sprachform, den Aussagen, selbst, sondern aus Gründen der besseren Verständlichkeit mit ihren Bestandteilen, den logischen Operatoren und Termini. Von denen werden wiederum erstere als Ausgangspunkt dienen. Dabei wird sich zeigen, dass die Umgangssprache verzweigte Bedeutungen und mitunter darüber hinaus subjektive Sonderwertungen enthält, die es unmöglich machen, geschlossene semantische Systeme in der Art der klassischen Aussagen- und Prädikatenlogik anzubieten. Die umgangssprachlich eingeräumte Subjektivität, die zu verschiedenem logischen Herangehen zwischen Schulklassen führen kann, öffnet selbst dem einzelnen Lehrer systembeeinflussende Gestaltungsmöglichkeiten, die selbstverständlich mit Bedacht einzusetzen sind.

4.2.2.1 Logische Operatoren

4.2.2.1.1 Allgemeine Vorbemerkungen

Logische Operatoren entstanden, wie wir sprachgeschichtlich erwogen haben, aus dem Bedürfnis, erste Einzelaussagen und Einzeltermini zum Zwecke neuer Erkenntnisse zu komplizierteren Aussagen und Termini zu verknüpfen und sind somit für die Sprachstruktur verantwortlich. Dadurch erlangten sie für logische Untersuchungen das Hauptinteresse, wobei sich bald zeigte, dass ihre Zahl kaum gänzlich erfassbar war. Daher werden wir uns in der folgenden systematischen Feinanalyse auf ihre wichtigsten Vertreter beschränken. Die Wichtigkeit schätzen wir an der vermuteten Häufigkeit ihrer Verwendung ab. Gemessen an unserem Gegenstand, der Schulmathematik, werden sich diese Operatoren durchweg indikativ-neutral oder konjunktiv einordnen lassen. Vorübergehend stärker beachtete, doch nur einseitig nutzbare Operatoren bleiben mit Sonderbestimmungen außerhalb systematischer Eingliederungen.

Die Begriffsdefinitionen, die jetzt im Vordergrund stehen werden, benutzen selbstverständlich viele Ausdrücke der Umgangssprache, deren intuitiver Sinn auch bei der überwiegenden Zahl der Schüler bekannt ist und nicht mehr näher erläutert wird. Daneben werden aber Begriffe eine Rolle spielen, die doch zusätzlicher intuitiv vermittelter Informationen bedürfen. Dazu gehören die Modalitäten „möglich“, „notwendig“ und „unmöglich“, die als intuitive Vorgängerausdrücke sehr gute Möglichkeiten schaffen werden, die Unterschiede zwischen den für unsere Untersuchung wichtigen konnektiven und adjunktiven logischen Operatoren der Umgangssprache näher zu bestimmen. Sie sind seit Urzeiten fest in die alltägliche Volkssprache integriert, und auch die Schüler wissen im Unterricht damit umzugehen. Zu den Worten selbst muss deshalb nichts mehr gesagt werden, wohl aber zu ihrer Einordnung. Denn ihre Anwendung ist im Allgemeinen von einem Bezugssystem abhängig, das mitunter erst deutlich zu umreißen ist. Auch kommt es vor, dass es umgangssprachlich nicht üblich ist, modale Ausdrücke hinzuzunehmen. So hebt man nicht hervor, dass „2 + 3" – gemessen an den Bezeichnungen für die natürlichen Zahlen – NOTWENDIG „5" ergibt, sondern es heißt ganz lapidar, dass „2 + 3 = 5" gilt. Gerade die Teilsysteme der Mathematik, die öfters aussagekräftige Beispiele liefern, sind nicht immer klar erkennbar.

Zu den konnektiven und adjunktiven logischen Operatoren, deren fundamentalen Unterschied Reichenbach herausfand, wurde schon festgestellt, dass die in den logischen Kalkülen verabsolutierte Adjunktivität der Operatoren mit der isolierenden Sicht auf die Wahrheit der Einzelaussage genau die logische Verknüpfung beinhaltet, die stets eine Rolle spielt. Daher ist sie ein zuverlässiges methodisches Hilfsmittel für die Explizierung der umgangssprachlichen Operatoren, das wir intensiv einsetzen werden, ohne zu übersehen, dass es nicht hinreichend ist. Der offenbar dominierende konnektive Gebrauch der Operatoren gibt diese Isolation auf und bezieht in unterschiedlicher, aber noch unbekannter Weise weitere logische Verknüpfungen ein.

Die nachfolgende Einzelanalyse der logischen Operatoren gliedert sich mit einer Ausnahme in selbstständige Absätze. Die Ausnahme betrifft die Negation, die wegen unserer Beschränkung auf die zweiwertige Logik abstrakt-semantisch keine Schwierigkeiten in sich birgt, da ihre einzige allgemeine Eigenschaft nur den Wahrheitswertwechsel betrifft. Wohl aber zeigen sich bei den übrigen logischen Operatoren oft Komplikationen, so dass die Negation aufgegliedert in Verbindung mit den einzelnen Operatoren behandelt wird. Dort unterbleibt aber die Erörterung der möglichen Umformungen der logischen Operatoren ineinander, die wir als elementare Schlussmodelle auffassen.

4.2.2.1.2 Die aussagenlogischen Operatoren und ihre Negationen

a) Konjunktion: und

Adjunktive Grundform: w-w = w, w-f = f, f-w = f, f-f =f. Bezeichnung: et.

Der Entstehungszweck war gewiss, das sprachliche Bedürfnis auszudrücken, dass alle genannten Aussagen wahr sein sollen. Darunter wäre somit die Urform zu verstehen, und sie gehört auch allen derzeitigen Varianten an. Boole und Frege wählten sie ebenfalls zu einem ihrer umgangssprachlichen Ausgangspunkte, so dass sie mit der obigen adjunktiven Grundform identisch ist. In der Schulmathematik ist sie weit verbreitet, ohne immer direkt sichtbar zu sein. So verbindet die Aussage

> „7 ist eine ungerade natürliche Zahl"

in adjunktiver Form ohne Bedeutungsänderung die Aussage, dass 7 eine ungerade Zahl ist, durch „und" mit der Aussage, dass 7 zu den natürlichen Zahlen gehört, doch die Aussage

> „Definitions- und Wertebereich sind in einer Funktion untrennbar verbunden"

hat keinen molekular-aussagenlogischen Inhalt und wird bei den Termini noch einmal verwandt.

Konnektiv sind mehrere Varianten zu unterscheiden, von denen die inhaltliche Verstärkung zur Notwendigkeit hin wohl am wichtigsten ist: In

> „Wenn eine Zahl durch 2 und durch 3 teilbar ist, ist sie durch 6 teilbar"

informiert die Aussage nicht unverbindlich-adjunktiv über irgendeine durch 2 und durch 3 teilbare Zahl, wie eine isolierte Konjunktion zu verstehen wäre. Sie erhebt die Konjunktion zur hinreichenden Bedingung für eine weitere Aussage und verleiht ihr damit einen konnektiven Charakter. Denn in einem solchen Sprachzusammenhang *muss* die Konjunktion gegeben sein, d. h. müssen die Konjunktionsglieder wahr sein; die alleinige Feststellung „w-w" für die Wahrheitswerte wäre unzureichend. Doch es ist nicht die Logik, die die Inhaltserweiterung veranlasst hat: Die Struktur genügt wie zuvor der Form „p und q", in die aber jetzt in Verbindung mit „Zahl durch 6 teilbar (r)" *mathematische* Kenntnisse eingeflossen sind. Eine logische Tautologie ist dadurch nicht entstanden, lediglich eine mathematische Äquivalenz: Die inhaltlich stärkere mathematische Gesetzesbestimmung – logisch-strukturell als einfache Implikation sichtbar – genügt, die Gesamtaussage in beidseitiger Richtung als *immer wahr* einzuordnen. Wir werden darauf bei den Schlussfiguren, wo diese Differenzierung Bedeutung gewinnt, zurückkommen.

Ein Umweg über einen eingebetteten Konjunktiv wie

> „Wenn irgendeine Zahl durch 2 und durch 3 teilbar sein sollte, wäre sie auch durch 6 teilbar"

würde die modale Verstärkung nach „notwendig" hin gut erkennen lassen, ist aber nicht erforderlich. Schon die vergleichsweise elementare Konjunktion des Lehrers

> „Paul und Franz werden an die Tafel kommen"

wird gewiss von den Schülern als Weisung, demnach deontisch verstanden. Die Begleitumstände machen dies sichtbar.

Eine zweite Variante eines konnektiven „und" ist die chronologische Reihung, die nicht unbedingt sichtbar auf reale Zeitabläufe wie in

> „Er stieg ins Auto und fuhr gegen einen Baum"

gerichtet sein muss. Sie kann auch aus mathematischen Gründen verursacht sein und verdeckt bleiben, z. B. in

> „Der x-Wert eines Extrempunktes einer Funktion wird ermittelt, indem die 1. Ableitung gebildet und diese Null gesetzt wird"

Im Unterschied zur Variante

> „Zahl durch 2 teilbar und Zahl durch 3 teilbar"

ist diesmal das mathematische Kommutativgesetz nicht anwendbar, so dass im Unterschied zu „et" „w_1-w_2" von „w_2-w_1" zu unterscheiden wäre und „muss" sich darauf beziehen würde, ohne die Verknüpfung an sich zu berühren. In anderen Beispielen ist sogar beides möglich, wobei die Differenzierungen wieder bei den Schlussuntersuchungen beachtenswert sein werden.

Die konnektiven Negationen, auf die wir uns beschränken können, werfen einerseits etwas größere Probleme beim Zeitbezug auf, da die alleinige Negation der Reihenfolge weniger ausdrückt als die der gesamten Konjunktion. Notwendig verbundene Konjunktionen verlieren andererseits bei der Negation mit dem Wahrheitswert diesen Status, so dass, adjunktiv aufgesplittert, mehrere und nicht immer leicht überschaubare Negationsformen zu unterscheiden sind.

Insgesamt bietet die Konjunktion mit diesen drei Varianten, die u. E. unbedingt zu unterscheiden sind. noch ein übersichtliches Bild, stellt trotzdem aber bereits für kalkülhafte Versuche chaotische Verzweigungen in Aussicht. Sollten Lehrer auf weitere Varianten stoßen, sind ihnen in keiner Weise die Hände gebunden.

b) Disjunktion: oder

Adjunktive Grundform: w-w = w, w-f = w, f-w = w, f-f = f. Bezeichnung: vel.

Im Unterschied zur Konjunktion wird es in der Urform nur darum gegangen sein auszudrücken, dass von mehreren genannten Aussagen mindestens eine wahr ist. Auch hier ist diese Eigenschaft in allen derzeitigen Varianten enthalten, und Boole sowie Frege haben in ihren Kalkülen daran angeknüpft, so dass die obige Matrix der Urform entspricht. In der Schulmathematik ist sie ebenfalls verbreitet, womit eine erste „Oder"-Variante genannt sei. Aussagen wie

> „‚log 6' ist eine rationale oder irrationale Zahl"

kommen häufig vor und besitzen (im Normalfall) einen adjunktiven Sinn: Allein interessiert, dass über den feststehenden Wahrheitswert in ungewisser Form befunden wird. Anders im nunmehr pragmatischen Verständnis bei Einbeziehung der Unwissenheit der Schüler, mit der auf dieser Schwierigkeitsstufe immer wieder zu rechnen ist. In logischer Sicht sind dann beide Möglichkeiten (zunächst) abwechselnd als wahr anzunehmen, wodurch die Aussage einen konnektiven Charakter erhält, der als falsch nachzuweisen wäre.

Dieser Umstand leitet zur zweiten Variante über, wonach „oder" – in entsprechenden Zusammenhängen – erst akzeptiert wird, wenn Belege für „w-f" und „f-w" existieren, aber „f-f" ausgeschlossen ist. Als Matrix würde sich ergeben:

p	**q**	**p oder q**
w	w	kann sein
w	f	muss sein
f	w	muss sein
f	f	darf nicht sein

Dazu zählt eine Aussage wie

> „Zu der vorliegenden Tangente, die zur x-Achse parallel verläuft, gehört im Funktionsbild ein Extrem- oder ein Sattelpunkt“,

die die zwei erforderlichen Belege besitzt, jedoch ausschließt, dass die Tangente zwar die beschriebene Richtung besitzt, ihr Berührungspunkt mit dem Funktionsbild jedoch weder ein Extrem- noch ein Sattelpunkt ist. Den Fall „w-w“ gibt es nicht, und er ist auch nicht verlangt.

Im Beispiel sind mit Extrem- und Sattelpunkt alle „W“-Belegungen berücksichtigt, und es zeigte sich schon[131], dass, sobald weitere logische Operatoren oder Termini Auskunft geben, *Vollständigkeit* zur Akzeptanz gehört. Insbesondere ist es die Vereinigung der Operatoren „oder“ und „alle“, die wegen der sprachlichen Verdecktheit des zweiten Operators viele Schüler dazu verleitet, eine besondere Oder-Variante zu sehen. Wir kommen dem entgegen und fordern für jedes konnektive „oder“ die Prüfung, ob der Operator im Sinne der ins Auge gefassten Grundmenge an Möglichkeiten vollständig untergliedert ist. Ist dies wie in

> „Ein Dreieck ist spitz-, recht- oder stumpfwinklig“

erkennbar der Fall, wird die Aussage als wahr akzeptiert, während *erkannte* Unvollständigkeit abzulehnen ist: Anderweitig wäre eine der beiden „Muss“-Beziehungen verwirkt, da

> „Ein Dreieck ist spitzwinklig oder rechtwinklig“

131 Vgl. Abschnitt 3.2.4.

unter normalen Bedingungen nicht so zu interpretieren ist, dass zwei spitze Winkel es erlauben, *definitiv* einen rechten Winkel anzunehmen. Hierauf beruhen die meisten Fehler der Schüler, doch dürfen Überziehungen nicht ausgeschlossen werden. Eine Aussage wie

> „Die Wurzel einer natürlichen Zahl ist ganzzahlig, gebrochen-rational oder irrational“

ist falsch, da echte gebrochen-rationale Wurzeln den mathematischen Bestimmungen widersprechen. Auch redundante Formulierungen wie

> „Das vorliegende Dreieck ist rechtwinklig oder besitzt einen Winkel von 90°“

sind stets zu vermeiden, da sie zu Fehlschlüssen führen können.

Die Vollständigkeit ist demnach genau an der zugehörigen Grundmenge zu messen und darf nicht neuen Parametern untergeordnet werden. Die bekannte allgemeingültige Disjunktion

> „Zahlen sind reell oder komplex“

dient oft nicht als umfassendes Steuerungsmittel, und so kommt es, dass die Teilmengen, die unmittelbarer Unterrichtsgegenstand sind, unzureichend beachtet werden. Eine Aussage wie

> „Die Division bringt genau ein und nur ein Ergebnis“,

die immer wieder im Unterricht verlautet, ist bei reellen Zahlen wie „2,7655 …“ und 8,92111 …“ – d. h. in der Grundmenge der reellen Zahlen – hochgradig problematisch, und selbst bei den Dezimalbrüchen der rationalen Zahlen tauchen Fragen auf, so dass man bald gar nicht weiß, wie unter Einbeziehung dieser Grundmenge überhaupt entschieden werden sollte.

Eine dritte „Oder“-Variante eröffnet den Blick auf Unterschiede in der umgangssprachlichen Anwendung. Als Ausgangspunkt möge das bereits zitierte

Arztbeispiel Reichenbachs stehen[132]. Ein Arzt hält eine Operation zur Rettung eines Patienten für notwendig, weiß aber nicht, ob sie hilft. Doch ein Überleben ohne Operation ist für ihn undenkbar: Operation oder Tod. Damit ist ein Zwang lediglich einseitig angesprochen, ohne dass allerdings die andere „Oder"-Seite „leer" ausgeht. Sie ist in zwei Möglichkeiten berücksichtigt, so dass die zugehörige Matrix nur einmal „muss" ausweist.

Diese letztere Konstellation, die in nichtmathematischen Wissenschaften und in der Alltagssprache häufig auftritt, ist in objektsprachlichen schulmathematischen Aussagen nicht möglich: Ein und derselbe mathematische Gegenstand kann nicht in gleicher Weise mit einem zweiten Objekt und seinem Gegenteil verbunden sein. Im Beispiel könnte dagegen allein konstant bleiben, dass nicht operiert wird, und dieser Zustand ist zunächst mit einem noch lebenden Patienten vereinbar, irgendwann aber wegen der (ungenannten) fortschreitenden Krankheit nicht mehr. Trotz eines solch wichtigen Unterschiedes sollte jedoch die Schulmathematik auch hier nicht gänzlich vergessen werden, da metasprachliche Anwendungen möglich sind.

So fehlt vor allem noch die Negation einer konnektiven Disjunktion. Sie birgt größere Schwierigkeiten in sich, da sie nicht bloß den Wahrheitswert ändert, sondern auch den erläuterten doppelten Belegungszwang oder die Ausschlussforderung für die beidseitige Negierung auflöst. Damit wäre die Konnektivität aufgehoben und die negierte Disjunktion als adjunktiv zu charakterisieren. Lässt sich nun nachweisen, dass die Negation zu einer wahren Aussage führt, bleibt nur übrig, der als wahr angenommenen falschen Disjunktion das Prädikat „konnektiv" abzusprechen. Allein wahre Aussagen können auf Dauer einen konnektiven Charakter beanspruchen, woraus jedoch folgt, dass die ursprüngliche Annahme erst im Nachhinein als adjunktiv zählt, sobald sie widerlegt ist. Ihre logische Bearbeitung wird sich danach erschweren, da der neue Status auch sprachliche Verselbstständigung bedeutet, so dass in der Regel mehrere Negationsmöglichkeiten zu unterscheiden wären.

Die Disjunktion wirft somit erste Schatten größerer Schwierigkeiten voraus, in denen als ihre Hauptvariante die Verknüpfung mit „wenn-dann" in wichtigen mathematischen Gesetzmäßigkeiten zur Sprache kommt.

---

[132] Vgl. Abschnitt 2.3.2.

c) Kontravalenz: entweder-oder

Adjunktive Grundform: w-w = f, w-f = w, f-w = w, f-f = f. Bezeichnung: aut.

In Analogie zur Disjunktion sollte als Urform einer wahren Kontravalenz die Aussage verstanden werden, dass genau eine der beiden Teilaussagen wahr ist. Im Unterschied zur Disjunktion hat ihre adjunktive Variante in der Schulmathematik kaum Anwendung gefunden, da es mathematisch nicht üblich ist, in einer derart klaren antisymmetrischen Gegenüberstellung die beiden Seiten isoliert voneinander zu analysieren und nur eine Seite anzuerkennen. Trotzdem besteht die Entscheidungsfreiheit, eine Aussage wie

> „Eine natürliche Zahl ist entweder gerade oder ungerade“

als adjunktive Feststellung zu interpretieren. Bedeutung besitzen aber allein die konnektiven Varianten, und sie enthalten, wohl noch umfassender, gleichfalls die soeben bei der Disjunktion behandelten Problemkreise, so dass eine Wiederholung unnötig ist.

Die Negierung der Kontravalenz verlangt dagegen Aufmerksamkeit. Schon die gerade eingeräumte Toleranz führt im nächsten Schritt zu Eigenartigkeiten, denn verneint ist die gewählte Aussage identisch mit einer adjunktiven Äquivalenz, die schulmathematisch so gut wie nicht angewendet wird. Es wäre deshalb sicher besser, hier regulierend einzugreifen und eine adjunktive Kontravalenz auszuschließen. Wir entscheiden uns so und empfehlen daher, diesen Operator nur konnektiv einzusetzen. Für seine Negation bleiben genug Schwierigkeiten übrig, da sie mit der Auflösung der Bindung zwischen den Teilaussagen der Kontravalenz mehrere Parallelbedeutungen freigibt, die unterschiedlich sinnvoll sind. Die Breite der Anerkennung muss dann dem Lehrer überlassen sein, doch dürfte z. B. die nicht-negierte analoge Disjunktion immer dazugehören: Eine falsche Kontravalenz kann eine wahre Disjunktion sein. Den Lehrer erwartet demnach keine leichte Aufgabe.

d) Implikation: wenn-dann

Adjunktive Grundform: w-w = w, w-f = f, f-w = w, f-f = w. Bezeichnung: seq.

Eine präzise Charakterisierung des Begriffs „seq“, der zu dieser Grundform gehört und sprachlich über die Matrizendefinition hinausgeht, lässt sich schwer in verständliche Worte kleiden. Statthaft dürfte sein, gleichlautende Wahrheitswerte der Teilaussagen insgesamt „wahr“ zu nennen und bei verschiedenartigen Wahrheitswerten als zweiten Parameter die Richtung der Teilaussagen hinzuzunehmen, so dass nur die gerichtete Kombination „wahr-falsch“ als falsch gilt. Mit diesen Überlegungen könnten Boole und Frege auf der Basis von „und“ und „oder“ diesen Operator konstruiert und dabei gemerkt haben, dass er anscheinend ungefähr sprachlich getroffen wird, wenn man das umgangssprachlich nicht klar bestimmte und außerdem mehrdeutige „wenn-dann“ verwendet. Alle diesbezüglichen sprachlichen Ausdrücke scharen sich irgendwie mit Zusatzbestimmungen um die obige Definition, mit der alle Varianten umfassenden Gemeinsamkeit, dass jede Implikation falsch wird, wenn auf eine erstgenannte wahre Teilaussage eine falsche Teilaussage folgt.

Soweit lässt sich nichts beanstanden, doch ist damit die Verständnisfrage nicht gelöst: Der Zusammenhang zwischen den beiden Teilaussagen ist enger, denn die erstere *verlangt* von der anderen einen bestimmten Wahrheitswert, so dass vom Wortlaut her und insofern im natürlichen Sprachverständnis „wenn-dann“ nur einen konnektiven Sinn besitzen kann. Wir unterstreichen dies ausdrücklich. Die adjunktive Veränderung muss demnach bei Beibehaltung der Formulierung – wie schon mehrfach gefordert – deren neue Interpretation nennen, die aber bei gleicher Grundmenge wegen der über „und“ und „oder“ vollzogenen Abschwächung immer zu „wahr“ führen wird, wenn die konnektive „Ur“-Bedeutung wahr ist.

Darum soll es hier jedoch nicht gehen. Wir konzentrieren uns auch für die Schulmathematik allein auf das umgangssprachlich konnektiv verstandene „wenn-dann“[133] und stellen als erstes fest, dass wie bei „oder“ sprachliche Wendungen existieren, in denen dieser Operator zwei Operatoren in sich vereinigt. Doch die Ausdrucksweise schafft keine klaren Strukturen, da zwar „immer wenn dann“ stets zwei Operatoren enthält, „falls-dann“ dagegen allseitiger benutzt wird. Die individuelle Sicht herrscht dort zwar vor, mit praktischen Konsequenzen schon in der Alltäglichkeit, z. B. bei der Belobigung nach einem sportlichen Sieg, da die Aussage

„Immer, wenn du gewinnst, erhältst Du 10,– €“

[133] Die methodische Wichtigkeit einer adjunktiven Matrix bleibt davon unbenommen.

den Sportler sicher viel mehr erfreut als

> „Falls Du (jetzt) gewinnst, erhältst Du 10,– €“,

woraus kein Anspruch auf eine Wiederholung erwächst.

Es kommt aber auch vor, dass Aussagen mit „falls-dann“ ähnlich wie bei „oder“ zusätzlich quantifizierend wirken, z. B. gleichbedeutend mit „immer wenn-dann“ in

> „Falls ein Metall erhitzt wird, dehnt es sich aus.“

Wieder ist es der All-Operator, der hinzutreten kann und diesmal auf Wiederholungen der Teilaussagen hinweist, während er bei „oder“ auf Vollständigkeit der Prädikate ausgerichtet ist.

„Immer wenn-dann“ lenkt die Aufmerksamkeit auf eine zweite Untergliederung der Implikationen in zufällige und gesetzlich-regelmäßige, da „immer“ einen wichtigen Gesetzesaspekt erfasst und für jede Gesetzesaussage zutreffend wäre. Der Operator geht aber darüber hinaus und ist auch für eine zufällige Aussage wie

> „Immer, wenn ich dich besuchte, warst du nicht zu Hause“

legitim, da der Besucher das Recht hat, die Grundmenge zu wählen, die es ermöglicht, seinem Ärger Ausdruck zu geben. Es ist deshalb zweckmäßig, beide Gliederungen gesondert zu besprechen.

Der Gesetzesaspekt leitet zu einer dritten Unterscheidung über, die indikative und konjunktive „Wenn-dann“-Aussagen betrifft. Der unbeschränkte Wechsel in den letzteren Modus ist Definitionen und Gesetzeserkenntnissen sowie den daraus resultierenden Aussagen vorbehalten. Die folgende Konkretisierung

> „Wenn das vorliegende (kalte) Metallstück erhitzt worden wäre, hätte es sich ausgedehnt“

wird akzeptiert, denn die vom Konjunktiv auf der Basis der Grundmenge geforderte allgemeine Wahrheit resultiert aus der Anwendung eines Naturgesetzes, während ohne weiteres Wissen

„Wenn ich dich morgen besuchen würde, wärst du nicht zu Hause“

nicht aus dem akzeptierten Indikativ

„Immer, wenn ich dich besuchte, warst du nicht zu Hause“

resultiert und auch nicht anderweitig allgemein begründet werden kann, so dass sie als Ungewissheit abgelehnt wird.

Mit den bisherigen Unterscheidungen haben wir die innere Struktur von „wenn-dann“ nur partiell berührt, so dass diese Kernfrage nunmehr zu untersuchen ist. Gründlich in unserem Sinne ist das forschungsmäßig noch nie geschehen, woraus sich eine gewisse Unvollkommenheit der folgenden Gedanken ergeben dürfte. Als Hauptbedeutung von „wenn-dann“ schält sich für uns heraus, dass neben dem Ausschluss der Konstellation „wahr-falsch“ von den übrigen die Konstellationen „wahr-wahr“ und „falsch-falsch“ jeweils mindestens eine Belegung besitzen müssen. Das vordere „wenn“ engt unseres Erachtens die Wahrheitsbehauptung der zweiten Teilaussage ein. Sie soll nicht, absolut gesehen, generell möglich sein, sondern dies nur unter Bedingungen, von denen eine genannt ist. Diese letzte Ergänzung mit der Relativierung „eine genannt“ – mit der nicht ausgeschlossenen Möglichkeit „die eine“ – ist Bestandteil von „wenn-dann“, und sie eröffnet das Recht zur Behauptung, dass „wenn-dann“ auch „falsch-falsch“ verlangt, während „falsch-wahr“ als ungenannte Möglichkeit verbleibt.

Mit dieser Methode haben wir wie Boole und Frege „wenn-dann“ bis zu den Einzelaussagen nur auf Wahrheitsstrukturen zurückgeführt, allerdings in anderer Weise. Sie lässt sich wie folgt auf der Basis der gewählten Grundmenge systematisieren:

wahr – wahr: notwendige Belegung
wahr – falsch: unmögliche Belegung
falsch – wahr: mögliche Belegung
falsch – falsch: notwendige Belegung

Sprachlich werden nur die beiden ersteren Konstellationen sichtbar; wegen der Asymmetrie des Operators ist keine Rede davon, was sein soll, wenn der „Wenn“-Teil falsch ist. Darin ist eine Hauptwurzel der vielen Meinungsverschiedenheiten zu sehen, und auch uns blieb allein übrig, in einem vorsichtigen Wahrscheinlichkeitsschluss die fehlenden Konstellationen zu schätzen und die obige Gesamtmatrix die Hauptbedeutung von „wenn-dann“ zu nennen. Darunter befinden sich die schulmathematisch verwendeten Gesetze vollständig, und das ist sicher ein großer Gewinn.

Mehr ist aber vorläufig nicht zu verantworten, denn es existieren viele Beispiele, die diesem Schema nicht zu genügen scheinen. Wir werden deshalb versuchen, sie in einem gesonderten Schema zunächst zu vereinigen, um danach eventuell das Schema zu modifizieren. Dazu vergleichen wir die beiden Aussagen

> „Wenn die Höhe zur Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks das Produkt der beiden zugehörigen Hypotenusenabschnitte ist, dann beträgt die Winkelsumme im Dreieck 180°“

und

> „Wenn 910 durch 91 teilbar ist (leicht erkennbar), dann ist 910 auch durch 13 teilbar (schwerer erkennbar)“.

Die erste Aussage werden die Schüler als wahr (oder sogar als sinnvoll) ablehnen, wofür die entwickelte Matrix die Begründung liefern kann: Erfüllt ist zwar „w-w“, und „w-f“ ist ausgeschlossen, doch „f-f“ ist nicht erfüllbar, so dass die Aussage als „falsch“ oder als „undefiniert“ bezeichnet werden müsste. Schon bei der zweiten Aussage versagt aber diese Methode, denn die Schüler erkennen die Aussage als wahr und sinnvoll, ja sogar als hilfreich an.

Für die Erklärung des Unterschiedes genügt der Hinweis, dass die Akzeptanz der zweiten Aussage aus der grundsätzlichen Kenntnis folgt, die die Schüler über die Zerlegungsgesetze bei Teilbarkeiten besitzen und die sie in diesem Beispiel benutzt sehen. Wie wir gerade betonten, befolgen die mathematischen Gesetzesaussagen die Matrixanforderungen, und daher sind indirekt die angewendeten Beispiele ebenfalls einbezogen, so dass in einem erweiterten Sinn es doch möglich wäre, von einer gemeinsamen Grundbedeutung der konnektiven Wenn-dann-Aussagen zu sprechen. Für einen einheitlichen modellhaften Versuch sind sie aber zu unterschiedlich, und der Einfluss der erwähnten grammatikalischen Eigenarten bleibt ebenfalls bestehen. Auch von den Implikationen geht daher keine Tendenz zu einem in sich geschlossenen schulmathematischen logischen System aus.

Die abschließenden Gedanken zur Negierung einer konnektiven Implikation sollten zunächst grundsätzlich deren adjunktiven Charakter hervorheben, der aus der Wortanalyse der nichtnegierten Implikation folgt, dass diese stets modal bestimmt ist. Damit wäre in der Negation allein der generelle Ausschluss von „w-f" aufgehoben und in „möglich" umgewandelt, so dass für jede Matrixzeile die Anfangsannahme „w" legitim sein dürfte, auch wenn bekanntlich zwei Wahrheitswertbeziehungen gar nicht sprachlich ausgedrückt sind. Die notwendigen Ergänzungen können dann selbstverständlich nur über Wahrscheinlichkeiten bestimmt werden. Es sind keine einfachen Probleme, aber sie befinden sich in Umgehung kalkülhafter Überlegungen auf dem richtigen Wege, den Schulstoff tiefer logisch zu durchdenken.

e) Äquivalenz: genau dann-wenn

Adjunktive Grundform: w-w = w, w-f = f, f-w = f, f-f = w. Bezeichnung: äq.

Der Doppelbezug zwischen den Teilaussagen wie in

> „Genau dann, wenn im Dreieck mit den Seiten a, b und c ‚$a^2 + b^2 = c^2$' gilt, beträgt einer der Winkel 90°"

verstärkt trotz der wiederhergestellten Symmetrie den konnektiven Charakter dieses Operators, so dass die Bewertungen der Implikation übernommen werden können und beachtet bleiben.

Die Äquivalenz ist der wohl eigenwilligste Operator, denn seine sinnvolle Anwendung in der Schulmathematik deckt sich semantisch offenbar mit dem Gleichheitsprädikat, das Aussagen bzw. Aussageformen in sich vereinigt. Die Schüler können damit besser umgehen, und so ist es legitim, die Anwendbarkeit der Äquivalenz daran zu messen. Auch ihre Negierung ist auf diesem Wege wenigstens abstrakt leicht abschätzbar, denn sie lässt sich in dem Prädikat „ungleich" zusammenfassen, das die Schüler intuitiv verstehen. Schulmathematische Logik und Schulmathematik scheinen sich in diesen wichtigen Fragen zu überschneiden, doch unter Wahrung ihrer eigenständigen Ausdrücke.

4.2.2.1.3 Die prädikatenlogischen Operatoren und ihre Negationen

a) Der Alloperator: alle (Bezeichnung: $\forall(x)$)

Zur Kennzeichnung dieses logischen Operators werden in der Schulmathematik fast ausnahmslos „alle“ und „jede(r)“ benutzt; feine Unterschiede zwischen den Ausdrücken sind für unser Anliegen belanglos. Der Operator gehört der Prädikatenlogik an und ordnet in deren 1. Stufe, die im Mittelpunkt stehen wird, die *Sprachsubjekte/-elemente* „x“ quantitativ den *Prädikaten* „P“ zu: $\forall(x)P(x)$[134]. In elementarer Form genügt dafür oft ein Prädikat, doch muss die Grundmenge dann bekannt sein. So gilt für die vorgegebene Menge der geraden natürlichen Zahlen, dass alle ihre Zahlen durch 2 teilbar sind:

> Alle (Subjekte) x (d. h. alle geraden natürlichen Zahlen) besitzen (das Prädikat) T (d. h. die Eigenschaft, durch 2 teilbar zu sein): $\forall(x)T(x)$.

In vielen Fällen sind aber mindestens zwei Prädikate unter Einbeziehung aussagenlogischer Operatoren erforderlich, wobei der Satzbau mitunter etwas verändert wird:

> „Alle ganzrationalen Funktionen sind differenzierbar“

könnte im Unterricht die Form

> „Für alle (Subjekte) x (d. h. für alle konkreten ganzrationalen Funktionen) gilt: Wenn (Subjekt) x zu den ganzrationalen Funktionen gezählt wird (ein Subjekt/Element des Prädikats „Funktion“ ist), ist x differenzierbar (ist ein Subjekt/Element des Prädikats „differenzierbar“), wofür formalisiert der Implikationsoperator herangezogen wird:
>
> „$\forall(x)$*(Wenn F(x), dann D(x))*“[135].

[134] Vgl. Abschnitt 1.1.1.

[135] Auch hier sei wieder betont, dass „wenn-dann“ in Normalbedeutung nicht dem Fregeschen Kalkül angehört und daher nicht mit „seq“ symbolisiert werden darf.

Ein wenig komplizierter wird es, wenn „alle“ sich auf einen Relationsterm bezieht wie in der Aussage

> „Alle geraden Zahlen lassen sich mit jeder ungeraden Zahl multiplikativ verknüpfen.“[136],

die wir zunächst umformen zu

> „Für alle (Subjekte, d. h. ganze Zahlen) x und für alle (Subjekte, d. h. ungeraden Zahlen) y gilt: x steht in der Relation ‚multiplikativ verknüpft mit‘ zu y“,

um sie dann in die Symbolform „A(x)A(y)MV(xy)“ zu bringen.

Bis hierhin dürften nur die Symbolisierungen und die damit verbundenen sprachlichen Umformungen den Schülern einige Schwierigkeiten bereitet haben, doch es bahnen sich noch größere Probleme an.

In den logischen Kalkülen war neben den adjunktiven Operatoren „und“ und „oder“ zunächst auch der Alloperator der Umgangssprache entnommen, und er entstand im Grunde in Explizierung der quantitativen Seite von „und“, die besagt, dass die Gesamtaussage wahr ist, wenn *alle* genannten Teilaussagen wahr sind. „Und“ hat im Laufe der Zeit dann Zusatzbedeutungen erhalten, doch der Alloperator blieb bis heute in der alltäglichen Sprache in adjunktiver Bestimmung seiner Elemente konstant. Dem konnte die Mathematik auf Dauer aber nicht folgen, denn der mathematische Fortschritt deckte inzwischen von der leeren Menge und den Nullmengen bis zu den gegliederten Unendlichkeiten Mengen auf, die heutzutage vom Alloperator verarbeitet werden. In der Alltagssprache geschieht das nicht: Dort muss eine endliche Belegung bestehen, ehe „alle“ verwendet wird. In der Mathematik ist es aber z. B. aus Erkenntnisgründen angebracht, jedem Prädikat eine Menge an Elementen zuzuordnen, womit Prädikate ohne Elemente gebildet werden können. Ein Beispiel wären reelle Wurzeln aus negativen reellen Zahlen, deren Menge nur positiv bestimmbar wird, wenn der Begriff „alle“ um die leere Menge erweitert ist. Doch daraus folgt sogleich die neu zu verkraftende Ungewöhnlichkeit, eine Aussage mit „nicht alle“ als falsch zu werten, wenn gar kein

---

[136] Für die umgekehrte Rechenoperation, die Division, ist die analoge Aussage falsch, denn „7:0“ ist z. B. nicht definiert.

Element vorhanden ist: Wenn allein die leere Menge zur Wahrheit führt, dann ist das eben – per Definition – *„alles"*.

Nach meinen Erfahrungen verstehen Schüler derartige Kombinationen nicht mehr, so dass man auch hier eine Grenze setzen und die Schulmathematik im Bereich der Umgangssprache belassen sollte. Bei Berührung mit leeren Mengen wären gesonderte Verfahren zu überlegen, die allein an Ort und Stelle zur Sprache kämen und außerhalb einer systematischen Einordnung blieben.

b) Der Existentialoperator: mindestens ein (Bezeichnung: ∃ (x))

Die in der Überschrift gewählte Formulierung ist die einzige korrekte Variante und wird anstatt des etwas lässigen Ausdrucks „einige", der immer wieder in der Literatur begegnet, auch von uns benutzt.

Der Operator gehört ebenfalls zur Prädikatenlogik und darf m. E. als Analogon zur Urform von „oder" verstanden werden: „Oder" hält fest, dass die Gesamtaussage wahr ist, wenn dies für mindestens eine Teilaussage auch gilt. Der Existentialoperator überträgt nun die Beziehung auf das Verhältnis von Prädikat und Subjekt/Element. Sofern ein Prädikat ausreicht, gilt analog zum Alloperator „ ∃ (x) P(x)", bei mindestens zwei Prädikaten tritt aber die Konjunktion – oft wieder nach Umstellung – an die Stelle der Implikation:

> „Es existiert mindestens eine irrationale Wurzel"

lässt sich umwandeln zu

> „Es existiert mindestens ein (Subjekt) x (d. h. mindestens eine Zahl), das zu (Prädikat) I (d. h. zu „irrational") und zu (Prädikat) W (d. h. zu „Wurzel") gehört": ∃ (x)(I(x) und W(x)).

Relationsprädikate dürften keine zusätzliche Schwierigkeit darstellen:

> „Mindestens eine Zahl hat mindestens eine nachfolgende Zahl"

lautet formalisiert

„$\exists(x)\exists(y)N(xy)$".

Die Negierung wechselt in Abhängigkeit von den Prädikaten mitunter erheblich die Schwierigkeit, beginnt aber bei einstelligen Prädikaten wohl ziemlich problemlos. Mehrstellige Prädikate verlangen Variationen in den Negierungen, die mit steigender Zahl gleich-falls zunehmen. Die Aussage

„Es ist nicht wahr, dass $1{,}5^{\log 6}$ größer als 10 ist"

lässt offen, ob der Ausdruck kleiner oder gleich 10 ist oder ob er gar nicht zu bestimmen ist, wobei dann in einem zweiten Arbeitsschritt zu entscheiden wäre, welche Variante gilt.

c) Die Kombination von All- und Existentialoperatoren

Es geht hier nicht um die auf später verschobenen logischen Wechselausdrücke zwischen All- und Existentialaussagen für einen und denselben Tatbestand, sondern analog zu a) und b) um eine erstmalige korrekte duallogische Erfassung des sprachlichen Inhalts einer meist molekularen Aussage, für die auch andere Wendungen existieren. Die anspruchsvolleren Formeln der Schulmathematik können durchweg mit Hilfe beider Operatoren benannt werden, doch ist deren Aussageform nicht immer leicht zu finden, wie es z. B. schon in der überaus wichtigen Erkenntnis

„Es gibt unendlich viele Zahlen"

der Fall sein kann. Anbieten würde sich z. B. die Aussage

„Jede Zahl hat einen Nachfolger",

die sich

„$\forall(x)\exists(y)N(x,y)$"

formalisieren ließe – mit der offenen Frage, ob viele Schüler dies gewusst hätten. Dabei war es möglich, für den Ausdruck mit einem Prädikat auszukommen. Doch meist sind für einen verständlichen Text zwei Prädikate erforderlich wie in

> „Jede Wurzel einer positiven Zahl unter 1 ist größer als diese Zahl",

wofür angemessen

> „∀(x) ∃ (y)(wenn A(Wurzel)(x,y), dann B(größer)(x,y)"

sein dürfte. In der Regel verwenden die Mathematiker „seq" für dieses „wenn-dann", wodurch die Aussage zwar nicht falsch wird, doch ist sie unterbestimmt und daher nicht korrekt wiedergegeben, so dass spätere Fehler möglich sind. Mit „B = ‚kleiner'" würde die umgangssprachliche Aussage falsch, während der Operator „seq" auf die Wahrheit keinen Einfluss nähme. H. Reichenbach bringt genau mit dieser Struktur (Z = ∀(x) ∃ (y)(f(x,y) seq g(x,y))" dafür ein schönes Beispiel mit Erklärung:

> „... we interpret ‚f(x,y)' as meaning ‚x is the father of y', and ‚g(x, y)' as meaning ‚x is taller than y'. Since in this interpretation the statement ‚∀(x) ∃ (y) nonf(x,y)' holds, the implication holds also […]. (That is, if a father is not taller than his child, we choose as y a person who is not the child of x; then the implicans in Z is false, and thus the implication holds.)"[137]

Vielleicht darf anlässlich der Begrenztheit adjunktiver Interpretationen noch einmal betont werden, dass wir uns in diesem Abschnitt mit der Grundstufe der Lösung einer mathematischen Aufgabe beschäftigen, mit der Fixierung ihres mathematischen Sinnes, und dass anschließend erst das Rechnen beginnen kann. Wer hier versagt, kommt dazu dann gar nicht mehr, so dass der Lehrer alles daranzusetzen hätte, dass die Schüler diese Stufe textgemäß meistern. Der adjunktiven Analyse der einzelnen Teilwahrheiten wäre dabei immer der richtige Platz als Ausgangspunkt einzuräumen, aus denen heraus kombinierte logisch-mathematischen Formulierungen unter Beisatz der Umgangssprache zu führen hätten. In beiden

[137] Reichenbach, ESL, S. 363.

Beispielen haben wir uns um ein solches Vorgehen bemüht, auch im Wissen darum, dass sie einem noch recht einfachen Strukturniveau angehören. Leider lässt sich darauf nicht ausruhen, da die Schulmathematik in der Abiturstufe deutlich höhere Ansprüche nicht ausklammert. Sie erreichen aber in unserem Verständnis die Grenze der Aufnahmefähigkeit fast aller Schüler, sofern sie, wie wir es von Anfang an praktizieren, spezifisch logisch-schulmathematisch gelöst werden sollen. Deren Überschreitung würde bedeuten, von nun an logisch-kalkülmäßig zu arbeiten, denn die anderweitigen logischen Verästelungen und Parallelwege wären dann entschieden zu kompliziert. Die erforderliche tiefere Einarbeitung in eine neue logische Basis dürfte aber ebenso eine Zumutung sein, und so bliebe nur der Ausweg, den Schwierigkeitsgrad der Schulmathematik nicht weiter zu erhöhen. Zufällig, ohne Kenntnis unseres frisch gefundenen Prinzips, geschieht dies ungefähr auch, so dass der stoffliche Umfang beibehalten werden könnte.

Zweckmäßigerweise sollten diese Erörterungen an einem treffenden Beispiel erläutert werden. Entsprechend der obigen Betonung, worum es hier geht, sei mit „Stetigkeit“ die Definition schwerer zu erfassender Begriffe gewählt und einmal angenommen, dass den Schülern mitgeteilt wurde, eine Funktion f(x) sei an einer Stelle $x_0 = p$ genau dann stetig, wenn gilt, dass der Funktionswert von x beliebig wenig von f(p) abweicht, sobald x hinreichend nahe bei p liegt. Gefragt ist nach einer korrekten schulmathematisch-prädikatenlogischen Definition für die Stetigkeit an dieser Stelle und weitergehend für eine geschlossene Menge an x-Werten, in der sich auch p befindet.

Schon die erste Überlegung, dass der Aufbau der Stetigkeitsdefinition mit einer Abstandsdefinition auf der y-Achse beginnen muss, obwohl vordergründig „$x_0 = p$“ genannt ist, wird es „etwas in sich haben“. Zu bestimmen ist zunächst ein Abstand zwischen einem variablen Funktionswert f(x) und einem festen Funktionswert f(p), der beliebig klein werden kann, d. h. *alle* zuvor gesetzten Grenzen $\varepsilon > 0$ zu unterschreiten vermag:

$$(f(x)-f(x)) < \varepsilon.$$

Existiert nunmehr mindestens ein x, das stets, demnach in allen ε-Bereichen, hinreichend nahe bei p liegt, also eine zweite Grenze $\delta > 0$ unterschreitet: $(x - p) < \delta$, so ist die Funktion genau dann bei p stetig, wenn diese Konstellation immer zu $(f(x) - f(p) < \varepsilon)$ führt. Symbolisch heißt das:

$$\forall(\varepsilon > 0)\ \exists\ (\delta > 0)\forall(x)(wenn(x - p) < \delta,\ dann\ (f(x) - f(p)) < \varepsilon).$$

Damit wäre der auf ein festes p bezogene erste Schritt bewältigt, der nunmehr für alle Punkte einer vorgegebenen Grundmenge gelten soll, so dass noch ein zweiter Alloperator erforderlich ist. Doch wo müsste er platziert werden? Hierauf könnte man antworten, dass dies nicht nach dem Existentialoperator möglich ist, da ja die x_0 die δ-Beziehung in unterschiedlicher Form erfüllen dürfen. Vor ε geht es aber auf keinen Fall, und so wäre $\forall(x_0 \in$ der Grundmenge an zweiter Stelle einzugliedern, womit vier Operatoren untergebracht worden sind. Mit dieser klaren Definition, die viel Denkarbeit von den Schülern verlangte, lässt sich für beliebige Funktionen prüfen, ob sie (irgendwo) stetig sind, und so läge ein erster Zusammenhang vor, der den Weg in die Höhere Mathematik öffnet. Dort ist diese Definition stets vonnöten, während in der Schulmathematik bei einfachen Beispielen die Anschauung ausreichend sein kann: Am Bild der Funktion $f(x) = x^{-1}$ zeigt sich sofort, dass sie zwischen 0 und 1 stetig ist, denn ein δ mit der beschriebenen Eigenschaft ist augenscheinlich für jedes x_0 zu finden, nur ist es, je mehr man sich der Null nähert, immer kleiner zu wählen.

Manche Funktionen bieten noch größere Vorteile: Die Funktion $f(x) = \sqrt{x}$ erlaubt es, mit einem und demselben δ ihre Stetigkeit zwischen 0 und 1 nachzuweisen, die Funktion $g(x) = x^{-1}$ dagegen nicht. Wir wollen von „gleichmäßiger Stetigkeit" sprechen, und der Beweis, dass eine Funktion diese Eigenschaft besitzt, ist nicht mehr über die Anschauung zu führen. Für die neue Definition reicht es (zum Glück) aus, in einer mengenbezogenen Stetigkeitsdefinition den zweiten Alloperator und den Existentialoperator umzustellen, doch die oftmals in die Pro- und in die Kontrabeweise eingebauten (Mausefallen-)Annahmen halten wohl die meisten Gymnasien davon ab, die gleichmäßige Stetigkeit zu behandeln. Schon die Begründung, dass die benannte Definitionsänderung allein hinreichend ist, verstehen die Schüler nicht von vornherein: Die immer wieder gegebene Lesart

> „Für alle ε gilt, dass es ein δ gibt, so dass für alle x_0 der Grundmenge …"

drückt unseres Erachtens sowieso den Sinn der Anordnung der Operatoren verzerrt aus, denn die Gültigkeit von ε wäre stärker abzuheben. Das lässt sich erreichen, indem

„ε ist in jeder positiven Größe möglich“

vorgeschaltet und danach mit

„Es gibt ein δ …“

begonnen wird.

Das letzte Wort zu dieser Problematik wird es nicht sein. Zumindest bestätigt sich aber, dass die Schwierigkeitsgrenzen der Schulmathematik unter Einbeziehung der Verständlichkeit der umgangssprachlichen logischen Operatoren etwas objektivierter abgesteckt werden können.

4.2.2.2 Logische Termini und synthetische Termini

Wir haben im ersten Kapitel die Termini in Subjekte und Prädikate untergliedert, ohne die Besonderheit des Verhältnisses zwischen den Objekten, die die beiden Begriffe bezeichnen, betont zu haben. Dafür waren noch nicht alle Voraussetzungen gegeben, doch ist das jetzt nachzuholen. Denn sie stehen nie isoliert nebeneinander, sondern sind immer derart miteinander verbunden, dass die Wahl eines Prädikats zu einer bestimmten Menge an Subjekten führt, die *eindeutig* dem Prädikat zugeordnet sind, dass aber die Umkehrung der Zuordnung nicht eindeutig ist. Es ist eine funktionale Beziehung, die den Schülern begrifflich in der Mathematik bekannt geworden ist, und wir schließen uns wie die meisten Logiker dieser Terminologie an. Als Beziehungsausdruck gehört „Funktion“ ebenfalls zu den Prädikaten, doch ausgerichtet auf sprachliche Ausdrücke und daher als Prädikat zweiter Stufe zu verstehen.

Mit diesem Begriff steigen wir in eine neue Gliederung der Termini ein, die immer wieder genutzt wird. Wir wollen unter Beachtung ihrer Zwecksetzung *logische Termini* von *synthetischen* unterscheiden. Bei logischen Termini verfolgt die innere Funktionsbeziehung logische Zwecke, wie es z. B. bei „Aussage“ der Fall ist. „Funktion“ selbst geht darüber hinaus, ist aber trotzdem insofern ein zutiefst logischer Begriff, weil er nur in der Logik allseitig untersucht wird. Damit nimmt er ungefähr die gleiche zentrale Position wie der Begriff „Identität/Gleichheit“ ein, der zwar eine bedeutende philosophische

Wurzel hat, aber unabhängig davon gerade in der Schulmathematik mit der stark bevorzugten Verwendung von Gleichungen wohl der wichtigste logische Begriff ist.

Die überwiegende Mehrheit der Termini hat synthetischen Charakter, womit diejenigen benannt seien, deren Inhalt von den Nachbarwissenschaften bestimmt ist oder im täglichen Leben eine Rolle spielt. In der Regel sind die synthetischen Begriffe nur zur Illustration von Beispielen von Interesse, doch wir haben schon einige von ihnen kennengelernt, die den Wahrheitswert einer Aussage verunsichern und daher erhöhte Beachtung verdienen. Für die Schulmathematik nicht unwichtig ist z. B. der Terminus „suchen", der zu den Lieblingsausdrücken der Schüler gehört, um ein wenig zu beschönigen, dass sie die Aufgabe nicht gelöst haben. Der Lehrer sollte sich, wenn es irgend möglich ist, sich damit nicht zufrieden geben, sondern durch Nachfragen nach den benutzten Suchmethoden dem fast leeren Begriff mehr Gewicht verleihen. Es wird sich zeigen, dass oft gar nicht angefangen wurde, geistige Kraft zu investieren.

Weitere Einzelheiten zu den Termini bleiben vorerst ungenannt. Nur bei Gelegenheit werden sie herangezogen.

4.2.2.3 Aussagen

Nach kurzer Darlegung der logischen Operatoren und der Termini können nunmehr die Aussagen, die diese beiden Sprachobjekte in sich vereinigen, verständlich erörtert werden. Mit ihrer bestimmenden Eigenschaft, einen Wahrheitswert zu besitzen, sind sie für die Logik der wichtigste Gegenstand und werden auch nach diesem Überblick im Mittelpunkt bleiben, unter vorrangiger Beachtung allgemeinerer mathematischer Aussagen bis hin zu den Lehrsätzen und Definitionen der Mathematik, soweit sie im Unterricht zu behandeln sind.

Als erstes wollen wir auf die schon erwähnte Besonderheit eingehen, dass mathematische Aussagen sich in zweierlei Form gewinnen lassen: als Ableitung aus den Axiomen der Höheren Mathematik mittels eines der konstruierten logischen Kalküle oder unter Zuhilfenahme der Anschauung und ausgewählter anderer mathematischer Aussagen mittels der umgangssprachlichen logischen Operatoren, wobei im letzteren Fall der Beweis in der Regel IRGENDWO beginnt. Diese Form beherrscht die Schulmathematik.

Zur Erläuterung sei der berühmte Beweis genannt, dass die Winkelsumme im Dreieck 180° beträgt, dessen Ausgangspunkt für die Schüler die auf unbekannte Weise geborene Idee (des Lehrers) ist, eine Parallele zu einer der Dreiecksseiten zu ziehen, woraus dann sehr schnell alles andere folgt: Durch die Parallele sind u. a. sogenannte Wechselwinkel entstanden, die die Schüler per Anschauung als gleich groß mit jeweils einem der Dreieckswinkel anerkennen und für die sie – wieder per Anschauung – zustimmen, dass ihre Addition mit dem dritten Dreieckswinkel derart gedeutet werden kann, dass die zugehörigen Seiten die gleiche Richtung wie die der Parallelen ergeben. Gemäß unserem Zahlensystem darf dann davon gesprochen werden, dass die drei Winkel zusammen 180° umfassen, womit der Beweis vollendet wäre.

Unbewiesen fügen wir hinzu, dass man aus den Axiomen heraus auch zu diesem Ergebnis kommen müsste, doch reicht es nicht aus, den bis dahin gleichbedeutenden Satz

> „Für alle x, y, z gilt: Wenn x, y und z die Innenwinkel eines Dreiecks sind, umfassen sie zusammen 180°“

In die zur ersteren Methode gehörende klassisch logische Form

> „∀*(x)*∀*(y)*∀*(z)* gilt: V(= vereinigt zur Dreieckswinkelsumme)(x,y,z) seq W/180° (= 180° umfassende Winkelsumme)(x,y,z)“

umzuändern, da „seq“ weniger Bindungsstärke hat. Zu fragen wäre vielmehr, ob bzw. wie durch komplizierte Umformungen sich ein Weg dorthin finden lässt, der zu einer gleichmächtigen Aussage führt. Derzeit ist davon nicht viel zu sehen. Auch die Mathematiker begnügen sich meist mit dem schulmathematischen Beweis, wogegen selbstverständlich nichts eingewendet werden kann. Doch der sofortige Übergang zu kalküllogischen Operatoren bleibt unkorrekt. Oft ist es wirkungsmäßig unbedenklich, wenn beide Versionen wahr sind, aber unser Einführungsbeispiel zeigt, dass unbegründet gleichgesetzte ähnliche Operatoren nicht unbedingt das Gleiche beinhalten, so dass widersprüchliche Wahrheits- oder Gültigkeitsbewertungen entstehen, die es (eigentlich) gar nicht gibt und deshalb unberechtigt *paradox* genannt werden. Im nächsten Abschnitt wird noch mehr zur Beziehung zwischen den Logiksystemen zu sagen sein.

Zweitens sollen in Analogie zu den Termini logische und synthetische Aussagen unterschieden werden, eine Unterteilung, die für die Schlussverfahren noch bedeutsam wird. Als Beispiele seien die Aussagen

> „Wenn ((Wenn A, dann B) und A), dann B"

und

> „Wenn (A und B), dann C"

verglichen. Die erstere kann nie falsch werden: Allein der gewählte Aufbau der eingesetzten logischen Operatoren verhindert dies, und deshalb bezeichnen wir sie als *logische Aussage*. Ihre Fragestellung geht deshalb *nicht* darauf, *ob* sie *wahr* sind, *sondern* dahin, *was* sich logisch ergibt, *wenn* sie belegt ist. Der Wahrheitswert der anderen Aussage hängt dagegen, wie auch ohne Veranschaulichung leicht festzustellen ist, von der Belegung ab, weswegen wir von einer *synthetischen Aussage* sprechen.

Genauer hätten wir zur zweiten Aussage betonen müssen, dass *aus logisch-strukturellen Gründen* der Wahrheitswert nicht feststeht, denn es gibt synthetische Aussagen – wenigstens wollen wir den Namen beibehalten –, die vom Inhalt her nicht falsch werden können, wobei dieser von den sprachlich verarbeiteten Erscheinungen der realen Welt oder von geistig-abstrakten nichtlogischen Äußerungen wie denen der Mathematik bestimmt wird. Zu den letzteren gehört unser bekanntes Beispiel

> „Wenn eine Zahl durch 2 und durch 3 teilbar ist, dann ist sie auch durch 6 teilbar",

dessen durchgängige Wahrheit nur inhaltlich-mathematisch begründet ist: Es ist die partielle Konkretisierung eines mathematischen Gesetzes. Wir werden darauf noch einmal zurückkommen.

Ein dritter allgemeiner Problemkreis betrifft die Frage, ob es in der Schulmathematik vertretbar ist, die Wahrheit der einen oder anderen synthetischen Aussage nur in struktureller Sicht zu begutachten. Dahinter verbirgt sich, ob die in der Alltäglichkeit eingeräumte Möglichkeit, eine Aussage mitunter adjunktiv oder konnektiv verstehen zu können, auf die Schulmathematik übertragen werden darf. Das bereits herangezogene Beispiel Reichenbachs

> „Der Patient stirbt, oder er wird durch eine Operation gerettet“[138]

lässt sich als eine solche adjunktive Disjunktion interpretieren, wonach „(w-w) = w“ (Tod und rettende Operation) logisch möglich ist, aber nicht biologisch. In konnektiver Sicht ist diese Möglichkeit dagegen immer gegeben, doch wird von ihr die Realerwägung für „kein Tod – Operation“ und für „Tod – keine Operation“ verlangt, obwohl nur eine der beiden Varianten eintreten kann. Sollte die Schulmathematik dem folgen und ebenfalls großzügig sein, würde sie unsinnige Aussagen wie

> „Es gilt der Pythagoras oder der Winkelsummensatz“

erlauben, die bei den Schülern sicher höchstens die Frage auslösen, warum denn nicht beide Sätze richtig sind. Daher dürfte es zweckmäßiger sein, nach Erwägung beider Interpretationen unabhängig zu entscheiden, welche am zweckmäßigsten ist.

Als letzte übergreifende Frage sei noch einmal kurz darauf verwiesen, dass in die Lösungssuche für die ins Auge gefassten Probleme alle sprachlichen Ausdrucksmöglichkeiten, soweit sie jeweils verwendungsfähig sind, einbezogen werden. Dabei denken wir sowohl an prinzipielle Unterscheidungen wie die in indikative und konjunktive Aussagen oder in regelgebundene und zufällige Aussagen als auch an speziellere Gliederungen wie die in modale, zeitliche, deontische und epistemische Aussagen. Die wichtige, aber etwas vernachlässigte und nicht mehr gesondert ausgewiesene pragmatische Hauptseite der Sprache wäre damit überhaupt nicht vergessen, sondern, obwohl zersplittert, in neuer Form vollständig berücksichtigt.

4.2.2.4 Logikdouble und Sprachwahl

Die für uns bestmögliche Skizzierung der inneren Struktur unseres logischen Systems der Schulmathematik kann noch nicht abgeschlossen werden, da weiterhin

[138] Reichenbach, ESL, S. 28; vgl. Abschnitt 2.3.2.

offen ist, wie die zurückgestellte zentrale Frage nach der wissenschaftlichen Gleichmächtigkeit der auf logisch unterschiedlichen Wegen gefundenen schulmathematischen Erkenntnisse zu beantworten ist[139]. Das Hauptproblem besteht dabei nicht schlechthin in der Unterschiedlichkeit der beiden logischen Systeme, vielmehr in der *gestuften Bindungsstärke* ihrer logischen Operatoren. Die Frage ist, wie mehrfach betont, unseres Erachtens ohne Berücksichtigung mathematischer Besonderheiten nicht lösbar. Bekannt ist bereits, dass Cantors Mengenlehre sich auf gleicher Abstraktionsstufe wie Freges Kalkül befindet und Zermelo über Peanos Axiome die reellen und komplexen Zahlen in die Mengenlehre eingliederte. Mathematik lässt sich nun als eine ihrer Konkretisierungen bzw. ihrer Teilmengen begreifen, so dass die mit der Struktur der Mengenlehre verbundene Kalküllogik[140] auch zu Aussagen gelangen kann, deren Inhalt mathematisch nicht definiert ist. So ist es durchaus möglich, dass die im Einführungsbeispiel als kalkülmäßig erschlossen genannte Konklusion keine sinnvolle mathematische Belegung besitzt und von daher unbeachtet bleiben darf. Für die dortige Aussage

„(durch 2 und 3 teilbar) seq (durch 6 teilbar)“

stellt die Matrix der Kalküllogik sieben „Wahr“-Möglichkeiten zur Verfügung, von denen drei aber mathematischen Definitionen widersprechen: w-f-w, f-w-w und f-f-w. An der Wahrheit der Aussage ändert sich aber gar nichts, denn schon eine Möglichkeit hätte dafür genügt.

Diese Überlegungen dürften so zu deuten sein, dass die Mathematik stärker als Mengenlehre und Logikkalkül von der Umgangssprache beeinflusst wird, und daher werden wir die einengende Funktion der Mathematik weiterverfolgen. Sie erlaubt zunächst als erhofften Gewinn den Existenzbeweis, dass bestimmte schulmathematische Aufgaben gleichwertig auf zwei Wegen gelöst werden können.

Genauer ausgedrückt, hat mit Ackermann einer der ganz großen Logiker und Mathematiker geholfen, indem er sprachlich sehr korrekt vorging: Gleich anfangs geht er im Standardwerk *Grundzüge der theoretischen Logik* auf die übliche Wenn-dann-Problematik ein und stellt eindeutig fest, dass der Operator „seq“ von ihm

139 Vgl. Abschnitt 2.3.3.

140 Darunter seien abkürzend die von Boole und Frege konstruierten Systeme verstanden.

nur im Sinne der offiziellen Definition verwendet wird[141], so dass seinem Vorgehen vertraut werden kann. In mehreren Beispielen formt er gewöhnliche schulmathematische Formulierungen in *gleichwertige* prädikatenlogische Ausdrücke um, und wir greifen eine konkrete schulmathematische Gleichung heraus, in der das additive Assoziativgesetz eine Rolle spielt[142].

Die Gleichung lautet in der Sprache der Schüler

„a + (b +1) = (a + b) + 1"

und stellt eine Beziehung zwischen den Subjekten „a", „b", "1" und den Prädikaten „+", „=" her. Da „+" eine Funktion von zwei Variablen ist, ergibt sich bei gegebenen „a" und „b" immer ein eindeutiges Ergebnis. Das Additionsprädikat (Ad) „x + y = z" bzw. „x + y = u" ist dreistellig und werde mit „Ad(x,y,z)" bzw. „Ad(x,y,u) bezeichnet, wozu als Teilausdruck das Gleichheitsprädikat gehört. Der funktionale Charakter des Prädikats „Ad" wird dann wie folgt erfasst:

∀(x,y,z,u)((Ad(x,y,z) et Ad(x,y,u)) seq (z = u)).

Wenn „z" nun (bezogen auf die konkrete Gleichung) das Ergebnis der Addition von „y/b" und „1" ist, „u" das Ergebnis der Addition von „x/a" und „z" sowie „v" das Ergebnis der Addition von „x/a" und „y/b", so ist „u" auch das Ergebnis der Addition von „v" und „1":

∀(x,y,z,u,v)((Ad(y,1,z) et Ad(x,z,u) et Ad(x,y,v)) seq Ad(v,1,u)).

Diese Umschreibung ist die klassisch-prädikatenlogische Form der gegebenen Gleichung, so dass die Ausdrücke ausgetauscht werden können: Beide Sprachen sind legitim. Doch es dürfte offensichtlich sein, dass die letztere Form für Schüler eine Zumutung ist. Die eindeutige Verkomplizierung bestärkt uns deshalb in dem Vorschlag, dass der Mathematikunterricht auf der Basis logisch verfeinerter Methoden neben der mathematischen Symbolik weitgehend den umgangssprachlichen logischen Operatoren und begrifflichen Texten folgen sollte.

141 Ackermann, Theoretische Logik, S. 5.

142 Ackermann, Theoretische Logik, S. 71–73. Das Beispiel selbst auf S. 73.

Dieses wichtige Ergebnis besagt noch nicht, dass ein solcher Sprachwechsel immer möglich ist. Ein Einzelfall ist es aber auch nicht. Um das zu begründen, ziehen wir noch einmal Ackermann heran[143]. Ob seine damalige *Wertung „meist" für die Zahl der Mathematiker* ohne formalisierte Logik, weiterhin zutrifft, kann ich nicht beurteilen, aber meine Beobachtungen lassen Häufigkeit erkennen. Gegen unsere zunächst geäußerte Unsicherheit und gegen Ackermanns Schweigen darf nunmehr wohl die Erklärung gewagt werden, dass sich dahinter die Berechtigung beider skizzierter Hauptwege verbirgt, von denen der eine jedoch wie gewohnt mit nicht geringen logisch-intuitiven Zusätzen wahrgenommen wird.

Eine allgemeinere Begründung steht allerdings weiterhin aus. Im Versuch, sie zu finden, sei der Blick vor allem auf Peanos Wortwahl für die Axiome von 1889 und auf die Zermelos bei deren Eingliederung in sein mengentheoretisches Axiomensystem von 1908 gerichtet. Beide Leistungen vollzogen sich gemäß den von mir eingesehenen Originalformulierungen nicht in konsequent logisch-adjunktiver Struktur, sondern unter Aufnahme noch nicht genauer erforschter konnektiver Verknüpfungen. Die durchgängige Adjunktivität war ein späteres Ergebnis und konnte aus den schon erwähnten Gründen nicht zu Fehlern führen, wohl aber zu mathematisch unsinnigen Erweiterungen. Ein sofortiger Stopp mit Rückkehr in strengere, konnektiv geprägte mathematische „Gefilde" war danach als Korrektur nie ausgeschlossen, so das unter vorübergehender Ausschaltung der Adjunktivität alle schulmathematischen Zusammenhänge erreichbar wären.

Soweit ein erster Erklärungsversuch, der mit Gewissheit ergänzungsbedürftig ist. In diesem Sinne sei anschließend die Logik in ihrer folgerichtigen Eigenbewegung in Angriff genommen.

4.3 Logische Schlussregeln

Die nunmehr darzustellende „Regellogik" ist für alle Fachleute der wichtigste Bereich der Logik und für viele fast oder überhaupt ihr einziger Inhalt. Sie untersucht die wahrscheinlich interessanteste Eigenheit einer Sprache, *wie* man durch logisches Denken, d. h. ohne zusätzliche Informationen verarbeiten zu müssen, von dem vorhandenen Wissen aus zu neuen Erkenntnissen gelangt. In allen sozialen

[143] Ackermann, Theoretische Logik, S. 111.

Kreisen eines Volkes und auch bei den Schülern findet diese Fähigkeit deshalb große Anerkennung. Sie begleitet die Menschen, seitdem sie existieren, und so haben sie im Laufe der Jahrtausende von Generation zu Generation es mehr verstanden, logische Regeln im Prinzip intuitiv richtig zu nutzen. Diese Intuition war und ist aber vor Fehlern sowie Unterlassungen nicht gefeit, und ihre Korrektur ist oft nur für den Augenblick möglich, da die umgangssprachlichen logischen Regeln bis heute unter den Logikern umstritten oder den übrigen Menschen unbekannt sind. Es ist deshalb sehr wichtig, sie in einem neuen Versuch weiter zu erkunden und sie besonders Schülern zur Anwendung in ihren Schulfächern nahe zu bringen.

4.3.1 Die Bedeutung logischer Schlussregeln

Die relative Vertrautheit mit logischen Regeln hat im Mathematikunterricht mit seinen vielen Neuigkeiten und fachlichen Schwierigkeiten offenbar dazu geführt, dass die Schüler (und die Lehrer ebenfalls) bei ihren logischen Kombinationen fast nur die damit verbundenen mathematischen Veränderungen erwähnen, so dass es bald so aussieht, als ob man die Logik gar nicht brauchte. Dieser Eindruck täuscht allerdings, und daher soll an einem bekannten Beispiel gleich einleitend gezeigt werden, wie vermutlich ein „normaler" Mathematikunterricht abläuft und wie bei Explizierung der *logischen Schritte* der Lösungsvorgang viel verständlicher wird.

Die Aufgabe hat als Prüfung für Aufnahmen an Gymnasien oder Universitäten in Deutschland eine gewisse Berühmtheit erlangt, wird aber immer wieder von einem Großteil der Kandidaten nicht gelöst.

Zunächst das wohl übliche Erklärungsmuster:

Prämissen:

1. Melone mit 1,0 kg Gewicht, bestehend aus 90 % Wasser und festem Kern (x).
2. Abnahme des Gewichts (y) auf 80 % Wasser bei unverändertem Kern.

Frage:

Wie schwer ist die Melone nach der Abnahme?

stille Voraussetzung:

3. Kenntnis der Gewichtsmaße
4. Kenntnis der elementaren Rechenregeln bis zur Prozentrechnung

5. Kenntnis der für Gleichungsumformungen gültigen Regeln
6. Kenntnis der Abtrennungsregel:
Aus den Aussagen „Wenn A, dann B“ und „A“ (abgetrennt von „wenn A, dann B“) folgt „B“.

Ausrechnung: Aus 1., 4., 5. und 6. folgt:

7. 90 % = 900 g (math. Beziehung)
Aus 4. folgt (bei 2 Bestandteilen):
8. 1000 g = 900 g + x g
Aus 5. folgt:
9. x g = 1000 g – 900 g
Aus 4. folgt:
10. 1000 g – 900 g = 100 g
Aus 5., 9. und 10. folgt:
11. Wenn (x g = 1000 g – 900 g) und
(1000 g – 900g = 100 g), dann x g = 100 g
Aus 6. und 11. folgt:
12. x g = 100 g
Aus 2., 3. und 4. folgt:
13. 80 % = 0,8y g (math. Beziehung)
Aus 4. folgt (bei 2 Bestandteilen):
14. y g = 0,8y g + 0,2y g
Aus 2. folgt:
15. x g = 0,2y g
Aus 5., 12. und 15. folgt:
16. 0,2y g = 100 g
Aus 5. und 16. folgt:
17. y = 500 g
Antwort: Die Melone wiegt nach der Abnahme 0,5 kg.

So ungefähr könnte ein guter Lehrer heutzutage die Aufgabe erläutert haben. Bis auf den Begriff „folgt“, der aber gewiss der Mathematik zugeordnet wird, ist jedoch von Logik nichts zu erkennen. Selbst die inzwischen historisch entstandenen intuitiven Ansätze eines systematischen logischen Instrumentariums, wozu eine verkürzte Abtrennungsregel gehören würde, werden nicht bewusst gemacht, so dass sehr wahrscheinlich kein Schüler nach der Erläuterung sich auch „logisch“ unterrichtet sieht. Wir wollen deshalb versuchen, dies schrittweise nachzuholen, indem wir die Strukturveränderungen intuitiv logisch und nicht von der Mathematik her entwickeln:

Was teilt die Aufgabe mit? Was will sie vom Schüler wissen? Die erste Erkenntnis dürfte für die Schüler sein, dass die Prämissen unsystematisch (= wirr?) angelegt sind. Sie zunächst in ihre Einzelheiten zu zerlegen ist nicht gefordert und wäre auch nicht die einzige Möglichkeit, da man z. B. mit einer herausgegriffenen Einzelfrage beginnen könnte (wovon wohl viele Schüler Gebrauch machen). Den etwas verborgenen Oder-Charakter der Gesamtfrage zu explizieren ist schon Logik, und sie setzt sich fort in der Aufreihung der Einzelheiten, ohne dass Überschneidungen entstehen:

Ursprüngliches Gesamtgewicht in kg bzw. g; Gewicht des zugehörigen Wassers, aber in Prozent; Gewicht des unveränderlichen Kerns direkt unbenannt, indirekt in Prozent; Gewicht der neuen Wassermenge in Prozent.

Ist das gelungen, wäre zu fragen, wie sich Zusammenhänge zwischen diesen Einzelheiten finden lassen, wobei ein Weg nur indirekt vorgezeichnet ist und aus verschiedenen Versuchen – in Worten der Logik aus einer Aussage mit mehreren durch „oder“ verbundenen Einzelaussagen – resultiert. Die Versuche bringen „wenn-dann“ und die Abtrennungsregel ins Spiel, mit der logisch schwierigen Aufgabe, die weitere mehrgleisige Stufung angemessen zu deuten und danach unter Einbeziehung der Mathematik eine Schlusskette zu entwickeln, d. h. eine Zeichenfolge, die stets von „wahr“ zu „wahr“ fortschreiten muss und verkürzt wie folgt dargestellt werden könnte:

> Wenn ursprünglich Wasser 90 % von 1000 g, dann 900 g Wasser.
>
> Wenn 900 g Wasser, dann ein Kerngewicht von 100 g.
>
> Wenn Wasser auf 80 % des neuen Gewichts gesunken ist, dann sind 100 g Kerngewicht 20 % des neuen Gewichts.
>
> Wenn 100 g 20 % des neuen Gewichts sind, beträgt das neue Gewicht 500 g.

Mathematisch dürfte die Lösung somit einfach sein. Ihre Schwierigkeit besteht in der Auffindung des Weges, und das ist eindeutig eine logische Schwierigkeit. Sie wäre jedoch im verwendeten Beispiel nicht herausgeschält worden, wenn der

Unterricht wie vermutet stattgefunden hätte. Als *logische* Schwierigkeit ist sie den meisten Lehrern nicht geläufig, da sie die Spezifik der Logik zu wenig kennen. Wäre dies anders, würde es weder die verbreitete „*logische*“ Gleichgültigkeit noch die Sucht nach formalisierten logischen Kalkülen geben. Erst das allseitige Herangehen an logische Fragen, das sämtliche Sprachformen berücksichtigt, wäre in unserem Verständnis ein probates Mittel umzudenken.

4.3.2 Die Umwandlung der logischen Operatoren ineinander

Auch für die Schlussverfahren wollen wir den induktiven Erkenntnisweg beibehalten und von den einfachsten Schlüssen her ein System schulmathematisch nutzbarer Verfahren entwickeln, das dann in Einheit mit den zugehörigen und schon untersuchten logischen Eigenschaften und Relationen in der Gesamtbilanz als unseren Vorschlag für eine Logik der Schulmathematik erscheint.

Der Begriff „einfachste Schlüsse“, den wir gerade benutzten, ist wissenschaftlich nicht definiert, so dass in freier Wahl einige sprachliche Beziehungen hier nicht unter diesen Begriff fallen sollen, die verschiedentlich anderen Logikern dafür noch beachtenswert sind. Dazu zählen vor allem elementar-symmetrische Kommutationen wie

„(p und q) = (q und p)“ oder „(nicht p oder nicht q) = (nicht q oder nicht p)“,

die selbstverständlich gegenseitig erschließbar sind, und einige nicht umkehrbare Schlüsse wie

„Aus ‚p und q‘ folgt ‚p‘“.

Auch Schüler mit schlechten Leistungen fühlen sich u. E. ein bisschen verhöhnt, wenn derart *nichtige* Weisheiten in mathematischen Beispielen präsentiert werden. Wir verzichten deshalb darauf, müssen aber eine Ausnahme zulassen, die den unsymmetrischen Operator „wenn-dann“ betrifft. Für ihn gilt die Gleichung

„(Wenn p, dann q) = (wenn q, dann p)“

nicht, so dass er sich in die obigen Nichtigkeiten nicht einordnet und nicht unschwierig ist. Da er sowieso mehrere Varianten enthält, die Einfluss auf die Schwierigkeiten haben könnten, gliedern wir seine Innenbeziehungen in den nächsten Abschnitt ein, der recht ähnliche Probleme behandelt.

Die folgenden Ausführungen setzen den Folgerungsbegriff und die Kenntnis der Abtrennungsregel voraus. Für Schlussverfahren verwenden wir die Ausdrücke „gültig“ und „ungültig“; im Übrigen sind Aussagen für uns wahr oder falsch.

4.3.2.1 Die Umformungen der aussagenlogischen Operatoren

a) Die Beziehungen zwischen „und“ und „oder“ (Morgansche Regeln)

Die Umwandlungen tragen ihren Namen nach dem englischen Mathematiker Augustus de Morgan, der im 19. Jahrhundert lebte und sich an den umgangssprachlichen Normalformen („Urbedeutungen“) orientierte. Danach gelten folgende Äquivalenzen zwischen „und“ und „oder“:

> „(p und q)“ äquiv. „(nicht (nicht p oder nicht q))“.
> „(p oder q)“ äquiv. „(nicht (nicht p und nicht q))“.

Das Umformungsgesetz beinhaltet die Verneinung der gesamten Oder- bzw. Und-Aussage und die Verneinung beider Einzelaussagen.

Mit Hilfe der Wahrheitstafel lässt sich unkompliziert nachweisen, dass für adjunktive „und“ und „oder“, die sich von den „Urbedeutungen“ nicht unterscheiden, die Äquivalenzen Tautologien sind, woraus sich die Berechtigung zum Schließen ergibt.

Anders sieht es aus, wenn die in der Schulmathematik vorherrschenden konnektiven Beziehungen berücksichtigt werden. Dazu ein erstes einfaches Beispiel:

> Prämisse: Zur vorliegenden waagerechten Tangente gehört ein Extrempunkt (p), oder es gehört zu dieser Tangente ein Sattelpunkt (q).
> Konklusion: Es ist nicht wahr, dass zur vorliegenden waagerechten Tangente kein Extrem-Punkt (nicht p) und (auch) kein Sattelpunkt gehört (nicht q).

(Verständlicher, aber gleichbedeutend:
Es ist nicht wahr, das zur vorliegenden waagerechten Tangente weder ein Extrempunkt noch ein Sattelpunkt gehört.)

Formalisiert ergäbe sich: Aus „(p oder q)“ folgt „nicht (nicht p und nicht q)“.

Dieser Schluss müsste akzeptiert werden. Doch wie steht es mit der Umkehrung?

Die obige Konklusion konzentriert sich allein darauf, dass „nicht p und nicht q“ falsch ist und lässt *neutral* offen, welcher der drei möglichen „w“-Werte gilt. Es ist nicht erkennbar, dass im konnektiven „oder“ der ursprünglichen Prämisse eine Belegung für „w-f“ und eine Belegung für „f-w“ gefordert wird. Die obige Prämisse verlangt demnach mehr als die obige Konklusion, so dass ein Schluss von der letzteren Aussage zur ersteren die für Schlüsse geltende Entailment-Forderung verletzen würde. Ein Schluss wäre demnach ungültig.

Die zunächst vorgestellte Schlussrichtung wird dagegen zu Recht akzeptiert. Denn die Matrix der Konklusion erfüllt mit ihrem neutralen „oder“ bei den „f“-Werten, dass sie weniger Bedingungen stellt als die Prämisse, so dass von Entailment gesprochen werden darf.

Die Gültigkeit zumindest einer Morganschen Regel ist wegen der fehlenden Äquivalenz allerdings erschüttert, auch wenn sich das praktisch kaum auswirken wird, weil die Schüler wohl nicht die komplizierte doppelte Verneinung zur Prämisse nehmen. Als Mittel logischer Ausbildung, wozu die Entzifferung der logischen Spezifik natürlicher Sprachäußerungen gehört, hat diese Morgansche Regel jedoch keinen geringen Wert. Denn der nicht-äquivalente Charakter des Beispiels ist nicht leicht erkennbar, so dass ein Lehrer, der ihn mit Hilfe der Schüler herausarbeiten lässt, wertvolle Denkschulung geleistet hat. Anderen Umformungen ergeht es in schulmathematischen Zusammenhängen ähnlich, womit sich schon auf dieser einfachen Ebene ein breites Feld logischer Übungen ergibt.

Die beobachtete Abweichung von der klassisch-gültigen Morganschen Regel erwuchs aus der Umformung ungeklammerter Oder-Aussagen, und so wäre zu fragen, ob die andere Grundform, in der Und-Aussagen ungeklammert benutzt werden, ebenfalls zu diesem Ergebnis führt.

Als Beispiel sei gewählt:

Prämisse: Das Bild der Funktion „$f(x) = x^2$“ hat einen wechselnden Anstieg (p) und einen Extrempunkt (q).

Konklusion: Es ist nicht wahr, dass das Bild der Funktion „$f(x) = x^2$" keinen wechselnden Anstieg (nicht p) oder keinen Extremwert (nicht q) hat.

(Verständlicher, aber gleichbedeutend:
Es ist nicht wahr, dass das Bild der Funktion „$f(x) = x^2$" eine der beiden Eigenschaften nicht hat.)

Formalisiert ergibt sich: Aus „p und q" folgt „nicht (nicht p oder nicht q)".

Die Prämisse nennt sachlich ohne mögliche „Hintergedanken" zwei Eigenschaften der Funktion $f(x) = x^2$, so dass ein adjunktives „und" vorliegt. Für die Einordnung der Konklusion greifen wir zunächst die eingeklammerte Aussage heraus. Wer sie als wahr ansieht, rechnet mit *zwei* mathematischen Möglichkeiten, die *beide* eintreten können, ohne dass bekannt ist, ob es um den wechselnden Anstieg bzw. um den Extremwert geht. Die Verknüpfung „oder" versteht sich somit als konnektiv. Dieser Sinn wird nun durch das globale „nicht" beseitigt. Es ist nicht so, dass von zwei vorhandenen Eigenschaften die eine oder andere fehlen darf: Beide Eigenschaften sollen zur Funktion $f(x) = x^2$ gehören, wie es sachlich richtig ist. Die Konklusion besagt daher dasselbe wie die Prämisse, so dass die Aussagen äquivalent sind und das Recht besteht, in beide Richtungen zu schließen. Das globale „nicht" der Konklusion hat nicht nur den Wahrheitswert der eingeklammerten Aussage verändert, sondern auch mit dieser Veränderung deren Konnektivität als nicht mehr gültig erklärt. Die Konklusion ist zu einer adjunktiven Aussage geworden.

Die beiden Grundformen der Morganschen Regeln beruhen auf entgegengesetzten logischen Prozessen: Im ersten Fall belässt eine konnektive Prämisse die Adjunktivität der Konklusion und verhindert damit den Rückschluss; im zweiten Fall „erzwingt" die adjunktive Prämisse eine adjunktive Konklusion und ermöglicht dadurch beidseitige Schlussmöglichkeiten. Die Morganschen Regeln sind demnach bei schulmathematischen Anwendungen nicht durchgängig als Äuivalenzen einsetzbar, und sie sollten auf keinen Fall unmodifiziert den Schülern erklärt werden. Vielleicht ist es sogar besser, die klassisch-logische Form gar nicht zu erwähnen. Auf „unmodifiziert" könnte dann verzichtet werden, und die Schüler besäßen nur die Variante, die sie für die Schule und ihr späteres Leben benötigen.

b) Die Beziehungen zwischen „und" und „wenn-dann"

Die klassisch-logischen Tautologien stehen wieder in ihren Grundformen am Anfang:

> (p et q) äq non (p seq (non q))
> (r seq s) äq non (r et (non s)).

Die Äquivalenzen lassen sich als umkehrbare Schlussbeziehungen interpretieren, so dass zu fragen wäre, ob auch die umgangssprachlichen Analogien gegenseitige Schlussmöglichkeiten besitzen:

> Folgt aus der Aussage „p und q"
> die Aussage „nicht (wenn p, dann nicht q)" bzw.
> aus der Aussage „wenn r, dann s"
> die Aussage „nicht (r und nicht s)"
> und umgekehrt?

Als Beispiele seien gewählt

> „Das (vorliegende) Dreieck besitzt einen rechten Winkel (p)" und
> „Das (vorliegende) Dreieck besitzt zwei gleiche spitze Winkel (q)" bzw.
> „Das (vorliegende) Dreieck besitzt einen stumpfen Winkel (r)" und
> „Das (vorliegende) Dreieck besitzt zwei spitze Winkel (s)".

Die Prämisse (p und q)

> „Das (vorliegende) Dreieck besitzt einen rechten Winkel und zwei gleiche spitze Winkel"

hat als sachliche Feststellung eines Einzelfalls adjunktiven Charakter, wohin in der Konklusion des ersten Beispiels die globale Verneinung (nicht (wenn p, dann (nicht q))

> „Es ist falsch zu behaupten, dass, wenn das (vorliegende) Dreieck einen rechten Winkel hat, dann nicht zwei gleiche spitze Winkel vorhanden sind"

verallgemeinernd ebenfalls führt. Die Konnektivität der eingeklammerten Aussage drückt hier zunächst aus, dass in irgendeinem (vorliegenden) Dreieck zu einem rechten Winkel nicht zwei gleiche spitze Winkel gehören (können). Wegen der Erhöhung „können", die zum Sprachgebrauch an dieser Stelle gehört, wird darin eine Unmöglichkeit geäußert, die nunmehr „nicht" beseitigt, so dass die Konklusion behauptet, dass *möglicherweise* beide Teilaussagen der Prämisse wahr sind. Diese Verneinung akzeptiert die Umgangssprache als Schlussfolgerung in der üblichen Deutung, dass die Prämisse eine der Möglichkeiten ist, die die Konklusion als wahr benennt[144].

Mit der Verallgemeinerung steht jedoch fest, dass die Schlussumkehrung nicht gilt, da bei jetzt vier Möglichkeiten nicht folgt, dass genau die wahr ist, die herausgegriffen wurde. Umgangssprachlich-schulmathematisch sind die beiden Ausdrücke somit im Unterschied zum logischen Kalkül nicht äquivalent. Ein Extrabeispiel sollte sich jedoch erübrigen, da Schüler kaum versuchen werden, von einer negierten Implikation zu einer einfachen Konjunktion zu gelangen.

Für die Überprüfung der eventuell zweiten Äquivalenz verwenden wir das Schlussbeispiel

> „Wenn ein (vorliegendes) Dreieck einen stumpfen Winkel hat (r), hat es (auch) zwei spitze Winkel (s).

Also ist es falsch zu behaupten, dass das (vorliegende) Dreieck (zwar) einen stumpfen Winkel besitzt, doch nicht (obendrein) zwei spitze Winkel."

Als Implikation verlangt die Prämisse verbal „w-w" und schließt verbal „w-f" aus. Von den nichterwähnten Matrixzeilen wird „f-f" als vorhanden angedeutet: Die einschränkende Bedingung „r" weist darauf hin, dass „s" nicht immer existent ist. Die Prämisse ist daher wahr, und für die Konklusion gilt das Gleiche: Adjunktiv gedeutet, verneint sie, dass im gegebenen Einzelfall die von der Prämisse ausgeschlossene Wahrheitskonstellation vorhanden ist. Offen bleibt dann aber im Unterschied zur Prämisse, die „w-w" und „f-f" fordert, die Verteilung der

[144] Es steht allerdings jedem frei, die metasprachliche Überlegung hinzuzufügen, ob es denn logisch sei, eine Gewissheit, wie sie die Prämisse ausdrückt, in eine Ungewissheit mit mehreren Möglichkeiten zu verwandeln. Daher sollte zusätzlich betont werden, dass für logische Erörterungen im Unterricht Zweck und Kontext möglichst abzuklären wären.

Wahrheitswerte in den übrigen Matrixkonstellationen. Diese „Großzügigkeit" gegenüber der Prämisse beeinträchtigt jedoch nicht die Schlussgültigkeit, da kein Widerspruch entsteht. Wie in der ersten Schlussfigur scheidet der Rückschluss damit allerdings aus: Die Entailment-Forderung wäre verletzt.

In längst nicht allen Beispielen wird „nicht" aber nicht adjunktiv verstanden, sondern im konnektiven Sinne als „nie". Auch das obige Beispiel erlaubt bei Nutzung mathematischer Eigenschaften die „Verschärfung":

> Es wird *nie* sein, dass in einem Dreieck neben einem stumpfen Winkel sich *etwas anderes („nicht")* als zwei spitze Winkel befindet.

Diese Formulierung übt einen Druck auf die Konstellation „w-w" aus, die quasi verlangt wird, wodurch wiederum in konnektiver Wertung ein Rückschluss möglich wird.

Die demonstrierte doppelte Sicht lässt die Beweglichkeit umgangssprachlicher logischer Operatoren erkennen, ist aber keineswegs immer möglich. Wir wählen ein drastisches Beispiel aus dem alltäglichen Leben, das keinen Rückschluss erlaubt:

> Es ist nicht wahr, dass Einstein der Begründer der Relativitätstheorie ist (sein soll) und (aber) Beethoven nicht der Komponist der Oper „Fidelio".

Für eine der drei Möglichkeiten „w-w", „f-w" und „f-f" wird die Aussage als wahr bezeichnet, doch mehr erfahren wir nicht. Es ist eine sinnvolle wahre Aussage, die vielleicht selbst in den oberen Schulklassen nicht immer gleich verstanden wird. Abkürzend wäre in Analogie zu den logischen Kalkülen „Wenn p, dann q" erwägenswert, und ohne Belegung scheinen sich sogar die umgangssprachlichen Aussageformen zu decken[145]. Doch

> „Wenn Einstein der Begründer der Relativitätstheorie ist, ist Beethoven der Komponist der Oper ‚Fidelio'"

145 Aus eigenen Sprachbeobachtungen ergibt sich, dass in Aussageformen oft „nie" hineingelesen wird.

wird als völlig unsinnig empfunden und ist es auch. Diese Aussage schließt „w-f" aus und behauptet damit eine feste Bindung der Teilaussagen aneinander, sobald die erstere erwiesen ist, obwohl die Prämisse davon nichts weiß.

Auch in der Schulmathematik kommen nicht selten entsprechende Aussagenverbindungen vor, in denen nur eine Variante sinnvoll ist. Dazu ein Beispiel:

> Wenn die Lösungen einer vorliegenden Gleichung nicht durch 3 teilbar sind, sind sie größer als 100.

Demnach soll es nicht sein, dass die Lösungen einer vorliegenden Gleichung nicht durch 3 teilbar sind und nicht größer als 100 sind.

Das Beispiel ist etwas komplizierter, da Prämisse und Konklusion nicht direkt erkennen lassen, wie die Wahrheitswerte verteilt sind. In der Aussage

> „Die Lösung einer Gleichung ist nicht durch 3 teilbar und nicht größer als 100"

könnten zunächst alle denkbaren Möglichkeiten eintreten, doch werden, weil die Gleichung so angelegt ist, alle Zahlen bis 100, die nicht durch 3 teilbar sind, als deren Lösung ausgeschlossen. Das bedeutet, sobald die Zahl nicht durch 3 teilbar ist, die Lösung nur noch unter den Zahlen zu suchen, die größer als 100 sind. Dabei spielt eigentlich keine Rolle mehr, ob sie noch durch 3 teilbar sind, doch die Implikation hebt hier unnötig mit „wenn nicht durch 3 teilbar" indirekt die durch 3 teilbaren Zahlen, die größer als 100 sind, hervor und möchte sehen, dass sie belegt sind. Die Konklusion folgt dem nicht ganz, widerspricht aber nicht. Dort finden sich die ausgeschlossenen Zahlen in der generell verneinten Konjunktion wieder, die selbst adjunktiv zu begreifen ist. Ihre Verneinung drückt deshalb drei selbstständige Möglichkeiten als wahr aus: durch drei teilbare Zahlen bis 100 und Zahlen, die 100 überschreiten und durch 3 oder nicht durch 3 teilbar sind. Danach könnte es sein, dass alle Lösungen „jenseits" 100 liegen und nicht durch 3 teilbar sind. Wegen „könnte" ist die Konklusion jedoch nicht verletzt, wenn dies nicht eintritt, wie es ja die Prämisse fordert. Die Konklusion kann sich anpassen, und für dieses Beispiel gibt es keine mathematische Bestimmung, die daran etwas ändert. Die Konklusion schließt im Denkansatz fürs Beispiel mehr Varianten als die Prämisse ein, und daher ist prinzipiell kein Rückschluss möglich.

Soviel zu den Äquivalenzannahmen bei Aussagen, in denen nur „nicht", „und" und „wenn-dann" von Wichtigkeit sind und die trotzdem schon erhebliche, doch bisher kaum beachtete Schwierigkeiten aufweisen.

c) Die Beziehungen zwischen „oder" und „wenn-dann"

Klassisch-logisch gilt:

> (p vel q) äq (non p seq q),
> (r seq s) äq (non r vel s).

Auch diese Äquivalenzen dienen in den logischen Kalkülen als Basis für umkehrbare Schluss-figuren, und es geht wieder darum, ob die umgangssprachlichen Analogien dieselbe Funktion besitzen:

Darf

> „wenn nicht p, dann q"

als Konklusion aus

> „p oder q" bzw. „nicht r oder s"

als Konklusion aus

> „wenn r, dann s"

angesehen werden, und gelten auch die Umkehrungen?

Als Beispiele seien gewählt

> „Die Lösungen einer vorliegenden Gleichung sind durch 3 teilbar (p), oder sie sind größer als 100 (q).
> Also: Wenn die Lösungen (einer v. G.) nicht durch 3 teilbar sind, sind sie größer als 100."

> „Wenn die zum vorliegenden Bild einer Funktion gehörenden Punkte mehr als 5 Einheiten über der x-Achse liegen (r), hat das zugehörige bestimmte Integral einen positiven Zahlenwert (s).
> Also: Die (zum v. B. einer F.) gehörenden Punkte liegen nicht mehr als 5 Einheiten (= höchstens 5 Einheiten) über der X-Achse, oder das (zugeh.) bestimmte Integral hat einen positiven Zahlenwert."

In beiden Schlussfiguren werden „wenn-dann" und „oder" konnektiv verstanden, ohne dass mathematische Festlegungen darauf Einfluss nehmen. Die Schlüsse sind nicht finit.

Zum ersten Beispiel: Die Prämisse zielt auf zwei Möglichkeiten, die jeweils mindestens einmal einzutreten haben und daher erforderliche „w"-Werte sind. Demnach „verbergen" sich zwei unbenannte Existentialaussagen darin. Die eventuelle Konklusion orientiert sich dagegen, wieder verbal betrachtet, nur auf eine dieser Möglichkeiten, indem sie feststellt, dass eine gefundene Lösung, sollte sie nicht durch 3 teilbar sein, größer als 100 sein muss. Es geht sprachlich allein um „f-w", das unbedingt zu gewährleisten ist, so dass die Konklusion, gemessen an den geäußerten Worten, weniger verlangt als die Prämisse. Der Schluss ist eindeutig gültig. Zwei Wahrheitsbeziehungen sind aber außerhalb des implikativen Ausdrucks geblieben, und so hängt die Gültigkeit des Rückschlusses davon ab, ob der Lehrer meine Version, dass bei „wenn nicht p, dann q" die Matrix mit „(w-f) = w" zu ergänzen ist, akzeptiert und die Schüler entsprechend punktuell in die Problematik einweist. Rein verbal scheidet ein Rückschluss allerdings aus, denn die Konklusion übergeht „w-f" und „w-w" und belässt auf diese Weise die (wohl sehr unwahrscheinliche) Möglichkeit, dass ausnahmslos die Lösungen höchstens 100 erreichen. An unserem Vorschlag müsste trotzdem nichts geändert werden, da die nunmehrige Konstanz des Hintergliedes der Implikation es leicht machen würde, die Aussage als Belegung für „wenn nicht p, dann q" zu streichen.

Die Auswertung des ersten Beispiels ergibt somit, dass die Äquivalenz der Kalkülausdrücke sich umgangssprachlich nicht gänzlich bestätigen lässt, aber eine sehr große Ähnlichkeit besteht. Das zweite Beispiel dürfte das gleiche Ergebnis liefern, doch tritt die erörterte Besonderheit der Implikation schon im Hauptschluss auf und „nicht" ist anders eingeordnet, so dass es nicht ausgeklammert werden sollte.

Eine weitere Eigenart der Umgangssprache sei hinzugefügt. „Oder"-Verknüpfungen mit „nicht" erschweren bei erwogenen Umwandlungen oft schon das bisherige Verständnis einfacher Implikationen in Normalform. So ist

„Wenn ein Metall erhitzt wird, dehnt es sich aus"

eine verständliche Alltagsbeobachtung, die nach Meinung sehr vieler Schüler nicht dasselbe wie

„Ein Metall wird nicht erhitzt, oder es dehnt sich aus"

besagt. Das zweite zuvor gegebene Beispiel führt mit sogar ungewohnterem Text ebenfalls dahin. Die Schüler wünschen sich bei „oder" zwei positive Ausdrücke, die sie vergleichen können, werden hier aber aus logischen Gründen auf „nicht" gedrängt. Und es dürfte sich auch auswirken, dass die Prämisse zwei Wahrheitswertkonstellationen weglässt: Nichts ist davon zu lesen, ob das Integral positiv ist, wenn die Bildpunkte höchstens 5 Einheiten über der x-Achse liegen. Erst durch meine logische Modifizierung sind die Ausdrücke (quasi) äquivalent nutzbar. All das zusammen spricht m. E. dafür, dass die Umwandlung einer Implikation in eine Disjunktion im Unterricht kaum eine Rolle spielen wird. Ein Rückschluss wäre korrekt, wird jedoch sicher weitgehend auf „p oder q" begrenzt bleiben. Denn sobald „nicht" in einer der Teilaussagen hinzutritt, wird die Disjunktion ziemlich unverständlich, und die Schüler würden bei einem Versuch oft nicht den richtigen Weg zu dem einfacheren „wenn-dann" finden.

d) Die Beziehungen zwischen „wenn-dann/wenn-dann"

Elementare Beziehungen zwischen gleichen logischen Operatoren waren bisher unnötig, müssen aber nunmehr wegen der oftmaligen nichtsymmetrischen Anordnung der partiellen Wahrheitswerte in „wenn-dann" Beachtung finden. Und es darf hinzugefügt werden, dass sie vielfältig und schwierig sind; womöglich bereiten sie im elementaren Bereich den Schülern die größten Schwierigkeiten. Dazu trägt bei, dass dieser Ausdruck sich umgangssprachlich doppelt versteht, als implikative und als äquivalente Verknüpfung, wovon wir uns jedoch mit einem äquivalenten „genau dann-wenn" lösen wollen. Trotzdem sollten sie geschlossen untersucht werden, da sie sich überlagern und die Einordnung einer Aussage meistens erst nach Analyse ihres sachlichen Inhalts entscheidbar ist.

Mitunter bestimmt aber die Struktur darüber, und wir wollen mit dieser Variante, die demnach von rein logischer Natur ist, beginnen.

Die Schlussbeziehungen zwischen äquivalenten Formen sind sowohl kalkülmäßig als auch umgangssprachlich anscheinend unproblematisch und beschränken sich auf die Beziehungen

> von „p äq q" zu „non p äq non q" und
> von „Wenn p, genau dann q" zu „wenn nicht p, genau dann nicht q".

Beide Umwandlungen sind zwar zueinander nur logisch analog, doch in sich logisch äquivalent, und sie erlauben implikative Verknüpfungen, die wir bei einer implikativen Basis auf Gültigkeit hin zu differenzieren hätten. Gemessen an unseren bisherigen Ausführungen, sind diese Behauptungen trivial, so dass auf eine Begründung verzichtet werden kann.

Die soeben erwähnte implikative Form ist komplizierter. Hier muss eine erste Schlussfigur

> von „p seq q" zu „non q seq non p" bzw.
> von „Wenn p, dann q" zu „Wenn nicht q, dann nicht p"

abgesetzt werden von einer zweiten, die von den gleichen Prämissen

> zu „q seq p" und „non p, seq non q" bzw.
> zu „Wenn q, dann p" und „Wenn nicht p, dann nicht q"
> führt.

Im ersteren Fall liegt kalkülmäßig eine logisch äquivalente Beziehung vor, und es scheint, dass die umgangssprachliche Analogie dem folgt. Die Begründung dafür ist aber schwieriger. Denn die beiden Implikationen

> „Wenn p, dann q" und „Wenn nicht q, dann nicht p"

erfassen nur die Matrixzeile 2 („w-f“) gemeinsam und schließen sie aus. Des Weiteren heben sie unterschiedlich (doch nicht gegeneinander) die Zeilen 1 („w-w“) und 4 („f-f“) als unbedingt wahr hervor, woran sich die Umgangssprache offenbar nicht stört: Der gemeinsame Ausschluss von „w-f“ ist entscheidend für die Gleichsetzung der Aussagen[146]. Umgangssprachlich handelt es sich ebenfalls um eine logische Äquivalenz mit der Möglichkeit eines gegenseitigen Schlusses.

Die Übereinstimmung beider Logiksysteme hinsichtlich dieser ersten Schlussfigur setzt sich bei Untersuchung des zweiten Falles fort, worin wir, nebenbei bemerkt, einen Hauptgrund sehen, warum es immer wieder zu Verwechslungen in der Anwendung der Logiksysteme kommt: Kalkülmäßig und umgangssprachlich sind diese analogen Ausdrücke in gleicher Weise logisch verschieden von der ersten Schlussfigur und ergeben ungültige Schlüsse. Der logische Kalkül liefert dafür einen leichten Beweis, und umgangssprachlich sei die Behauptung beispielhaft anhand der folgenden Schlussfigur bewiesen:

> „Wenn p, dann q“ verlangt „(w-w) = w“ und „(w-f) = f“ mit der Ergänzung, dass auch „(f-f) = w“ gilt.
> „Wenn p nicht, dann q nicht“ dagegen schließt „f-w“ aus, das nach der ersten Implikation möglich ist, so dass
> „nicht möglich“ aus „möglich“ folgen würde, wenn die Schlussfigur gültig wäre.

Beide Schlussfehler sind im täglichen Leben leider sehr verbreitet. So gehört die Aussage

> „Wenn es regnet, wird die Straße nass“

zwar zu den bekanntesten Alltagsweisheiten, doch haben offenbar viele ihren Sinn im Grunde nicht verstanden: Beim Blick aus dem Fenster auf die nasse Straße wird ohne Beobachtung des Himmels geschlossen, dass es regnet. Doch

> „Wenn die Straße nass ist, regnet es“

---

[146] Diese Erkenntnis ist ein ganz wichtiges zusätzliches Indiz für die Berechtigung unserer auf „wenn-dann“ bezogenen Bedeutungsergänzung.

besagt etwas anderes und ist obendrein falsch.

Interessant ist, dass im Unterricht mit einfachen Beispielen dieser Art meist richtig umgegangen wird. Kaum ein Schüler wird aus

„Wenn eine Zahl durch 6 teilbar ist, ist sie auch durch 2 teilbar“

auf

„Wenn eine Zahl nicht nur 6 teilbar ist, ist sie auch nicht durch 2 teilbar“

schließen. Geringe Schwierigkeitserhöhungen treiben die Verstöße aber schnell in die Höhe. Schon die Frage, ob aus der allgemeinen quadratischen Funktion

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

konkrete Faktoren gefunden werden können, wenn weniger als drei Punkte gegeben sind, werden viele nicht lösen, weil sie ihre Sprache darauf strukturell nicht einzustellen vermögen. Selbst wenn sie wissen, dass die *Kenntnis* dreier Punkte erforderlich ist, werden sie wahrscheinlich gemäß der unkorrekten Gleichsetzung von „bekannt“ und „gegeben“ oft die berechtigte Implikation

„Wenn mindestens drei Punkte gegeben sind, komme ich zum Ziel“

in die falsche Implikation

„Wenn weniger als drei Punkte gegeben sind, komme ich nicht weiter“

verwandeln, ohne zu beachten, dass es mathematisch unter Umständen möglich ist, aus zwei gegebenen Punkten – z. B. aus dem Scheitelpunkt und einer Nullstelle – einen dritten Punkt zu *errechnen*.

Die Tücken des oft benutzten asymmetrischen Operators „wenn-dann“ lauern überall, und so ist es kein Wunder, dass nach statistischen Berechnungen die letzteren Umformungen in Deutschland (oder in Europa) mit den am häufigsten anzutreffenden Denkfehlern verbunden sein sollen. Es muss deshalb auch im Unterricht – weit über den Mathematikunterricht hinausreichend – zu einer ganz festen

Regel werden, dass bei einer elementaren Implikation weder auf die in gleicher Reihenfolge angeordneten negierten Teilaussagen noch auf die entgegengesetzt angeordneten Teilaussagen geschlossen werden darf. Es verbleibt als gültig allein der Umtausch der Reihenfolge der Teilaussagen in Verbindung mit ihrer Negierung, d. h. die Kontraposition als wohl zweitwichtigste und zweitbekannteste Schlussform.

Diesem klaren Ergebnis steht nun seit Jahr und Tag ein Schlagwort der Medien und der Politiker entgegen, das auch auf Lehrer und Schüler Wirkung zeigt. Es ist der undifferenziert benutzte Ausdruck „Umkehrschluss“, der sich auf die Schlüsse aus Implikationen bezieht, doch offen lässt, welche der gerade behandelten Umkehrungen er im konkreten Fall meint. Meistens sind noch etliche Randinformationen eingebaut, so dass man schon Schwierigkeiten hat, den vom Sprecher bzw. Schreiber ins Auge gefassten Kern zu erkennen. Der Ausdruck richtet in seiner Allgemeinheit täglich logischen Schaden an, und man darf leider nicht weniger als dringend an die Lehrer appellieren, ihren gegenteiligen Einfluss im Unterricht gemäß der obigen Erkenntnisse wirksam einzusetzen. Die öffentlichen Einsprüche, die von den Wissenschaftlern kommen, sind im Allgemeinen so selten, dass sie nichts bewegen. Ja, nicht selten erwachsen aus umgangssprachlichen Beispielen anscheinend sprachliche Gegebenheiten, die der vom Ausdruck „Umkehrschluss“ ausgehenden Verwässerung unseres Standpunktes Vorschub leisten. Solche Bedenken sollten selbstverständlich nicht übergangen werden.

Gerade gute Schüler opponieren mitunter, wenn der Lehrer (wieder einmal) herausstreicht, dass

„Wenn nicht p, dann nicht q“

nie aus

„Wenn p, dann q“

folgt. Sie verweisen z. B. auf

„Wenn die Quersumme einer Zahl durch 9 teilbar ist, ist die Zahl selbst durch 9 teilbar“, woraus doch

> „Wenn die Quersumme einer Zahl nicht durch 9 teilbar ist, ist sie nicht durch 9 teilbar“

folgen würde. Das klingt fast überzeugend und berührt die Frage finiter Schlussfolgerungen, zu der bereits Überlegungen geäußert wurden mit dem Ergebnis, dass die umgangssprachlichen Operatoren auf sachlich-inhaltliche Bestimmungen reagieren und ihre Bedeutung anpassen. Das neue Beispiel ordnet sich hier ein: Sobald mathematisch bekannt ist, dass für „9“ die fragliche Beziehung *mathematisch äquivalent* ist, wird der *implikative* Text derart gelesen und dessen Schlusserlaubnis überschritten. Das sollte jedoch auf keinen Fall hingenommen werden. Auch wenn die Implikation nicht die ganze Wahrheit sichtbar macht, ist die Sprachäußerung zunächst ausschlaggebend, und jegliche Erweiterungen sind sprachlich zu kennzeichnen. Da sie mit neuen Erkenntnissen verbunden sein können, dürfte es zweckmäßig sein, gerade bei Implikationen zu prüfen, ob die logische Struktur ganzheitlich erfasst ist. Die dadurch gewachsene Sicherheit, die jeweilige Aufgabe richtig gelöst zu haben, sollte nicht unterschätzt werden.

4.3.2.2 Die Umformungen der prädikatenlogischen Operatoren

In Frage kommen der All- und der Existentialoperator, von deren Geltungsbereichen der erstere, wie bekannt, logisch unterschiedlich gehandhabt wird. Für die in diesem Abschnitt behandelten Umwandlungen klammern wir die Grundformen der Prädikate, die keine Subjekte besitzen, aus, wie es der Schülersprache am besten angepasst ist. Die Untersuchung gliedert sich nach der Zahl der Prädikate und darin eingegliedert nach deren Stellenzahl. Sie basiert auf Grundmengen, die möglichst ohne Kommentar den Wahrheitswert der Beispiele erkennen lassen.

a) Umformungen innerhalb eines Prädikats

Der einfachste Fall liegt bei einem einstelligen Prädikat vor, bei dem nur von Interesse ist, wie unter Einbeziehung des Operators „nicht“ die Operatoren abgewechselt werden müssen. Unter Beschränkung auf die nichtnegierten Ausgangsformen mit den Beispielen

„Alle Zahlen drücken Quantitäten aus“ und
„Es gibt mindestens eine Primzahl im Einerbereich der natürlichen Zahlen“,

die als Belegungen für „ $\forall((x)P(x)$“ bsw. „ $\exists$ (x) Q(x)“ zu verstehen seien, wären

„Es gibt nicht eine Zahl, die keine Quantitäten ausdrückt“ bzw.
„Nicht für alle Primzahlen gilt, dass sie nicht im Einerbereich der natürlichen Zahlen liegen“

mit den Symbolisierungen

„$\sim \exists (x) \sim P(x)$“ bzw. „$\sim\forall(x)\sim Q(x)$“

erlaubte Umformungen, wobei zur Begründung nur auf die übliche Sprachpraxis verwiesen werden kann. Schon diese Negierungen fallen den meisten Schülern schwer, und so wäre vielleicht ausreichend, partiell umgangssprachlich z. B.

„Es gibt nicht ein x, für das nicht gilt, dass x zu P gehört“

zu verwenden. Andererseits bleibt aber die Symbolisierung ein zweckmäßiges Mittel, den Schülern zum Bewusstsein zu bringen, was sie genau gesagt haben.

Noch komplizierter wird es, wenn mehrstellige Prädikate zu analysieren sind, von denen die zweistelligen Prädikate herausgegriffen seien. Sie sind mit vier Grundformen verbunden:

$$\forall(x)\forall(y)P(x,y) - \forall(x)\exists(y)Q(x,y) - \exists(x)\forall(y)R(x,y) - \exists(x)\exists(y)S(x,y).$$

Jede Grundform erlaubt drei Umwandlungen, die anhand der ersteren unter Einbeziehung der Umgangssprache detailliert bestimmt werden sollen:

Für alle x gilt, dass es nicht ein y gibt, das nicht in der Relation P zu x steht.
Für nicht ein x gilt, dass nicht alle x zu y in der Relation P stehen.

Für die dritte Umwandlung wäre zunächst die korrekte Form zu nennen:

> Es ist nicht für ein x gesagt, dass nicht gilt, dass nicht ein x nicht zu y in der Relation P steht.

Die darin enthaltene doppelte Verneinung lässt sich vereinfachen zu dem verständlichen und daher annehmbaren Ausdruck

> „Es ist nicht für ein x gesagt, dass x nicht zu y in der Relation P steht."

Als Beispiele für die Grundformen seien gewählt:

> Alle natürlichen Zahlen können mit jeder natürlichen Zahl additiv verknüpft werden.
> Jede Zahl hat einen Nachfolger.
> Es gibt eine Zahl, die größer als alle Lösungen einer (vorliegenden) Gleichung ist.
> Mindestens eine rationale Zahl ist von einer natürlichen Zahl verschieden.

Die drei näher bestimmten Umwandlungen der ersten Grundform stellen deren wörtliche Fassung dar, doch bietet die Schulmathematik nicht selten daneben in freier Wortwahl korrekt gleichbedeutende Formulierungen an, die aber zusätzliche geistige – darunter logische – Kraft von den Schülern verlangen, um als Umformung erkennbar zu werden. So wäre für das gewählte Beispiel auch die übergreifende Feststellung

> „Die Addition ist in der Menge der natürlichen Zahlen immer durchführbar"

genau zutreffend und wird wahrscheinlich häufiger benutzt als jede der Wörtlichkeiten, da ihre Abstraktion viel deutlicher auf den wichtigen mathematischen Umstand aufmerksam macht, dass die Aussage möglicherweise nach Auswechslung von „Addition" durch Namen anderer grundlegender Rechenoperationen nicht mehr wahr ist. Nicht ganz einfache logische Feinarbeit wird wohl nicht an den Schülern vorbeigehen.

b) Umformungen im Rahmen mehrerer Prädikate

Da die prädikatenlogischen Operatoren nur quantifizieren, sind hierfür, sobald die Prädikate zu Aussagen verknüpft sind, Hilfsdienste der aussagenlogischen Operatoren erforderlich. Wir konzentrieren uns auf zwei Prädikate und beginnen wieder mit deren Einstelligkeit. Die feinen Bedeutungsunterschiede, die bei den nur auf aussagenlogische Operatoren bezogenen Schlussanalysen schon sichtbar wurden, erhalten jetzt, da vollständige Aussagen zur Diskussion stehen, größeres Gewicht, und es wird sich zeigen, dass die Sprachpraxis unter Verweis auf die Informationsfülle des Kontextes so manchen Unterschied großzügig kaschiert.

Es ist für eine Einzeluntersuchung nicht möglich, die vielfältigen zugehörigen Umformungen auch nur annähernd zu erfassen. Beispielhaft soll es um die logisch wichtigen schulmathematischen Aussagen

„Alle P sind Q" und
„Mindestens ein R ist S"

gehen, deren Negationen vereinzelt zusätzlich beachtet werden. Eigenständige Ergänzungen der Leser dürften nach Verständnis des Textes ohne weiteres machbar sein.

Die Analyse der beiden Aussagen hat seit Aristoteles[147] eine mehr als 2000-jährige Geschichte hinter sich, und doch lassen sich immer wieder neue Seiten entdecken. So wird

„Nicht ein P ist nicht Q"

klassisch korrekt als äquivalent zur ersten Aussage angesehen: Aus den Aussagen geht hervor, was z. B. im Vergleich

„Alle ganzrationalen Funktionen sind differenzierbar" mit
„Nicht eine ganzrationale Funktion ist nicht differenzierbar"

[147] Vgl. Abschnitt 2.1.1, wo wir darüber berichteten.

gut erkennbar ist, dass sie bei der gleichen Grundmenge der differenzierbaren Funktionen dasselbe ausdrücken. Anders dagegen, wenn, wie es heute in Abiturklassen geschieht, die Allaussage zu

> „Für alle x (= für alle Einzelfunktionen) gilt: Wenn x zu P gehört, gehört es (obendrein) zu Q“

umgeschrieben wird. Dies klingt weiterhin einleuchtend, doch ist damit wegen der relativierenden Funktion von „wenn“ (die sprachlich unsichtbar bleibt!) die bisherige Grundmenge zu einer Teilmenge einer neuen Grundmenge mit einer nunmehr konnektiven Belegung degradiert worden, wovon vorher nichts zu erkennen war. Die (willkürliche) Umwidmung der Grundmenge verändert aber, empirisch beobachtet, den Inhalt der Ausgangsaussage nicht, und so wäre nichts einzuwenden, obwohl es keine strenge Umformung ist.

„Schlimm“ wird es dagegen hinsichtlich der Umschreibung des Existentialausdrucks des ersten Beispiels, für den üblicherweise

> „Nicht für (eine Funktion) gilt, dass sie zwar ganzrational, aber nicht differenzierbar ist“

gewählt wird. Es handelt sich um eine adjunktive Konjunktion mit den drei gleichberechtigten Wahrheitswertkombinationen „w-w“, „f-w“ und „f-f“. Eine Konnektion wie in „wenn-dann“ fehlt somit, und daher gilt nunmehr für die Allaussage im Rückschluss logisch nur die Wertung „möglich“. Allein wegen des mathematischen Kontextes lässt sich diese Abschwächung aufheben und darf die Allaussage als Folgerung anerkannt werden. Beidseitig ist es in der veränderten Formulierung keine korrekte Umformung. Und es klappt formal erst dann, wenn der Text „illegal“ logisch-kalkülmäßig gedeutet wird.

Bei der Aussage

> „Mindestens ein R ist S“

liegen die Verhältnisse anders.

> „Nicht für alle x gilt, dass, wenn x zu P gehört, x nicht zu Q gehört“

ist als logisch äquivalent akzeptabel, weil die Negation der Allaussage die dortige Konnektion auflöst, so dass in diesem Fall die Umformung zu zwei gleichen adjunktiven Aussagen führt und insofern korrekt ist. Schon die Umformung einstelliger umgangssprachlicher Prädikate kann demnach bei zwei Prädikaten nicht gedankenlos-schematisch abgearbeitet werden und stößt derzeit für uns an Grenzen, wenn eine korrekte Formalisierung angestrebt wird.

Die Umformungstechnik folgt bei zwei *Relationen* im gedanklichen Grundansatz den einfacheren Prädikaten, fasert aber weiter auf, so dass die angesprochenen Schwierigkeiten sich häufen.

Die Aussage

> „Die Wurzeln aller Radikanden, die kleiner als 1 sind, sind größer als ihr Radikand“

lässt sich noch unschwer äquivalent umformen zu

> „Die Wurzel nicht eines Radikanden, der kleiner als 1 ist, ist nicht größer als der Radikand“,

doch aus der sprachlichen Annäherung

> „Für alle Radikanden (r) und all ihre Wurzeln (w) gilt: Wenn r kleiner 1, dann w größer r“

führt die Umformung schrittweise auf die folgenden Existentialoperatoren:

> Für alle r gibt es nicht ein w, so dass nicht gilt, dass, wenn r kleiner 1 ist, w größer r ist
> Für nicht ein r gibt es ein w (2x nicht), so dass nicht gilt, dass, wenn r kleiner 1, w größer r.
> Für nicht ein r gibt es ein w, so dass gilt (2 x nicht), dass r kleiner 1, doch w nicht größer r.

Gekürzt ist die Aussage überschaubar, und sie folgt aus der Allaussage, doch adjunktiv vereinfacht und insofern nicht von gleichem logischen Gewicht. Ein korrekter Rückschluss scheidet daher aus, und es muss leider wiederholt werden, dass ein Weg zu einer korrekten Formalisierung noch nicht erkannt ist.

4.3.3 Schlussverfahren im Rahmen philosophischer Bedingungsgefüge

Die inzwischen ausführlich erläuterte logische Folgerung wird als die zentrale logische Beziehung seit Jahrtausenden von den Menschen intuitiv zum Erkenntnisgewinn verwandt. Es ist daher kein Wunder, dass sie auch philosophisch Interesse gefunden hat, wofür sich der Bedingungsbegriff als kennzeichnendes Maß einbürgerte. Dessen Nutzung ging aber bald darüber hinaus, und das wegen der Nähe des Folgerungsbegriffs zum logischen Operator „wenn-dann“, für den die Folgerung nur eine der mit „Bedingung“ gleichbedeutenden Anwendungen wurde. Das sind heute nun wiederum nicht alle Wenn-dann-Inhalte, so dass ein gestuftes Begriffsgefüge entstand, das zusammengefasst so lauten könnte: In Übergehung der allgemeinsten Kategorie „seq“ bilden Aussagen mit „wenn-dann“ die umfangreichste Menge, die als Teilmenge Bedingungssätze enthält, die teilweise – und wohl zum wichtigsten Teil – Folgerungen beinhalten.

All diese Ausdrücke sind im Schulunterricht anzutreffen und speziell im Fach Mathematik gemäß der uralten engen Verzahnung mit Philosophie und Logik in mathematische Beziehungen eingebunden. In zahlreichen nicht unwichtigen Zusammenhängen, auf die gleich einzugehen ist, werden im Mathematikunterricht von den Lehrern nicht selten nur die philosophischen Bezeichnungen verwendet, und auch wir haben hier schon öfters davon intuitiv Gebrauch gemacht. Fehlerquellen sind aber genug vorhanden, und daher dürfte es zumindest zweckmäßig sein, einen Abstecher in die logisch-philosophische Ausdrucksweise zu wagen, mit der Absicht, sie trotz der in der Philosophie bestehenden Meinungsverschiedenheiten in einer korrekten Form wiederzugeben.

Wir beschränken uns auf die Unterscheidung zwischen den logisch bedeutungsvollen notwendigen und hinreichenden Bedingungen. Die Ausdrücke sind den Schülern vom Wortlaut her sehr bekannt, doch sie können damit in mathematischen Aufgaben meist wenig anfangen, verstricken sich in logische Widersprüche und finden nicht die richtigen Lösungen. Bei Gesetzesaussagen bzw. gesetzesähnlichen allgemeineren Aussagen spielen derartige Bedingungen aber immer wieder eine erkenntnisfördernde Rolle, so dass sie in der Schulmathematik wegen solcher Schwierigkeiten nicht ausgeklammert werden sollten, wie es bei vielen Lehrern ja auch positiv zu beobachten ist. Man könnte sogar erwarten, dass sie in den mathematischen Schulbüchern für die oberen Schulstufen stets berücksichtigt sind, doch ist das leider nicht der Fall und die Informationen sind darüber hinaus mitunter fehlerhaft, wenn es geschieht.

Unsere Ausführungen beginnen selbstverständlich mit den Definitionen für die beiden Bedingungen, die den konnektiven Operator „wenn-dann" und aus den schon erläuterten Gründen auch die modalen Operatoren als bekannt voraussetzen. Im Kern sind sie meta-sprachliche Wertungen bestimmter Kombinationen dieser Ausdrücke und können insofern als Wissenserweiterung zu verstehen sein.

Definition „hinreichende Bedingung": Eine Aussage A ist hinreichende Bedingung für eine Aussage B genau dann, wenn bei „A = w" oder der entsprechenden Annahme es nicht möglich ist, dass „B = f". In Kurzform: Wenn A, dann muss auch B sein.

Definition „notwendige Bedingung": Eine Aussage A ist notwendige Bedingung für eine Aussage B genau dann, wenn bei „A = f" auch „B = f" gelten muss. In Kurzform: Wenn A nicht, dann kann B nicht sein. Für B muss A sein.

Von dieser Formulierung her ist für die Schüler der Ausdruck „A notwendige Bedingung für B" sehr einleuchtend und, gemessen am Erkundungsziel B, zweckmäßig. Der mathematisch-logische Kern tritt allerdings zurück und wäre zwischenzeitlich stets zu betonen. Bei „A ist hinreichende Bedingung für B" sieht es etwas anders aus; wie gleich gezeigt wird, ist der Ausdruck mit Verständnisschwierigkeiten verbunden.

Die Definitionen weisen, nicht immer direkt sichtbar, in dreifacher Hinsicht Besonderheiten in der logischen Sprachpraxis auf: Der Wahrheitsbegriff (mit all seinen Schattierungen) ist direkt eingebaut, die Hauptbedeutung des konnektiven Operators „wenn-dann" ist den Bedürfnissen der Umgangssprache angepasst und die klassisch-logischen Wahrheitsmatrizen sind als verbesserndes Hilfsmittel erkennbar.

Aus den Definitionen ergibt sich eine viel, doch nicht immer richtig genutzte gegenseitige Beziehung:

- Genau dann, wenn A hinreichende Bedingung für B ist, ist B notwendige Bedingung für A.

– Genau dann, wenn A notwendige Bedingung für B ist, ist B hinreichende Bedingung für A.

Diese metasprachlichen Aussagen beschreiben in vereinter Sicht die sicher wichtigste Eigenschaft der objekt- sprachlichen Kontraposition

„Wenn (wenn A, dann B), genau dann (wenn nicht B, dann nicht A)",

so dass sich nach Umstellung mittels einer Konjunktion die metasprachliche Äquivalenz

„Wenn (A hinreichende Bedingung für B) und (B hinreichende Bedingung für A), genau dann (A hinreichende und notwendige Bedingung für B)"

rechtfertigen lässt.

Denn: Nach der ersten Definition ist A immer mit B verbunden. Existiert B demnach nicht, kann A nicht existent sein; es wäre ein A ohne B. Aus der Nichtexistenz von B folgt demnach die Nichtexistenz von A. Und genau das drückt „notwendige Bedingung" aus.

Die Begründung für die zweite Aussage ist selbstverständlich analog, und aus beiden Begründungen ergibt sich die Berechtigung der Äquivalenz.

Diese Ausführungen zeigen, dass beide Begriffe in logischer Hinsicht absolut gleichberechtigt nebeneinander stehen. Trotzdem sprechen die Schüler bei ihren mathematischen Bemühungen immer wieder davon, dass sie oft zunächst „nur" eine notwendige Bedingung vor sich gehabt hätten, ehe dann eine „bessere" hinreichende Bedingung zur Lösung führte. Dafür gibt es eine Erklärung, die wir in das folgende Standardbeispiel der Schulmathematik zur Bedingungsproblematik einflechten wollen. Es gehört der Analysis an und beschäftigt sich mit den Extremsowie Wendepunkten von Funktionen.

Wir wollen unseren Gedankengang dem der Schüler anpassen, der uns aus vielfachen Beobachtungen ungefähr bekannt ist. Es sei

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 22$$

eine beliebige ganzrationale Funktion dritten Grades.

Die Schüler wissen, dass einige dieser Funktionen ein Funktionsbild besitzen, zu dem mindestens ein relativer Extremwert gehört. In der etwas unübersichtlichen Aufgabe geht es nun darum zu prüfen, ob mindestens ein Extremwert vorliegt und wo er sich befindet. Dabei fällt von der Anschauung her sofort auf, dass er sich *nur* dort befinden kann, wo die Tangente an das Funktionsbild mit der x-Achse identisch ist oder parallel zu ihr verläuft. Mit anderen Worten: Er *muss* sich dort befinden, und es ist eine Feststellung, die die Schüler über Jahre vernehmen werden, so dass sich der etwas verwissenschaftliche Ausdruck, dass die skizzierte Parallelität als „notwendige Bedingung für einen Extremwert" gewertet werden kann, hierfür gut eignet. Dabei ist, das sei noch einmal betont, darauf zu achten, dass bei Bedingungen stets hinzuzufügen ist, was als Grundmenge den Anfang bildet. Wenn dies abgesichert ist, wäre nun zu klären, wo die Funktionsgleichung diese Eigenschaft hat. Dafür ist jetzt die Mathematik heranzuziehen mit deren Erkenntnis, dass die erste Ableitung den sich verändernden *Anstieg* der Tangente beinhaltet, so dass, da die beschriebene Tangente den Anstieg 0 hat, die erste Ableitung zu bilden und 0 zu setzen ist:

$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9$
$f'(x_E) = 0 = 3x^2 - 6x - 9$, woraus
$x_1 = 3$ und $x_2 = -1$ folgen.

Damit haben die Schüler den Extrempunkt aber noch nicht gefunden, denn vorläufig gilt nur

„Wenn es einen Extrempunkt geben sollte, dann bei $x_1 = 3$ oder bei $x_2=1$",

woraus nur die Aussage

„Wenn nicht $x_1 = 3/x_2 = -1$, dann nicht Extrempunkt"

folgt, die nicht erkennen lässt, wo der Extrempunkt liegt. Damit tritt im Lösungsweg nach der einführend erkannten notwendigen Bedingung die Logik mit der negierenden Wertung „keine hinreichende Bedingung für einen Extremwert" wieder in aller Deutlichkeit in Aktion, und weist zwar den Wunsch der Schüler ab, verhindert jedoch auf diese Weise einen Irrweg. Das Zusammenspiel von

Logik und Mathematik sowie die gleichwertige Anwendung beider Bedingungen sind klar fassbar. Auf der anderen Seite ist es aber verständlich, dass Schüler darauf weniger achten und, sollten sie unglücklich „steckengeblieben" sein, meinen, dass dies deshalb passiert sei, weil „leider nur" eine notwendige Bedingung zur Verfügung gestanden hätte. In Wirklichkeit sind sie erkenntnismäßig bereichert worden.

Den weiteren Fortschritt bringt wieder die Mathematik, wenn man von Herumprobieren absieht. Ein Blick auf ein Koordinatensystem zeigt, dass die Funktionsbilder einer beliebigen Funktion mit Extrempunkt und ihrer ersten Ableitung stets derart zugeordnet sind, dass die Kurve der ersten Ableitung die x-Achse genau beim x-Wert des Extrempunktes schneidet, und zwar in zweierlei Form: entweder von oben links-spitzwinklig zu unten rechts-spitzwinklig oder von unten links-spitzwinklig zu oben rechts-spitzwinklig. In unserem Fall nähert sich deren Kurve $x_1 = 3$ von links aus dem dritten/vierten Quadranten, also von unten, und verlässt diesen Punkt im ersten Quadranten, also nach oben. Umgekehrt verläuft die Kurve bei $x = -1$ aus dem zweiten Quadranten, also von oben, in den 3. Quadranten, also nach unten. Somit handelt es sich bei $x_1 = 3$ und $x_2 = -1$ um Extrempunkte. Dieses Ergebnis darf verallgemeinert werden: Ein Extremwert und nur ein Extremwert der Ausgangsfunktion bedingt einen Vorzeichenwechsel der Ableitungsfunktion, womit er dafür als hinreichende und notwendige Bedingung zu gelten hat. Für die skizzierte Tangentenrichtung ist er aber „nur" – in dieser Relation korrekt verwendet – hinreichende Bedingung. In Umkehrung lässt sich deshalb für den Suchvorgang nach einem Extremwert verkürzt, aber sinngleich sagen:

Ermittlung der 1. Ableitung, die auf ihre Schnittpunkte mit der x-Achse hin zu überprüfen ist. Sollte ein Schnittpunkt vorliegen, wäre dieser Tatbestand hinreichende und notwendige Bedingung für einen Extremwert.

Damit ist das Problem von der Logik aus gelöst, doch es können bei bestimmten Funktionen rechentechnische Schwierigkeiten entstehen, die die Schüler zu falschen Ergebnissen führen. Das gilt vor allem für in den Unterricht übernommene Funktionsbeziehungen aus der Praxis, während die präparierten Beispiele der Schulmathematik sie umgehen. Die Bilder technisch genutzter Funktionen, wozu auch einfache ganzrationale Funktionen dritten Grades in der Art unseres Beispiels gehören, weisen mitunter für die Abstände zwischen ihren Schnittpunkten mit der x-Achse geringe Entfernungen auf, die z. B. weit unter einem Millimeter liegen. Dieser Umstand verhindert wahrscheinlich bei fast allen Schüler ein richtiges Ergebnis, denn sie unterschreiten in ihrer Annäherung meist nicht die 0,1-mm-Abstände und treffen die Kurve der ersten Ableitung dadurch entweder zweimal oberhalb oder zweimal unterhalb der x-Achse, so dass sie hier keinen Extrempunkt vermuten.

Als Ausweg ist eine Hilfsmethode entwickelt worden, die alle Funktionen berührt, soweit sie differenzierbar sind und mindestens einen Extrempunkt besitzen. Ihr Nachteil besteht allerdings darin, dass sie *nur (korrekt!)* eine hinreichende Bedingung für einen Extremwert ist und ihn deshalb nicht vollständig abgrenzen kann. Der Weg läuft über die zweite Ableitung an den fraglichen Stellen und schließt immer eine dortige Schrägstellung des Funktionsbildes der zweiten Ableitung ein.

Anders ausgedrückt: Gilt bei gerader Tangente des Bildes von f(x), d. h. bei f'(x) = 0, für die zweite Ableitung zusätzlich f''(x) ≠ 0, dann befindet sich dort ein Extrempunkt. Die Konjunktion „(f'(x) = 0 und f''(x) ≠ 0)" ist damit hinreichende Bedingung für dessen Existenz. Als notwendige Bedingung scheidet sie dagegen aus, da aus

> „Wenn (f'(x) = 0 und f''(x) ≠ 0), dann dort ein Extrempunkt"

z. B. nicht

> „Wenn (f'(x) = 0 und f''(x) = 0, dann kein Extrempunkt"

folgt.

So ist bei $f(x) = x^4$ neben $f'(x) = 4x^3$ ebenfalls $f''(x) = 12x^2$ im Ursprung nicht von Null verschieden, obwohl ein Extrempunkt vorliegt. Die Umkehrung gilt daher nicht. Das hält die Schüler aber nicht davon ab, trotzdem (falsch) zu schließen. Ihr Denken vollzieht sich wahrscheinlich auf folgendem Wege, der einen verbreiteten logischen Fehler sichtbar macht:

Die Schüler wissen, dass nach der Existenz eines Extremwertes gefragt ist und es im ersten Schritt um eine eventuelle Lösung für die notwendige Bedingung f'(x) = 0 geht. Hat das geklappt, ist ihnen (meist) bekannt, dass bei diesem x mit Sicherheit ein Extremwert liegt, sofern im zweiten Schritt sich f''(x) ≠ 0 ergeben sollte. An dieser Stelle bietet sich eine günstige Gelegenheit, die Lösung für f'(x) = 0 vom Vorgang als erfüllte notwendige Bedingung abzukoppeln und nur noch

„Wenn f“(x) ≠ 0, dann dort ein Extrempunkt“

zu beachten. Die Abkopplung der notwendigen Bedingung scheint im Schülerverständnis, wie Äußerungen bestätigen, nicht selten die restliche Implikation aufgewertet und quasi zur Äquivalenz erhöht haben, obwohl auch sie wie die vorherige nur implikativen Charakter besitzt. Die unzulässige „Umwidmung“ erbrachte aber die Möglichkeit, nunmehr aus „f“(x) = 0“ (fälschlich) auf die Nichtexistenz eines Extrempunktes zu schließen. Bei längeren Schlussketten erlahmt anscheinend die Fähigkeit zu strenger logischer Konzentration, werden Implikation und Äquivalenz nicht mehr deutlich unterschieden und von daher die Schlussmöglichkeiten mit einfachen Belegungsfragen verwechselt. Die Aufmerksamkeit der Schüler muss daher konsequenter auf die Bedingungsdefinitionen ausgerichtet werden, indem sie immer wieder in ihre Einzelbestimmungen zu zergliedern sind.

Viele Lehrer und sogar einige Schulbuchautoren setzen dem zu wenig entgegen. So wartet die neueste Cornelsen-Auflage für den Leistungskurs der elften Klassen in Brandenburg mit eigenartigen Formulierungen auf[148]. Zum obigen Beispiel f(x) = x^4 heißt es zunächst richtig, dass die Überprüfung mit dem f“(x)-Kriterium, das als hinreichende Bedingung bewertet wird, keine Entscheidung bringt. Doch dann folgt der Vorwurf, dass das Kriterium damit *versagt* hätte[149]. Das lässt darauf schließen, dass die Autoren wie die Schüler mehr von einer hinreichenden Bedingung erwarten, und deutet für uns darauf hin, dass auch Mathematiker das logisch-philosophische Vokabular nicht immer ganz verstehen.

4.3.4 Überlegungen zum schrittweisen Aufbau schulmathematischer Schlussverfahren

Die Grundlagen einer Logik der Schulmathematik dürften nunmehr sowohl systematisch – aufgegliedert in Ontologie und Schlusslehre – als auch historisch-philosophisch gegeben sein und offenbaren, dass der weitere Weg zu einem geschlossenen logisch-schulmathematischen Ganzen auf einer recht verzweigten

---

148 Bigalke/Köhler: Mathematik. Gymnasiale Oberstufe. Qualifikationsphase „Leistungskurs“, 11, 1. Aufl., Berlin 2019, S. 151–153.

149 Cornelsen-Verlag, 11. Klasse, S. 152.

Basis beruht. Diese Vielfalt wird sich, wie die bisherigen Beispiele detailliert zeigen, fortsetzen, womit in unserem Verständnis eine wissenschaftliche Veröffentlichung, die sich erstmals der Thematik angenommen hat, bald überfordert wäre, wenn sie eine allseitig befriedigende Gesamtsicht versuchen würde. Wir verzichten deshalb darauf und beschränken uns auf die Darlegung wichtiger Grundgedanken, die spätere tiefere Erkundungen ermöglichen. Sie können im Rahmen der Ausführungen zu den Schlussverfahren untergebracht werden, da die andere Hauptseite der Logik, die Ontologie, sich als Vorstufe der Schlusslehre einordnen lässt, so dass deren zentrale Aussagen miterfasst sind. In einer solchen Grundlegung sollten zwei Richtungen unterschieden werden:

Zunächst möchten wir Prinzipien einer Schrittfolge im Rahmen eines beliebigen schulmathematischen Schlussvorgangs vorstellen, mit denen gleich im Anschluss begonnen wird. Danach gilt es, im nächsten Abschnitt in Form einer Übersicht zumindest die wichtigsten Schlussverfahren gesamtheitlich zu übermitteln. Da zuvor die Absicht des Buches zu erfüllen war, nicht an der jüngsten von Schamberger vorgelegten Untersuchung der umgangssprachlichen Logik vorbeizugehen, liegt schon eine große Zahl an Schlussbeispielen vor, die aber nicht weiterhin in unsystematischer Gliederung ergänzt werden müssen, sondern nunmehr zum Abschluss übergreifend geschlossen zusammenzufassen wären.

4.3.4.1 Die korrekte Absicherung der logisch-strukturellen Beziehungen eines Schlusses

Bevor überhaupt ein vorgegebener konkreter Schluss bearbeitet werden kann, muss er in einer klaren Sprache verständlich sein. Dazu trägt der sachliche Inhalt bei, aber auch seine logische Struktur, die hier von Interesse sein soll und deren Klarheit wiederum primär von den logischen Operatoren abhängt. Schaut man noch genauer hin, so sind es vornehmlich die prädikatenlogischen Operatoren, die Schwierigkeiten dabei bereiten, einen eindeutigen Ausdruck zu finden. Am Beispiel der Formulierung für die gleichmäßige Stetigkeit einer Funktion konnte dies überzeugend demonstriert werden. Doch schon die isolierte Verwendung von „nicht alle“ lässt erkennen, dass sie schulmathematisch selbst mit der alltäglichen Umgangssprache nicht immer gleichbedeutend zu verstehen ist.

Das heißt jedoch nicht, dass die aussagenlogischen Operatoren problemlos wären. Wir sind bereits auf zahlreiche Beispiele gestoßen, in denen sich die außerordentliche Hilfe der logischen Kalküle für die Entzifferung der umgangssprachlichen Operatoren zeigte. Vielleicht sei noch eine kompliziertere Aussage wie

> „Wenn gilt: Wenn eine Zahl durch 3 teilbar ist, dann ist sie durch 6 teilbar, dann gilt auch, dass, wenn sie durch 2 teilbar ist, diese Zahl durch 6 teilbar ist“[150]

hinzugefügt, deren Analyse auf den ersten Hauptschritt begrenzt werden soll: Es wird nicht behauptet, dass die eingebaute Aussage

> „Wenn eine Zahl durch 3 teilbar ist, ist sie durch 6 teilbar“

immer akzeptabel sei; sie ist einem anderen „wenn“ untergeordnet, so dass die verwendete Grundmenge Zahlen enthält, für die „w-w“ gilt, und andere Zahlen, für die „f-f“ und möglicherweise noch „f-w“ gilt. In der ersteren Teilmenge hat das erste „w“ in dieser Belegung keine vom zweiten „w“ verschiedene Bedeutung: Es sind die durch 6 teilbaren Zahlen, zu denen, wenn eine solche Zahl vorliegt, auch jene gehört, die

> „Wenn diese Zahl durch 2 teilbar ist, ist sie auch durch 6 teilbar“

erfüllt. Der erste Hauptschritt für den Beweis einer *wahren* Aussage wäre damit getan, und ohne die Einbeziehung der Matrixzeilen hätte dies eventuell nicht geklappt. Doch muss betont werden, dass die alleinige Übersetzung der Aussage in eine Kalkülform, wie es immer wieder geschieht, die Aussage nicht korrekt getroffen hätte und somit falsch gewesen wäre, auch wenn (zufällig) auf beiden Wegen in diesem Falle sich „wahr“ ergeben würde.

Die Hilfsleistung der Kalküle steht jedoch nicht allein. Mitunter sind für die Explizierung aussagenlogischer Operatoren einfache Umformungen ausreichend, z. B. bei der Auffindung geordneter Konjunktionen. Wenn es um direkte Zeitbezüge geht, ist meist gar keine Hilfe erforderlich, aber die Aussage

[150] Aussagen dieser Art kommen in der Mathematik nicht selten vor.

> „Die Ermittlung eines Wendepunktes einer Funktion verlangt die Untersuchung der 2. und der1. Ableitung“

sollte schon kurz umgestellt werden, um nicht zu vergessen, dass für die korrekte Symbolisierung ein ordnendes „und“ vonnöten ist. Und es wären weitere Hilfsmethoden überlegenswert; dem schöpferischen Nachdenken des Lehrers sind keine Grenzen gesetzt.

4.3.4.2 Die Erkundung des Einstiegs für den Schlussvorgang

Gerade bei der Lösung einer aus anderweitigen Zusammenhängen erwachsenen Aufgabe, des wohl wichtigsten Schlussvorgangs, fällt es den Schülern immer wieder schwer, einen Anfang zu finden. Oft ist auch kaum erkennbar, wo man beginnen könnte, und so hat sich nicht zuletzt für die Schulmathematik die Methode entwickelt, von einem zunächst unerwarteten Konstrukt aus, das Fachleute entdeckt haben, den Beweis zu beginnen. Der Philosoph Arthur Schopenhauer sprach von (bösen) „Mausefallenbeweisen“, in die die Schüler gelockt werden, und einer der berühmtesten dieser Beweise ist der zur Gradzahl der Dreiecksinnenwinkel: Man erzielt wahrscheinlich kaum ein intuitives Ergebnis, wenn man nicht zuvor fast motivlos eine Parallele zu einer der Dreiecksseiten zieht. Von da an lässt sich über Wechselwinkeleigenschaften schnell erschließen, dass die Summe der Innenwinkel eines jeden Dreiecks 180° beträgt.

Leider kommt die Schulmathematik ohne diese „Mausefallen“ nicht aus, doch nicht alle derzeitigen Anwendungen müssen sein, und nicht wenige können vereinfacht werden. So beginnt Otto Forster in seiner vielbenutzten Einführung in die Analysis den Beweis, dass die Funktion $f(x) = x^{-1}$ im Intervall zwischen 0 und 1 nicht gleichmäßig stetig ist[151], mit für Schüler und Studenten wohl nicht gleich verständlichen *Festlegungen* zu rechnerischen Beziehungen zwischen einem

[151] Vgl. Abschnitt 4.2.2.1.3c. Eine Funktion ist nach den dortigen Ausführungen genau dann gleichmäßig stetig, wenn für jeden auf der y-Achse vorgegebenen Abstand E mindestens einen auf der x-Achse zugeordneten Abstand D gibt, so dass für beliebige x-Werte innerhalb des Abstandes D gilt: Wenn ihre Differenz, absolut gerechnet, geringer als der Abstand D ist, dann ist die Differenz ihrer zugehörigen Funktionswerte kleiner als E.

Intervallpunkt und auf der x- bzw. der y-Achse gelegenen Intervallabständen, ohne auch nur ein erklärendes Wort zu geben[152]. Deutlich besser dagegen Thomas Sonar, der zur gleichen Problematik die gleiche Funktion bemüht und ganz schlicht von der Anschauung ausgeht, dass das Kurvenbild der Funktion $f(x) = x^{-1}$ zwischen 1 und 0 sichtbar immer steiler wird, so dass, je näher man der 0 kommt, der Abstand D um so kleiner zu wählen ist[153]: Es gibt innerhalb dieses Intervalls keinen für zwei x-Werte hinreichenden gleichen Abstand.

Vereinfachungen sind demnach unter bestimmten Voraussetzungen möglich, und es wird sich bei deren Suche immer wieder anbieten, bewusst alle erkennbaren Eröffnungen gedanklich durchzuspielen. Doch bleibt der Einstieg in eine Schlusskette für die Schüler meist ein Problem und verlangt vom Lehrer ein hohes Maß an Bereitschaft zur Erläuterung.

4.3.4.3 Adjunktive Schlüssigkeit als notwendige Bedingung für normale schulmathematische Schlussgültigkeiten

Die bisherigen Ausführungen umfassten Tätigkeiten, die vor dem eigentlichen Schlussvorgang zu absolvieren waren, so dass ohne sie damit nicht begonnen werden kann. Es sei nun der Einstieg gefunden, der, so ist zu vermuten, im Allgemeinen eine adjunktive Schlussprüfung als sehr günstig erscheinen lässt. Mit der Relativierung „im Allgemeinen" wird aber angezeigt, dass es auch andere Möglichkeiten gibt, deren Zahl in umgangssprachlicher Form nicht abschätzbar ist, die jedoch unseres Erachtens fast ausschließlich nur bei ganz einfachen Schlüssen bevorzugt werden und insofern ohne Kommentar einsichtig sind. Mitunter sind sie allein mit adjunktiven Mitteln schon lösbar. Wir konzentrieren uns auf ein anfänglich adjunktives Herangehen, das, wenn die Kenntnisse der Schüler für den jeweiligen konkreten Schluss ausreichen, bis zu einem geschlossenen Schlussschema führen kann. Sollte sich herausstellen, dass diese Stufe „ungültig" ist, so

---

152 Otto Forster: Analysis 1. Differential- und Integralrechnung einer Veränderlichen, 6., verbesserte Aufl., Braunschweig/Wiesbaden 2001, S. 104 f.

153 Thomas Sonar: Einführung in die Analysis. Unter besonderer Berücksichtigung ihrer historischen Entwicklung für Studierende des Lehramtes, Braunschweig/Wiesbaden 1999, S. 101.

muss der umgangssprachliche Schluss, worauf schon mehrmals hingewiesen wurde, ebenfalls als ungültig gewertet werden, da die vorherrschenden konnektiven logischen Operatoren nie weniger als die adjunktiven Operatoren verlangen. Der Nachweis der adjunktiven Gültigkeit erlaubt dagegen nicht – wieder nicht erstmals gesagt –, den umgangssprachlichen und somit den schulmathematischen Schluss unbedingt als gültig anzusehen. Die Adjunktivität ist im Rahmen der Schulmathematik allein eine notwendige Bedingung für Schlussgültigkeit.

Von Interesse ist aber, ob es einzelne Aussagen gibt, die wegen paralleler Definitionen neutral neben einer Unterscheidung in adjunktive und konnektive Schlüsse Schlussgültigkeit gestatten, mit dem Anspruch, ohne eine adjunktive Schlussanalyse beachtet zu werden. Wir werden im nächsten Abschnitt und im Appendix darauf genauer eingehen, wollen hier jedoch schon vorweg fragen, ob und wie diese neutral-logische Erwägung mit der Aufgliederung in finite und infinite Schlussverfahren zusammenhängen könnte, so dass zu erkunden wäre, was sich hinter der Aufgliederung verbirgt und in welchem Umfang überhaupt der Kontext darüber bestimmen kann. Vielleicht stellt der erwogene neutral-logische Schluss die Spitze der Schlüsse ohne Einfluss des Kontextes dar, womit er in der Schulmathematik begrenzt anzutreffen und insofern erwähnenswert wäre. Doch die spezifisch umgangssprachlich-schulmathematischen Operatoren scheinen dem mathematischen Inhalt der Aussagen sehr nachzugeben, und das bis zu einem solchen Extrem, dass die Schüler über die alltägliche Sprachpraxis hinaus die Wahrheitsbehauptung für die Aussage

> „nicht alle ungeraden Zahlen sind durch 2 teilbar“

als Zumutung empfinden. Das deutet auf eine recht ausgeprägte Relativierung der Schlussmöglichkeiten hin, letztlich auf ihre noch stärkere Einschnürung, die wenig Platz für neutral-logische Wertungen lässt, wenn dieser Ausdruck so, wie gerade gesagt, zu verstehen ist. Das Thema bleibt beachtenswert.

4.3.4.4 Konnektiv-schulmathematische Schlüssigkeit

Mit dieser Stufe haben wir das Ziel, die logischen Schritte bis zur Vollendung eines Schlussvorgangs in verallgemeinerter Form klar vorzustellen, fast erreicht. Es fehlt nur noch der zwar wichtige, doch sekundäre Schritt, die konnektiven Schlüsse von logisch verzerrenden Störungen zu „säubern", der den Abschluss bilden soll. Zunächst bemühen wir uns aber, die Kerngedanken der Konnektivität nunmehr zusammengefasst bezüglich der Schulmathematik zu charakterisieren. Die bestimmenden logischen Operatoren unterliegen primär ausgewählten mathematischen Erkenntnissen und daneben auch der alltäglichen Sprache, deren Termini vor allem vermittelnde Hilfe zwischen mathematischen Ausdrücken leisten. Da die heutige Mathematik wie die klassische Logik axiomatisch begründet vorliegt und in dieser Form obendrein die klassische Logik nutzt, strahlt sie in ihrer Exaktheit stark auf die Sprache der Schulmathematik aus, deren Exaktheit tendenziell zunimmt, auch wenn unseres Erachtens weiterhin noch einige Schwachpunkte festzustellen sind. Fachbezogene zufällige Aussagen dürften von der Mittelstufe an im Mathematikunterricht keine Rolle mehr spielen, so dass dortige logische Unterweisungen die vielfältigen logischen Operatoren so gut wie nicht ohne vorausgesetzte Kenntnis modaler Operatoren verwenden sollten.

Mit dieser Modifizierung gegenüber der Alltagssprache bleibt die Schulmathematik aber in logischer Hinsicht umgangssprachlich orientiert und unterscheidet sich dadurch von der heutigen Mathematik als Wissenschaft: Seit ungefähr 100 Jahren nimmt sie, indem sie sich inhaltlich der Mathematik, logisch-strukturell der Umgangssprache verpflichtet sieht, eine Sonderstellung ein, die mit Blick auf die logisch-adjunktiv arbeitende Mathematik als logisch-konnektiv arbeitende Wissenschaft deutbar ist und hinsichtlich der logisch zu großzügig agierenden Alltagssprache sich weitgehend logischen Normen unterworfen hat. Der Ausdruck „Zwitterstellung" dürfte daher berechtigt sein, könnte jedoch unter Beachtung deontischer Normen als zu abfällig begriffen werden und sollte besser unterbleiben.

Die logische Wirkung der beiden Logiksysteme ist längst nicht immer gleich, worauf partiell schon hingewiesen wurde.[154] Ein konkreter logischer Schluss kann adjunktiv und konnektiv gültig sein, auch ist es möglich, dass beide ungültig sind oder dies nur für die konnektive Variante gilt. Ausgeschlossen ist aber, dass ein und derselbe Schluss konnektiv wahr und adjunktiv falsch ist, soweit die Grundmengen übereinstimmen. Anderweitig können, wie es bei der Analyse des Operators „alle" nachzulesen ist, Kalamitäten entstehen[155].

[154] Vgl. Abschnitt 4.3.4.3.

[155] Vgl. Abschnitt 4.2.2.1.3a.

Die Sonderstellung der Schulmathematik bringt ein schwieriges Problem mit sich, zu dem wir uns schon detailliert geäußert haben[156], das aber sicher noch in der Diskussion bleiben wird. Nach unserer derzeitigen Auffassung lassen sich die Ergebnisse der Schulmathematik einerseits mit Einsatz der Anschauung direkt in umgangssprachlicher Logik gewinnen, doch können sie auch aus einer Kombination logisch-adjunktiver und einengender mathematischer Axiome abgeleitet werden. Wenigstens finden die Mathematiker stets gleiche Worte, obwohl ja bekannt ist, dass die jeweiligen Schlussfiguren allein nicht unbedingt zu gleicher Gültigkeit führen. Ungeklärt ist vor allem, ob noch unerforschte Umformungen immer wieder letztlich gleichbedeutende Ergebnisse erzielen oder ob sprachliche Manipulationen daneben die Gleichheit auch vorzutäuschen vermögen.

Die innerstrukturellen Veränderungen eines schulmathematischen Schlussvorgangs sind nicht so prägnant wie die eines Kalkülschlusses zu erklären, weil die mehrdeutigen und bedeutungsbeweglichen logischen Operatoren der Umgangssprache diesbezüglich erforderliche Definitionen nicht zulassen. Besonders schwierig sind Schlüsse, die von konnektiven Aussagen zu anderen konnektiven Aussagen führen. Auch dazu ist hier bereits einiges geschrieben worden, doch es fehlt noch der wichtige Vergleich zwischen Schlussgültigkeit und davon unabhängig gegebener Wahrheit einer Aussage, der in der Schulmathematik wegen des großen Einflusses des Kontextes sehr oft mit Fehldeutungen verbunden ist. Am folgenden Beispiel sei erläutert, wie sie entstehen können und wie dies zu verhindern ist:

> Prämisse: Der Wurzelausdruck einer gegebenen natürlichen Zahl ist entweder wieder eine natürliche Zahl (A) oder eine irrationale Zahl (B). Sollte er irrational sein (B), wäre er algebraisch (C).

Zu fragen wäre, ob daraus

> „Wenn der Wurzelausdruck eine natürliche Zahl ist (A), ist er nicht algebraisch (nicht C)“

folgt. Das Sprachempfinden der Schüler spricht sicher nicht dagegen, und so sollte zunächst die analoge adjunktive Schlussform

[156] Vgl. Abschnitt 4.2.2.4.

„‚(A aut B) et (B seq C)‘ folglich ‚(A seq non C)‘“

per Matrix geprüft werden:

A	B	C	((A aut B)	et	(B seq C))	folglich	(A seq non C)
w	w	w	f	F	w		F
w	w	f	f	F	f		W
w	f	w	w	W	w		F
w	f	f	w	W	w		W
f	w	w	w	W	w		W
f	w	f	w	F	f		W
f	f	w	f	F	w		W
f	f	f	f	F	w		W

Etwas überraschend ist der Schluss wegen Zeile 3 adjunktiv ungültig, und die Schüler wie die übrigen Leser kommen in Zweifel, ob die These, dass ein ungültiger adjunktiver Schluss nicht konnektiv gültig sein kann, stimmt, da der übermittelte Eindruck dem nicht entspricht. Wir müssen deshalb über den Eindruck hinaus die konnektive Form auf Gültigkeit prüfen:

„Entweder A oder B“ verlangt eine mögliche Belegung für „w-f“ und eine für „f-w“, wogegen „Wenn B, dann C“ nicht verstoßen darf. Das ist mit Hilfseinsatz der Matrixzeilen 4 und 5 gewährleistet, so dass die Prämisse wahr ist. Die Wahrheit ist aber an die vorgegebene Struktur gebunden, in die alle drei Aussagen einbezogen sind. Nichts verlautet darüber, dass die Wahrheit bei beliebigen Strukturen erhalten bleibt, und doch ist die Konklusion ein Schritt in diese Richtung: Da dort „B“ nicht erscheint, ist für eine Aussage Beliebigkeit nicht mehr ausgeschlossen. Die Konklusion überzieht somit die Aussagekraft der Prämisse und verletzt die Entailment-Forderung. Der Schluss ist daher auch konnektiv ungültig, wenn man nicht von vorn herein auf den falschen Aufbau verzichten will.

Die ganze Wahrheit ist aber noch nicht erreicht. Denn die erwogene Konklusion ist ja wahr, und das ist in Anbetracht der Ähnlichkeit der Aussagen wohl der Grund, dass die Schüler den Schluss gern akzeptiert hätten. Die Wahrheit erklärt sich jedoch anders: Sie ist aus wahren mathematischen Aussagen abgeleitet, die neben jenen in der Prämisse entwickelt wurden, so dass es sich um eine davon unabhängige Wahrheit handelt. Ein einfacheres Beispiel macht diesen Fall deutlich: Die Aussage

> „14 ist durch 7 teilbar"

ist gemäß unserem Zahlensystem wahr, ohne dass sie sich im Geringsten aus

> „Wenn eine Zahl durch 8 teilbar ist, ist sie durch 4 teilbar"

erschließen lässt. Die Aufdeckung logischer Beziehungen und ihrer Grenzen ist, wie diese spezifischen Erörterungen erneut zeigen, schon bei noch leichten konnektiven Verknüpfungen mit ziemlichen Anstrengungen verbunden, so dass der Lehrer sehr aufpassen sollte, dass die Schüler nicht überfordert werden.

4.3.4.5 Redundante Aussagen als Störungen logischer Folgerichtigkeit

Die noch ausgeklammerte Redundanz, worunter Aussagen verstanden werden sollen, die innerhalb eines Schlussvorgangs völlig unnötig erwähnt sind, hätte auch am Ende des vorherigen Abschnitts ihren Platz gefunden, doch dürfte es zweckmäßiger sein, sie wegen ihrer einflussreichen sinnverändernden Rolle abgesondert hervorzuheben. In den Diskussionen der Logiker sind sie oft unberechtigt vertreten, um vom Diskussionspartner benutzte Argumente zu widerlegen. Unsere Auseinandersetzung mit Schamberger kam damit mehrfach in Berührung. Ihr Einfluss geht so weit, dass der eine oder andere ungültig erscheinende umgangssprachliche Schluss „gerettet" werden könnte, wenn man in einer Sonderregel die Redundanz untersagte:

Redundante Störungen resultieren meist aus den eingesetzten Termini, doch lassen die logischen Operatoren auch direkte Verstöße zu. Insbesondere gilt das für die Operatoren „wenn-dann" und „oder". Nicht wenige Anwendungen von „wenn-dann" schließen untrennbar „immer" ein, weisen aber trotzdem oft noch den Operator „alle" auf, so dass die Aussage redundant wird. Bei „oder" ist vielfach die genaue Wiedergabe der jeweils möglichen Glieder gefordert, aber in Unwissenheit wird dagegen verstoßen, z. B. Falle der Aufzählung der verschiedenen

Wurzeln aus natürlichen Zahlen, in der häufig echte Brüche überziehend mitgenannt werden. Die anderen Operatoren unterliegen der Gefahr der Redundanz in geringerem Maße, doch strahlen in kombinierter Anwendung die ersteren Operatoren ihre Eigenarten aus, und das führt dann in Verbindung mit gewissen Termini zu der oben erwähnten Schlusseinschränkung.

Als Beispiel sei die Aussage

> „Wenn eine Funktion trigonometrischen Charakter hat, bei x=π ein Maximum liegt und bei x=2π ein Wendepunkt, dann liegt bei x=3π ein Minimum“

gewählt, aus der legitim unter Zustimmung der Schüler auf

> „Wenn eine Funktion trigonometrischen Charakter hat und bei x=π ein Maximum liegt, dann gilt: Wenn (zusätzlich) bei x=2π ein Wendepunkt liegt, dann liegt bei x=3π ein Minimum“

geschlossen werden darf. Für den folgenden Schluss gilt dies jedoch nicht:

> „Wenn eine Funktion trigonometrischen Charakter hat, bei x=π ein Maximum liegt sowie bei x=2π ein Wendepunkt und 7 eine Primzahl ist, dann liegt bei x=3π ein Minimum“

lässt einen Schluss auf

> „Wenn eine Funktion trigonometrischen Charakter hat und bei x= π ein-Maximum liegt sowie bei x=2π ein Wendepunkt, dann gilt: Wenn 7 eine Primzahl ist, dann liegt bei x=3π ein Minimum“

nicht zu. Die Schüler werden wahrscheinlich die Konklusion für Unsinn halten; während unsere seriösen Analysen gleichbedeutend ergeben, dass unter den genannten Vorbedingungen nie 7 keine Primzahl ist und nie x einen anderen Wert als 3π besitzt, so dass die Konklusion die Schlussbedingungen nicht erfüllt. Auf die Prämisse hat die redundante Aussage „7 ist eine Primzahl“ keinen Einfluss; sie bleibt wahr, und für „vernünftige“ Schlüsse gilt dasselbe.

Der generelle Ausschluss redundanter Aussagen birgt jedoch eine Gefahr in sich, da die Redundanz längst nicht immer gut erkennbar ist. Schon der obige Schluss zu den Wurzeln natürlicher Zahlen gehört dazu, weil er missbraucht werden kann. Die mögliche Redundanz muss daher sichtbar gemacht werden, und so wären gründliche Prüfungen erforderlich, die sich in die am Ende des letzten Abschnitts erläuterten Methoden einreihen lassen.

4.3.5 Übersicht über die wichtigsten schulmathematischen Schlussverfahren

Nach der Abrundung der unseres Erachtens für den Innenaufbau der schulmathematischen Schlussverfahren maßgebenden Fragen soll es nunmehr, wie schon angekündigt, abschließend um eine zusammenfassende Übersicht über den Inhalt der Hauptanforderungen an die Schüler gehen. Anhand der wichtigsten Schlussverfahren, in die das verlangte ontologische Wissen eingebunden ist, werden wir versuchen, deutlich zu machen, was die Schüler im Kern erwartet. Auch für die Lehrer dürfte dies nicht anspruchslos sein, denn wir haben uns ja von dem traditionellen Weg der einseitigen Bevorzugung kalkküllogischer Betrachtungen gelöst, so dass das schöpferische Durchdenken bei den Grundlagen beginnt.

Ausgangspunkt und Richtschnur für die Abfolge der Gedanken soll die bereits im Ansatz angesprochene Unterscheidung zwischen inhaltsabhängigen – den sogenannten finiten – und davon unabhängigen Schlussverfahren sein. Den letzteren wollen wir aus anschließend zu erläuternden Gründen den Namen „logisch“ geben.

4.3.5.1 „Logische“ Schlussverfahren

Im konkreten Sprachaufbau ist wahrscheinlich am ehesten erkennbar, dass die umgangssprachlichen logischen Operatoren auf den Sprachinhalt beweglich reagieren, während die Operatoren der Kalküle in ihrer axiomatisch-definitorischen Festigkeit der Sprache einen formal klar bestimmten Halt verleihen. Daran wollen wir anknüpfen und zuerst den Operator „wenn-dann“ noch einmal näher betrachten, der in kürzester Form über den von Stufe zu Stufe verlaufenden menschlichen Erkenntnisfortschritt informiert. Trotz seiner Mehrdeutigkeit fanden kluge Köpfe aber schon vor ewigen Zeiten eine Schlussregel, die seitdem als *die grundlegende Regel* schlechthin verstanden wird:

> Aus „wenn p, dann q“ und „p“ folgt „q“, und das unabhängig davon, was „wenn-dann“ detailliert ausdrücken soll.

Die Erklärung ist nicht einfach und resultiert aus der Beobachtung, dass die Schlussform vom Sprachinhalt völlig abstrahiert: Wichtig ist allein, dass, sollten die beiden ersten Aussagen wahr sein oder als wahr angenommen werden, die letzte Aussage nicht falsch sein kann. Der Schluss ist berühmt geworden unter dem Namen „modus ponens“[157] und entpuppt sich selbst als adjunktiv, erlaubt aber Anwendungen auf adjunktive und konnektive Teilaussagen. Das bedeutet, dass sowohl „p seq q“ als auch z. B. „immer wenn p, dann q“ zusammen mit „p“ das Recht geben, auf „q“ zu schließen, wobei die Schlusswege verschieden bleiben.

Eine *zweite Grundregel*, die der *Einsetzung*, spielt in der Schulmathematik meist als Substitution ebenfalls eine große Rolle und verbreitert die Anwendung der ersteren wegen der Dominanz algebraischer Gleichungen erheblich. Z. B. lässt sich die Funktion

„$f(x) = \sin^{\ln x}$“

sehr gut ableiten, wenn im ersten Schritt

„$g(x) = \ln x$“

substituiert wird, woraus als innere Ableitung zunächst

„$g'(x) = x^{-1}$“

und schließlich insgesamt

„$f'(x) = \cos^{\ln x} x^{-1}$“

entsteht.

[157] Die „einsetzende“ Schlussweise, die eigentlich verdeckt die Prämisse wiederholt.

Eine *dritte und letzte Grundregel* richtet sich prädikatenlogisch auf die Beziehung zwischen freien Variablen und dem Alloperator, wird schulmathematisch aber kaum als Regel, sondern fast nur in schnell einsichtigen Einzelfällen genutzt. Zusätzliche Erörterungen erübrigen sich deshalb.

Aus den „logischen" Grundregeln ergeben sich vielfältige sekundäre Regeln, mit denen der Lehrer selbstständig zurechtkommen sollte. Nur am Beispiel einer Erweiterung der bedeutsamen und bereits analysierten Kontraposition

> „wenn nicht q, dann nicht p"

wollen wir methodische Hilfe demonstrieren.

Das Beispiel lautet:

> Prämisse: Wenn für eine Funktion bekannt ist, dass sie quadratischen Charakter hat (A) und ihr Bild die x-Achse schneidet (B), dann besitzt ihr Bild noch einen zweiten Schnittpunkt mit der x-Achse (C).
> Konklusion: Wenn die Funktion (zwar) quadratischen Charakter hat (A), doch ihr Bild keine zwei Schnittpunkte mit der x-Achse (= keinen zweiten Schnittpunkt (nicht C)) besitzt, dann schneidet ihr Bild überhaupt nicht die x-Achse (= besitzt auch keinen ersten Schnittpunkt (nicht B)).

Die Kontraposition wird für ihre Grundform als „logisch" gültig vorausgesetzt, doch es fragt sich, ob dies für das anscheinend kompliziertere Beispiel auch gilt. Ein genauer Blick in die Struktur zeigt, dass (A) nach der Umformung konstant geblieben ist, während (B) und (C) kontrapositioniert wurden. Zu erwarten wäre daher wieder „logische" Gültigkeit, und die adjunktive Matrizenprüfung bestätigt dies: Alle acht Matrixzeilen sind mathematisch belegbar, so dass beliebige Konnektivitäten erfüllt sind.

Neben der „klassischen" Kontraposition hätten auch sinngleiche Abwandlungen genommen werden können wie z. B.

> „Aus ‚wenn p, dann q' und ‚nicht q' folgt ‚nicht p'".

Die Prüfungen wären für diese einfachen Variationen so ähnlich, dass sehr gute Schüler von der Beweisführung nicht ausgeschlossen werden sollten. Eine derartige logisch-theoretische Tätigkeit brächte immer auch verbesserte Fähigkeiten in der Anwendung mit sich.

4.3.5.2 Finite Schlussverfahren

Vermutlich dominieren in der Schulmathematik die zugehörigen Schlussfiguren, denn sie sind mit der vollen Ausschöpfung der umgangssprachlichen logischen Operatoren verbunden. Wir haben etliche in den verschiedensten Situationen in unsystematischer Form kennengelernt, und es fällt nunmehr sehr schwer, ein richtiges Maß für die Aufnahme einer Schlussfigur in diese Übersicht zu finden. Eine erste sinnvolle Differenzierung könnte damit begründet werden, dass die Schlussfiguren herauszuheben wären, die nur partiell finiten Charakter tragen und Tendenzen besitzen, die ins „rein Logische" weisen. Eine zweite Untergliederung sollte dann an der Wichtigkeit des Schlusses für den Unterricht gemessen werden, womit aber „ein weites Feld" betreten wird. Allein unserer nicht geringen Erfahrung geschuldet, möchten wir drei Schlussfiguren nennen, die aussagen- und prädikatenlogisch häufig, doch oft nicht korrekt differenzierend genutzt werden:

Es sind dies die Morganschen Regeln, der Kettenschluss und der Disjunktive Syllogismus. Sie sind in der Auseinandersetzung mit Ch. Schamberger und in mehrfacher Hinsicht bei Erörterungen ontologischer sowie gültigkeitsbedingter Fragen zur Sprache gekommen, so dass auf eine nochmalige ins Detail gehende Darstellung verzichtet werden soll. Ihre Schwierigkeiten nehmen schon aussagenlogisch in Kombination der konnektiven logischen Operatoren „wenn-dann" und „oder" deutlich zu; der zusätzliche Einsatz der Negation verstärkt diese Tendenz durch ihren Einfluß auf die untrennbar mit der Konnektivität verbundenen Modalitäten. Die Prädikatenlogik ihrerseits eröffnet über die Aussagenlogik hinaus mit der Aufgliederung der Struktur der Aussagen eine neue Kette logischer Schlusskomplikationen, die vor allem die korrekte Platzierung der Quantoren und die Korrektheit der innerstrukturellen Umformungen der Aussagen betreffen, erleichtert in bisheriger Hinsicht aber eine richtige adjunktiv-konnektive Unterscheidung, da sie auf Annahmen weitgehend verzichtet.

Die Abgrenzung der vielfältigen Bedeutungsnuancen in den umgangssprachlichen logischen Operatoren unterliegt neben unseren sowie noch ausstehenden

Bemühungen einer unüberschaubaren Staffelung nicht geringfügiger subjektive Wertungen und muss in letzter Hinsicht dem jeweiligen Lehrer überlassen bleiben. Das geht so weit, dass ihm das Recht einzuräumen wäre, Sprachbetonungen zu berücksichtigen. Nicht selten ist zu beobachten, dass Schüler gerade bei „normalen“ Implikationen die Betonung bei „wenn“ als Äquivalenz interpretieren, um dann gegen den mathematischen Sinn auf gleichgerichtetes „wenn nicht – dann nicht“ zu schließen. Verhindern lässt sich das sicher nicht; dafür ist die Umgangssprache zu lebendig, zu beweglich, und auch unser Versuch, der hiermit beendet werden soll, wird höchstens Linderungen in die logischen „Unfälle“ bringen.

Appendix: Ist das berüchtigte „Ziegenproblem" wirklich gelöst?

Es geschieht sicher nicht oft, dass ein mathematisches Problem die Gemüter erregt. Und es wäre wohl auch im vorliegenden Fall in der Allgemeinheit ruhig geblieben, wenn nicht die Mathematik den Weg auf die Fernsehbühne gefunden und wenn nicht eine wegen ihrer Klugheit berühmte Frau eine ungewöhnliche Antwort gegeben hätte. So aber explodierte besonders in den USA die öffentliche Stimmung mit meist ablehnender Haltung jener Frau gegenüber. Was war geschehen? Zunächst zum Sachgegenstand des Streits. Zu einer amerikanischen Quizshow gehörte vor ungefähr 30 Jahren ein Spiel mit drei durch Türen verschlossenen Zimmern, in denen sich auf der Bühne ein Luxusauto und zwei Ziegen – verteilt auf die drei Zimmer – befanden. Das Spiel beginnt mit der Frage an einen der Spielkandidaten, hinter welcher Tür das Auto stehe. Nach der Antwort öffnet der Moderator die Tür, die weder gewählt ist noch das Auto abschirmt, und fragt diesmal danach, ob der Kandidat bei der Erstwahl bleiben möchte, mit dem Hintergedanken, ob ein Wechsel eventuell bessere Gewinnchancen böte.

Soweit zum Sachgegenstand, in dem offenbar viele ein größeres Problem sahen, so dass 1991 ein Kandidat die damals angeblich klügste Frau der Welt, eine gewisse Marilyn vos Savant, um Hilfe bat. Sie soll geantwortet haben: „Yes, you should switch. The first door has a 1:3 chance of winning, but the second door has a 2:3 chance." Diese Antwort löste eine regelrechte Volkswut aus – nach Überschlagsrechnungen hätten bei ungefähr 10 000 Leserzuschriften rd. 90 %, z. T. mit großen Beschimpfungen, die Empfehlung abgelehnt –, da anscheinend nach Überzeugung einer sehr, sehr großen Mehrheit, worunter auch hochrangige Mathematiker wie Paul Erdős waren, ein Wechsel nichts brächte, weil die Chancen bei zwei Türen 50:50 betrügen. Ruhe in den Streit, der in zahlreichen führenden Zeitschriften und sogar monographisch[158] ausgefochten wurde, kam dann schließlich durch die Computer, die bei zahllosen Wiederholungen des Spiels nachwiesen, dass *in einem solchen Fall* – man beachte bitte beim weiteren Studium des Buches diesen kleinen Zusatz – der Wechsel die Gewinnchancen auf 2:3 erhöht. Richtig überzeugt wurde die gegnerische Mehrheit aber wohl bis heute nicht, wenn man gelegentliche Äußerungen in den Medien – mehr kann man ja bei der Übermacht der Computer nicht erwarten – entsprechend deutet. Die von uns als Überschrift gewählte Frage geht selbstverständlich in die gleiche Richtung, und so ist womöglich etwas übersehen worden. Zumindest dürfte weiterhin, wie ein Autor 2004 in der „Zeit“ schrieb, das sogenannte „Ziegenproblem“ als „Königin der Denkillusionen“ verstanden werden.

Wir möchten unsere Erörterungen mit Bemerkungen zu Savants Begründung beginnen. Dafür existieren verschiedene Formulierungen, und oft wird die folgende herangezogen: „Ja, Sie sollten wechseln. […] Hier ist ein guter Weg, sich das Geschehen vorzustellen. Nehmen Sie an, es gäbe eine Million Tore und Sie wählen Tor Nummer 1. Dann öffnet der Moderator, der weiß, was hinter den Toren ist und der das eine Tor mit dem Preis immer vermeidet, alle Tore bis auf Tor Nummer 777 777. Sie würden doch sofort zu diesem Tor wechseln, oder nicht?“[159] Die Begründung mutet mehr als eigenartig an. Wann, nach wieviel Versuchen schält sich denn heraus, worauf sich der Vorgang konzentrieren könnte? Und die gewählte Nummer 1 bleibt außerdem übrig, genau wie bei der Quizshow, um die es geht. Diese Sätze vos Savants taugen gar nichts, und daher stellen wir ihren Standpunkt einmal in den Worten eines Experten vor, z. B. in den Worten Norbert Henzes: „Das Auto ist [nach der ersten Wahl, H. A.] mit Wahrscheinlichkeit 1:3 hinter Tür 1 und folglich mit Wahrscheinlichkeit 2:3 hinter einer der anderen Türen. Öffnet der Moderator eine der beiden Türen, so steht die Tür fest, hinter welcher das Auto mit Wahrscheinlichkeit 2:3 verborgen ist. Folglich verdoppelt Wechseln die Chancen auf den Hauptgewinn.“[160] Die knappe Ausdrucksweise Henzes lässt mehrere Interpretationen zu, darunter auch die einer Leserzuschrift, die Gero von

158 Gero von Randow: Das Ziegenproblem. Denken in Wahrscheinlichkeiten, 2. Aufl., Hamburg 1992/2004–05.

159 Veröffentlicht z. B. in Wikipedia vom 23. Februar 2017.

160 Norbert Henze: Stochastik für Einsteiger. Eine Einführung in die faszinierende Welt des Zufalls, 12., verbesserte und erweiterte Aufl., Wiesbaden 1997/2018, S. 48.

Randow ohne Zustimmung veröffentlichte: „Marilyns Irrtum ist einer der wohl verbreitetsten, wenn es um Probleme der Wahrscheinlichkeit geht: nämlich die Annahme, dass eliminierte Möglichkeiten noch immer die Wahrscheinlichkeiten der fortbestehenden Möglichkeiten beeinflussen.“[161] Zumindest heißt das, dass vos Savant unterschiedlich interpretierbar ist, so dass man mit ihren Begründungen nicht weit kommt. Es ist deshalb unseres Erachtens kein Wunder, dass die überwiegende Mehrheit der Wortmeldungen ihre Äußerungen damals ablehnte. Sie unterschätzte wohl die Schwierigkeiten, und darin folgten ihr andere, von denen wir eine Wertung herausgesucht haben, weil sie durch ein überzogenes Selbstbewusstsein auffiel.

Sie stammt von Jochen Paulus, der 2004 in „Zeit“ einen Beitrag unter der Überschrift „Das Rätsel der drei Türen“ mit dem folgenden Zusatz veröffentlichte: „Am so genannten Ziegenproblem bissen sich sogar Nobelpreisträger die Zähne aus. Deutsche Forscher haben endlich einen Weg gefunden, die Lösung anschaulich zu erklären“[162] Danach wäre es Wissenschaftlern vom Berliner Max-Planck-Institut für Bildungsforschung gelungen, die verbreitete Verständnislosigkeit für Frau Savants Lösung zu überwinden. Selbst Schüler seien der neuen Erklärung der Psychologen und Pädagogen gefolgt, die den entscheidenden Trick angewandt hätten, nicht die Aufgabe analysiert zu haben, sondern geschaut zu haben, wie die wenigen Leute, die das Problem verstanden haben, vorgegangen sind. Abschließend wären die Beobachtungen dann mit Erkenntnissen der Denkpsychologie zur funktionierenden Erklärung vereinigt worden.

Das klingt alles sehr klug und weise, so dass die Lösung näher betrachtet werden soll:

> „Als Schlüssel erwies es sich, auch die Perspektive des Showmasters einzunehmen statt nur die des Kandidaten. Der zweite Kunstgriff besteht darin, nicht über abstrakte Wahrscheinlichkeiten zu räsonieren, sondern konkrete Fälle durchzuspielen. Es gibt ja nur drei Türen, und hinter einer muss das Auto stehen. Die drei – gleich wahrscheinlichen – Möglichkeiten lauten:

[161] Randow, Ziegenproblem, S. 70, als Wiedergabe einer Diskussionsmeldung, die er selbst nicht anerkennt.

[162] „Zeit“ vom 18.11.2004.

> Erstens: Das Auto steht hinter Tür eins. In unserem Beispiel hat der Kandidat diese Tür gewählt, es wäre also sinnvoll, bei dieser Tür zu bleiben, was immer der Showmaster tut.
>
> Zweitens: Das Auto steht hinter Tür drei. Dann muss der Showmaster natürlich Tür zwei öffnen. Denn er darf nicht das Auto hinter Tür drei zeigen, und er darf auch nicht enthüllen, ob der Kandidat mit Tür eins richtig liegt. In diesem Fall ist also das Wechseln zur verbleibenden Tür drei vorteilhaft.
>
> Drittens: Das Auto steht hinter Tür zwei. Der Fall ist ein Spiegelbild des vorigen, nur dass der Showmaster diesmal Tür drei öffnet. Wieder verhilft Wechseln zur verbleibenden Tür zum Gewinn.
>
> Fazit: Wer wechselt, gewinnt in zwei von drei Fällen, also empfiehlt sich Wechseln. So einfach ist das. Fast schon zu einfach, wie das Krauss-Team [die Psychologen und Pädagogen des Max-Planck-Instituts, H. A.] feststellen musste.“

Das Team hatte nämlich bei der Auswertung eines Tests für den Leistungskurs Mathematik der 13. Klasse eines Berliner Gymnasiums die traurige Entdeckung gemacht, dass die Schüler die Forscher wegen der „Leichtigkeit“ der Aufgabe veralbert hatten und wider bessere Einsicht die verkehrte Antwort gegeben hätten. Die Aufgabe sei für einen solch „hochrangigen“ Kurs eine Zumutung gewesen.

Soweit der Beitrag in der „Zeit“, der den offenkundigen Eindruck vermittelt, dass das „Ziegenproblem“ die Welt völlig verdreht haben muss: „Kleine“ Berliner Gymnasiasten können nur lächeln, und der „große“ Erdős sowie andere hochrangige Wissenschaftler scheitern. Meinen die Damen und Herren des Max-Planck-Instituts für Bildungsforschung nicht, dass das gar nicht möglich ist? Es dürfte doch wohl klar sein, dass irgendetwas Ungewohntes, Ungelöstes im Spiel sein muss. Und wie oft in der Wissenschaft ist es leicht möglich, dass in ihrem Anfangsbereich elementare – nicht unbedingt einfach lösbare – Prämissen vorschnell festgelegt wurden. Man fragt sich wirklich, woraus die Berliner Bildungsforscher ihr Selbstbewusstsein geschöpft haben?

Wir neigen hingegen zu dem Standpunkt, dass die Überlegungen zum Rätsel gedanklich zu flach angesetzt sind. Zunächst hätte auffallen müssen, dass, obwohl die Computer inzwischen „Tag und Nacht“ den Menschen einhämmern, dass das fragliche Verhältnis 2:1 beträgt, die Volksmeinung unverdrossen dagegen steht. Und tatsächlich: Das Problem des Rätsels ist der Einzelfall, nicht die Wiederholung.

Sobald der Kandidat mindestens zwei Versuche hat, besitzt er eine Möglichkeit, den Platz beizubehalten, doch zwei Möglichkeiten fürs Wechseln. Die Menschen sind vorrangig an der gesonderten Bestimmung des Einzelfalls interessiert; darum geht es ihnen. Vos Savant und viele andere haben das nicht erkannt. Die erhöhte Genauigkeit ist schon bei der Frage des Spielers an vos Savant vonnöten: Er drückt sich im Einzelfall aus, und vos Savant antwortet im gleichen Sprachstil, bezieht aber in der Begründung mehrere Wiederholungen heran, so dass sie anscheinend darin keinen Unterschied sieht. Die Berliner Bildungsforscher blenden den Einzelfall sogar gänzlich aus und verwenden von Anfang an die drei möglichen Autoplatzierungen en bloc nebeneinander, womit sie offenbar – wie die Schüleräußerungen es beweisen –, die eigentliche Schwierigkeit umgangen haben.

Nun gibt es stärkere Begründungen für die Vorteilhaftigkeit eines Wechsels als die, die vos Savant selbst wählte bzw. die Berliner Bildungsforscher anboten, und dazu gehört die Henzes, der fast als Ausnahme zu betrachten ist, weil er den Einzelfall akribisch genau analysiert hat[163]:

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit nimmt er an, dass der Kandidat bei der ersten Wahl auf Tür 1 zeigt, und er modelliert die Situation als zweistufiges Experiment mit den Paaren

$\varpi_1 = (1,2)$, $\varpi_2 = (1,3)$, $\varpi_3 = (2,3)$ und $\varpi_4 = (3,2)$,

wobei die erste Zahl die mögliche Tür des Autos und die zweite die mögliche Türöffnung darstellt[164].

Die Wahrscheinlichkeit $p(\varpi) \in P((\varpi))$ wird als

$p(\varpi) = p_1(a_1)p_2(a_2/a_1)$

angesetzt, worunter die Multiplikation der Wahrscheinlichkeiten

$p_1(j) = 1/3$ (j = 1,2,3) und der Übergangswahrscheinlichkeit $p_2(k/j)$ (k = 2,3) (= Wahrscheinlichkeit von j unter der Bedingung k)

163 Henze, Stochastik, S. 106.

164 Henze, Stochastik, unterlief der kleine Fehler, für die Türöffnungen die Menge (1,2,3) zu nennen, obwohl für ihn die Türwahl 1 des Kandidaten feste Voraussetzung ist.

zu verstehen ist. Da der Moderator das Auto nicht zeigen und auch Tür 1 nicht öffnen darf, gelten $p_2(3/2) = 1$ sowie $p_2(2/3) = 1$, während Henze für den Fall, dass sich das Auto hinter der vom Kandidaten gewählten Tür 1 befindet, annimmt, dass der Moderator *rein zufällig* eine der beiden Ziegentüren auswählt. Diese Annahme liefert

$p_2(2/1) = p_2(3/1) = ½$.

Da alle anderen Übergangswahrscheinlichkeiten gleich null sind, geht

$p(\varpi) = p_1(a_1)p_2(a_2/a_1)$ mit $\varpi = (j,k)$ in
$(1/3$, falls $j = 2$ oder 3, $k = 3$ oder 2 und $j \neq k)$
$p(j,k) = (1/6$, falls $j = 1$ und $k \neq 1)$
$(0$ sonst$)$

über.

Der Wortlaut Henzes schafft in den nachfolgenden Zeilen partiell etwas Verwirrung, die aber nicht ausführlich analysiert werden soll, da ihr Sinn für uns hinreichend klar ist. Den Text haben wir aber stilistisch verändert:

Nach der uns bekannten Spielanlage befindet sich das Auto hinter Tür 2, so dass wir zusammen mit dem Moderator wissen, dass dieser wegen der Erstwahl des Kandidaten, die Tür 1 galt, Tür 3 öffnen *musste*. Bleibt nun der Kandidat bei der erstgewählten Tür 1 in der Annahme, dass dort das Auto wäre, so gewänne er, wie oben erläutert, bei $p_1(1) = 1/3$ und $p_2(3/1) = ½$ mit der Wahrscheinlichkeit $1/6 = p_1(1)$ mal $p_2(3/1)$. Wechselt er dagegen zu Tür 2, so träfe er die gegebene Konstellation bei $p_1(2) = 1/3$ und $p_2(3/2) = 1$ mit der Wahrscheinlichkeit 1/3.

Der Wechsel würde also die Gewinnchancen verdoppeln, womit wir beim entscheidenden Punkt wären: Die Zahlen sind an dieser Stelle gemäß unserer Terminologie nur akzeptabel, wenn „oder“ adjunktiv als „vel/aut“ verstanden wird. Doch woher weiß Henze, dass die Menschen unter den genannten Bedingungen genauso denken? Nach meinen tausendfachen Beobachtungen ist für sie eine derartige Oder-Verknüpfung fast ausnahmslos in dem Sinne konnektiv bestimmt, dass beide sprachliche Seiten eine Belegung haben müssen, dass demnach die Öffnung der Tür 3 mit der Öffnung der Tür 2 verzahnt ist; beides ist nicht voneinander zu trennen. Die geöffnete Tür 3 steht stellvertretend für Tür 2 mit und umgekehrt, so dass es berechtigt ist,

$$p(1/3) = p(1/2) = 1$$

zu werten, wodurch im isoliert betrachteten Einzelfall der Wechsel weder Vorteil noch Nachteil bringt. Erst die Kopplung der Varianten verändert dann auch im konnektiven Verständnis die Wahrscheinlichkeiten zugunsten des Wechsels.

Mit diesem (vielleicht) überraschenden Ergebnis, dass die verfemte Auffassung vermutlich insofern richtig ist, als das „Volk" hier im Unterschied zu vos Savant, Henze und den Computern „oder" konnektiv *definiert* versteht, wird sichtbar, dass die eigentliche Schwierigkeit des Rätsels nicht wahrscheinlichkeitsbedingt ist: Im Grunde geht es nur um „oder", d. h. um eine logische Frage, die sich unmittelbar auf die Wahrscheinlichkeitsbestimmung auswirkt und in legitimer Gültigkeit zu unterschiedlichen Zahlen führt. Es sind, wie wir versucht haben nachzuweisen, die Fragen, auf die die beiden Logiksysteme voneinander abweichende Antworten geben, die *definitionsmäßig* verschieden sind. Ausgleichende mathematische Zusätze sind noch nicht benutzt, und so bleiben *per Definition* Unterschiede, die sich der Frage „wahr-falsch" entziehen, wovon aber kaum jemandem etwas bekannt ist. Drastisch ausgedrückt, liegt die Erklärung dafür in selbstverschuldeter Unwissenheit: Es dürfte fast sicher sein, dass nicht einer der Diskussionsteilnehmer Reichenbachs Theorie über adjunktive und konnektive logische Operatoren sowie über ihre komplizierten umgangssprachlichen Verzahnungen wusste und weiß. Sie liegen jedoch seit 75 Jahren vor, und sie stammen von einem der stärksten Wissenschaftler überhaupt.

Ohne dieses Wissen blieb auch der auf „oder" bezogene „gesunde Menschenverstand" unerkannt, doch Mathematiker wie Erdős nutzten ihn offenbar intuitiv bei der Lösung der Rätselfrage und wurden dafür von den „Weisen" gescholten, die mit „gelehrten" Kenntnissen herangingen. Daran wäre bei Übergehung der Schelte nichts zu kritisieren gewesen, denn jedem steht Definitionsfreiheit zu. Erst die Schelte war es dann, die ihnen nicht zustand und sie ins Unrecht setzte, das leider immer noch dominiert. Man kann sich deshalb nur wünschen, dass diese Schrift vielleicht eine Wende einleitet.

Schlussbemerkungen

Die Arbeit liegt nunmehr vor und soll sich der Kritik stellen, auf die man sicher nicht lange warten muss, auch wenn unseres Erachtens einige gute bzw. neue Gedanken nicht übersehen werden dürften. Als das wohl wichtigste Positivum sei herausgehoben, dass erstmalig versucht wurde, die Schulmathematik in ihrer logischen Besonderheit wissenschaftlich zu erfassen. Dabei zeigte sich etwas überraschend, dass Höhere Mathematik und Schulmathematik nicht den gleichen Logikkonzeptionen folgen. Die Höhere Mathematik wechselte vor ungefähr 100 Jahren schrittweise unter Beifügung mathematisch-mengentheoretischer Axiome von bisher genutzten intuitiven logischen Prinzipien der Umgangssprache zu den Axiomen und Schlussregeln konstruierter Logiksysteme, von denen vor allem der von Frege begründete Kalkül zu nennen wäre. Die Schulmathematik verblieb dagegen bei der traditionellen Vorgehensweise der Logik, doch in modifizierter Form, wie diese Arbeit nebenbei nachweisen konnte. Vor allem aber zeigte sich deutlich, dass die Schulmathematik mit einem direkten Zugriff logischer Kalküle logisch nicht zu bewältigen ist, so dass die immer wiederkehrenden Versuche, auf einem solchen Wege zum Ziel zu kommen, scheiterten und scheitern werden. Erkannt wurde, dass die erforderliche Explizierung der schulmathematisch-umgangssprachlichen Logik sich zumindest am besten dadurch voranbringen lässt, dass deren schwierigkeitsbeladene logische Operatoren viel genauer und viel umfassender als bisher zu analysieren sind. Dieser Erkenntnis folgten wir und lieferten mehrere tiefere und daher weiterführende Ideen zu den logischen Eigenschaften wenigstens der wichtigsten Operatoren und zu den Auswirkungen auf die schulmathematische Schlussweise, so dass daran wohl niemand vorbeigehen kann.

Aus Gründen wissenschaftlicher Ehrlichkeit ist an dieser Stelle aber zu betonen, dass die logische Basis für unsere Überlegungen Reichenbach vor 75 Jahren legte, als er nach sehr gezielten Sprachbeobachtungen seine Lehre von der adjunktiven und der konnektiven Verwendung der logischen Operatoren entwickelte, worin allein wahrheitsfunktional folgernde aussagenlogische Operatoren von denen unterschieden werden, die dafür *zusätzliche Parameter* einsetzen. Leider und mir unverständlich ist diese Auffassung unter den Logikern und Mathematikern weitgehend unbekannt geblieben, und so konnte es auch erst jüngst geschehen, worauf wir gründlich eingegangen sind, dass Schamberger ein Buch über die Logik der Umgangssprache schreibt, in dem nicht ein Wort zu Reichenbach fällt.

Ein wenig erklärt ein bedauerlicher Umstand eine solche Praxis. Die Begründer der logischen Kalküle beabsichtigten mit diesem Schritt, die irgendwie sinnvoll-intuitiv über Jahrhunderte genutzte Logik zu verbessern, da sie den entstandenen höheren Ansprüchen der Mathematik und anderer schwieriger Wissenschaften nicht mehr genügte. Aus dieser Zielsetzung heraus behielten sie die bekannten Namen der Hauptoperatoren wie „wenn-dann", „oder" und „und" bei, und die Nachfolger beließen es so, obwohl sich bald zeigte, dass einige der neu definierten Operatoren erheblich in der Bedeutung von der ihrer Vorlagen abweichen. Von da an war es nun „eigentliche" Pflicht gerade für Logiker und Mathematiker, bei wissenschaftlicher Nutzung der logischen Operatoren vorher klar die Verwendungsweise zu benennen, doch geschieht dies vor allem in der Schulmathematik *meist nicht*. Sprachlich „purzelt" deshalb dort einiges durcheinander und erschwert das Verständnis.

Auf die zähe Dauerhaftigkeit dieser logischen Unkorrektheit hat eine sprachliche Eigenart Einfluss, an der auch wir uns mit Vorschlägen versucht haben, die aber weiterhin nicht vollständig erklärt ist. Zu Beginn der übergreifenden Schlussgedanken schrieben wir, dass die Schulmathematik sich einem direkten Zugriff der Kalküllogik entzieht, und das darf hier noch einmal unterstrichen werden. Anders sieht es jedoch unter Einbeziehung der Höheren Mathematik aus: Die Sachprobleme der Schulmathematik lassen sich einerseits logisch intuitiv mit Einsatz der Anschauung finden und lösen, doch andererseits anscheinend auch von den Axiomen der Höheren Mathematik her, ohne dass trotz der dort verwendeten Kalküllogik, für die es ja keinen unmittelbaren Zugang zur Schulmathematik gibt, bisher Unterschiede in der Bewertung der mathematischen Sachzusammenhänge aufgetreten sind. Um überhaupt zu einer vernünftigen Erklärung zu kommen, gilt es zu berücksichtigen, dass Peano und Zermelo zum Zeitpunkt ihrer Axiomatisierungen keinen vollständigen Logikkalkül 1zur Hand hatten und dass die Kalküle zwar generell von den Elementarformen der logisch-umgangssprachlichen Operatoren abgeleitet sind, doch die mathematischen Axiome umfassender sind als jene der Kalküllogik, so dass sie deren Wirkung einschränken. Das bedeutet nicht, dass irgendwelche ihrer Schlüsse ungültig werden, sondern nur, dass die eine oder andere Kalkülformel aus der Menge der sinnvollen mathematischen Ausdrücke ausgeschlossen ist. Damit ließe sich erwägen, dass die mathematischen Axiome in gleicher Weise die Nutzung des Kalküls begrenzen wie die umgangssprachlichen logischen Operatoren, obwohl sie etwas ganz anderes aussagen. Ein allgemeiner Beweis fehlt, und es wäre auch möglich, dass es eine Scheingleichheit ist, die nicht auffällt, weil die adjunktive Verknüpfung denselben Namen trägt und als Unterbestimmung nicht falsch werden kann, wenn die konnektive Variante wahr ist. Auch dann sollte es allerdings noch möglich sein zu sagen, dass die Schulmathematik von zwei recht verschiedenen Logikkonzeptionen aus erfolgreich bearbeitet wird.

Diese logische Zwitterstellung der Schulmathematik, die einmalig im Vergleich aller Wissenschaftsgebiete ist, darf übrigens als weitere Besonderheit genannt werden, deren Kenntnis aus unserer Untersuchung resultiert. Die Erklärungsphase wird sicher noch längere Zeit andauern, da aus Gründen des Wissens und des Bedürfnisses wenig Aussicht besteht, dass die Schulmathematik demnächst in Fortsetzung intensiv untersucht wird. Mein Einfluss wäre „propter barbaram" auf das vorliegende Buch begrenzt, und Schüler mit spezifischen Logikkenntnissen hinterlasse ich aus den im Vorwort angeführten Gründen nicht. Dabei wäre mehr als viel zu tun, auch wenn man die logischen Spitzenprobleme, die sich wohl auf die Quantenlogik konzentrieren werden, ausklammert. Generell müssten auf der hier interessierenden Ebene logisch-umgangssprachlich – unter Einbeziehung der Schulmathematik – besonders die zahlreichen nichtklassischen logischen Operatoren analysiert werden, worunter wiederum die begründenden Operatoren wie „da" und „weil" ganz vorn stehen sollten. Wir denken dabei nicht nur an die korrektere sprachliche Fixierung gesellschafts- und naturwissenschaftlicher Kausalitäten, in denen nicht selten zirkuläre Formulierungen bis in die Naturwissenschaften hinein nichtssagend bleiben, sondern auch an die Schulmathematik. Dort ist es üblich, für die berechtigte Nutzung eines allgemeineren mathematischen Zusammenhangs in Einzelaussagen diesen Zusammenhang mit „weil" einzuleiten und nicht mit „wenn-dann", womit neue Informationen einfließen und sprachlich eine Nähe zu naturwissenschaftlichen Anwendungen entsteht. Das ist jedoch eine eigenständige Thematik, und sie sollte hier nicht zum Anhängsel degradiert werden.

Neben den Kausalitäten seien noch einmal die modalen Operatoren zur Sprache gebracht. Wir haben sie als Vorgängerausdrücke für unsere Untersuchungen angesehen, und das ist selbstverständlich nicht verboten, doch muss dies andererseits auch nicht sein. Wegen der engen Beziehung der Operatoren „notwendig“ und „unmöglich“ zu den Kausalitäten könnte kaum widersprochen werden, wenn man kausale Fragen ebenfalls in den Vorgängerbereich für schulmathematische Problemstellungen nehmen würde. Solche Manipulationen kämen bei den Schülern sicher nicht gut an, ließen trotzdem aber offen, wie man die Platzierung allgemeiner begründen könnte. Auch dazu stehen Untersuchungen aus.

Ein letztes Wort zur „Ziegen“-Aufgabe sollte nicht fehlen: Wenn die Wortführer der derzeit anerkannten Lösung sich mehr bemüht hätten, die Logikkalküle nicht nur „an sich“ zur Hand zu nehmen, sondern auch, um darüber hinaus und für die Schulmathematik sogar vorrangig unsere Muttersprache nach ihren einfachsten Grundwörtern „und“ und „oder“ zu befragen, so hätten sie wahrscheinlich die „Volksmeinung“ nicht in dem unbescheidenen Ausmaße übergangen, wie es im „Ziegenproblem“ mit dem Wörtchen „oder“ passiert ist. Einem Volk darf in Erweiterung der Definitionsfreiheit für Experten nie aufgezwungen werden, was es mit seinen Worten ausdrücken will.

Literatur

Ackermann, Wilhelm: Begründung einer strengen Implikation, in: Journal of Symbolic Logic 21 (1956), Nr. 2.

Assing, Helmut: Einführung in die formale Logik (unter besonderer Berücksichtigung der Belange der Geschichtswissenschaft), Potsdam 1969.

Assing, Helmut: Zur Bedeutung der Aussagenlogik für den Geschichtsunterricht, in: Wissenschaftliche Zeitschrift der Pädagogischen Hochschule „Karl Liebknecht" Potsdam, Jg. 18, Heft 4/1974, S. 585–593.

Assing, Helmut: Zur Übersetzung des Ausdrucks „wenn-dann" in die Sprache der Logik, in: Wissenschaftliche Zeitschrift der Pädagogischen Hochschule „Karl Liebknecht" Potsdam, Jg. 20, Heft 4/1976, S. 579–589.

Assing, Helmut: Was kann die moderne Logik für die Geschichtswissenschaft leisten? in: Disziplinarität und Interdisziplinarität in der Geschichte (Philosophie und Wissenschaften, Heft 26), Berlin 1985, S. 5–8.

Assing, Helmut: Überlegungen zum logisch korrekten Sprachaufbau in der Geschichtswissenschaft, in: Termini – Existenz – Modalitäten (Humboldt-Universität zu Berlin, Sektion Marxistisch-Leninistische Philosophie. Philosophische Beiträge, Heft 4), Berlin 1986, S. 24–33.

Assing, Helmut: Definitionsprinzipien und Typisierung historischer Erscheinungen, in: Marxistische Typisierung und idealtypische Methode in der Geschichtswissenschaft (Studien zur Geschichte, Bd. 7), Berlin 1986, S. 305–313.

Assing, Helmut: Das konditionallogische System K. Ein Beitrag zur logischen Analyse der Umgangssprache, Diss. B (unveröffentlicht), Berlin 1979.

Assing, Helmut: Neue Überlegungen zur Konditionallogik, in: Deutsche Zeitschrift für Philosophie, Heft 12/1980, S. 1475–1486.

Assing, Helmut: Die moderne Logik und der Begriffsapparat der Geschichtswissenschaft, in: Helmut Assing: Brandenburg, Anhalt und Thüringen im Mittelalter (Zum 65. Geburtstag des Autors herausgegeben von Tilo Köhn, Lutz Partenheimer, Uwe Zietmann), Köln/Weimar/Wien 1997, S. 311–329.

Berka, Karel/Kreiser, Lothar: Logik-Texte. Kommentierte Auswahl zur Geschichte der modernen Logik, Berlin 1971.

Bigalke, Anton/Köhler, Norbert: Mathematik 11. Gymnasiale Oberstufe. Qualifikationsphase: Leistungskurs, 1. Aufl., Berlin 2019.

Blum, Wolfgang: Die Grammatik der Logik, München 2001.

Bocheński, Joseph M.: Formale Logik. 2., erweiterte Aufl. (Orbis Academicus, Bd. III,2), Freiburg i.Br./München 1962.

Brouwer, Luitzen E. J.: Intuitionistische Zerlegung mathematischer Grundbegriffe, in: Jahresbericht der Deutschen Mathematikervereinigung, Leipzig/Berlin/Stuttgart, Bd. 33 (1924).

Brun, Georg: Die richtige Formel. Philosophische Probleme der logischen Formalisierung (Studien zur Logik, Sprachphilosophie und Metaphysik, Bd. 2), Frankfurt/Main 2003.

Brun, Georg: Die Zähmung der logisch Widerspenstigen, in: Deutsche Zeitschrift für Philosophie, Bd. 65 (2017), S. 613–619.

Bühler, Axel: Einführung in die Logik. Argumentation und Folgerung, 3. Aufl., Freiburg i.Br./München 2000.

Cantor, Georg: Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre, in: Mathematische Annalen 46 (1895), Nr. 4, S. 481–512.

Cantor, Georg: Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre (Zweiter Beitrag), in: Mathematische Annalen 49 (1897), S. 207–246.

Carnap, Rudolf: Logische Syntax der Sprache, 2. Aufl., Wien 1968.

Church, Alonzo: A Note on the Entscheidungsproblem, in: Journal of Symbolic Logic 1 (1936), Nr. 1, S. 40 f.

Dölling, Evelyn: Einige Aspekte einer Logik empirischer Zusammenhänge, in: Logik und empirische Wissenschaften, hrsg. von Horst Wessel, Berlin 1977, S. 130–149.

Forster, Otto: Analysis 1. Differential- und Integralrechnung einer Veränderlichen, 6., verbesserte Aufl., Wiesbaden 2001.

Frege, Gottlob: Begriffsschrift. Eine der arithmetischen nachgebildete Formalsprache des reinen Denkens, in: Berka/Kreiser, Logik-Texte, S. 48–106 (gekürzter Nachdruck).

Frege, Gottlob: Schriften zur Logik. Aus dem Nachlass (mit einer Einleitung von Lothar Kreiser), Berlin 1973.

Gentzen, Gerhard: Untersuchungen über das logische Schließen I–II, in: Mathematische Zeitschrift 39 (1934/35), S. 176–210 und 405–431.

Gödel, Kurt: Die Vollständigkeit der Axiome des logischen Funktionenkalküls, in: Monatshefte für Mathematik 37 (1930), S. 349–360.

Gödel, Kurt: Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I, in: Monatshefte für Mathematik 38 (1931), S. 173–198.

Henze, Norbert: Stochastik für Einsteiger. Eine Einführung in die faszinierende Welt des Zufalls, 12., verbesserte und erweiterte Aufl., Wiesbaden 2018.

Heyting, Arend: Die formalen Regeln der intuitionistischen Logik (Sitzungsberichte der Preußischen Akademie der Wissenschaften, Physikalisch-mathematische Klasse), Berlin 1930.

Hilbert, David/Ackermann, Wilhelm: Grundzüge der theoretischen Logik (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen, Bd. 27), 6. Aufl., Berlin/Heidelberg/New York 1972.

Hilbert, David/Bernays, Paul: Grundlage der Mathematik I, 2. Aufl. (Die Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, Bd. 40), Berlin/Heidelberg/New York 1968.

Hoffmann, Dirk W.: Grenzen der Mathematik. Eine Reise durch die Kerngebiete der mathematischen Logik, 3. Aufl., Berlin 2018.

Jaśowski, Stanisław: On the Rules of Suppositions in Formal Logic, Bd. 1, S. 5–32.

Kutschera, Franz von/Breitkopf, Alfred: Einführung in die moderne Logik, 9., neu bearbeitete Aufl. von Stefan Wölfl, Freiburg/München 2014.

Lampert, Timm: Logische Gültigkeit umgangssprachlicher Argumente, in: Zeitschrift für Philosophische Forschung, Bd. 71/1 (2017), S. 117–122.

Langwitz, Detlef: Infinitesimalkalkül. Kontinuum und Zahlen – Eine elementare Einführung in die Nichtstandard-Analysis, Mannheim/Wien/Zürich 1978.

Leuders, Timo (Hrsg.): Mathematik-Didaktik. Praxishandbuch für die Sekundarstufe I und II, 8. Aufl., Berlin 2018.

Lewis, Clarence Irving: Implication and the algebra of logic, in: Mind, N.S. 21 (1912), S. 522–531.

Lewis, Clarence Irving: A Survey of Symbolic Logic, Berkeley, Calif., 1918.

Löffler, Winfried: Einführung in die Logik (Grundkurs Philosophie, Bd. 18), Stuttgart 2008.

Peano, Giuseppe: Arithmetices principia nova methodo exposita, Torino (Turin) 1889.

Popper, Karl R.: Logik der Forschung (Die Einheit der Gesellschaftswissenschaften: Studien in den Grenzbereichen der Wirtschafts- und Sozialwissenschaften, Bd. 4), 4. (dt.) verb. Aufl., Tübingen 1971.

Priest, Graham: An Introduction to Non-Classical Logic. From If to Is, 2. Aufl. 2008, 5. Nachdr. 2012.

Randow, Gero von: Das Ziegenproblem. Denken in Wahrscheinlichkeiten, 2. Aufl., Hamburg 2004/2005.

Reichenbach, Hans: Elements of symbolic Logic, New York/London 1947.

Reichenbach, Hans: Nomological statements and admissible operations (Studies in Logic and the Foundations of Mathematics), Amsterdam 1954.

Richter, Ewald: Quantenlogik, in: Historisches Wörterbuch der Philosophie, Bd. 7, Basel 1989, S. 1782–1785.

Robinson, Abraham: Nonstandard Analysis (Studies in Logic and the Foundations of Mathematics), Amsterdam 1966.

Schamberger, Christoph: Logik der Umgangssprache (Neue Studien zur Philosophie, Bd. 29), Göttingen 2016.

Schamberger, Christoph: Repliken, in: Zeitschrift für philosophische Forschung, Bd. 71/1 (2017), S. 123–127.

Schenk, Günter: Zur Geschichte der logischen Form, Bd. 1: Einige Entwicklungstendenzenvon der Antike bis zum Ausgang des Mittelalters, Berlin 1973.

Schurz, Gerhard: Zwischen logischer Eleganz und inhaltlicher Bedeutung, in: Zeitschrift für philosophische Forschung, Bd. 71/1 (2017), S. 110–116.

Sinowjew, Alexander A./Wessel, Horst: Logische Sprachregeln. Eine Einführung in die Logik, Berlin 1975.

Sinowjew, Alexander A.: Die logische und die physische Folgebeziehung, in: Studien zur Logik der wissenschaftlichen Erkenntnis, Berlin 1967.

Skolem, Thoralf: Über einige Grundlagenfragen der Mathematik, in: Matematisk naturvidenskapelig klasse 7 (1929), Nr. 1, S. 40 ff.

Smiley, Timothy: Entailment and Deducibility, in: Proceedings of the Aristotelian Society 59 (1959), S. 233–254.

Sonar, Thomas: Einführung in die Analysis. Unter besonderer Berücksichtigung ihrer historischen Entwicklung für Studierende des Lehramtes, Wiesbaden 1999.

Stegmüller, Wolfgang: Das Wahrheitsproblem und die Idee der Semantik. Eine Einführung in die Theorien von A. Tarski und R. Carnap, 2., unv. Aufl., Wien/New York 1968.

Strawson, Peter Frederick: On referring, in: Mind 59 (1950), S. 320–344.

Strawson, Peter Frederick: Introduction to logical theory (First publ. 1952), Reprinted London und New York 1985.

Strobach, Niko: Einführung in die Logik (Philosophie kompakt), 5. aktualisierte Aufl., Darmstadt 2019.

Tarski, Alfred: Einführung in die mathematische Logik, 2., neubearb. Aufl. (Moderne Mathematik in elementarer Darstellung 5), Göttingen 1966.

Wessel, Horst: Logik und Philosophie (Weltanschauung heute, Bd. 9), Berlin 1976.

Wessel, Horst (Hrsg.): Logik und empirische Wissenschaften. Beiträge deutscher und sowjetischer Philosophen und Logiker, Berlin 1977.

Wessel, Horst: Aussagenlogische Theorie der logischen Folgebeziehung, in: Deutsche Zeitschrift für Philosophie, Heft 12/1980, S. 1429–1442.

Wessel, Horst: Logik (Logische Philosophie, Bd. 2), Berlin 1998.

Whitehead, Alfred North/Russell, Bertrand: Principia Mathematica, Volume I, 2. Aufl. 1927, Nachdr. Cambridge 1960.

Wuttich, Klaus: Zur Analyse der intuitiven Grundlagen der epistemischen Logik, in: Deutsche Zeitschrift für Philosophie, Heft 12/1980, S. 1496–1509.

Wuttich, Klaus: Glaube, Zweifel, Wissen, Berlin 1991.

Zermelo, Ernst F. F.: Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre I, in: Mathematische Annalen 65 (1908), S. 261–281.

Zoglauer, Thomas: Einführung in die formale Logik für Philosophen, 5. durchgesehene Aufl., Göttingen 2016.

Personenregister

Abaelard, Pierre (1079–1142), bedeutender (fortan: bed.) franz. Philosoph und Logiker 58

Ackermann, Wilhelm (1896–1962), bed. Logiker 59, 73, 84, 86, 219–221

Adams, Ernest, Logiker 160–163, 178

Archimedes (um 290–212 v. Chr.), bed. griech. Mathematiker und Physiker 57, 58, 66

Aristoteles (384–322 v. Chr.), bed. griech. Philosoph und Logiker 52, 55–59, 65, 66, 71, 142, 144, 148, 159, 243

Beethoven, Ludwig van 231

Berka, Karel, Logiker 60, 61

Bernays, Paul (1888–1977), bed. Mathematiker 48

Bocheński, J. M., Logiker 57

Boole, Georg (1815–1864), bed. Logiker 9, 17–20, 57–72, 80, 89, 195–204, 219

Brouwer, Luitzen (1881–1966), bed. niederl. Logiker und Mathematiker 70

Brun, Georg, Logiker 90

Cantor, Georg (1845–1918), bed. Mathematiker 60, 66–69, 82, 90, 219

Carnap, Rudolf (1891–1970), bed. Philosoph und Logiker 73, 74

Church, Alonzo (1903–1995), bed. amer. Logiker und Mathematiker 69

Clinton, Hillary, Kandidatin fürs US-Präsidentenamt 119, 120

De Morgan, Augustus (1806–1871), engl. Mathematiker und Logiker 226

Diodoros Kronos (um 300 v. Chr.), griech. Logiker, Stoiker 55, 56

Dölling, Evelyn, Logikerin 83–85

Einstein, Albert (1879–1955), bed. Physiker 13, 73, 152, 153, 231

Enderlein, Hinrich, 1990–1994 Minister für Wissenschaft, Forschung und Kultur von Brandenburg 12

Erdős, Paul (1913–1996), bed. ungar. Mathematiker 11, 269, 272, 275

Euklid (ca. 300 v. Chr.), bed. griech. Mathematiker und Logiker 66

Euler, Leonhard (1707–1783), bed. Mathematiker 59

Fibonacci, Leonardo, ital. Mathematiker 58

Forster, Otto, Mathematiker 255, 256

Frege, Gottlob (1848–1925), bed. Logiker 9–11, 17–20, 57–89, 93–103, 109, 115, 159–171, 181, 195–207, 219, 277

Galen, Claudius (um 1130–1200), ital. Mathematiker und Logiker 58

Galois, Evariste (1811–1832), bed. franz. Mathematiker 59

Gauß, Carl Friedrich (1777–1855), bed. Mathematiker 59

Gentzen, Gerhard, Logiker 67

Gödel, Kurt (1906–1978), bed. Logiker und Mathematiker 69

Goodman, Nelson, Logiker 162

Gorbatschow, Michail, sowj. Staatsmann in versch. Führungsfunktionen 83

Grassmann, Hermann Günther (1808–1877), Mathematiker 59

Grice, Paul, Logiker 157

Heisenberg, Werner (1901–1976), bed. Physiker 153

Henze, Norbert, Mathematiker 270, 273–275

Heyting, Arend (1898–1980), bed. niederl. Logiker und Mathematiker 70

Hilbert, David (1862–1943), bed. Mathematiker und Logiker 48, 59, 66, 73

Hoffmann, Dirk W., Logiker und Mathematiker 38, 142

Hußmann, Stephan, Didaktiker 22

Jaśowski, Stanisław, poln. Logiker 67

Karl der Große (747–814), röm. Kaiser, König der Franken 152

Krauss-Team, Wissenschaftler des Max-Planck-Instituts für Bildungsforschung 272

Kreiser, Lothar, Logiker 60

Lampert, Timm, Logiker 90, 115

Langwitz, Detlef, Logiker 89

Leibniz, Gottfried Wilhelm (1646–1716), bed. Philosoph, Mathematiker, Logiker 58

Leuders, Timo, Didaktiker 22

Lewis, David, amer. Logiker 163–166, 172

Lewis, Clarence Irving, amer. Logiker 72–74, 86

Lindenberg, Udo (*1946), Musiker 117

Neckam, Alexander (1157–1217), engl. Philosoph 122, 123

Newton, Isaac (1643–1727), bed. engl. Mathematiker und Physiker 58

Paulus, Jochen, Journalist 271

Peano, Giuseppe (1858–1932), bed. ital. Mathematiker 59, 68, 221

Peirce, Charles Sanders (1839–1914), bed. amer. Philosoph und Mathematiker 67

Philon von Megara (um 300 v. Chr.), griech. Logiker, Stoiker 56, 57

Planck, Max (1858–1947), bed. Physiker 73

Platon (427–347 v. Chr.), bed. griech. Philosoph und Logiker 52, 142–144

Pythagoras (um 570–nach 510 v. Chr.), bed. griech. Mathematiker und Philosoph 52

Randow, Gero von, Logiker 270, 271

Reichenbach, Hans (1891–1953), bed. Philosoph, Logiker 10–13. 20–26, 42, 73–89, 105–107, 181–194, 200, 211, 218, 275–278

Riemann, Bernhard (1826–1866), bed. Mathematiker 59

Russell, Bertrand (1872–1971), bed. engl. Logiker, Mathematiker, Philosoph 13, 68, 73, 187

Schamberger, Christoph, Logiker 7, 9, 55–123, 170, 175, 179, 185

Scheffler, Uwe, Logiker 83

Schenk, Günter, Logiker 57

Schopenhauer, Arthur (1788–1860), bed. Philosoph 255

Schröder, Ernst (1841–1902), bed. Mathematiker und Logiker 67

Schurz, Gerhard, Logiker 90, 157, 158

Sinowjew, Alexander A. (1922–2006), bed. Logiker, Mathematiker 12, 26, 82–86, 184, 185

Skolem, Thoralf, norw. Mathematiker und Logiker 69

Smiley, Timothy, Logiker 86

Sokrates (ca. 470–399 v. Chr.), bed. griech. Philosoph 52, 127, 128

Sonar, Thomas, Mathematiker 256

Strawson, Peter Frederick, Logiker 87, 88, 91

Strobach, Niko, Logiker 86

Tarski, Alfred (1901–1983), bed. poln. Mathematiker und Logiker 90

Thales von Milet (um 620–um 545 v. Chr.), bed. griech. Mathematiker 52

Theophrastos, „Meister“schüler von Aristoteles 55

vos Savant, Marilyn (*1946), amer. Kolumnistin und einstige Intelligenz-Rekordhalterin 269–275

Wessel, Horst (1936–2019), Logiker 12, 18, 26, 82–89

Whitehead, Alfred North (1861–1947), bed. engl. Mathematiker 69

Zermelo, Ernst (1871–1953), bed. Mathematiker 68, 69, 219, 221

Sachregister

Abtrennungsregel (modus ponens) 64
„adjunktiv“ 76–78, 105, 193
Alloperator, Allaussage, „alle“ 142, 148, 207, 210
Antezedenserweiterung 172
Äquivalenz 33, 206
Argument, Argumenttypen 16, 114
Aussage, Aussageform, logische und synthetische 30, 31, 215
Aussagenlogik 44
aussagenlogische Operatoren 194, 226
Axiomatik, Axiom 36, 66, 70
bedeutungserzeugende Regel 40
Bedingung, hinreichend, notwendig, hinreichend und notwendig 246
Begriff 33
Bezeichnungen 32
deduktive Gültigkeit 96
Definition 35, 40
Definitionsfreiheit 20, 40, 42
Direkter Schluss 43
Disjunktion, disjunktiv 33, 127, 132, 135, 197
Disjunktionseinführung 155
disjunktiver Syllogismus 149, 266
Doppelbestimmung logischer Operatoren 95
Eigenschaft 34
Einsetzungsregel 43, 64
Elementaraussage 31
Entailment-Charakter 46
ex contradictione quodlibet 121
ex falso quodlibet 117

Existentialoperator, Existentialaussage, „es existiert“ 141, 148, 209
Filterlogik 86, 92
finiter Schluss 48, 266
Folgerung 246
Funktion 214
„genau dann wenn“, „äq“ 206
Gesetzesaussagen, -begriff 246
gleichmäßige Stetigkeit 213
„gewöhnliche“ Sprache der Mathematik 38
Grundregel 43
Grundstufe 38
„gültig“ 226
hypothetischer Syllogismus 55
Implikation, implikativ 16, 33, 127, 132, 135, 138, 146, 201
Indikativ 203
Indirekter Schluss 43
Intuitionismus 70, 88
Kalküllogik (Logikkalkül) 18
Kettenschluss 158, 266
klassische Gültigkeit 96
Konditionaleinführung, erste und zweite 93, 100, 103
Konditionalitätsoperator 84
Konjunktion 33, 138, 146, 192
Konjunktiv 108
Konklusion 16
„konnektiv“ 76, 84, 105, 194
Kontraposition 175
Kontravalenz, kontravalent 33, 201
Konzessivsatz 178
Kunstsprache 26
Logik, logisch 25
Logikkalkül (Kalküllogik) 18
logischer Operator 16, 33, 75, 193, 225

logischer Schluss 42, 48
„Mausefallen“-Beweis 255
Mengenlehre 60
Metasprache 37, 38
modaler Operator 16
Modalität 193
modus ponens (Abtrennungsregel) 159, 264
„möglich“ 52, 193
Mögliche-Welten-Semantik 164
Morgansche Regeln 226, 266
„natürliches“ Schließen 46, 67
Negation 33, 194, 200, 206, 208
„nicht“, „non“ 18, 62
Nichtstandard-Mathematik 89
„notwendig“ 16, 52, 57, 193
Objektsprache 37, 38
„oder“, „aut“, „vel“ 16, 17, 61, 103, 104, 106, 197, 201. 209, 233
Ontologie, ontologisch 27, 35
Paradoxie, paradox 20, 60
parakonsistente Logik 86
Prädikat, einstelliges und mehrstelliges 34, 207, 240, 243
Prädikatenlogik 44
prädikatenlogische Operatoren 207, 240, 243
Pragmatik, pragmatische Eigenschaft 29, 40, 190
Prämisse 16
Prämissentausch 128
Quantenlogik 88
Quantifizierungsregel 43, 65
Redundanz 261
Regellogik 222, 223, 224
Relation 34
Relevanzlogik 86
Schlussfigur, Schlussregel, Schlussverfahren 42, 127, 222, 253, 263

Seiteneinfluss 47
Semantik, semantische Eigenschaft 28, 192
„seq“, „wenn-dann“ 18, 185, 201
Sprachstufung 37
Sprachverknüpfung 32
Sprachverkürzung 44
Sprachwahl 218
„stille“ Voraussetzungen 44
Stetigkeit 212
Stoa 55
Subjekt 34, 207
Substitution 264
Supervaluationstechnik 86
Syllogismus 51, 149
Syntax, syntaktische Eigenschaft 27, 40, 191
tautologia ex quolibet 121
Tautologie, tautologisch 121
Term, Terminus, logischer und synthetischer 33, 214
Umkehrschluss 239
„und“, „et“ 16, 194, 209
Unendlichkeit 60
„ungültig“ 226
„unmöglich“ 52, 193
Unterrichtslogik 184
Vektorrechnung 59
verum ex quolibet 116
Vollständigkeit 198
wahrheitsfunktionaler Aufbau 62
Wahrheitstransfer 42
„wenn-dann“, „seq“ 16, 185, 201, 229, 233, 235
Zahl 60, 68
Ziegenproblem 11, 269, 280

Das Buch ist der erste größere wissenschaftliche Versuch, die in der Schulmathematik angewandten logischen Regeln zu erforschen. Dabei zeigte sich als wichtige Besonderheit, dass darin zwei Logiksysteme – neben dem der Umgangssprache ein konstruiertes System – eine noch kaum bekannte Beziehung (Beispiel „Ziegenproblem“) eingehen, für die das Buch erste Lösungen anbietet, die wiederum auch größere Lücken in der Erforschung der umgangssprachlichen Logik erkennen lassen.

Helmut Assing studierte von 1953 bis 1958 Geschichte und Mathematik, 1965 erfolgte die Promotion in der mittelalterlichen Geschichte, 1979 die Dissertation B/Habilitation in Logik, 1990/93 (2-stufig) die Professur in mittelalterlicher Geschichte.

www.wbg-wissenverbindet.de
ISBN 978-3-534-40776-7

wbg Academic