Universitätsverlag Potsdam

Peter Keller | Sylvie Rœlly (Hrsg.)

Übungsbuch zur Stochastik

Aufgaben und Lösungen
Grundlegende Konzepte
und Anwendungen

Übungsbuch zur Stochastik

Peter Keller | Sylvie Rœlly (Hrsg.)

Übungsbuch zur Stochastik

Aufgaben und Lösungen

Grundlegende Konzepte und Anwendungen

Mit Illustrationen von Gisela Gurr

Universitätsverlag Potsdam

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.de/ abrufbar.

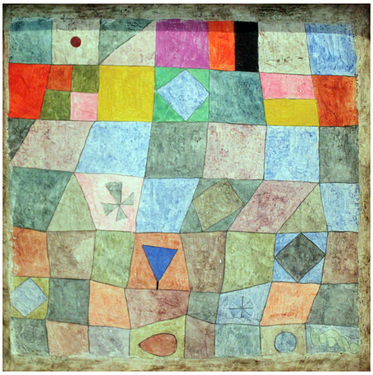
Universitätsverlag Potsdam 2023
http://verlag.ub.uni-potsdam.de/

Am Neuen Palais 10, 14469 Potsdam
Tel.: +49 (0)331 977 2533 / Fax: 2292
E-Mail: verlag@uni-potsdam.de

Umschlagabbildung: Sergey Bogomyako (stock.adobe.com)
Druck: docupoint GmbH Magdeburg

ISBN 978-3-86956-563-7

Zugleich online veröffentlicht auf dem Publikationsserver der Universität Potsdam:
https://doi.org/10.25932/publishup-59593
https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:kobv:517-opus4-595939



Freundliches Spiel, Paul Klee, 1933

Für Edgar,
Julien,
Sonia,
Witold,
Tadeusz,
Éric,
Emil
und Louise.

Vorwort

Dieses Buch stellt Studierenden und Dozenten Übungen zu den Grundbegriffen und Grundsätzen der Wahrscheinlichkeitstheorie und ihre Lösungen zur Verfügung, die meine Arbeitsgruppe an der Universität Potsdam im Laufe von etwa zwanzig Jahren erarbeitet hat. Dank der Internationalität meiner Mitarbeiter ist ein bunter Strauß von Aufgaben entstanden, die aus verschiedenen mathematischen Kulturen Europas stammen.

Die Schönheit und Einzigartigkeit der Wahrscheinlichkeitstheorie besteht darin, dass sie eine Vielzahl von realen Phänomenen modellieren kann. Man findet daher in diesem Band Aufgaben mit Verbindungen zur Geometrie, zu Glücksspielen, zur Versicherungsmathematik, zur Demographie und vielen anderen Themen. Dabei ist das Ziel weder Vollständigkeit noch Originalität. Teils kurze, teils längere Übungen sollen dem Lesenden helfen, wahrscheinlichkeitstheoretische Begriffe und ihre Anwendungen zu handhaben.

Es existieren viele Übungsbücher zur Wahrscheinlichkeitstheorie, von denen aber nur wenige Lösungsvorschläge enthalten. In der Bibliographie findet man eine Auswahl solcher Bücher in verschiedenen Sprachen, [HM05; Hen21] auf Deutsch, [FF99] auf Französisch, [Fel68; GS20; Dur19] auf Englisch, [BCD21] auf Italienisch und [Dor+97] auf Ukrainisch, die uns bei der Vorbereitung dieses Buches inspiriert haben.

Vielen herzlichen Dank an meine ehemaligen wissenschaftlichen Mitarbeiterinnen und Mitarbeiter, *Giovanni Conforti, Jens Fischer, Franziska Göbel, Michael Högele, Pierre Houdebert, Peter Keller, Tetiana Kosenkova, Pierre-Yves Louis, Sara Mazzonetto, Rüdiger Murr, André de Oliveira Gomes, Mathias Rafler* und *Alexander Zass,* für die gemeinsame und fruchtbare Lehrtätigkeit. Einige sind Co-Autoren dieses Buches. An *Antje Schulze* geht meine Dankbarkeit für die konstruktive langjährige Zusammenarbeit und die konstante Hilfe, die sie der Professur gewidmet hat.

Bei *Mathias Rafler* bedanke ich mich insbesondere für die Bereitstellung des TeX-Rahmens für den Satz dieses Buches.

Ich bedanke mich ebenso bei den studentischen Mitarbeitern *Tobias Ehlen* und *Annie Flöge*, die eine wertvolle Arbeit als Mitautoren geleistet haben.

Peter Keller bin ich zu großem Dank verpflichtet. Von Beginn an hat er dieses Projekt mit Enthusiasmus und Kompetenz begleitet und unablässig Schwierigkeiten auf allen Ebenen zu lösen vermocht, seien sie technischer oder mathematischer Natur. Ohne ihn würde dieses Buch nicht existieren.

Die Zeichnerin *Gisela Gurr* hat einige Aufgaben des Buches für uns mit Illustrationen bereichert. Ich bin ihr dafür sehr dankbar.

Dem Universitätsverlag, insbesondere *Kristin Schettler*, *Nina Gerlach*, *Jan Hagedoorn* und *Marco Winkler*, danken wir für die angenehme und produktive Zusammenarbeit sowie für die Unterstützung bei der Gestaltung und des Lektorats dieses Übungsbuches.

Mein Dank gilt auch denjenigen Professoren, die mich in die Wahrscheinlichkeitstheorie geführt haben. Zu ihnen gehören *Nicole El Karoui*, *Michel Métivier*, *Paul-André Meyer*, *Jacques Neveu* und *Laurent Schwartz*. Wenn etwas von ihrer mathematischen Kultur hier zu finden ist, so ist unsere Arbeit umso wertvoller gewesen.

Sylvie Rœlly, Potsdam, 2023

Hinweise zum Gebrauch

> „Deine Aufgabe mag noch so bescheiden sein; wenn sie jedoch dein Interesse weckt, wenn deine Erfindungsgabe angeregt wird und du die Aufgabe aus dir selbst heraus löst, so wirst du die Spannung und den Triumph eines Entdeckers erfahren."
>
> *George Pólya*, Vorwort *Schule des Denkens*

So wie man Tonleitern in der Musik trainiert, so berechnet man Übungsaufgaben in der Mathematik. In diesem Sinne soll dieses Übungsbuch vor allem als Vorlage dienen für das intensive, eigenverantwortliche Lernen und Üben.

Die Übungen stehen für sich. In den Bemerkungen weisen wir auf Erweiterungen oder Spezialfälle hin. Manchmal haben wir in den Lösungen auf andere Übungsaufgaben Bezug genommen, wenn ein interessanter Zusammenhang besteht. Gerade in Kapitel sechs sind Bezüge zum historischen Kontext oder zum Ursprung der Aufgaben zu finden.

Da die Aufgaben unterschiedlich aufwendig sind, findet man zu Beginn am rechten Rand die folgende Symbolik:

○○●	–	kurze, einfache Aufgabe,
○●●	–	Aufgabe mit mittlerem Anspruch, oder
●●●	–	Aufgabe mit hohem Anspruch.

Die Lösung zu jeder Aufgabe ist als *Lösungsvorschlag* zu verstehen, da es oft mehrere Wege gibt, die Aufgabe zu lösen.

Eine Übersicht der wichtigsten Verteilungen sowie eine Tabelle mit approximativen Werten der Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung findet sich im Anhang.

Wir wünschen den Leserinnen und Lesern ein gewinnbringendes Studium dieses Buches. Sie sind selbstverständlich herzlich eingeladen, uns Verbesserungsvorschläge zu machen, die wir bei der nächsten elektronischen Auflage dieses Buches berücksichtigen werden.

Historischer Einblick

Im Folgenden stellen wir eine kleine Auswahl von Persönlichkeiten und Ereignissen vor, die einen ersten Einblick in die Entstehungsgeschichte der Wahrscheinlichkeitstheorie vom 17. bis zum Anfang des 20. Jahrhunderts geben soll. Unsere Wahl berücksichtigt hauptsächlich diejenigen Wissenschaftlerinnen und Wissenschaftler, die in den Aufgaben dieses Buches zitiert werden.

Nach der Axiomatisierung der Wahrscheinlichkeitstheorie im Jahr 1933 durch Andrei Nikolajewitsch Kolmogoroff hat sich dieser Bereich sehr schnell weiter entwickelt und ist heute ein eigenständiges, breites und sehr dynamisches Forschungsfeld der Mathematik, mit zahlreichen wichtigen Anwendungen.

Wir hoffen, dem Lesenden so eine Anregung geben zu können, sich auch mit der Geschichte der Entwicklung der mathematischen Ideen zu beschäftigen.

1654 Pierre de Fermat mit Blaise Pascal: *Gerechte Aufteilung* des Einsatzes eines Glücksspiels bei vorzeitigem Spielabbruch

1685 Jakob Bernoulli: *Schwaches Gesetz der großen Zahlen* für unabhängige, $\{0, 1\}$-wertige Zufallsvariable, erst 1713 in „Ars conjectandi“ posthum veröffentlicht

1733 Abraham de Moivre: *Zentraler Grenzwertsatz* als Approximation der Binomialverteilung $\mathrm{Bin}(n, 1/2)$ für großes n durch die Normalverteilung

1809 Carl Friedrich Gauß: Definition der *Normalverteilung* in „Theoria motus corporum coelestium in sectionibus conicis solem ambientium“

1812 Pierre-Simon de Laplace: Formeller Beweis der *Methode der kleinsten Quadrate* (von Gauß und Legendre eingeführt) in „Théorie Analytique des Probabilités“

1845 Irénée-Jules Bienaymé: Konzept des *zufälligen (Stamm-)Baumes*, später auch nach dem Naturforscher Francis Galton und dem Mathematiker Henry William Watson benannt

1858 Florence Nightingale: Einführung des *Polar-Area-Diagramms* zur Darstellung zyklischer Phänomene, ursprünglich benutzt für die Darstellung des Zusammenhangs zwischen Hygienebedingungen und Todesfällen

1867 Pafnuti Lwowitsch Tschebyschoff: *Allgemeine Version* des schwachen Gesetzes der großen Zahlen

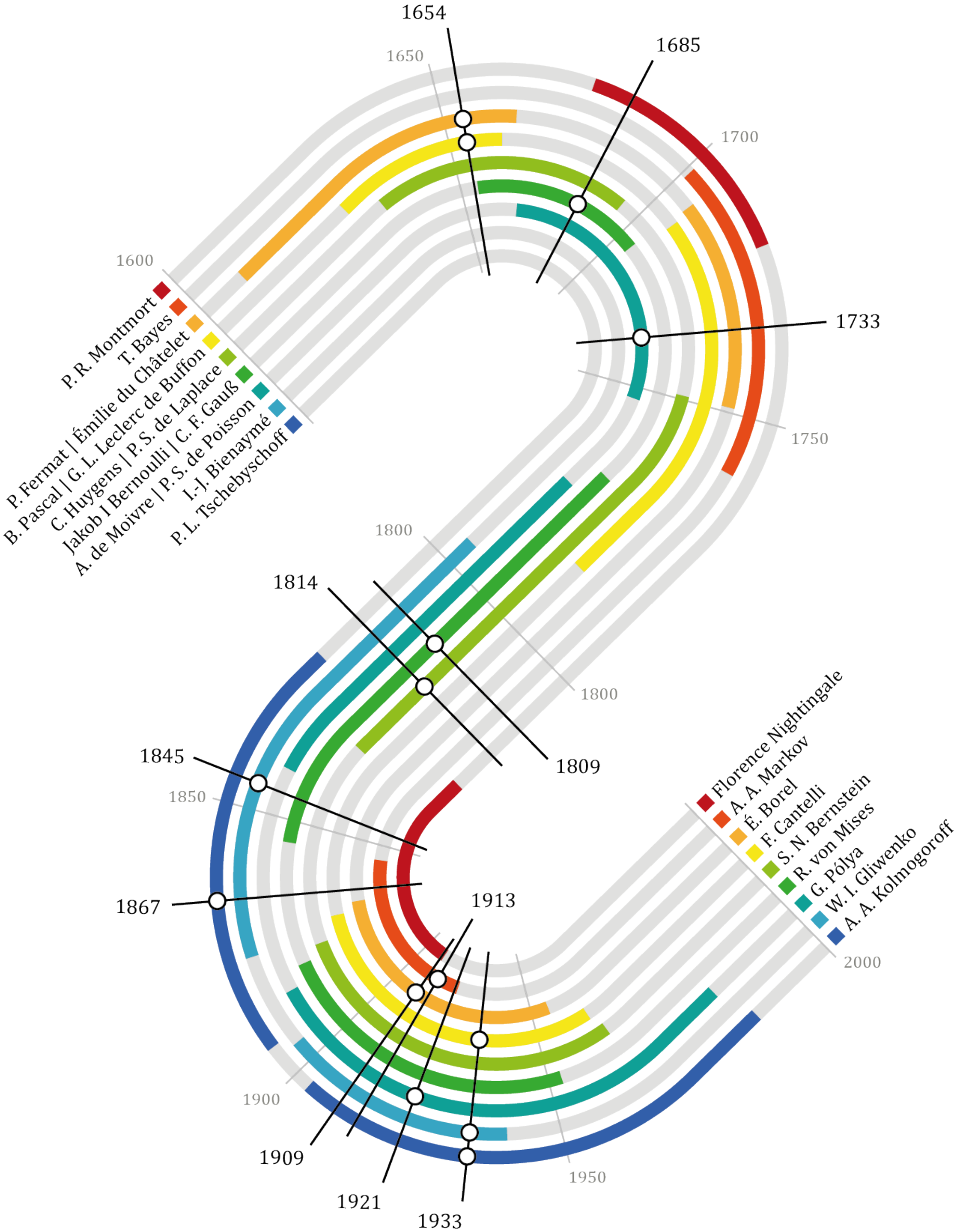
1909 Émile Borel: *Starkes Gesetz der großen Zahlen* für Bernoulli-verteilte Zufallsvariablen

1913 Andrei Andrejewitsch Markov: Berechnung der Häufigkeit von Buchstabenpaaren in russischer Literatur, die zum Begriff einer bestimmten Abhängigkeit stochastischer Prozesse – heute *Markov-Prozesse* genannt – führt

1921 George Pólya: Die *einfache, symmetrische Irrfahrt auf* $\mathbb{Z}^d$ *ist transient* für $d \geq 3$, d.h. jeder Punkt in $\mathbb{Z}^d$ wird fast sicher nur endlich oft von dieser Irrfahrt besucht

1933 Waleri Iwanowitsch Gliwenko und Francesco Cantelli: *Fundamentalsatz der Statistik* über die Konvergenz der empirischen Verteilungsfunktion

1933 Andrei Nikolajewitsch Kolmogoroff: *Axiomatisierung der Wahrscheinlichkeitstheorie* in „Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung“, Berlin



1654
1650
1685
1700
1600
1733
1750
1800
1800
1814
1809
1845
1850
1867
1913
1900
1909
1921
1933
1950
2000
P. R. Montmort
T. Bayes
P. Fermat | Émilie du Châtelet
B. Pascal | G. L. Leclerc de Buffon
C. Huygens | P. S. de Laplace
Jakob I Bernoulli | C. F. Gauß
A. de Moivre | P. S. de Poisson
I.-J. Bienaymé
P. L. Tschebyschoff
Florence Nightingale
A. A. Markov
É. Borel
F. Cantelli
S. N. Bernstein
R. von Mises
G. Pólya
W. I. Gliwenko
A. A. Kolmogoroff

Symbolverzeichnis

Zahlbereiche

$\mathbb{N}$	Natürliche Zahlen ohne Null
$\mathbb{N}_0$	Natürliche Zahlen mit Null
$\mathbb{Z}$	Ganze Zahlen
$\mathbb{Q}$	Rationale Zahlen
$\mathbb{R}$	Reelle Zahlen
$\mathbb{R}^+$	Positive, reelle Zahlen
$\mathbb{R}_0^+$	nichtnegative, reelle Zahlen
$\mathbb{C}$	Komplexe Zahlen

Mengen und Operationen

$[a, b]$, (a, b)	Abgeschlossenes, offenes Intervall
$[a, b)$, $(a, b]$	halboffenes Intervall
$\emptyset$	Leere Menge
Ω	Ergebnisraum oder volle Menge
A^c	Komplement der Menge A in Ω
$\cap$, $\cup$, $\setminus$	Schnitt, Vereinigung, Mengendifferenz
$\sqcup$	Disjunkte Vereinigung
$\#A$	Mächtigkeit der Menge A
$\mathcal{P}(\Omega)$	Potenzmenge, Menge aller Teilmengen der Menge Ω

Symbole aus der Wahrscheinlichkeitstheorie

$\mathcal{A}$, $\mathcal{F}$	Sigma-Algebren
$\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$	Borelsche Sigma-Algebra über $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$
$\mathbb{P} : \mathcal{A} \to [0, 1]$	Wahrscheinlichkeitsmaß
$\mathbb{P}_X = \mathbb{P} \circ X^{-1}$	Von der Zufallsvariablen X induziertes Wahrscheinlichkeitsmaß oder Verteilung von X

$\mathbb{1}_A$	Indikatorfunktion des Ereignisses $A \subset \Omega$
$\mathbb{E}(X)$	Erwartungswert von X
$\mathrm{Var}(X)$	Varianz von X
$\mathrm{Cov}(X, Y)$	Kovarianz von X und Y
$f_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+$	Dichte der Zufallsvariable X
$F_X : \mathbb{R} \to [0, 1]$	Verteilungsfunktion der Zufallsvariable X
$G_X : [0, 1] \to \mathbb{R}$	Erzeugende Funktion der $\mathbb{N}_0$-wertige Zufallsvariable X
$\varphi_X : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$	Charakteristische Funktion der Zufallsvariable X

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Grundbegriffe

Peter Keller, Tobias Ehlen

1.1 Elemente der Mengenlehre

Aufgabe 1.1: Mengendifferenz und symmetrische Differenz ○●●

Sei Ω ein Ergebnisraum und $A, B, C \subset \Omega$ beliebig. Man definiere folgenden Mengenoperationen:

Mengendifferenz:	$A \setminus B := A \cap B^c$.
Symmetrische Differenz:	$A \vartriangle B := (A \setminus B) \sqcup (B \setminus A)$.

Beweisen und kommentieren Sie folgende Eigenschaften dieser beiden Operationen.

(I) Verflechtung der *Mengendifferenz* mit *Schnitt, Vereinigung* und *Komplementbildung*:

(a) $A \setminus B = B^c \setminus A^c$,

(b) $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$,

(c) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$,

(d) $(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$.

(II) Verflechtung der *symmetrischen Differenz* mit der *Durchschnittsbildung*:

(e) $A \vartriangle A = \emptyset$,

(f) $A \vartriangle B = B \vartriangle A$,

(g) $A \cap (B \vartriangle C) = (A \cap B) \vartriangle (A \cap C)$.

(III) Verflechtung der *symmetrischen Differenz* und der *Mengendifferenz*:

(h) $(A \vartriangle B) \setminus C = \big(A \setminus (B \cup C)\big) \sqcup \big(B \setminus (A \cup C)\big) = (A \setminus C) \vartriangle (B \setminus C)$,

(i) $A \setminus (B \vartriangle C) = \big(A \cap B \cap C\big) \cup \big(A \setminus (B \cup C)\big)$.

(IV) *Symmetrische Differenz* von *drei* Mengen:

(j) $A \vartriangle (B \vartriangle C) = (A \vartriangle B) \vartriangle C$.

Lösung: Im Folgenden werden die Eigenschaften von Vereinigung, Schnitt und Komplement sowie die de Morgan Regeln (MR) vorausgesetzt.

(a) $A \setminus B = A \cap B^c = B^c \cap (A^c)^c$.

Die Mengendifferenz ist nicht symmetrisch.

(b) $(A \cap B^c) \cap C^c = A \cap (B^c \cap C^c) \overset{MR}{=} A \cap (B \cup C)^c$.

Die Mengendifferenz ist nicht assoziativ.

(c) $A \cap (B \cap C)^c \overset{MR}{=} A \cap (B^c \cup C^c) = (A \cap B^c) \cup (A \cap C^c)$.

Die Mengendifferenz ist nicht linksdistributiv über den Schnitt.

(d) $(A \cap B) \cap C^c = (A \cap C^c) \cap (B \cap C^c)$.

Die Mengendifferenz ist rechtsdistributiv über den Schnitt. Der Schnitt ist auch rechtsdistributiv bezüglich der Mengendifferenz.

Analog zu (c) und (d) lassen sich die *dualen* Formeln $(c)^*$ $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$ und $(d)^*$ $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$ beweisen.

(e) $A \cap A^c = \emptyset$.

(f) $(A \setminus B) \sqcup (B \setminus A) = (B \setminus A) \sqcup (A \setminus B)$.

Die symmetrische Differenz ist symmetrisch.

(g) Nach Assoziativität des Schnitts gilt $(A \cap B) \setminus C = A \cap (B \cap C^c) = A \cap (B \setminus C)$ und daher

$$\begin{aligned}
&\big((A \cap B) \setminus (A \cap C)\big) \sqcup \big((A \cap C) \setminus (A \cap B)\big) \\
&\overset{(c)}{=} \big(((A \cap B) \setminus A) \cup ((A \cap B) \setminus C)\big) \sqcup \big(((A \cap C) \setminus A) \cup ((A \cap C) \setminus B)\big) \\
&= ((A \cap B) \setminus C) \sqcup ((A \cap C) \setminus B) = A \cap \big((B \setminus C) \sqcup (C \setminus B)\big).
\end{aligned}$$

Der Schnitt ist distributiv über der symmetrischen Differenz.

Mittels eines Venn-Diagramms sieht man schnell, warum die symmetrische Differenz nicht distributiv über dem Schnitt sein kann.

(h) Da $A \cup B = A \setminus B \sqcup B$, folgt

$$\begin{aligned}
\big((A \setminus C) \cup (C \setminus A)\big) \setminus C &\overset{(d)^*}{=} \big((A \setminus B) \setminus C\big) \cup \big((B \setminus A) \setminus C\big) \\
&\overset{(b)}{=} \big(A \setminus (B \cup C)\big) \cup \big(B \setminus (A \cup C)\big) \\
&= \big(A \setminus (C \sqcup B \setminus C)\big) \cup \big(B \setminus (C \sqcup A \setminus C)\big) \\
&\overset{(b)}{=} \big((A \setminus C) \setminus (B \setminus C)\big) \sqcup \big((B \setminus C) \setminus (A \setminus C)\big).
\end{aligned}$$

(i) Der Schnitt ist rechtsdistributiv über der symmetrischen Differenz.

$$A \cap (B \triangle C)^c \overset{MR}{=} A \cap \Big((B^c \cap C^c) \cup (C \cap B)\Big) \overset{MR}{=} A \cap \Big((B \cup C)^c \cup (C \cap B)\Big).$$

Der Schnitt ist nicht linksdistributiv über der symmetrischen Differenz, was zu erwarten war, da die Mengendifferenz nicht symmetrisch ist.

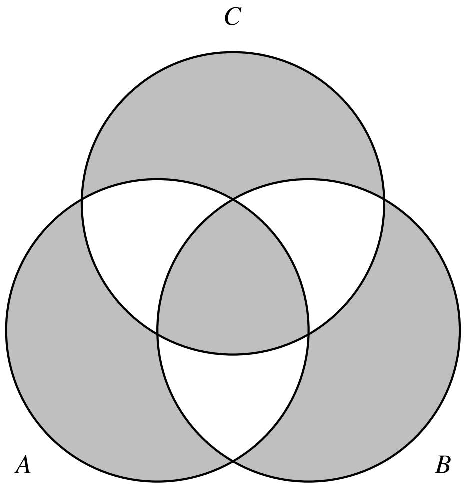
(j) Wegen der Symmetrie der symmetrischen Differenz, ist nur

$$(C \triangle B) \triangle A = (A \triangle B) \triangle C$$

zu zeigen, das heißt die Vertauschbarkeit von A und C. Nun gilt

$$\begin{aligned}&\Big((C \triangle B) \setminus A\Big) \sqcup \Big(A \setminus (C \triangle B)\Big)\\ &\quad\overset{(h),(i)}{=} \Big(A \setminus (B \cup C)\Big) \sqcup \Big(B \setminus (A \cup C)\Big) \sqcup \Big(C \setminus (A \cup B)\Big) \sqcup \Big(A \cap B \cap C\Big).\end{aligned}$$

Die rechte Seite dieser Gleichung ist invariant unter jeder Permutation der Mengen A, B und C. Daher gilt die Assoziativität der symmetrischen Differenz.



Die symmetrische Differenz von drei Mengen A, B, C im Venn-Diagramm.

Bemerkung: Die Standard-Mengenoperationen Schnitt und Vereinigung erfüllen wichtige Eigenschaften: sie sind kommutativ, assoziativ und distributiv. Das gilt für andere Mengenoperationen in der Regel nicht mehr, wie für Mengendifferenz und symmetrische Differenz gezeigt wurde.

Für weitere Eigenschaften der symmetrischen Differenz siehe auch Aufgabe 1.17.

Aufgabe 1.2: Die NOR-Mengenoperation ○●●

Sei Ω eine Menge und A, B Teilmengen von Ω. Definieren Sie die NOR-Mengenoperation[1] von A und B als das Ereignis, bei dem weder A noch B eintritt. Man schreibt $A \downarrow B$.

(a) Drücken Sie $A \downarrow B$ nur mit Hilfe der Mengenoperationen $\{\cup, \cap, {}^c\}$ aus.

(b) Stellen Sie die Mengenoperationen $\{\cup, \cap, {}^c\}$ nur mittels der NOR-Mengenoperation dar.

Hinweis: *Nutzen Sie dazu die Mengen A, B, $\emptyset$ und Ω.*

(c) Ist die NOR-Operation kommutativ und/oder assoziativ?

Lösung:

(a) $A \downarrow B = A^c \cap B^c = (A \cup B)^c$

(b) Man findet folgende Ausdrücke:

$$\begin{aligned} A^c &= A \downarrow \emptyset = A \downarrow A \\ A \cup B &= ((A \cup B)^c)^c = (A \downarrow B) \downarrow \emptyset = (A \downarrow B) \downarrow (A \downarrow B) \\ A \cap B &= (A^c \cup B^c)^c = (A \downarrow \emptyset) \downarrow (B \downarrow \emptyset) = (A \downarrow A) \downarrow (B \downarrow B) \end{aligned}$$

(c) Die NOR-Operation ist kommutativ: $A \downarrow B = (A \cup B)^c = (B \cup A)^c = B \downarrow A$.

Die NOR-Operation ist nicht assoziativ. Als Gegenbeispiel sei $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $A = \{1\}$, $B = \{2\}$, $C = \{3\}$. Nun gilt

$$\begin{aligned} (A \downarrow B) \downarrow C &= (\{1\} \downarrow \{2\}) \downarrow \{3\} = \{3, 4, 5\} \downarrow \{3\} = \{1, 2\} \\ &\neq \{2, 3\} = \{1\} \downarrow \{1, 4, 5\} = \{1\} \downarrow (\{2\}) \downarrow \{3\}) = A \downarrow (B \downarrow C) \end{aligned}$$

Aufgabe 1.3: Defekte Maschinenteile ○○●

Eine Maschine bestehe aus vier Komponenten, die ausfallen oder funktionieren können. A_i sei das Ereignis, dass Komponente i defekt ist, $1 \leq i \leq 4$. Beschreiben Sie die folgenden Ereignisse mit Hilfe von $A_1, \ldots, A_4$:

(a) Genau eine Komponente ist defekt.

(b) Mindestens eine Komponente ist defekt.

(c) Genau drei Komponenten sind defekt.

[1] NOR: von Englisch „not or“.

Lösung:

(a) Sei i die Nummer der Komponente, die defekt ist. Dann sollen alle Komponenten A_j, $j \neq i$ nicht defekt sein. Da i beliebig ist, ist das Ereignis, dass genau eine Komponente ausfällt:

$$\bigcup_{i=1}^{4}\left(A_i \setminus \Big(\bigcup_{j\neq i} A_j\Big)\right) = \bigcup_{i=1}^{4}\bigcap_{j\neq i}(A_i \setminus A_j).$$

(b) Das Komplement von mindestens einem Ausfall ist gar kein Ausfall. Daher ist das gesuchte Ereignis

$$(A_1^c \cap A_2^c \cap A_3^c \cap A_4^c)^c = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4.$$

(c) Sei diesmal i die Nummer der Komponente, die nicht defekt ist. Die Vereinigung über alle möglichen Auswahlen von i beschreibt dann das gesuchte Ereignis. Es ergibt sich

$$\bigcup_{i=1}^{4}\Big(\Big(\bigcap_{j\neq i} A_j\Big) \setminus A_i\Big) = \bigcup_{i=1}^{4}\bigcap_{j\neq i}(A_j \setminus A_i).$$

Aufgabe 1.4: Mengen disjunkt zerlegen ○●●

Sei $(A_n)_{n\geq 1}$ eine Folge von beliebigen Mengen in einer gemeinsamen Obermenge Ω. Es ist möglich, die Vereinigung von zwei Mengen als disjunkte Vereinigung zu schreiben:

$$A_1 \cup A_2 = A_1 \sqcup (A_2 \setminus A_1).$$

(a) Zeigen Sie, dass dies auch für drei Mengen $A_1, A_2, A_3 \subset \Omega$ möglich ist. Das heißt, finden Sie disjunkte Mengen B_1, B_2, B_3, sodass gilt

$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 = B_1 \sqcup B_2 \sqcup B_3.$$

(b) Verallgemeinern Sie Ihre Überlegung auf n Mengen $A_1, \ldots, A_n \subset \Omega$, $n \geq 4$. Das heißt, finden Sie disjunkte Mengen $B_1, \ldots, B_n$, sodass

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \bigsqcup_{i=1}^{n} B_i.$$

Lösung:

(a) Wählen Sie $B_1 := A_1$, $B_2 := A_2 \setminus A_1$ und $B_3 := A_3 \setminus (A_1 \cup A_2)$. Nach Konstruktion sind die gewählten Mengen disjunkt. Weiterhin gilt

$$\begin{aligned} B_1 \sqcup B_2 \sqcup B_3 &= A_1 \sqcup (A_2 \setminus A_1) \sqcup (A_3 \setminus (A_1 \cup A_2)) \\ &= (A_1 \cup A_2) \sqcup (A_3 \setminus (A_1 \cup A_2)) = A_1 \cup A_2 \cup A_3. \end{aligned}$$

(b) Für den allgemeinen Fall setzen Sie

$$B_i := A_i \setminus \Big(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_{i-1}\Big) = A_i \setminus \Big(\bigcup_{k=1}^{i-1} A_k\Big).$$

Der Konstruktion nach ist B_i das Ereignis, bei dem nur A_i, aber kein anderes Ereignis A_k, $k < i$, eintritt. Für den Beweis benutzen Sie folgende Identität: Sind $C_1, C_2, C_3, C_4 \subset \Omega$ beliebige Ereignisse, so ist durch Anwenden der Definition der Mengendifferenz

$$(C_1 \setminus C_2) \cap (C_3 \setminus C_4) = (C_1 \cap C_3) \setminus (C_2 \cup C_3).$$

Daraus folgt für $i < j$ beliebig:

$$B_i \cap B_j = \Big(A_i \setminus \bigcup_{k=1}^{i-1} A_k\Big) \cap \Big(A_j \setminus \bigcup_{k=1}^{j-1} A_k\Big) = (A_i \cap A_j) \setminus \Big(\bigcup_{k=1}^{j-1} A_k\Big) = \emptyset,$$

da $A_i \cap A_j \subset A_i \subset \bigcup_{k=1}^{j-1} A_k$.

Aufgabe 1.5: Kardinalität von Potenzmengen ●●●

Gegeben sei für $n \in \mathbb{N}$ die Menge $A_n := \{1, \ldots, n\}$ und $A_0 := \emptyset$.

(a) Geben Sie für $n = 0, 1, 2$ die Potenzmenge $\mathcal{P}(A_n)$ von A_n sowie die jeweilige Kardinalität an.

(b) Bestimmen Sie entsprechend die Kardinalität der Potenzmenge von A_n für $n \in \mathbb{N}$ beliebig.

(c) Beweisen Sie, dass es keine surjektive Abbildung von $\mathbb{N}$ in ihre Potenzmenge geben kann.

Lösung:

(a) Es gilt:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(A_0) &= \{\emptyset\}, & \#\mathcal{P}(A_0) &= 1 \\ \mathcal{P}(A_1) &= \{\emptyset, \{1\}\}, & \#\mathcal{P}(A_1) &= 2 \\ \mathcal{P}(A_2) &= \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}, & \#\mathcal{P}(A_2) &= 4 = 2^2. \end{aligned}$$

(b) Für die Erzeugung der Potenzmenge kann man kombinatorisch argumentieren. Für eine Teilmenge der Größe k gibt es $\binom{n}{k}$ mögliche Zusammenstellungen von k verschiedenen Elementen. Summiert man über alle k, inklusive $k = 0$, so folgt

$$\#\mathcal{P}(A_n) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = (1+1)^n = 2^n.$$

Bemerkung: Diese Überlegung gilt nur für endliche Mengen, da der Limes für $n \to +\infty$ divergiert. Insbesondere ist die Potenzmenge der natürlichen Zahlen sogar überabzählbar.

(c) Angenommen, es gäbe eine surjektive Abbildung $f : \mathbb{N} \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$. Betrachten Sie die Menge

$$S = \{a \in \mathbb{N} \,|\, a \notin f(a)\}.$$

Da f surjektiv ist, existiert ein $a_0 \in \mathbb{N}$, so dass $f(a_0) = S$.

Sei $a_0 \in S$. Dann ist $a_0 \in f(a_0) = S$. Somit gilt nach Definition von S, dass $a_0 \notin S$. Ist andererseits $a_0 \notin S$, so ist $a_0 \notin f(a_0) = S$. Somit gilt nach Definition von S, dass $a_0 \in S$.

Bemerkung: Es gilt allgemein, dass es keine surjektive Abbildung einer Menge in ihre Potenzmenge geben kann.

1.2 Elemente der Kombinatorik

Aufgabe 1.6: Wege im Gitter ○●●

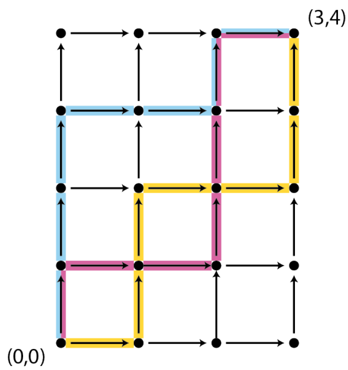
Gegeben sei ein $n \times m$ Gitter mit $n, m \in \mathbb{N}$.

(a) Betrachten Sie zunächst den Spezialfall $n = 3$ und $m = 4$. Wie viele Wege der kürzesten Länge gibt es zwischen $(0,0)$ und $(3,4)$?

(b) Verallgemeinern Sie Ihre Überlegung aus (a). Wie viele Wege der kürzesten Länge gibt es zwischen $(0,0)$ und (n,m)?

Lösung:

(a) Die kürzesten Wege haben die Länge $3 + 4 = 7$, die ausgehend von $(0, 0)$ nur Schritte nach oben und nach rechts erlauben. Ein möglicher Weg ist somit gegeben durch $(\rightarrow, \rightarrow, \rightarrow, \uparrow, \uparrow, \uparrow, \uparrow)$. Es genügt zu wissen, an welcher Stelle ein Schritt nach rechts gemacht wird. Bei sieben Schritten gibt es $\binom{7}{3} = 35$ Möglichkeiten Schrittfolgen mit insgesamt drei Schritten nach rechts zu wählen. Somit gibt es 35 Wege kürzester Länge. Drei möglichen Pfade sind zum Beispiel:



(b) Die Überlegung aus (a) lässt sich verallgemeinern, indem man 3 durch n und 4 durch m ersetzt. Damit ergibt sich die Anzahl der kürzesten Wege als

$$\binom{n+m}{n} = \frac{(n+m)!}{n!\,m!}.$$

Aufgabe 1.7: Hockeyschläger Identität ○●●

Beweisen Sie folgenden Identitäten für $n \geq 1$:

(a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n+k}{k} = \binom{2n+1}{n}$,

(b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n+k}{k} 2^{-k} = 2^n$.

Lösung:

(a) Betrachten Sie zunächst die Partialsumme der geometrischen Reihe bis $2n$ für beliebiges $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{i=0}^{2n} x^i = \frac{x^{2n+1} - 1}{x - 1}.$$

Durch die Substitution $x = t + 1$ ergibt sich durch Anwenden des Binomialsatzes

$$\sum_{i=0}^{2n} \sum_{k=0}^{i} \binom{i}{k} t^k = \frac{(t+1)^{2n+1} - 1}{t} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n+1}{k+1} t^k.$$

Durch Umordnen der Summanden der linken Seite ergibt sich

$$\sum_{i=0}^{2n} \sum_{k=0}^{i} \binom{i}{k} t^k = \sum_{k=0}^{2n} \sum_{i=k}^{2n} \binom{i}{k} t^k.$$

Koeffizientenvergleich zwischen den Polynomen der linken und rechten Seite ergibt nun

$$\sum_{i=k}^{2n} \binom{i}{k} = \binom{2n+1}{k+1}.$$

Für die spezielle Wahl $k = n$ ergibt sich daher

$$\sum_{i=n}^{2n} \binom{i}{n} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n+j}{n} = \binom{2n+1}{n+1} = \binom{2n+1}{n}.$$

(b) Der Beweis erfolgt mittels Induktion. Wir benutzen dazu die Pascalsche Identität

$$\binom{m+1}{k} = \binom{m}{k} + \binom{m}{k-1}.$$

Für $n = 1$ ergibt sich

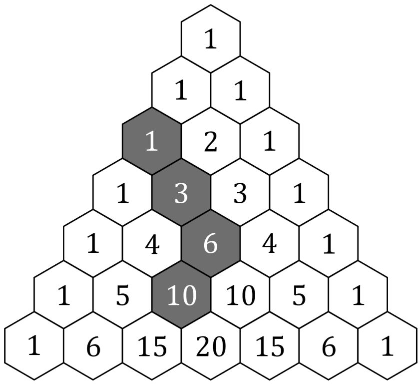
$$\binom{1+0}{0} 2^{-0} + \binom{1+1}{1} 2^{-1} = 1 + 1 = 2 = 2^1.$$

Sei nun angenommen, die Formel wäre bereits für ein beliebiges $n \in \mathbb{N}$ bewiesen. Dann gilt mittels Pascalscher Identität für $m := n + k$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1+k}{k} 2^{-k} &= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+k}{k} 2^{-k} + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+k}{k-1} 2^{-k} \\
&= 2^n + \binom{2n+1}{n+1} 2^{-(n+1)} + \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{n} \binom{n+1+j}{j} 2^{-j} \\
&= 2^n + \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{n+1} \binom{n+1+j}{j} 2^{-j}.
\end{aligned}$$

Umstellen nach der Summe ergibt die Behauptung.

Bemerkung: Markiert man die Summanden und die rechte Seite der Gleichung aus (a) im Pascal-Dreieck, so ergibt sich die Form eines Hockeyschlägers (hier für $n = 2$):



Aufgabe 1.8: Rechnen mit Binomialkoeffizienten ○●●

Es sei $n, k \in \mathbb{N}$ wobei $k \leq n$. Beweisen Sie die folgenden Formeln:

(a) $\displaystyle\binom{n-1}{k} - \binom{n-1}{k-1} = \frac{n-2k}{n}\binom{n}{k}$,

(b) $\displaystyle\binom{\binom{n}{2}}{2} = 3\binom{n+1}{4}$, $n \geq 3$,

(c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}k = n\,2^{n-1}$.

Hinweis: *Entwickeln Sie* $(x+1)^n$.

Lösung:

(a) Durch direktes Einsetzen der Binomialkoeffizienten erhält man

$$\begin{aligned}\binom{n-1}{k} - \binom{n-1}{k-1} &= \frac{(n-1)!}{k!\,(n-k-1)!} - \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k)!}\\ &= \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k-1)!}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{n-k}\right) = \frac{(n-1)!\,(n-2k)}{k!\,(n-k)!} = \frac{n-2k}{n}\binom{n}{k}.\end{aligned}$$

(b) Zuerst wird der äußere Binomialkoeffizient aufgelöst, dann ergibt sich

$$\begin{aligned}\binom{\binom{n}{2}}{2} &= \frac{1}{2}\binom{n}{2}\left(\binom{n}{2} - 1\right) = \frac{n\,(n-1)(n\,(n-1)-2)}{8}\\ &= 3\frac{(n+1)\,n\,(n-1)(n-2)}{4\cdot 3\cdot 2} = 3\binom{n+1}{4}.\end{aligned}$$

(c) Man erhält die Behauptung durch Differenzieren des binomischen Satzes

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} k\,(x+1)^{k-1} = \frac{d}{dx} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (x+1)^k = \frac{d}{dx}(x+1)^n = n\,(x+1)^{n-1}.$$

Für $x = 1$ folgt die Behauptung.

Aufgabe 1.9: Vandermonde-Identität ○●●

Die sogenannte *Vandermonde-Identität* spielt eine große Rolle in Kombinatorik und diskreter Wahrscheinlichkeitstheorie.

(a) Zeigen Sie zunächst

$$\sum_{l=0}^{4} \binom{5}{l}\binom{6}{4-l} = \binom{5+6}{4}.$$

(b) Seien $n, m, k \in \mathbb{N}$, wobei $k \leq \min\{n, m\}$. Beweisen Sie die Vandermonde-Identität:

$$\sum_{l=0}^{k} \binom{n}{l}\binom{m}{k-l} = \binom{n+m}{k}.$$

Hinweis: *Betrachten Sie* $(x+1)^n(x+1)^m$ *und führen Sie einen Koeffizientenvergleich durch.*

Lösung:

(a) Direktes Ausrechnen zeigt die Gleichheit.

(b) Es ist

$$(x+1)^{n+m} = \sum_{k=0}^{n+m} \binom{n+m}{k} x^k,$$

aber auch

$$\begin{aligned}(x+1)^{n+m} = (x+1)^n(x+1)^m &= \left(\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i\right)\left(\sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} x^j\right) \\ &= \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} \binom{n}{i}\binom{m}{j} x^{i+j} = \sum_{k=0}^{n+m}\sum_{i+j=k} \binom{n}{i}\binom{m}{j} x^k.\end{aligned}$$

Durch Koeffizientenvergleich erhält man die Behauptung.

Bemerkung: Die Vandermonde-Identität wird zum Beispiel für den Beweis der Normiertheit der hypergeometrischen Verteilung genutzt.

Aufgabe 1.10: Bälle in Bechern verteilen ●●●

Es seien $n + 1 \in \mathbb{N}$ Becher gegeben. Diese sind in einer Reihe aufgestellt. Ein Spieler hat einen schwarzen Ball, k_1 rote und k_2 blaue Bälle, wobei $k_1 + k_2 \leq n$. Nun wird zunächst der schwarze Ball in einen der Becher gegeben, so bleiben noch n leere Becher übrig. Sind links bzw. rechts noch genug Becher leer, so werden alle roten Bälle auf die Becher links von dem schwarzen Ball verteilt, alle blauen rechts. Es darf höchstens ein Ball in einem Becher liegen.

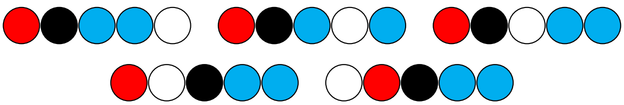
(a) Veranschaulichen Sie die Ergebnisse für fünf Becher, einen roten und zwei blaue Bälle, indem Sie alle möglichen Muster zeichnen.

(b) Auf wie viele Arten kann man die bunten Bälle im allgemeinen Fall, wie oben beschrieben, verteilen? Beweisen Sie dazu für $n, k_1, k_2 \in \mathbb{N}$ und $k_1 + k_2 \leq n$ die folgende Identität:

$$\binom{n+1}{k_1+k_2+1} = \sum_{i=0}^{n-k_1-k_2} \binom{k_1+i}{k_1}\binom{n-k_1-i}{k_2}.$$

Lösung: Die Farbe der Bälle spielt eigentlich keine Rolle. Wichtig ist nur, dass links k_1 resp. rechts k_2 Bälle in den Bechern verteilt werden.

(a) Es werden $k_1+k_2+1 = 1+2+1 = 4$ Bälle verteilt. Die fünf möglichen Ergebnisse sind (weißer Kreis entspricht leerem Becher):



(b) Sei nun die Position des Bechers mit dem schwarzen Ball mit i bezeichnet, wobei $i \in \{k_1 + 1, \ldots, n + 1 - k_2\}$. Die Fälle, in denen i nicht aus diesem Bereich stammt, liefern keine Möglichkeiten, da nicht genügend Becher übrig bleiben.

Die Anzahl der Möglichkeiten für ein gewähltes i ist

$$\underbrace{\binom{i-1}{k_1}}_{\text{Rote Bälle}}\ \underbrace{\binom{n-i}{k_2}}_{\text{Blaue Bälle}}.$$

Da alle Möglichkeiten gezählt werden sollen, muss über i summiert werden. Daraus ergibt sich:

$$\sum_{i=k_1+1}^{n+1-k_2} \binom{i-1}{k_1}\binom{n+1-i}{k_2} = \sum_{i=0}^{n-k_1-k_2} \binom{k_1+i}{k_1}\binom{n-k_1-i}{k_2}.$$

Andererseits: Die Anzahl möglicher Becherbelegungen mit $k_1 + k_2 + 1$ weißen Bällen in $n+1$ Bechern wird durch den Binomialkoeffizienten $\binom{n+1}{k_1+k_2+1}$ beschrieben. Danach werden einfach die ersten k_1 Bälle rot gefärbt, dann einer schwarz und schließlich die letzten k_2 Bälle blau (von links nach rechts). Das ist immer möglich und eindeutig.

Es ergibt sich daraus die gesuchte Identität

$$\binom{n+1}{k_1+k_2+1} = \sum_{i=0}^{n-k_1-k_2} \binom{k_1+i}{k_1}\binom{n-k_1-i}{k_2}.$$

Als Test überprüft man die Formel noch einmal mit den Werten aus (a): $n+1 = 5$, $k_1 = 1$, $k_2 = 2$. Die linke Seite der Identität ergibt:

$$\binom{4+1}{1+2+1} = 5$$

und die rechte

$$\sum_{i=0}^{4-1-2} \binom{1+i}{1}\binom{4-1-i}{2} = \binom{1}{1}\binom{3}{2} + \binom{2}{1}\binom{2}{2} = 5.$$

Bemerkung: Die Vandermonde-Identität ist der Formel oben sehr ähnlich:

$$\binom{n_1+n_2}{k} = \sum_{k_1+k_2=k} \binom{n_1}{k_1}\binom{n_2}{k_2}.$$

Diese Formel wird gewöhnlich interpretiert als die Anzahl der Möglichkeiten aus genau $n = n_1 + n_2$ Personen ein Komitee der Größe k zu bilden. Selbstverständlich wird das Komitee von Personen aus den zwei disjunkten Gruppen gebildet, jeweils n_1 bzw. n_2 Personen. Die linke Seite der Formel hängt zudem nicht von der speziellen Wahl von n_1 bzw. n_2 ab, gilt also für jede Partition von n.

Die Formel aus der Aufgabe ist gewissermaßen die Umkehrung davon. Man kann die Liste der Kandidaten für ein Komitee an beliebiger Stelle in zwei Teillisten trennen und fordert nur, dass beide Listen mindestens k_1 bzw. k_2 Kandidaten enthält. Das geht auf

$$\binom{n+1}{k_1+k_2+1} = \sum_{n_1+n_2=n} \binom{n_1}{k_1}\binom{n_2}{k_2}$$

Weisen. Die Formel ist ebenfalls nicht abhängig davon welche konkrete Partition von k gewählt wurde. Die +1 im Binomialkoeffizienten symbolisiert die schwarze Kugel aus dem obigen Modell und dient als Position für die Listentrennung. Aus diesem Grund kann die Formel auch im Rahmen des Fächermodells interpretiert werden: Die Formel gibt an, auf wie viele Arten $k = k_1 + k_2$ aus n Kugeln auf zwei Kästen verteilt werden können, wenn in Kasten eins k_1 und in Kasten zwei k_2 Kugeln liegen sollen. Entsprechend kann der Ausdruck für m Kästen oder Gruppen verallgemeinert werden

$$\binom{n+m-1}{k_1+k_2+\ldots+k_m+m-1} = \sum_{n_1+n_2+\ldots+n_m=n} \binom{n_1}{k_1}\binom{n_2}{k_2}\cdots\binom{n_m}{k_m}.$$

Der Summand $m-1$ ist wieder die Anzahl der Lücken, die man braucht, um n Personen auf m Gruppen aufzuteilen. Die Summe hängt nicht von der konkreten Wahl der Partition von k ab.

Aufgabe 1.11: Fächermodell ○●●

Gegeben seien $n \in \mathbb{N}$ nicht unterscheidbare Kugeln und $m \in \mathbb{N}$ unterscheidbare Fächer, wobei $m \leq n$.

(a) Zunächst sei $n = 3$ und $m = 2$. Geben Sie alle Möglichkeiten an, wie sich die Kugeln auf die Fächer verteilen lassen, wenn

(i) in jedem Fach beliebig viele Kugeln sein dürfen.

(ii) in jedem Fach mindestens eine Kugel sein muss.

(b) Verallgemeinern Sie Ihre Überlegungen aus (a) auf beliebige n und m.

Lösung:

(a) Wir geben alle Möglichkeiten direkt an:

(i) | |○○○|, |○|○○|, |○○|○|, |○○○| |.

(ii) |○|○○|, |○○|○|.

(b) (i) Anstatt die Kugeln zu verteilen, können wir auch die Wände der Fächer "|"verteilen. Es gibt $m+1$ viele Wände, wobei die Wände ganz außen fest sind. Wir müssen also $m-1$ Wände auf $m+n-1$ Plätze verteilen. Es dürfen mehrere Wände am gleichen Platz platziert werden und die Reihenfolge, in der die Wände platziert werden, spielt keine Rolle. Somit gibt es genau $\binom{m+n-1}{m-1}$ Möglichkeiten.

(ii) In jedem Fach wird eine Kugel platziert. Da die Kugeln nicht unterscheidbar sind gibt es dafür nur eine Möglichkeit. Danach müssen $n-m$ Kugeln auf m Fächer verteilt werden. Dafür gibt es nach (a) $\binom{m+n-m-1}{m-1} = \binom{n-1}{m-1}$ Möglichkeiten.

Bemerkung: Aufgabe (b)(i) ist ein Spezialfall von Aufgabe 1.10 für $k = n$. Dann ist für jede Zerlegung von $n = n_1 + n_2$ der Binomialkoeffizient $\binom{n+m-1}{n_1+n_2+m-1}$ gleich 1. Summiert man über die Anzahl der Möglichkeiten n Bälle auf m Becher zu verteilen bzw. n in m Summanden aus natürlichen Zahlen zu zerlegen, erhält man die Anzahl Partitionen von n, wobei Summanden Null werden dürfen. In (b)(ii) gibt es die zusätzliche Einschränkung, dass keiner der Summanden Null werden darf (jedes Fach enthält mindestens eine Kugel).

Aufgabe 1.12: Anzahl Ergebnisse beim Kegeln ○○●

In Deutschland ist das Kegeln mit neun Kegeln üblich.

(a) Wie viele Wurfergebnisse gibt es, wenn die Kegel *nummeriert* sind?

(b) Wie viele sind es, wenn die Kegel *nicht nummeriert* sind?

Lösung:

(a) Die Menge aller möglichen Wurfergebnisse lässt sich als $\Omega := \{0, 1\}^9$ darstellen, wobei 1 bedeute „der Kegel steht noch“ und 0 „er ist umgefallen“. Zum Beispiel beschreibt dann die Menge $\{(1, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 0)\} \in \Omega$ das Ereignis, bei dem vier Kegel (Nummern 1, 3, 7 und 8) noch stehen und die anderen umgeworfen wurden. Somit ergibt sich als Anzahl möglicher Wurfergebnisse $\#\Omega = 2^9 = 512$.

(b) Im Gegensatz zu vorher sind die Kegel nun ununterscheidbar und nur noch die Anzahl umgefallener Kegel ist wichtig. Somit kann das Wurfergebnis durch die Ergebnismenge $\Omega := \{0, 1, \ldots, 9\}$ dargestellt werden. Daher gibt es insgesamt $\#\Omega = 10$ verschiedene Ergebnisse.

Aufgabe 1.13: Demokratische Wahl ○●●

In einer geheimen und fairen Wahl stellen sich $k \geq 1$ Kandidatinnen auf. Wahlberechtigt sind n Personen ($n \geq k$). Jede Person wählt und jede Person besitzt genau eine Stimme.

(a) Betrachten Sie zunächst den Fall $n = 30$ und $k = 4$. Geben Sie ein mögliches Wahlergebnis konkret an. Beschreiben Sie dann die Menge aller möglichen Ergebnisse der Wahl. Wie viele verschiedene Wahlergebnisse gibt es?

(b) Verallgemeinern Sie Ihre Überlegungen aus (a): Wie viele verschiedenen Wahlergebnisse gibt es für beliebiges k und n?

(c) Wie ändert sich die Anzahl aus (b), wenn eine weitere Kandidatin in das Rennen einsteigt? Geben Sie dafür das Verhältnis der bisherigen Formel für n und k und der für n und $k + 1$ an.

Berechnen Sie den Fall $n = 30$ und $k = 5$ explizit mit Hilfe von (a).

(d) Sei l_i, $i \in \{1, \dots, k\}$, die Anzahl der Stimmen, welche die i-te Kandidatin erhalten hat. Durch wie viele verschiedene Stimmabgaben der Wähler kann ein festes Wahlergebnis $(l_1, \dots, l_k)$ mit $l_1 + \dots + l_k = n$ zustande kommen? Berechnen Sie dies explizit für Ihr konkretes Wahlergebnis aus (a).

Lösung:

(a) Es bezeichne l_1 die Anzahl der Stimmen für die erste Kandidatin, l_2 die der zweiten etc. Somit lassen sich alle möglichen Wahlergebnisse darstellen durch

$$\left\{(l_1, l_2, l_3, l_4) \in \mathbb{N}^4 \;:\; \sum_{i=1}^{4} l_i = 30\right\}.$$

Ein mögliches Wahlergebnis wäre $(10, 13, 4, 3)$. Die Wahl ist geheim, das heißt, die Stimmen der n Personen sind nicht unterscheidbar und jede Kandidatin darf mehrfach gewählt werden. Somit haben wir es mit einem Kästchen-Modell zu tun. Wie in Aufgabe 1.11 bewiesen, ist die Anzahl der möglichen Ergebnisse gleich $\binom{30+4-1}{4-1} = \binom{33}{3} = 5\,456$.

(b) Analog zu (a) können wir die möglichen Wahlergebnisse darstellen durch

$$\left\{(l_1, l_2, \dots, l_k) \in \mathbb{N}^k \;:\; \sum_{i=1}^{k} l_i = n\right\}.$$

Die Anzahl der möglichen Wahlergebnisse ergibt sich zu $\binom{n+k-1}{k-1}$.

(c) Analog zu (b) gibt es bei $k + 1$ Kandidatinnen $\binom{n+k}{k}$ mögliche Wahlergebnisse. Als Verhältnis ergibt sich dadurch

$$\frac{\binom{n+k}{k}}{\binom{n+k-1}{k-1}} = \frac{(n+k)!\,(k-1)!\,n!}{k!\,n!\,(n+k-1)!} = \frac{n+k}{k}.$$

Im Fall $n = 30$ und $k = 5$ ergibt sich $\binom{34}{4} = \binom{33}{3}\frac{34}{4} = 46\,376$.

(d) Wir ziehen ohne Zurücklegen aus den wahlberechtigten Personen, welche für die jeweilige Kandidatin gestimmt haben. Für die erste Kandidatin ist die Anzahl der möglichen Stimmverteilungen damit gegeben durch $\binom{n}{l_1}$. Für die zweite Kandidatin ergeben sich dadurch noch $\binom{n-l_1}{l_2}$ Möglichkeiten usw. Aufgrund dieser Überlegung ist die Anzahl der Möglichkeiten insgesamt

$$\binom{n}{l_1}\binom{n-l_1}{l_2}\cdots\binom{n-l_1-\dots-l_{k-1}}{l_k} = \frac{n!}{l_1!\,l_2!\dots l_k!} =: \binom{n}{l_1, l_2, \dots, l_k}.$$

Im Fall des Wahlergebnisses (10, 13, 4, 3) führt dies zu

$$\binom{30}{10, 13, 4, 3} = 81\,518\,134\,698\,000,$$

also etwa 81 Billionen Möglichkeiten.

Bemerkung: Die Überlegung aus (d) ist Grundlage der Herleitung des Multinomialkoeffizienten $\binom{n}{l_1,l_2,\ldots,l_k}$ aus den Binomialkoeffizienten. Dieser Koeffizient gibt die Anzahl der Möglichkeiten an, ohne Zurücklegen und ohne Beachtung der Reihenfolge aus einer Menge mit n unterscheidbaren Elementen in k Kategorien verteilt jeweils l_i Elemente der Kategorie i zu ziehen. Der Binomialkoeffizient entspricht dem Spezialfall $k = 2$. Es gilt $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k,\, k}$.

Aufgabe 1.14: Blumenstrauß ○○●

In einem Blumenladen gibt es 40 Lilien, 30 Rosen und 20 Gänseblümchen. Wie viele verschiedene Blumensträuße aus genau vier Lilien, drei Rosen und zwei Gänseblümchen können daraus gebunden werden, wobei sich die Blumen untereinander unterscheiden?

Lösung: Zunächst wählen wir aus den 40 Lilien vier aus. Die Reihenfolge der Lilien ist irrelevant. Somit gibt es $\binom{40}{4}$ verschiedene Art die Lilien auszuwählen. Analog für die Rosen und Gänseblümchen. Damit ergibt sich die Anzahl der möglichen Blumensträuße als

$$\binom{40}{4}\binom{30}{3}\binom{20}{2} = 70\,498\,246\,000,$$

also etwa 70 Milliarden Möglichkeiten!

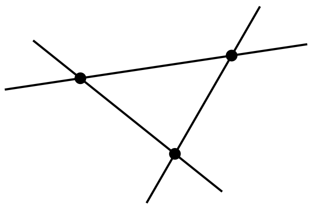
Aufgabe 1.15: Flächen in der Ebene ○●●

Die Ebene wird durch $n \in \mathbb{N}$ Geraden in Teilflächen geteilt. Die Geraden sind nicht parallel und höchstens zwei Geraden schneiden sich in einem Punkt.

(a) Gegeben seien n=3 Geraden: In wie viele Teilflächen kann die Ebene maximal geteilt werden? Veranschaulichen Sie Ihre Lösung anhand einer Skizze.

(b) Beweisen Sie, dass für beliebiges n die maximale Anzahl an Teilflächen durch $N_n := \frac{n(n+1)}{2} + 1$ gegeben ist.

Hinweis: *Für $n = 3$ ergibt sich folgendes Bild:*



Lösung:

(a) Mit drei Geraden kann die Ebene in maximal sieben Teilflächen geteilt werden.

(b) Seien $n - 1$ Geraden vorgegeben in maximaler Lage. Jede weitere Gerade, die gemäß der obigen Forderungen hinzugefügt wird, schneidet die $n - 1$ Geraden in $n - 1$ Punkten, dabei entstehen n zusätzliche Flächen. Es gilt also:

$$N_n = N_{n-1} + n, \qquad N_1 = 2.$$

Auflösen der Rekursion ergibt

$$N_n = N_{n-1} + n = N_1 + \sum_{k=2}^{n} k = 1 + \sum_{k=1}^{n} k = 1 + \frac{n(n+1)}{2}.$$

Aufgabe 1.16: Verrückte Objekte – Dérangements ○●●

Nach einem langen Arbeitstag in der Bibliothek liegen noch $n \geq 2$ Bücher in der Rückgabe. Da es schon spät ist, werden die Bücher einfach zufällig in die freien Plätze zurückgestellt.

(a) Beschreiben Sie für $n = 4$ die Anzahl Möglichkeiten, dass genau zwei Bücher am richtigen Platz stehen.

(b) Zeigen Sie, dass es genau

$$D_{n,k} := \frac{n!}{k!} \sum_{j=2}^{n-k} \frac{(-1)^j}{j!}$$

Möglichkeiten gibt, genau $k \leq n$ der Bücher wieder an den richtigen Platz zu stellen.

Lösung:

(a) Die Bücher seien durchnummeriert von eins bis vier. Das Platzieren der Bücher entspricht einer Permutation von vier Elementen. Es gibt sechs Permutationen, die genau zwei Fixpunkte haben:[2]

$$(12), (13), (14), (23), (24), (34).$$

(b) Der Beweis kann über die Einschluss-Ausschluss-Formel für Mengen geführt werden oder über Induktion.

Wir bemerken hier nur, dass gilt

$$D_{0,0} = 1, \qquad D_{1,0} = 0, \qquad D_{1,1} = 1, \qquad \ldots, \qquad D_{n,k} = \binom{n}{k} D_{n-k,0}.$$

Bemerkung: Die Zahl $D_{n,k}$ wird k-te Rencontres-Zahl genannt und taucht in Kapitel 6, Aufgabe 6.2 im Zusammenhang mit dem Rencontre-Problem wieder auf. Für $k = 0$ heißt $D_{n,0}$ auch *Dérangement*-Zahl, da sie die Anzahl Möglichkeiten angibt, dass keines der Bücher wieder an den richtigen Platz gestellt wird.

1.3 Elemente der Maßtheorie

Aufgabe 1.17: Metrisierung des Wahrscheinlichkeitsraums ○●●

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und

$$A \triangle B := (A \setminus B) \sqcup (B \setminus A)$$

für $A, B \in \mathcal{A}$.

Beweisen Sie, dass $d : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to [0, 1]$ definiert durch $d(A, B) := \mathbb{P}(A \triangle B)$ eine Pseudometrik ist.

[2] Es wird die übliche Zykelschreibweise für Permutationen benutzt.

Lösung: Zunächst ist $A \triangle A = A \setminus A = \emptyset$, daher ist $d(A, A) = 0$. Weiter ist wegen der Kommutativität der symmetrischen Differenz, siehe Aufgabe 1.1, $d(A, B) = d(B, A)$. Schließlich ist für beliebiges $C \in \mathcal{A}$

$$A \triangle C \subset (A \cup B \cup C) \setminus (A \cap B \cap C) = (A \triangle B) \cup (B \triangle C).$$

Daher gilt mit der Monotonie des Maßes $\mathbb{P}$:

$$\mathbb{P}(A \triangle C) \leq \mathbb{P}((A \triangle B) \cup (B \triangle C)) \leq \mathbb{P}(A \triangle B) + \mathbb{P}(B \triangle C),$$

woraus die Dreiecksungleichung $d(A, C) \leq d(A, B) + d(B, C)$ folgt.

Da aus $d(A, B) = 0$ nur $\mathbb{P}(A \triangle B) = 0$ folgt, ist d keine Metrik, sondern nur eine Pseudometrik.

Bemerkung: Diese Pseudometrik lässt sich zu einer Metrik machen, wenn man alle Mengen aus $\mathcal{A}$ miteinander identifiziert, die sich nur durch eine Nullmenge unterscheiden.

Aufgabe 1.18: Vervollständigte Sigma-Algebra ●●●

Sei $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra auf Ω. $\mathbb{P}$ sei ein auf $\mathcal{A}$ definiertes Wahrscheinlichkeitsmaß und $\mathcal{N}$ die Klasse der $\mathbb{P}$-Nullmengen:

$$\mathcal{N} = \{N \subset \Omega : \exists \tilde{N} \in \mathcal{A} \text{ mit } N \subset \tilde{N} \text{ und } \mathbb{P}(\tilde{N}) = 0\}.$$

Sei

$$\overline{\mathcal{A}} := \{A \cup N \ : \ A \in \mathcal{A}, N \in \mathcal{N}\}$$

die Vervollständigung der σ-Algebra $\mathcal{A}$ bezüglich $\mathbb{P}$.

(a) Beweisen Sie, dass $\overline{\mathcal{A}}$ eine σ-Algebra ist, die $\mathcal{A}$ umfasst.

(b) Sei $\overline{\mathbb{P}}$ die Fortsetzung von $\mathbb{P}$ auf $\overline{\mathcal{A}}$, die durch

$$\overline{\mathbb{P}}(A \cup N) := \mathbb{P}(A) \qquad \forall A \in \mathcal{A}, N \in \mathcal{N}$$

definiert wird.

Beweisen Sie, dass $\overline{\mathbb{P}}$ wohldefiniert ist, also für $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$ und $N_1, N_2 \in \mathcal{N}$ gilt

$$A_1 \cup N_1 = A_2 \cup N_2 \ \Rightarrow \ \mathbb{P}(A_1) = \mathbb{P}(A_2).$$

(c) Beweisen Sie, dass $\overline{\mathbb{P}}$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\overline{\mathcal{A}}$ ist.

Lösung:

(a) (i) $\overline{\mathcal{A}}$ enthält die leere Menge: $\emptyset \in \mathcal{A} \subset \overline{\mathcal{A}}$.

(ii) $\overline{\mathcal{A}}$ ist bezüglich Komplementbildung stabil:
Sei $A \cup N \in \overline{\mathcal{A}}$.
Es existiert $\tilde{N} \in \mathcal{A}$ mit $N \subset \tilde{N}$ und $P(\tilde{N}) = 0$. Damit folgt

$$\begin{aligned}(A \cup N)^c &= (A^c \cap \tilde{N}^c) \cup (A^c \cap (N^c \setminus \tilde{N}^c)) \\ &= \underbrace{(A^c \cap \tilde{N}^c)}_{\in \mathcal{A}} \cup \underbrace{(A^c \cap N^c \cap \tilde{N})}_{\in \mathcal{N}} \in \overline{\mathcal{A}}.\end{aligned}$$

(iii) $\overline{\mathcal{A}}$ ist abgeschlossen bezüglich abzählbarer Vereinigungen:
Sei $(A_i \cup N_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Mengenfolge in $\overline{\mathcal{A}}$. Es gilt

$$\bigcup_{i=1}^{\infty}(A_i \cup N_i) = \underbrace{\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i}_{\in \mathcal{A}} \cup \bigcup_{i=1}^{\infty} N_i.$$

Es bleibt zu zeigen, dass $\bigcup_{i=1}^{\infty} N_i \in \mathcal{N}$:
Zu jedem N_i existiert ein $\tilde{N}_i \in \mathcal{A}$, mit $N_i \subset \tilde{N}_i$ und $\mathbb{P}(\tilde{N}_i) = 0$. Es gilt weiter

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} \tilde{N}_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(\tilde{N}_i) = 0.$$

Da $\bigcup_{i=1}^{\infty} N_i \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} \tilde{N}_i$ folgt die Aussage.

(b) Mit den Bezeichnungen wie oben sei $A_1 \cup N_1 = A_2 \cup N_2$. Dann gilt

$$A_1 \setminus A_2 \subset A_1 \subset A_1 \cup N_1 = A_2 \cup N_2 \Rightarrow A_1 \setminus A_2 \subset N_2.$$

Analog folgt $A_2 \setminus A_1 \subset N_1$. Somit gilt

$$\mathbb{P}(A_1 \setminus A_2) + \mathbb{P}(A_2 \setminus A_1) \leq \overline{\mathbb{P}}(N_1) + \overline{\mathbb{P}}(N_2) = 0.$$

Schließlich folgt

$$|\mathbb{P}(A_1) - \mathbb{P}(A_2)| \leq \mathbb{P}(A_1 \setminus A_2) + \mathbb{P}(A_2 \setminus A_1) = 0 \Rightarrow \mathbb{P}(A_1) = \mathbb{P}(A_2).$$

Was zu beweisen war.

(c) (i) $\overline{\mathbb{P}}$ ist normiert, denn:

$$\overline{\mathbb{P}}(\Omega) = \overline{\mathbb{P}}(\Omega \cup \emptyset) = \mathbb{P}(\Omega) = 1.$$

(ii) Sei $(A_i \cup N_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine disjunkte Mengenfolge in $\overline{\mathcal{A}}$, dann folgt die σ-Additivität aus

$$\overline{\mathbb{P}}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \cup N_i\right) = \overline{\mathbb{P}}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \cup \bigcup_{i=1}^{\infty} N_i\right) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)$$
$$= \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \overline{\mathbb{P}}(A_i \cup N_i).$$

Aufgabe 1.19: Sigma-Algebra aus abzählbaren Mengen ○●●

Beweisen oder widerlegen Sie:

(a) Die Menge
$$\mathcal{A}_1 := \{A \subset \mathbb{N} \,:\, A \text{ endlich oder } A^c \text{ endlich}\}$$
ist eine σ-Algebra auf $\mathbb{N}$.

(b) Die Menge
$$\mathcal{A}_2 := \{A \subset \mathbb{N} \,:\, A \text{ abzählbar oder } A^c \text{ abzählbar}\}$$
ist eine σ-Algebra auf $\mathbb{N}$.

(c) Die Menge
$$\mathcal{A}_3 := \{A \subset \mathbb{R} \,:\, A \text{ abzählbar oder } A^c \text{ abzählbar}\}$$
ist eine σ-Algebra auf $\mathbb{R}$.

Lösung:

(a) Wenn $\mathcal{A}_1$ σ-Algebra auf $\mathbb{N}$ wäre, so wäre
$$A := \bigcup_{i=1}^{\infty} \{2i\} = 2\mathbb{N}$$
als Vereinigung endlicher Mengen in $\mathcal{A}_1$. Jedoch ist weder A noch A^c endlich, also gilt $A \notin \mathcal{A}_1$. Daher ist $\mathcal{A}_1$ keine σ-Algebra.

(b) Überprüfen der Definition zeigt, dass $\mathcal{A}_2$ eine σ-Algebra ist:

(i) $\mathcal{A}_2$ enthält die Grundmenge $\mathbb{N}$, da $\mathbb{N}$ abzählbar ist.

(ii) Sei $A \in \mathcal{A}_2$, dann ist $A^c = \mathbb{N} \setminus A$. Da nun $\mathbb{N}$ abzählbar unendlich ist, ist A^c auch höchstens abzählbar unendlich. Daher ist $\mathcal{A}_2$ abgeschlossen gegen Komplementbildung.

(iii) Sei $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Elementen aus $\mathcal{A}_2$. Für jedes $i \in \mathbb{N}$ ist A_i abzählbar. Somit gilt, dass $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ als abzählbare Vereinigung abzählbarer Mengen wieder abzählbar ist. $\mathcal{A}_2$ ist abgeschlossen bezüglich abzählbarer Vereinigungen.

(c) Durch $\mathcal{A}_3$ ist eine σ-Algebra auf $\mathbb{R}$ gegeben:

(i) $\mathcal{A}_3$ enthält die Grundmenge $\mathbb{R}$, da $\mathbb{R}^c = \emptyset$ abzählbar ist.

(ii) Sei $A \in \mathcal{A}_3$, dann ist entweder $A = (A^c)^c$ abzählbar, oder A^c abzählbar. Damit folgt die Aussage direkt, und $\mathcal{A}_3$ ist abgeschlossen bezüglich Komplementbildung.

(iii) Sei $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Elementen aus $\mathcal{A}_3$.

1. Fall: Für jedes $i \in \mathbb{N}$ sei A_i abzählbar. Dann ist $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ als abzählbare Vereinigung abzählbarer Mengen wieder abzählbar.

2. Fall: Für eine nichtleere Menge $I \subset \mathbb{N}$ sei A_i, $i \in I$, nicht abzählbar (aber doch A_i^c). Dann schreibe

$$A := \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup_{i\in I} A_i \cup \bigcup_{i\in I^c} A_i.$$

Nun ist A nicht abzählbar, aber

$$A^c = \bigcap_{i\in I} A_i^c \cap \underbrace{\bigcap_{i\in I^c} A_i^c}_{\text{abzählbar}}$$

ist abzählbar, da mindestens eine der zu schneidenden Mengen abzählbar ist. Daher ist $\mathcal{A}_3$ abgeschlossen bezüglich abzählbarer Vereinigungen.

Aufgabe 1.20: Sigma-Algebra Beispiele ○○●

Definieren Sie die Mengen

$$\Omega = \{a, b, c, d, e\}, \quad \mathcal{F}_1 = \{\emptyset, \{a\}, \{b, c, d, e\}, \Omega\}$$
$$\mathcal{F}_2 = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{c, d, e\}, \{a, c, d, e\}, \{b, c, d, e\}, \Omega\}.$$

(a) Beweisen Sie, dass $\mathcal{F}_1$ eine σ-Algebra auf Ω ist.

(b) Ist $\mathcal{F}_2$ eine σ-Algebra auf Ω?

(c) Geben Sie die erzeugte σ-Algebra $\mathcal{F}_3 = \sigma(\{\{a\}, \{c, d\}\})$ auf Ω an.

Lösung:

(a) $\mathcal{F}_1 = \{\emptyset, A, A^c, \Omega\}$ ist eine σ-Algebra, mit $A = \{a\}$.

(b) Es gilt

(i) $\emptyset \in \mathcal{F}_2$

(ii)
- $\{a\}^c = \{b, c, d, e\} \in \mathcal{F}_2$
- $\{b\}^c = \{a, c, d, e\} \in \mathcal{F}_2$
- $\{a, b\}^c = \{c, d, e\} \in \mathcal{F}_2$

(iii) Wegen der Kommutativität der Vereinigung gilt weiter

$\cup$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{a,b\}$	$\{c,d,e\}$	$\{a,c,d,e\}$	$\{b,c,d,e\}$
$\{a\}$	$\{a\}$	$\{a,b\}$	$\{a,b\}$	$\{a,c,d,e\}$	$\{a,c,d,e\}$	Ω
$\{b\}$		$\{b\}$	$\{a,b\}$	$\{a,b\}$	Ω	$\{b,c,d,e\}$
$\{a,b\}$			$\{a,b\}$	Ω	Ω	Ω
$\{c,d,e\}$				$\{c,d,e\}$	$\{a,c,d,e\}$	$\{b,c,d,e\}$
$\{a,c,d,e\}$					$\{a,c,d,e\}$	Ω
$\{b,c,d,e\}$						$\{b,c,d,e\}$

(i),(ii),(iii) $\Rightarrow \mathcal{F}_2$ ist eine σ-Algebra.

(c) $\mathcal{F}_3 = \{\emptyset, \{a\}, \{b, e\}, \{c, d\}, \{a, b, e\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d, e\}, \Omega\}$.

Aufgabe 1.21: Schnitt und Vereinigung von Sigma-Algebren ○●●

Gegeben sei die Menge $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$ und die σ-Algebren

$$\mathcal{A}_1 = \{\emptyset, \{1\}, \{2, 3, 4\}, \Omega\} \quad \mathcal{A}_2 = \{\emptyset, \{2\}, \{1, 3, 4\}, \Omega\} \quad \mathcal{A}_3 = \{\emptyset, \{3\}, \{1, 2, 4\}, \Omega\}.$$

(a) Zeigen Sie, dass es keine Vereinigung der gegebenen σ-Algebren gibt, welche selbst wieder eine σ-Algebra ist.

(b) Definieren Sie eine σ-Algebra $\mathcal{A}_4$, sodass $\bigcup_{i=1}^{4} \mathcal{A}_i$ eine σ-Algebra ist.

(c) Zeigen Sie, dass jeder Schnitt der gegebenen σ-Algebren selbst wieder eine σ-Algebra ist.

(d) Verallgemeinern Sie die Aussage aus (c): Gegeben seien die Ergebnismenge Ω und zwei σ-Algebren $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ auf dieser. Zeigen Sie, dass $\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2$ wieder eine σ-Algebra ist.

Lösung:

(a) In jeder möglichen Vereinigung der σ-Algebren fehlen jeweils die Vereinigung der einelementigen Mengen.

(b) Es ist stets möglich, die größtmögliche σ-Algebra zu wählen, $\mathcal{A}_4 := \mathcal{P}(\Omega)$.

(c) Der Schnitt der σ-Algebren ergibt jeweils die triviale σ-Algebra $\{\emptyset, \Omega\}$.

(d) Seien $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$ zwei σ-Algebren. Definieren Sie $\mathcal{A} := \mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2$, dann gilt

  (i) $\mathcal{A}$ enthält die leere Menge:

$$\emptyset \in \mathcal{A}_1,\ \emptyset \in \mathcal{A}_2 \Rightarrow \emptyset \in \mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2 = \mathcal{A}.$$

  (ii) $\mathcal{A}$ ist abgeschlossen bezüglich Komplementbildung:

$$A \in \mathcal{A} \Rightarrow A \in \mathcal{A}_1,\ A \in \mathcal{A}_2 \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}_1,\ A^c \in \mathcal{A}_2 \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2 = \mathcal{A}.$$

  (iii) $\mathcal{A}$ ist abgeschlossen bezüglich abzählbarer Vereinigung:

$$\begin{aligned} A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A} &\Rightarrow A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}_1,\ A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}_2 \\ &\Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}_1,\ \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}_2 \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}. \end{aligned}$$

Aufgabe 1.22: Limes inferior und superior ●●●

Sei Ω eine Menge und $(A_n)_{n\geq 1}$ eine Folge von Teilmengen von Ω. *Limes inferior* und *limes superior* werden für Mengen so definiert:

$$\liminf_{n\to\infty} A_n := \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k \qquad\qquad \limsup_{n\to\infty} A_n := \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$$

(a) Zeigen Sie: $\liminf\limits_{n\to\infty} A_n = \{\omega \in \Omega \ :\ \#\{n \in \mathbb{N} \ :\ \omega \notin A_n\} < \infty\}$.

(b) Zeigen Sie: $\limsup\limits_{n\to\infty} A_n = \{\omega \in \Omega \ :\ \#\{n \in \mathbb{N} \ :\ \omega \in A_n\} = \infty\}$.

(c) Sei nun $(A_n)_{n\geq 1}$ eine steigende Folge, das heißt für alle $n \in \mathbb{N}$ gelte $A_n \subset A_{n+1}$. Zeigen Sie, dass in diesem Fall gilt

$$\liminf_{n\to\infty} A_n = \limsup_{n\to\infty} A_n.$$

(d) Finden Sie ein Beispiel, für das nur

$$\liminf_{n\to\infty} A_n \subsetneq \limsup_{n\to\infty} A_n$$

gilt.

Lösung:

(a) Sei $\omega \in \Omega$, sodass $\#\{k \in \mathbb{N} : \omega \notin A_k\} < \infty$. Dann existiert $n < +\infty$, sodass $\omega \in A_k$ für alle $k \geq n$. Damit gilt

$$\omega \in \bigcap_{k \geq n} A_k \subset \bigcup_{n \geq 1} \bigcap_{k \geq n} A_k = \liminf_{n \to \infty} A_n.$$

Sei umgekehrt

$$\omega \in \liminf_{n \to \infty} A_n.$$

Dann existiert ein $n \in \mathbb{N}$, sodass $\omega \in \bigcap_{k \geq n} A_k$. Damit gilt $\omega \in A_k$ für alle $k \geq n$. Es folgt

$$\#\{k \in \mathbb{N} : \omega \notin A_k\} \leq n - 1 < \infty.$$

(b) Sei $\omega \in \Omega$ sodass $\#\{k \in \mathbb{N} : \omega \in A_k\} = +\infty$.

Dann existiert für jedes $n > 0$ ein $k \geq n$ sodass $\omega \in A_k$. Damit gilt $\omega \in \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$. Da dies für jedes $n > 0$ gilt, kann man daraus schließen, dass

$$\omega \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k = \limsup_{n \to \infty} A_n.$$

Sei umgekehrt $\omega \in \limsup_{n \to \infty} A_n$. Dann ist ω Element von $\bigcup_{k \geq n} A_k$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Das bedeutet, dass man für jede endliche Teilmenge $I \subset \mathbb{N}$ einen weiteren Index $k > \max I$ finden kann, sodass $\omega \in A_k$. Folglich

$$\#\{k \in \mathbb{N} : \omega \in A_k\} = +\infty.$$

(c) Da $(A_n)_{n \geq 1}$ eine steigende Mengenfolge ist, gilt für alle $n \in \mathbb{N}$: $A_1 \subset \ldots \subset A_n$ und damit

$$B_n := \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k = B_1 =: \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k.$$

Daraus folgt

$$\limsup_{n \to \infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k.$$

Da $A_k = \bigcap_{i=k}^{\infty} A_i$, gilt weiter

$$\omega \in \limsup_{n \to \infty} A_n \Leftrightarrow \omega \in \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \Leftrightarrow \omega \in \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{i=k}^{\infty} A_i \Leftrightarrow \omega \in \liminf_{n \to \infty} A_n.$$

Damit sind *Limes inferior* und *Limes superior* im Fall einer steigenden Folge von Mengen sogar gleich. Dies gilt im Allgemeinen nicht, siehe (d).

(d) Die Teilmengenbeziehung $\liminf\limits_{n\to\infty} A_n \subset \limsup\limits_{n\to\infty} A_n$ gilt wegen (a) und (b).

Für die Konstruktion eines Gegenbeispiels sei $\Omega = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ und $(A_n)_{n\geq 1}$ eine Folge von Teilmengen von Ω, die durch

$$A_n := \{(\omega_i)_{i\geq 1} \in \Omega \, : \, \omega_n = 1\}$$

definiert sind. Dies sind alle unendlichen 0-1-Folgen, die als n-te Koordinate eine 1 haben. Mit Hilfe der obigen Identitäten folgt, dass

$$(0,1,0,1,0,1,0,\ldots) \notin \liminf_{n\to\infty} A_n \quad \text{aber} \quad (0,1,0,1,0,1,0,\ldots) \in \limsup_{n\to\infty} A_n.$$

Daher gilt $\liminf_{n\to\infty} A_n \neq \limsup_{n\to\infty} A_n$.

Aufgabe 1.23: Erstes Lemma von Borel-Cantelli ○●●

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und es seien $A_1, A_2, \ldots$ Ereignisse aus $\mathcal{A}$.

(a) Beweisen Sie das erste Lemma von Borel:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n) < +\infty \quad \Rightarrow \quad \mathbb{P}(\limsup_{n\to+\infty} A_n) = 0.$$

(b) Betrachten Sie nun die Mengenfolge $A_n := (0, 1/n]$, $n \geq 1$. Zeigen Sie

$$\mathbb{P}(\limsup_{n\to+\infty} A_n) = 0,$$

obwohl $\sum_{n=1}^{+\infty} P(A_n) = \infty$. Interpretieren Sie das Resultat.

Lösung:

(a) Nach Definition ist

$$\limsup_{n\to+\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{+\infty} \left(\bigcup_{m=n}^{+\infty} A_m \right).$$

Der *Limes superior* ist die Menge der Elemente von Ω, die für unendlich viele Indizes n zu A_n gehören. Nun gilt für alle n

$$\bigcap_{n=1}^{+\infty} \left(\bigcup_{m=n}^{+\infty} A_m \right) \subset \bigcup_{m=n}^{+\infty} A_m.$$

Damit folgt: $\quad 0 \leq \mathbb{P}\Big(\limsup\limits_{n\to+\infty} A_n\Big) \leq \mathbb{P}\left(\bigcup\limits_{m=n}^{+\infty} A_m \right) \leq \sum\limits_{m=n}^{+\infty} \mathbb{P}(A_m) \xrightarrow{n\to+\infty} 0.$

(b) Die Mengenfolge $(A_n)_{n\geq 1}$ ist fallend. Daher ist

$$\mathbb{P}(\limsup_{n\to\infty} A_n) = \mathbb{P}\Big(\bigcap_{n=1}^{+\infty}\bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k\Big) = \mathbb{P}(\emptyset) = 0.$$

Andererseits erhalten wir beim Aufsummieren der Wahrscheinlichkeiten die harmonische Reihe, die divergent ist, das heißt

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = +\infty.$$

Das Ergebnis widerspricht nicht der Aussage in (a), denn die Konvergenz der Reihe ist zwar hinreichend, aber nicht notwendig, wie dieses Beispiel zeigt.

Bemerkung: Aus der Aussage des ersten Borel-Cantelli-Lemmas folgt die analoge Aussage

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n) < +\infty \quad \Rightarrow \quad \mathbb{P}\Big(\liminf_{n\to+\infty} A_n^c\Big) = 1.$$

Aufgabe 1.24: Das Lemma von Fatou ○●●

Es seien $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $(A_n)_{n\geq 1}$ eine Folge von Ereignissen gegeben. Weiter gilt per Definition für eine Folge von reellen Zahlen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$\liminf_{n\to\infty} x_n := \sup_{n\in\mathbb{N}} \inf_{m\geq n} x_m, \qquad \limsup_{n\to\infty} x_n := \inf_{n\in\mathbb{N}} \sup_{m\geq n} x_m.$$

Beweisen Sie, dass die Fatou-Ungleichungen gelten:

(a) $\mathbb{P}(\liminf_n A_n) \leq \liminf_n \mathbb{P}(A_n)$,

(b) $\mathbb{P}(\limsup_n A_n) \geq \limsup_n \mathbb{P}(A_n)$.

(c) Konstruieren Sie zudem ein Beispiel, bei dem die beiden Ungleichungen strikt sind.

Lösung:

(a) Definieren Sie

$$B := \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{m=n}^{\infty} A_m \text{ und } B_n := \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m.$$

Nun gilt

$$B_n \nearrow B \Rightarrow \mathbb{P}(B_n) \nearrow \mathbb{P}(B).$$

Damit folgt

$$\mathbb{P}(B) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(B_n). \tag{1.1}$$

Andererseits gilt für alle $m \geq n$

$$\mathbb{P}(B_n) \leq \inf_{m\geq n} \mathbb{P}(A_m). \tag{1.2}$$

Aus (1.1) und (1.2) folgt die Aussage.

(b) Analog zu (a).

(c) Wählen Sie $\Omega := \{-1, 1\}$ und $\mathbb{P}(\{-1\}) = \frac{1}{4}$, $\mathbb{P}(\{1\}) = \frac{3}{4}$ sowie $A_n = \{(-1)^n\}$. Dann ist

$$\mathbb{P}(A_n) = \begin{cases} \frac{1}{4} & \text{falls } n \text{ ungerade,} \\ \frac{3}{4} & \text{falls } n \text{ gerade.} \end{cases}$$

Somit folgt

$$\liminf \mathbb{P}(A_n) = \frac{1}{4}, \qquad \limsup \mathbb{P}(A_n) = \frac{3}{4}$$

aber

$$\liminf A_n = \emptyset, \qquad \limsup A_n = \Omega.$$

Daher

$$\begin{aligned} 0 = \mathbb{P}(\liminf A_n) & \\ &< \liminf \mathbb{P}(A_n) = \frac{1}{4} < \limsup \mathbb{P}(A_n) = \frac{3}{4} \\ &\qquad < \mathbb{P}(\limsup A_n) = 1. \end{aligned}$$

1.4 Wahrscheinlichkeitsraum und Wahrscheinlichkeitsmaß

Aufgabe 1.25: Elementare Wahrscheinlichkeitsrechnung ○○●

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Für Ereignisse $A, B \subset \Omega$ gelte $\mathbb{P}(A) = 1/3$, $\mathbb{P}(B) = 1/4$ und $\mathbb{P}(A \cap B) = 1/5$.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse A^c, B^c, $A \cup B$, $A^c \cap B$, $A \cap B^c$ und $A^c \cup B^c$.

Lösung:

(a) $\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A) = 2/3$.

(b) $\mathbb{P}(B^c) = 1 - \mathbb{P}(B) = 3/4$.

(c) $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) = 1/3 + 1/4 - 1/5 = 23/60$.

(d) $\mathbb{P}(A^c \cap B) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) = 1/4 - 1/5 = 1/20$.

(e) $\mathbb{P}(A \cap B^c) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B) = 1/3 - 1/5 = 2/15$.

(f) $\mathbb{P}(A^c \cup B^c) = 1 - \mathbb{P}(A \cap B) = 1 - 1/5 = 4/5$.

Aufgabe 1.26: Vergleich elementarer Wahrscheinlichkeiten ○○●

Seien A, B zwei beliebige Ereignisse eines Wahrscheinlichkeitsraums $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Vergleichen und ordnen Sie die folgenden Zahlen:

$$\mathbb{P}(A), \mathbb{P}(B), \mathbb{P}(A \cup B), \mathbb{P}(A \cap B), \mathbb{P}(A \setminus B), \mathbb{P}(A \vartriangle B), \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B).$$

Beweisen Sie so viele Beziehungen wie möglich. Achtung, nicht alle diese Wahrscheinlichkeiten sind vergleichbar!

Lösung: Durch direkte disjunkte Zerlegung ergeben sich die folgende Aussagen:

- $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A \setminus B) + \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B \setminus A) + \mathbb{P}(A)$
- $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A \vartriangle B) + \mathbb{P}(A \cap B)$
- $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A \setminus B) + \mathbb{P}(B \setminus A) + \mathbb{P}(A \cap B)$

Mittels Monotonie-Eigenschaft des Wahrscheinlichkeitsmaßes folgt noch:

- $\mathbb{P}(A \cap B) \le \mathbb{P}(A) \le \mathbb{P}(A \cup B)$
- $\mathbb{P}(A \cap B) \le \mathbb{P}(B) \le \mathbb{P}(A \cup B)$
- $\mathbb{P}(A \setminus B) \le \mathbb{P}(A) \le \mathbb{P}(A \cup B)$
- $\mathbb{P}(B \setminus A) \le \mathbb{P}(B) \le \mathbb{P}(A \cup B)$

Aus den Kolmogoroff-Axiomen, insbesondere der Nicht-Negativität, erhält man noch

- $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) \le \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$
- $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cup B) \le \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$

Für die symmetrische Differenz erhält man zusätzlich

$$\mathbb{P}(A \setminus B), \mathbb{P}(B \setminus A) \le \mathbb{P}(A \vartriangle B) \le P(A \cup B) \le \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B).$$

Ohne weitere Informationen sind $\mathbb{P}(A)$ und $\mathbb{P}(B)$ nicht direkt vergleichbar.

Aufgabe 1.27: Auf Bahnwaggons verteilen ○○●

Elsa, Rosa und André steigen in einen Zug mit sieben Wagen ein. Jeder Passagier wählt rein zufällig und unabhängig von den anderen einen Wagen aus.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit der folgenden Ereignisse:

(a) $A \mathrel{\widehat{=}}$ „ Alle drei Personen sitzen in verschiedenen Wagen “,

(b) $B \mathrel{\widehat{=}}$ „ Alle drei Personen sitzen im gleichen Wagen “,

(c) $C \mathrel{\widehat{=}}$ „ Mindestens zwei Personen wählen den gleichen Wagen “.

Lösung:

Modellieren Sie das Zufallsexperiment mittels Ergebnisraum $\Omega = \{1, \ldots, 7\}^3$ mit $\mathbb{P}$ als Gleichverteilung auf Ω.

(a) Es gilt $A = \{(\omega_1, \omega_2, \omega_3) \in \Omega | \forall i \neq j : \omega_i \neq \omega_j\}$, damit folgt direkt

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\#A}{\#\Omega} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{7^3} = \frac{30}{49} \approx 0{,}61.$$

(b) Es gilt $B = \{(i, i, i) \in \Omega, i \in \{1, 2, \ldots, 7\}\}$, damit folgt direkt

$$\mathbb{P}(B) = \frac{\#B}{\#\Omega} = \frac{7}{7^3} = \frac{1}{49} \approx 0{,}02.$$

(c) Das Ereignis C ist das Komplement von A, d.h. $C = A^c$. Daher

$$\mathbb{P}(C) = 1 - \frac{30}{7^2} = \frac{19}{49} \approx 0{,}39.$$

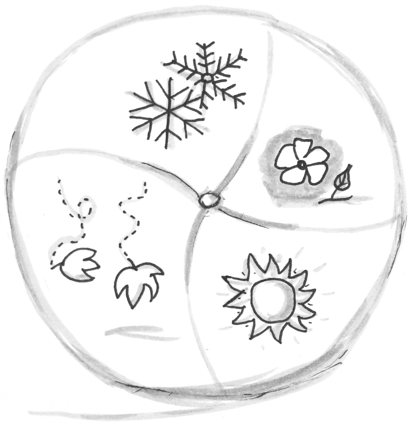
Aufgabe 1.28: Jahreszeiten ○●●

Es werden $n \in \mathbb{N}$ Personen danach befragt, in welcher Jahreszeit sie Geburtstag haben. Im Folgenden nehmen wir an, dass jede Jahreszeit die gleiche Geburtswahrscheinlichkeit hat.

(a) Geben Sie einen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega_n, \mathcal{A}, \mathbb{P}_n)$ an, der diese Befragung passend modelliert.

(b) Berechnen Sie für $n = 4$ und $n = 8$ die Wahrscheinlichkeit, dass in jeder Jahreszeit die gleiche Anzahl an Personen geboren wurde.

(c) Sei nun $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Verallgemeinern Sie Ihre Überlegungen aus (b).



Lösung:

(a) Das Ergebnis der Umfrage ist ein 4-Tupel der Form

(Anzahl Geburtstage Frühling, ..., Anzahl Geburtstage Winter).

Wir schreiben die Ergebnismenge als

$$\Omega_n := \{a = (a_1, a_2, a_3, a_4) \in \mathbb{N}^4 \,|\, a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = n\}.$$

Es handelt sich um ein Experiment ohne Beachtung der Reihenfolge und mit Zurücklegen. Als σ-Algebra wählen wir $\mathcal{A}_n = \mathcal{P}(\Omega_n)$.

Das zugehörige Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}_n$ definieren wir mittels der Zähldichte. Da jede Jahreszeit die gleiche Wahrscheinlichkeit hat, muss die Anzahl der möglichen Befragungsreihenfolgen, die zu dem Umfrageergebnis führen, berechnet werden. Dies ist gegeben durch den Multinomialkoeffizienten.

Damit ergibt sich für $a \in \Omega_n$:

$$\mathbb{P}_n(\{a\}) = \binom{n}{a_1, a_2, a_3, a_4} \left(\frac{1}{4}\right)^{a_1} \left(\frac{1}{4}\right)^{a_2} \left(\frac{1}{4}\right)^{a_3} \left(\frac{1}{4}\right)^{a_4} = \binom{n}{a_1, a_2, a_3, a_4} \left(\frac{1}{4}\right)^{n}.$$

(b) Das Ereignis ist durch $\{(1, 1, 1, 1)\}$ bzw. $\{(2, 2, 2, 2)\}$ gegeben. Einsetzen in das Wahrscheinlichkeitsmaß liefert

$$\mathbb{P}_4(\{(1, 1, 1, 1)\}) = \binom{4}{1, 1, 1, 1} \left(\frac{1}{4}\right)^{4} = \frac{3}{32} \approx 9{,}4\,\%,$$

$$\mathbb{P}_8(\{(2, 2, 2, 2)\}) = \binom{8}{2, 2, 2, 2} \left(\frac{1}{4}\right)^{8} = \frac{315}{8192} \approx 3{,}8\,\%.$$

(c) Ist n nicht durch vier teilbar, ist die Wahrscheinlichkeit 0. Sonst gilt analog zu oben

$$\mathbb{P}_n\Big(\Big\{\Big(\frac{n}{4}, \frac{n}{4}, \frac{n}{4}, \frac{n}{4}\Big)\Big\}\Big) = \binom{n}{\frac{n}{4}, \frac{n}{4}, \frac{n}{4}, \frac{n}{4}} \frac{1}{4^n}.$$

Bemerkung: In Aufgabe 1.13 wurden Multinomialkoeffizienten eingeführt.

Aufgabe 1.29: Tombolastrategie ○○●

Bei einer fairen Tombola gibt es 20 Lose, davon 4 Gewinnlose.

(a) Es werden drei Lose ohne Zurücklegen gezogen und anschließend geöffnet. Modellieren Sie dieses Zufallsexperiment durch einen Wahrscheinlichkeitsraum.

(b) Wie ändern sich Ihre Überlegungen aus (a), wenn stattdessen die Lose nacheinander gezogen, geöffnet und anschließend wieder in die Tombola gemischt werden?

(c) Welches der beiden Vorgehen würden Sie aus Spielersicht bevorzugen?

Lösung:

(a) Da die Reihenfolge der Lose keine Rolle spielt, beschreiben wir ein Ergebnis des Experimentes als die Anzahl der Gewinne, das heißt $\Omega := \{0, 1, 2, 3\}$.

Die Wahrscheinlichkeit, nur Nieten zu ziehen, ist gegeben durch

$$\mathbb{P}(\{0\}) = \frac{16}{20} \cdot \frac{15}{19} \cdot \frac{14}{18} \approx 49{,}1\,\%.$$

Die Wahrscheinlichkeit, genau einen Gewinn zu ziehen, ergibt sich als

$$\mathbb{P}(\{1\}) = 3 \cdot \frac{16}{20} \cdot \frac{15}{19} \cdot \frac{4}{18} \approx 42{,}1\,\%.$$

Und entsprechend

$$\mathbb{P}(\{2\}) = 3 \cdot \frac{16}{20} \cdot \frac{4}{19} \cdot \frac{3}{18} \approx 8{,}4\,\%, \qquad \mathbb{P}(\{3\}) = \frac{4}{20} \cdot \frac{3}{19} \cdot \frac{2}{18} \approx 0{,}4\,\%.$$

Bemerkung: Die Überlegungen führen später zur hypergeometrischen Verteilung, siehe Sektion 2.2.3. Es gilt hier allgemeiner

$$\mathbb{P}(\{k\}) = \frac{\binom{16}{3-k}\binom{4}{k}}{\binom{20}{3}}.$$

(b) Es ändern sich lediglich die Wahrscheinlichkeiten: Durch das zurücklegen ist bei jedem Zug die Wahrscheinlichkeit eines Gewinns dieselbe. Dies führt zu

$$\tilde{\mathbb{P}}(\{0\}) = \left(\frac{16}{20}\right)^3 \approx 51{,}2\,\% \qquad \tilde{\mathbb{P}}(\{1\}) = 3 \cdot \left(\frac{16}{20}\right)^2 \cdot \frac{4}{20} \approx 38{,}4\,\%$$
$$\tilde{\mathbb{P}}(\{2\}) = 3 \cdot \frac{16}{20} \cdot \left(\frac{4}{20}\right)^2 \approx 9{,}6\,\% \qquad \tilde{\mathbb{P}}(\{3\}) = \left(\frac{4}{20}\right)^3 = 0{,}8\,\%.$$

Bemerkung: Die Überlegungen führen später zur Binomialverteilung, siehe Sektion 2.2.2. Es gilt hier allgemeiner

$$\tilde{\mathbb{P}}(\{k\}) = \binom{3}{k} \cdot \left(\frac{16}{20}\right)^{3-k} \cdot \left(\frac{4}{20}\right)^k .$$

(c) Die Gewinnwahrscheinlichkeiten sind $p := 1 - \mathbb{P}(\{0\})$ und $\tilde{p} := 1 - \tilde{\mathbb{P}}(\{0\})$. Für (a) ergibt sich $p > 50\,\%$ für Ziehen ohne Zurücklegen und für (b) ist für Ziehen mit Zurücklegen $\tilde{p} < 50\,\%$. Daher ist das Ziehen der Lose ohne Zurücklegen günstiger für den Spieler.

Aufgabe 1.30: Wahrscheinlichkeit zweier Karten aus einem Skatblatt ○●●

Aus einem Skatblatt werden zwei Karten nacheinander gezogen. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die erste Karte rot ist und die zweite Karte ein Bube, wenn die Karten

(a) mit Zurücklegen gezogen werden,

(b) ohne Zurücklegen gezogen werden.

Lösung: Betrachten Sie zunächst die Menge der Karten (nach französischem Blatt)

$$\mathcal{K} := \underbrace{\{\clubsuit, \spadesuit, \heartsuit, \diamondsuit\}}_{\text{Farbe}} \times \underbrace{\{A, K, D, B, 10, 9, 8, 7\}}_{\text{Wert}} .$$

Für das Ziehen zweier Karten betrachten Sie den Ergebnisraum $\Omega = \mathcal{K}^2$ mit $\mathbb{P}$ der Gleichverteilung auf Ω. Statt $(\heartsuit, B)$ schreibe $\heartsuit B$, analog für alle anderen Karten. Da alle Farben und Werte mit gleicher Wahrscheinlichkeit vorkommen, wählen Sie als Repräsentanten $\heartsuit$ und B.

Ist die erste Karte eine Herzkarte und die zweite ein Bube beliebiger Farbe, so lässt sich dieses Ereignis beschreiben durch die Menge

$$A := (\{\heartsuit\} \times \{A, K, D, B, 10, 9, 8, 7\}) \times (\{\clubsuit, \spadesuit, \heartsuit, \diamondsuit\} \times \{B\}) \subset \Omega.$$

Diese Menge ist isomorph zu $\{\heartsuit B\}\times\mathcal{K} \subset \Omega$ und hat wegen der angenommenen Gleichverteilung dieselbe Wahrscheinlichkeit wie A. Daher gilt

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\#\{\heartsuit B\}\times\mathcal{K}}{\#\mathcal{K}^2} = \frac{1}{32}.$$

Entsprechend ist dann die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses B, bei dem zunächst eine rote Karte ($\heartsuit$ oder $\diamondsuit$) und dann ein Bube gezogen wird

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(\{\heartsuit B, \diamondsuit B\}\times\mathcal{K}) = 2\,\mathbb{P}(A) = 1/16.$$

Dabei spielt es keine Rolle, ob mit oder ohne Zurücklegen gezogen wird, da wir bei der ersten Karte den Wert, bei der zweiten die Farbe ignorieren. Die Information über die Ziehmethode geht hierdurch verloren, denn wir haben gezeigt, dass die Wahrscheinlichkeit erst eine bestimmte Farbe und dann einen bestimmten Wert zu ziehen übereinstimmt mit dem Ziehen einer einzigen spezifischen Karte.

Direktes Nachrechnen bestätigt dies:

(a) Die Wahrscheinlichkeit von A beim Ziehen mit Zurücklegen beträgt $\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{8} = \frac{1}{32}$.

(b) Beim Ziehen ohne Zurücklegen beträgt sie $\frac{2\cdot 8 + (2\cdot 8 - 1)}{32\cdot 31} = \frac{1}{32}$.

Aufgabe 1.31: Galileos Würfelproblem ○●●

Im 17. Jahrhundert wurde Galilei von Cosimo de' Medici das Problem vorgelegt, zu entscheiden, ob die Augensumme 11 oder 12 beim Werfen dreier Würfel häufiger vorkäme. Er bestätigte diese Abweichung wenig später.

(a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die Augensumme gleich 11 bzw. gleich 12 ist.

(b) Zeigen Sie, dass für die Augensummen 10 und 9 das gleiche wie für 11 und 12 gilt, indem Sie eine geeignete Bijektion zwischen Würfen finden.

(c) Geben Sie die Verteilung der Augensumme in einer Tabelle.

Hinweis: *Die auf dem Würfel gegenüberliegenden Augen ergeben in der Summe stets Sieben.*

Lösung: Seien die Würfel unterscheidbar. Wir definieren $\Omega = \{1,\dots,6\}^3$ mit Gleichverteilung als Wahrscheinlichkeitsmaß. Das heißt

$$\forall\,\omega = (\omega_1,\omega_2,\omega_3)\in\Omega,\quad \mathbb{P}(\{\omega\}) = \frac{1}{\#\Omega} = \frac{1}{6^3} = \frac{1}{216}.$$

Sei $A_k := \{(\omega_1,\omega_2,\omega_3)\in\Omega :\ \omega_1+\omega_2+\omega_3 = k\}$, $k\in\{3,4,\dots,18\}$.

(a) Die 27 günstigen Kombinationen für Augensumme 11 sind:

$$(1,4,6),(1,5,5),(1,6,4),(2,3,6),(2,4,5),(2,5,4),(2,6,3),(3,2,6),$$
$$(3,3,5),(3,4,4),(3,5,3),(3,6,2),(4,1,6),(4,2,5),(4,3,4),(4,4,3),$$
$$(4,5,2),(4,6,1),(5,1,5),(5,2,4),(5,3,3),(5,4,2),(5,5,1),(6,1,4),$$
$$(6,2,3),(6,3,2),(6,4,1)$$

und die 25 günstigen Kombinationen für Augensumme 12 sind:

$$(1,5,6),(1,6,5),(2,4,6),(2,5,5),(2,6,4),(3,3,6),(3,4,5),(3,5,4),$$
$$(3,6,3),(4,2,6),(4,3,5),(4,4,4),(4,5,3),(4,6,2),(5,1,6),(5,2,5),$$
$$(5,3,4),(5,4,3),(5,5,2),(5,6,1),(6,1,5),(6,2,4),(6,3,3),(6,4,2),$$
$$(6,5,1).$$

Daher ist

$$\mathbb{P}(A_{11}) = \frac{27}{216} > \frac{25}{216} = \mathbb{P}(A_{12}).$$

Bemerkung: Anstatt die günstigen Kombinationen für die Summe aufzulisten, was schnell aufwendig wird, bedient man sich sogenannter *erzeugender Funktionen*. In Kapitel 2.2 werden damit Kenngrößen von Zufallsvariablen bestimmt. Mit Hilfe dieser Methode findet man hier für die Wahrscheinlichkeit einer bestimmten Augensumme k den allgemeinen Ausdruck

$$\mathbb{P}(A_k) = \frac{1}{216}\left(\binom{k-1}{2} - 3\binom{k-7}{2} + 3\binom{k-13}{2}\right).$$

(b) Die A_k sind die Klassen einer Äquivalenzrelation, bei der Elemente aus dem Ergebnisraum in derselben Klasse sind, wenn die Augensumme gleich ist. Die Klassen sind disjunkt.

Sei die Funktion $\psi : \Omega \to \Omega$ definiert durch

$$\psi : (\omega_1, \omega_2, \omega_3) \mapsto (7-\omega_1, 7-\omega_2, 7-\omega_3).$$

Wegen

$$\psi(\psi((\omega_1, \omega_2, \omega_3))) = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$$

ist ψ eine Involution und damit eine selbstinverse Bijektion. Unter ψ wird das Ereignis A_k auf das Ereignis A_{21-k} abgebildet. Wegen der Bijektivität sind damit A_k und A_{21-k} gleich mächtig. Daraus folgt insbesondere

$$\mathbb{P}(A_9) = \frac{\#A_9}{\#\Omega} = \frac{\#\psi(A_9)}{\#\Omega} = \mathbb{P}(A_{12})$$

und analog $\mathbb{P}(A_{10}) = \mathbb{P}(A_{11})$.

(c) Wegen der in (c) gezeigten Symmetrie genügt es, die Wahrscheinlichkeiten der Augensummen 3 bis 10 zu bestimmen, zum Beispiel mit Hilfe der Formel aus der Bemerkung in (a). Die Werte sind in folgender Tabelle aufgelistet:

Summe k	3	4	5	6	7	8	9	10
$216 \cdot \mathbb{P}(A_k)$	1	3	6	10	15	21	25	27
Summe k	18	17	16	15	14	13	12	11

Bemerkung: Die Augensumme 11 wird in 12,5 % der Würfe und die Augensumme 12 nur mit 11,6 % gewürfelt. Dieser kleine Unterschied muss Galileo aufgefallen sein, wie er in seinem Traktat *Sopra le Scoperte Dei Dadi*, siehe zum Beispiel [Hal90], Kapitel 4.4, S. 41 ff, über das sogenannte Zara-Spiel behauptet, das mit drei Würfeln gespielt wird und bei dem die Spieler auf die Höhe der Augensumme wetten.

Eine Aufgabe, in der es um ein analoges Problem mit zwei Würfeln ging, wurde Leibniz vorgelegt. Seine Antwort, eine Elf oder Zwölf würde mit der gleichen Wahrscheinlichkeit geworfen, stammt aus seiner Veröffentlichung *Opera Omnia*, siehe [Tod65], S. 48, Absatz 77. Dort behauptet Leibniz wortwörtlich, *dass eine* [11] *und für den anderen eine* [12] *nur auf eine einzige Weise getan werden kann* (eigene Übersetzung der Autoren). Die Wahrscheinlichkeit, eine Elf zu werfen, ist aber ungefähr 8 % und eine Zwölf zu werfen ungefähr 11 %.

Aufgabe 1.32: Sechs oder Doppelsechs – was ist wahrscheinlicher? ○○●

In einem Brief an Fermat gab Pascal die ihm von Chevalier de Méré gestellten Fragen wieder:

(a) Wie oft muss man einen fairen Würfel mindestens werfen, damit mit einer Wahrscheinlichkeit größer als $1/2$ wenigstens einmal eine Sechs auftritt?

(b) Wie oft muss man zwei unterscheidbare Würfel mindestens werfen, damit mit einer Wahrscheinlichkeit größer als $1/2$ wenigstens einmal eine Doppelsechs auftritt?

Lösung: Zur Beantwortung der Frage lösen wir das Problem zuerst für eine beliebige, aber feste Anzahl $n \geq 1$ Runden, um dann mittels einer numerischen Auswertung die Antwort zu erhalten.

(a) Es sei $\Omega := \{1, 2, \ldots, 6\}^n$ und $\mathbb{P}$ die Gleichverteilung auf Ω. Dann sei $A \subset \Omega$ das Ereignis, dass wenigstens einmal eine Sechs geworfen wurde. Es folgt

$$\mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(A^c) = 1 - \frac{\#A^c}{\#\Omega} = 1 - \frac{5^n}{6^n} =: f(n).$$

Aus der Tabelle 1.1 erkennt man, dass wenigstens vier Würfe notwendig sind, um mit Wahrscheinlichkeit größer $\frac{1}{2}$ wenigstens eine Sechs zu werfen.

(b) Analog definiert man $\Omega := \{1, 2, \dots, 6\}^{2n}$ und nimmt die Gleichverteilung auf Ω an. Sei B das Ereignis, mindestens einmal in n Runden eine Doppelsechs zu werfen. Es folgt

$$\mathbb{P}(B) = 1 - \mathbb{P}(B^c) = 1 - \frac{35^n}{36^n} =: g(n)$$

Aus der Tabelle 1.1 erkennt man, dass wenigstens 25 Würfe notwendig sind, um mit Wahrscheinlichkeit größer $\frac{1}{2}$ wenigstens eine Doppelsechs zu werfen.

n	$f(n)$	$g(n)$	n	$f(n)$	$g(n)$	n	$f(n)$	$g(n)$
1	0,1667	0,0278	10	0,8385	0,2455	19	0,9687	0,4145
2	0,3056	0,0548	11	0,8654	0,2665	20	0,9739	0,4307
3	0,4213	0,0810	12	0,8878	0,2868	21	0,9783	0,4466
4	0,5177	0,1066	13	0,9065	0,3067	22	0,9819	0,4619
5	0,5981	0,1314	14	0,9221	0,3259	23	0,9849	0,4769
6	0,6651	0,1555	15	0,9351	0,3446	24	0,9874	0,4914
7	0,7209	0,1789	16	0,9459	0,3628	25	0,9895	0,5055
8	0,7674	0,2018	17	0,9549	0,3805	26	0,9913	0,5193
9	0,8062	0,2239	18	0,9624	0,3977	27	0,9927	0,5326

Tabelle 1.1: Numerische Werte für die beiden Funktionen $f(n)$ und $g(n)$.

Bemerkung: Die eigentliche Frage des Chevalier de Méré war nicht nur danach, mit wie viel Würfen eine Sechs oder eine Doppelsechs mit Wahrscheinlichkeit mindestens $\frac{1}{2}$ geworfen werden könne. Es ging vielmehr um die Bestätigung einer Beobachtung, die er in zahlreichen Würfelspielen gemacht haben muss. Eine Doppelsechs ist sechsmal weniger wahrscheinlich als eine einfache Sechs. Nun sollte also $g(6 \cdot n) = f(n)$ gelten, aber es stimmt nicht ganz, da

$$1 - \frac{1}{6} \approx 0{,}833 \neq \left(1 - \frac{1}{36}\right)^6 \approx 0{,}844.$$

Diese unerwartete Abweichung wird als *De-Méré-Paradoxon* bezeichnet.

Aufgabe 1.33: Wartezeit auf den ersten Erfolg im Münzwurf ○●●

Eine faire Münze wird so lange geworfen, bis zum ersten Mal *Kopf* geworfen wird. Die Würfe sind unabhängig.

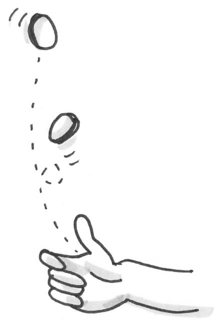
(a) Geben Sie einen passenden Ergebnisraum Ω an.

(b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die Münze höchstens dreimal geworfen wird.

(c) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass beim n-ten Wurf, $n \in \mathbb{N}$, das erste mal *Kopf* vorkommt.

(d) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die Münze höchstens n-mal geworfen wird.

(e) Wie ändern sich Ihre Überlegungen, wenn die Münze nicht fair ist, sondern mit Wahrscheinlichkeit p *Kopf* zeigt, $p \in (0, 1)$?



Lösung:

(a) Wählen Sie als mögliche Ereignisse die Zahl der Würfe bis das Spiel endet, einschließlich dem letzten Wurf *Kopf*, $\Omega = \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$. Wählen Sie als σ-Algebra ihre Potenzmenge.

(b) Wir zerlegen in die Elementarereignisse. Das Spiel endet nach genau zwei Würfen, wenn zuerst *Zahl* und dann *Kopf* kommt. Die Wahrscheinlichkeit ist jeweils $1/2$. Mit dieser Überlegung ergibt sich:

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}(\text{„höchstens drei Würfe“})\\&= \mathbb{P}(\text{„genau ein Wurf“}) + \mathbb{P}(\text{„genau zwei Würfe“}) + \mathbb{P}(\text{„genau drei Würfe“})\\&= \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} = 87{,}5\,\%.\end{aligned}$$

(c) Analog zur Überlegung aus (b) erhält man

$$\mathbb{P}(\text{„genau } n \text{ Würfe“}) = \frac{1}{2^{n-1}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2^n}.$$

(d) Mit den Überlegungen wie oben und der geometrischen Reihe ergibt sich

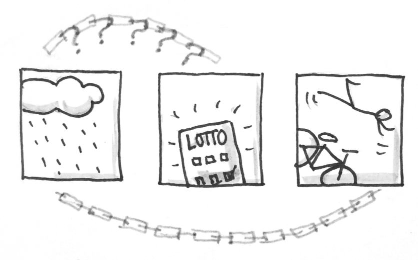
$$\mathbb{P}(\text{„höchstens } n \text{ Würfe“}) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(\text{„genau } i \text{ Würfe“})$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^i} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2^n}.$$

(e) Im Wesentlichen ändern sich nur die Wahrscheinlichkeiten, das Vorgehen bleibt identisch. Sei $p \in (0,1)$ die Wahrscheinlichkeit, *Kopf* zu werfen und $q := 1 - p$ die Wahrscheinlichkeit für *Zahl*. Wir erhalten dann

$$\mathbb{P}(\text{„genau } n \text{ Würfe“}) = q^{n-1}\, p, \quad \mathbb{P}(\text{„höchstens } n \text{ Würfe“}) = \sum_{i=1}^{n} q^{i-1}\, p = 1 - q^n.$$

Bemerkung: Diese Überlegungen führen zur sogenannten *geometrischen Verteilung*, siehe Sektion 2.2.4.

1.5 Unabhängigkeit



Aufgabe 1.34: Vierfeldertafel ○○●

Auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ seien zwei Ereignisse $A, B \subset \Omega$ definiert. Es sei noch die folgende Vierfeldertafel gegeben:

$\mathbb{P}(\,.\cap.\,)$	B	B^c
A	$1/2$	$q - 1/2$
A^c	$p - 1/2$	$3/2 - q - p$

(a) Welche Bedingungen müssen p, q erfüllen?

(b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse A, B, A^c und B^c.

(c) Für welche Werte von p, q sind A und B unabhängig?

Lösung: Durch Aufsummieren der Zeilen und Spalten ergibt sich:

$\mathbb{P}(\,.\cap.\,)$	B	B^c	
A	$1/2$	$q-1/2$	q
A^c	$p-1/2$	$3/2-q-p$	$1-q$
	p	$1-p$	1

(a) Die Einträge in der Vierfeldertafel müssen zwischen Null und Eins liegen. Aus

$$\mathbb{P}(A\cap B^c)=q-1/2, \qquad \mathbb{P}(A^c\cap B)=p-1/2$$

folgt zunächst $p,q\geq 1/2$. Die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(A^c\cap B^c)=3/2-(p+q)$ ergibt die Zusatzbedingung $1\leq p+q\leq 3/2$.

(b) Man liest die Werte direkt aus der Tabelle ab:

$$\mathbb{P}(A)=q,\quad \mathbb{P}(B)=p,\quad \mathbb{P}(A^c)=1-p,\quad \mathbb{P}(B^c)=1-q.$$

(c) Nach Tabelle sind A und B unabhängig, genau dann wenn $p\,q=\frac{1}{2}$ gilt.

Aufgabe 1.35: Stochastische Unabhängigkeit dreier Ereignisse ○○●

Es werden zwei unterscheidbare faire Würfel geworfen und die jeweiligen Augenzahlen beobachtet. Betrachten Sie die drei folgenden Ereignisse:

$A\mathrel{\widehat{=}}$ „Der erste Würfel zeigt eine Zahl kleiner als 4“,
$B\mathrel{\widehat{=}}$ „Der erste Würfel zeigt eine Zahl größer als 2 und kleiner als 6“,
$C\mathrel{\widehat{=}}$ „Die Summe der Würfel ist gleich 9“.

(a) Definieren Sie einen passenden Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$.

(b) Zeigen Sie $\mathbb{P}(A\cap B\cap C)=\mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B)\,\mathbb{P}(C)$.

(c) Sind die drei Ereignisse A, B und C stochastisch unabhängig?

Lösung:

(a) Es sei $\Omega:=\{1,2,\ldots,6\}^2$, daher ist $\#\Omega=36$. Sei weiter $\mathcal{A}$ die Potenzmenge und $\mathbb{P}$ die Gleichverteilung auf Ω.

(b) Man berechnet die Kardinalität der einzelnen Ereignisse. Es ergibt sich

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A) &= \frac{\#\{(1,k),(2,k),(3,k) : k \in \{1,2,\dots,6\}\}}{36} = \frac{1}{2},\\
\mathbb{P}(B) &= \frac{\#\{(3,k),(4,k),(5,k) : k \in \{1,2,\dots,6\}\}}{36} = \frac{1}{2},\\
\mathbb{P}(C) &= \frac{\#\{(3,6),(4,5),(5,4),(6,3)\}}{36} = \frac{1}{9},\\
\mathbb{P}(A \cap B \cap C) &= \frac{\#\{(3,6)\}}{36} = \frac{1}{36}.
\end{aligned}$$

Es ist $2 \cdot 2 \cdot 9 = 36$, daher gilt $\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B)\,\mathbb{P}(C)$.

(c) Die Ereignisse sind nicht stochastisch unabhängig, da sie nicht paarweise unabhängig sind. Es gilt zum Beispiel

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{\#\{(3,k) : k \in \{1,2,\dots,6\}\}}{36} = \frac{1}{6} \neq \frac{1}{4} = \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B).$$

Aufgabe 1.36: Unabhängige Münzwürfe ○●●

Eine faire Münze wird n mal geworfen. Es wird beobachtet, ob *Kopf* oder *Zahl* geworfen wird. Definieren Sie für $k \in \{1,2,\dots\}$ das Ereignis $A_k \mathrel{\widehat{=}}$ „*Kopf* im k-ten Wurf" und das Ereignis $B \mathrel{\widehat{=}}$ „Die Anzahl von *Kopf* ist gerade".

(a) Definieren Sie einen passenden Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

(b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten von A_k und B.

(c) Beweisen oder widerlegen Sie jeweils, ob die Ereignisse $\{A_1,\dots,A_n,B\}$ bzw. $\{A_1,\dots,A_n\}$ stochastisch unabhängig sind.

Lösung:

(a) Es sei $\Omega = \{0,1\}^n$, wobei 1 für *Kopf* und 0 für *Zahl* stehe. Dabei ist $\#\Omega = 2^n$. Für $\mathbb{P}$ wähle man die Gleichverteilung.

(b) Für jedes $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$A_k = \{(\omega_1,\dots,\omega_{k-1},1,\omega_{k+1},\dots,\omega_n), \omega_i \in \{0,1\}\}.$$

Man hält die k-te Komponente fest und kann für die anderen $n-1$ Werte beliebig 0 oder 1 einsetzen. Daher

$$\mathbb{P}(A_k) = \frac{2^{n-1}}{2^n} = \frac{1}{2}.$$

Weiter gilt

$$B = \Big\{(\omega_1, \dots, \omega_n) \in \Omega : \sum_{i=1}^{n} \omega_i \text{ gerade}\Big\}.$$

Allgemein gibt es für i Einsen und j Nullen mit $i+j = n$ genau $\binom{n}{i}$ Möglichkeiten. Daher ist

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2i} \frac{1}{2^n} = \frac{2^{n-1}}{2^n} = \frac{1}{2}.$$

(c) Es sei $J \subset \{1, 2, \dots, n\}$, dann ist

$$\mathbb{P}\Big(\bigcap_{j\in J} A_j\Big) = \frac{1}{2^{\#J}} = \prod_{j\in J} \mathbb{P}(A_j).$$

Das Ergebnis hängt nicht von der gewählten Teilmenge ab, daher ist die Familie $(A_k)_{1\le k\le n}$ stochastisch unabhängig.

Sei nun $A := \bigcap_{k=1}^{n} A_k = \{(1, 1, \dots, 1)\}$. Nimmt man das Ereignis B hinzu, so gilt, falls n gerade ist:

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) = \frac{1}{2^n} \neq \frac{1}{2^{n+1}} = \prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k) \cdot \mathbb{P}(B).$$

Für n ungerade ist $\mathbb{P}(A \cap B) = 0$, während alle involvierten Mengen Wahrscheinlichkeit größer Null haben.

Die Familie $\{A_1, \dots, A_n, B\}$ ist also für kein n stochastisch unabhängig.

Aufgabe 1.37: Inklusion und Abhängigkeit ○○●

Gegeben sei ein Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ und Ereignisse A, B. Zeigen Sie:

(a) Aus $A \subseteq B$ und A, B unabhängig, folgt $\mathbb{P}(A) = 0$ oder $\mathbb{P}(B) = 1$.

(b) A ist von sich selbst unabhängig, genau dann wenn $\mathbb{P}(A) \in \{0, 1\}$.

(c) Seien A und B nun disjunkt mit $\mathbb{P}(A)$, $\mathbb{P}(B) \neq 0$. Können A und B unabhängig sein?

Lösung:

(a) Aus $A \subseteq B$ folgt $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B) \Rightarrow \mathbb{P}(A)(1 - \mathbb{P}(B)) = 0$.

(b) „⇒“: Wenn A von sich selbst unabhängig ist, dann ist

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap A) = \mathbb{P}(A)^2.$$

Die Gleichung ist nur für $\mathbb{P}(A) \in \{0, 1\}$ erfüllbar.

„⇐“: Sei $\mathbb{P}(A) = 0$, dann ist $\mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap A) = 0$ trivial erfüllt.

Ist $P(A) = 1$, so gilt $\mathbb{P}(A \cap A) = \mathbb{P}(A) \cdot 1 = \mathbb{P}(A)^2$.

(c) Es gilt $\mathbb{P}(A \cap B) = 0$. Daher sind disjunkte Ereignisse mit Wahrscheinlichkeit ungleich Null niemals unabhängig.

Aufgabe 1.38: Die Unabhängigkeitseigenschaft ist nicht transitiv ○○●

Sei $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$ und $A = \{1, 2\}$, $B = \{1, 4\}$ und $C = \{3, 4\}$. Das Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}$ sei die Gleichverteilung auf Ω.

Zeigen Sie: Die Ereignisse A und B sind unabhängig und die Ereignisse B und C auch, aber die Ereignisse A und C sind abhängig.

Lösung:

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B), \qquad \mathbb{P}(B \cap C) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \mathbb{P}(B)\,\mathbb{P}(C),$$
$$\mathbb{P}(A \cap C) = 0 \neq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(C).$$

Aufgabe 1.39: Paare unabhängiger Ereignisse ○●●

Gegeben sei ein Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, wobei $\#\Omega = n$, $\mathcal{A}$ die Potenzmenge und $\mathbb{P}$ die Gleichverteilung auf Ω sind.

(a) Betrachten Sie zunächst den Fall $n = 6$. Wie viele Paare (A, B) unabhängiger Ereignisse mit der Eigenschaft $0 < \mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B) < 1$ gibt es?

(b) Beantworten Sie dieselbe Frage für $n = 7$.

(c) Verallgemeinern Sie die vorigen Ergebnisse für beliebiges n.

Lösung: Es seien

$$a := \#A, \quad b := \#B, \quad c := \#A \cap B.$$

Es gilt dann $1 \leq c \leq a \leq b \leq n - 1$. A und B sind unabhängig genau dann, wenn $a\,b = n\,c$.

Sei $M^n_{a,b,c}$ die Anzahl möglicher Ereignispaare für festgelegte Parameter.

(a) Für $c = 1$ hat die Gleichung $a \cdot b = 6$ unter der Bedingung $a \leq b$ nur die positiven Lösungen $a = 2$ und $b = 3$.

Daher gilt

$$M^6_{2,3,1} = \binom{6}{2}\binom{2}{1}\binom{6-2}{3-1} = 15 \cdot 2 \cdot 6 = 180.$$

Für $c = 2$ hat die Gleichung $a \cdot b = 12$ unter der Bedingung $a \leq b$ nur die positiven Lösungen $a = 3$ und $b = 4$. Der Fall $a = 2$, $b = 6$ entfällt wegen $b \leq 5$.

Daher gilt

$$M^6_{3,4,2} = \binom{6}{3}\binom{3}{2}\binom{6-3}{4-2} = 20 \cdot 3 \cdot 3 = 180.$$

Es gibt für $c \geq 3$ keine weiteren Lösungen, daher ist

$$M^6_{2,3,1} + M^6_{3,4,2} = 360$$

die Gesamtzahl an Möglichkeiten, aus einer sechselementigen Ergebnismenge unabhängige Ereignisse A, B zu konstruieren.

(b) Für $n = 7$ hat die Gleichung $a\,b = 7\,c$ keine positiven, ganzzahligen Lösungen.

(c) Für jede Lösung von $a\,b = n\,c$ unter den gegebenen Bedingungen ist $M^n_{a,b,c}$ festgelegt. Ist n eine Primzahl, so ist es unmöglich, die Forderungen zu erfüllen.

Für alle anderen Fälle gilt allgemein: Man kann für A genau $\binom{n}{a}$ Elemente wählen. Aus diesen a Elementen wählt man c Elemente für $A \cap B$. Das Ereignis B muss dann auch die vorher schon gewählten c Elemente aus dem Schnitt enthalten. Daher kann man nur noch $b - c$ aus den restlichen $n - a$ Elementen wählen. Demnach gilt

$$M^n_{a,b,c} = \binom{n}{a}\binom{a}{c}\binom{n-a}{b-c}.$$

Aufgabe 1.40: Unabhängigkeitsgrad ○●●

Seien A, B zwei beliebige Ereignisse eines Wahrscheinlichkeitsraumes $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Die Größe $U(A, B) := |\mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B)|$ schätzt ab, wie weit A und B unter dem Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}$ von der Unabhängigkeit entfernt sind. Beweisen Sie, dass $U(A, B)$ gleichmäßig nach oben beschränkt ist:

$$U(A, B) := |\mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B)| \leq \frac{1}{4}, \quad A, B \in \mathcal{A}.$$

Lösung: Da $A \cap B \subset A$ und $A \cap B \subset B$ folgt $\mathbb{P}(A \cap B)^2 \leq \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B)$.

Zieht man von beiden Seiten $\mathbb{P}(A \cap B)$ ab, erhält man nach Multiplikation mit -1:

$$-\mathbb{P}(A \cap B)^2 + \mathbb{P}(A \cap B) \geq \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B).$$

Für $p \in [0,1]$ ist $-p^2 + p = 1/4 - (p - 1/2)^2$ eine nach unten offene Parabel mit Scheitelpunkt in $(1/2, 1/4)$. Daher ist

$$\mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B) \leq -\mathbb{P}(A \cap B)^2 + \mathbb{P}(A \cap B) \leq \frac{1}{4}.$$

Da die Formel nicht von den gewählten Ereignissen abhängt, gilt die vorige Formel auch für A^c. Dann ist wegen

$$\frac{1}{4} \geq \mathbb{P}(A^c \cap B) - \mathbb{P}(A^c)\mathbb{P}(B) = -\Big(\mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\Big).$$

Daraus folgt

$$0 \leq U(A,B) \leq \frac{1}{4}.$$

Aufgabe 1.41: Zweites Lemma von Borel-Cantelli ●●●

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $(A_k)_{k\geq 1}$ eine Sequenz von unabhängigen Ereignissen aus $\mathcal{A}$.

Zeigen Sie:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(A_k) = +\infty \quad \Rightarrow \quad \mathbb{P}\Big(\limsup_{k\to\infty} A_k\Big) = 1.$$

Hinweis: *Benutzen Sie die Ungleichung* $1 - x \leq \exp(-x)$, $x \in [0,1]$, *um die Wahrscheinlichkeit eines endlichen Schnittes der Familie* $(A_k)_{k\geq 1}$ *abzuschätzen.*

Lösung: Da die $(A_k)_k$ unabhängig sind, sind auch die Komplemente $(A_k^c)_k$ unabhängig. Es gilt für $m \geq n$ nach der gegebenen Ungleichung

$$0 \leq \mathbb{P}\Big(\bigcap_{k=n}^{m} A_k^c\Big) = \prod_{k=n}^{m}\Big(1 - \mathbb{P}(A_k)\Big) \leq \exp\Big(-\sum_{k=n}^{m} \mathbb{P}(A_k)\Big).$$

Nach Voraussetzung divergiert die Summe der Wahrscheinlichkeiten von A_k. Daran ändert sich nichts, wenn endlich viele Summanden weggelassen werden. Daher konvergiert $\exp\Big(-\sum_{k=n}^{m} \mathbb{P}(A_k)\Big)$ gegen Null für $m \to \infty$. Weiter folgt für $n \in \mathbb{N}$,

$$0 \leq \lim_{m\to\infty} \prod_{k=n}^{m}\Big(1 - \mathbb{P}(A_k)\Big) \leq \exp\Big(-\sum_{k=n}^{\infty} \mathbb{P}(A_k)\Big) = 0.$$

Schließlich betrachtet man das Komplement des Limes superior der Folge und benutzt die Stetigkeit des Wahrscheinlichkeitsmaßes $\mathbb{P}$:

$$\begin{aligned} 1 - \mathbb{P}(\limsup_{k\to\infty} A_k) &= 1 - \mathbb{P}\Big(\bigcap_{n=1}^{+\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\Big) = 1 - \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\Big(\bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k\Big) \\ &= \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\Big(\bigcap_{k=n}^{+\infty} A_k^c\Big) = \lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty} \mathbb{P}\Big(\bigcap_{k=n}^{m} A_k^c\Big) \\ &= \lim_{n\to+\infty}\lim_{m\to\infty} \prod_{k=n}^{m}\Big(1 - \mathbb{P}(A_k)\Big) = 0. \end{aligned}$$

Bemerkung: Die Lemmata von Borel-Cantelli sind nur scheinbar komplementär zueinander. Im ersten Lemma genügt die Summierbarkeit, um auf die Vernachlässigbarkeit von $\limsup_{k\to\infty} A_k$ zu schließen, siehe Aufgabe 1.23. Im zweiten Teil, der in dieser Aufgabe gezeigt wird, impliziert die Nicht-Summierbarkeit erst *mit der zusätzlichen Annahme der Unabhängigkeit* der Ereignisse $(A_k)_k$ die *stärkere* Aussage der Vernachlässigbarkeit des Komplementes von $\limsup_{k\to\infty} A_k$.

Aufgabe 1.42: Wie oft tauchen vorgegebene Sequenzen auf? ●●●

Ein Computer erzeugt fortlaufend zufällige Sequenzen s von Nullen und Einsen einer bestimmten Länge $k \geq 1$ und gibt diese aus. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine bestimmte Sequenz $s_0 \in \{0,1\}^k$ unter den ausgegebenen Sequenzen unendlich oft auftaucht?

(a) Nehmen Sie an, die zufälligen Sequenzen s wären unabhängig voneinander. Jede Null oder Eins erscheine dabei mit gleicher Wahrscheinlichkeit in der Sequenz. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass s mit der Sequenz s_0 übereinstimmt?

(b) Sei nun A_n das Ereignis, bei dem die n-te ausgegebene Sequenz s mit s_0 übereinstimmt. Zeigen Sie $\mathbb{P}(\limsup_{n\to\infty} A_n) = 1$.

(c) Interpretieren Sie das Ergebnis.

Lösung:

(a) Da jede Null und jede Eins mit gleicher Wahrscheinlichkeit $1/2$ vorkommt, ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällige ausgegebene Sequenz mit s übereinstimmt, gleich $(1/2)^k$.

(b) Da $\mathbb{P}(A_n) = 2^{-k}$ für alle n, folgt

$$\sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(A_n) = +\infty.$$

Die Ereignisse $(A_n)_n$ sind außerdem unabhängig, daher sind die Voraussetzungen des zweiten Lemmas von Borel-Cantelli erfüllt (siehe Aufgabe 1.41) und es folgt

$$\mathbb{P}(\limsup_{n\to\infty} A_n) = 1.$$

(c) Die Sequenz s_0 kommt mit Wahrscheinlichkeit 1 unendlich oft vor, wenn man eine unendlich lange Liste von Ausgaben betrachtet. Und das stimmt für jede Sequenz s_0.

Bemerkung: In der bekannten Variante der Aufgabe, auch *Theorem der endlos tippenden Affen* genannt, tippt ein Affe unendlich lange zufällige Wörter der Länge k auf einer Schreibmaschine herum. Mit Wahrscheinlichkeit eins werden irgendwann die Werke William Shakespeares – sogar unendlich oft – entstehen.

Aufgabe 1.43: Eulersche Phi-Funktion ●●●

Die *Eulersche Phi-Funktion*

$$\varphi(n) := \#\{k \in \{1, \dots, n\} \;:\; ggT(k, n) = 1\}, \quad n \in \mathbb{N} \setminus \{1\},$$

gibt die Anzahl zu n teilerfremder positiver natürlicher Zahlen, die nicht größer als n sind, an. Mit Hilfe eines passenden Wahrscheinlichkeitsraums soll eine Zerlegung für die Funktion bewiesen werden.

Die Primfaktorzerlegung von n sei wie folgt notiert: $n = p_1^{\alpha_1} \dots p_r^{\alpha_r}$, mit $\alpha_i \geq 1$ und $r \geq 1$ die Anzahl verschiedener Primfaktoren. Es sei weiter der Ergebnisraum $\Omega_n := \{1, 2, \dots, n\}$ gegeben mit dem Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}$ als Gleichverteilung auf Ω_n.

Für beliebiges $p \in \Omega_n$ sei noch $A_p := \{\, m \in \Omega_n \;:\; p \text{ teilt } m \,\}$, die Menge der Zahlen in Ω_n, die von p ohne Rest geteilt werden.

(a) Sei zunächst $n = 6$. Bestimmen Sie A_p für jeden Primfaktor p von 6. Zeigen Sie, dass die Familie der Ereignisse $(A_{p_i})_{1\leq i\leq r}$ stochastisch unabhängig ist. Zeigen Sie in diesem Fall die Gleichung:

$$\varphi(n) = n \prod_{i=1}^{r} \Big(1 - \frac{1}{p_i}\Big).$$

(b) Verallgemeinern Sie Ihre Überlegungen für den Fall $n \geq 2$ beliebig.

Lösung:

(a) Die Primfaktorzerlegung von Sechs ist $6 = 2 \cdot 3$, daher setze $p_1 = 2$, $p_2 = 3$ und $r = 2$. Dann ist $A_2 = \{2, 4, 6\}$, $A_3 = \{3, 6\}$ und $A_2 \cap A_3 = \{6\}$ und daher

$$\mathbb{P}(A_2) = \frac{1}{2}, \qquad \mathbb{P}(A_3) = \frac{1}{3}, \qquad \mathbb{P}(A_2 \cap A_3) = \frac{1}{6} = \mathbb{P}(A_1)\,\mathbb{P}(A_2).$$

Per Definition gilt $\varphi(6) = \#\{1, 5\} = 2$. Weiter ist

$$6 \prod_{i=1}^{2} \Big(1 - \frac{1}{p_i}\Big) = 6 \cdot \Big(1 - \frac{1}{2}\Big) \cdot \Big(1 - \frac{1}{3}\Big) = 2.$$

Somit gilt die Gleichheit.

(b) Es gilt zunächst

$$A_p = \{\, kp \;:\; k \in \mathbb{N},\ kp \leq n \,\} = \Big\{ kp \;:\; 1 \leq k \leq \frac{n}{p} \Big\}.$$

Daraus folgt

$$\mathbb{P}(A_p) = \frac{\#\big\{ kp \;:\; 1 \leq k \leq \frac{n}{p} \big\}}{\#\Omega_n} = \frac{\frac{n}{p}}{n} = \frac{1}{p}.$$

Es wird nun eine beliebige Teilmenge verschiedener Primfaktoren $p_{i_1}, \ldots, p_{i_s}$ von n mit $2 \leq s \leq r$ gewählt. Sei $m := p_{i_1} p_{i_2} \ldots p_{i_s}$ das Produkt dieser Primfaktoren. Angenommen für ein $k \in \mathbb{N}$ gilt $m \,|\, k$, dann gilt

$$p_{i_1} | \, k \text{ und } p_{i_2} | \, k \ \ldots \ \text{ und } p_{i_s} | \, k \Leftrightarrow m \,|\, k.$$

Daher ist $A_m = A_{p_{i_1}} \cap \ldots \cap A_{p_{i_s}}$ und somit

$$\mathbb{P}(A_{p_{i_1}} \cap \ldots \cap A_{p_{i_s}}) = \frac{1}{m} = \prod_{k=1}^{s} \frac{1}{p_{i_k}} = \prod_{k=1}^{s} \mathbb{P}(A_{i_k}),$$

was die stochastische Unabhängigkeit der Familie $(A_{p_i})_{1 \leq i \leq r}$ zeigt.

Wegen dieser Eigenschaft sind auch die Komplemente unabhängig. Es gilt dann

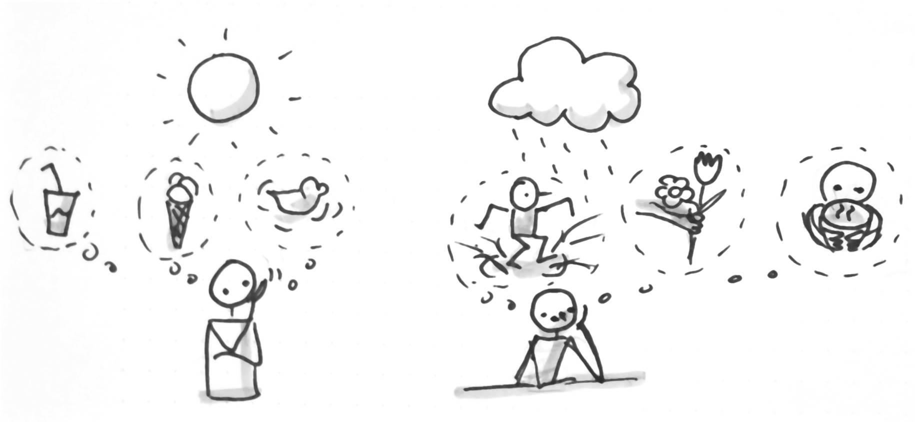
$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{r} A_{p_i}^c\right) = \prod_{i=1}^{r} \mathbb{P}\left(A_{p_i}^c\right) = \prod_{i=1}^{r} (1 - \mathbb{P}(A_{p_i})) = \prod_{i=1}^{r} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right).$$

Andererseits gilt aufgrund der Gleichverteilung auch

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{r} A_{p_i}^c\right) = \frac{\# \bigcap_{i=1}^{r} A_{p_i}^c}{n} = \frac{\varphi(n)}{n}$$

und somit folgt die Aussage.

1.6 Bedingte Wahrscheinlichkeit



Aufgabe 1.44: Pólya Urne - zweistufiges Ziehen und Dazulegen ○●●

Eine Urne enthält zwei rote und drei schwarze Kugeln. Es wird zufällig eine Kugel gezogen und diese, sowie eine weitere Kugel der gleichen Farbe, in die Urne zurückgelegt. Nun wird abermals eine Kugel gezogen, sie sei rot. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass auch die erste Kugel rot war.

Lösung: Man definiere die folgenden Ereignisse:

$$\begin{aligned} E_r &\mathrel{\widehat{=}} \text{„ die erste gezogene Kugel ist rot ``}, \\ E_s &\mathrel{\widehat{=}} \text{„ die erste gezogene Kugel ist schwarz ``}, \\ Z_r &\mathrel{\widehat{=}} \text{„ die zweite gezogene Kugel ist rot ``}. \end{aligned}$$

Da das Ziehen jeder Kugel die gleiche Wahrscheinlichkeit hat, ergibt sich

$$\mathbb{P}(E_r) = \frac{2}{5}, \qquad \mathbb{P}(E_s) = \frac{3}{5}, \qquad \mathbb{P}(Z_r|E_r) = \frac{1}{2}, \qquad \mathbb{P}(Z_r|E_s) = \frac{1}{3}.$$

Mittels der Bayes-Formel und dem Satz der totalen Wahrscheinlichkeit ergibt sich schließlich

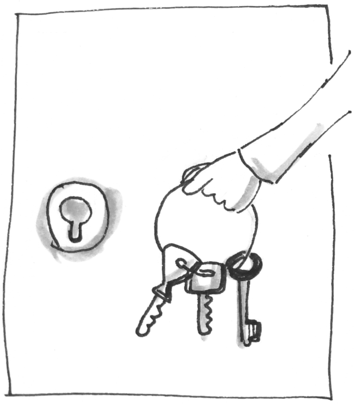
$$\mathbb{P}(E_r|Z_r) = \frac{\mathbb{P}(Z_r|E_r)\mathbb{P}(E_r)}{\mathbb{P}(Z_r)} = \frac{\mathbb{P}(Z_r|E_r)\mathbb{P}(E_r)}{\mathbb{P}(Z_r|E_r)\mathbb{P}(E_r) + \mathbb{P}(Z_r|E_s)\mathbb{P}(E_s)} = \frac{\frac{1}{2}\frac{2}{5}}{\frac{1}{2}\frac{2}{5} + \frac{1}{3}\frac{3}{5}} = \frac{1}{2}.$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass die erste Kugel auch eine rote Kugel war, ist 0,5.

Aufgabe 1.45: Schlüsselbund ○●●

Um eine verschlossene Tür zu öffnen, probiert Elsa Schlüssel aus, die sie in einer Kiste gefunden hat. Sie weiß, dass einer (und nur einer) der Schlüssel passt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit öffnet Elsa die Tür mit dem k-ten Schlüssel?

Hinweis: *Nehmen Sie an, Elsa legt nicht passende Schlüssel beiseite und wählt jeden Schlüssel zufällig mit gleicher Wahrscheinlichkeit.*



Lösung: Für $k \in \{1, \ldots, n\}$ sei

$$A_k \mathrel{\widehat{=}} \text{„der } k\text{-te Schlüssel passt“}.$$

Der erste zufällig gewählte Schlüssel passt mit Wahrscheinlichkeit

$$\mathbb{P}(A_1) = \frac{1}{n}.$$

Wenn der erste Schlüssel nicht passt, gibt es noch $n-1$ weitere Schlüssel zu probieren. Damit ergibt sich

$$\mathbb{P}(A_2 \,|\, A_1^c) = \frac{1}{n-1}, \qquad \mathbb{P}(A_2^c \,|\, A_1^c) = \frac{n-2}{n-1}.$$

Analog folgt

$$\mathbb{P}\Big(A_{k+1} \,\Big|\, \bigcap_{i=1}^{k} A_i^c\Big) = \frac{1}{n-k}, \qquad \mathbb{P}\Big(A_{k+1}^c \,\Big|\, \bigcap_{i=1}^{k} A_i^c\Big) = 1 - \frac{1}{n-k}.$$

Die Multiplikationsformel ergibt durch mehrmaliges Anwenden des Teleskopprodukts

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A_k) &= \mathbb{P}\Big(A_k \,\Big|\, \bigcap_{i=1}^{k-1} A_i^c\Big)\,\mathbb{P}\Big(\bigcap_{i=1}^{k-1} A_i^c\Big)\\ &= \mathbb{P}\Big(A_k \,\Big|\, \bigcap_{i=1}^{k-1} A_i^c\Big)\,\mathbb{P}\Big(A_{k-1}^c \,\Big|\, \bigcap_{i=1}^{k-2} A_i^c\Big)\,\mathbb{P}\Big(\bigcap_{i=1}^{k-2} A_i^c\Big)\\ &= \mathbb{P}\Big(A_k \,\Big|\, \bigcap_{i=1}^{k-1} A_i^c\Big)\prod_{j=2}^{k-1}\mathbb{P}\Big(A_{k-j+1}^c \,\Big|\, \bigcap_{i=1}^{k-j} A_i^c\Big)\,\mathbb{P}(A_1^c)\\ &= \frac{1}{n-k+1}\prod_{j=2}^{k-1}\frac{n-k+j-1}{n-k+j}\,\frac{n-1}{n} = \frac{1}{n}.\end{aligned}$$

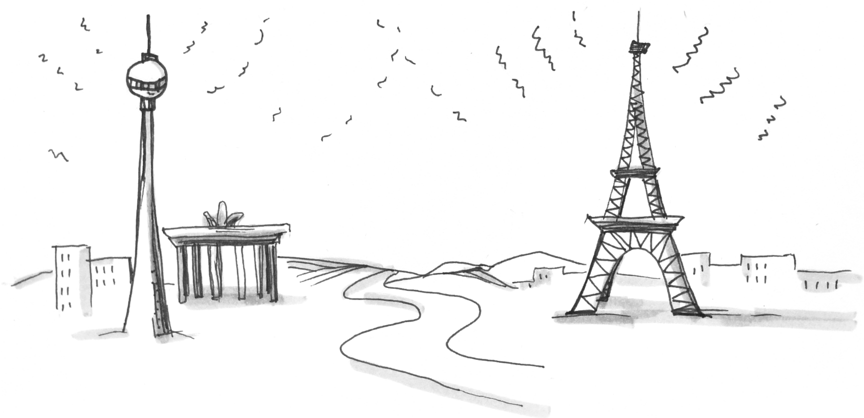
Damit hängt die Wahrscheinlichkeit, das Schloss mit dem k-ten Schlüssel zu öffnen, gar nicht von k ab und ist stets $1/n$.

Aufgabe 1.46: Radar-Signale ○○●

Eine Radarstation empfängt Signale. Man weiß, dass 90 % der eintreffenden Signale sinnvolle Signale und 10 % reines Rauschen sind. Wird ein sinnvolles Signal empfangen, so zeigt der Radar mit Wahrscheinlichkeit 80 % die Ankunft eines sinnvollen Signals richtig an. Beim Empfang eines reinen Rauschsignals wird mit Wahrscheinlichkeit 10 % fälschlicherweise die Ankunft eines sinnvollen Signals angezeigt.

(a) Modellieren Sie dieses Zufallsexperiment.

(b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein als sinnvoll angezeigtes Signal dies tatsächlich ist.



Lösung:

(a) Es entspreche

$$S \mathrel{\widehat{=}} \text{„ Das Signal ist sinnvoll“}, \quad E \mathrel{\widehat{=}} \text{„ Es wird eine Störung angezeigt“}.$$

Dann sind folgende Wahrscheinlichkeiten bekannt

$$\mathbb{P}(S) = \frac{9}{10}, \qquad \mathbb{P}(E \mid S) = \frac{2}{10}, \qquad \mathbb{P}(E \mid S^c) = \frac{9}{10}.$$

(b) Mittels des Satz von Bayes und der Formel der totalen Wahrscheinlichkeit ergibt sich somit

$$\mathbb{P}(S \mid E^c) = \frac{\mathbb{P}(E^c \mid S)\,\mathbb{P}(S)}{\mathbb{P}(E^c \mid S)\,\mathbb{P}(S) + \mathbb{P}(E^c \mid S^c)\,\mathbb{P}(S^c)} = \frac{\frac{8}{10}\frac{9}{10}}{\frac{8}{10}\frac{9}{10} + \frac{1}{10}\frac{1}{10}} = \frac{72}{73}.$$

Somit ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein als sinnvoll eingestuftes Signal tatsächlich sinnvoll ist, ungefähr 98,6 %.

Aufgabe 1.47: Defekte Geräte ○○●

In einer Produktionslinie werden technische Geräte produziert, wobei der Anteil der fehlerhaften Geräte 5 % beträgt. Die produzierten Geräte werden einer Gütekontrolle mit folgenden Merkmalen unterzogen: Ein fehlerhaftes Gerät wird mit Wahrscheinlichkeit 99 % ausgesondert, ein nicht defektes Gerät wird mit Wahrscheinlichkeit 10 % ausgesondert. Berechnen Sie

(a) den Anteil der Geräte, die ausgesondert werden,

(b) den Anteil der nicht defekten Geräte, die ausgesondert werden,

(c) den Anteil der defekten Geräte, die nicht ausgesondert werden.

Lösung: Man definiere

$$A \mathrel{\widehat{=}} \text{„ Gerät wird ausgesondert “}, \qquad F \mathrel{\widehat{=}} \text{„ Gerät ist fehlerhaft “}.$$

Dann sind folgende Wahrscheinlichkeiten bekannt

$$\mathbb{P}(A \mid F) = \frac{99}{100}, \qquad \mathbb{P}(A \mid F^c) = \frac{10}{100}, \qquad \mathbb{P}(F) = \frac{5}{100}.$$

Damit lassen sich die gesuchten Wahrscheinlichkeiten direkt berechnen.

(a) Man benutzt die Formel der totalen Wahrscheinlichkeit

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \mid F)\,\mathbb{P}(F) + P(A \mid F^c)\,\mathbb{P}(F^c) = 14{,}45\,\%.$$

(b) Man benutzt den Satz von Bayes

$$\mathbb{P}(F^c \,|\, A) = \frac{\mathbb{P}(A \,|\, F^c)\,\mathbb{P}(F^c)}{\mathbb{P}(A)} \approx 65{,}84\,\%.$$

(c) Nach dem Satz von Bayes gilt:

$$\mathbb{P}(F \,|\, A^c) = \frac{\mathbb{P}(A^c \,|\, F)\,\mathbb{P}(F)}{1 - \mathbb{P}(A)} = \frac{(1 - \mathbb{P}(A \,|\, F))\,\mathbb{P}(F)}{1 - \mathbb{P}(A)} \approx 0{,}058\,\%.$$

Aufgabe 1.48: Volleyballturnier ○●●

Fünf Volleyballmannschaften organisieren ein Turnier. Jede Mannschaft spielt einmal gegen jede andere Mannschaft. Ein Team aus Potsdam ist dabei.

(a) Berechnen Sie die Anzahl der Spiele die insgesamt auf dem Turnier ausgetragen werden. An wie vielen Spielen nimmt die Mannschaft aus Potsdam teil?

(b) Die Mannschaft aus Potsdam besteht aus fünf männlichen und drei weiblichen Spielern. In jeder Partie spielen aber nur sechs Spieler, die vor der Partie ausgelost werden.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass bei der Auslosung der Startaufstellung genau zwei weibliche und 4 männliche Spieler ausgewählt werden. Dabei hat jedes Los die gleiche Wahrscheinlichkeit, gezogen zu werden.

(c) Die Potsdamer Mannschaft hat bereits ein Spiel gewonnen. Der Trainer kalkuliert für die restlichen drei Spiele: Wir gewinnen das nächste Spiel zu 60 %. Mit jedem gewonnenen Spiel steigt unsere Gewinnchance beim nächsten Spiel um 10 %, mit jedem verlorenen werden die Spieler unsicherer und die Gewinnchancen des nächsten Spieles sinkt um jeweils 10 %. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die Mannschaft mindestens drei Spiele insgesamt gewinnt.

Lösung:

(a) Die Anzahl der Spiele ist $\binom{5}{2} = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10$. Die Mannschaft aus Potsdam nimmt dabei an genau vier Spielen teil.

(b) Insgesamt gibt es zur Aufstellung der Mannschaft $\binom{8}{6}$ Möglichkeiten. Die Anzahl der Möglichkeiten genau zwei Frauen und vier Männer auszuwählen ist $\binom{3}{2}\binom{5}{4}$. Somit ergibt sich die gesuchte Wahrscheinlichkeit als

$$\frac{\binom{3}{2}\binom{5}{4}}{\binom{8}{6}} \approx 54{,}6\,\%.$$

(c) Man definiere für $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ das Ereignis $S_i \mathrel{\widehat{=}}$ „Sieg im i-ten Spiel".

Nach Voraussetzung ist $\mathbb{P}(S_1) = 1$ und $\mathbb{P}(S_2|S_1) = 0{,}6$. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist

$$p := \mathbb{P}(S_2 \cap S_3 \cap S_4) + \mathbb{P}(S_2^c \cap S_3 \cap S_4) + \mathbb{P}(S_2 \cap S_3^c \cap S_4) + \mathbb{P}(S_2 \cap S_3 \cap S_4^c).$$

Die Wahrscheinlichkeiten können nun mittels der Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit berechnet werden

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(S_2 \cap S_3 \cap S_4\right) &= \mathbb{P}(S_2 \,|\, S_1)\, \mathbb{P}(S_3 \,|\, S_2)\, \mathbb{P}(S_4 \,|\, S_3 \cap S_2) = \frac{6}{10}\,\frac{7}{10}\,\frac{8}{10} = \frac{42}{125},\\
\mathbb{P}\left(S_2^c \cap S_3 \cap S_4\right) &= \mathbb{P}(S_2^c \,|\, S_1)\, \mathbb{P}(S_3 \,|\, S_2^c)\, \mathbb{P}(S_4 \,|\, S_3 \cap S_2^c) = \frac{4}{10}\,\frac{5}{10}\,\frac{6}{10} = \frac{15}{125},\\
\mathbb{P}\left(S_2 \cap S_3^c \cap S_4\right) &= \mathbb{P}(S_2 \,|\, S_1)\, \mathbb{P}(S_3^c \,|\, S_2)\, \mathbb{P}(S_4 \,|\, S_3^c \cap S_2) = \frac{6}{10}\,\frac{3}{10}\,\frac{6}{10} = \frac{27}{250},\\
\mathbb{P}\left(S_2 \cap S_3 \cap S_4^c\right) &= \mathbb{P}(S_2 \,|\, S_1)\, \mathbb{P}(S_3 \,|\, S_2)\, \mathbb{P}(S_4^c \,|\, S_3 \cap S_2) = \frac{6}{10}\,\frac{7}{10}\,\frac{2}{10} = \frac{21}{250}.
\end{aligned}$$

Damit ist die Wahrscheinlichkeit, mindestens drei Spiele zu gewinnen,

$$p = \frac{42}{125} + \frac{15}{125} + \frac{27}{250} + \frac{21}{250} = \frac{81}{125} = 64{,}8\,\%.$$

Aufgabe 1.49: Bedingtes Wahrscheinlichkeitsmaß bedingen ○○●

Gegeben seien ein Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ und drei Ereignisse $A, B, C \subset \Omega$, so dass $\mathbb{P}(B \cap C) > 0$.

Definieren Sie dazu das bedingte Wahrscheinlichkeitsmaß $\hat{\mathbb{P}}(\,.\,) := \mathbb{P}(\,.\,|\,B)$. Beweisen Sie, dass $\hat{P}(A \,|\, C) = P(A \,|\, B \cap C)$ gilt.

Lösung:

$$\hat{\mathbb{P}}(A \,|\, C) = \frac{\hat{\mathbb{P}}(A \cap C)}{\hat{\mathbb{P}}(C)} = \frac{\mathbb{P}(A \cap C \,|\, B)}{\mathbb{P}(C \,|\, B)} = \frac{\mathbb{P}(A \cap B \cap C)}{\mathbb{P}(B)}\,\frac{\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(C \cap B)} = \mathbb{P}(A \,|\, B \cap C).$$

Aufgabe 1.50: Unvereinbarkeit impliziert Abhängigkeit ○○●

Gegeben sei ein Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ und Ereignisse A, B mit $\mathbb{P}(A) > 0$ und $\mathbb{P}(B) > 0$. Zeigen Sie, dass gilt

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) \;\Rightarrow\; \mathbb{P}(A \,|\, B) \neq \mathbb{P}(A).$$

Lösung: Nach Voraussetzung gilt

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cup B) = 0.$$

Daraus folgt wegen $\mathbb{P}(B) \neq 0$

$$\mathbb{P}(A \,|\, B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = 0 \neq \mathbb{P}(A).$$

Kapitel 2

Diskrete Zufallsvariablen und ihre Verteilungen

Peter Keller, Tobias Ehlen

2.1 Zähldichte und Verteilungsfunktion

Aufgabe 2.1: Treppenfunktion ○●●

Gegeben sei die Funktion

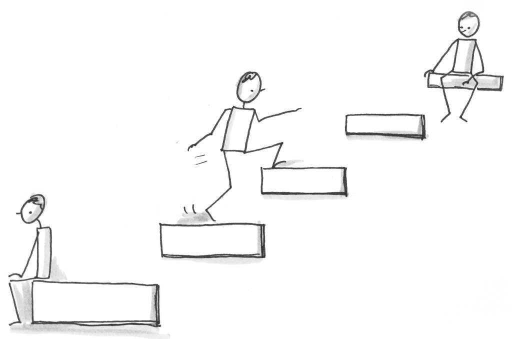
$$F : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ F(x) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \mathbb{1}_{[\frac{1}{k},+\infty)}(x).$$

(a) Berechnen Sie $F(0)$, $F(1)$, sowie die Werte von F auf dem Bereich $(-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$.

(b) Beweisen Sie, dass F monoton steigend und rechtsseitig stetig ist.

(c) Bestimmen Sie dann das Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}$, das F als zugehörige Verteilungsfunktion hat.

(d) Berechnen Sie $\mathbb{P}([0, \frac{1}{2}])$, $\mathbb{P}([0, \frac{1}{3}])$ und $\mathbb{P}(\{\frac{1}{2}\})$.



Lösung:

(a) Da $k \geq 1$ ist $\frac{1}{k} \in (0, 1]$, sodass

$$\forall x \leq 0,\ F(x) = 0 \text{ und } \forall x \geq 1,\ F(x) = 1.$$

(b) Es gilt für $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x < y$

$$\mathbb{1}_{[\frac{1}{k},+\infty)}(x) \leq \mathbb{1}_{[\frac{1}{k},+\infty)}(y)$$

und damit folgt die Aussage.

(c) F ist konstant auf Intervallen der Form $[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n})$; somit ist F rechtsseitig stetig.

F ist monoton wachsend, rechtsseitig stetig und

$$\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0 \quad \text{sowie} \quad \lim_{x\to\infty} F(x) = 1.$$

Damit folgt, dass ein eindeutiges zugehöriges Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}$ existiert. Sei $n \in \mathbb{N}$, dann gilt

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\left\{\frac{1}{n}\right\}\right) &= F\left(\frac{1}{n}\right) - \lim_{x\nearrow\frac{1}{n}} F(x) = F\left(\frac{1}{n}\right) - F\left(\frac{1}{n+1}\right) \\ &= \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{2^k} - \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^n}.\end{aligned}$$

Es gilt auch

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}\left(\left\{\frac{1}{n}\right\}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1.$$

Damit ist das Gesamtgewicht von $\mathbb{P}$ auf den Punkten $\frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, verteilt. Das heißt,

$$\mathbb{P} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}\, \delta_{\frac{1}{n}}\ .$$

(d) Es gilt

$$\mathbb{P}\left(\left[0,\frac{1}{2}\right]\right) = \mathbb{P}\left(\left(-\infty,\frac{1}{2}\right]\right) - \mathbb{P}((-\infty,0)) = F\left(\frac{1}{2}\right) - F(0^-) = \sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{2^k} = \frac{1}{2},$$
$$\mathbb{P}\left(\left[0,\frac{1}{3}\right]\right) = \frac{1}{4}, \quad \mathbb{P}\left(\left\{\frac{1}{2}\right\}\right) = \frac{1}{4}.$$

Aufgabe 2.2: Sprunghöhe ○●●

Ein Springer versucht, aufeinanderfolgende, nummerierte Höhen zu überspringen. Wenn der Sportler zum ersten Mal eine bestimmte Höhe nicht überspringt, scheidet er aus. Die Wahrscheinlichkeit p_n, die n-te Höhe zu überspringen - nachdem man die $(n-1)$-te Höhe übersprungen hat - sei gegeben gleich $1/n$. Die Zufallsvariable X gebe die Nummer des letzten erfolgreichen Sprunges an.

(a) Stellen Sie die Zufallsvariable X mit Hilfe der Ereignisse $(R_i)_{i\in\mathbb{N}}$ dar, wobei

$$R_i \mathrel{\widehat{=}} \text{„die } i\text{-te Höhe wird übersprungen“}.$$

(b) Folgern sie die Verteilung der Zufallsvariablen X.

(c) Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz von X.

Lösung:

(a) Es gilt für $n \in \mathbb{N}$

$$\{X = n\} = \bigcap_{i=1}^{n} R_i \cap R_{n+1}^c.$$

(b) Es gilt für $n \in \mathbb{N}$

$$p_n = \mathbb{P}(R_n | R_{n-1}) = \frac{1}{n}.$$

Damit folgt

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X = n) &= \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} R_i \cap R_{n+1}^c\right) \\
&= \mathbb{P}\left(R_{n+1}^c \middle| \bigcap_{i=1}^{n} R_i\right) \mathbb{P}\left(R_n \middle| \bigcap_{i=1}^{n-1} R_i\right) \mathbb{P}\left(R_{n-1} \middle| \bigcap_{i=1}^{n-2} R_i\right) \cdot \ldots \cdot \mathbb{P}(R_2|R_1)\mathbb{P}(R_1) \\
&= \mathbb{P}(R_{n+1}^c|R_n)\mathbb{P}(R_n|R_{n-1})\mathbb{P}(R_{n-1}|R_{n-2}) \cdot \ldots \cdot \mathbb{P}(R_2|R_1)\mathbb{P}(R_1) \\
&= (1 - p_{n+1}) \prod_{i=1}^{n} p_i = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\frac{1}{n!} = \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}
\end{aligned}$$

Dadurch ist die Verteilung eindeutig bestimmt.

(c) Es ist zunächst

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \sum_{n=1}^{\infty} n\mathbb{P}(X=n) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n!} - \frac{n}{(n+1)!}\right)\\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!} - 1 = e-1,\end{aligned}$$

und außerdem

$$\mathbb{E}(X^2) = \sum_{n=1}^{\infty} n^2\mathbb{P}(X=n) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{(n-1)!} - \frac{n^2}{(n+1)!}\right) = e+1.$$

Daher gilt:

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = e+1-(e-1)^2 = e(3-e).$$

Aufgabe 2.3: Zeitungsverkauf ●●●

Ein Zeitungsverkäufer hat an jedem Tag eine zufällige Anzahl N von Kunden. Nehmen Sie an, er kennt die Verteilung von N, zum Beispiel dank einer Statistik über die vorherigen Tage. Der Verkäufer möchte die Anzahl k der Zeitungen optimieren, die er dem Verleger abnehmen soll.

- Er erhält einen Gewinn a pro verkaufter Zeitung.
- Er verbucht einen Verlust b pro nicht verkaufter Zeitung.
- Ein Kunde ist unzufrieden, wenn es für ihn keine Zeitung mehr gibt. Dies sei durch einen Verlust c beschrieben.

(a) Modellieren Sie den Gewinn des Verkäufers mittels Zufallsvariablen G_k, wobei $k \in \mathbb{N}$ die Anzahl der bestellten Zeitungen ist.

Hinweis: *Unterscheiden Sie beide Fälle, $N \leq k$ und $N > k$.*

(b) Stellen Sie den Ausdruck $\mathbb{E}(G_{k+1}) - \mathbb{E}(G_k)$ in Abhängigkeit der Verteilungsfunktion F_N von N dar.

(c) Bestimmen Sie, wie viele Zeitungen bestellt werden sollten, damit der erwartete Gewinn des Verkäufers maximal wird.

Lösung:

(a) Man unterscheidet zwischen zu viel und zu wenig bestellten Zeitungen. Damit ergibt sich

$$G_k = (aN - b(k-N))\,\mathbb{1}_{\{N\leq k\}} + (ak - c(N-k))\,\mathbb{1}_{\{N>k\}}.$$

(b) Man bestimme zunächst $G_{k+1} - G_k$:

$$G_{k+1} - G_k = -b\mathbb{1}_{\{N\leq k\}} + (a+c)\mathbb{1}_{\{N>k\}}.$$

Damit ergibt sich: $\mathbb{E}(G_{k+1} - G_k) = (a+c) - (a+b+c)F_N(k)$.

(c) Die Zuordnung $k \mapsto \mathbb{E}(G_k)$ ist maximal für die kleinste natürliche Zahl k^*, die folgendes erfüllt:

$$\mathbb{E}(G_{k^*+1}) \leq \mathbb{E}(G_{k^*}) \Leftrightarrow F_N(k^*) \geq \frac{a+c}{a+b+c}.$$

Aufgabe 2.4: Verteilung mit abfallendem Histogramm ○●●

Gegeben sei eine Zufallsvariable X mit Werten in $\mathbb{N}$ und endlichem Erwartungswert. Weiter erfüllt ihre Verteilung folgende Monotonieeigenschaft:

$$\forall\, k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(X = k) \geq \mathbb{P}(X = k+1).$$

(a) Beweisen Sie:

$$\mathbb{P}(X = k) \leq \frac{2\,\mathbb{E}(X)}{k^2}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

(b) Beweisen Sie, dass kein $c > 0$ existiert, so dass

$$\exists k_0 \in \mathbb{N},\ \forall k \geq k_0\ \mathbb{P}(X = k) \geq \frac{c}{k^2}.$$

Lösung:

(a) Es gilt

$$\mathbb{E}(X) \geq \sum_{n=1}^{k} n\mathbb{P}(X = n) \geq \mathbb{P}(X = k)\sum_{n=1}^{k} n = \frac{k(k+1)}{2} \cdot \mathbb{P}(X = k) \geq \frac{k^2}{2} \cdot \mathbb{P}(X = k)$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(X = k) \leq \frac{2\,\mathbb{E}(X)}{k^2}.$$

(b) Beweis durch Widerspruch. Angenommen, es gäbe ein $c > 0$ und ein k_0. Dann folgte

$$\mathbb{E}(X) \geq \sum_{k=k_0}^{\infty} k\,\mathbb{P}(X = k) \geq \sum_{k=k_0}^{\infty} k\,\frac{c}{k^2} = c\sum_{k=k_0}^{\infty} \frac{1}{k} = +\infty.$$

Bemerkung: Dank der Monotonie der Gewichte von $\mathbb{P}_X$ ist ihre Abfallrate schneller als $2\,\mathbb{E}(X)/k^2$. Aber es gibt keine minimale asymptotische quadratische Abfallrate.

Aufgabe 2.5: Extremwertverteilungen ○●●

Seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängige, identisch verteilte diskrete Zufallsvariablen.

(a) Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion von

$$M_n := \max\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$$

und leiten Sie daraus einen Ausdruck für die Verteilung von M_n her.

(b) Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion von

$$m_n := \min\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$$

und leiten Sie daraus einen Ausdruck für die Verteilung von m_n her.

(c) Nehmen Sie an, dass X_i, $1 \leq i \leq n$, Bernoulli-verteilt mit Parameter $p \in (0, 1)$ ist. Berechnen Sie den Erwartungswert von M_n und m_n. Zeigen Sie, dass M_n und m_n stochastisch abhängig sind. Was passiert wenn $n \to +\infty$?

Lösung: Die Verteilungsfunktion von X_i sei mit F_X abgekürzt.

(a) Aufgrund der Unabhängigkeit gilt für $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} F_{M_n}(t) &= \mathbb{P}(M_n \leq t) = \mathbb{P}(X_1 \leq t, X_2 \leq t, \ldots, X_n \leq t) \\ &= \mathbb{P}(X_1 \leq t)^n = F_X(t)^n. \end{aligned}$$

Da M_n eine diskrete Zufallsvariable ist, folgt

$$\mathbb{P}(M_n = t) = F_{M_n}(t) - F_{M_n}(t^-) = F_X(t)^n - F_X(t^-)^n,$$

wobei $F_X(t^-)$ der linksseitige Grenzwert von F_X an der Stelle t ist.

(b) Wie in der vorigen Teilaufgabe gilt

$$1-F_{m_n}(t) = \mathbb{P}(m_n > t) = \mathbb{P}(X_1 > t, X_2 > t, \ldots, X_n > t) = \mathbb{P}(X_1 > t)^n = (1-F_X(t))^n$$

und daher

$$F_{m_n}(t) = 1 - (1 - F_X(t))^n, \ t \in \mathbb{R}.$$

$$\mathbb{P}(m_n = t) = F_{m_n}(t) - F_{m_n}(t^-) = (1 - F_X(t^-))^n - (1 - F_X(t))^n.$$

(c) Zunächst nimmt M_n nur Werte in $\{0, 1\}$ an und ist somit Bernoulli-verteilt. Dann gilt

$$\begin{aligned} \{M_n = 0\} &= \bigcap_{i=1}^{n} \{X_i = 0\} \\ \Rightarrow \mathbb{P}(M_n = 0) &= \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i = 0) = (1 - p)^n. \end{aligned}$$

Somit ist $M_n \sim \mathrm{Ber}(1-(1-p)^n)$ und $\mathbb{E}(M_n) = 1-(1-p)^n$.
Analog ist auch m_n Bernoulli-verteilt. Es gilt

$$\{m_n = 1\} = \bigcap_{i=1}^{n} \{X_i = 1\}$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(m_n = 1) = \mathbb{P}(X_1 = 1, \ldots, X_n = 1) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i = 1) = p^n.$$

Somit gilt $m_n \sim \mathrm{Ber}(p^n)$ und $\mathbb{E}(m_n) = \mathbb{P}(m_n = 1) = p^n$.
Um ein möglichst simples Gegenbeispiel zur stochastischen Unabhängigkeit zu geben, sei $n = 2$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(M_2 = 0, m_2 = 1) &= \mathbb{P}(\emptyset) = 0 \\ \text{aber} \quad \mathbb{P}(M_2 = 0)\mathbb{P}(m_2 = 1) &\neq 0. \end{aligned}$$

Wenn $n \to +\infty$, konvergiert M_n (bzw. m_n) in Verteilung gegen die Konstante 1 (bzw. gegen 0).

Aufgabe 2.6: Konstruktion einer Verteilung durch Rekursion ○●●

Bestimmen Sie das Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}$ auf $\mathbb{N}$, das der Gleichung

$$\sum_{k=j+1}^{\infty} p_k = \frac{1}{2} \sum_{k=j}^{\infty} p_k\,, \quad j \in \mathbb{N},$$

genügt, wobei $p_k := \mathbb{P}(\{k\}), k \in \mathbb{N}$, die Zähldichte von $\mathbb{P}$ bezeichne.
Wie ändern sich Ihre Überlegungen, wenn Sie die Gleichung

$$\sum_{k=j+1}^{\infty} p_k = q \sum_{k=j}^{\infty} p_k\,, \quad j \in \mathbb{N},$$

für ein $q \in (0, 1)$ betrachten?

Lösung: Zunächst kann man direkt für $j \in \mathbb{N}$ folgern:

$$\sum_{k=j+1}^{\infty} p_k = \frac{1}{2} \sum_{k=j}^{\infty} p_k = \frac{1}{2^2} \sum_{k=j-1}^{\infty} p_k = \ldots = \frac{1}{2^j} \sum_{k=1}^{\infty} p_k.$$

Da $\mathbb{P}$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß ist, folgt

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1 \text{ und somit } \sum_{k=j+1}^{\infty} p_k = \left(\frac{1}{2}\right)^j.$$

Die Zähldichte ergibt sich nun für $j \in \mathbb{N}$ als

$$p_j = \sum_{k=1}^{j} p_k - \sum_{k=1}^{j-1} p_k = \left(1 - \sum_{k=j+1}^{\infty} p_k\right) - \left(1 - \sum_{k=j}^{\infty} p_k\right) = \frac{1}{2^j}.$$

Dies ist die Zähldichte einer geometrischen Verteilung auf $\mathbb{N}$ zum Parameter $1/2$.

Dieses Vorgehen funktioniert im allgemeinen Fall analog und liefert $p_j = q^{j-1}(1-q)$. Dies ist die Zähldichte einer geometrischen Verteilung zum Parameter $1-q$.

Bemerkung: Die gegebene Gleichung kann man so umformen:

$$\frac{\mathbb{P}(\{j+1, j+2, \ldots\})}{\mathbb{P}(\{2, \ldots\})} = \mathbb{P}(\{j, j+1, \ldots\}), \; j \in \mathbb{N}.$$

Dies ist eine Eigenschaft der *Gedächtnislosigkeit*; und dies ist eine definierende Eigenschaft der Klasse der geometrischen Verteilungen, siehe auch Aufgabe 2.32.

2.2 Kenngrößen wichtiger, diskreter Verteilungen

2.2.1 Diskrete Gleichverteilung

Aufgabe 2.7: Gleichverteilung, ihre Mediane und ihre Momente ○●●

Sei X eine auf $\{1, \ldots, n\}$ gleichverteilte Zufallsvariable.

(a) Bestimmen Sie den Erwartungswert von X.

(b) Bestimmen Sie die Mediane von X. Vergleichen Sie Mediane und Erwartungswert.

Hinweis: *Als Erinnerung, ein* Median *einer diskreten reellwertigen Zufallsvariablen X ist eine reelle Zahl m mit der Eigenschaft*

$$\mathbb{P}(X \leq m) \geq \frac{1}{2} \quad \textit{und} \quad \mathbb{P}(X \geq m) \geq \frac{1}{2}.$$

(c) Bestimmen Sie die Varianz von X.

Lösung:

(a) Betrachten Sie zunächst die Summenformel von Gauß:

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Daraus ergibt sich

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=0}^{n} i\,\mathbb{P}(X = i) = \sum_{i=1}^{n} i\,\frac{1}{n} = \frac{n\,(n+1)}{2}\,\frac{1}{n} = \frac{n+1}{2}.$$

(b) Sei zunächst n ungerade. Dann gibt es eine natürliche Zahl $m := \frac{n+1}{2}$ welche den gleichen Abstand zu 1 und n hat. Da die Gleichverteilung jede Zahl gleich gewichtet, liegt es nahe, dass m der Median ist. Es gilt für diesen Ansatz

$$\mathbb{P}(X \le m) = \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{n} = \frac{n+1}{2}\,\frac{1}{n} > \frac{1}{2},$$
$$\mathbb{P}(X \ge m) = \sum_{i=m}^{n} \frac{1}{n} = \frac{n+1}{2}\,\frac{1}{n} > \frac{1}{2}.$$

Somit ist m der gesuchte Median. Zudem geht aus der Rechnung hervor, dass m der einzig mögliche Median ist.

Sei nun n gerade. Nun gibt es keinen „Mittelpunkt" . Stattdessen betrachten wir die beiden nächstgelegenen Werte:

$$m_1 := \frac{n}{2} \quad \text{und} \quad m_2 := \frac{n+1}{2}.$$

Es gilt

$$\mathbb{P}(X \le m_1) = \sum_{i=1}^{m_1} \frac{1}{n} = \frac{n}{2}\,\frac{1}{n} = \frac{1}{2}$$
$$\mathbb{P}(X \ge m_1) = \sum_{i=m_1}^{n} \frac{1}{n} = (\frac{n}{2} + 1)\,\frac{1}{n} > \frac{1}{2}.$$

Analog für m_2. Wird m_1 kleiner oder m_2 größer gewählt, so sind nicht beide Bedingungen für den Median erfüllt. Folglich ist die Menge der Mediane der Verteilung genau gleich dem Intervall $[m_1, m_2] = [\frac{n}{2}, \frac{n+1}{2}]$.

In diesem Kontext ist jeder Median kleiner oder gleich dem Erwartungswert.

(c) Mittels der Formel über die Summe von Quadratzahlen

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

ergibt sich

$$\mathbb{E}(X^2) = \sum_{i=0}^{n} i^2\,\frac{1}{n} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\,\frac{1}{n} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Damit folgt

$$\operatorname{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \frac{(n+1)(2n+1)}{6} - \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 = \frac{n^2-1}{12}.$$

Aufgabe 2.8: Maximale Werte beim doppelten Würfelwurf ○○●

Es werden zwei unterscheidbare faire Würfel geworfen. Die Wurfergebnisse seien durch die unabhängigen Zufallsvariablen $W_1, W_2 \sim \mathcal{U}_{\{1,2,3,4,5,6\}}$ modelliert. Es sei weiter $X := \max(W_1, W_2)$ und $Y := \min(W_1, W_2)$.

(a) Bestimmen Sie die Verteilungsfunktionen von X und Y.

(b) Geben Sie die Verteilung von X und Y explizit an.

(c) Berechnen Sie: $\mathbb{P}(X \leq 3)$, $\mathbb{P}(Y \in \{3,4\})$ und $\mathbb{P}(X = Y)$.

Lösung:

(a) Nach Aufgabe 2.5 haben X und Y als Verteilungsfunktionen Treppenfunktionen mit Funktionswerten

$$F_X(k) = F_{W_1}(k)^2 = \frac{k^2}{36}, \quad F_Y(k) = 1 - (1 - F_{W_1}(k))^2 = 1 - \frac{(6-k)^2}{36}, \ k \in \{0, \ldots, 6\}.$$

(b) Nach der gleichen Aufgabe ergibt sich auch die Verteilung zu

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{2k-1}{36}, \qquad \mathbb{P}(Y = k) = \frac{13-2k}{36}, \ k \in \{1, \ldots, 6\}.$$

(c) Durch Einsetzen findet man

$$\mathbb{P}(X \leq 3) = F_X(3) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4} = 0{,}25.$$
$$\mathbb{P}(Y \in \{3,4\}) = \mathbb{P}(2 < Y \leq 4) = F_Y(4) - F_Y(2) = \frac{(6-2)^2}{36} - \frac{(6-4)^2}{36} = \frac{1}{3} \approx 0{,}33.$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass Maximum und Minimum übereinstimmen, bedeutet, dass beide Würfel die gleiche Augenzahl zeigen:

$$\mathbb{P}(X = Y) = \sum_{k=1}^{6} \mathbb{P}(X = k, Y = k) = \sum_{k=1}^{6} \mathbb{P}(W_1 = k)^2 = \frac{1}{6} \approx 0{,}17.$$

2.2.2 Bernoulli- und Binomialverteilung

Aufgabe 2.9: Die Indikatorfunktion ○●●

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Definieren Sie für ein Ereignis $A \in \mathcal{A}$ die Zufallsvariable

$$\mathbb{1}_A : \Omega \to \{0, 1\}, \qquad \mathbb{1}_A(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{falls } \omega \in A \\ 0, & \text{falls } \omega \notin A. \end{cases}$$

Diese Zufallsvariable wird *Indikatorfunktion von A* genannt.

Seien $A, B \in \mathcal{A}$ beliebige Ereignisse.

(a) Berechnen Sie die Verteilung von $\mathbb{1}_A$ und schließen Sie daraus auf den Erwartungswert.

(b) Zeigen Sie die folgenden Identitäten:

(i) $\mathbb{1}_{A^c} = 1 - \mathbb{1}_A$,

(ii) $\mathbb{1}_{A \cap B} = \mathbb{1}_A \cdot \mathbb{1}_B$,

(iii) $\mathbb{1}_{A \cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A \cdot \mathbb{1}_B$,

(iv) $\mathbb{1}_{A \setminus B} = \mathbb{1}_A \cdot (1 - \mathbb{1}_B)$,

(v) $\mathbb{1}_{A \Delta B} = |\mathbb{1}_A - \mathbb{1}_B|$.

Hinweis: *$A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ ist die symmetrische Differenz von A und B, siehe Aufgabe 1.1.*

(c) Schließen Sie mittels der Eigenschaften der Indikatorfunktion auf die Ungleichung

$$\mathbb{P}(A \triangle B) \leq \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B).$$

Für welche $A, B \in \mathcal{A}$ ist die Ungleichung eine Gleichung?

Lösung:

(a) Es ist $\{\omega \in \Omega : \mathbb{1}_A(\omega) = 1\} = A$. Daher ist $\mathbb{P}(\mathbb{1}_A = 1) = \mathbb{P}(A)$. Da $\mathbb{1}_A$ nur die zwei Werte 0 und 1 annimmt, ist $\mathbb{1}_A \sim \text{Ber}(\mathbb{P}(A))$. Daher ist der Erwartungswert $\mathbb{E}(\mathbb{1}_A) = \mathbb{P}(A)$.

(b) Im Folgenden sei $\omega \in \Omega$.

(i) Die Indikatorfunktion vom Komplement von A ist Eins, wenn $\omega \notin A$.

(ii) Die Indikatorfunktion von $A \cap B$ ist Eins, wenn $\omega \in A \cap B$, also insbesondere wenn sowohl $\omega \in A$ als auch $\omega \in B$. Die Indikatorfunktion wird Null, sobald ω nur in einer der beiden Mengen ist.

(iii) Die Indikatorfunktion von $A \cup B$ ist Eins, wenn $\omega \in A$ oder $\omega \in B$. Sie ist auch Eins, wenn ω nur in einer der beiden Mengen enthalten ist. Dementsprechend ist sowohl $\mathbb{1}_A(\omega) = 1$ als auch $\mathbb{1}_B(\omega) = 1$. In dem Fall $\omega \in A \cap B$ zählt man doppelt und muss entsprechend $\mathbb{1}_{A\cap B}$ abziehen.

(iv) Wegen $A \setminus B = A \cap B^c$ folgt nach (i-ii)

$$\mathbb{1}_{A\setminus B} = \mathbb{1}_A \cdot \mathbb{1}_{B^c} = \mathbb{1}_A \cdot (1 - \mathbb{1}_B).$$

(v) Da $A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$, gilt

$$\begin{aligned}\mathbb{1}_{A\triangle B} &= \mathbb{1}_{A\cup B}\,(1 - \mathbb{1}_{A\cap B}) = (\mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A\,\mathbb{1}_B)(1 - \mathbb{1}_A\,\mathbb{1}_B)\\ &= \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - 2\,\mathbb{1}_A\,\mathbb{1}_B = (\mathbb{1}_A - \mathbb{1}_B)^2.\end{aligned}$$

Durch Wurzelziehen auf beiden Seiten erhält man die Behauptung.

(c) Aus der Dreiecksungleichung erhält man punktweise in ω die Abschätzung

$$\mathbb{1}_{A\triangle B}(\omega) = |\mathbb{1}_A(\omega) - \mathbb{1}_B(\omega)| \leq \mathbb{1}_A(\omega) + \mathbb{1}_B(\omega).$$

Daraus folgt $\mathbb{1}_{A\triangle B} \leq \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B$ fast sicher. Anwenden des Erwartungswertes auf beiden Seiten liefert nach (a) die gesuchte Ungleichung, da der Erwartungswert linear und monoton ist.

Da $A \triangle B = A \cup B$ wenn $A \cap B = \emptyset$, ist die Ungleichung eine Gleichung, wenn die Ereignisse disjunkt sind.

Aufgabe 2.10: Unfairer Münzwurf ○●●

Es werden zwei Münzen jeweils dreimal geworfen. Die erste Münze ist fair. Die zweite Münze zeigt in 25% der Fälle *Kopf*. Es seien X und Y unabhängige Zufallsvariablen, die die Anzahl *Kopf* der ersten beziehungsweise der zweiten Münze zählen.

(a) Geben Sie den Wertebereich von X und Y an.

(b) Berechnen Sie $\mathbb{P}(X = k, Y = \ell)$.

(c) Berechnen Sie die folgenden Wahrscheinlichkeiten: $\mathbb{P}(X = Y)$, $\mathbb{P}(X > Y)$ und $\mathbb{P}(X + Y \leq 4)$.

Lösung: Nach Voraussetzung sind X, Y binomialverteilt:

$$X \sim \mathrm{Bin}\Big(3, \frac{1}{2}\Big), \qquad\qquad Y \sim \mathrm{Bin}\Big(3, \frac{1}{4}\Big).$$

(a) Der Wertebereich von X sowie Y ist $\{0, 1, 2, 3\}$.

(b) Die Münzwürfe sind unabhängig, daher ergibt sich für $\ell, k \in \{0,1,2,3\}$

$$\mathbb{P}(X=\ell, Y=k) = \mathbb{P}(X=\ell)\mathbb{P}(Y=k) = \binom{3}{\ell}\binom{3}{k}\frac{3^{3-k}}{512}.$$

(c) Durch Zerlegen der Ereignisse ergibt sich

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X=Y) &= \sum_{i=0}^{3}\binom{3}{i}^2\frac{3^{3-i}}{512} = \frac{17}{64} \approx 26{,}6\%\ ,\\
\mathbb{P}(X>Y) &= \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=0}^{i-1}\binom{3}{i}\binom{3}{j}\frac{3^{3-j}}{512} = \frac{153}{256} \approx 59{,}8\%\ ,\\
\mathbb{P}(X+Y\le 4) &= 1-\mathbb{P}(X+Y=5)-\mathbb{P}(X+Y=6)\\
&= 1-\mathbb{P}(X=2,Y=3)-\mathbb{P}(X=3,Y=2)-\mathbb{P}(X=3,Y=3)\\
&= \frac{499}{512} \approx 97{,}5\%\ .
\end{aligned}$$

Aufgabe 2.11: Drei Bernoulli-Zufallsvariablen ○○●

Seien X_1, X_2, X_3 unabhängige, jeweils zum Parameter $p_1, p_2, p_3 \in [0,1]$ Bernoulli-verteilte Zufallsvariablen. Definieren Sie zwei neue Zufallsvariablen

$$Y := \mathbb{1}_{\{X_1<X_2\}} \qquad \text{und} \qquad Z := \mathbb{1}_{\{X_1<X_3\}}.$$

(a) Bestimmen Sie die Verteilung von Y und Z.

(b) Bestimmen Sie die Verteilung von (Y, Z).

Lösung:

(a) Y nimmt nur die Werte 0 und 1 an und ist somit Bernoulli-verteilt. Es gilt

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Y=1) = \mathbb{P}(\mathbb{1}_{\{X_1<X_2\}}=1) &= \mathbb{P}(X_1<X_2) = \mathbb{P}(X_1=0, X_2=1)\\
&= \mathbb{P}(X_1=0)\mathbb{P}(X_2=1) = (1-p_1)p_2.
\end{aligned}$$

Folglich ist $Y \sim \mathrm{Ber}((1-p_1)p_2)$.

Analog folgt $Z \sim \mathrm{Ber}((1-p_1)p_3)$.

(b) Es gilt

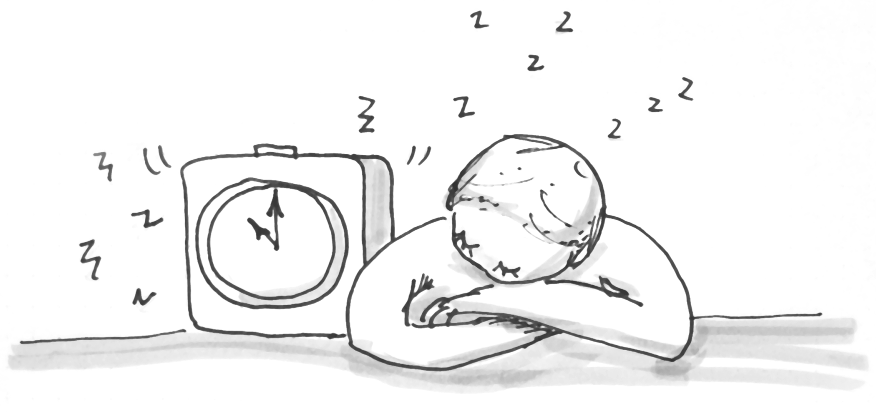
$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y=1, Z=1) &= \mathbb{P}(X_1=0, X_2=1, X_3=1)\\ &= \mathbb{P}(X_1=0)\mathbb{P}(X_2=1)\mathbb{P}(X_3=1) = (1-p_1)p_2p_3.\end{aligned}$$

Analog folgen

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y=0, Z=1) &= (1-p_1)(1-p_2)p_3\,,\\ \mathbb{P}(Y=1, Z=0) &= (1-p_1)p_2(1-p_3)\,,\\ \mathbb{P}(Y=0, Z=0) &= 1-\mathbb{P}(Y=1, Z=1)-\mathbb{P}(Y=0, Z=1)-\mathbb{P}(Y=1, Z=0)\\ &= (1-p_1)\big(p_3+p_2(1-p_3)\big).\end{aligned}$$

Aufgabe 2.12: Herr Schlafmütze ○○●

Herr Schlafmützes Wecker ist defekt. Er funktioniert nur an 25% der Tage. Wird er nicht geweckt, verspätet sich Herr Schlafmütze zur Arbeit. Wie oft – im Durchschnitt – wird Herr Schlafmütze in seiner fünftägigen Arbeitswoche zu spät zur Arbeit kommen?



Lösung: Die Zufallsvariable X beschreibe die Anzahl der Tage an denen er sich verspätet. Dann ist X binomialverteilt zu den Parametern 5 und $\frac{1}{4}$. Der Erwartungswert ist somit

$$\mathbb{E}(X) = np = \frac{5}{4}.$$

Herr Schlafmütze wird folglich an 1,25 Tagen der Woche zu spät zur Arbeit kommen. Oder, besser ausgedrückt, Herr Schlafmütze kommt innerhalb von vier Arbeitswochen im Durchschnitt an fünf Tagen zu spät zur Arbeit.

2.2.3 Hypergeometrische Verteilung

Aufgabe 2.13: Konstruktion der hypergeometrischen Verteilung ○●●

In einer Urne seien $r \geq 1$ rote und $s \geq 1$ schwarze Kugeln. Es wird eine Stichprobe der Größe $n \leq \min(r, s)$ ohne Zurücklegen gezogen. Weiter sei $\mathbb{1}_{i,r}$ die Indikatorfunktion, die angibt, ob im i-ten Zug eine rote Kugel gezogen wurde oder nicht, siehe Aufgabe 2.9. Die zufällige Gesamtzahl der insgesamt gezogenen roten Kugeln sei

$$R := \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{i,r}.$$

(a) Berechnen Sie die Verteilung von $\mathbb{1}_{i,r}$ und schließen Sie daraus auf Erwartungswert und Varianz von $\mathbb{1}_{i,r}$.

(b) Zeigen Sie, dass die Familie $(\mathbb{1}_{i,r})_{1\leq i\leq n}$ vertauschbar ist.

(c) Berechnen Sie $\operatorname{Cov}(\mathbb{1}_{i,r}, \mathbb{1}_{j,r})$ für $i \neq j$.

(d) Schließen Sie daraus auf den Erwartungswert und die Varianz von R.

(e) Welche bekannte Verteilung besitzt R?

Lösung:

(a) Zunächst ist $\mathbb{P}(\mathbb{1}_{1,r} = 1) = \frac{r}{r+s} =: p$ und $\mathbb{P}(\mathbb{1}_{1,r} = 0) = \frac{s}{r+s} = 1 - p$. Mittels Fallunterscheidungsformel gilt

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\mathbb{1}_{2,r} = 1) &= \mathbb{P}(\mathbb{1}_{2,r} = 1|\mathbb{1}_{1,r} = 1)\mathbb{P}(\mathbb{1}_{1,r} = 1) + \mathbb{P}(\mathbb{1}_{2,r} = 1|\mathbb{1}_{1,r} = 0)\mathbb{P}(\mathbb{1}_{1,r} = 0)\\ &= \frac{r-1}{r+s-1}\cdot p + \frac{r}{r+s-1}\cdot(1-p) = p.\end{aligned}$$

Bedingt man auf das Ergebnis des vorigen Zuges, so kann man mit Hilfe einer Induktion direkt für alle $i \leq n$ zeigen

$$P(\mathbb{1}_{i,r} = 1) = p, \qquad P(\mathbb{1}_{i,r} = 0) = 1 - p.$$

Daher ist $\mathbb{1}_{i,r} \sim \operatorname{Ber}(p)$ verteilt. Daraus folgt sofort:

$$\mathbb{E}(\mathbb{1}_{i,r}) = p, \qquad \operatorname{Var}(\mathbb{1}_{i,r}) = p\,(1-p).$$

(b) Für die Vertauschbarkeit sei $J \subset \{1, 2, \ldots, n\}$ eine beliebige Teilmenge mit Kardinalität $\#J = k$. Dann gilt

$$\mathbb{P}\Big(\bigcap_{j\in J}\{\mathbb{1}_{j,r} = 1\}\Big) = \frac{r(r-1)\ldots(r-k+1)}{(r+s)(r+s-1)\ldots(r+s-k+1)} = \frac{r!(r+s-k)!}{(r+s)!(r-k)!} = \frac{\binom{r}{k}}{\binom{r+s}{k}}.$$

Die Wahrscheinlichkeit hängt nicht von den einzelnen Elementen, sondern nur von der Kardinalität von J ab.

(c) Dank der Vertauschbarkeit gilt für $i \neq j$

$$\begin{aligned}\operatorname{Cov}(\mathbb{1}_{i,r}, \mathbb{1}_{j,r}) &= \operatorname{Cov}(\mathbb{1}_{1,r}, \mathbb{1}_{2,r}) \\ &= \mathbb{E}(\mathbb{1}_{1,r} \cdot \mathbb{1}_{2,r}) - \mathbb{E}(\mathbb{1}_{1,r})^2 \\ &= \frac{r\,(r-1)}{(r+s)(r+s-1)} - p^2 = -\frac{p\,(1-p)}{r+s-1}.\end{aligned}$$

(d) Der Erwartungswert der Gesamtzahl gezogener roter Kugeln ist

$$\mathbb{E}(R) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(\mathbb{1}_{i,r}) = n\,p.$$

Wegen der Vertauschbarkeit gilt für $n \geq 2$

$$\begin{aligned}\operatorname{Var}(R) &= n\ \operatorname{Var}(\mathbb{1}_{1,r}) + 2\binom{n}{2}\operatorname{Cov}(\mathbb{1}_{1,r}, \mathbb{1}_{2,r}) \\ &= n\,p\,(1-p) - n\,(n-1)\,\frac{p\,(1-p)}{r+s-1} \\ &= n\,p\,(1-p)\left(1 - \frac{n-1}{r+s-1}\right) < n\,p\,(1-p).\end{aligned}$$

(e) Zunächst ist $\{R = k\} = \left\{\sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{i,r} = k\right\}$, $0 \leq k \leq n$, das Ereignis, bei dem genau k der Indikatorfunktionen Eins sind und $n-k$ Null. Dank der Vertauschbarkeit, siehe (b), ist

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(R = k) &= \binom{n}{k}\mathbb{P}\Big(\bigcap_{i=1}^{k}\{\mathbb{1}_{i,r} = 1\} \cap \bigcap_{i=k+1}^{n}\{\mathbb{1}_{i,r} = 0\}\Big) \\ &= \binom{n}{k}\frac{r\,(r-1)\ldots(r-k+1)s(s-1)\ldots(s-(n-k)+1)}{(r+s)(r+s-1)\ldots(r+s-n+1)} \\ &= \frac{\binom{r}{k}\binom{s}{n-k}}{\binom{r+s}{n}} = \mathcal{H}_{n,r,s}(\{k\}).\end{aligned}$$

Demnach ist R hypergeometrisch zu den Parametern (n, r, s) verteilt.

Bemerkung: Ebenso wie die Binomialverteilung zu den Parametern n und $p = \frac{r}{r+s}$, ist die hypergeometrische Verteilung $\mathcal{H}_{n,r,s}$ demnach eine Summe von n Bernoulli-verteilten Zufallsvariablen, die aber abhängig voneinander sind. Die beiden Verteilungen haben den gleichen Erwartungswert $n\,p$.

Aber die Varianz der hypergeometrischen Verteilung ist kleiner als die Varianz der Binomialverteilung: R ist konzentrierter um den Erwartungswert.

Lässt man r, s gleichzeitig gegen unendlich gehen, so dass das Verhältnis $p = r/(r+s)$ fest bleibt, ergibt sich im Limes eine Binomialverteilung.

Aufgabe 2.14: Rückfangmethode ○●●

In einem Teich möchte man die unbekannte Anzahl N der Fische schätzen. Zuerst fängt man genau r Fische, die markiert und wieder in den Teich zurückgeworfen werden. Nun fängt man ein zweites Mal genau n Fische und zählt die markierten Fische in dieser Stichprobe. Die Anzahl der markierten Fische beim zweiten Mal sei k.

(a) Nehmen Sie zunächst $r = 15$, $n = 10$ und $k = 5$ an. Berechnen Sie nun für $N \in \{26, 27, \ldots, 34\}$ die Wahrscheinlichkeit p_N, beim zweiten Mal k markierte Fische zu fangen, und schätzen Sie daraus die Anzahl der Fische im Teich.

Hinweis: *Betrachten Sie die Quotienten* $\frac{p_N}{p_{N-1}}$.

(b) Schätzen Sie für den allgemeinen Fall die Anzahl der Fische im Teich.

Lösung:

(a) p_N ist der Wert einer hypergeometrischen Verteilung, es gilt

$$p_N = \mathcal{H}_{n,r,N-r}(\{k\}) = \frac{\binom{r}{k}\binom{N-r}{n-k}}{\binom{N}{n}} = \frac{\binom{15}{5}\binom{N-15}{5}}{\binom{N}{10}}.$$

Für verschiedene N ergibt sich

N	26	27	28	29	30	31	32	33
$p_N \approx$	0,261	0,282	0,295	0,300	0,300	0,296	0,288	0,278

Es fällt auf, dass p_N zunächst monoton steigt und nach dem Maximum monoton fällt.

29 oder 30 Fische haben also die größte Wahrscheinlichkeit, beobachtet zu werden.

(b) Diese Eigenschaft lässt sich für den allgemeinen Fall nutzen, indem wir $\frac{p_N}{p_{N-1}}$ betrachten und das erste N finden, sodass dieser Quotient kleiner 1 ist. Dann ist die geschätzte Größe gegeben durch $N-1$.

$$\frac{p_N}{p_{N-1}} = \ldots = \frac{(N-r)(N-n)}{(N-r-n+k)N} = \begin{cases} \geq 1 & \text{falls } N \leq \frac{rn}{k} \\ \leq 1 & \text{falls } N \geq \frac{rn}{k} \end{cases}.$$

Schätze somit N als $\lfloor \frac{rn}{k} \rfloor$.

Bemerkung: Da der Fall $k = 0$ mit positiver Wahrscheinlichkeit eintritt, daraus aber $N = \infty$ folgt, ist die Methode in dieser Aufgabe nicht gut geeignet, um tatsächlich die Größe von Populationen zu bestimmen. In Aufgabe 5.11 wird eine Alternative vorgestellt und analysiert.

Aufgabe 2.15: Verlust beim Lotto spielen ○○●

Beim Lotto „6 aus 49“ ohne Zusatzzahl wird ab drei richtigen Zahlen ein Gewinn G ausgeschüttet, der sich aus nachstehender Tabelle[1] ergibt:

Anzahl der richtigen Zahlen	3	4	5	6
ausgeschütteter Gewinn in EUR	13,30	60,50	4 139,90	610 973,20

(a) Geben Sie die Verteilung von G an.

(b) Berechnen Sie den Erwartungswert von G.

(c) Was dürfte ein Lottoschein höchstens kosten, damit Sie mitspielen?

Lösung:

(a) Um die Verteilung von G zu bestimmen, ist es zunächst nötig, die Verteilung der Anzahl der richtigen Zahlen zu bestimmen. Bezeichne diese mit R. R ist hypergeometrisch verteilt, präziser

$$R \sim \mathcal{H}_{6,6,43}.$$

[1] Quoten von Mittwoch 17.08.2022

Damit folgt

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(G = 13{,}3) = \mathbb{P}(R = 3) &= \frac{8\,815}{499\,422} \approx 1{,}8\% \,, \\
\mathbb{P}(G = 60{,}5) &= \frac{645}{665\,896} \approx 0{,}1\% \,, \\
\mathbb{P}(G = 4\,139{,}9) &= \frac{43}{2\,330\,636} \approx 1{,}8 \cdot 10^{-3}\% \,, \\
\mathbb{P}(G = 610\,973{,}2) &= \frac{1}{13\,983\,816} \approx 7{,}2 \cdot 10^{-10}\% \,, \\
\mathbb{P}(G = 0) = \mathbb{P}(R = 0) + \mathbb{P}(R = 1) + \mathbb{P}(R = 2) &= \frac{245\,057}{249\,711} \approx 98{,}1\%.
\end{aligned}$$

(b) Mittels der bekannten Verteilung lässt sich der Erwartungswert direkt ausrechnen:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(G) &= 13{,}3 \cdot \frac{8\,815}{499\,422} + 60{,}5 \cdot \frac{645}{665\,896} + 4\,139{,}9 \cdot \frac{43}{2\,330\,636} + \frac{610\,973{,}2}{13\,983\,816} \\
&\approx 0{,}413.
\end{aligned}$$

(c) Die Frage ist sehr subjektiv und hängt von der persönlichen Risikobereitschaft ab. Der Erwartungswert gibt jedoch Auskunft darüber, dass bei einem Preis von 0,41 Euro oder weniger das Spiel zu Gunsten der Spieler steht. Ein Lottoschein erwartet dann einen Nettogewinn. Dies ist jedoch ebenfalls trügerisch, da man mit einer Wahrscheinlichkeit von ungefähr 98% nichts gewinnt und nur mit geringer Wahrscheinlichkeit hohe Gewinne erzielt. Erst nach vielen Spielen stellt sich der erwartete Gewinn ein (siehe Sektion 4.3, Gesetz der großen Zahlen).

Aufgabe 2.16: Ziehen bis zur k-ten weißen Kugel ○●●

In einer Urne sind w weiße und s schwarze Kugeln enthalten, wobei $w, s \geq 1$. Aus der Urne werde nun ohne Zurücklegen solange gezogen, bis $k \leq w$ weiße Kugeln gezogen wurden. Sei X die zufällige Anzahl der dazu notwendigen Ziehungen.

(a) Sei zunächst $w = s = 2$ und $k = 2$. Berechnen Sie die Verteilung von X in diesem Fall explizit.

(b) Geben Sie dann die Verteilung von X für den allgemeinen Fall an.

(c) Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz von X.

Lösung: Man definiere den Ergebnisraum

$$\Omega := \left\{(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{w+s}) \in \{0,1\}^{w+s} : \sum_{i=1}^{w+s} \omega_i = w\right\}$$

mit $\mathbb{P}$ als Gleichverteilung auf Ω. Dabei entspreche eine Null dem Ziehen einer schwarzen Kugel und Eins dem Ziehen einer weißen. Die Zufallsvariable X nimmt den Wert n an, wenn für ein $(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{w+s}) \in \Omega$ gilt $\omega_n = 1$ und $\sum_{i=1}^{n-1} \omega_i = k - 1$. Der Wertebereich ist $X(\Omega) = \{k, \ldots, s+k\}$.

(a) Zunächst gilt:

$$\begin{aligned}
\{X=2\} &= \{(w,w,s,s)\} && \Rightarrow \mathbb{P}(X=2) = \frac{1}{6}, \\
\{X=3\} &= \{(w,s,w,s),(s,w,w,s)\} && \Rightarrow \mathbb{P}(X=3) = \frac{1}{3}, \\
\{X=4\} &= \{(s,s,w,w),(s,w,s,w),(w,s,s,w)\} && \Rightarrow \mathbb{P}(X=4) = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

(b) Das Ereignis $\{X = n\}$ tritt ein, wenn in den ersten $n-1$ Zügen genau $k-1$ weiße Kugeln gezogen wurden und dann im n-ten Zuge eine weiße Kugel gezogen wird. Damit ergibt sich als Wahrscheinlichkeit

$$\mathbb{P}(X = n) = \frac{\binom{n-1}{k-1}\binom{w+s-n}{w-k}}{\binom{w+s}{w}}$$

(c) Der Erwartungswert ist nun nach Definition

$$\begin{aligned}
\binom{w+s}{w}\mathbb{E}(X) &= \sum_{n=k}^{s+k} n \cdot \binom{n-1}{k-1}\binom{w+s-n}{w-k} = \sum_{n=k}^{s+k} k \cdot \binom{n}{k}\binom{w+s-n}{w-k} \\
&= k \sum_{m=0}^{s} \binom{m+k}{k}\binom{w+s-m-k}{w-k} = k\binom{w+s+1}{w+1}
\end{aligned}$$

nach Aufgabe 1.10. Daher $\mathbb{E}(X) = k\,\frac{w+s+1}{w+1}$.

Für die Berechnung der Varianz benutzt man eine Variante der Zerlegungsformel für Varianzen

$$\operatorname{Var}(X) = \mathbb{E}(X(X+1)) - \mathbb{E}(X)(1 + \mathbb{E}(X)).$$

Dann ist wieder nach Aufgabe 1.10

$$\begin{aligned}\binom{w+s}{w}\mathbb{E}(X(X+1)) &= \sum_{n=k}^{s+k} n\,(n+1)\binom{n-1}{k-1}\binom{w+s-n}{w-k}\\ &= k\,(k+1)\sum_{m=0}^{s}\binom{m+k+1}{k+1}\binom{w+s-k-m}{w-k}\\ &= k\,(k+1)\binom{w+s+2}{w+2}.\end{aligned}$$

Daher ist $\mathbb{E}(X(X+1)) = k\,(k+1)\frac{(w+s+1)(w+s+2)}{(w+1)(w+2)}$.

Durch Einsetzen erhält man die Varianz

$$\mathrm{Var}(X) = k\,\frac{s\,(w+1-k)(w+s+1)}{(w+1)^2(w+2)}.$$

Bemerkung: Die hier entstandene Verteilung heißt *negative hypergeometrische Verteilung* zu den Parametern w, s und k, und ist mit der hypergeometrischen Verteilung eng verwandt. Siehe auch Aufgabe 2.40 für eine alternative Berechnung des Erwartungswerts im Fall $k = 1$.

In der Tat genügt es, den Erwartungswert für $k = 1$ zu berechnen, denn X lässt sich als Summe von korrelierten, vertauschbaren Zufallsvariablen schreiben. Ein analoges Resultat ergibt sich im verwandten Fall der hypergeometrischen Verteilung, siehe Aufgabe 2.13.

2.2.4 Geometrische und negative Binomialverteilung

Aufgabe 2.17: Erzeugende Funktion der geometrischen Verteilung ○●●

Gegeben seien die unabhängigen Zufallsvariablen

$$X \sim \mathrm{Geo}(p) \quad \text{und} \quad Y \sim \mathrm{Geo}(p) \quad \text{mit} \quad p \in (0,1).$$

(a) Berechnen Sie die erzeugende Funktion von X.

(b) Berechnen Sie die erzeugende Funktion von $X + Y$.

(c) Definieren Sie die Zufallsvariable $Z \sim \mathrm{NegBin}(r, p)$ mit $r \in \mathbb{N}$. Berechnen Sie die erzeugende Funktion von Z. Was bemerken Sie?

Lösung:

(a) Direktes Einsetzen in die Definition führt zu

$$G_X(z) = \mathbb{E}(z^X) = pz \sum_{k=1}^{\infty} ((1-p)z)^{k-1} = \frac{pz}{1-(1-p)z}, \; z \in [0,1].$$

(b) Da X,Y unabhängig und identisch verteilt sind gilt nach (a)

$$G_{X+Y}(z) = G_X(z) \cdot G_Y(z) = G_X(z)^2 = \left(\frac{pz}{1-(1-p)z}\right)^2.$$

(c) Mit der Zähldichte der hypergeometrischen Verteilung folgt

$$G_Z(z) = p^r \cdot \sum_{i=r+1}^{\infty} \binom{i-1}{r-1} ((1-p)z)^{i-r} = \left(\frac{pz}{1-(1-p)z}\right)^r = G_X(z)^r$$

mittels der Binomialreihe für negative Koeffizienten. Daher ist eine (r,p)-negativ binomialverteilte Zufallsvariable als Summe r unabhängigen geometrisch verteilten Zufallsvariablen interpretierbar.

Aufgabe 2.18: Faktorielle Momente der geometrischen Verteilung ○●●

Sei X eine Zufallsvariable und $k \in \mathbb{N}$. Falls $\mathbb{E}(|X|^k) < \infty$ definiert man das *faktorielle Moment k-ter Ordnung* durch

$$\mathbb{E}((X)_k) := \mathbb{E}(X(X-1)\ldots(X-k)).$$

Man setzt noch $\mathbb{E}((X)_0) := 1$.

(a) Sei X eine $\mathbb{N}$-wertige Zufallsvariable. Zeigen Sie, dass ihre erzeugende Funktion $G_X(z) := \mathbb{E}(z^X), z \in [0,1]$, sich wie folgt darstellen lässt:

$$G_X(z) = \sum_{k \geq 0} \frac{\mathbb{E}((X)_k)}{k!} (z-1)^k.$$

Nehmen Sie an, alle Momente existieren.

(b) Sei nun $X \sim \mathrm{Geo}(p)$, $p \in (0,1)$.

Berechnen Sie direkt ihre erzeugende Funktion G_X.

Führen Sie dann eine Taylor-Entwicklung von $G_X(z)$ an der Stelle $z = 1$ aus, um mit Hilfe von (a) auf die faktoriellen Momente der geometrischen Verteilung zu schließen.

Lösung:

(a) Mit Hilfe des Binomialsatzes und einer Umordnung der Summationsreihenfolge ergibt sich

$$\begin{aligned} G_X(z) &= \sum_{n=0}^{+\infty}(z-1+1)^n \mathbb{P}(X=n) = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(z-1)^k \mathbb{P}(X=n) \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(z-1)^k}{k!}\sum_{n=k}^{+\infty}(n)_k \mathbb{P}(X=n) = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\mathbb{E}((X)_k)}{k!}(z-1)^k. \end{aligned}$$

Man benutzt dabei die Notation: $(n)_k := n(n-1)\dots(n-k)$.

(b) Die erzeugende Funktion der geometrischen Verteilung ist mit Hilfe der geometrischen Reihe gegeben durch:

$$G_X(z) = pz\sum_{k=1}^{\infty}((1-p)z)^{k-1} = \frac{pz}{1-(1-p)z}.$$

Da für die Taylor-Entwicklung von G_X ihre Ableitungen benötigt werden, zerlegt man sie in ein Produkt von $f(z) := pz$ mit $g(z) := (1-(1-p)z)^{-1}$.

Zunächst ist

$$g^{(k)}(z) = \frac{d^k}{dz^k}(1-(1-p)z)^{-1} = \frac{k!(1-p)^k}{(1-(1-p)z)^{k+1}}.$$

Da $f(z)$ ein Monom ersten Grades ist, ist nur ihre erste Ableitung verschieden von Null.

Man benutzt nun die allgemeine Produktregel, die durch Induktion leicht zu beweisen ist:

$$\begin{aligned} \frac{d^k}{dz^k}\big(f(z)\,g(z)\big) &= \sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}\frac{d^{k-i}}{dz^{k-i}}f(z)\,\frac{d^i}{dz^i}g(z) \\ &= \binom{k}{k-1}\frac{d}{dz}f(z)\frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}}g(z) + \binom{k}{k}f(z)\frac{d^k}{dz^k}g(z) \\ &= kp\frac{(k-1)!(1-p)^{k-1}}{(1-(1-p)z)^k} + pz\frac{k!(1-p)^k}{(1-(1-p)z)^{k+1}} \\ &= k!p\frac{(1-p)^k}{(1-(1-p)z)^k}\Big(\frac{1}{1-p} + \frac{z}{1-(1-p)z}\Big). \end{aligned}$$

Einsetzen der Entwicklungsstelle $z = 1$ ergibt

$$\frac{d^k}{dz^k}\big(f(z)\,g(z)\big)\Big|_{z=1} = k!p\frac{(1-p)^k}{p^k}\Big(\frac{1}{1-p} + \frac{1}{p}\Big) = \frac{k!}{1-p}\Big(\frac{1}{p} - 1\Big)^k.$$

Damit ist die Taylor-Reihen-Darstellung von $G_X(z)$ an der Stelle $z = 1$ gegeben durch

$$G_X(z) = 1 + \frac{1}{1-p} \sum_{k=1}^{+\infty} k! \Big(\frac{1}{p} - 1\Big)^k \frac{(z-1)^k}{k!}.$$

Ein Koeffizientenvergleich mit der allgemeinen Summendarstellung aus (a) zeigt nun für $k \geq 1$

$$\mathbb{E}((X)_k) = \frac{k!}{1-p} \Big(\frac{1}{p} - 1\Big)^k.$$

Aufgabe 2.19: Minimum geometrisch verteilter Zufallsvariablen ○●●

Seien $X_1, \dots, X_n$, $n \geq 2$, unabhängige Zufallsvariablen mit $X_i \sim \mathrm{Geo}(p_i)$, $p_i \in (0, 1)$.

Bestimmen Sie die Verteilung des Minimums $m_n := \min(X_1, \dots, X_n)$.

Lösung: Für eine geometrisch verteilte Zufallsvariable X zum Parameter $p \in (0, 1)$ gilt mit Hilfe der geometrischen Reihe:

$$\mathbb{P}(X > k) = p \sum_{i=k+1}^{\infty} (1-p)^{i-1} = p\,(1-p)^k \frac{1}{p} = (1-p)^k,\ k \in \mathbb{N}.$$

Für $k \in \mathbb{N}$ gilt nun

$$\begin{aligned} 1 - F_{m_n}(k) = \mathbb{P}(m_n > k) = \mathbb{P}\Big(\bigcap_{i=1}^{n} \{X_i > k\}\Big) &= \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i > k) \\ = \prod_{i=1}^{n} (1-p_i)^k &= \Big(\prod_{i=1}^{n} (1-p_i)\Big)^k. \end{aligned}$$

Da die Verteilungsfunktion F_{m_n} die Verteilung von m_n eindeutig bestimmt, hat nun m_n selbst wieder eine geometrische Verteilung mit Parameter $p := 1 - \prod_{i=1}^{n}(1-p_i)$.

Aufgabe 2.20: Wartezeit im Urnenmodell ○●●

In einer Urne seien r rote und b blaue Kugeln. Nun werden $n \leq \min(r, b)$ Kugeln ohne Zurücklegen und mit Beachtung der Reihenfolge gezogen. Die Zufallsvariable X gebe an, bei welchem Zug die erste rote Kugel gezogen wurde. Falls keine rote Kugel gezogen wurde, setzen Sie $X = +\infty$.

(a) Sei zunächst $n = 3$, $r = 3$ und $b = 3$. Bestimmen Sie die Verteilung von X.

(b) Bestimmen Sie die Verteilung von X im allgemeinen Fall.

(c) Wie verhält sich die Verteilung von X, wenn $r, b \to \infty$ mit $\frac{r}{r+b} \to p \in (0, 1)$?

Lösung:

(a) Die Wahrscheinlichkeit, dass als erstes eine rote Kugel gezogen wird, ist $\frac{3}{6}$. Damit ergibt sich direkt

$$\mathbb{P}(X = 1) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 50\%.$$

Die Wahrscheinlichkeit zuerst eine blaue Kugel zu ziehen ist ebenfalls $\frac{3}{6}$, da diese nicht zurückgelegt wird beträgt die Wahrscheinlichkeit danach eine rote Kugel zu ziehen $\frac{3}{5}$. Damit und analog für die anderen Fälle ergibt sich

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X = 2) &= \frac{3}{6} \cdot \frac{3}{5} = \frac{3}{10} = 30\%,\\
\mathbb{P}(X = 3) &= \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{20} = 15\%,\\
\mathbb{P}(X = +\infty) &= \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{20} = 5\%.
\end{aligned}$$

(b) Obiges Vorgehen lässt sich auf den allgemeinen Fall übertragen. Die Zähldichte von X kann so rekursiv berechnet werden. Definieren Sie für $k \in \mathbb{N}$ das Ereignis

$$R_k \mathrel{\widehat{=}} \text{„ die } k\text{-te Kugel ist rot “}.$$

Dann gilt für $0 < k \leq n$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X = k) &= \mathbb{P}(R_k \cap R_{k-1} \cap R_{k-2} \cap \ldots \cap R_1)\\
&= \underbrace{\mathbb{P}\left(R_k \,\middle|\, \bigcap_{i=1}^{k-1} R_i^c\right)}_{=\frac{r}{r+b-(k-1)}} \cdot \underbrace{\mathbb{P}\left(R_{k-1}^c \,\middle|\, \bigcap_{i=1}^{k-2} R_i^c\right)}_{=1-\frac{r}{r+b-(k-2)}} \cdot \ldots \cdot \underbrace{\mathbb{P}(R_2^c | R_1^c)}_{=1-\frac{r}{r+b-1}} \cdot \underbrace{\mathbb{P}(R_1^c)}_{=1-\frac{r}{r+b}}\\
&= \frac{r}{r+b-(k-1)} \prod_{i=0}^{k-2} \left(1 - \frac{r}{r+b-i}\right).
\end{aligned}$$

Schließlich gilt analog

$$\mathbb{P}(X = +\infty) = \prod_{i=0}^{r+b-1} \left(1 - \frac{r}{r+b-i}\right).$$

(c) Geht nun $\frac{r}{r+b}$ gegen p für $r, b \to \infty$, so folgt für festes $i \in \mathbb{N}$

$$\frac{r}{r+b-(i-1)} \to p.$$

Daher gilt für $0 < k \leq n$

$$\mathbb{P}(X = k) = p \cdot (1-p)^{k-1} \quad \text{und} \quad \mathbb{P}(X = +\infty) = (1-p)^n.$$

Bemerkung: Es gilt $\mathbb{P}(X = +\infty) = \mathbb{P}(T > n) = 1 - F_T(n)$ für eine zum Parameter $p \in (0,1)$ geometrisch verteilte Zufallsvariable T. Die Verteilung der Wartezeit $X\mathbb{1}_{\{X<+\infty\}}$ nennt man daher auch *trunkierte geometrische Verteilung*.

Man vergleiche die Ergebnisse auch mit Aufgabe 2.19.

Aufgabe 2.21: Klausur bestehen ○○●

In einem Traumland darf ein Student so lange versuchen, eine Klausur zu bestehen, bis er zum ersten Mal Erfolg hat. Die Versuche sind unabhängig und die Wahrscheinlichkeit eines Erfolgs ist konstant und beträgt $\frac{2}{3}$ pro Versuch.

(a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass er höchstens k Versuche braucht, um die Klausur zu bestehen.

(b) Wie viele Versuche braucht der Student, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 95% die Klausur zu bestehen?

Lösung:

(a) Sei X die Zufallsvariable, die angibt, welcher der erste erfolgreiche Versuch ist. Dann gilt $X \sim \text{Geo}\left(\frac{2}{3}\right)$. Somit folgt

$$\mathbb{P}(X \leq k) = 1 - \mathbb{P}(X > k) = 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^k$$

nach der Lösung der Aufgabe 2.19. Somit ist die Wahrscheinlichkeit, nach höchstens k Versuchen bestanden zu haben, durch $1 - \left(\frac{1}{3}\right)^k$ gegeben.

(b) Gesucht ist $k \in \mathbb{N}$, sodass $\mathbb{P}(X \leq k) \geq 0{,}95$. Mit dem Ergebnis aus (a) ergibt sich

$$\mathbb{P}(X \leq k) = 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^k \geq 0{,}95$$
$$\Leftrightarrow 0{,}05 \geq \left(\frac{1}{3}\right)^k \Leftrightarrow \frac{\ln(0{,}05)}{\ln(\frac{1}{3})} \leq k.$$

Es gilt $\frac{\ln(0{,}05)}{\ln(\frac{1}{3})} \approx 2{,}72$. Damit benötigt der Student mindestens drei Versuche, um mit Wahrscheinlichkeit größer 95 % die Klausur zu bestehen.

2.2.5 Poissonverteilung

Aufgabe 2.22: Erzeugende Fkt. und Momente der Poisson-Verteilung ○○●

Berechnen Sie die erzeugende Funktion einer Poisson-verteilten Zufallsvariable $X \sim \mathrm{Poi}(\lambda)$ für $\lambda > 0$ und leiten Sie daraus Erwartungswert und Varianz ab.

Lösung: Anwenden der Definition der erzeugenden Funktion führt zu

$$G_X(z) = \mathbb{E}(z^X) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k\, \mathbb{P}(X = k) = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z\lambda)^k}{k!} = e^{\lambda(z-1)},\ z \in [0, 1].$$

Durch Ableiten findet man

$$\mathbb{E}(X) = G'_X(1) = \lambda,$$
$$\mathrm{Var}(X) = G''_X(1) + G'_X(1)(1 - G'_X(1)) = \lambda.$$

Aufgabe 2.23: Abfall einer Poisson-Verteilung ○○●

Es sei X eine zum Parameter λ Poisson-verteilte Zufallsvariable. Zeigen Sie, dass für alle $a > 0$ gilt

$$\mathbb{P}(X \geq a) \leq \frac{\lambda(\lambda + 1)}{a^2}.$$

Lösung: Man hat $\mathbb{E}(X) = \mathrm{Var}(X) = \lambda$, siehe Aufgabe 2.22.

Nutze Markov-Ungleichung mit $h(x) := x^2$, dann folgt

$$\mathbb{P}(X \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}(h(X))}{h(a)} = \frac{\mathbb{E}(X^2)}{a^2} = \frac{\mathrm{Var}(X) + (\mathbb{E}(X))^2}{a^2} = \frac{\lambda + \lambda^2}{a^2}.$$

2.2.6 Sonstiges

Aufgabe 2.24: Gewinnpläne bei Lotterie ○○●

Um Geld für eine Exkursion zu sammeln, wollen Schüler eine Lotterie veranstalten. Sie gehen davon aus, dass sie an die Eltern 100 Lose für je 5 Euro verkaufen werden. Die Lose sind von 1 bis 100 nummeriert. Sie überlegen sich drei verschiedene Gewinnpläne:

- Gewinnplan A: 100 Euro auf Los 1, 50 Euro auf Los 2, 25 Euro auf Los 3. Die restlichen Lose sind Nieten.
- Gewinnplan B: 25 Euro auf jedes Los, dessen Nummer durch 13 teilbar ist. Die restlichen Lose sind Nieten.
- Gewinnplan C: 17,50 Euro auf jedes Los mit der Endziffer 0. Die restlichen Lose sind Nieten.

Die Zufallsvariablen G_A, G_B, G_C beschreiben den Gewinn eines Loses unter dem jeweiligen Gewinnplan.

(a) Geben Sie die Verteilungen von G_A, G_B, G_C an.

(b) Berechnen Sie die Erwartungswerte und Varianzen von G_A, G_B, G_C.

(c) Welchen Gewinnplan würden Sie aus Sicht der Eltern und welchen aus Sicht der Schüler bevorzugen?

Lösung:

(a) Da jede Losnummer die gleiche Wahrscheinlichkeit hat ergibt sich

$$\mathbb{P}(G_A = k) = \begin{cases} \frac{1}{100} & k \in \{25, 50, 100\} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}, \quad \mathbb{P}(G_B = k) = \begin{cases} \frac{7}{100} & k = 25 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$
$$\mathbb{P}(G_C = k) = \begin{cases} \frac{1}{10} & k = 17{,}5 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

(b) Aus der Verteilung ergibt sich direkt

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(G_A) &= 25 \cdot \frac{1}{100} + 50 \cdot \frac{1}{100} + 100 \cdot \frac{1}{100} = 1{,}75\,, \\ \mathbb{E}(G_B) &= 25 \cdot \frac{7}{100} = 1{,}75\,, \\ \mathbb{E}(G_C) &= 17{,}5 \cdot \frac{1}{10} = 1{,}75. \end{aligned}$$

Die Erwartungswerte stimmen überein. Für die Varianz ergibt sich

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(G_A^2) &= 25^2 \cdot \frac{1}{100} + 50^2 \cdot \frac{1}{100} + 100^2 \cdot \frac{1}{100} = 131{,}25\\
\mathbb{E}(G_B^2) &= 25^2 \cdot \frac{7}{100} = 43{,}75\\
\mathbb{E}(G_C^2) &= 17{,}5^2 \cdot \frac{10}{100} = 30{,}625
\end{aligned}$$

und somit

$$\operatorname{Var}(G_A) = \mathbb{E}(G_A^2) - \mathbb{E}(G_A)^2 = \frac{2051}{16}, \quad \operatorname{Var}(G_B) = \frac{651}{16}, \quad \operatorname{Var}(G_C) = \frac{441}{16}.$$

(c) Aus Sicht der Schüler ist nur der Gesamtgewinn der Lotterie relevant. In jedem der Gewinnpläne ist der Gesamtgewinn $500 - 175 = 325$ Euro. Somit ist keiner der Gewinnpläne für die Schüler besser. Die Eltern können auch für jeden Gewinnplan im Durchschnitt den gleichen Gewinn von $1{,}75 - 5 = -3{,}25$ Euro erwarten. Das Risiko ist jedoch in den Gewinnplänen unterschiedlich. Bei größerer Varianz steigt die Wahrscheinlichkeit für einen höheren Gewinn, aber ebenso für einen niedrigeren. Es gibt keinen eindeutig besten Gewinnplan für die Eltern, dieser ist abhängig von der individuellen Risikobereitschaft.

Bemerkung: Wie würden sich die Überlegungen aus Schülersicht ändern, wenn nicht alle 100 Lose verkauft werden?

Aufgabe 2.25: Maximal- und Minimalkosten einer Versicherung ○●●

Eine Versicherung möchte abschätzen, mit welcher minimalen und maximalen Schadenshöhe in einem Versicherungsjahr zu rechnen ist. Pro Jahr ereignen sich N Schäden, wobei N eine positive, integrierbare Zufallsvariable mit Werten in $\mathbb{N}$ sei. Ein Schaden verursacht Kosten, die wie die nicht-negative, integrierbare diskrete Zufallsvariable X verteilt sind. Es sei die Verteilungsfunktion F_X bekannt. Weiter seien die verursachten Kosten $(X_i)_{i\geq 1}$ unabhängig voneinander und von N, sowie $X_i \sim X$.

(a) Berechnen Sie die Verteilungsfunktion der Zufallsvariablen

$$M := \max_{1\leq i\leq N}\{X_i\}$$

und leiten Sie daraus einen Ausdruck für die Verteilung von M her.

(b) Berechnen Sie die Verteilungsfunktion der Zufallsvariablen

$$m := \min_{1\leq i\leq N}\{X_i\}$$

und leiten Sie daraus einen Ausdruck für die Verteilung von m her.

Lösung:

(a) Nach Aufgabe 2.5, gilt für $n \in \mathbb{N}$ und alle $t \in \mathbb{R}^+$

$$\mathbb{P}(M \leq t | N = n) = F_X(t)^n.$$

Nach dem Satz der totalen Wahrscheinlichkeit ist

$$F_M(t) = \mathbb{P}(M \leq t) = \sum_{n=0}^{\infty} F_X(t)^n \mathbb{P}(N = n) = G_N(F_X(t)).$$

Da M eine diskrete Zufallsvariable ist, folgt

$$\mathbb{P}(M = t) = \mathbb{P}(M \leq t) - \mathbb{P}(M < t) = G_N(F_X(t)) - G_N(F_X(t^-)).$$

(b) Wie in der vorigen Teilaufgabe ist

$$1 - F_m(t) = \mathbb{P}(m > t) = \sum_{n=0}^{\infty}(1 - F_X(t))^n \mathbb{P}(N = n) = G_N(1 - F_X(t)).$$

Daher ist $F_m(t) = 1 - G_N(1 - F_X(t))$ und analog wie vorher

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(m = t) &= \mathbb{P}(m \leq t) - \mathbb{P}(m < t)\\ &= 1 - G_N(1 - F_X(t)) - (1 - G_N(1 - F_X(t^-)))\\ &= G_N(1 - F_X(t^-)) - G_N(1 - F_X(t)).\end{aligned}$$

Aufgabe 2.26: Erste Momente definieren keine eindeutige Verteilung ○●●

Definieren Sie zwei Zufallsvariablen, welche

(a) den gleichen Erwartungswert, aber verschiedene Varianzen haben,

(b) verschiedene Erwartungswerte, aber die gleiche Varianz haben,

(c) den gleichen Erwartungswert und Varianz, aber unterschiedliche Verteilungen haben.

Lösung:

(a) Man wähle eine beliebige zentrierte Zufallsvariable X, die nicht konstant ist. Zum Beispiel

$$\mathbb{P}(X = 1) = \frac{1}{2} = \mathbb{P}(X = -1).$$

Weiter sei $Y := 2X$. Dann gilt

$$\mathbb{E}(Y) = 2\mathbb{E}(X) = 0 = \mathbb{E}(X).$$

Man hat aber

$$\mathrm{Var}(Y) = \mathrm{Var}(2X) = 4\,\mathrm{Var}(X) \neq \mathrm{Var}(X),$$

da $\mathrm{Var}(X) \neq 0$.

(b) Man wähle eine beliebige Zufallsvariable X und eine reelle Konstante $a \neq 0$. Weiter definiere man die Zufallsvariable $Y := X + a$. Es gilt $\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(X) + a \neq \mathbb{E}(X)$, aber $\mathrm{Var}(Y) = \mathrm{Var}(X)$.

(c) Man wähle die zentrierte Zufallsvariable X gleichverteilt auf $\{-1, 1\}$:

$$\mathbb{P}(X = -1) = \frac{1}{2} = \mathbb{P}(X = 1).$$

Weiter definiere man die zentrierte Zufallsvariable Y mit Werten in $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$, so dass

$$\mathbb{P}(Y = -1) = \mathbb{P}(Y = 1) = p_1, \quad \mathbb{P}(Y = -2) = \mathbb{P}(Y = 2) = p_2, \quad p_1 + p_2 < 1.$$

Bestimme nun p_1, p_2, sodass die Varianzen ebenso übereinstimmen:

$$\mathrm{Var}(Y) = 2p_1 + 8p_2 = \mathrm{Var}(X) = 1.$$

Man hat daher als Lösungen alle Parameter (p_1, p_2), die $2p_1 + 8p_2 = 1$ erfüllen.

Aufgabe 2.27: Alternative Darstellung des Erwartungswerts ○●●

Sei X eine $\mathbb{N}_0$-wertige Zufallsvariable. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(a) $\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(X > k) = \sum_{k=0}^{\infty} (1 - F_X(k))$.

(b) $\mathbb{E}(X(X-1)) = 2\sum_{k=1}^{\infty} k\,\mathbb{P}(X > k) = 2\sum_{k=1}^{\infty} k\,(1 - F_X(k))$.

Lösung:

(a) Durch Vertauschen der Summationsreihenfolge, siehe Abbildung 2.1, folgt

$$\sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(X > k) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=k+1}^{\infty} \mathbb{P}(X = i) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{i-1} \mathbb{P}(X = i) = \sum_{i=1}^{\infty} i\,\mathbb{P}(X = i) = \mathbb{E}(X).$$

(b) Man benutzt $\sum_{k=1}^{n} k = n(n+1)/2$ und argumentiert ähnlich wie in (a):

$$\begin{aligned} 2\sum_{k=1}^{\infty} k\,\mathbb{P}(X > k) &= 2\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=k+1}^{\infty} k\,P(X = i) = 2\sum_{i=2}^{\infty} \Big(\sum_{k=1}^{i-1} k\Big) \mathbb{P}(X = i) \\ &= \sum_{i=2}^{\infty} i\,(i-1)\,\mathbb{P}(X = i) = \mathbb{E}(X(X-1)). \end{aligned}$$

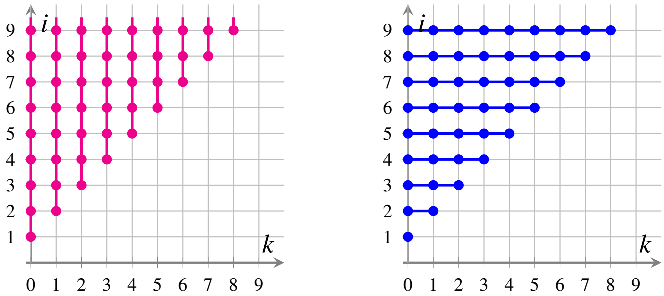


Abbildung 2.1: Äquivalente Summationsreihenfolgen.

2.3 Gemeinsame und bedingte Verteilung, Marginalverteilung

Aufgabe 2.28: Gemeinsame Verteilung aus bedingten Verteilungen ○●●

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $X = (X_1, X_2) : \Omega \to \{0,1\}^2$ ein Zufallsvektor. Gegeben sind die bedingten Wahrscheinlichkeiten

$$\mathbb{P}(X_1 = 0 \,|\, X_2 = 0) = \frac{1}{3}, \quad \mathbb{P}(X_1 = 1 \,|\, X_2 = 0) = \frac{2}{3},$$

$$\mathbb{P}(X_2 = 0 \,|\, X_1 = 0) = \frac{1}{5}, \quad \mathbb{P}(X_2 = 1 \,|\, X_1 = 0) = \frac{4}{5}.$$

(a) Bestimmen Sie alle möglichen Verteilungen von $X = (X_1, X_2)$, welche diesen Wahrscheinlichkeiten genügen.

(b) Berechnen Sie für alle möglichen Verteilungen die fehlenden bedingten Wahrscheinlichkeiten.

(c) Es seien nun X_1, X_2 als unabhängig angenommen. Wiederholen Sie damit die obigen beiden Aufgaben.

Lösung:

(a) Zur besseren Übersicht definieren Sie für $i, j \in \{0, 1\}$

$$p_{i,j} := \mathbb{P}(X_1 = i \,|\, X_2 = j), \quad q_{i,j} := \mathbb{P}(X_2 = i \,|\, X_1 = j).$$

Dann gilt

$$p_{0,0} = \frac{1}{3}, \quad p_{1,0} = \frac{2}{3}, \quad q_{0,0} = \frac{1}{5}, \quad q_{1,0} = \frac{4}{5}.$$

Zu berechnen ist nun $\mathbb{P}((X_1, X_2) = (i, j))$ für alle $i, j \in \{0, 1\}$.

Es gilt zum einen

$$\mathbb{P}((X_1, X_2) = (0,0)) = p_{0,0}\mathbb{P}(X_2 = 0) = \frac{1}{3}\mathbb{P}(X_2 = 0)$$

und zum anderen aber auch

$$\mathbb{P}((X_1, X_2) = (0,0)) = q_{0,0}\mathbb{P}(X_1 = 0) = \frac{1}{5}\mathbb{P}(X_1 = 0).$$

Der Vergleich liefert nun

$$\mathbb{P}(X_2 = 0) = \frac{3}{5}\mathbb{P}(X_1 = 0).$$

Zur weiteren Übersicht definieren Sie im folgenden $a := \mathbb{P}(X_1 = 0) \in [0,1]$.

Es gilt somit $\mathbb{P}(X_2 = 0) = \frac{3}{5}a$. Wie oben ergibt sich durch die beiden verschiedenen Ansätze

$$\begin{aligned}\mathbb{P}((X_1, X_2) = (1,0)) = p_{1,0}\mathbb{P}(X_2 = 0) &= \frac{2}{5}a \\ &= q_{0,1}\mathbb{P}(X_1 = 1) = q_{0,1}(1-a).\end{aligned}$$

Der Vergleich liefert nun $q_{0,1} = \frac{2a}{5(1-a)}$. Schließlich folgt analog

$$\begin{aligned}\mathbb{P}((X_1, X_2) = (0,1)) = p_{0,1}\mathbb{P}(X_2 = 1) &= p_{0,1}(1 - \frac{3}{5}a) \\ &= q_{1,0}P(X_1 = 0) = \frac{4}{5}\mathbb{P}(X_1 = 0) = \frac{4}{5}a\end{aligned}$$

und somit $p_{0,1} = \frac{\frac{4}{5}a}{1-\frac{3}{5}a}$. Damit $p_{0,1} \in [0,1]$ muss $a \in [0, \frac{5}{7}]$ gelten. Zudem muss $a \neq 0$ gelten, da sonst die entsprechenden bedingten Wahrscheinlichkeiten nicht definiert wären. Die allgemeine Lösung ergibt sich nun für $a \in (0, \frac{5}{7}]$ als

$$(\mathbb{P}((X_1, X_2) = (i,j)))_{i,j\in\{0,1\}} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} a & 4a \\ 2a & 5-7a \end{pmatrix}.$$

(b) Die fehlenden Wahrscheinlichkeiten wurden schon berechnet und sind

$$p_{0,1} = \frac{\frac{4}{5}a}{1-\frac{3}{5}a}, \quad p_{1,1} = 1 - p_{0,1}, \quad q_{0,1} = \frac{2a}{5(1-a)}, \quad q_{1,1} = 1 - q_{0,1}.$$

(c) Wenn X_1, X_2 unabhängig sind, gilt mit den obigen Ergebnissen

$$\frac{1}{5}a = \mathbb{P}((X_1, X_2) = (0,0)) = \mathbb{P}(X_1 = 0)\mathbb{P}(X_2 = 0) = \frac{3}{5}a^2.$$

Somit ist dann

$$0 = 3a^2 - a = 3a(a - \frac{1}{3}) \Rightarrow a \in \{0, \frac{1}{3}\}.$$

Der Fall $a = 0$ ist wie oben ausgeschlossen. Somit folgt

$$(\mathbb{P}((X_1, X_2) = (i, j))_{i,j\in\{0,1\}} = \frac{1}{15}\begin{pmatrix} a & 4a \\ 2a & 8a \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2.29: Unabhängigkeit und Marginalverteilungen ○○●

Sei (X, Y) ein Zufallsvektor, dessen Verteilung gegeben ist durch

X \ Y	-1	0	1
0	0	1/8	1/8
1	1/6	1/8	5/24
2	1/6	1/12	0

(a) Bestimmen Sie die Marginalverteilungen von X und Y. Benennen Sie diese Verteilungen.

(b) Bestimmen Sie die Verteilung von XY und $X + Y$.

(c) Bestimmen Sie, ob X und Y unabhängig sind.

Lösung:

(a) Die Verteilung von X beziehungsweise Y lässt sich übersichtlich in der Tabelle als Marginalverteilung (auch Randverteilung genannt) darstellen. Dazu werden jeweils die Zeilen- beziehungsweise Spalteneinträge addiert, daher ist

$$\mathbb{P}(X = 0) = \mathbb{P}(X = 0, Y = -1) + \mathbb{P}(X = 0, Y = 0) + \mathbb{P}(X = 0, Y = 1) = \frac{1}{4}$$

und analog für die anderen Einträge. Somit ergibt sich insgesamt

X \ Y	-1	0	1	
0	0	1/8	1/8	1/4
1	1/6	1/8	5/24	1/2
2	1/6	1/12	0	1/4
	1/3	1/3	1/3	1

Folglich ist $X \sim \mathrm{Bin}\left(2, \frac{1}{2}\right)$ und Y ist gleichverteilt auf $\{-1, 0, 1\}$.

(b) Die Zähldichte von XY lässt sich wie folgt berechnen:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(XY=-2) &= \mathbb{P}(X=2, Y=-1) = \frac{1}{6}, \\
\mathbb{P}(XY=0) &= \mathbb{P}((X,Y) \in \{(0,-1),(0,0),(0,1),(1,0)\}) \\
&= \mathbb{P}(X=0, Y=-1) + \mathbb{P}(X=0, Y=0) + \mathbb{P}(X=0, Y=1) \\
&\quad + \mathbb{P}(X=1, Y=0) + \mathbb{P}(X=2, Y=0) = \frac{11}{24}.
\end{aligned}$$

Analog lassen sich die restlichen Werte berechnen und man benutzt die gleiche Methode für $X+Y$. Insgesamt ergeben sich folgende Verteilungen

k	-2	-1	0	1	2
$\mathbb{P}(XY=k)$	$1/6$	$1/6$	$11/24$	$5/24$	0

k	-1	0	1	2	3
$\mathbb{P}(X+Y=k)$	0	$7/24$	$10/24$	$7/24$	0

(c) Die Zufallsvariablen sind abhängig. Es gilt zum Beispiel

$$\mathbb{P}(X=0, Y=-1) = 0 \neq \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} = \mathbb{P}(X=0)\mathbb{P}(Y=-1).$$

Dies lässt sich direkt aus der Tabelle anhand der Randverteilungen ablesen:

X \ Y	-1	0	1	
0	**0**	1/8	1/8	**1/4**
1	1/6	1/8	5/24	1/2
2	1/6	1/12	0	1/4
	1/3	1/3	1/3	1

Aufgabe 2.30: Auf Summen bedingte Verteilungen ○●●

Sei $n \in \mathbb{N}$. Welche Verteilung wird durch $\mathbb{P}(X = .\,|X+Y=n)$ definiert, wenn X und Y unabhängig sind und

(a) $X \sim \mathrm{Bin}(r,p)$ und $Y \sim \mathrm{Bin}(s,p)$ für $p \in (0,1)$ und $r,s \in \mathbb{N}$?

(b) $X \sim \mathrm{Poi}(\lambda)$ und $Y \sim \mathrm{Poi}(\mu)$ für $\lambda, \mu \in \mathbb{R}^+$?

(c) $X \sim \mathrm{NegBin}(r,p)$ und $Y \sim \mathrm{NegBin}(s,p)$ für $r,s \in \mathbb{N}$ und $p \in (0,1)$?

Lösung:

(a) Nach Definition und unter Benutzung von $X + Y \sim \mathrm{Bin}(r + s, p)$, siehe Aufgabe 2.35, ist für $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$

$$\mathbb{P}(X = k \,|\, X + Y = n) = \frac{\mathbb{P}(X = k)\mathbb{P}(Y = n - k)}{\mathbb{P}(X + Y = n)} = \frac{\binom{r}{k}\binom{s}{n-k}}{\binom{r+s}{n}} = \mathcal{H}_{n,r,s}(\{k\}).$$

Damit ist die Verteilung von X unter Kenntnis der Summe $X + Y$ hypergeometrisch verteilt unabhängig vom Wert des Parameters p.

Insbesondere gilt das Ergebnis für X und Y bernoulliverteilt, wenn $r = s = 1$.

(b) Wieder ist die Verteilung faltungsstabil, siehe Aufgabe 2.35, d.h. $X+Y \sim \mathrm{Poi}(\lambda + \mu)$. Daher gilt

$$\mathbb{P}(X = k \,|\, X + Y = n) = \binom{n}{k}\Big(\frac{\lambda}{\lambda + \mu}\Big)^k\Big(\frac{\mu}{\lambda + \mu}\Big)^{n-k} = \mathrm{Bin}(n, \lambda/(\lambda + \mu))(\{k\}).$$

Es ergibt sich eine Binomialverteilung.

(c) Auch die negative Binomialverteilung ist faltungsstabil, siehe Aufgabe 2.35. Daher ist $X + Y \sim \mathrm{NegBin}(r + s, p)$. Mit analoger Rechnung wie in den anderen Fällen ergibt sich für $n \geq k \geq r$:

$$\mathbb{P}(X = k \,|\, X + Y = n) = \frac{\binom{k-1}{r-1}\binom{n-k-1}{s-1}}{\binom{n-1}{r+s-1}}.$$

Auch hier hängt die bedingte Wahrscheinlichkeit nicht mehr von p ab. Im Spezialfall für $r = s = 1$ haben X und Y identische geometrische Verteilung, und es ergibt sich unter der Bedingung $\{X + Y = n\}$ eine diskrete Gleichverteilung. Im allgemeinen Fall ergibt sich eine *negative hypergeometrische Verteilung*. Für die Interpretation dieser Verteilung siehe Aufgabe 2.16.

Aufgabe 2.31: Summe ohne Unabhängigkeit ○○●

Seien X und Y gleichverteilt auf $\{0, 1, 2\}$.

(a) Bestimmen Sie die Verteilung von $X+Y$, unter der Annahme der Unabhängigkeit von X und Y.

(b) Bestimmen Sie alle möglichen gemeinsamen Verteilungen von (X, Y), sodass $X + Y$ die gleiche Verteilung wie in (a) hat, aber ohne die Annahme der Unabhängigkeit.

Lösung:

(a) Sei $Z := X + Y$. Die möglichen Summen kann man in einer Tabelle darstellen

+	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	3
2	2	3	4

Es gilt dann unter Annahme der Unabhängigkeit für $k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Z = k) &= \mathbb{P}\Big(\bigcup_{\substack{i,j:\\ i+j=k}} \{(X, Y) = (i, j)\}\Big) = \sum_{i=0}^{2}\sum_{j=0}^{2} \mathbb{P}((X, Y) = (i, j))\, \mathbb{1}_{i+j=k}\\ &= \sum_{i=0}^{2}\sum_{j=0}^{2} \mathbb{P}(X = i)\mathbb{P}(Y = j)\mathbb{1}_{i+j=k} = \frac{1}{9}\sum_{i=0}^{2}\sum_{j=0}^{2} \mathbb{1}_{i+j=k}.\end{aligned}$$

Durch Auszählen der möglichen Summanden aus der Tabelle oben erhält man die Verteilung von Z, wobei $q_k := \mathbb{P}(Z = k)$ sei:

k	0	1	2	3	4
q_k	1/9	2/9	3/9	2/9	1/9

.

(b) Ohne die Annahme der Unabhängigkeit gilt nur

$$\mathbb{P}(Z = k) = \sum_{i=0}^{2}\sum_{j=0}^{2} p_{ij}\mathbb{1}_{i+j=k},$$

wobei $p_{ij} := \mathbb{P}((X, Y) = (i, j))$. Es ergeben sich nun zunächst direkt:

$$p_{00} = q_0 = 1/9, \qquad\qquad p_{22} = q_4 = 1/9.$$

X soll weiter gleichverteilt auf $\{0, 1, 2\}$ sein, sodass noch die Randverteilung zu beachten ist sowie die Forderungen nach der Verteilung der Summe wie in (a). Daraus ergeben sich die Gleichungen

$$\begin{aligned} q_1 &= 2/9 = p_{10} + p_{01}, & 1/9 + p_{01} + p_{02} &= 1/3,\\ q_2 &= 3/9 = p_{20} + p_{11} + p_{02}, & p_{10} + p_{11} + p_{12} &= 1/3,\\ q_3 &= 2/9 = p_{21} + p_{12}, & p_{20} + p_{21} + 1/9 &= 1/3.\end{aligned}$$

Da alles symmetrisch ist, entstehen aus der Randverteilung von Y keine weiteren Bedingungen. Die Normiertheit der gemeinsamen Verteilung lässt sich aus den drei Gleichungen rechts durch Addition folgern, sodass daraus ebenfalls keine neue Gleichung entsteht. Daher haben wir nun ein Gleichungssystem mit sieben Unbekannten und sechs Gleichungen.

Die Lösungen dieses Gleichungssystems lassen sich durch $p := p_{02} \in [0, 2/9]$ parametrisieren:

p_{ij}	$j = 0$	$j = 1$	$j = 2$	
$i = 0$	$1/9$	$2/9 - p$	p	$1/3$
$i = 1$	p	$1/9$	$2/9 - p$	$1/3$
$i = 2$	$2/9 - p$	p	$1/9$	$1/3$
	$1/3$	$1/3$	$1/3$	1

Die Menge möglicher gemeinsamer Verteilungen von X und Y ist daher überabzählbar. Darunter ist nur eine einzige Verteilung, für die X und Y auch unabhängig sind, nämlich für $p = 1/9$.

Bemerkung: Das Beispiel zeigt, dass die Unabhängigkeit der Koordinaten nicht die Regel sondern die Ausnahme ist. Insbesondere lässt die Kenntnis der Marginalverteilungen keine Rückschlüsse auf die ursprüngliche Verteilung zu.

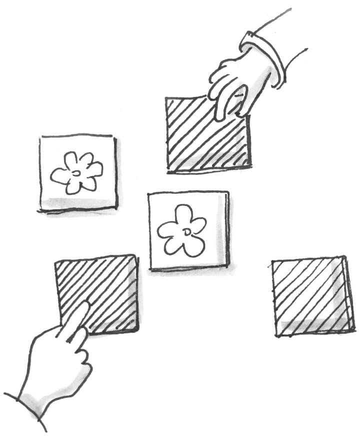
Aufgabe 2.32: Verteilung ohne Gedächtnis ○○●

Gegeben sei die Zufallsvariable $X \sim Geo(p)$ mit $p \in (0, 1]$.

(a) Berechnen Sie die Verteilungsfunktion F_X von X.

(b) Beweisen Sie, dass X gedächtnislos ist. Das heißt, es gilt für $n, m \in \mathbb{N}$

$$\mathbb{P}(X \geq n + m \,|\, X > m) = \mathbb{P}(X \geq n).$$



Lösung:

(a) Es gilt mittels geometrischer Reihe

$$\mathbb{P}(X \geq k) = p \cdot (1-p)^{k-1} \cdot \sum_{i=k}^{\infty} (1-p)^{i-k} = (1-p)^{k-1}.$$

Daher gilt:

$$F_X(k) := \mathbb{P}(X \leq k) = 1 - \mathbb{P}(X \geq k+1) = 1 - (1-p)^k.$$

(b) Nach (a) gilt weiter

$$\mathbb{P}(X \geq n+m \,|\, X > m) = \frac{\mathbb{P}(X \geq n+m)}{\mathbb{P}(X > m)} = (1-p)^{n-1} = \mathbb{P}(X \geq n).$$

Bemerkung: Die Gedächtnislosigkeit von reellwertigen stetigen Zufallsvariablen wird in Aufgabe 3.33 studiert.

Aufgabe 2.33: Absolutbetrag einer Gleichverteilung ○○●

Es sei X eine auf $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$ gleichverteilte Zufallsvariable.

(a) Bestimmen Sie die Verteilung von $|X|$.

(b) Bestimmen Sie die Verteilung von $Y := X \cdot |X|$.

(c) Prüfen Sie, ob X und $|X|$ korreliert sind.

(d) Prüfen Sie, ob X und $|X|$ abhängig sind.

Lösung:

(a) Der Bildraum von $|X|$ ist $\{0, 1, 2\}$ und die Verteilung ist gegeben durch

$$\mathbb{P}(|X| = 0) = \mathbb{P}(X = 0) = \frac{1}{5}, \quad \mathbb{P}(|X| = 1) = \mathbb{P}(X \in \{-1, 1\}) = \frac{2}{5},$$
$$\mathbb{P}(|X| = 2) = \mathbb{P}(X \in \{-2, 2\}) = \frac{2}{5}.$$

(b) Der Bildraum von Y ist $\{-4, -1, 0, 1, 4\}$ und die Verteilung ist gegeben durch

$$\mathbb{P}(Y = 0) = \mathbb{P}(X = 0) = \frac{1}{5}, \qquad \mathbb{P}(Y = -1) = \mathbb{P}(X = -1) = \frac{1}{5},$$
$$\mathbb{P}(Y = -4) = \mathbb{P}(X = -2) = \frac{1}{5}, \qquad \mathbb{P}(Y = 1) = \mathbb{P}(X = 1) = \frac{1}{5},$$
$$\mathbb{P}(Y = 4) = \mathbb{P}(X = 2) = \frac{1}{5},$$

d.h. Y ist auf $\{-4, -1, 0, 1, 4\}$ gleichverteilt.

(c) Betrachte zunächst, dass $\mathrm{Cov}(X, |X|) = \mathbb{E}(X \cdot |X|) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(|X|)$. Die Verteilungen von X und $Y = X|X|$ sind jeweils symmetrisch um Null, daher ist $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y) = 0$. Es gilt für $|X|$:

$$\mathbb{E}(|X|) = \frac{1}{5} \cdot 0 + \frac{2}{5} \cdot 1 + \frac{2}{5} \cdot 2 = \frac{6}{5}.$$

Damit folgt

$$\mathrm{Cov}(X, |X|) = \mathbb{E}(Y) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(|X|) = 0 - 0 \cdot \frac{6}{5} = 0.$$

Somit sind X und $|X|$ unkorreliert.

(d) X und $|X|$ sind jedoch abhängig, denn es gilt zum Beispiel

$$0 = \mathbb{P}(X = 1, |X| = 0) \neq \mathbb{P}(X = 1)\mathbb{P}(|X| = 0) = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5}.$$

Aufgabe 2.34: Wendige Würfel ○○●

Es werden zwei faire Würfel geworfen, wobei ein Würfel umgedreht wird, wenn er die Augenzahl *zwei* zeigt. Die Zufallsvariablen V und W geben die Augenzahl des ersten beziehungsweise zweiten Würfels an. Sei S die Summe der Augenzahlen.

(a) Geben Sie die Verteilung von V und von W an.

(b) Geben Sie die Verteilung von S an.

(c) Berechnen Sie Erwartungswert und Varianz von S.

Lösung:

(a) Der Wertebereich von V und W ist $\{1, 3, 4, 5, 6\}$. Die Zähldichte von V ist:

k	1	3	4	5	6
$\mathbb{P}(V = k)$	1/6	1/6	1/6	1/3	1/6

W hat dieselbe Verteilung.

(b) Für die einfachere Berechnung der Summe schreibe 5_1 für die Augenzahl *fünf* und 5_2 für die umgedrehte *zwei*. So ergibt sich wieder ein fairer Würfel, bei dem jedes Ergebnis die gleiche Wahrscheinlichkeit hat.

Nun ist $S(\Omega) = \{2, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$. Daraus ergibt sich eine Tabelle mit den Summen:

+	1	5_2	3	4	5_1	6
1	2	6	4	5	6	7
5_2	6	10	8	9	10	11
3	4	8	6	7	8	9
4	5	9	7	8	9	10
5_1	6	10	8	9	10	11
6	7	11	9	10	11	12

Mittels Abzählen aus der Tabelle ergibt sich die Verteilung von S:

k	2	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\mathbb{P}(S = k)$	1/36	1/18	1/18	5/36	1/9	5/36	1/6	1/6	1/9	1/36

(c) Für die Berechnung von Erwartungswert und Varianz von S benutzt man entweder die Tabelle aus (b) oder nutzt $S = V + W$. Es gilt

$$\mathbb{E}(V) = \frac{1}{6}(1 + 3 + 4 + 2 \cdot 5 + 6) = 4\,,$$
$$\mathbb{E}(V^2) = \frac{1}{6}(1^2 + 3^2 + 4^2 + 2 \cdot 5^2 + 6^2) = \frac{56}{3}.$$

Damit ist wegen $V \sim W$

$$\mathbb{E}(S) = 2\mathbb{E}(V) = 8, \qquad \mathrm{Var}(S) = 2\,\mathrm{Var}(V) = 2\Big(\mathbb{E}(V^2) - \mathbb{E}(V)^2\Big) = \frac{16}{3}.$$

2.4 Summen von Zufallsvariablen

Aufgabe 2.35: Faltungsinvarianz einiger diskreter Verteilungen ○●●

Gegeben seien zwei unabhängige Zufallsvariablen X_1 und X_2. Bestimmen Sie die Verteilung von $X_1 + X_2$ in folgenden Fällen:

(a) $X_i \sim \mathrm{NegBin}(r_i, p)$ mit $r_i \in \mathbb{N}$ und $p \in (0, 1]$,

(b) $X_i \sim \mathrm{Poi}(\lambda_i)$ mit $\lambda_i > 0$,

(c) $X_i \sim \mathrm{Bin}(n_i, p)$ mit $n_i \in \mathbb{N}$ und $p \in [0, 1]$.

Lösung: Man bestimmt die Verteilung mittels Faltungsformel.

(a) Es gilt für $n > r_1 + r_2$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_1 + X_2 = n) &= \sum_{k=r_1}^{n-r_2} \mathbb{P}(X_1 = k)\mathbb{P}(X_2 = n-k) \\
&= \sum_{k=r_1}^{n-r_2} \binom{k-1}{r_1-1} p^{r_1}(1-p)^{k-r_1} \binom{n-k-1}{r_2-1} p^{r_2}(1-p)^{n-k-r_2} \\
&= p^{r_1+r_2}(1-p)^{n-(r_1+r_2)} \sum_{k=r_1}^{n-r_2} \binom{k-1}{r_1-1}\binom{n-k-1}{r_2-1} \\
&= p^{r_1+r_2}(1-p)^{n-(r_1+r_2)} \sum_{j=0}^{n-r_1-r_2} \binom{j+r_1-1}{r_1-1}\binom{n-1-j-r_1}{r_2-1} \\
&= \binom{n-1}{r_1+r_2-1} p^{r_1+r_2}(1-p)^{n-(r_1+r_2)} =: \mathrm{NegBin}(r_1+r_2, p)(\{n\}).
\end{aligned}$$

Für den letzten Schritt verwendet man Aufgabe 1.10.

(b) Es gilt

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_1 + X_2 = n) &= \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X_1 = k)\mathbb{P}(X_2 = n-k) = e^{-(\lambda_1+\lambda_2)} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \lambda_1^k \lambda_2^{n-k} \\
&= e^{-(\lambda_1+\lambda_2)} \frac{(\lambda_1+\lambda_2)^n}{n!} =: \mathrm{Poi}(\lambda_1+\lambda_2)(\{n\}).
\end{aligned}$$

(c) Es gilt

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_1 + X_2 = n) &= \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X_1 = k)\mathbb{P}(X_2 = n-k) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n_1}{k} p^k (1-p)^{n_1-k} \binom{n_2}{n-k} p^{n-k} (1-p)^{n_2-(n-k)} \\
&= p^n (1-p)^{n_1+n_2-n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n_1}{k}\binom{n_2}{n-k} = p^n (1-p)^{n_1+n_2-n} \binom{n_1+n_2}{n} \\
&=: \mathrm{Bin}(n_1+n_2, p)(\{n\}).
\end{aligned}$$

Die Summe ist somit erneut binomialverteilt: $X_1 + X_2 \sim \mathrm{Bin}(n_1 + n_2, p)$.

Bemerkung: Die Menge der negativen Binomialverteilungen zum gegebenen Parameter $p \in (0,1]$ bildet dank (a) eine Faltungshalbgruppe. Da $\mathrm{Geo}(p) = \mathrm{NegBin}(1, p)$ gehören auch die geometrischen Verteilungen dieser Halbgruppe, siehe Aufgabe 2.17.

Aufgabe 2.36: Erzeugende Funktion einer zufälligen Summe ○●●

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Sei $X = (X_i)_{i\geq 0}$ eine Folge unabhängiger, identisch verteilter Zufallsvariablen mit Werten in $\mathbb{N}$. Sei weiter N eine diskrete Zufallsvariable mit Werten in $\mathbb{N}$ und unabhängig von X. Zudem seien N und X als quadratintegrierbar angenommen.

Man definiere die Summe mit zufälliger Anzahl der Summanden

$$S := \sum_{i=1}^{N} X_i.$$

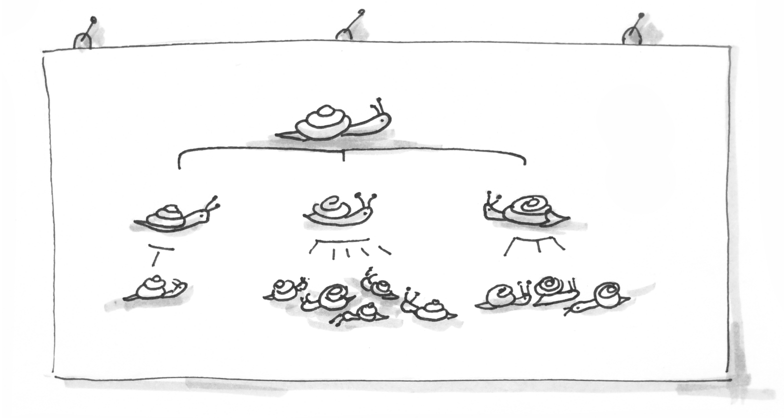
Die erzeugende Funktion von X_i sei durch $G_X(z)$ abgekürzt, die unabhängig von i ist.

(a) Beweisen Sie, dass die erzeugende Funktion von S folgende Gleichung erfüllt:

$$G_S = G_N \circ G_X.$$

(b) Schließen Sie auf die

Wald-Identität:	$\mathbb{E}(S) = \mathbb{E}(N)\,\mathbb{E}(X)$
Blackwell-Girshick-Identität:	$\mathrm{Var}(S) = \mathrm{Var}(N)\mathbb{E}(X)^2 + \mathbb{E}(N)\,\mathrm{Var}(X)$



Lösung:

(a) Durch Bedingen auf das Ereignis $\{N = n\}$ für $n \in \mathbb{N}$ folgt zunächst

$$\mathbb{E}(z^S|N = n) = \mathbb{E}(z^{\sum_{i=1}^n X_i}) = \left(\mathbb{E}(z^{X_i})\right)^n = G_X(z)^n.$$

Für die erzeugende Funktion von S gilt dann

$$G_S(z) = \mathbb{E}(z^S) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}(z^S|N = n)\mathbb{P}(N = n) = \mathbb{E}(G_X(z)^N) = G_N(G_X(z)).$$

(b) Durch Ableiten bezüglich z folgt unter Beachten der Kettenregel:

$$\begin{aligned} G_S'(z) &= G_N'(G_X(z))\, G_X'(z), \\ G_S''(z) &= G_N''(G_X(z))\, (G_X'(z))^2 + G_N'(G_X(z))\, G_X''(z). \end{aligned}$$

Für $z \nearrow 1$ folgt zum einen:

$$\mathbb{E}(S) = G_S'(1) = G_N'(1)\, G_X'(1) = \mathbb{E}(N)\,\mathbb{E}(X),$$

und zum anderen

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}(S) &= G_S''(1) + G_S'(1)(1 - G_S'(1)) \\ &= G_N''(1)\,(G_X'(1))^2 + G_N'(1)\, G_X''(1) + G_S'(1)(1 - G_S'(1)) \\ &= \mathbb{E}(N(N-1))\mathbb{E}(X)^2 + \mathbb{E}(N)\mathbb{E}(X(X-1)) + \mathbb{E}(N)\,\mathbb{E}(X)(1 - \mathbb{E}(N)\,\mathbb{E}(X)) \\ &= \mathrm{Var}(N)\mathbb{E}(X)^2 + \mathbb{E}(N)\,\mathrm{Var}(X). \end{aligned}$$

Aufgabe 2.37: Zufällige Summe Poisson-verteilter Anzahl Summanden ●●●

Sei N eine Poisson-verteilte Zufallsvariable: $N \sim \mathrm{Poi}(\lambda), \lambda > 0$. Davon unabhängig sei die Folge $(X_i)_{i\geq 0}$ unabhängiger, identisch verteilter Zufallsvariablen. Definieren Sie die zufällige Summe S durch

$$S := \sum_{i=1}^{N} X_i.$$

Die Verteilung von S nennt man eine *Compound Poisson-Verteilung*.

(a) Seien $X_i \sim \mathrm{Ber}(p),\ p \in (0, 1)$. Bestimmen Sie die Verteilung von S.

(b) Eine Versicherungsgesellschaft interessiert sich dafür, welche Kosten Z eine (zufällige) Anzahl von Unfällen pro Jahr erwarten lassen. Man nimmt an, dass

$$Z := r + S = r + \sum_{i=1}^{N} X_i,\ \ r \in \mathbb{N},$$

wobei X_i die Kosten des i-ten Schadens modelliert. Die $(X_i)_{i\geq 0}$ sind unabhängig und identisch logarithmisch verteilt, das heißt ihre Zähldichte ist durch

$$\mathbb{P}(X_i = k) = -\frac{p^k}{k}\frac{1}{\ln(1-p)},\quad k \geq 1,$$

für einen bestimmten Parameter $p \in (0, 1)$ gegeben.

(i) Berechnen Sie die erzeugende Funktion von X_i und schließen Sie daraus ihren Erwartungswert und ihre Varianz.

Hinweis: *Stellen Sie p^k/k als Integral dar und vertauschen Sie Summation und Integration.*

(ii) Nehmen Sie an, dass $p = 1 - \exp(-\lambda/r)$. Zeigen Sie dann mit Hilfe ihrer erzeugenden Funktion, dass die Zufallsvariable Z $\mathrm{NegBin}(r, 1-p)$-verteilt ist.

Lösung:

(a) Die erzeugende Funktion von X_i ist $G_X(z) = 1 - p + pz$ und die erzeugende Funktion von N ist $G_N(z) = \exp(\lambda(z-1))$. Nach Aufgabe 2.36 folgt insgesamt

$$G_S(z) = \exp(\lambda(G_X(z) - 1)) = \exp(\lambda p\,(z-1)).$$

$G_S(z)$ ist somit wieder die erzeugende Funktion einer Poisson-verteilten Zufallsvariable, diesmal aber mit Parameter $\lambda\,p$.

(b) (i) Direktes Berechnen nach dem Hinweis liefert für $z \in [0,1]$

$$\begin{aligned} G_X(z) = \mathbb{E}(z^X) &= -\frac{1}{\ln(1-p)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(pz)^k}{k} = -\frac{1}{\ln(1-p)} \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^{pz} x^{k-1} dx \\ &= -\frac{1}{\ln(1-p)} \int_0^{pz} \left(\sum_{k=1}^{\infty} x^{k-1} \right) dx = -\frac{1}{\ln(1-p)} \int_0^{pz} \frac{1}{1-x} dx = \frac{\ln(1-pz)}{\ln(1-p)}. \end{aligned}$$

Die Ableitungen der erzeugenden Funktion geben Rückschluss auf die Momente, so gilt

$$\begin{aligned} G_X'(z) &= -\frac{p}{(1-pz)\ln(1-p)}, \\ G_X''(z) &= -\frac{p^2}{(1-pz)^2 \ln(1-p)} = G_X'(z) \cdot \frac{p}{1-pz}. \end{aligned}$$

Damit ergibt sich

$$\mathbb{E}(X) = G_X'(1) = -\frac{p}{(1-p)\ln(1-p)}$$

und

$$\begin{aligned} \operatorname{Var}(X) &= G_X''(1) + G_X'(1)(1 - G_X'(1)) = G_X'(1) \left(\frac{p}{1-p} + 1 - G_X'(1) \right) \\ &= \mathbb{E}(X) \left(\frac{1}{1-p} - \mathbb{E}(X) \right) = -\frac{p\,(p + \ln(1-p))}{(1-p)^2 \ln^2(1-p)}. \end{aligned}$$

(ii) Es gilt

$$G_X(z) = \frac{\ln(1-pz)}{\ln(1-p)} - 1 + 1 = 1 - \frac{\ln\left(\frac{(1-p)z}{1-pz}\right) - \ln(z)}{\ln(1-p)} = 1 - \frac{\ln(z^{-1}\, G_V(z))}{\ln(1-p)},$$

wobei $V \sim \mathrm{Geo}(1-p)$, siehe Aufgabe 2.17.

Damit ist wegen $G_N(z) = \exp(\lambda(z-1))$

$$G_{Z-r}(z) = (z^{-1}\, G_V(z))^{\frac{-\lambda}{\ln(1-p)}} = z^{-r}\, G_V(z)^r,$$

da aus $p = 1 - \exp(-\lambda/r)$ durch Umstellen $r = -\dfrac{\ln(1-p)}{\lambda}$ folgt.

Nun ist aber

$$G_Z(z) = z^r\, G_{Z-r}(z) = G_V(z)^r.$$

Damit ist Z genauso verteilt wie eine Summe von r unabhängigen, geometrisch verteilten Zufallsvariablen, d.h. $Z \sim \mathrm{NegBin}(r, 1-p)$.

Bemerkung: Die Wahl $r \in \mathbb{N}$ und das speziell gewählte p erzwingen die diskrete Version der negativen Binomialverteilung. Für beliebiges $p \in (0, 1)$ und $r \in \mathbb{R}^+$ entsteht die kontinuierliche Beta-Binomialverteilung.

2.5 Erwartungswert unter bedingter Wahrscheinlichkeit

Aufgabe 2.38: Geometrische Verteilung mit zufälligem Parameter ○○●

Wir betrachten eine geometrische Verteilung mit zufälligem Parameter. Dazu definiere man eine Zufallsvariable Y auf $\{1, \dots, 10\}$ gleichverteilt. Weiter sei X eine Zufallsvariable, deren bedingte Verteilung bekannt ist:

$$\mathbb{P}_X(\cdot\,|Y = k) = \mathrm{Geo}\Big(\frac{k}{10}\Big).$$

Berechnen Sie den Erwartungswert von X.

Lösung: Zur Berechnung des Erwartungswertes nutzen Sie den Satz über den totalen Erwartungswert. Das heißt:

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^{10} \mathbb{E}(X\big|Y = k)\mathbb{P}\,(Y = k) = \sum_{k=1}^{10} \frac{10}{k}\,\frac{1}{10} = \sum_{k=1}^{10} \frac{1}{k} = \frac{7\,381}{2\,520} \approx 2{,}93.$$

Aufgabe 2.39: Zufallsvariable bedingt auf i.v. Summe ○○●

Gegeben sei eine Folge von integrierbaren und identisch verteilten $\mathbb{N}$-wertigen Zufallsvariablen $(X_i)_{1\le i\le n}$. Definieren Sie weiter $S := \sum_{i=1}^n X_i$. Bestimmen Sie einen Ausdruck für $\mathbb{E}(X_1|S = k)$ als Funktion von k, $k \in \mathbb{N}$.

Hinweis: *Betrachten Sie* $\mathbb{E}(S\,|S = k)$.

Lösung: Zunächst gilt

$$\mathbb{E}(S\,|S = k) = k.$$

Weiter gilt aber dank der Additivität des (bedingten) Erwartungswerts

$$\mathbb{E}(S\,|S = k) = \mathbb{E}\Big(\sum_{i=1}^{n} X_i\Big|S = k\Big) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(X_i|S = k) = n \cdot \mathbb{E}(X_1|S = k).$$

Das Gleichsetzen der beiden Identitäten liefert nun

$$\mathbb{E}(X_1\,|\,S = k) = \frac{k}{n}.$$

Aufgabe 2.40: Erwartungswert durch Rekursion ○●●

In einer Urne sind w weiße und s schwarze Kugeln enthalten, $w, s \in \mathbb{N}$. Nun wird solange ohne Zurücklegen gezogen, bis das erste Mal eine weiße Kugel gezogen wird. Bezeichne $N_{w,s}$ die zufällige Anzahl der notwendigen Züge.

(a) Begründen Sie folgende Rekursion:

$$\mathbb{E}(N_{w,s}) = 1 + \frac{s}{w+s}\,\mathbb{E}(N_{w,s-1}), \quad w, s \in \mathbb{N}$$

und $N_{w,0} = 1$.

Hinweis: *Benutzen Sie X, die Indikatorfunktion des Ereignisses, dass die erste gezogene Kugel weiß ist.*

(b) Schließen Sie daraus auf den expliziten Wert von $\mathbb{E}(N_{w,s})$ als Funktion der Parameter w und s.

Lösung:

(a) Falls $\{X = 1\}$ eintritt, endet das Ziehen mit dem ersten Zug und $N_{w,s} = 1$. Ist die erste Kugel schwarz, so tritt $\{X = 0\}$ ein. So ist ein Zug verbraucht, aber der Prozess startet erneut mit w weißen Kugeln und $s - 1$ schwarzen. Daher ist nach dem Satz der totalen Erwartung

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(N_{w,s}) &= \underbrace{\mathbb{E}(N_{w,s}|X=1)}_{=1}\underbrace{\mathbb{P}(X=1)}_{=\frac{w}{w+s}} + \underbrace{\mathbb{E}(N_{w,s}|X=0)}_{=1+\mathbb{E}(N_{w,s-1})}\underbrace{\mathbb{P}(X=0)}_{=\frac{s}{w+s}} \\ &= 1 + \frac{s}{s+w}\mathbb{E}(N_{w,s-1}).\end{aligned}$$

(b) Sei zuerst $s = 1$, dann gilt:

$$\mathbb{E}(N_{w,1}) = 1 + \frac{1}{w+1}\underbrace{\mathbb{E}(N_{w,0})}_{=1} = 1 + \frac{1}{w+1}.$$

Mittels Induktion und Rekursion beweist man, dass

$$\mathbb{E}(N_{w,s}) = 1 + \frac{s}{w+1}.$$

Bemerkung: In Aufgabe 2.16 wird der allgemeinere Fall behandelt, wenn der Vorgang erst nach dem Ziehen der k-ten weißen Kugel gestoppt wird, $k \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 2.41: Erwartungswert einer zufälligen Gleichverteilung ○●●

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und X eine integrierbare, diskrete Zufallsvariable auf $\mathbb{N}$. Sei Y eine auf $\{0, 1, 2, \ldots, X\}$ gleichverteilte Zufallsvariable. Berechnen Sie $\mathbb{E}(Y)$ in Abhängigkeit von $\mathbb{E}(X)$.

Lösung: Zunächst gilt unter $\{X = k\}$ aufgrund der angenommenen Gleichverteilung auf $\{0, 1, 2, \ldots, k\}$

$$\mathbb{E}(Y|X = k) = \frac{k}{2}.$$

Dann gilt nach der Formel der totalen Wahrscheinlichkeit

$$\mathbb{E}(Y) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \mathbb{E}(Y|X = k)\, \mathbb{P}(X = k) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{k}{2}\, \mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{2}\, \mathbb{E}(X).$$

2.6 Sonstiges

Aufgabe 2.42: Konstante Zufallsvariable und triviale Sigma-Algebra ●●●

Sei X auf $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ eine Zufallsvariable.

(a) Man nehme an, X sei fast sicher konstant, d.h.

$$\exists\, c \in X(\Omega): \quad \mathbb{P}(\{\omega : X(\omega) = c\}) = 1.$$

Man beweise, dass X von jeder beliebigen Zufallsvariable Y unabhängig ist.

(b) Sei $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}$ eine triviale σ-Algebra, d.h. jede Teilmenge von $\mathcal{F}$ ist entweder eine Nullmenge oder das Komplement einer Nullmenge. Unter der Voraussetzung, dass $X : \Omega \to \mathbb{R}$ $\mathcal{F}$-messbar ist, beweisen Sie, dass X fast sicher konstant ist.

Hinweis: *Berechnen Sie die Verteilungsfunktion von X.*

(c) Sei $f : (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ eine messbare Funktion. Unter der Voraussetzung, dass X und $f(X)$ unabhängig sind, beweisen Sie, dass $f(X)$ fast sicher konstant ist.

Lösung:

(a) Sei A (bzw. B) eine beliebige messbare Menge in $X(\Omega)$ (bzw. in $Y(\Omega)$). Da X fast sicher konstant ist, existiert genau ein c, so dass $\mathbb{P}(X = c) = 1$.

Sei zunächst $A \ni c$. Man betrachte die Vereinigung der Komplemente:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\{X \in A\}^c \cup \{Y \in B\}^c) &= \mathbb{P}(X \in A^c) + \mathbb{P}(Y \in B^c) - \mathbb{P}(\{X \in A^c\} \cap \{Y \in B^c\}) \\ &= 0 + \mathbb{P}(Y \in B^c) - 0.\end{aligned}$$

Daher gilt $\mathbb{P}(\{X \in A\} \cap \{Y \in B\}) = \mathbb{P}(Y \in B) = \mathbb{P}(X \in A)\mathbb{P}(Y \in B)$.

Sei nun $A \not\ni c$, dann gilt

$$\mathbb{P}(X \in A, Y \in B) \leq \mathbb{P}(X \in A) = 0.$$

Da $\mathbb{P}(X \in A)\mathbb{P}(Y \in B) = 0 \cdot \mathbb{P}(Y \in B) = 0$, hat man

$$\mathbb{P}(X \in A, Y \in B) = \mathbb{P}(X \in A)\mathbb{P}(Y \in B).$$

(b) Da $\mathcal{F}$ trivial ist, gilt für jedes $t \in \mathbb{R}$ gerade $X^{-1}(]-\infty, t]) \in \mathcal{F}$ und daher

$$F_X(t) = \mathbb{P}(X \leq t) = \mathbb{P}(X^{-1}(]-\infty, t]) \in \{0, 1\}.$$

Die Verteilungsfunktion ist aber monoton wachsend, rechtsseitig stetig und erfüllt

$$\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0, \qquad \lim_{x \to +\infty} F_X(x) = 1.$$

Daher existiert $c \in \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft $c := \inf\{t : F_X(t) = 1\}$. Somit gilt

$$\mathbb{P}(X = c) = F_X(c) - \lim_{t \nearrow c} F_X(t) = 1$$

und X ist daher fast sicher konstant.

(c) Da f eine messbare Funktion ist, ist die Zufallsvariable $Y := f(X)$ entsprechend $\sigma(X)$-messbar, insbesondere gilt $\sigma(Y) \subset \sigma(X)$.

Wenn nun die Zufallsvariablen X und Y unabhängig sind, so sind die σ-Algebren $\sigma(X)$ und $\sigma(Y)$ unabhängig voneinander. Insbesondere ist $\sigma(Y)$ unabhängig von sich selbst als Teilmenge von $\sigma(X)$, mithin also eine triviale σ-Algebra.

Daher haben alle Ereignisse von $\sigma(Y)$ die Wahrscheinlichkeit Null oder Eins. Nach b) ist dann $f(X)$ fast sicher konstant.

Aufgabe 2.43: Informationsgehalt des Münzwurfs ○●●

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein diskreter Wahrscheinlichkeitsraum. Eine Abbildung $I : \mathcal{A} \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ heisst **Informationsgehalt**, wenn sie folgende Eigenschaften erfüllt:

(i) Für alle $E_1, E_2 \in \mathcal{A}$ gilt: $I(E_1 \cap E_2) \geq \max\left(I(E_1), I(E_2)\right)$,

(ii) Für unabhängige $E_1, E_2 \in \mathcal{A}$ gilt: $I(E_1 \cap E_2) = I(E_1) + I(E_2)$,

(iii) Für alle $E \in \mathcal{A}$ gilt: $I(E) \geq 0$.

(a) Zeigen Sie, dass die Abbildung $I : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ mit

$$I(E) := -\log_2(\mathbb{P}(E)), \; E \in \mathcal{A},$$

die Eigenschaften (i)-(iii) erfüllt.

(b) Man betrachte den 6-fachen Münzwurf mit unfairer Münze, bei der die Wahrscheinlichkeit für *Kopf* durch $p = \frac{3}{4}$ gegeben sei. Berechnen Sie den Informationsgehalt folgender Ereignisse

$E_1 \mathrel{\widehat{=}}$ „Es wurde keinmal *Kopf* geworfen“,
$E_2 \mathrel{\widehat{=}}$ „Die Anzahl von *Kopf* ist ungerade“,
$E_3 \mathrel{\widehat{=}}$ „Die Anzahl von *Zahl* ist vier oder fünf“.

(c) Man betrachte den unendlichen fairen Münzwurf. Berechnen Sie den Informationsgehalt der Ereignisse

$E_4 \mathrel{\widehat{=}}$ „Im dritten Wurf wird *Kopf* geworfen“,
$E_5 \mathrel{\widehat{=}}$ „Vor dem dritten Wurf wird nicht *Kopf* geworfen“,
$E_6 \mathrel{\widehat{=}}$ „Vor dem vierten Wurf wird nicht *Kopf* geworfen“.

Lösung:

(a) Da $E_1 \cap E_2 \subset E_1$ gilt $\mathbb{P}(E_1 \cap E_2) \leq \mathbb{P}(E_1)$. Die Funktion $-\log_2(x)$ ist monoton fallend, sodass

$$-\log_2(\mathbb{P}(E_1 \cap E_2)) \geq -\log_2(\mathbb{P}(E_1)).$$

Sind E_1, E_2 unabhängig, so gilt $\mathbb{P}(E_1 \cap E_2) = \mathbb{P}(E_1)\mathbb{P}(E_2)$ und folglich

$$-\log_2(\mathbb{P}(E_1 \cap E_2)) = -\log_2(\mathbb{P}(E_1)) - \log_2(\mathbb{P}(E_2)).$$

Schließlich gilt $-\log_2(\mathbb{P}(E)) \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$, da $\mathbb{P}(E) \in [0, 1]$.

(b) Zunächst definieren Sie die Zufallsvariable X, welche angibt, wie oft *Kopf* geworfen wurde. Es gilt $X \sim \text{Bin}\left(6, \frac{3}{4}\right)$. Damit ergibt sich als Verteilung:

k	0	1	2	3	4	5	6
$\mathbb{P}$(X=k)	$\frac{1}{4\,096}$	$\frac{18}{4\,096}$	$\frac{135}{4\,096}$	$\frac{540}{4\,096}$	$\frac{1\,215}{4\,096}$	$\frac{1\,458}{4\,096}$	$\frac{729}{4\,096}$

Mit Hilfe der Tabelle lassen sich durch Aufaddieren die folgenden Wahrscheinlichkeiten bestimmen:

$$\mathbb{P}(E_1) = \mathbb{P}(X = 0) = \frac{1}{4\,096} \approx 0{,}24 \cdot 10^{-3},$$
$$\mathbb{P}(E_2) = \mathbb{P}(X \in \{1, 3, 5\}) = \frac{63}{128} \approx 0{,}49,$$
$$\mathbb{P}(E_3) = \mathbb{P}(6 - X \in \{4, 5\}) = \mathbb{P}(X = 2) + \mathbb{P}(X = 1) = \frac{153}{4\,096} \approx 0{,}04.$$

Somit folgt für den Informationsgehalt

$$I(E_1) = 12 \qquad I(E_2) \approx 1{,}03 \qquad I(E_3) \approx 4{,}74.$$

Der Informationsgehalt ist also hoch, wenn ein Ereignis sehr unwahrscheinlich ist.

(c) Da die Würfe unabhängig voneinander sind, folgt direkt $\mathbb{P}(E_4) = \frac{1}{2}$. Weiter ergeben sich die Wahrscheinlichkeiten von E_5 und E_6 über die Umformulierungen

$E_5 \mathrel{\widehat{=}}$ „Die ersten zwei Würfe sind *Zahl*“

$E_6 \mathrel{\widehat{=}}$ „Die ersten drei Würfe sind *Zahl*“

Damit ergibt sich

$$\mathbb{P}(E_5) = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}, \qquad \mathbb{P}(E_6) = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}.$$

Der Informationsgehalt ergibt sich damit schließlich als

$$I(E_4) = 1, \qquad I(E_5) = 2, \qquad I(E_6) = 3.$$

Aufgabe 2.44: Exkurs diskrete Entropie ○●●

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein endlicher Wahrscheinlichkeitsraum und $X : \Omega \to \mathbb{R}$ eine Zufallsvariable mit Werten in $\mathbb{N}_0$.

Definieren Sie die sogenannte *Entropie* der Verteilung von X

$$H(X) := -\sum_{i \in \mathbb{N}_0} \mathbb{P}(X = i) \log_2(\mathbb{P}(X = i)).$$

Man vereinbart, dass $0 \cdot \log_2(0) := 0$.

Die Entropie ist also die erwartete Informationsstreuung der Bildverteilungsdichte einer gegebenen Zufallsvariable bezüglich des eigenen Wahrscheinlichkeitsmaßes.

Berechnen Sie die Entropie einer

(a) Bernoulli-verteilten Zufallsvariable $X \sim \mathrm{Ber}(p),\ p \in [0, 1]$.

(b) gleichverteilten Zufallsvariable $Y \sim \mathcal{U}_{\{1,\ldots,n\}}$.

(c) geometrisch verteilten Zufallsvariable $Z \sim \mathrm{Geo}(p),\ p \in (0, 1]$.

Lösung:

(a) Für eine Bernoulli-verteilte Zufallsvariable X summiert man nur über zwei Werte, daher gilt für $q := 1 - p$:

$$H(X) = -p \log_2(p) - q \log_2(q).$$

(b) Für eine auf $\{1, 2, \ldots, n\}$ gleichverteilte Zufallsvariable Y ergibt sich für jeden Summanden der gleiche Term, daher folgt:

$$H(Y) = -n \cdot \frac{1}{n} \log_2(n^{-1}) = \log_2(n).$$

(c) Für die geometrisch verteilte Z folgt mit $q := 1 - p$:

$$\begin{aligned} H(Z) &= -\sum_{i=1}^{+\infty} q^{i-1} p \log_2(q^{i-1} p) = -p \log_2(q) \sum_{i=1}^{+\infty} (i-1) q^{i-1} - p \log_2(p) \sum_{i=1}^{+\infty} q^{i-1} \\ &= -p \log_2(q) \frac{q}{(1-q)^2} - p \log_2(p) \frac{1}{1-q} = \mathbb{E}(Z)\, H(X). \end{aligned}$$

Bemerkung: Die Entropie der Zufallsvariable X kann auch als Erwartungswert des Informationsgehaltes betrachtet werden.

Aufgabe 2.45: Verbleibende Lebensdauer ○●●

In Anwendungen der Zuverlässigkeitstheorie interessiert man sich für die sogenannte durchschnittliche Restlebenszeit, auf Englisch *Mean Residual Lifetime* (MRL) eines Produktes. Die Lebenszeit eines Produktes sei mit der $\mathbb{N}$-wertigen Zufallsvariable X modelliert. Die MRL beschreibt die Anzahl Restzeiteinheiten eines Produktes (z.B. in vollen Stunden), wenn das Produkt schon eine Anzahl Zeiteinheiten $t \in \mathbb{N}$ funktioniert hat. Es wird mittels bedingtem Erwartungswert definiert:

$$MRL_X(t) := \mathbb{E}(X - t | X > t).$$

(a) Sei $X \sim Geo(p)$. Bestimmen Sie $MRL_X(t), t \in \mathbb{N}$.

(b) Durch welche Eigenschaft der geometrischen Verteilung lässt sich das Ergebnis aus (a) erklären?

Lösung:

(a) Mittels der Definition des bedingten Erwartungswertes und der Aufgabe 2.19 folgt direkt

$$\begin{aligned} MRL_X(t) &= \frac{1}{\mathbb{P}(X > t)} \sum_{k=t+1}^{+\infty} (k-t)\mathbb{P}(X = k) \\ &= p \sum_{k=t+1}^{+\infty} (k-t)(1-p)^{k-t-1} = p \sum_{j=1}^{+\infty} j\,(1-p)^{j-1} \\ &= -p\frac{d}{dp} \sum_{j=0}^{+\infty} (1-p)^j = -p\frac{d}{dp}\frac{1}{p} = \frac{1}{p} \\ &= \mathbb{E}(X). \end{aligned}$$

Das Ergebnis besagt $\mathbb{E}(X|X > t) = \mathbb{E}(X) + t$.

(b) Dass diese MRL_X-Funktion konstant ist, ist ein Korollar der Gedächtnislosigkeit der geometrischen Verteilung, siehe Aufgabe 2.32.

Bemerkung: Die durchschnittliche Restlebenszeit lässt sich analog auch für Verteilungen mit Dichte bestimmen, siehe Aufgabe 3.33.

Kapitel 3

Stetige Zufallsvariablen

Sylvie Rœlly, Annie Flöge

3.1 Dichte und Verteilungsfunktion

Aufgabe 3.1: Parameterabhängige Verteilungsfunktion ○●●

Sei X eine reellwertige Zufallsvariable, deren Verteilungsfunktion durch

$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{falls } t < 0, \\ c\,t^2 & \text{falls } t \in [0, 1), \\ 1, & \text{falls } t \geq 1 \end{cases}$$

gegeben ist. Dabei sei c eine reelle Konstante.

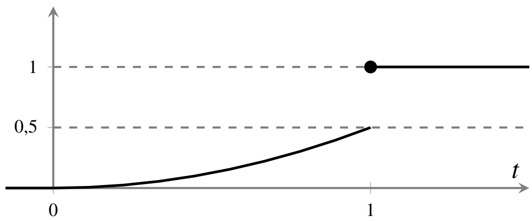
(a) Skizzieren Sie $F_X(t)$ für $c = 1/2$.

(b) Welche Werte kann c annehmen?

(c) Beschreiben Sie die Verteilung von X in Abhängigkeit von c, indem Sie die Wahrscheinlichkeit der Menge $\{1\}$ berechnen und gegebenenfalls eine Dichte angeben.

Lösung:

(a) Eine Skizze von $F_X(t)$ für $c = 1/2$:



(b) Da eine Verteilungsfunktion eine monoton wachsende Funktion ist, kann c nur Werte im Intervall $[0, 1]$ annehmen. Mithin ist F_X nur für $c = 1$ stetig. Für alle anderen Werte hat die Funktion $t \mapsto F_X(t)$ einen Sprung an der Stelle $t = 1$ der Höhe $1 - c$.

(c) Sei $c \in [0, 1]$. Die Beziehung $\mathbb{P}_X((-\infty, t]) = F_X(t)$ charakterisiert die Verteilung von X.

Für die fallende Folge $A_n := (1 - 1/n, 1] \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ gilt $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \{1\}$. Mit Hilfe der Stetigkeit von $\mathbb{P}_X$ gilt nun

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_X(\{1\}) &= \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}_X(A_n) = \lim_{n\to\infty} \Big(F_X(1) - F_X(1 - 1/n)\Big) \\ &= 1 - c \lim_{n\to\infty} (1 - 1/n)^2 = 1 - c.\end{aligned}$$

Nun definiert die monoton stetige Funktion $t \mapsto F(t) := c\, t^2\, \mathbb{1}_{[0,1)}(t) + c\, \mathbb{1}_{[1,\infty)}(t)$ eindeutig das Lebesgue-Stieltjes-Maß $\mathbb{P}_X - (1 - c)\,\delta_1$. Es besitzt auf $(0, 1)$ die Dichte $f(t) = F'(t) = 2\,c\,t$. Daher bekommt man folgende Zerlegung:

$$\mathbb{P}_X(dt) = 2\,c\,t\,\mathbb{1}_{(0,1)}(t)\,dt + (1 - c)\,\delta_1.$$

Für $c = 0$ gilt $\mathbb{P}_X = \delta_1$, daher ist $X \equiv 1$ mit Wahrscheinlichkeit Eins.

Für $c = 1$ besitzt X die Dichte $f_X(t) = 2\,t\,\mathbb{1}_{(0,1)}(t)$.

Aufgabe 3.2: Berechnung einer Verteilungsfunktion ○○●

Sei X eine Zufallsvariable mit Dichte

$$f_X(x) = \frac{c}{(x + 3)^4}\, \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(x), \qquad c \in \mathbb{R}^+.$$

(a) Bestimmen Sie die Konstante c.

(b) Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion $F_X(t)$.

Lösung:

(a) Das Integral der gegebenen Funktion ist

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{c}{(x+3)^4}\mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(x)\,dx = -\frac{c}{3(x+3)^3}\bigg|_0^{+\infty} = \frac{c}{81}.$$

Nach der Normierungseigenschaft von Dichtefunktionen muss $\int_{\mathbb{R}} f_X(x)\,dx = 1$ gelten, daher folgt $c = 81$.

(b) Für $t \geq 0$ bestimmen wir die Verteilungsfunktion durch Integrieren der Dichte und erhalten

$$F_X(t) = \int_0^t \frac{81}{(x+3)^4}\,dx = -\frac{27}{(x+3)^3}\bigg|_0^t = 1 - \frac{27}{(t+3)^3}.$$

Damit erhalten wir insgesamt

$$F_X(t) = \left(1 - \frac{27}{(t+3)^3}\right) \cdot \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(t).$$

Aufgabe 3.3: Heaviside-Funktion als Verteilungsfunktion ○○●

Wir beschäftigen uns mit der Integration von Verteilungsfunktionen, insbesondere falls es sich bei der Verteilungsfunktion um die Heaviside-Funktion handelt.

(a) Sei F eine stetige Verteilungsfunktion und $h > 0$. Zeigen Sie, dass dann

$$\Phi_h(x) := \frac{1}{h}\int_x^{x+h} F(t)\,dt, \quad x \in \mathbb{R},$$

auch eine Verteilungsfunktion ist.

(b) Sei $a \in \mathbb{R}$. Man betrachtet die *Heaviside-Funktion* H_a an der Stelle a, definiert durch $H_a := \mathbb{1}_{[a,+\infty)}$. Beweisen Sie, dass H_a eine Verteilungsfunktion ist und bestimmen Sie die assoziierte Wahrscheinlichkeit.

(c) Berechnen Sie die Funktion Φ_h aus (a) in dem Fall $F = H_a$. Zu welchem Wahrscheinlichkeitsmaß wird dann die Verteilungsfunktion Φ_h assoziiert?

Lösung:

(a) Es ist zu überprüfen, dass Φ_h monoton wachsend und rechtsseitig stetig ist sowie

$$\lim_{x\to-\infty}\Phi_h(x)=0, \qquad \lim_{x\to+\infty}\Phi_h(x)=1$$

erfüllt.

(i) Monotonie: Da F stetig ist, folgt ihre Riemann-Integrierbarkeit und Φ_h ist stetig differenzierbar. Die Monotonie von Φ_h wird dann durch die Betrachtung ihrer Ableitung bewiesen. Nach der Leibniz-Regel gilt für alle $x \in \mathbb{R}$

$$\Phi_h'(x)=\frac{1}{h}(F(x+h)-F(x))\geq 0.$$

Da die Ableitung nicht negativ ist, ist Φ_h monoton wachsend.

(ii) Rechtsseitige Stetigkeit: Da $\Phi_h \in C^1$, ist Φ_h insbesondere rechtsseitig stetig.

(iii) $\lim_{x\to-\infty}\Phi_h(x)=0$ und $\lim_{x\to\infty}\Phi_h(x)=1$:

Für alle $t\in(x,x+h)$ gilt

$$F(x)\leq F(t)\leq F(x+h)$$

und somit

$$0\leq F(x)\leq\Phi_h(x)\leq F(x+h)\leq 1.$$

Dies impliziert

$$\lim_{x\to-\infty}\Phi_h(x)\leq\lim_{x\to-\infty}F(x+h)=0 \qquad \text{und} \qquad \lim_{x\to+\infty}\Phi_h(x)\geq\lim_{x\to+\infty}F(x)=1.$$

(b) H_a ist monoton wachsend, rechtsseitig stetig und besitzt die passenden Limite in $-\infty$ und $+\infty$. Es handelt sich bei H_a um die Verteilungsfunktion des Dirac-Maßes an der Stelle a.

(c) Es gilt

$$\Phi_h(x)=\begin{cases}0, & \text{für } x\leq a-h,\\ 1, & \text{für } x\geq a.\end{cases}$$

Für $a-h<x<a$ gilt

$$\Phi_h(x)=\frac{1}{h}\int_x^a H_a(t)dt+\frac{1}{h}\int_a^{x+h}H_a(t)dt=0+\frac{1}{h}(x+h-a)=\frac{x-(a-h)}{a-(a-h)}.$$

Daher ist Φ_h die Verteilungsfunktion der Gleichverteilung $\mathcal{U}_{[a-h,a]}$.

Aufgabe 3.4: Erwartungswert als Integral ○○●

Sei g eine nicht-negative messbare Funktion auf einem messbaren Raum $(E, \mathcal{E}, \mu)$, wobei μ ein σ-endliches Maß ist.

(a) Beweisen Sie, dass

$$\int_E g(x)\,\mu(dx) = \int_0^{+\infty} \mu(\{x \in E \;:\; g(x) > y\})\,dy.$$

Hinweis: *Benutzen Sie die Identität* $g(x) = \int_0^{g(x)} dy$.

(b) Beweisen Sie, dass daraus die folgende Gleichheit für jede nicht-negative Zufallsvariable X mit $\mathbb{E}(X) < +\infty$ folgt:

$$\mathbb{E}(X) = \int_0^{+\infty} \mathbb{P}_X(X > y)\,dy = \int_0^{+\infty} (1 - F_X(y))\,dy.$$

Hierbei notiert F_X die Verteilungsfunktion von X.

(c) Benutzen Sie die Gleichung aus (b), um den Erwartungswert einer exponentialverteilten Zufallsvariable zu berechnen.

Lösung:

(a) Mittels des Satzes von Fubini folgt

$$\begin{aligned}\int_E g(x)\,\mu(dx) &= \int_E \int_0^{g(x)} dy\,\mu(dx) = \int_0^{\infty} \int_E \mathbb{1}_{\{g(x)>y\}}\,\mu(dx)\,dy \\ &= \int_0^{+\infty} \mu(\{x \in E : g(x) > y\})\,dy.\end{aligned}$$

(b) Wir verwenden die Gleichheit aus (a) für $E = \mathbb{R}^+$, $g(x) = x$ und $\mu = \mathbb{P}_X$:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \int_{\mathbb{R}^+} x\,\mathbb{P}_X(dx) = \int_0^{+\infty} \mathbb{P}_X(\{x \in \mathbb{R}^+ : x > y\})\,dy \\ &= \int_0^{+\infty} \mathbb{P}(X > y)\,dy = \int_0^{+\infty} (1 - F_X(y))\,dy.\end{aligned}$$

(c) Sei $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$. Dann ist $1 - F_X(y) = e^{-\lambda y}$ und somit

$$\mathbb{E}(X) = \int_0^{+\infty} (1 - F_X(y))\,dy = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda y}\,dy = \frac{1}{\lambda}.$$

Aufgabe 3.5: Quantilfunktion ○●●

Sei F die Verteilungsfunktion einer reellwertigen Zufallsvariable. Man definiert die sogenannte *Quantilfunktion*[1] wie folgt:

$$F^{(-1)} : [0,1] \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}, \qquad F^{(-1)}(y) := \inf\{x : F(x) > y\},$$

wobei $\inf \emptyset := +\infty$.

(a) Zeigen Sie, dass $F^{(-1)}$ die übliche inverse Funktion F^{-1} ist, wenn F eine streng monotone und stetige Funktion ist.

(b) Es sei X eine reellwertige Zufallsvariable mit einer streng monotonen und stetigen Verteilungsfunktion F_X. Warum ist $Y := F_X(X)$ eine Zufallsvariable? Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion der Zufallsvariable Y.

(c) Es sei F eine streng monotone und stetige Verteilungsfunktion und U eine auf $[0,1]$ gleichmäßig verteilte Zufallsvariable. Zeigen Sie, dass dann $F^{-1}(U)$ eine Zufallsvariable mit der Verteilungsfunktion F ist.

(d) Sei $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$ mit $\lambda > 0$. Geben Sie ihre Quantilfunktion an.

(e) Sei F die Verteilungsfunktion einer Binomialverteilung $\mathrm{Bin}(10, 3/10)$. Berechnen Sie $F^{(-1)}(0{,}5)$.

Lösung:

(a) Da F streng monoton und stetig ist, gilt für $y \in [0,1]$

$$\inf\{x : F(x) > y\} = \sup\{x : F(x) \le y\}.$$

Aufgrund der Monotonie von F folgt für alle $p \in \mathbb{R}$

$$F^{(-1)}(F(p)) = \sup\{x : F(x) \le F(p)\} = p.$$

Da ebenso $F(F^{(-1)}(p)) = p$ gilt, erfüllt die Quantilfunktion die Eigenschaften der üblichen inversen Funktion.

(b) Da Y eine Komposition einer messbaren Abbildung und einer stetigen Abbildung ist, ist Y selbst messbar. Also ist Y eine Zufallsvariable mit Werten in $[0,1]$.

Zur Bestimmung der Verteilungsfunktion F_Y sei nun $u \in [0,1]$. Dann gilt

$$F_Y(u) = \mathbb{P}(F_X(X) \le u) = \mathbb{P}(X \le F_X^{-1}(u)) = F_X(F_X^{-1}(u)) = u,$$

wobei F_X^{-1} die inverse Abbildung ist (diese existiert, da F_X stetig und streng monoton ist).

[1] Auch *verallgemeinerte inverse Funktion* im Sinne von Paul Lévy

Falls $u < 0$, so folgt $\{\omega : F_X(X(\omega)) \leq u\} = \emptyset$ und daher $F_Y(u) = 0$.

Falls $u > 1$, so folgt $\{\omega : F_X(X(\omega)) \leq u\} = \Omega$ und daher $F_Y(u) = 1$.

Insgesamt folgt daher

$$F_Y(u) = u\mathbb{1}_{[0,1]}(u) + \mathbb{1}_{(1,+\infty)}(u).$$

Somit ist Y eine auf $[0,1]$ gleichmäßig verteilte Zufallsvariable, d.h. $\mathbb{P}_Y = \mathcal{U}_{[0,1]}$.

(c) $F^{-1}(U)$ ist als Verkettung von messbaren Abbildungen selbst messbar und eine Zufallsvariable. Zur Berechnung der Verteilungsfunktion sei nun $x \in \mathbb{R}$, dann ist

$$F_{F^{-1}(U)}(x) = \mathbb{P}(F^{-1}(U) \leq x) = \mathbb{P}(U \leq F(x)) = F_U(F(x)),$$

wobei F_U die Verteilungsfunktion der Zufallsvariable U bezeichnet und gegeben ist durch

$$F_U(z) = z\,\mathbb{1}_{[0,1]}(z) + \mathbb{1}_{(1,+\infty)}(z).$$

Da nun $F(x) \in [0,1]$ für alle $x \in \mathbb{R}$, folgt insgesamt

$$F_{F^{-1}(U)}(x) = F(x).$$

(d) Es ist bekannt, dass die Verteilungsfunktion der Exponentialverteilung gegeben ist durch $F_X(x) = (1 - e^{-\lambda x})\,\mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(x)$. Somit ist F_X streng monoton und stetig und es ist die Inverse der Verteilungsfunktion zu berechnen. Durch Umstellen der Verteilungsfunktion ergibt sich

$$y = 1 - e^{-\lambda x} \Leftrightarrow x = -\frac{\ln(1-y)}{\lambda}.$$

Die Quantilfunktion von X ist daher

$$F_X^{-1}(y) = -\frac{\ln(1-y)}{\lambda}\,\mathbb{1}_{[0,1)}(y).$$

(e) Die Verteilungsfunktion einer diskreten Verteilung ist nicht mehr stetig, sondern stückweise konstant. Im Fall der Binomialverteilung mit $\mathrm{Bin}(n,p)$ erhält man

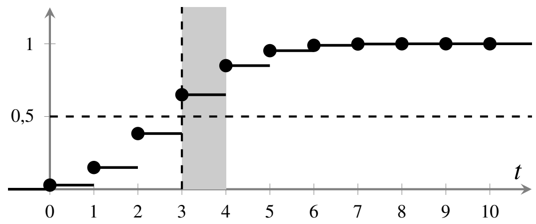
$$F(t) = \sum_{k=0}^{\lfloor t \rfloor} \binom{n}{k} p^k\,(1-p)^{n-k}\,\mathbb{1}_{[0,n]}(t) + \mathbb{1}_{(n,+\infty)}(t),\ t \in \mathbb{R}.$$

Hier muss die Definition der verallgemeinerten Inversen benutzt werden. Es gilt daher für $n = 10$ und $p = 3/10$ zunächst

$$F(t) \approx \begin{cases} 0{,}38 & \text{falls } t \in [2,3), \\ 0{,}65 & \text{falls } t \in [3,4). \end{cases}$$

Daraus folgt $F^{(-1)}(0{,}5) = \inf\{x : F(x) > 0{,}5\} = \inf\,[3,4) = 3$.

Alternativ lässt sich der Wert auch im Graphen von F ablesen:



Bemerkung: $F^{(-1)}(0{,}5)$ wird auch als Median der Verteilung bezeichnet, siehe dazu Aufgabe 2.7 in Sektion 2.2.1 und Aufgabe 3.23 in Sektion 3.2.4.

Aufgabe 3.6: Ränder der Gauß-Verteilung ○●●

Sei X eine $\mathcal{N}(0,1)$-verteilte Zufallsvariable. Zeigen Sie, dass für alle $x > 0$ die folgenden Abschätzungen gelten:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3}\right)e^{-x^2/2} \leq \mathbb{P}(X > x) \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{e^{-x^2/2}}{x}.$$

Lösung: Für die obere Schranke berechnet man

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X > x) &= \int_x^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-u^2/2}\,du \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_x^{+\infty} \frac{u}{x}e^{-u^2/2}\,du \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{x}e^{-u^2/2}\Big|_{u=x}^{u=+\infty} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{e^{-x^2/2}}{x}.\end{aligned}$$

Durch zweifache partielle Integration ergibt sich für die untere Schranke

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X > x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_x^{+\infty} \frac{1}{u}u\,e^{-u^2/2}\,du = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(-\frac{e^{-u^2/2}}{u}\Big|_{u=x}^{u=+\infty} - \int_x^{+\infty}\frac{1}{u^2}e^{-u^2/2}\,du\right) \\ &\geq \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{e^{-x^2/2}}{x} - \int_x^{+\infty}\frac{u}{x^3}e^{-u^2/2}\,du\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3}\right)e^{-x^2/2}.\end{aligned}$$

3.2 Kenngrößen wichtiger, stetiger Zufallsvariablen

3.2.1 Stetige Gleichverteilung

Aufgabe 3.7: Skalierte Gleichverteilung ○○●

Sei U eine auf $[0,1]$-gleichmäßig verteilte Zufallsvariable. Zeigen Sie, dass die Zufallsvariable

$$X := a + (b-a)\,U,$$

die Verteilung $\mathcal{U}_{[a,b]}$ besitzt, wobei $-\infty < a \leq b < +\infty$. Geben Sie den Erwartungswert von X an.

Lösung: Wir betrachten die Verteilungsfunktion von X und erhalten

$$\begin{aligned} F_X(t) &= \mathbb{P}(X \leq t) = \mathbb{P}(a + (b-a)\,U \leq t) = \mathbb{P}\left(U \leq \frac{t-a}{b-a}\right) \\ &= \begin{cases} 0 & \text{, falls } t \leq a \\ \frac{t-a}{b-a} & \text{, falls } t \in (a,b) \\ 1 & \text{, falls } t \geq b. \end{cases} \end{aligned}$$

Daher ist $X \sim \mathcal{U}_{[a,b]}$.

Weiter gilt wegen $\mathbb{E}(U) = 1/2$ noch $\mathbb{E}(X) = a + (b-a)\,\mathbb{E}(U) = \dfrac{a+b}{2}$.

Aufgabe 3.8: Momente und Summe gleichverteilter Zufallsvariablen ○○●

Es sei X eine auf $[0,1]$-gleichmäßig verteilte Zufallsvariable.

(a) Sei $k \in \mathbb{N}$. Prüfen Sie die Existenz des Erwartungswertes von X^k und geben Sie diesen im Falle der Existenz an.

(b) Bestimmen Sie mit Hilfe von (a) Erwartungswert und Varianz von X.

Lösung:

(a) Da X und X^k nicht negative Zufallsvariablen sind, die durch 1 beschränkt sind, folgt die Existenz aller Momente. Eine Dichte von X ist die Indikatorfunktion des Intervalls $[0,1]$. Daher

$$\mathbb{E}(X^k) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k\, \mathbb{1}_{[0,1]}(x)\,dx = \int_0^1 x^k\,dx = \frac{1}{k+1}x^{k+1}\Big|_0^1 = \frac{1}{k+1}.$$

(b) Mit Hilfe von (a) erhält man $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{2}$ und $\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$.

Aufgabe 3.9: Momenterzeugende Funktion der Gleichverteilung ○●●

Sei X eine auf $[-1, 1]$ gleichverteilte Zufallsvariable.

(a) Berechnen Sie die momenterzeugende Funktion $M_X(t) := \mathbb{E}(e^{tX})$ von X und geben Sie ihren Definitionsbereich an.

(b) Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz von X mit Hilfe der momenterzeugenden Funktion.

Lösung:

(a) Wir berechnen für $t \neq 0$

$$M_X(t) = \mathbb{E}(e^{tX}) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} \frac{1}{2} \mathbb{1}_{[-1,1]}(x)\, dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} e^{tx}\, dx = \frac{\sinh(t)}{t}.$$

Falls $t = 0$ gilt $M_X(0) = \mathbb{E}(e^0) = 1$. Somit ist $M_X(t) < +\infty$ für alle $t \in \mathbb{R}$, folglich ist ihr Definitionsbereich $\mathbb{R}$.

(b) Man hat $\mathbb{P}(|X| \leq 1) = 1$. Daher gilt fast sicher

$$\left| \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{(tX)^j}{j!} \right| \leq \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{|t|^j}{j!} = e^{|t|}.$$

Nach dem Satz der dominierten Konvergenz dürfen somit Erwartungswert und unendliche Summe vertauscht werden. Das ergibt

$$M_X(t) = \mathbb{E}\left(\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{(tX)^j}{j!} \right) = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{t^j}{j!} \mathbb{E}(X^j) = 1 + t\,\mathbb{E}(X) + \frac{t^2}{2}\, \mathbb{E}(X^2) + \sum_{j=3}^{+\infty} \frac{t^j}{j!} \mathbb{E}(X^j).$$

Weiter gilt mit der Reihendarstellung von sinh

$$\frac{\sinh(t)}{t} = \frac{1}{t} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{t^{2j+1}}{(2j+1)!} = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{t^{2j}}{(2j+1)!} = 1 + \frac{t^2}{3!} + \sum_{j=2}^{+\infty} \frac{t^{2j}}{(2j+1)!}.$$

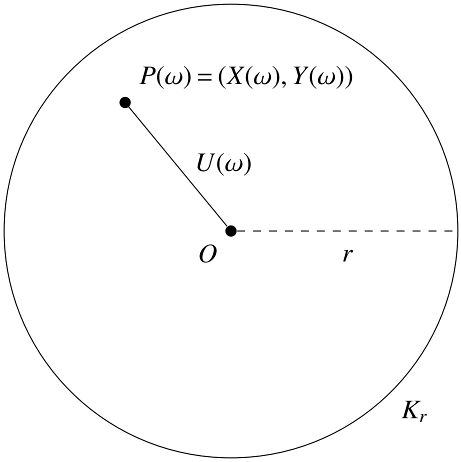
Durch Koeffizientenvergleich folgt daraus $\mathbb{E}(X) = 0$ und $\mathbb{E}(X^2) = \frac{1}{3}$. Damit gilt $\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \frac{1}{3}$.

Allgemein gilt für $k \in \mathbb{N}$

$$\mathbb{E}(X^k) = \begin{cases} 0 & \text{für } k \text{ ungerade,} \\ \frac{1}{k+1} & \text{für } k \text{ gerade.} \end{cases}$$

Aufgabe 3.10: Zufällige Punkte auf der Kreisscheibe ○●●

Es sei $K_r := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq r^2\}$ die um den Ursprung O zentrierte Kreisscheibe mit Radius $r > 0$. Mit $P := (X, Y)$ wird ein zufälliger Punkt in K_r bezeichnet, wobei P gleichverteilt auf K_r ist.



Es bezeichne weiter $\mathcal{A}_r$ den Flächeninhalt von K_r. Dann ist die Dichte von P gegeben durch

$$f_P(x, y) = \frac{1}{\mathcal{A}_r} \mathbb{1}_{K_r}(x, y) = \frac{1}{\pi r^2} \mathbb{1}_{K_r}(x, y).$$

(a) Berechnen Sie die marginalen Dichten der Zufallsvariablen X und Y. Sind X und Y unabhängig?

(b) Berechnen Sie $\mathrm{Cov}(X, Y)$.

(c) Berechnen Sie die Verteilungsfunktion der Zufallsvariable

$$U := \sqrt{X^2 + Y^2} = \| OP \|.$$

Nutzen Sie das Ergebnis, um die Dichte von U zu bestimmen.

(d) Berechnen Sie die folgenden Größen: $\mathbb{E}(U^2)$, $\mathbb{E}(X^2)$, $\mathbb{E}(Y^2)$, $\mathrm{Var}(X)$ und $\mathrm{Var}(Y)$.

Lösung:

(a) Wir erhalten die Dichte von X durch Integrieren der gemeinsamen Dichte von (X,Y) über die Werte von Y. Somit berechnen wir

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_{\mathbb{R}} f_P(x,y)\,dy = \frac{1}{\pi r^2}\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{K_r}(x,y)\,dy \\ &= \frac{1}{\pi r^2}\int_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}} dy\, \mathbb{1}_{[-r,r]}(x) = \frac{2\sqrt{r^2-x^2}}{\pi r^2}\,\mathbb{1}_{[-r,r]}(x). \end{aligned}$$

Analog erhält man als Dichte von Y

$$f_Y(y) = \frac{2\sqrt{r^2-y^2}}{\pi r^2}\,\mathbb{1}_{[-r,r]}(y).$$

Ein Plot der Funktion ist in Abbildung 3.1 dargestellt.

Die Zufallsvariablen X, Y sind voneinander abhängig, da

$$f_X(x)f_Y(y) = \left(\frac{2}{\pi r^2}\right)^2 \sqrt{(r^2-x^2)(r^2-y^2)}\,\mathbb{1}_{[-r,r]^2}(x,y) \neq \frac{1}{\pi r^2}\mathbb{1}_{K_r}(x,y) = f_P(x,y).$$

(b) Es gilt $\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$. Da es sich bei $x \mapsto x\sqrt{r^2-x^2}$ für $x \in [-r,r]$ um eine ungerade Funktion handelt, siehe Abbildung 3.2, erhalten wir

$$\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(X) = \frac{2}{\pi r^2}\int_{-r}^{r} x\sqrt{r^2-x^2}\,dx = 0.$$

Aufgrund der Symmetrieeigenschaften gilt weiter $\int_{\mathbb{R}} x\,\mathbb{1}_{K_r}(x,y)\,dx = 0$ für alle $y \in \mathbb{R}$. Daher

$$\mathbb{E}(XY) = \int_{\mathbb{R}^2} xy\, f_P(x,y)\,dx\,dy = \frac{1}{\pi r^2}\int_{\mathbb{R}^2} xy\,\mathbb{1}_{K_r}(x,y)\,dx\,dy = \frac{1}{\pi r^2}\int_{\mathbb{R}} 0\,dy = 0.$$

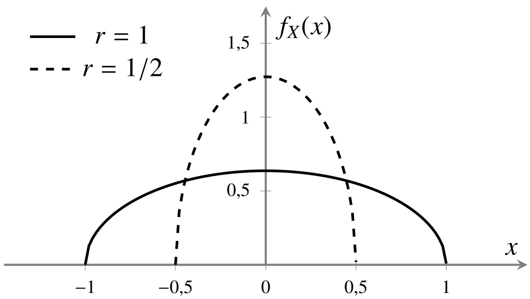


Abbildung 3.1: Graph der Funktion $x \mapsto f_X(x) = \frac{2}{\pi r^2}\sqrt{r^2-x^2}$.

Daher gilt $\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$. Also sind die Zufallsvariablen X, Y zwar unkorreliert, aber trotzdem abhängig.

(c) Die Verteilungsfunktion ergibt sich durch ein geometrisches Argument.

$$F_U(u) = \mathbb{P}(X^2 + Y^2 \leq u^2) = \frac{1}{\mathcal{A}_r} \int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{1}_{K_u}(x, y)\, dx\, dy = \frac{\mathcal{A}_u}{\mathcal{A}_r} = \frac{u^2}{r^2}.$$

Daraus folgt nun

$$F_U(u) = \frac{u^2}{r^2} \mathbb{1}_{[0,r]}(u) + \mathbb{1}_{(r,+\infty)}(u).$$

Als Dichte von U erhält man durch Ableiten

$$f_U(u) = F_U'(u) = \frac{2u}{r^2} \mathbb{1}_{[0,r]}(u).$$

Man bemerkt noch, dass U^2 auf $[0, r^2]$ gleichverteilt ist, denn

$$F_{U^2}(u) = F_U(\sqrt{u}) = \frac{u}{r^2} \mathbb{1}_{[0,r^2]}(u) + \mathbb{1}_{(r^2,+\infty)}(u).$$

Man beachte, dass beim Einsetzen von $\sqrt{u}$ in die Verteilungsfunktion auch die Indikatorfunktion anzupassen ist.

(d) Da U^2 auf $[0, r^2]$ gleichverteilt ist, ist $\mathbb{E}(U^2) = r^2/2$. Nach der Definition von U gilt dann

$$\frac{r^2}{2} = \mathbb{E}(U^2) = \mathbb{E}(X^2) + \mathbb{E}(Y^2) = 2\mathbb{E}(X^2),$$

und somit $\mathbb{E}(X^2) = \mathbb{E}(Y^2) = \frac{r^2}{4}$. Damit folgt

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) = \mathbb{E}(Y^2) = \mathrm{Var}(Y) = \frac{r^2}{4}.$$

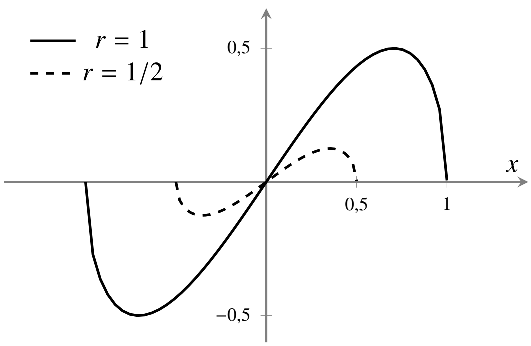


Abbildung 3.2: Graph der Funktion $x \mapsto x\sqrt{r^2 - x^2}$.

Bemerkung: Die x-Werte des zufälligen Punktes P häufen sich um 0 und streuen mit einer Standardabweichung von $\sqrt{\mathrm{Var}(X)} = r/2$. Dennoch liegen die zufälligen Punkte $P(\omega)$ nicht gehäuft um das Zentrum O von K_r. Das liegt an der Geometrie der Kreisscheibe, auf der die Gleichverteilung definiert wurde. Wählt man stattdessen ein achsenparalleles Quadrat, so sind die marginalen Dichten unabhängig und gleichverteilt.

Aufgabe 3.11: Dyadische Entwicklung ○●●

Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge unabhängiger und identisch verteilter Zufallsvariablen mit $X_i \sim \mathrm{Ber}(1/2)$. Man definiert

$$X := \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{X_i}{2^i}.$$

Beweisen Sie, dass X auf $[0,1]$-gleichmäßig verteilt ist.

Lösung: Wir zeigen $\mathbb{P}(X < x) = x$ für alle $x \in [0,1]$. Dazu nutzen wir die (eindeutige) dyadische Entwicklung, welche für jedes x gegeben ist durch

$$x = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{a_i}{2^i},$$

wobei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ und $\liminf_{n\to+\infty} a_n \neq 1$. Im Falle der Zufallsvariable X ergibt das

$$X = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{X_i}{2^i}.$$

Zunächst gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$\left\{\omega : \sum_{i=1}^{n} \frac{X_i(\omega)}{2^i} < \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{2^i}\right\} = \bigsqcup_{i=1}^{n} \left\{\omega : \bigcap_{k=1}^{i-1} \{X_k(\omega) = a_k\} \cap \{X_i(\omega) < a_i\}\right\}.$$

Daraus ergibt sich nun

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X < x) &= \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}\left(\{X_i < a_i\} \cap \bigcap_{k=1}^{i-1} \{X_k = a_k\}\right) \\ &= \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\mathbb{P}(X_i < a_i)}_{=\frac{a_i}{2}} \underbrace{\prod_{k=1}^{i-1} \mathbb{P}(X_k = a_k)}_{=\frac{1}{2^{i-1}}} = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{a^i}{2^i} = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{a^i}{2^i} = x.\end{aligned}$$

3.2.2 Exponential- und Gammaverteilung

Aufgabe 3.12: Trunkierte Exponentialverteilung ○●●

Sei X eine zum Parameter 1 exponentialverteilte Zufallsvariable, welche auf der Höhe $n \in \mathbb{N}$ abgeschnitten wird. Die trunkierte Zufallsvariable wird mit X_n notiert, also $X_n := \min(X, n)$. Sei F_{X_n} die zugehörige Verteilungsfunktion.

(a) Zeigen Sie, dass für $t \in \mathbb{R}$ gilt $F_{X_n}(t) = F_X(\min(n,t)) + e^{-n}\mathbb{1}_{[n,+\infty)}(t)$.

(b) Beweisen Sie, dass die Verteilung von X_n das Wahrscheinlichkeitsmaß μ_n ist, wobei

$$\mu_n = \nu_n + e^{-n}\delta_n$$

und das Maß ν_n die Dichte $g_n(t) = e^{-t}\mathbb{1}_{[0,n)}(t)$ besitzt.

(c) Prüfen Sie die Existenz des Erwartungswertes von X_n. Berechnen Sie im Falle der Existenz sowohl $\mathbb{E}(X_n)$ als auch $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}(X_n)$.

Lösung:

(a) Es gilt für $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
F_{X_n}(t) &= \mathbb{P}(\min(X,n) \le t) \\
&= \mathbb{P}(\min(X,n) \le t \,|\, X \le n)\,\mathbb{P}(X \le n) + \mathbb{P}(\min(X,n) \le t \,|\, X > n)\,\mathbb{P}(X > n) \\
&= \mathbb{P}(X \le \min(n,t)) + \mathbb{P}(X > n)\,\mathbb{1}_{[n,+\infty)}(t) = F_X(\min(n,t)) + e^{-n}\,\mathbb{1}_{[n,+\infty)}(t).
\end{aligned}$$

(b) Für den ersten Teil, $F_X(\min(n,t))$, erhalten wir durch Ableiten auf $[0,n)$

$$(F_X(\min(n,t)))' = f_X(\min(n,t))\mathbb{1}_{[0,n)}(t) = e^{-\min(n,t)}\mathbb{1}_{[0,n)}(t) = e^{-t}\mathbb{1}_{[0,n)}(t).$$

Da es sich weiter bei $\mathbb{1}_{[n,+\infty)}(t)$ gerade um die Verteilungsfunktion der Dirac-Verteilung in n handelt, ist die Verteilung von X_n genau durch μ_n gegeben mit

$$\mu_n = \nu_n + e^{-n}\delta_n.$$

(c) Die Existenz des Erwartungswertes von X_n folgt aus $0 \le X_n \le X$ und der Existenz des Erwartungswertes von X. Nun gilt

$$\mathbb{E}(X_n) = \int_{\mathbb{R}} x\,\mu_n(dx) = \int_0^n xe^{-x}\,dx + e^{-n}n = -(n+1)e^{-n} + 1 + e^{-n}n = 1 - e^{-n}.$$

Für $n \to +\infty$ erhalten wir dann $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{E}(X_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} 1 - e^{-n} = 1 = \mathbb{E}(X)$.

Bemerkung: Im letzten Aufgabenteil wird die Kommutativität zwischen der Bildung des Grenzwertes und des Erwartungswertes verifiziert. Dies ist begründet in der Monotonie von $n \mapsto X_n$.

Aufgabe 3.13: Minimum von exponentialverteilten Zufallsvariablen ○●●

Sei $(X_i)_{i=1,\dots,n}$ eine Folge unabhängiger Zufallsvariablen mit $X_i \sim \operatorname{Exp}(\lambda_i)$. Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion von $Y := \min(X_1, \dots, X_n)$.

Lösung: Man bemerkt zunächst, dass Y fast sicher positiv ist. Man definiere $\lambda := \sum_{i=1}^n \lambda_i$. Dann gilt aufgrund der Unabhängigkeit für $t > 0$

$$\mathbb{P}(Y > t) = \mathbb{P}(\min(X_1, \dots, X_n) > t) = \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(X_i > t) = \prod_{i=1}^n \exp(-\lambda_i t) = \exp(-\lambda\, t).$$

Folglich ist $F_Y(t) = 1 - \exp(-\lambda\, t)$ und Y exponentialverteilt zur Intensität λ.

Bemerkung: Damit ist die Klasse der exponentialverteilten Zufallsvariablen stabil unter der Bildung von Minima, vorausgesetzt die Unabhängigkeitsannahme gilt.

Aufgabe 3.14: Konzentrationsungleichungen ○●●

Sei X eine positive Zufallsvariable und ihre momenterzeugende Funktion

$$M_X(t) := \mathbb{E}(e^{tX}) \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}.$$

(a) Beweisen Sie, dass für alle $s, t > 0$ gilt

$$\mathbb{P}(X \geq s) \leq e^{-st} M_X(t).$$

(b) Sei $X \sim \operatorname{Exp}(1)$. Für welche Werte von t ist $M_X(t)$ endlich? Bestimmen Sie durch Optimierung der Ungleichung eine obere Schranke für die Wahrscheinlichkeit, dass X mindestens zweimal ihren Erwartungswert überschreitet.

(c) Sei $X \sim \operatorname{Poi}(\lambda)$ mit $\lambda > 0$. Für welche Werte von t ist $M_X(t)$ endlich? Bestimmen Sie durch Optimierung der Ungleichung eine obere Schranke für die Wahrscheinlichkeit, dass X mindestens zweimal ihren Erwartungswert überschreitet.

Lösung:

(a) Mit Hilfe der Bienaymé-Tschebyschoff-Ungleichung gilt für $s, t > 0$

$$\mathbb{P}(X \geq s) = \mathbb{P}(e^{tX} \geq e^{st}) \leq \mathbb{E}(e^{tX})\, e^{-st} = M_X(t)\, e^{-st}.$$

(b) Wir sind interessiert an $\mathbb{P}(X \geq 2\mathbb{E}(X)) = \mathbb{P}(X \geq 2)$. Dazu berechnen wir für $t \in \mathbb{R}^+$

$$M_X(t) = \int_0^{+\infty} e^{tx} e^{-x}\, dx.$$

Daher gilt $M_X(t) < +\infty$ genau dann, wenn $e^{x(t-1)} \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(x) \in L^1$ das heißt wenn $t < 1$. Somit berechnen wir weiter für $t \in [0, 1)$

$$M_X(t) = -\frac{1}{1-t} e^{-(1-t)x} \Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{1-t}.$$

Folglich erhalten wir

$$\mathbb{P}(X \geq 2) \leq \frac{e^{-2t}}{1-t} =: g(t).$$

Da wir an einer möglichst scharfen oberen Schranke interessiert sind, minimieren wir g. Die erste Ableitung ist gegeben durch

$$g'(t) = \frac{e^{-2t}\,(2t-1)}{(1-t)^2},$$

mit Nullstelle $t^* = \frac{1}{2} \in (0, 1)$. Die zweite Ableitung ist

$$g''(t) = -\frac{2\,(2t^2 - 2t + 1)\, e^{-2t}}{(t-1)^3}.$$

Es gilt $g''(t^*) > 0$ und somit nimmt g in $\frac{1}{2}$ ein Minimum an. Insgesamt folgt somit

$$\mathbb{P}(X \geq 2) \leq \frac{e^{-2\cdot\frac{1}{2}}}{1-\frac{1}{2}} = 2e^{-1} \approx 0{,}736.$$

Andererseits gilt

$$\mathbb{P}(X \geq 2) = 1 - F_X(2) = e^{-2} \approx 0{,}135.$$

Die optimierte obere Schranke ist also $2\,e$-mal größer als der tatsächliche Wert von $\mathbb{P}(X \geq 2)$. Dies zeigt, dass diese Konzentrationsungleichung nicht scharf ist, falls X exponentialverteilt ist.

(c) Wir sind interessiert an $\mathbb{P}(X \geq 2\mathbb{E}(X)) = \mathbb{P}(X \geq 2\lambda)$. Für die momenterzeugende Funktion berechnen wir

$$M_X(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{tk} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\lambda e^t)^k}{k!} = e^{\lambda(e^t - 1)},$$

womit $M_X(t) < +\infty$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

Folglich gilt

$$\mathbb{P}(X \geq 2\lambda) \leq e^{-2\lambda t} M_X(t) = e^{\lambda\left(e^t - 1 - 2t\right)} =: h(t).$$

Wir sind erneut an einer möglichst scharfen oberen Schranke interessiert und berechnen daher als Ableitungen von h

$$\begin{aligned} h'(t) &= \lambda \left(e^t - 2\right) e^{\lambda\left(e^t - 1 - 2t\right)}, \\ h''(t) &= \lambda \left(\lambda e^{2t} + (1 - 4\lambda) e^t + 4\lambda\right) e^{\lambda\left(e^t - 1 - 2t\right)}. \end{aligned}$$

Dies führt zu $t^* = \ln(2)$ als Minimum von h. Insgesamt erhalten wir somit

$$\mathbb{P}(X \geq 2\lambda) \leq e^{\lambda(1 - 2\ln(2))} \approx e^{-0{,}386\,\lambda}.$$

Im Falle von $\lambda = 4$ erhält man also als obere Schranke 0,212. Die direkte Berechnung ergibt $\mathbb{P}(X \geq 8) = 1 - \mathbb{P}(X \leq 7) \approx 1 - 0{,}949 = 0{,}051$.

Aufgabe 3.15: Erlang-Poisson-Beziehung ○●●

Sei $(X_i)_{i\geq 1}$ eine Folge unabhängiger, zum Parameter $\lambda \in \mathbb{R}^+$ exponentialverteilter Zufallsvariablen. Definieren Sie

$$S_0 := 0, \qquad S_n := \sum_{i=1}^{n} X_i.$$

(a) Bestimmen Sie eine Dichte von S_n für $n \geq 1$.

(b) Bestimmen Sie $\mathbb{P}(S_{n-1} \leq x < S_n)$, $x > 0$, und interpretieren Sie das Resultat.

Lösung:

(a) Man betrachtet zunächst S_2. Nach Faltungsformel gilt für $t \geq 0$

$$\begin{aligned} f_{S_2}(t) = f_{X_1+X_2}(t) &= \int_{\mathbb{R}} f_{X_1}(s) f_{X_2}(t-s)\, ds \\ &= \lambda^2 \int_0^t e^{-\lambda s}\, e^{-\lambda(t-s)}\, ds = \lambda^2\, e^{-\lambda t} \int_0^t ds = \lambda^2\, e^{-\lambda t}\, t. \end{aligned}$$

Für $t < 0$ verschwindet die Dichte.

Man benutzt die Faltungsformel für die Dichten von S_{n-1} und X_n und findet per Induktion

$$f_{S_n}(t) = \lambda \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}\, e^{-\lambda t}\, \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(t).$$

Die Verteilung von S_n wird *Erlang-Verteilung* genannt und ist ein Spezialfall der Gammaverteilung.

(b) Es gilt allgemein für Ereignisse A, B, dass $\mathbb{P}(A \setminus B) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B)$. Daher gilt für $x > 0$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(S_n > x, S_{n-1} \leq x) &= \mathbb{P}(S_n > x) - \mathbb{P}(\{S_n > x\} \cap \{S_{n-1} \leq x\}^c) \\ &= \mathbb{P}(S_n > x) - \mathbb{P}(S_{n-1} > x).\end{aligned}$$

Mittels partieller Integration ist weiter

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(S_n > x) &= 1 - \lambda \int_0^x \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda t}\, dt \\ &= \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda t}\Big|_0^x + 1 - \lambda \int_0^x \frac{(\lambda t)^{n-2}}{(n-2)!} e^{-\lambda t}\, dt \\ &= \frac{(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda x} + \mathbb{P}(S_{n-1} > x).\end{aligned}$$

Daher ist

$$\mathbb{P}(S_{n-1} \leq x < S_n) = \frac{(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda x} = \mathrm{Poi}(\lambda x)(\{n-1\}).$$

Insbesondere $\mathbb{P}(S_0 \leq x < S_1) = \mathbb{P}(X_1 > x) = e^{-\lambda x}$.

Führt man die partielle Integration in der vorigen Formel fort, so folgt

$$\mathbb{P}(S_n > x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\lambda x)^k}{k!} e^{-\lambda x}.$$

Daher gilt für die Verteilungsfunktion der Erlang-Verteilung

$$F_{S_n}(x) = 1 - F_Y(n-1),$$

wobei $Y \sim \mathrm{Poi}(\lambda x)$.

3.2.3 Normalverteilung

Aufgabe 3.16: Betrag der Standardnormalverteilung ○●●

Sei X eine $\mathcal{N}(0,1)$-verteilte Zufallsvariable.

(a) Berechnen Sie eine Dichte von $|X|$.

(b) Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz von $|X|$.

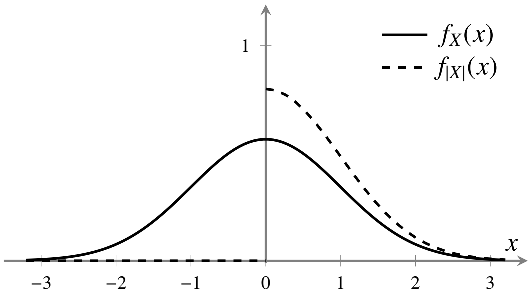


Abbildung 3.3: Graphen der Dichten f_X und $f_{|X|}$.

Lösung:

(a) Man benutzt die Symmetrie von X. Für $t \geq 0$ gilt

$$F_{|X|}(t) = \mathbb{P}(|X| \leq t) = \mathbb{P}(-t \leq X \leq t) = \Phi(t) - \Phi(-t) = 2\Phi(t) - 1,$$

wobei Φ die übliche Notation für F_X ist, siehe Appendix A.2. Durch Ableiten erhält man dann als Dichte für $x > 0$

$$f_{|X|}(x) = 2f_X(x) = 2F'_X(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right).$$

(b) Mittels Substitution $z = x^2/2$ berechnet man

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(|X|) &= \int_{-\infty}^{+\infty} |x| f_{|X|}(x)\,dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty} x\,e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty} e^{-z^2}\,dz = \sqrt{\frac{2}{\pi}} - \mathrm{e}^{-z}\Big|_0^{+\infty} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \approx 0{,}798.\end{aligned}$$

Da $\mu = 0$ ergibt sich für das zweite Moment

$$\mathbb{E}(|X|^2) = \mathbb{E}(X^2) = \mathrm{Var}(X) = 1.$$

Daher folgt

$$\mathrm{Var}(|X|) = \mathbb{E}(|X|^2) - \mathbb{E}(|X|)^2 = 1 - \frac{2}{\pi} \approx 0{,}36 < \mathrm{Var}(X) = 1.$$

Bemerkung: Anhand der Varianz fällt auf, dass der Betrag der Standardnormalverteilung konzentrierter um ihren Erwartungswert ist als die Standardnormalverteilung. Dies wird auch deutlich, wenn man die Graphen der Dichten von X und $|X|$ betrachtet, siehe Abbildung 3.3.

Aufgabe 3.17: Logarithmische Normalverteilung ○●●

Eine Zufallsvariable X heißt *log-normalverteilt* mit Parametern $m \in \mathbb{R}$ und $\sigma^2 > 0$, falls die Verteilung von $\log X$ gleich der Normalverteilung $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ ist. Sei nun X eine log-normalverteilte Zufallsvariable mit Parametern m und σ^2.

(a) Zeigen Sie, dass für $r > 0$ gilt

$$\mathbb{E}(X^r) = e^{rm+\frac{1}{2}\sigma^2 r^2}.$$

(b) Berechnen Sie unter Verwendung von (a) den Erwartungswert und die Varianz von X.

(c) Zeigen Sie, dass X^r log-normalverteilt ist und geben Sie die Parameter an.

Lösung:

(a) Da X log-normalverteilt ist mit Parametern m, σ^2, gilt $X = \exp(Y)$. Dabei ist $Y \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$. Falls M_Y die momenterzeugende Funktion von Y ist, gilt

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X^r) = \mathbb{E}\left(e^{rY}\right) = M_Y(r) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(ry)\, \exp\left(-\frac{(y-m)^2}{2\sigma^2}\right) dy \\
&= \exp\left(-\frac{m^2}{2\sigma^2} + \frac{(m+r\sigma^2)^2}{2\sigma^2}\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{(y-(m+\sigma^2 r))^2}{2\sigma^2}\right) dy \\
&= \exp\left(\frac{2rm\sigma^2}{2\sigma^2} + \frac{r^2\sigma^4}{2\sigma^2}\right) = \exp\left(rm + \frac{1}{2}\sigma^2 r^2\right).
\end{aligned}$$

(b) Aus Teil (a) folgt mit $r = 1$

$$\mathbb{E}(X) = e^{m+\frac{\sigma^2}{2}}.$$

Für die Varianz berechnet man analog für $r = 2$

$$\operatorname{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = e^{2m+2\sigma^2} - e^{2m+\sigma^2} = e^{2m+\sigma^2}(e^{\sigma^2} - 1).$$

(c) Da $\ln(X) \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$, gilt $\ln(X^r) = r\ln(X) = rY \sim \mathcal{N}(rm, r^2\sigma^2)$.

Bemerkung: Die Poisson-Verteilung ist eine Wahrscheinlichkeitsverteilung, die in der Versicherungsmathematik die Häufigkeit von Schäden beschreibt. Hingegen beschreibt die Log-Normalverteilung die Schadenshöhen. Die (zufällige) Gesamtschadenshöhe hat mit dieser Modellierung wieder eine bekannte Verteilung, siehe Aufgabe 2.37.

Aufgabe 3.18: Mehrdimensionale Normalverteilung und Projektion ○●●

Sei X ein dreidimensionaler, normalverteilter Vektor, dessen Erwartungswert und Kovarianzmatrix als

$$\mu = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad K = \begin{pmatrix} 10 & -1 & 4 \\ -1 & 1 & -1 \\ 4 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

gegeben sind. Beweisen Sie, dass X fast sicher zu einer Hyperebene von $\mathbb{R}^3$ gehört und bestimmen Sie diese.

Lösung: Da $\det(K) = 0$, ist K eine singuläre Matrix. Daraus folgt die Existenz eines Vektors $z \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$, sodass $z^\top K z = 0$. Somit ist die Zufallsvariable $z^\top X$ normalverteilt mit Erwartungswert $z^\top \mu$ und Varianz $z^\top K z = 0$. Definiert man die Hyperebene

$$H := \{x \in \mathbb{R}^3 : z^\top x = z^\top \mu\},$$

gilt somit $\mathbb{P}(X \in H) = 1$. Dies führt zu einem Eigenwertproblem und wir sind an den Eigenvektoren zu Eigenwerten ungleich Null interessiert. Um zunächst die Eigenwerte zu erhalten, betrachten wir das charakteristische Polynom

$$\begin{aligned} \varphi_K(\lambda) = \det(K - \lambda I) &= \det \begin{pmatrix} 10-\lambda & -1 & 4 \\ -1 & 1-\lambda & -1 \\ 4 & -1 & 2-\lambda \end{pmatrix} \\ &= -\lambda^3 + 13\lambda^2 - 14\lambda = -\lambda\left(\lambda^2 - 13\lambda + 14\right), \end{aligned}$$

wobei I die Identitätsmatrix in $\mathbb{R}^3$ sei.

Offensichtlich ist $\lambda_1 = 0$ ein Eigenwert von K. Durch Lösen der Gleichung $\lambda^2 - 13\lambda + 14 = 0$ erhalten wir außerdem

$$\lambda_2 = \frac{13 - \sqrt{113}}{2} \quad \text{und} \quad \lambda_3 = \frac{13 + \sqrt{113}}{2}.$$

Wir berechnen den zu λ_i gehörigen Eigenvektor $v_i \in V_i$ durch Lösen von $(K - \lambda_i I)v_i = 0$ für $i = 2, 3$. Dies resultiert in den folgenden Räumen der Eigenvektoren

$$V_i = \{\alpha_i v_i : \alpha_i \in \mathbb{R}\} \quad \text{mit} \quad v_2 = \begin{pmatrix} \frac{-\sqrt{113}+6}{7} \\ \frac{-\sqrt{113}-15}{14} \\ 1 \end{pmatrix} v_3 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{113}+6}{7} \\ \frac{\sqrt{113}-15}{14} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Wir erhalten als Hyperebene

$$H = \{x \in \mathbb{R}^3 : x = \mu + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 \text{ mit } \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}\}.$$

Aufgabe 3.19: Nicht-Gaußscher Vektor mit Gaußschen Randverteilungen○●●

Sei $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ eine standardnormalverteilte Zufallsvariable. Sei $Z : \Omega \to \{-1,+1\}$ gleichverteilt und unabhängig von X. Man definiere das Produkt $Y := XZ$.

(a) Zeigen Sie, dass Y ebenfalls standardnormalverteilt ist.

(b) Ist der Zufallsvektor (X, Y) normalverteilt?

Lösung:

(a) Man benutze die Symmetrie der Verteilung von X: $\mathbb{P}_{-X} = \mathbb{P}_X = \mathcal{N}(0,1)$ und ihre Unabhängigkeit von Z. Für beliebige $t \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} F_Y(t) := \mathbb{P}(Y \le t) = \mathbb{P}(XZ \le t) &= \mathbb{P}(XZ \le t,\, Z = -1) \;+\; \mathbb{P}(XZ \le t,\, Z = 1) \\ &= \frac{1}{2}\mathbb{P}(X \ge -t) + \frac{1}{2}\mathbb{P}(X \le t) = \mathbb{P}(X \le t) = F_X(t). \end{aligned}$$

Aus $F_Y \equiv F_X$ schließt man, dass $P_Y = P_X = \mathcal{N}(0,1)$.

(b) Um zu beweisen, dass der Zufallsvektor (X, Y) nicht normalverteilt ist, genügt es zu zeigen, dass eine bestimmte Linearkombination, hier $W := X + Y$, nicht normalverteilt ist. Man berechnet:

$$\mathbb{P}(W = 0) = \mathbb{P}(X(1 + Z) = 0) = \mathbb{P}(\{X = 0\} \cup \{Z = -1\}) = \mathbb{P}(Z = -1) = \frac{1}{2}$$

da $\mathbb{P}(X = 0) = 0$. Wenn W den Wert Null mit Wahrscheinlichkeit $1/2$ gewichtet, kann ihre Verteilung keine Normalverteilung sein.

3.2.4 Sonstiges

Aufgabe 3.20: Erwartungswert und Varianz stetiger Zufallsvariablen ○○●

Sei X eine Zufallsvariable mit Werten in $[0,1]$ und Dichte

$$f_X(x) = x^2 + c, \quad x \in [0,1],$$

wobei $c \in \mathbb{R}$ eine Konstante ist.

(a) Berechnen Sie c.

(b) Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz von X.

Lösung:

(a) Damit f_X eine Wahrscheinlichkeitsdichte ist, muss gelten $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,dx = 1$. Daher berechnet man

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,dx = \int_0^1 (x^2 + c)\,dx = \frac{1}{3} + c,$$

also $c = \frac{2}{3}$.

(b) Es gilt

$$\mathbb{E}(X) = \int_0^1 x(x^2 + c)\,dx = \int_0^1 (x^3 + cx)\,dx = \left(\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}cx^2\right)\Bigg|_0^1 = \frac{7}{12} \approx 0{,}58.$$

Weiter gilt $\operatorname{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$. Daher berechnet man

$$\mathbb{E}(X^2) = \int_0^1 x^2(x^2 + c)\,dx = \int_0^1 (x^4 + cx^2)\,dx = \left(\frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{3}cx^3\right)\Bigg|_0^1 = \frac{19}{45} \approx 0{,}42.$$

Also folgt

$$\operatorname{Var}(X) = \frac{19}{45} - \left(\frac{7}{12}\right)^2 = \frac{59}{720} \approx 0{,}08.$$

Aufgabe 3.21: Momente der allgemeinen Cauchy-Verteilung ○●●

Die Dichte der Cauchy-Verteilung $C(\mu, \lambda)$, $(\mu, \lambda) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$, ist gegeben durch:

$$f(x) = \frac{1}{\pi\lambda} \frac{1}{1 + (\frac{x-\mu}{\lambda})^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

(a) Sei $X \sim C(0, 1)$. Berechnen Sie $\mathbb{P}(X \in [0, 1])$.

(b) Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz einer $C(\mu, \lambda)$-verteilten Zufallsvariable, falls existent.

Lösung:

(a) Wir berechnen zunächst die Verteilungsfunktion von X

$$F_X(t) = \int_{-\infty}^{t} f_X(x)\,dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{1 + x^2}\,dx = \frac{1}{\pi} \arctan(t) + \alpha.$$

Um α zu bestimmen, benutzen wir die Limeseigenschaften von F_X.

Also

$$\lim_{t\to+\infty} F_X(t) = \frac{1}{\pi}\frac{\pi}{2} + \alpha = 1,$$

womit $\alpha = \frac{1}{2}$ folgt. Somit ist die Verteilungsfunktion gegeben durch

$$F_X(t) = \frac{1}{\pi}\arctan(t) + \frac{1}{2}.$$

Für die gesuchte Wahrscheinlichkeit ergibt sich

$$\mathbb{P}(X \in [0,1]) = F_X(1) - F_X(0) = \frac{1}{\pi}(\arctan(1) - \arctan(0)) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{4} - 0\right) = \frac{1}{4}.$$

(b) Der Erwartungswert existiert, falls $\int_{-\infty}^{+\infty} |x| f(x)\,dx < \infty$. Aufgrund der Symmetrie der Dichte und unter Verwendung der Dreiecksungleichung berechnen wir nun

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} |x| f(x)\,dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} |\mu + x - \mu| f(x)\,dx \le |\mu| + \int_{-\infty}^{+\infty} |x-\mu| f(x)\,dx \\ &= |\mu| + \frac{1}{\pi\lambda}\int_{-\infty}^{+\infty} |x-\mu| \frac{1}{1+\left(\frac{x-\mu}{\lambda}\right)^2}\,dx.\end{aligned}$$

Der Integrand ist symmetrisch, daher genügt es, über $\mathbb{R}^+$ zu integrieren. Die Substitution $y = x - \mu$ ergibt nun weiter

$$\begin{aligned}|\mu| + \frac{2}{\pi\lambda}\int_0^{+\infty} \frac{y}{1+\frac{y^2}{\lambda^2}}\,dy &= |\mu| + \frac{2\lambda}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{y}{\lambda^2 + y^2}\,dy \\ &= |\mu| + \frac{2\lambda}{\pi}\frac{\ln(\lambda^2 + y^2)}{2}\Bigg|_0^{+\infty} = +\infty.\end{aligned}$$

Somit existiert der Erwartungswert der Cauchy-Verteilung nicht.

Da $\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$, existiert auch die Varianz nicht.

Aufgabe 3.22: Symmetrische Verteilungen ○○●

Eine Dichte f wird *symmetrisch* genannt, falls $f(-x) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Eine Zufallsvariable X wird symmetrisch genannt, falls X und $-X$ dieselbe Verteilung besitzen. Sei X eine reellwertige Zufallsvariable mit Dichte f_X.

(a) Beweisen Sie, dass X symmetrisch ist, genau dann wenn f_X symmetrisch ist.

(b) Geben Sie Beispiele symmetrischer Verteilungen.

Lösung:

(a) Sei X eine symmetrische Zufallsvariable. Dann haben X und $-X$ dieselbe Verteilung und somit gilt $f_X = f_{-X}$. Außerdem gilt für $t \in \mathbb{R}$

$$F_{-X}(t) = \mathbb{P}(-X \leq t) = \mathbb{P}(X \geq -t) = 1 - \mathbb{P}(X < -t) = 1 - F_X(-t).$$

Ableiten ergibt dann

$$f_X(x) = f_{-X}(x) = F'_{-X}(x) = (1 - F_X(-x))' = f_X(-x).$$

Daher ist die Dichte f_X symmetrisch.

Andererseits, sei die Dichte f_X symmetrisch. Dann gilt für jede messbare positive Testfunktion h

$$\mathbb{E}(h(-X)) = \int_{\mathbb{R}} h(-x) f_X(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}} h(x) f_X(-x)\, dx = \int_{\mathbb{R}} h(x) f_X(x)\, dx = \mathbb{E}(h(X)).$$

Daraus folgt, dass X und $-X$ dieselbe Verteilung haben.

(b) Die folgenden Verteilungen sind symmetrisch:

- Normalverteilung $\mathcal{N}(0,1)$ mit Dichte $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$.
- Laplace-Verteilung ($\alpha = 1$) mit Dichte $x \mapsto \frac{1}{2} \mathrm{e}^{-|x|}$.
- Cauchy-Verteilung C(0, 1) mit Dichte $x \mapsto \frac{1}{\pi} \frac{1}{1 + x^2}$.

Die Graphen der Dichten sind nachfolgend in Abbildung 3.4 dargestellt.

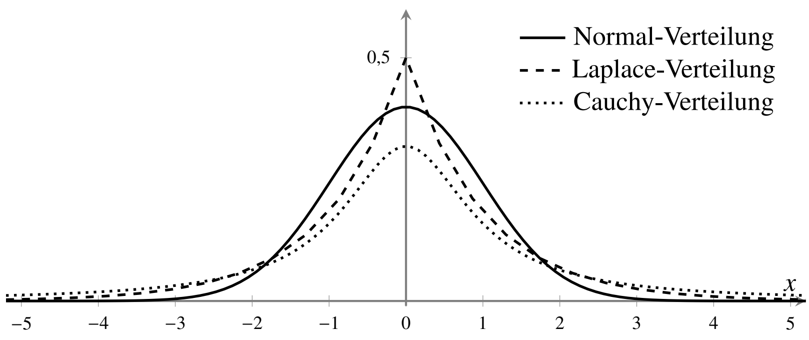


Abbildung 3.4: Graphen der Dichten der Normal-, Laplace- und Cauchy-Verteilungen.

Aufgabe 3.23: Median ○●●

Ein *Median* einer Zufallsvariable X ist eine reelle Zahl $m \in \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft

$$\mathbb{P}(X \leq m) \geq \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad \mathbb{P}(X \geq m) \geq \frac{1}{2}.$$

(a) Finden Sie die Mediane der Zufallsvariable X, die die folgenden Verteilungen annimmt. Vergleichen Sie den Median mit dem Maximalpunkt der (Zähl-)Dichte, auch Maximum-Likelihood-Wert genannt, und dem Erwartungswert der entsprechenden Verteilung.

(i) $X \sim \text{Bin}(6, 2/5)$. Benutzen Sie folgende Tabelle:

k	0	1	2	3	4	5	6
$\mathbb{P}(X = k)$	0,047	0,187	0,311	0,277	0,138	0,037	0,004
$F_X(k)$	0,047	0,233	0,544	0,821	0,959	0,996	1

(ii) $X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$

(iii) $X \sim \text{C}(0, 1)$

(b) Zeigen Sie, dass ein Median m die L^1-Abweichung von X zu einer beliebigen Konstanten minimiert, das heißt für alle $a \in \mathbb{R}$ gilt

$$\mathbb{E}(|X - a|) \geq \mathbb{E}(|X - m|).$$

Hinweis: *Zeigen Sie zunächst die folgende Gleichung für $a < m$*

$$|X - a| - |X - m| = (m - a)(2\mathbb{1}_{\{X \geq m\}} - 1) + 2(X - a)\mathbb{1}_{\{a < X < m\}}.$$

(c) Zeigen Sie, dass für jeden Median m von X der Ausdruck $\mathbb{E}(|X - m|)$ den gleichen Wert hat.

Lösung:

(a) Die Bedingung $\mathbb{P}(X \leq m) \geq \frac{1}{2}$ ist äquivalent zu $F_X(m) \geq \frac{1}{2}$ und die Bedingung $\mathbb{P}(X \geq m) \geq \frac{1}{2}$ ist äquivalent zu $\lim_{t \searrow m} F_X(t) = F_X(m-) \leq \frac{1}{2}$, siehe hierzu auch Aufgabe 2.7 in Sektion 2.2.1.

(i) Für die Binomialverteilung erhält man nach der Tabelle

$$F_X(2) = \mathbb{P}(X \leq 2) = 0{,}544 > \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad F_X(2-) = F_X(1) = 0{,}233 \leq \frac{1}{2}.$$

Daher ist 2 der einzige Median der Verteilung. Anhand der Tabelle stellt man ebenso fest, dass das Maximum der Zähldichte bei 2 angenommen wird. Zuletzt berechnet man für den Erwartungswert

$$\mathbb{E}(X) = np = 6 \cdot \frac{2}{5} = \frac{12}{5} = 2{,}4.$$

(ii) Da die Verteilungsfunktion der Normalverteilung stetig ist, ist der Median der Verteilung eindeutig und durch $F_X(m) = \frac{1}{2}$ bestimmt. Die Dichte ist symmetrisch bezüglich $x = m$ und somit ist m der Median. Ebenso wird das Maximum der Dichte an der Stelle m angenommen und der Erwartungswert ist gegeben durch $\mathbb{E}(X) = m$. Somit stimmen alle drei Werte überein.

(iii) Die Dichte der Cauchy-Verteilung $\mathrm{C}(0,1)$ ist symmetrisch bezüglich $x = 0$. Daher ist der Median durch 0 gegeben. Das Maximum ist ebenso an der Stelle 0 erreicht. Jedoch existiert der Erwartungswert der Verteilung nicht, wie man in Aufgabe 3.21 sieht.

(b) Für $a < m$ gilt zunächst

$$\begin{aligned}
&|X-a| - |X-m| \\
&\quad = \mathbb{1}_{\{X\geq m\}}(X-a-(X-m)) + \mathbb{1}_{\{X\leq a\}}(-(X-a)+(X-m)) \\
&\qquad + \mathbb{1}_{\{a<X<m\}}(X-a+(X-m)) \\
&\quad = (m-a)(\mathbb{1}_{\{X\geq m\}} - \mathbb{1}_{\{X\leq a\}}) + \mathbb{1}_{\{a<X<m\}}(2X-2a-(m-a)) \\
&\quad = (m-a)(\mathbb{1}_{\{X\geq m\}} - \mathbb{1}_{\{X<m\}}) + 2(X-a)\mathbb{1}_{\{a<X<m\}} \\
&\quad = (m-a)(\mathbb{1}_{\{X\geq m\}} - (1-\mathbb{1}_{\{X\geq m\}})) + 2(X-a)\mathbb{1}_{\{a<X<m\}} \\
&\quad = (m-a)(2\,\mathbb{1}_{\{X\geq m\}} - 1) + 2(X-a)\mathbb{1}_{\{a<X<m\}}.
\end{aligned}$$

Damit folgt

$$\mathbb{E}(|X-a| - |X-m|) = \underbrace{(m-a)}_{\geq 0}(2\,\underbrace{\mathbb{P}(X\geq m)}_{\geq \frac{1}{2}} - 1) + 2\,\underbrace{\mathbb{E}((X-a)\mathbb{1}_{\{a<X<m\}})}_{\geq 0} \geq 0.$$

Eine analoge Rechnung für $a > m$ ergibt ebenfalls

$$\mathbb{E}(|X-a| - |X-m|) \geq 0$$

und somit für alle $a \in \mathbb{R}$.

(c) Seien m_1, m_2 zwei Mediane von X. Dann ergibt sich mit der eben bewiesenen Gleichung

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(|X-m_1|) &\leq \mathbb{E}(|X-m_2|) \\
\mathbb{E}(|X-m_2|) &\leq \mathbb{E}(|X-m_1|).
\end{aligned}$$

Daraus folgt, dass $\mathbb{E}(|X-m_1|) = \mathbb{E}(|X-m_2|)$ und somit ist die Größe $\mathbb{E}(|X-m_i|)$ unabhängig von i.

Bemerkung: Die in den Teilaufgaben (b) und (c) bewiesenen Aussagen gelten sowohl für diskrete als auch für stetige Zufallsvariablen.

3.3 Summen von Zufallsvariablen

Aufgabe 3.24: Summe gleichverteilter Zufallsvariablen ●●●

Seien $(U_i)_{1\le i\le n}$ unabhängige Zufallsvariablen mit $U_i \sim \mathcal{U}_{[0,1)}$. Für $n \in \mathbb{N}$ sei

$$X_n := \sum_{i=1}^{n} U_i.$$

(a) Bestimmen Sie eine Dichte von X_2.

(b) Zeigen Sie, dass eine Dichte von X_n gegeben ist durch

$$f_{X_n}(x) = \frac{1}{(n-1)!} \sum_{k=0}^{\lfloor x \rfloor} (-1)^k \binom{n}{k} (x-k)^{n-1} \mathbb{1}_{[0,n)}(x).$$

Lösung:

(a) Aufgrund der Unabhängigkeit von U_1 und U_2 gilt mit der Faltungsformel für $x \in \mathbb{R}$

$$f_{X_2}(x) = \int_{\mathbb{R}} f_{U_1}(x-y) f_{U_2}(y)\, dy = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{[0,1)}(x-y)\mathbb{1}_{[0,1)}(y)\, dy.$$

Das Produkt der Indikatorfunktionen lässt sich umschreiben zu

$$\mathbb{1}_{[0,1)}(x-y)\mathbb{1}_{[0,1)}(y) = \mathbb{1}_{[0,1)\cap(x-1,x]}(y).$$

Diese Funktion ist Null für alle $x \notin [0,2]$. Mit einer Fallunterscheidung für x gilt nun

$$\begin{aligned} f_{X_2}(x) &= \int_0^x dy\, \mathbb{1}_{[0,1)}(x) + \int_{x-1}^{1} dy\, \mathbb{1}_{[1,2)}(x) \\ &= x\, \mathbb{1}_{[0,1)}(x) + (2-x)\, \mathbb{1}_{[1,2)}(x). \end{aligned}$$

Die Funktion ist in Abbildung 3.5 gezeigt. Eine andere Schreibweise der Dichte ist

$$f_{X_2}(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor x \rfloor} (-1)^k \binom{2}{k} (x-k)\, \mathbb{1}_{[0,2)}(x).$$

(b) Die allgemeine Aussage für beliebiges n erhält man durch Induktion. Der Fall $n = 1$ ist per Voraussetzung gegeben und der Fall $n = 2$ wurde in (a) behandelt. Daher sei angenommen, die Gültigkeit der Aussage wäre bereits für n bestätigt.

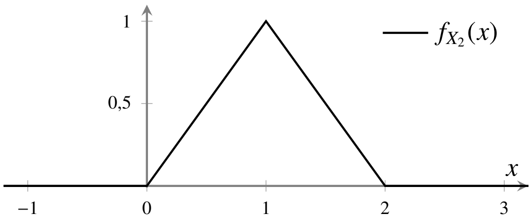


Abbildung 3.5: Graph der Dichte von $X_2 = U_1 + U_2$.

Wegen $X_{n+1} = X_n + U_{n+1}$ und der Unabhängigkeit gilt nach Faltungsformel und einer analogen Rechnung für die Indikatorfunktionen wie in (a):

$$f_{X_{n+1}}(x) = f_{X_n+U_{n+1}}(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{\lfloor y \rfloor} (-1)^k (y-k)^n \mathbb{1}_{[0,n)\cap(x-1,x]}(y)\, dy.$$

Da f_{X_n} nur auf $[0,n)$ nicht Null ist, genügt es, $x \in [0, n+1)$ zu betrachten. Die Fälle, in denen $x \in \mathbb{N} \cap [0, n+1)$ gilt, sind vernachlässigbar.

Sei $m := \lfloor x \rfloor \in \mathbb{N}$. Dann gilt für festes $x \in [0, n+1)$

$$f_{X_{n+1}}(x) = \underbrace{\int_{x-1}^{m} f_{X_n}(y)\, dy}_{=:A} + \underbrace{\int_{m}^{x} f_{X_n}(y)\, dy}_{=:B}.$$

Betrachten Sie zunächst A. Für $y \in [x-1, m)$ ist $\lfloor y \rfloor = m-1$ und es gilt:

$$\begin{aligned} A &= \int_{x-1}^{m} \frac{1}{(n-1)!} \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k \binom{n}{k} (y-k)^n\, dy \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k \binom{n}{k} \int_{x-1}^{m} (y-k)^n\, dy \\ &= \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k \binom{n}{k} \Big((m-k)^n - (x-(k+1))^n \Big). \end{aligned}$$

Mit einer analogen Rechnung ergibt sich unter Beachtung von $\lfloor y \rfloor = m$ auf $[m, x)$:

$$B = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{n}{k} \Big((x-k)^n - (m-k))^n \Big).$$

Nach Addition von A und B verschwinden die Terme mit $(m-k)^n$. Es bleibt nach

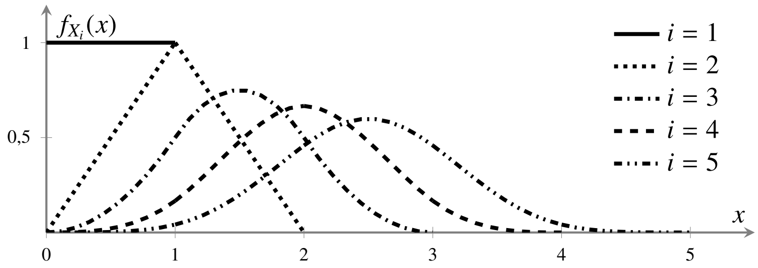


Abbildung 3.6: Darstellung der Dichten $f_{X_i}(x)$ für $i = 1, \dots, 5$.

Indexverschiebung in A und der Pascal-Identität:

$$\begin{aligned} A + B &= \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{m-1}(-1)^{k+1}\binom{n}{k}(x-(k+1))^n + \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\binom{n}{k}(x-k)^n \\ &= \frac{1}{n!}\sum_{k=1}^{m}(-1)^k\binom{n}{k-1}(x-k)^n + \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\binom{n}{k}(x-k)^n \\ &= \frac{1}{n!}\sum_{k=1}^{m}(-1)^k\underbrace{\left(\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}\right)}_{=\binom{n+1}{k}}(x-k)^n + x^n = \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{\lfloor x\rfloor}(-1)^k\binom{n+1}{k}(x-k)^n. \end{aligned}$$

Dies war zu zeigen. Die Dichten $f_{X_1}, \dots, f_{X_5}$ sind in Abbildung 3.6 dargestellt.

Bemerkung: Die Verteilung von X_n wird *Irwin-Hall-Verteilung* genannt, nach den Mathematikern Joseph Oscar Irwin und Philip Hall.

Aufgabe 3.25: Abschätzung der Summe gleichverteilter Variablen ○○●

Sei $(U_n)_{1\le i\le n}$ eine Folge von unabhängigen, auf $[0, 1]$ gleichverteilten Zufallsvariablen. Sei nun $X_n := \sum_{i=1}^{n} U_i$. An welcher Stelle $t \in \mathbb{R}^+$ wird $\mathbb{P}(X_n \le t)$ größer oder gleich $1/2$?

Lösung: Da die U_i maximal den Wert Eins annehmen, ist $X_n \in [0, n]$ fast sicher.

Da jede Zufallsvariable U_i zu $1/2$ symmetrisch ist, ist die Summe X_n zu $\sum_{i=1}^n 1/2 = n/2$ symmetrisch. Daher nimmt an dieser Stelle die Verteilungsfunktion von X_n den Wert 0,5 an (Median der Verteilung). Daher gilt

$$\mathbb{P}\Big(X_n \le \frac{n}{2}\Big) = \mathbb{P}\Big(X_n \ge \frac{n}{2}\Big) = \frac{1}{2}.$$

Bemerkung: Es liegt nahe, hier zunächst die Verteilungsfunktion von X_n explizit zu berechnen. Dies ergibt sich durch Integration der Dichte von X_n, die aus Aufgabe 3.24 bekannt ist. Dank des Vertauschens der endlichen Summe mit der Integration gilt

$$F_{X_n}(t) = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{(n-1)\wedge\lfloor t\rfloor} (-1)^k \binom{n}{k} (t-k)^n.$$

Da aber kein expliziter Ausdruck ohne Summation existiert, ist diese Berechnung nicht zielführend.

Für n groß kann man den zentralen Grenzwertsatz anwenden, um die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(X_n \leq t)$ abzuschätzen, siehe Aufgabe 4.14 in Kapitel 4.

Aufgabe 3.26: Summe exponentialverteilter Zufallsvariablen ○○●

Seien X, Y zwei unabhängige und zum gleichen Parameter $\lambda > 0$ exponentialverteilte Zufallsvariablen. Nutzen Sie die Faltungsformel für Dichten, um die Dichte der Zufallsvariable $X + Y$ zu berechnen.

Lösung: Wir berechnen für $z \in \mathbb{R}^+$

$$\begin{aligned} f_{X+Y}(z) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) f_Y(z-x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(x)\cdot\lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda(z-x)}\,\mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(z-x)\,dx \\ &= \lambda^2\,\mathrm{e}^{-\lambda z}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathbb{1}_{[0,z]}(x)\,dx = \lambda^2\,\mathrm{e}^{-\lambda z}\int_0^z dx = \lambda^2 z\,\mathrm{e}^{-\lambda z}. \end{aligned}$$

Bemerkung: Eine Zufallsvariable Z ist Erlang-verteilt mit Parametern $(n, \lambda) \in \mathbb{N}\times\mathbb{R}^+$, notiert $Z \sim \mathrm{Erl}(n, \lambda)$, falls die zugehörige Dichte gegeben ist durch

$$f_Z(x) = \frac{\lambda^n x^{n-1}}{(n-1)!}\,\mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(x) = \lambda\,\mathrm{Poi}(\lambda x)(\{n-1\}).$$

Insbesondere ist die Erlangverteilung eine Verallgemeinerung der Exponentialverteilung, da gilt $\mathrm{Exp}(\lambda) = \mathrm{Erl}(1, \lambda)$.

Diese Aufgabe zeigt, dass die Faltung zweier λ-Exponentialverteilungen eine Erlangverteilung mit Parametern $(2, \lambda)$ bildet.

Aufgabe 3.27: Faltungsinvarianz der Standardnormalverteilung ○●●

Seien X, Y zwei unabhängige $\mathcal{N}(0, 1)$-verteilte Zufallsvariablen. Weiter seien U und V wie folgt definiert: $U := X + Y$ und $V := X - Y$.

(a) Bestimmen Sie die Verteilungen der Zufallsvariablen U und V.

(b) Prüfen Sie, ob U und V korreliert sind. Handelt es sich um unabhängige Zufallsvariablen?

Lösung:

(a) Da X, Y unabhängig sind, erhalten wir die Dichte von U mittels der Faltungsformel. Für $z \in \mathbb{R}$ ergibt sich

$$\begin{aligned} f_U(z) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) f_Y(z-x)\,dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{-s^2-(z-x)^2}{2}}\, dx \\ &= \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{z^2}{4}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(x-\frac{z^2}{2}\right)^2}\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\pi} e^{-\frac{z^2}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2\cdot 2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2\cdot 2}}. \end{aligned}$$

Somit gilt $U \sim \mathcal{N}(0,2)$. Da $f_{-Y}(y) = f_Y(-y) = f_Y(y)$, folgt

$$f_V(z) = f_{X+(-Y)}(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) f_{-Y}(z-x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) f_Y(z-x)\,dx = f_U(z).$$

Folglich gilt ebenfalls $V \sim \mathcal{N}(0,2)$.

(b) Wir berechnen

$$\begin{aligned} \mathrm{Cov}(U,V) &= \mathrm{Cov}(X+Y, X-Y) \\ &= \mathrm{Cov}(X,X) - \mathrm{Cov}(X,Y) + \mathrm{Cov}(X,Y) - \mathrm{Cov}(Y,Y) \\ &= \mathrm{Var}(X) - \mathrm{Var}(Y) = 0. \end{aligned}$$

Somit sind U und V unkorrelierte Zufallsvariablen. Die Unabhängigkeit überprüfen wir mittels der Transfomartionsformel und erhalten aufgrund der Unabhängigkeit von X, Y für $u, v \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f_{(U,V)}(u,v) &= f_{(X,Y)}\left(x = \frac{u+v}{2}, y = \frac{u-v}{2}\right) \left|\det\left(\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\right)\right| \\ &= f_X\left(\frac{u+v}{2}\right) f_Y\left(\frac{u-v}{2}\right) \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{4\pi} e^{-\frac{1}{8}\left(u^2+2uv+v^2\right)} e^{-\frac{1}{8}\left(u^2-2uv+v^2\right)} = \frac{1}{4\pi} e^{-\frac{1}{8}(2u^2+2v^2)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{4\pi}} e^{-\frac{u^2}{4}} \frac{1}{\sqrt{4\pi}} e^{-\frac{v^2}{4}} = f_U(u) \cdot f_V(v). \end{aligned}$$

Somit sind U und V unabhängig.

Aufgabe 3.28: Faltungsinvarianz der Gammaverteilung ○●●

X ist eine zu den Parametern $(a, b) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ gammaverteilte Zufallsvariable, notiert $X \sim \Gamma_{a,b}$, falls sie folgende Dichte bezüglich des Lebesgue-Maßes auf $\mathbb{R}$ besitzt:

$$f_{a,b}(x) = \frac{1}{\Gamma(a)} b^a x^{a-1} \, \mathrm{e}^{-bx} \, \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(x) \quad \text{wobei} \quad \Gamma(a) = \int_0^{+\infty} t^{a-1} \, \mathrm{e}^{-t} \, dt.$$

(a) Berechnen Sie $\mathbb{E}(X^k)$ für $k \in \mathbb{N}$.

(b) Zeigen Sie, dass die momenterzeugende Funktion von X durch $M_X(t) = \left(\frac{b}{b-t}\right)^a$ gegeben ist.

(c) Sei weiter Y zu den Parametern $(\tilde{a}, b)$ gammaverteilt, sodass X, Y unabhängig sind. Beweisen Sie, dass $X + Y$ zu den Parametern $(a + \tilde{a}, b)$ gammaverteilt ist.

Lösung:

(a) Für $k \in \mathbb{N}$ und mittels der Substitution $y = bx$:

$$\mathbb{E}(X^k) = \frac{b^a}{\Gamma(a)} \int_0^{+\infty} x^{a+k-1} \, \mathrm{e}^{-bx} \, dx = \frac{1}{\Gamma(a)\, b^k} \int_0^{+\infty} y^{a+k-1} \, \mathrm{e}^{-y} \, dy = \frac{1}{b^k} \frac{\Gamma(a+k)}{\Gamma(a)}.$$

Daher existieren alle Momente der Gammaverteilung.

(b) Wir berechnen mittels der Substitution $y = x\,(b - t)$ für $t < b$

$$M_X(t) = \frac{b^a}{\Gamma(a)} \int_0^{+\infty} x^{a-1} \, \mathrm{e}^{-x(b-t)} \, dx = \frac{b^a}{\Gamma(a)(b-t)^a} \underbrace{\int_0^{+\infty} y^{a-1} \, \mathrm{e}^{-y} \, dy}_{=\Gamma(a)} = \left(\frac{b}{b-t}\right)^a.$$

(c) Aufgrund der Unabhängigkeit gilt

$$M_{X+Y}(t) = M_X(t)\, M_Y(t) = \left(\frac{b}{b-t}\right)^a \left(\frac{b}{b-t}\right)^{\tilde{a}} = \left(\frac{b}{b-t}\right)^{a+\tilde{a}}.$$

Da die momenterzeugende Funktion die Verteilung eindeutig bestimmt, gilt damit das gewünschte Ergebnis.

Bemerkung: Die Aufgabe zeigt, dass die Menge $\{\Gamma_{a,b}, a \in \mathbb{R}^+\}$ der Gammaverteilungen zum gegebenen Parameter b eine Faltungshalbgruppe bildet.

Ist der Parameter a eine natürliche Zahl, so ist die Gammaverteilung $\Gamma_{a,b}$ eine Erlang-Verteilung, siehe Aufgabe 3.26. Für den Spezialfall $a = 1$ ergibt sich die Exponentialverteilung. Dies ist der einzige Fall, für den die Gammaverteilung gedächtnislos ist. Für alle anderen Parameter $a \neq 1$ gilt dies nicht.

3.4 Transformationen stetiger Zufallsvariablen

Aufgabe 3.29: Transformationen bekannter Verteilungen ○●●

Betrachten Sie die folgenden Transformationen einer gleichverteilten sowie einer normalverteilten Zufallsvariable.

(a) Sei X eine auf $[0,1]$ gleichmäßig verteilte Zufallsvariable. Definieren Sie die Zufallsvariable $Y := -\frac{1}{\lambda}\ln(X)$ mit $\lambda > 0$. Begründen Sie, warum Y fast sicher definiert ist und geben Sie die Verteilung von Y an.

(b) Sei X eine $\mathcal{N}(0,1)$-verteilte Zufallsvariable. Weiter sei $Z := X^2$. Geben Sie die Verteilung von Z an.

(c) Sei X eine exponentialverteilte Zufallsvariable zum Parameter $\lambda > 0$. Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion und Dichte der Zufallsvariable $W := X^{\frac{1}{k}}$, $k \in \mathbb{R}^+$.

Lösung:

(a) Da die Menge

$$\{\omega : Y(\omega) = -\lambda^{-1}\ln(X(\omega)) \text{ nicht definiert}\} = \{\omega : X(\omega) = 0\}$$

eine $\mathbb{P}$-Nullmenge ist, ist Y fast sicher definiert. Für die Verteilung von Y betrachtet man die Verteilungsfunktion. Für $t \in \mathbb{R}^+$ gilt

$$F_Y(t) = \mathbb{P}\left(-\frac{1}{\lambda}\ln(X) \le t\right) = \mathbb{P}(X \ge e^{-\lambda t}) = \int_{e^{-\lambda t}}^{1} dx = 1 - e^{-\lambda t}.$$

Somit ist Y exponentialverteilt zum Parameter λ.

(b) Wir betrachten wieder die Verteilungsfunktion und erhalten

$$F_Z(t) = \mathbb{P}(X^2 \le t) = \mathbb{P}(\,|X| \le \sqrt{t}\,) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\sqrt{t}}^{\sqrt{t}} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx.$$

Mittels der Symmetrie der Standardnormalverteilung sowie $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ berechnet man weiter mit Substitution $z = x^2$

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\sqrt{t}}^{\sqrt{t}} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx &= \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\sqrt{t}} \frac{x}{x} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^t \frac{e^{-\frac{z}{2}}}{\sqrt{z}}\,dz = \int_0^t \frac{1}{2^{1/2}\Gamma(\frac{1}{2})} z^{\frac{1}{2}-1} e^{-\frac{z}{2}}\,dz.\end{aligned}$$

Somit folgt Z einer Chi-Quadrat-Verteilung mit einem Freiheitsgrad, geschrieben $Z \sim \chi_1^2$, siehe Appendix A.1.

(c) Für die Verteilungsfunktion von W ergibt sich für $t \geq 0$

$$F_W(t) = \mathbb{P}(X^{1/k} \leq t) = \mathbb{P}(X \leq t^k) = 1 - e^{-\lambda t^k}.$$

Durch Ableiten der Verteilungsfunktion erhalten wir

$$f_W(x) = \lambda k\, x^{k-1} e^{-\lambda x^k} \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(x).$$

Bemerkung: Die Verteilung von W wird als *Weibull-Verteilung* bezeichnet, geschrieben $W \sim \mathrm{Wei}(k, \lambda)$.

Aufgabe 3.30: Trigonometrische Transformationen ○●●

Sei U eine auf $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ gleichmäßig verteilte Zufallsvariable.

(a) Sei $X := \sin^2(U)$. Berechnen Sie die Verteilungsfunktion und Dichte von X.

(b) Sei $Y := \tan(U)$. Berechnen Sie die Dichte von Y und identifizieren Sie die Verteilung.

Lösung:

(a) Sei $t \in (0, 1)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} F_X(t) &= \mathbb{P}(\sin^2(U) \leq t) = \mathbb{P}(-\arcsin(\sqrt{t}) \leq U \leq \arcsin(\sqrt{t})) \\ &= F_U(\arcsin(\sqrt{t})) - F_U(-\arcsin(\sqrt{t})) = \frac{2}{\pi} \arcsin(\sqrt{t}). \end{aligned}$$

Durch Ableiten erhält man als Dichte für $x \in (0, 1)$

$$f_X(x) = \left(\frac{2}{\pi} \arcsin(\sqrt{x})\right)' = \frac{1}{\pi \sqrt{x\,(1-x)}}.$$

Eine Visualisierung der Dichte ist in Abbildung 3.7 gegeben.

(b) Man berechnet erneut zunächst die Verteilungsfunktion und erhält

$$F_Y(t) = \mathbb{P}(\tan(U) \leq t) = \mathbb{P}(U \leq \arctan(t)) = \frac{\arctan(t)}{\pi}.$$

Damit erhält man für Y die Dichte $f_Y(x) = (\pi\,(1 + x^2))^{-1}$, womit $Y \sim C(0, 1)$. Mehr Informationen zur Cauchy-Verteilung lassen sich in Aufgabe 3.21 finden.

Bemerkung: Die Verteilung von X ist die sogenannte *Arkussinus-Verteilung*, die in verschiedenen Kontexten auftaucht, zum Beispiel beim Random Walk.

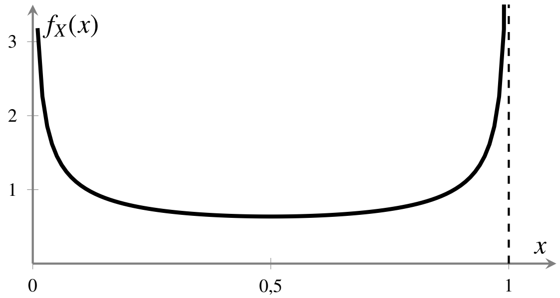


Abbildung 3.7: Graph der Dichte der Arkussinus-Verteilung mit der typischen Badewannenform.

Aufgabe 3.31: Stabilität der Klasse der Cauchy-Verteilungen ○●●

Wir betrachten die folgenden Transformationen stetiger Zufallsvariablen.

(a) Sei X eine reellwertige Zufallsvariable mit Dichte f_X. Man definiert $Y := \frac{1}{X}$. Drücken Sie f_Y, die Dichte von Y, mit Hilfe von f_X aus.

(b) Die Dichte der Cauchy-Verteilung $C(\mu, \lambda)$ mit den Parametern $\mu \in \mathbb{R}$ und $\lambda > 0$ ist gegeben durch

$$x \mapsto \frac{1}{\pi\lambda} \frac{1}{1 + \left(\frac{x-\mu}{\lambda}\right)^2},$$

siehe Aufgabe 3.21.

Sei nun $X \sim C(\mu, \lambda)$ und $Y := \frac{1}{X}$. Bestimmen Sie die Dichte von Y und identifizieren Sie ihre Verteilung.

Lösung:

(a) Sei φ eine beliebige Testfunktion, welche beschränkt und positiv ist. Dann gilt mittels Substitution $x = y^{-1}$ zunächst $\frac{dx}{dy} = -y^{-2}$, und daher

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} \varphi(y) f_Y(y)\, dy &= \mathbb{E}(\varphi(Y)) = \mathbb{E}(\varphi(X^{-1})) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x^{-1}) f_X(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(y) \frac{1}{y^2} f_X(y^{-1})\, dy.\end{aligned}$$

Demnach ist

$$f_Y(y) := \frac{1}{y^2} f_X(y^{-1})$$

eine Dichte von Y.

(b) Sei $c := \mu^2 + \lambda^2$, dann folgt mit Hilfe von (a) durch Umformen

$$f_Y(y) = \frac{1}{y^2}\, f_X(y^{-1}) \;=\; \frac{1}{\pi\lambda y^2}\,\frac{1}{1+\frac{1}{\lambda^2}\left(\frac{1}{y}-\mu\right)^2} \;=\; \frac{1}{\pi\frac{\lambda}{c}}\,\frac{1}{1+\left(\frac{y-\mu/c}{\lambda/c}\right)^2}.$$

Somit ist $Y \sim \mathrm{C}\left(\frac{\mu}{c}, \frac{\lambda}{c}\right)$.

Bemerkung: Falls $\mu = 0$ und $\lambda = 1$, sind die Zufallsvariablen X und Y jeweils $\mathrm{C}(0,1)$-verteilt. In diesem Falle ist die Cauchy-Verteilung invariant unter der Transformation $z \mapsto \frac{1}{z}$. Diese Eigenschaft wird als *inversionsstabil* bezeichnet.

3.5 Bedingte Dichten und bedingter Erwartungswert

Aufgabe 3.32: Bayes-Formel für Dichten ○●●

Seien X und Y zwei unabhängige gammaverteilte Zufallsvariablen, mit $X \sim \Gamma(a_1, b)$ und $Y \sim \Gamma(a_2, b)$ für $a_1, a_2, b \in \mathbb{R}^+$. Weiter sei $Z := X + Y$. Bestimmen Sie die durch $\{Z = z\}$ bedingte Dichte von X:

$$f_{X\,|\,Z=z}(x) = f_{X\,|\,X+Y=z}(x) := \frac{f_{(X,Z)}(x,z)}{f_Z(z)}$$

für ein gegebenes festes $z > 0$. Identifizieren Sie die Dichte und schließen Sie daraus auf $\mathbb{E}(X\,|\,Z)$.

Lösung: Nach Aufgabe 3.28 ist $Z \sim \Gamma(a_1 + a_2, b)$ mit Dichte

$$f_Z(z) = \frac{1}{\Gamma(a_1+a_2)}\, b^{a_1+a_2}\, z^{a_1+a_2-1}\, e^{-bz}\, \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(z).$$

Nun gilt

$$f_{Z\,|\,X=x}(z) = f_{X+Y\,|\,X=x}(z) = f_{x+Y}(z) = f_Y(z-x).$$

Damit erhält man für $z > 0$

$$\begin{aligned} f_{X\,|\,Z=z}(x) = f_Y(z-x)\,\frac{f_X(x)}{f_Z(z)} &= \frac{\Gamma(a_1+a_2)}{\Gamma(a_1)\,\Gamma(a_2)}\,\frac{(z-x)^{a_1-1}x^{a_2-1}}{z^{a_1+a_2-1}} \\ &= z^{-1}\,\frac{\Gamma(a_1+a_2)}{\Gamma(a_1)\,\Gamma(a_2)}\,(1-x/z)^{a_1-1}(x/z)^{a_2-1} = z^{-1}\, f_W(x/z), \end{aligned}$$

wobei $W \sim \mathrm{Beta}(a_2, a_1)$. Somit ist X, gegeben $\{Z = z\}$, betaverteilt.

Entsprechend ist der Erwartungswert nach Substitution mit $w = x/z$

$$\mathbb{E}(X \,|\, Z = z) = \int_{\mathbb{R}^+} x\, f_{X\,|\,Z=z}(x)\, dx = z \int_{\mathbb{R}^+} w f_W(w)\, dw = \frac{a_2}{a_1 + a_2}\, z$$

und daher $\mathbb{E}(X \,|\, Z) = \frac{a_2}{a_1+a_2} Z$. Der mittlere Anteil X an der Summe $X + Y$ ist daher ein gewichteter Wert dieser Summe.

Bemerkung: Man bemerkt, dass sich für $a_1 = a_2 = 1$, die Verteilung von X und Y zu einer Exponentialverteilung zum Parameter b vereinfacht und die bedingte Verteilung zu einer Gleichverteilung wird, die ein Spezialfall der Betaverteilung ist. Der Erwartungswert ist dann genau der Mittelwert.

Für n unabhängige Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$ mit $X_i \sim \Gamma(a_i, b)$ ist die bedingte Dichte $f_{X_1|X_1+X_2+\ldots+X_n=z}(x)$ die Dichte der multivariaten Dirichlet-Verteilung. In dem Fall, wenn $a_1 = \ldots = a_n = 1$, erhält man eine Gleichverteilung auf dem Simplex, der durch $X_1 + X_2 + \ldots + X_n = z$ aufgespannt wird.

3.6 Anwendungen

3.6.1 Lebensdauer und Ausfallraten

Aufgabe 3.33: Überlebensfunktion ○●●

Die zufällige Lebenszeit eines Gerätes wird durch eine positive, reellwertige Zufallsvariable X modelliert. Man ist in Anwendungen daran interessiert, mit welcher Wahrscheinlichkeit nach einer gegebenen Betriebsdauer das Gerät noch weiter funktioniert.

Dazu definiert man die *Überlebensfunktion* durch

$$r : \mathbb{R} \to [0, 1], \quad r(t) := 1 - F_X(t).$$

In vielen Anwendungen genügt es, eine Weibull-Verteilung Wei(β, λ) anzunehmen, deren Dichtefunktion durch

$$f_X(x) = \lambda\beta\, (\lambda x)^{\beta-1} e^{-(\lambda x)^\beta}\, \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(x)$$

für Konstanten $\lambda, \beta \in \mathbb{R}^+$ gegeben sei.

(a) Berechnen Sie $r(t)$ mit der gegebenen Weibull-Verteilung von X.

(b) Finden Sie einen Ausdruck für

$$g(t, s) := \mathbb{P}(X \geq t + s \,|\, X \geq t).$$

Wie verhält sich der Ausdruck in Abhängigkeit von β?

Lösung:

(a) Durch Integrieren erhält man für $t \in \mathbb{R}^+$

$$r(t) = \mathbb{P}(X > t) = \int_t^{+\infty} \lambda\beta\,(\lambda x)^{\beta-1} \exp(-(\lambda x)^{\beta})\,dx = \exp(-(\lambda t)^{\beta}).$$

(b) Es gilt

$$g(t,s) = \frac{\mathbb{P}(X \geq t+s)}{\mathbb{P}(X \geq t)} = \frac{r(t+s)}{r(t)} = \exp(-\lambda^{\beta}((t+s)^{\beta} - t^{\beta})).$$

Man erhält daraus, dass die Exponentialverteilung (d.h. $\beta = 1$) die einzige Weibull-Verteilung ist, die die sogenannte Gedächtnislosigkeitseigenschaft erfüllt: Die Funktion $g(t, s)$ hängt nicht mehr von t ab.

Im Fall $\beta < 1$ ist die Wahrscheinlichkeit groß, dass ein Gerät früh ausfällt. Dafür ist die Wahrscheinlichkeit eines späten Ausfalls geringer. Im Fall $\beta > 1$ ist es anders herum. Ein solches Gerät fällt mit großer Wahrscheinlichkeit nach langem Betrieb aus, zum Beispiel durch Materialermüdung.

In Anwendungen nimmt man oft Mischungen aus Weibullverteilungen, um frühe Ausfälle mit möglicher Materialermüdigung zu einem späteren Zeitpunkt zu kombinieren.

Bemerkung: In Aufgabe 3.34 wird betrachtet, mit welcher Rate ein Gerät zum Zeitpunkt t ausfällt; es ist eine Approximation für s klein.

Aufgabe 3.34: Instantane Ausfallrate ○●●

In vielen Anwendungen, insbesondere bei Versicherungen, betrachtet man die sogenannte *instantane Ausfallrate* eines Produktes, dessen Lebensdauer mit Hilfe der positiven Zufallsvariable X modelliert wird. Die instantane Ausfallrate beschreibt die Rate mit der ein Produkt ausfällt, wenn schon eine gewisse Lebensdauer überschritten ist, und wird wie folgt definiert:

$$h(t) := \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} \mathbb{P}\left(X \in [t, t+\varepsilon] \,|\, X \geq t\right).$$

(a) Zeigen Sie, dass für alle $t \in \mathbb{R}^+$ gilt

$$h(t) = \frac{f(t)}{1 - F(t)},$$

wobei f die Dichte und F die Verteilungsfunktion von X seien.

Zeigen Sie dann die Gleichung

$$h(t) = -\frac{d}{dt} \log(r(t)),$$

wobei r die assoziierte Überlebensfunktion ist, die in Aufgabe 3.33 definiert wurde.

(b) Sei die Lebensdauer einer Glühbirne durch eine Weibull-Verteilung gegeben mit $X \sim \text{Wei}(\beta, 1)$, wobei $\beta \in \{1/2, 1, 3/2\}$. Berechnen Sie $h(t)$ und skizzieren Sie $t \mapsto h(t)$ für die gegebenen Parameter β.

Lösung:

(a) Für alle $t \in \mathbb{R}^+$ ergibt sich

$$\begin{aligned} h(t) &= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} \mathbb{P}(X \in [t, t+\varepsilon] \,|\, X \geq t) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} \frac{\mathbb{P}(t \leq X \leq t+\varepsilon)}{\mathbb{P}(X \geq t)} \\ &= \frac{1}{1-F(t)} \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{F(t+\varepsilon) - F(t)}{\varepsilon} = \frac{f(t)}{1-F(t)} \\ &= r(t)^{-1} \frac{d}{dt} F(t) = -r(t)^{-1} \frac{d}{dt} r(t) = -\frac{d}{dt} \log(r(t)). \end{aligned}$$

Man muss also die Dichte der Lebensdauer nicht explizit kennen.

(b) Die Verteilungsfunktion von X ist für $t > 0$ durch $F(t) = 1 - \exp(-t^\beta)$ gegeben, siehe Aufgabe 3.33. Daher ist $r(t) = 1 - F(t) = \exp(-t^\beta)$ und die instantane Ausfallrate von Y ist somit

$$h(t) = -\frac{d}{dt} \log(r(t)) = \frac{d}{dt} t^\beta = \beta\, t^{\beta-1} = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{t}}, & \text{für } \beta = 1/2 \\ 1, & \text{für } \beta = 1 \\ \frac{3}{2}\sqrt{t}, & \text{für } \beta = 3/2\,. \end{cases}$$

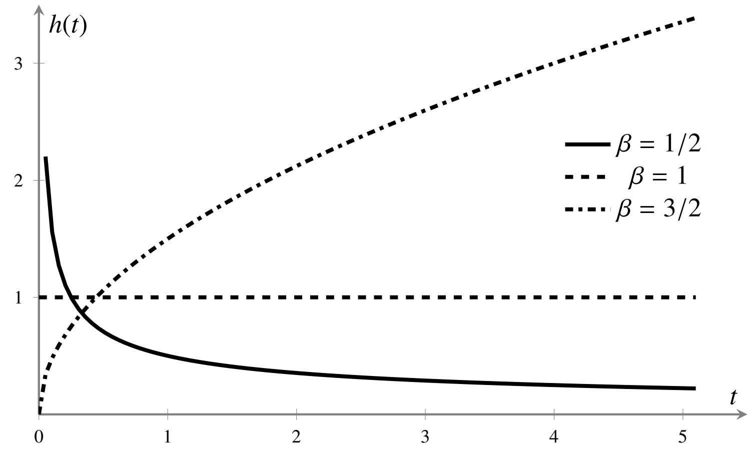


Abbildung 3.8: Plot der Ausfallrate $h(t)$ in Abhängigkeit vom Parameter β.

In Abbildung 3.8 sieht man, dass $h(t)$ eine monoton fallende Funktion ist, wenn $\beta = 1/2$. Solche Produkte (wie z.B. Glühbirnen) werden meist früh mit hoher Wahrscheinlichkeit ausfallen, aber für große t sinkt die Ausfallrate sehr schnell. Das bedeutet, dass alte, funktionstüchtige Glühbirnen eine gute Chancen haben noch weiter zu funktionieren. Für $\beta = 1$ ist X exponentialverteilt und die entsprechenden Produkte werden nach einer zufälligen Zeit ausfallen, da die Exponentialverteilung gedächtnislos ist. Für $\beta = 3/2$ haben neue Produkte eine geringe Ausfallrate, während alte Produkte mit steigender Rate ausfallen.

Aufgabe 3.35: Durchschnittliche Restlebensdauer ○●●

In Anwendungen der Zuverlässigkeitstheorie interessiert man sich für die sogenannte *mean residual lifetime* eines Produktes, dessen Lebenszeit mit der Zufallsvariable X modelliert wird. Diese Größe beschreibt die erwartete Restlebensdauer eines Produktes, wenn das Produkt bereits eine Zeit $t > 0$ funktioniert. Sie wird wie folgt definiert

$$\mathrm{MRL}_X(t) := \mathbb{E}(X - t \mid X \geq t).$$

(a) Sei X eine stetige Zufallsvariable. Stellen Sie MRL_X mit Hilfe der Dichte und Verteilungsfunktion von X dar.

(b) Sei nun $X \sim \mathrm{Exp}(1)$. Bestimmen Sie MRL_X.

Lösung:

(a) Es gilt

$$\mathrm{MRL}_X(t) = \frac{\mathbb{E}\Big((X-t)\,\mathbb{1}_{\{X\geq t\}}\Big)}{\mathbb{P}(X \geq t)} = \frac{1}{1-F_X(t)} \int_t^{+\infty} (s-t)\, f_X(s)\, ds \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$$

Die durchschnittliche Restlebenszeit kann dabei im Allgemeinen auch unendlich werden.

(b) Man berechnet mit (a) und wegen $1 - F_X(t) = \exp(-t)$

$$\begin{aligned}\mathrm{MRL}_X(t) &= \frac{1}{e^{-t}} \int_t^{+\infty} (s-t)\, e^{-s}\, ds = \frac{1}{e^{-t}} \left(\int_t^{+\infty} s\, e^{-s}\, ds - t \int_t^{+\infty} e^{-s}\, ds \right) \\ &= \frac{1}{e^{-t}} \left((-s-1)\, e^{-s} \Big|_t^{+\infty} - t\, e^{-s} \Big|_t^{+\infty} \right) \\ &= \frac{1}{e^{-t}} \Big((t+1)\, e^{-t} - t\, e^{-t} \Big) = 1 = \mathbb{E}(X).\end{aligned}$$

Die Identität $\mathrm{MRL}_X(t) = \mathbb{E}(X)$ gilt auch, falls $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$, $\lambda > 0$.

Bemerkung: Grund für das Ergebnis in (b) ist die Gedächtnislosigkeit der Exponentialverteilung, siehe Aufgabe 3.33. Für andere Verteilungen lässt sich die $\mathrm{MRL}_X(t)$ ebenfalls berechnen, aber die Methoden sind komplizierter.

3.6.2 Anordnungen von Zufallsvariablen

Aufgabe 3.36: Verteilung einer Ordnungsstatistik ●●●

Seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängige und identisch verteilte Zufallsvariablen in $\mathbb{R}$ mit Dichte f und Verteilungsfunktion F. Weiter sei $\omega \in \Omega$, sodass $X_1(\omega), \ldots, X_n(\omega)$ paarweise verschieden sind. Man definiert auf $\{1, \ldots, n\}$ die Permutation $\Sigma(\omega)$, sodass

$$X_{\Sigma(\omega)(1)}(\omega) < \ldots < X_{\Sigma(\omega)(n)}(\omega),$$

wobei man vereinfachend schreibt $X_{(k)}(\omega) = X_{\Sigma(\omega)(k)}(\omega)$.

Dann wird das n-Tupel $(X_{(1)}, \ldots, X_{(n)})$ als *Ordnungsstatistik* der Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$ bezeichnet.

(a) Sei (Y_1, Y_2) ein Zufallsvektor mit einer Dichte. Beweisen Sie, dass $\{Y_1 = Y_2\}$ eine vernachlässigbare Menge ist und schließen Sie daraus, dass die Abbildung $\omega \mapsto \Sigma(\omega)$ $\mathbb{P}$-fast sicher auf Ω definiert ist.

(b) Sei σ eine beliebige Permutation der Menge $\{1, 2, \ldots, n\}$. Beweisen Sie, dass der Wert $\mathbb{P}(\Sigma = \sigma)$ unabhängig von σ ist. Nutzen Sie dies, um die Verteilung der Zufallsvariable Σ zu bestimmen.

(c) Berechnen Sie $\mathbb{P}(\{\omega : \Sigma(\omega)(i) = k\})$ für $1 \leq i \leq n$ und $1 \leq k \leq n$.

(d) Beweisen Sie, dass die Dichte der gemeinsamen Verteilung von $(X_{(1)}, \ldots, X_{(n)})$ durch

$$f_{(X_{(1)},\ldots,X_{(n)})}(x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} n! f(x_1) \ldots f(x_n) & \text{, falls } x_1 < x_2 < \ldots < x_n \\ 0 & \text{, sonst} \end{cases}$$

gegeben ist.

(e) Berechnen Sie die Dichten von $X_{(1)} = \min(X_1, \ldots, X_n)$ und $X_{(n)} = \max(X_1, \ldots, X_n)$.

(f) Beweisen Sie, dass $(X_{(1)}, X_{(n)})$ folgende Dichte besitzt

$$f_{(X_{(1)},X_{(n)})}(x_1, x_n) = n(n-1)f(x_1)f(x_n)(F(x_n) - F(x_1))^{n-2}\mathbb{1}_{\{x_1<x_n\}}(x_1, x_n).$$

Lösung:

(a) Es gilt aufgrund der Unabhängigkeit

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Y_1 = Y_2) = \mathbb{P}(Y_1 - Y_2 = 0) &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{\{y_1-y_2=0\}}(y_1, y_2) f_{(Y_1,Y_2)}(y_1, y_2)\, dy_1\, dy_2 \\
&= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{\{y_1-y_2=0\}}(y_1, y_2) f_{Y_1}(y_1) f_{Y_2}(y_2)\, dy_1\, dy_2 \\
&= \int_{\mathbb{R}} f_{y_1}(y_1) \underbrace{\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{\{y_1=y_2\}}(y_1, y_2) f_{Y_2}(y_2)\, dy_2}_{=0}\, dy_1 = 0.
\end{aligned}$$

Nun kann Σ auf der folgenden Menge nicht definiert werden

$$A := \{\omega \in \Omega : \exists i, j \in \{1, \ldots, n\}, i \neq j : X_i(\omega) = X_j(\omega)\} = \bigcup_{1 \leq i,j \leq n} \{X_i = X_j\}.$$

Da für $i \neq j$ die Zufallsvariablen X_i und X_j unabhängig sind und (X_i, X_j) eine Dichte besitzt, folgt mit dem vorherigen Teil

$$\mathbb{P}(A) \leq \sum_{1 \leq i,j \leq n} \mathbb{P}(X_i = X_j) = 0.$$

Somit folgt $\mathbb{P}(A) = 0$ und die Abbildung $\omega \mapsto \Sigma(\omega)$ ist $\mathbb{P}$-fast sicher definiert.

(b) Es gilt

$$\mathbb{P}(\Sigma = \sigma) = \mathbb{P}(\{\omega : X_{\sigma(1)}(\omega) < \ldots < X_{\sigma(n)}(\omega)\}) = \mathbb{P}_{(X_{\sigma(1)},\ldots,X_{\sigma(n)})}(C),$$

wobei $C := \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1 < \ldots < x_n\}$. Wegen der Unabhängigkeit und identischen Verteilung gilt weiter

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_{(X_{\sigma(1)},\ldots,X_{\sigma(n)})} &= \mathbb{P}_{X_{\sigma(1)}} \otimes \mathbb{P}_{X_{\sigma(2)}} \otimes \ldots \otimes \mathbb{P}_{X_{\sigma(n)}} \\ &= \mathbb{P}_{X_1} \otimes \mathbb{P}_{X_2} \otimes \ldots \otimes \mathbb{P}_{X_n} = \mathbb{P}_{(X_1,X_2,\ldots,X_n)}.\end{aligned}$$

Damit ist $\mathbb{P}(\Sigma = \sigma)$ unabhängig von σ und somit ist $\mathbb{P}_\Sigma$ die Gleichverteilung auf $\mathcal{S}_n$, der Menge der Permutationen auf $\{1, \ldots, n\}$.

(c) Wir berechnen

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\{\omega : \Sigma(\omega)(i) = k\}) &= \mathbb{P}(\{\sigma \in \mathcal{S}_n : \sigma(i) = k\}) \\ &= \frac{\#\{\sigma \in \mathcal{S}_n : \sigma(i) = k\}}{n!} = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n},\end{aligned}$$

also unabhängig von i und k.

(d) Sei B eine beliebige Borelmenge aus $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. Dann gilt

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}((X_{(1)}, \ldots, X_{(n)}) \in B) \\ &= \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \mathbb{P}(\{\Sigma = \sigma\} \cap \{(X_{\sigma(1)}, \ldots, X_{\sigma(n)}) \in B\}) \\ &= \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \mathbb{P}((X_{\sigma(1)}, \ldots, X_{\sigma(n)}) \in B \cap C) \\ &= n!\, \mathbb{P}_{X_1}^{\otimes n}(B \cap C) \\ &= n! \int_{\mathbb{R}} \ldots \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{B\cap C}(x_1, x_2, \ldots, x_n) f(x_1) f(x_2) \ldots f(x_n)\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n \\ &= n! \int_B \mathbb{1}_C(x_1, x_2, \ldots, x_n) f(x_1) f(x_2) \ldots f(x_n)\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n.\end{aligned}$$

Daraus folgt nun

$$f_{(X_{(1)},X_{(2)},\ldots,X_{(n)})}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = n! f(x_1) f(x_2) \ldots f(x_n)\, \mathbb{1}_C(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

(e) Man notiere $F_{(1)}$ die Verteilungsfunktion von $X_{(1)}$. Mit Hilfe der Unabhängigkeit lässt sich berechnen

$$\begin{aligned}1 - F_{(1)}(t) &= \mathbb{P}(X_{(1)} > t) = \mathbb{P}\left(\min_{1\le k\le n} X_k > t\right) \\ &= \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n} \{X_k > t\}\right) = \prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}(X_k > t) = (1 - F(t))^n.\end{aligned}$$

Daraus erhält man

$$F_{(1)}(t) = 1 - (1 - F(t))^n,$$

siehe auch Aufgabe 2.5. Da X_1 eine Dichte auf $\mathbb{R}$ besitzt, ist F (und somit auch $F_{(1)}$) absolut stetig. Die Ableitung von $F_{(1)}$, die fast überall existiert, ist dann für fast alle $x \in \mathbb{R}$ gleich der Dichte von $X_{(1)}$, notiert $f_{(1)}$:

$$f_{(1)}(x) = F'_{(1)}(x) = n(1 - F(x))^{n-1} f(x), \quad \text{für fast alle } x \in \mathbb{R}.$$

Falls $F_{(n)}$ die Verteilungsfunktion von $X_{(n)}$ notiert, gilt

$$\begin{aligned} F_{(n)}(t) &= \mathbb{P}(X_{(n)} \leq t) = \mathbb{P}\left(\max_{1 \leq k \leq n} X_k \leq t\right) \\ &= \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n} \{X_k \leq t\}\right) = \prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}(X_k \leq t) = F(t)^n. \end{aligned}$$

Somit erhält man als Dichte $f_{(n)}$ von $X_{(n)}$ für fast alle $x \in \mathbb{R}$

$$f_{(n)}(x) = F'_{(n)}(x) = n\, F(x)^{n-1} f(x).$$

(f) Es gilt für $x_1, x_n \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} & f_{(X_{(1)}, X_{(n)})}(x_1, x_n) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \cdots \int_{\mathbb{R}} f_{(X_{(1)}, \ldots, X_{(n)})}(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, dx_2 \ldots dx_{n-1} \\ &= n! \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{\{x_1 < \ldots < x_n\}}(x_1, \ldots, x_n) f(x_1) f(x_2) \ldots f(x_{n-1}) f(x_n)\, dx_2 \ldots dx_{n-1} \\ &= n(n-1) f(x_1) f(x_n) \mathbb{1}_{\{x_1 < x_n\}}(x_1, x_n)\, (n-2)! \\ &\qquad \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{\{x_1 < x_2 < \ldots < x_n\}}(x_2, \ldots, x_{n-1}) f(x_2) \ldots f(x_{n-1})\, dx_2 \ldots dx_{n-1} \\ &= n(n-1) f(x_1) f(x_n) \mathbb{1}_{\{x_1 < x_n\}}(x_1, x_n)\, (n-2)! \\ &\qquad \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{\{x_1 < x_2\}}(x_1, x_2) \mathbb{1}_{\{x_2 < x_3\}}(x_2, x_3) \ldots \mathbb{1}_{\{x_{n-1} < x_n\}}(x_{n-1}, x_n) \\ &\qquad\qquad f(x_2) \ldots f(x_{n-1})\, dx_2 \ldots dx_{n-1} \\ &= n(n-1) f(x_1) f(x_n) \mathbb{1}_{\{x_1 < x_n\}}(x_1, x_n) \mathbb{P}(X_{(2)} > x_1, X_{(n-1)} < x_n). \end{aligned}$$

Für die letzte Wahrscheinlichkeit gilt aufgrund der unabhängigen und identischen

Verteilung der Zufallsvariablen

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_{(2)} > x_1, X_{(n-1)} < x_n) &= \mathbb{P}\left(\min_{i=2,\ldots,n} X_i > x_1, \max_{i=1,\ldots,n-1} X_i < x_n\right)\\ &= \mathbb{P}(X_i \in (x_1, x_n)\ \forall i = 2, \ldots, n-2) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=2}^{n-1}\{X_i \in (x_1, x_n)\}\right)\\ &= \prod_{i=2}^{n-1} \mathbb{P}(X_i \in (x_1, x_n)) = (F(x_n) - F(x_1))^{n-2}.\end{aligned}$$

Somit ergibt sich insgesamt

$$f_{(X_{(1)}, X_{(n)})}(x_1, x_n) = n(n-1)f(x_1)f(x_n)(F(x_n) - F(x_1))^{n-2}\mathbb{1}_{\{x_1 < x_n\}}(x_1, x_n).$$

Bemerkung: Zusätzlich zu der Verteilung von Minimum und Maximum einer Ordnungsstatistik kann man auch die Verteilung der i-ten Variable $X_{(i)}$ herleiten. Es ergibt sich

$$f_{(i)}(x) = n! f(x) \frac{F(x)^{i-1}(1 - F(x))^{n-i}}{(i-1)!(n-i)!}.$$

Da für eine Dichte bezüglich Lebesgue-Maß

$$f(t) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{F(t + \varepsilon) - F(t)}{\varepsilon}$$

gilt, kann man $f(t)$ als Wahrscheinlichkeit interpretieren, dass die Zufallsvariable einen Wert in einer infinitesimal kleinen Umgebung von t annimmt. Mit dieser Interpretation sind die obigen Formeln kombinatorisch interpretierbar. Für $f_{(i)}(t)$ gibt es n Möglichkeiten, dass eines der X_i diesen Wert annimmt und $i-1$ Variablen kleinere sowie $n-i$ Variablen größere Werte annehmen. Der Binomialkoeffizient gibt dann noch die Anzahl Möglichkeiten, auf wie viele Weisen man die $i-1$ aus $n-1$ Variablen auswählen kann, die einen Wert kleiner t annehmen.

Mit dieser Interpretation kann man leicht auch andere gemeinsame Verteilungen herleiten, wie zum Beispiel für die gemeinsame Verteilung des Vektors $(X_{(i)}, X_{(j)})$, $i < j$ und $x_1 < x_2$:

$$f_{(X_{(i)}, X_{(j)})}(x_1, x_2) = n! f(x_1) f(x_2) \frac{F(x_1)^{i-1}(F(x_2) - F(x_1))^{j-1-i}(1 - F(x_2))^{n-j}}{(i-1)!(j-i-1)!(n-j)!}.$$

Mit Hilfe des Multinomialkoeffizienten lassen sich entsprechende höherdimensionale gemeinsame Dichten ausdrücken.

Aufgabe 3.37: Spannweite der stetigen Gleichverteilung ○●●

Man wendet die in Aufgabe 3.36 behandelte Ordnungsstatistik auf die stetige Gleichverteilung an. Insbesondere interessiert man sich für die Verteilung der Spannweite der Ergebnisse (Differenz Maximum und Minimum). Sei $(X_i)_{1\leq i\leq n}$, $n \in \mathbb{N}$, eine Familie von unabhängigen gleichverteilten Zufallsvariablen $X_i \sim \mathcal{U}_{[0,1]}$ und $(X_{(i)})_{1\leq i\leq n}$ die dazugehörige Ordnungsstatistik.

Die Spannweite ist definiert als

$$R_n := X_{(n)} - X_{(1)}.$$

(a) Beweisen Sie, dass R_n die Dichte

$$f(x) = n\,(n-1)\,x^{n-2}\,(1-x)\,\mathbb{1}_{[0,1]}(x)$$

besitzt und identifizieren Sie ihre Verteilung.

(b) Zeigen Sie

$$\mathbb{E}(R_n) = \frac{n-1}{n+1}.$$

Wie verhält sich $\mathbb{E}(R_n)$ für $n \to +\infty$?

Lösung: Da $X_i \sim \mathcal{U}_{[0,1]}$, gilt $f(x) = 1$ sowie $F(x) = x$ für $x \in [0,1]$.

(a) Sei φ eine beliebige messbare und positive Abbildung, dann berechnet man mittels der Substitution $y = x_n - x_1$, $z = x_1$

$$\begin{aligned}
&\int \varphi(x_n - x_1)\,\mathbb{P}_{(X_{(1)},X_{(n)})}(dx_1\,dx_n) \\
&= \int_0^1\int_0^1 \varphi(x_n - x_1)\,n\,(n-1)\,(x_n - x_1)^{n-2}\,\mathbb{1}_{\{x_1<x_n\}}(x_1,x_n)\,dx_1\,dx_n \\
&= n\,(n-1)\int_0^1 (1-y)\,\varphi(y)\,y^{n-2}\,dy.
\end{aligned}$$

Damit ist gezeigt, dass $X_{(n)} - X_{(1)}$ die Dichte

$$f(x) = \frac{\Gamma(n+1)\,\Gamma(2)}{\Gamma(n-1)}x^{n-1-1}(1-x)^{2-1}\mathbb{1}_{[0,1]}(x)$$

besitzt. Daher ist $R_n \sim \mathrm{Beta}(n-1, 2)$, siehe Appendix A.1.

(b) Für den Erwartungswert folgt

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(R_n) &= n\,(n-1)\int_0^1 x(1-x)x^{n-2}\,dx = n\,(n-1)\int_0^1 (1-x)x^{n-1}\,dx \\
&= n\,(n-1)\left(\int_0^1 x^{n-1}\,dx - \int_0^1 x^n\,dx\right) = \frac{n-1}{n+1} \xrightarrow{n\to\infty} 1.
\end{aligned}$$

Realisierungen sind daher auf dem gesamten Intervall $[0,1]$ zu erwarten.

Aufgabe 3.38: Ordnungsstatistik für die Exponentialverteilung ○●●

Betrachten Sie die in Aufgabe 3.36 behandelte Ordnungsstatistik angewendet auf die Exponentialverteilung. Sei $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$, $n \in \mathbb{N}$, eine Familie von unabhängigen Zufallsvariablen mit $X_i \sim \operatorname{Exp}(1)$. Sei weiter

$$Y_1 := X_{(1)}, \qquad\qquad Y_k := X_{(k)} - X_{(k-1)}$$

für $k = 2, \ldots, n$. Man nennt diese Zufallsvariablen die *Zuwächse* der Ordnungsstatistik.

(a) Beweisen Sie, dass die Zufallsvariablen $Y_1, \ldots, Y_n$ unabhängig sind und die Dichte von Y_k für $1 \leq k \leq n$ gegeben ist durch

$$f_{Y_k}(t) = (n - k + 1)\, e^{-(n-k+1)t} \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(t).$$

(b) Beweisen Sie, dass für $1 \leq k \leq n$ gilt

$$\mathbb{E}(X_{(k)}) = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{n - i + 1}.$$

(c) Was lässt sich über Y_k sagen?

Lösung:

Da $X_i \sim \operatorname{Exp}(1)$, ist die Dichte der gemeinsamen Verteilung von $(X_{(1)}, \ldots, X_{(n)})$ nach Aufgabe 3.36 gegeben durch

$$f_{(X_{(1)},\ldots,X_{(n)})}(x_1, \ldots, x_n) = n!\, \mathrm{e}^{-(x_1+\ldots+x_n)}\, \mathbb{1}_{\{0<x_1<x_2<\ldots<x_n\}}.$$

(a) Man betrachtet den Vektor $Y = (Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)$ sowie eine messbare und positive Abbildung φ. Dann gilt nach Transformationsformel

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\varphi(Y)) &= \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x_1, x_2 - x_1, \ldots, x_n - x_{n-1}) \mathbb{P}_{(X_{(1)},\ldots,X_{(n)})}(dx_1 \ldots dx_n) \\
&= \int_{\{0<x_1<x_2<\ldots<x_n\}} \varphi(x_1, \ldots, x_n - x_{n-1})\, n! \exp\left(-(x_1 + \ldots + x_n)\right)\, dx_1 \ldots dx_n \\
&= \int_{(\mathbb{R}^+)^n} \varphi(y_1, y_2, \ldots, y_n)\, n! \exp\left(-(ny_1 + (n-1)y_2 + \ldots + y_n)\right) dy_1 \ldots dy_n.
\end{aligned}$$

Daher hat Y die Dichte

$$f_Y(y) = \prod_{k=1}^{n} \left((n - k + 1) \exp\left(-(n - k + 1)y_k\right)\right).$$

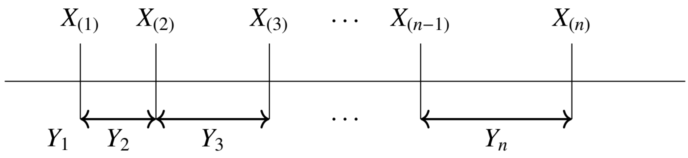


Abbildung 3.9: Skizze der Zuwächse Y_k.

Somit sind die Zufallsvariablen $Y_1, \dots, Y_n$ unabhängig und ebenfalls exponentialverteilt mit $Y_k \sim \mathrm{Exp}(n-k+1)$. Daraus ergibt sich auch

$$\mathbb{E}(Y_k) = \frac{1}{n-k+1}.$$

Wie im Sammelbildproblem, siehe Aufgabe 6.9, sind die Zuwächse im Durchschnitt monoton wachsend in k.

(b) Da $X_{(k)} = \sum_{i=1}^{k} Y_i$ gilt, folgt aus (a)

$$\mathbb{E}(X_{(k)}) = \sum_{i=1}^{k} \mathbb{E}(Y_i) = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{n-i+1} = \sum_{i=n-k+1}^{n} \frac{1}{i}.$$

(c) Nach (a) ist $Y_k \sim \mathrm{Exp}(n-k+1)$. Daher hat Y_k die gleiche Verteilung wie das Minimum von $n-k+1$ zum Parameter Eins exponentialverteilter Zufallsvariablen, siehe Aufgabe 3.13. Insbesondere ist dann $Y_n \sim \mathrm{Exp}(1)$.

Aufgabe 3.39: Rekordwerte-Prozess ●●●

Sei $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Folge von positiven, unabhängigen und identisch verteilten Zufallsvariablen mit Dichte f und Verteilungsfunktion F, welche $F(\mathbb{R}) \subset [0,1)$ erfüllt. Man definiere $Y_0 := X_1$ und $Y_{i+1} := X_{N_{i+1}}$ für $i \in \mathbb{N}_0$, wobei

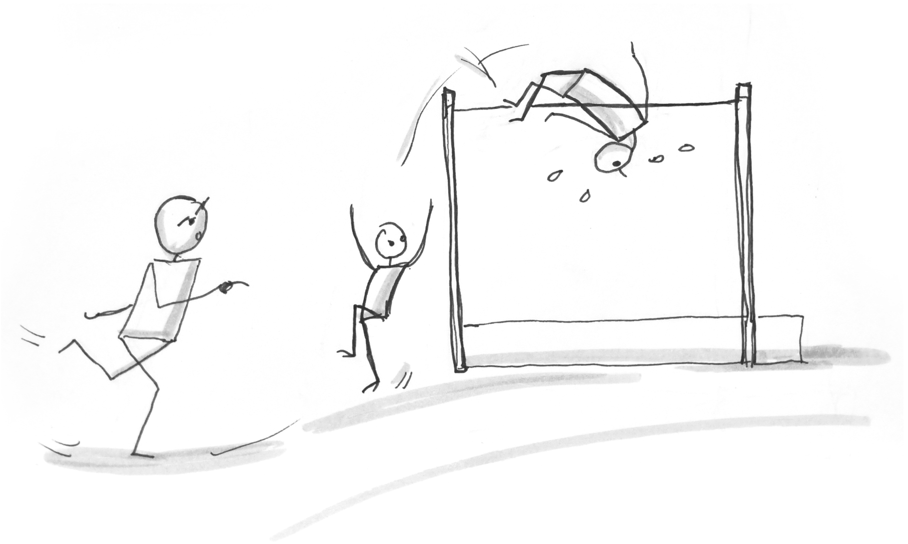
$$N_{i+1} = \inf\{m > i : X_m > Y_i\}$$

sind die sogenannten *Rekordzeiten*. Der Prozess $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ wird *Rekordwerte-Prozess* genannt.

(a) Sei N_1 der Zeitpunkt, an dem der erste Rekordwert – nach dem Anfangswert – angenommen wird. Berechnen Sie ihre Verteilung und ihren Erwartungswert.

(b) Berechnen Sie $\mathbb{P}(N_1 = n, Y_1 < t)$ für $t > 0$ und bestimmen Sie daraus die Verteilungsfunktion von Y_1.

(c) Nehmen Sie an, dass $X_i \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$, $\lambda > 0$. Berechnen Sie die Verteilung von Y_1 und identifizieren Sie diese.



Lösung:

(a) Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses

$$\{N_1 = n\} = \{X_2 < X_1, \ldots, X_{n-1} < X_1,\ X_n > X_1\},\ n \geq 2.$$

Die Anordnung der $n-2$ verschiedenen Werte $X_2, \ldots, X_{n-1}$ ist dabei beliebig. Aufgrund der Aufgabe 3.36 gilt dann

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(N_1 = n) &= (n-2)!\, \mathbb{P}(X_2 < X_3 < \ldots < X_{n-1} < X_1 < X_n) \\ &= (n-2)!\, \frac{1}{n!} = \frac{1}{n\,(n-1)}.\end{aligned}$$

Man bemerke, dass die Verteilung der Rekordzeit N_1 unabhängig von der Verteilung der Zufallsvariablen $X_1, X_2, \ldots$ ist. Das selbe gilt auch für die Verteilung von $N_i, i \geq 2$.

Folglich erhalten wir für den Erwartungswert

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(N_1) &= \sum_{n \geq 2} n\, \mathbb{P}(N_1 = n) \\ &= \sum_{n \geq 2} \frac{1}{n-1} = +\infty.\end{aligned}$$

Die mittlere Wartezeit auf den ersten echten Rekord ist somit unendlich, was erstaunlich ist!

(b) Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses

$$\begin{aligned}\{N_1 = n, Y_1 < t\} &= \{N_1 = n,\ X_n < t\}\\ &= \{X_2 < X_1, \ldots, X_{n-1} < X_1 < X_n < t\}.\end{aligned}$$

Wie in der Teilaufgabe (a), Aufgrund der Aufgabe 3.36 (d) gilt

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(N_1 = n, Y_1 < t) &= (n-2)!\,\mathbb{P}(X_2 < \ldots < X_{n-1} < X_1 < X_n < t)\\ &= (n-2)!\,\frac{1}{n!}\mathbb{P}(X_1 < t, \ldots, X_{n-1} < t, X_n < t)\\ &= \frac{1}{n(n-1)}\,F(t)^n.\end{aligned}$$

Dank der Entwicklung $-\log(1-\alpha) = \sum_{n\geq 1} \frac{\alpha^n}{n}, \alpha \in (0,1)$, bekommt man

$$\begin{aligned}F_{Y_1}(t) &= \sum_{n\geq 2} \mathbb{P}(Y_1 < t, N_1 = n) = \sum_{n\geq 2}\Big(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\Big)F(t)^n\\ &= F(t)\sum_{n\geq 1}\frac{F(t)^n}{n} - \sum_{n\geq 2}\frac{F(t)^n}{n}\\ &= -F(t)\log(1-F(t)) - (-\log(1-F(t)) - F(t))\\ &= F(t) + (1-F(t))\log(1-F(t)).\end{aligned}$$

Dass der zweite Term der letzten Summe immer nichtpositiv ist, bestätigt die Ungleichung $Y_1 \geq X_1$.

(c) Mittels des Ergebnisses aus Teilaufgabe (b) berechnet man

$$F_{Y_1}(t) = 1 - e^{-\lambda t} + e^{-\lambda t}\log\left(e^{-\lambda t}\right) = 1 - (1+\lambda t)\,e^{-\lambda t},\ t > 0.$$

Somit ist eine Dichte von Y_1 gegeben durch

$$f_{Y_1}(x) = \lambda^2 x\, e^{-\lambda x},\ x > 0.$$

Also folgt Y_1 einer Erlang-Verteilung zu den Parametern λ und $n = 2$, siehe Aufgabe 3.26. Das heißt, in diesem Spezialfall hat der Exzess $Y_1 - X_1$ die selbe Verteilung wie X_1 selbst.

KAPITEL 4

Grenzwertsätze

SYLVIE RŒLLY

4.1 Wichtige Ungleichungen

Aufgabe 4.1: Cantelli-Ungleichung ○●●

Sei X eine reellwertige Zufallsvariable mit Erwartungswert m und endlicher Varianz σ^2. Sei $k > 0$.

(a) Zeigen Sie, dass für alle $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\mathbb{P}(X - m \geq k) = \mathbb{P}(X - m + \lambda \geq k + \lambda).$$

Mit Hilfe der Markov-Ungleichung schließe man daraus folgende Ungleichung:

$$\forall \lambda \geq 0, \quad \mathbb{P}(X - m \geq k) \leq \frac{\sigma^2 + \lambda^2}{(k + \lambda)^2}.$$

(b) Man studiere das Minimum der Abbildung $\lambda \mapsto f(\lambda) := \frac{\sigma^2+\lambda^2}{(k+\lambda)^2}$, um die sogenannte *Cantelli-Ungleichung* zu bekommen:

$$\mathbb{P}(X - m \geq k) \leq \frac{\sigma^2}{k^2 + \sigma^2}.$$

(c) Schliesslich beweise man, dass

$$\mathbb{P}(|X - m| \geq k) \leq \frac{2\sigma^2}{k^2 + \sigma^2}.$$

Für welche Werte von k ist diese Ungleichung schärfer als die Bienaymé-Tschebyschoff-Ungleichung?

Lösung:

(a) Für alle λ gilt $\{\omega : X(\omega) - m \geq k\} = \{\omega : X(\omega) - m + \lambda \geq k + \lambda\}$ und daher

$$\mathbb{P}(X - m \geq k) = \mathbb{P}(X - m + \lambda \geq k + \lambda).$$

Nach Markov-Ungleichung gilt nun für $\lambda \geq 0$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X - m \geq k) &= \mathbb{P}(X - m + \lambda \geq k + \lambda) \\ &\leq \mathbb{P}((X - m + \lambda)^2 \geq (k + \lambda)^2) \\ &\leq \frac{\mathbb{E}((X - m + \lambda)^2)}{(k + \lambda)^2} = \frac{\sigma^2 + \lambda^2}{(k + \lambda)^2}.\end{aligned}$$

(b) Ableiten und Nullsetzen der Abbildung f ergibt

$$\begin{aligned}f'(\lambda) &= \frac{2\lambda(k + \lambda) - 2(\sigma^2 + \lambda^2)}{(k + \lambda)^3} \overset{!}{=} 0 \\ &\Leftrightarrow 2\lambda(k + \lambda) = 2(\sigma^2 + \lambda^2) \Leftrightarrow \lambda = \frac{\sigma^2}{k}.\end{aligned}$$

Mit der zweiten Ableitung prüft man leicht nach, dass der Wert σ^2/k tatsächlich ein Minimum von f ist. Es folgt

$$\mathbb{P}(X - m \geq k) \leq \frac{\sigma^2 + \frac{\sigma^4}{k^2}}{\left(k + \frac{\sigma^2}{k}\right)^2} = \frac{\sigma^2}{k^2 + \sigma^2}.$$

(c) Es gilt

$$\mathbb{P}(|X - m| \geq k) = \mathbb{P}(X - m \geq k) + \mathbb{P}(m - X \geq k) \leq \frac{2\sigma^2}{k^2 + \sigma^2}.$$

Die Cantelli-Ungleichung ist schärfer als die Bienaymé-Tschebyschoff-Ungleichung, falls

$$\frac{2\sigma^2}{k^2 + \sigma^2} < \frac{\sigma^2}{k^2} \Leftrightarrow 2k^2 < k^2 + \sigma^2 \Leftrightarrow k < \sigma.$$

Aufgabe 4.2: Optimierte Bienaymé-Tschebyschoff-Ungleichung ○●●

Sei X eine Zufallsvariable mit Erwartungswert m und endlicher Varianz $\sigma^2 > 0$.

(a) Zeigen Sie: Für alle $a \geq 1$ gilt

$$\mathbb{P}(X \geq m + a\sigma) \leq \frac{1}{a^2}.$$

(b) Beweisen Sie die folgende Verbesserung der vorigen Ungleichung:

$$\mathbb{P}(X \geq m + a\sigma) \leq \frac{1}{1 + a^2}.$$

Hinweis: *Benutzen Sie die Abbildung* $x \mapsto g(x) = \dfrac{(a(x - m) + \sigma)^2}{\sigma^2(1 + a^2)^2}$ *und die Markov-Ungleichung.*

(c) Prüfen Sie anhand eines Beispiels, wie scharf diese Ungleichung ist.

Lösung:

(a) Es gilt zunächst mit Hilfe der Bienaymé-Tschebyschoff-Ungleichung

$$\mathbb{P}(X \geq m + a\sigma) = \mathbb{P}(X - m \geq a\sigma) \leq \mathbb{P}(|X - m| \geq a\sigma) \leq \frac{\operatorname{Var}(X)}{a^2\sigma^2} = \frac{1}{a^2}.$$

(b) Weiter gilt für $\omega \in \Omega$

$$X(\omega) \geq m + a\sigma \Leftrightarrow a(X(\omega) - m) + \sigma \geq (a^2 + 1)\sigma \Rightarrow g(X(\omega)) \geq 1.$$

Daraus folgt mittels Markov-Ungleichung

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X \geq m + a\sigma) \leq \mathbb{P}(g(X) \geq 1) &\leq \frac{\mathbb{E}(g(X))}{1} \\ &= \frac{\mathbb{E}((a(X - m) + \sigma)^2)}{\sigma^2(1 + a^2)^2} = \frac{a^2\sigma^2 + \sigma^2}{\sigma^2(1 + a^2)^2} = \frac{1}{1 + a^2}.\end{aligned}$$

(c) Man betrachte zwei Beispiele, ein diskretes Beispiel und dann ein stetiges.

(i) Sei $X \sim \operatorname{Bin}\left(n, 1 - \frac{1}{n}\right)$. Dann hat man $m = n - 1$ und $\sigma = \sqrt{1 - \frac{1}{n}}$. Für alle $a \leq \frac{1}{\sigma}$ gilt

$$L_n := \mathbb{P}(X \geq m + a\sigma) = \mathbb{P}(X \geq n - 1 + a\sigma) = \mathbb{P}(X = n) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n.$$

Andererseits gilt

$$R_n := \min_{0 \le a \le \frac{1}{\sigma}} \frac{1}{1+a^2} = \frac{\sigma^2}{1+\sigma^2} = \frac{n-1}{2n-1}.$$

Numerisch hat man für $n = 2$, die linke Seite der Ungleichung $L_2 = 1/4$ und die rechte Seite $R_2 = 1/3$. Für n sehr groß gilt $L_n \approx 1/e \approx 0{,}37$ und $R_n \approx 1/2$.

(ii) Sei $Y \sim \mathrm{Exp}\,(\lambda)$. Dann hat man $m = \sigma = \frac{1}{\lambda}$. Für alle $a \ge 0$ gilt

$$L_a := \mathbb{P}(Y \ge m + a\sigma) = 1 - F_Y\Big(\frac{1+a}{\lambda}\Big) = e^{-(1+a)}.$$

siehe Aufgabe 3.33.

Die rechte Seite der Ungleichung ist $R_a := \frac{1}{1+a^2}$. Die Ungleichung ist schärfer, wenn a klein ist: $L_{10^{-1}} \approx 0{,}33 < R_{10^{-1}} \approx 1$, aber $L_{10^{-2}} \approx 0{,}36 < R_{10^{-2}} \approx 1$.

Aufgabe 4.3: Suboptimalität der Bienaymé-Tschebyschoff-Ungleichung ○○●

Von allgemeinem Interesse in Anwendungen ist eine *gute* obere Schranke für die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \ge k)$. Hier wird geprüft, ob $\mathrm{Var}(X)/k^2$ eine solche gute Schranke ist.

(a) Sei X eine reellwertige Zufallsvariable mit $\mathbb{P}_X = \mathrm{Bin}\,(n, p)$. Berechnen Sie in Abhängigkeit von n und p jeweils $\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \ge k)$ und $\mathrm{Var}(X)/k^2$.

Sei nun $n = 6$ und $p \in \{1/5, 1/2\}$. Vergleichen Sie die beiden Werte für $k \in \{1, 2, 5\}$.

(b) Sei $X : \Omega \to \{-a, 0, a\}$ eine Zufallsvariable mit $\mathbb{P}(X = -a) = \mathbb{P}(X = a) = p/2$, wobei $a > 0$ und $p \in (0, 1)$.

Berechnen Sie $\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \ge k)$ und $\mathrm{Var}(X)/k^2$ für $k = a$ und vergleichen Sie die Werte.

Lösung:

(a) Da $\mathbb{E}(X) = np$ und $\mathrm{Var}(X) = np\,(1-p)$ gilt

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \ge k) = \sum_{i=\lceil np-k \rceil}^{\lfloor np+k \rfloor} \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}$$

$$\frac{\mathrm{Var}(X)}{k^2} = \frac{np\,(1-p)}{k^2}.$$

Fall n = 6, p = 0,2: $\mathbb{E}(X) = 1{,}2$ und $\mathrm{Var}(X) = 0{,}96$.

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq 1) = \mathbb{P}(X \in \{0, 3, 4, 5, 6\}) \approx 0{,}69 < \mathrm{Var}(X) = 0{,}96,$$
$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq 2) = \mathbb{P}(X \in \{4, 5, 6\}) \approx 0{,}017 < \frac{\mathrm{Var}(X)}{2^2} = 0{,}24,$$
$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq 5) = 0 < \frac{\mathrm{Var}(X)}{5^2} = 0{,}04.$$

Fall n = 6, p = 0,5: $\mathbb{E}(X) = 3$ und $\mathrm{Var}(X) = 1{,}5$.

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq 1) = 1 - \mathbb{P}(X = 3) \approx 0{,}69 < \mathrm{Var}(X) = 1{,}5,$$
$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq 2) = \mathbb{P}(X \in \{0, 1, 5, 6\}) \approx 0{,}22 < \frac{\mathrm{Var}(X)}{2^2} = 0{,}38,$$
$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq 5) = 0 < \frac{\mathrm{Var}(X)}{5^2} = 0{,}06.$$

(b) Es gilt

$$\mathbb{E}(X) = -a \cdot \frac{p}{2} + 0 + a \cdot \frac{p}{2} = 0, \qquad \mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) = a^2 p.$$

Außerdem

$$\mathbb{P}(|X| \geq a) = \mathbb{P}(|X| = a) = \frac{p}{2} + \frac{p}{2} = p = \frac{\mathrm{Var} X}{a^2}.$$

In diesem Fall gilt sogar die Gleichheit: daher ist hier die Bienaymé-Tschebyschoff-Ungleichung scharf.

Aufgabe 4.4: Streuungskontrolle um den Erwartungswert ○○●

Sei X eine reellwertige Zufallsvariable, m ihr Erwartungswert und $\sigma < \infty$ ihre Standardabweichung.

(a) Schätzen Sie mit Hilfe der Bienaymé-Tschebyschoff-Ungleichung folgende Wahrscheinlichkeit nach unten ab:

$$\mathbb{P}(|X - m| \leq k\sigma), \quad k > 0.$$

(b) Wie klein muss σ mindestens sein, damit $\mathbb{P}(|X - m| \leq 0{,}01) \geq 0{,}95$?

(c) Wie groß muss n mindestens sein, damit $\mathbb{P}(|\frac{1}{n}Y - p| \geq 0{,}01) \leq 0{,}05$ gilt, wenn $\mathbb{P}_Y = \mathrm{Bin}\,(n, p)$, wobei $p \in (0, 1)$ und $n \in \mathbb{N}$?

(d) Wie groß muss n mindestens sein, damit $\mathbb{P}(|\frac{1}{n}Z - 1| \geq 0{,}01) \leq 0{,}05$ gilt, unter der Annahme $\mathbb{P}_Z = \mathrm{Poi}\,(n)$?

Lösung:

(a) Es gilt

$$\mathbb{P}(|X - m| \le k\sigma) \ge 1 - \frac{\sigma^2}{k^2\sigma^2} = 1 - \frac{1}{k^2}.$$

(b) Wenn $\frac{1}{k^2} := 0{,}05$, muss $\sigma^2 = \mathrm{Var}(X)$ Folgendes erfüllen:

$$\sigma^2 \le \frac{0{,}01^2}{k^2} = 5 \cdot 10^{-6}.$$

(c) In diesem Fall wendet man das Ergebnis der Frage (a) mit $X := Y/n$, $m = p$ und $\sigma^2 = \dfrac{p\,(1-p)}{n}$ an. Es gilt dann

$$\frac{p\,(1-p)}{n} \le 5 \cdot 10^{-6} \Leftrightarrow n \ge 2p\,(1-p) \cdot 10^5.$$

Da $p\,(1-p) \le 1/4$, bekommt man die von p unabhängige hinreichende Bedingung $n \ge 50\,000$.

(d) In diesem Fall wendet man das Ergebnis der Frage (a) mit $X := Z/n$, $m = 1$ und $\sigma^2 = 1/n$ an. Es gilt dann

$$\frac{1}{n} \le 5 \cdot 10^{-6} \Leftrightarrow n \ge 2 \cdot 10^5.$$

Aufgabe 4.5: Anwendung der Bienaymé-Tschebyschoff-Ungleichung ○○●

Die Verteilung der Preise von Büchern in einer Buchhandlung ist unbekannt. Bekannt sind allerdings der Durchschnittspreis von 10 Euro und die Varianz der Preise, gleich 5. Geben Sie mit Hilfe der Bienaymé-Tschebyschoff-Ungleichung eine untere Abschätzung für die Wahrscheinlichkeit an, dass der Preis eines zufällig entnommenen Buches strikt größer als 5 Euro und strikt kleiner als 15 Euro ist.

Lösung: Man hat

$$\{5 < X < 15\} = \{-5 < X - 10 < 5\}.$$

Dann gilt

$$\mathbb{P}(|X - 10| < 5) \ge 1 - \frac{\sigma^2}{5^2} = 1 - \frac{5}{25} = 1 - \frac{1}{5} = 0{,}8.$$

Aufgabe 4.6: Häufigkeit einer Mädchengeburt ○○●

In einem Land werden jährlich durchschnittlich eine Million Kinder geboren, wobei die Geburt eines Mädchen mit der Wahrscheinlichkei $p \in (0, 1)$ eintritt.

(a) Geben Sie eine untere Schranke für die Wahrscheinlichkeit dafür an, dass die relative Häufigkeit einer Mädchengeburt nach einem Beobachtungszeitraum von 10 Jahren höchstens um 10^{-3} von p abweicht.

(b) Nehmen Sie an, dass $p = 1/2$. Über wie viele Jahre muss die Statistik geführt werden, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 0,99 die relative Häufigkeit einer Mädchengeburt höchstens um 10^{-3} von p abweicht.

Lösung:

(a) Es sei X_j^k die Zufallsvariable, die angibt, ob die j-te Geburt des Jahres k ein Mädchen war oder nicht. Daher ist $X_j^k \sim \operatorname{Ber}(p)$. Es sei weiterhin

$$Y_k := \sum_{j=1}^{10^6} X_j^k$$

die Gesamtzahl der Mädchengeburten im k-ten Jahr; Y_k ist per Definition binomialverteilt zum Parameter p und $n = 10^6$.

Die relative Häufigkeit einer Mädchengeburt nach einem Beobachtungszeitraum von 10 Jahren ist durch

$$\frac{1}{10 \cdot 10^6} \sum_{i=1}^{10} Y_i$$

gegeben.

Unter Annahme der Unabhängigkeit der Gesamtzahl der Mädchengeburten in jedem Jahr gilt

$$\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{10} Y_i\right) = 10\,\mathbb{E}(Y_1) = 10^7 p, \quad \operatorname{Var}\left(\sum_{i=1}^{10} Y_i\right) = 10\operatorname{Var}(Y_1) = 10^7 p(1-p).$$

Damit kann man nun eine untere Schranke berechnen: Nach Bienaymé-Tschebyschoff-Ungleichung gilt

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\Big(\Big|\frac{1}{10^7}\sum_{i=1}^{10} Y_i - p\Big| \leq 10^{-3}\Big) &= 1 - \mathbb{P}\Big(\Big|\sum_{i=1}^{10} Y_i - 10^7 p\Big| > 10^4\Big) \\ &\geq 1 - \frac{\operatorname{Var}\left(\sum_{i=1}^{10} Y_i\right)}{10^8} = 1 - \frac{1}{10} p\,(1-p) \geq 1 - \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{4} = 0{,}975.\end{aligned}$$

(b) Es sei nun $p = \frac{1}{2}$. Es gilt dann

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{\sum_{i=1}^k Y_i}{10^6\, k} - \frac{1}{2}\right| \leq 10^{-3}\right) = 1 - \mathbb{P}\left(\left|\frac{\sum_{i=1}^k Y_k}{k} - \frac{10^6}{2}\right| > 10^3\right)$$
$$\geq 1 - \frac{\operatorname{Var}\left(\sum_{i=1}^k Y_i\right)}{10^6\, k} = 1 - \frac{1}{4k} \overset{!}{\geq} 0{,}99.$$

Dies gilt genau dann, wenn $0{,}01 \cdot 4k \geq 1$. Daraus folgt $k \geq 25$. Die Statistik muss somit wenigstens 25 Jahre lang geführt werden.

Aufgabe 4.7: Macht entschlossener Minderheiten ○●●

An einer Stichwahl zwischen zwei Kandidaten A und B nehmen eine Million Wähler teil. Davon kennen 2 000 Wähler den Kandidaten A gut: Sie stimmen geschlossen für ihn. Die übrigen $n := 998\,000$ Wähler sind ganz unentschlossen und treffen ihre Entscheidung unabhängig voneinander durch Werfen einer fairen Münze.

(a) Welche Verteilung hat die Zufallsvariable Y_n, die die Anzahl der Wähler angibt, die für Kandidaten B stimmen?

(b) Bezeichnen Sie p die Wahrscheinlichkeit eines Sieges von Kandidat B. Wir möchten p schätzen. Beweisen Sie folgendes:

$$p \leq \mathbb{P}\left(\frac{Y_n}{n} \geq \frac{1}{2} + 10^{-3}\right) = \frac{1}{2}\,\mathbb{P}\left(\left|\frac{Y_n}{n} - \frac{1}{2}\right| \geq 10^{-3}\right).$$

(c) Schließen Sie daraus, dass $p_0 = \frac{1}{8} \cdot \frac{1\,000}{998}$ eine obere Schranke für p ist.

Lösung:

(a) Die Anzahl Y_n der B-Stimmen ist binomialverteilt, d.h. $Y_n \sim \operatorname{Bin}(998\,000, 1/2)$.

(b) Es gilt

$$\{Y_n > 500\,000\} = \left\{\frac{Y_n}{n} > \frac{500\,000}{998\,000}\right\} \subset \left\{\frac{Y_n}{n} > \frac{1}{2} + 10^{-3}\right\} \subset \left\{\frac{Y_n}{n} \geq \frac{1}{2} + 10^{-3}\right\}.$$

Daher

$$p = \mathbb{P}(Y_n > 500\,000) \leq \mathbb{P}\left(\frac{Y_n}{n} \geq \frac{1}{2} + 10^{-3}\right).$$

Dank der Symmetrie von $\operatorname{Bin}(998\,000; 0{,}5)$ um $1/2$ gilt

$$\mathbb{P}\left(\frac{Y_n}{n} \geq \frac{1}{2} + 10^{-3}\right) = \mathbb{P}\left(\frac{Y_n}{n} \leq \frac{1}{2} - 10^{-3}\right) = \frac{1}{2}\mathbb{P}\left(\left|\frac{Y_n}{n} - \frac{1}{2}\right| \geq 10^{-3}\right).$$

(c) Dank Bienaymé-Tschebyschoff-Ungleichung

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{Y_n}{n} - \frac{1}{2}\right| \geq 10^{-3}\right) \leq \frac{1}{4n\,10^{-6}}$$

und dann

$$p \leq \frac{1}{8n10^{-6}} = \frac{10^3}{8 \cdot 998} =: p_0 \approx 0{,}125.$$

Bemerkung: Es genügt, eine kleine Gruppe entschlossener Wähler für einen Kandidaten zu haben, um die Wahrscheinlichkeit eines Sieges des anderen Kandidaten klein zu halten.

4.2 Poissonapproximation, das Gesetz der seltenen Ereignisse

Aufgabe 4.8: Wie Versicherungen ihr Risiko beschränken ○●●

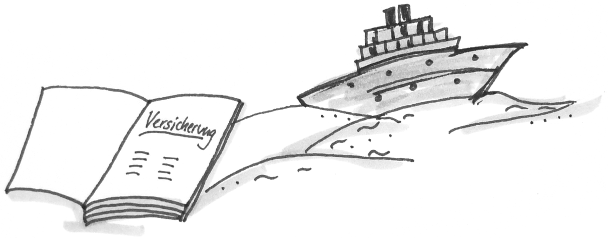
Eine Versicherungsgesellschaft versichert 500 Schiffe, die jeweils eine Million Euro Wert sind. Die versicherte Gefahr ist der Verlust des Schiffes. Dieses Ereignis besitzt eine durchschnittliche Häufigkeit von 10^{-3} pro Jahr. Dabei sei jeder Verlust eines Schiffes unabhängig von den anderen Verlusten.

Sei X die Anzahl der in einem Jahr verlorenen Schiffe.

(a) Was ist die Verteilung der Zufallsvariablen X? Berechnen Sie ihren Erwartungwert und ihre Varianz. Schätzen Sie $\mathbb{P}(X \geq 4)$ mit Hilfe einer bekannten Approximation der Verteilung von X.

(b) Am 31. Dezember zahlt die Versicherungsgesellschaft den Wert der im vorigen Jahr verlorenen Schiffe zurück. Wie hoch muss die Rücklage der Versicherungsgesellschaft sein, um mit einer Wahrscheinlichkeit größer als 0,999 alle Zahlungen leisten zu können?

(c) Die Versicherungsgesellschaft fusioniert mit einer anderen Gesellschaft, die eine Flotte gleicher Größe versichert. Beantworten Sie für diesen Fall die erste und zweite Frage noch einmal.



Lösung:

(a) Sei Y_i die Zufallsvariable, die angibt, ob Schiff Nummer i untergeht oder nicht. Dabei stehe „1“ für gesunken, „0“ für nicht gesunken. Dann ist $Y_i \sim \mathrm{Ber}(10^{-3})$. Insbesondere ist

$$X = \sum_{i=1}^{500} Y_i \sim \mathrm{Bin}(500, 10^{-3}).$$

Daher gilt $\mathbb{E}(X) = 500 \cdot 10^{-3} = 1/2$ und $\mathrm{Var}(X) = 500 \cdot 10^{-3}(1 - 10^{-3}) = 0{,}4995$. Für große n ist die Binomialverteilung $\mathrm{Bin}(n, \frac{1}{2n})$ annähernd eine Poissonverteilung zum Parameter $\lambda = 0{,}5$. Daher gilt

$$\mathbb{P}(X = k) \approx e^{-0{,}5} \cdot \frac{0{,}5^k}{k!} \quad \text{und} \quad \mathbb{P}(X \geq 4) = 1 - \sum_{i=0}^{3} \mathbb{P}(X = i) \approx 2 \cdot 10^{-3}.$$

(b) Sei r die Rücklage der Versicherungsgesellschaft. Dann gilt

$$\mathbb{P}(10^6 \cdot X < r) \geq 1 - 10^{-3} \Leftrightarrow \mathbb{P}(X - 0{,}5 < 10^{-6}\, r - 0{,}5) \geq 1 - 10^{-3}.$$

Es genügt also $\mathbb{P}(|X - 0.5| \geq 10^{-6}\, r - 0{,}5) \leq 10^{-3}$. Aber

$$\mathbb{P}(|X - 0{,}5| \geq 10^{-6}\, r - 0{,}5) \leq \frac{\mathrm{Var}(X)}{(10^{-6}\, r - 0{,}5)^2}$$

und für $r \geq r_{min} = 2{,}29 \cdot 10^6$ Euro ist der letzte Term kleiner als 10^{-3}.

(c) Analog sei Y die Anzahl der in einem Jahr verlorenen Schiffe nach der Fusion.

$$Y \sim \mathrm{Bin}(10^3, 10^{-3}), \quad \mathbb{E}(Y) = 2\mathbb{E}(X) = 1, \quad \mathrm{Var}(Y) = 2\,\mathrm{Var}(X) = 1 - 10^{-3}.$$

Daher ist $r'_{min} = 3{,}21 \cdot 10^6$ Euro.

Bemerkung: Es ist $r'_{min} < 2\, r_{min}$, obwohl sich die Anzahl der Schiffe verdoppelt hat: Die minimale Rücklage wächst langsamer als die Anzahl der Schiffe. Es ist daher im Interesse der Versicherungsgesellschaft, so viele Schiffe wie möglich zu versichern.

Aufgabe 4.9: Anzahl der Tippfehler in Büchern ○○●

Bei der Neuerscheinung eines Buches liege die Wahrscheinlichkeit für eine fehlerhafte Seite bei $3 \cdot 10^{-3}$. Tippfehler können unabhängig voneinander entstehen.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, bei einem Buch mit 1000 Seiten insgesamt höchstens zwei fehlerhafte Seiten zu finden? Verwenden Sie eine passende Approximation.

Lösung: Sei X die zufällige Anzahl der fehlerhaften Seiten. Dann ist $\mathbb{P}_X = \mathrm{Bin}(10^3, 3 \cdot 10^{-3})$. Nutzen Sie die Poisson-Approximation mit $\lambda := 10^3 \cdot 3 \cdot 10^{-3} = 3$. Die Wahrscheinlichkeit von höchstens zwei fehlerhaften Seiten ist dann

$$P(X \leq 2) \approx \mathrm{Poi}(3)(\{0, 1, 2\}) = e^{-3}(1 + 3 + 9/2) \approx 0{,}42.$$

Diese Wahrscheinlichkeit liegt überraschend hoch bei fast 1/2.

4.3 Schwaches Gesetz der großen Zahlen

Aufgabe 4.10: Gesetz der großen Zahlen für nicht i.v. Zufallsvariablen ○●●

Sei $(X_n)_{n\geq 2}$ eine Folge paarweise unkorrelierter Zufallsvariablen mit

$$\mathbb{P}_{X_n} = \frac{1}{2n\log n}\,\delta_{-n} + \Big(1 - \frac{1}{n\log n}\Big)\,\delta_0 + \frac{1}{2n\log n}\,\delta_n.$$

(a) Berechnen Sie $\mathbb{E}(X_n)$ und $\mathrm{Var}(X_n)$.

(b) Bilden Sie $\overline{X}_n := \frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n} X_k$ und beweisen Sie, dass $\mathrm{Var}(\overline{X}_n)$ gegen Null konvergiert.

Hinweis: *Benutzen Sie die Konvergenz des Cesàro-Mittels einer konvergenten Folge.*

(c) Genügt $(X_n)_{n\geq 2}$ dem schwachen Gesetz der großen Zahlen?

Lösung:

(a) Da die Verteilung von X zu Null symmetrisch ist, ist der Erwartungswert Null. Die Varianz ist dann zu berechnen durch

$$\mathrm{Var}(X_n) = \mathbb{E}(X_n^2) = 2\frac{n^2}{2n\log n} = \frac{n}{\log n}.$$

(b) Es gilt zuerst

$$\operatorname{Var}(\overline{X}_n) = \frac{1}{n^2}\sum_{k=2}^{n}\operatorname{Var}(X_k) = \frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n}\frac{k}{n}\frac{1}{\log k} \leq \frac{n-1}{n}\frac{1}{n-1}\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{\log k}.$$

Der letzte rechte Term konvergiert gegen Null nach Cesàro-Mittel:

Sei $(a_n)_n$ eine konvergente Folge reeller Zahlen mit $a := \lim_n a_n$, dann gilt

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k \xrightarrow{n} a.$$

Beim Anwenden für $a_k := \frac{1}{\log(k+1)}$ folgt die Konvergenz der Folge $(\overline{X}_n)_{n\geq 2}$ im quadratischen Mittel gegen Null.

(c) Dank Bienaymé-Tschebyschoff-Ungleichung konvergiert $\overline{X}_n$ auch in Wahrscheinlichkeit gegen Null. Das heißt, $(X_n)_{n\geq 2}$ erfüllt das schwache Gesetz der großen Zahlen.

Aufgabe 4.11: Monte-Carlo-Simulation zur Berechnung eines Integrals ○○●

Sei g eine eine messbare Funktion in $L^1([0,1])$, die quadratintegrierbar ist.

(a) Sei $(X_i)_{1\leq i\leq n)}$ eine Folge von unabhängigen, gleichmäßig auf $[0,1]$ verteilten Zufallsvariablen. Beweisen Sie, dass die Summe $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} g(X_i)$ das Integral $\displaystyle\int_0^1 g(x)dx$ approximiert. Erläutern Sie, in welchem Sinne.

(b) Geben Sie den Ausdruck für die minimale Anzahl n der Zufallsvariablen $(X_i)_{1\leq i\leq n}$ an, die man erzeugen muss, damit die Wahrscheinlichkeit des Approximationsfehlers ε kleiner als δ ist.

(c) Berechnen Sie n explizit für $g(x) = x^2$, $\varepsilon = 0{,}01$ und $\delta = 0{,}05$.

Lösung:

(a) Verwenden Sie das schwache Gesetz der großen Zahlen. Die Zufallsvariablen $(g(X_i))_{i\geq 1}$ sind unabhängig und identisch verteilt. Da $g \in L^1([0,1])$ besitzt $g(X_i)$ einen Erwartungswert. Daher gilt die folgende stochastische Konvergenz:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} g(X_i) = \mathbb{E}(g(X_1)) = \int_0^1 g(x)dx.$$

(b) Nach der Bienaymé-Tschebyschoff-Ungleichung gilt

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} g(X_i) - \int_0^1 g(x)dx\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\mathrm{Var}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} g(X_i)\right)}{\varepsilon^2} = \frac{\mathrm{Var}(g(X_1))}{n\,\varepsilon^2}.$$

Daher ist die gesuchte minimale Anzahl n gleich $\lceil \mathrm{Var}(g(X_1))/\delta\,\varepsilon^2 \rceil$.

(c) Verwenden Sie das Ergebnis von (b) mit $\mathrm{Var}(g(X_1)) = 1/5 - 1/9 = 4/45$. Dies liefert dann $n = 17\,778$.

4.4 Zentraler Grenzwertsatz

Aufgabe 4.12: Kirschmarmelade ohne Wurm ○○●

Mit ungefähr 1000 Kirschen kann man knapp zwei Kilogramm Marmelade kochen. Aus jahrelanger Erfahrung ist bekannt, dass im Durchschnitt in einer von hundert Kirschen ein Wurm ist. Wie wahrscheinlich ist es, dass von den tausend Kirschen höchstens fünf von einem Wurm befallen sind? Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit mit Hilfe des zentralen Grenzwertsatzes.

Lösung: Sei X die zufällige Anzahl befallener Kirschen. Dann ist $X \sim \mathrm{Bin}\,(1000, 1/100)$ und daher ist $\mathbb{E}(X) = 10$ und $\mathrm{Var}(X) = 9{,}9$.

$$\mathbb{P}(X \leq 5) = \mathbb{P}\left(\frac{X - \mathbb{E}(X)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)}} \leq -\frac{5 - \mathbb{E}(X)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)}}\right) = \mathbb{P}\left(\frac{X - 10}{3{,}14} \leq -1{,}59\right) \approx 1 - \Phi(1{,}59) \approx 0{,}06,$$

siehe die Tabelle im Appendix A.2.

Aufgabe 4.13: Herr Schlafmütze – Fortsetzung ○○●

Wie in Aufgabe 2.12 ist der Wecker von Herrn Schlafmütze defekt. Jeden Tag gibt es eine Chance von 25%, dass der Wecker nicht klingelt. Dann verspätet sich Herr Schlafmütze zur Arbeit.

(a) Herr Schlafmütze hat eine gekürzte Arbeitswoche (vier Tage). In der Woche wird beobachtet, wie oft sich Herr Schlafmütze verspätet. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses, dass Herr Schlafmütze in einer Woche genau zweimal zu spät kommt. Berechnen Sie die erwartete Anzahl der Verspätungen.

(b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Herr Schlafmütze an mindestens 49 und höchstens 69 Tagen von betrachteten 235 jährlichen Arbeitstagen verschläft? Nutzen Sie den zentralen Grenzwertsatz.

Lösung:

(a) Die Anzahl der Verspätungen pro Woche kann durch eine binomialverteilte Zufallsvariable X mit $\mathbb{P}_X = \text{Bin}\,(4, \frac{1}{4})$ modelliert werden. Daher gilt

$$\mathbb{P}(X = 2) = \binom{4}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{27}{128} \approx 0{,}211.$$

Die erwartete Anzahl der Verspätungen ist $4 \cdot \frac{1}{4} = 1$.

(b) Gesucht ist $\mathbb{P}(49 \leq Y \leq 69)$ mit $Y \sim \text{Bin}\,(235, \frac{1}{4})$. Es gilt

$$\mu := \mathbb{E}(Y) = 58{,}75 \qquad \sigma^2 := \text{Var}(Y) = 235 \cdot 1/4 \cdot 3/4 \approx 44{,}06.$$

Nach dem Satz von Moivre-Laplace ist $\dfrac{|Y - \mathbb{E}(Y)|}{\sqrt{\text{Var}(Y)}} = \dfrac{|Y-\mu|}{\sigma}$ approximativ standardnormalverteilt und daher gilt

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(49 \leq Y \leq 69) &= \mathbb{P}(|Y-\mu| \leq 10) = \mathbb{P}\left(\frac{|Y-\mu|}{\sigma} \leq \frac{10}{\sigma}\right)\\ &\approx \Phi\Big(\frac{10}{6{,}638}\Big) - \Phi\Big(-\frac{10}{6{,}638}\Big) = 2\,\Phi(1{,}506) - 1 \approx 2 \cdot 0{,}934 - 1 = 0{,}87.\end{aligned}$$

Aufgabe 4.14: Abschätzung der Summe gleichverteilter Variablen ○○●

Sei $(U_n)_{1\leq i\leq n}$ eine Folge von unabhängigen, auf $[0,1]$ gleichverteilten Zufallsvariablen, d.h. für alle i ist $U_i \sim \mathcal{U}([0,1])$.

Schätzen Sie mit Hilfe des zentralen Grenzwertsatzes die Wahrscheinlichkeit, dass $X_n := \sum_{i=1}^{n} U_i$ größer wird als $n/2$.

Lösung: Nach Aufgabe 3.8 ist der Erwartungswert $\mu := \mathbb{E}(X_n) = n/2$ und die Varianz $\sigma^2 := \mathrm{Var}(X_n) = n/12$. Dann ist nach zentralem Grenzwertsatz

$$Y_n := \frac{X_n - \frac{n}{2}}{\sqrt{\frac{n}{12}}}$$

approximativ standardnormalverteilt für n groß.

Demnach ist

$$\mathbb{P}(X_n \geq n/2) = \mathbb{P}(Y_n \geq 0) \approx \Phi(0) = 1/2.$$

In Aufgabe 3.25 wird mit einer anderen Methode ein präziseres Ergebnis bewiesen.

Aufgabe 4.15: Annäherung der Poisson- an die Normalverteilung ○●●

Analysieren Sie die Konvergenz einer Folge standardisierter Poisson-verteilter Zufallsvariablen, wenn ihr Parameter gegen unendlich konvergiert.

(a) Sei zunächst $(S_n)_{n\geq 1}$ eine Folge unabhängiger Poisson-verteilter Zufallsvariablen wobei $S_n \sim \mathrm{Poi}(n)$.

Beweisen Sie, dass

$$\frac{S_n - n}{\sqrt{n}} \xrightarrow[]{n\to\infty} Z,$$

wobei Z eine standardnormalverteilte Zufallsvariable ist.

(b) Betrachten Sie allgemeiner eine Familie $(\tilde{S}_\lambda)_{\lambda>0}$ Poisson-verteilter Zufallsvariablen, wobei $\tilde{S}_\lambda \sim \mathrm{Poi}(\lambda)$. Es wird nicht vorausgesetzt, dass der Parameter λ ganzzahlig ist.

Beweisen Sie, dass fast sicher

$$S_{\lfloor\lambda\rfloor} \leq \tilde{S}_\lambda \leq S_{\lfloor\lambda\rfloor+1}$$

für eine bestimmte Folge $(S_n)_{n\geq 1}$ gilt.

Hinweis: *Definieren Sie unabhängige Poisson-verteilte Zufallsvariablen zu den Parametern $\lfloor\lambda\rfloor$, bzw. $\lambda - \lfloor\lambda\rfloor$, $\lambda + 1 - \lfloor\lambda\rfloor$.*

Schließen Sie daraus, dass

$$\frac{\tilde{S}_\lambda - \lambda}{\sqrt{\lambda}} \xrightarrow[]{\lambda\to\infty} \tilde{Z},$$

wobei $\tilde{Z}$ eine standardnormalverteilte Zufallsvariable ist.

Lösung:

(a) Wenden Sie die Aufgabe 2.35 (b) an. Die Zufallsvariablen S_n lassen sich wie folgt zerlegen:

$$\exists (X_i)_{i\geq 1}, \forall n \in \mathbb{N} : S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

wobei $(X_i)_{i\geq 1}$ eine Folge von unabhängigen Poi(1)-verteilten Zufallsvariablen ist. (Man könnte auch den Satz von Raikov über die unendliche Teilbarkeit der Poissonverteilung anwenden).

Da $\mathbb{E}(X_i) = \mathrm{Var}(X_i) = 1$, gilt dann nach dem zentralen Grenzwertsatz

$$\frac{1}{\sqrt{n}}(S_n - n) \xrightarrow{n\to\infty} Z \sim \mathcal{N}(0,1).$$

(b) Für beliebiges $\lambda \in \mathbb{R}^+$ konstruieren Sie unabhängige Zufallsvariablen

$$N_1 \sim \mathcal{P}_{\lfloor\lambda\rfloor}, \quad N_2 \sim \mathcal{P}_{\lambda-\lfloor\lambda\rfloor}, \quad N_3 \sim \mathcal{P}_{\lfloor\lambda\rfloor+1}.$$

Sei weiterhin

$$S_{\lfloor\lambda\rfloor} := N_1 \text{ und } S_{\lfloor\lambda\rfloor+1} := N_1 + N_2 + N_3.$$

Wegen der Faltungsstabilität der Poissonverteilung bemerken Sie, dass $\tilde{S}_\lambda \sim N_1 + N_2$. Es gilt auch nach Definition

$$S_{\lfloor\lambda\rfloor} \leq \tilde{S}_\lambda \leq S_{\lfloor\lambda\rfloor+1} \quad \text{f.s.}$$

Nun lassen sich wieder $S_{\lfloor\lambda\rfloor}$ und $S_{\lfloor\lambda\rfloor+1}$ als partielle Summen von Folgen Poi(1)-verteilter Zufallsvariablen zerlegen. Es gilt daher f.s. folgende Ungleichungskette

$$\begin{aligned}
&\sqrt{\frac{\lfloor\lambda\rfloor}{\lambda}}\left(\frac{S_{\lfloor\lambda\rfloor} - \lfloor\lambda\rfloor}{\sqrt{\lfloor\lambda\rfloor}} + \frac{\lfloor\lambda\rfloor - \lambda}{\sqrt{\lfloor\lambda\rfloor}}\right)\\
&\qquad\leq \frac{\tilde{S}_\lambda - \lambda}{\sqrt{\lambda}}\\
&\qquad\qquad\leq \sqrt{\frac{\lfloor\lambda\rfloor}{\lambda}}\left(\frac{S_{\lfloor\lambda\rfloor+1} - \lfloor\lambda\rfloor}{\sqrt{\lfloor\lambda\rfloor}} + \frac{\lfloor\lambda\rfloor - \lambda}{\sqrt{\lfloor\lambda\rfloor}}\right).
\end{aligned}$$

Daraus folgt mit Hilfe des zentralen Grenzwertsatzes die gewünschte Behauptung.

Aufgabe 4.16: Annäherung an eine Gauß-Verteilung unmöglich ○●●

Es sei $(X_n)_{n\geq 1}$ eine Folge unabhängiger Zufallsvariablen mit

$$\mathbb{P}(X_n = -2^n) = \mathbb{P}(X_n = +2^n) = \frac{1}{2}.$$

Beweisen Sie, dass die Folge $(S_n)_{n\geq 1}$ mit

$$S_n := \frac{\sum_{k=1}^n (X_k - \mathbb{E}(X_k))}{\sqrt{\mathrm{Var}(\sum_{k=1}^n X_k)}}$$

sich nicht an eine Gauß-Verteilung annähern kann und somit der zentrale Grenzwertsatz in diesem Fall nicht gilt.

Hinweis: *Zeigen Sie, dass die Folge $(S_n)_{n\geq 1}$ beschränkt bleibt.*

Lösung:

Es gilt zunächst f.s.

$$\sum_{k=1}^n X_k \leq \sum_{k=1}^n 2^k = 2\,(2^n - 1).$$

Die $(X_n)_{n\geq 1}$ sind unabhängig und zentriert. Daher gilt nach dem Satz von Bienaymé

$$\mathrm{Var}\Big(\sum_{k=1}^n X_k\Big) = \sum_{k=1}^n \mathrm{Var}(X_k) = \sum_{k=1}^n \mathbb{E}(X_k^2) = \sum_{k=1}^n 4^k = \frac{4}{3}(4^n - 1) \geq 4^n - 1.$$

Demnach ist wegen $\mathbb{E}(X_k) = 0$

$$S_n = \frac{\sum_{k=1}^n X_k}{\sqrt{\mathrm{Var}\left(\sum_{k=1}^n X_k\right)}} \leq 2\frac{2^n - 1}{\sqrt{4^n - 1}} < 2.$$

Die Folge der Zufallsvariablen $(S_n)_{n\geq 1}$ ist daher f.s. gleichmäßig durch die Konstante 2 nach oben beschränkt. Würde diese Folge in Verteilung gegen ein S_∞ konvergieren, so gälte

$$P(S_\infty > 2) = 0.$$

Jede Gauß-Verteilung gewichtet aber das Intervall $(2, +\infty)$ positiv. Daher kann S_∞ keine Gauß-verteilte Zufallsvariable sein.

Aufgabe 4.17: Probabilistische Integralrechnung ○○●

Sei $f : [0,1] \to [0,1]$ eine stetige Funktion, deren Integral $\mathcal{I} := \int_0^1 f(x)\,dx$ bestimmt werden soll.

Es seien $(X_n)_{n\geq 1}$, $(Y_n)_{n\geq 1}$ zwei unabhängige Folgen unabhängig auf $[0,1]$ gleichmäßig verteilter Zufallsvariablen. Sei

$$Z_n := \mathbb{1}_{\{Y_n < f(X_n)\}}.$$

(a) Erklären Sie, warum

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} Z_k = \mathcal{I} \quad \text{f.s.}$$

(b) Wie groß muss n mindestens sein, um das Integral $\mathcal{I}$ mit Wahrscheinlichkeit 0,95 mit einer Genauigkeit von höchstens 0,01 zu bestimmen?

Lösung:

(a) Die Zufallsvariable Z_k ist Bernoulli-verteilt zum Parameter $q := \mathbb{P}(Y_k < f(X_k))$. Sei $A := \{(x,y) \in [0,1]^2, f(x) > y\}$. Dank der Unabhängigkeit zwischen X_k und Y_k, gilt

$$q = \int_{[0,1]^2} \mathbb{1}_A(x,y)\,dx\,dy = \int_0^1 \int_0^{f(x)} dy\,dx = \int_0^1 f(x)dx = \mathcal{I}.$$

Die Folge $(Z_k)_k$ ist unabhängig und identisch verteilt. Daher ist die Folge der arithmetischen Mittel $(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n Z_k)_n$ eine Folge, die nach dem schwachen Gesetz der großen Zahlen gegen $\mathbb{E}(Z_k) = \mathcal{I}$ stochastisch konvergiert.

(b) Die partielle Summe $S_n := \sum_{k=1}^n Z_k$ ist binomialverteilt zu den Parametern n und $\mathcal{I}$. Insbesondere gilt: $\mathbb{E}(S_n) = n\,\mathcal{I}$ und $\operatorname{Var}(S_n) = n\,\mathcal{I}\,(1-\mathcal{I}) =: n\,\sigma^2$.

Nach dem Satz von de Moivre-Laplace gilt nun

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{n}}(S_n - n\,\mathcal{I}) \xrightarrow[n\to\infty]{(d)} Z \sim \mathcal{N}(0,1).$$

Man hat

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{n}S_n - \mathcal{I}\right| \leq 0{,}01\right) &= \mathbb{P}\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{n}}\left|S_n - n\,\mathcal{I}\right| \leq 0{,}01\,\frac{\sqrt{n}}{\sigma}\right)\\ &\approx \mathbb{P}\left(|Z| \leq 0{,}01\,\frac{\sqrt{n}}{\sigma}\right) \leq \mathbb{P}(|Z| \leq 0{,}02\,\sqrt{n}).\end{aligned}$$

Die letzte Ungleichung basiert auf $\sigma \leq \max_{y\in[0,1]} \sqrt{y(1-y)} = \frac{1}{2}$.

Man kann weiter schätzen:

$$\mathbb{P}(|Z| \leq 0{,}02\ \sqrt{n}) = 2\,\Phi(0{,}02\ \sqrt{n}) - 1 \stackrel{!}{=} 0{,}95 \Leftrightarrow 0{,}02\,\sqrt{n} = 1{,}956 \Leftrightarrow n = 9\,604.$$

Für $n \geq n_{min} := 9\,604$ ist die Wahrscheinlichkeit, dass S_n/n das Integral $\mathcal{I}$ mit einem Fehler kleiner als 0,01 approximiert, größer als 0,95.

Aufgabe 4.18: Gewichtete Partialsummen der Exponentialreihe ○●●

Man möchte das (nicht triviale) asymptotische Verhalten der n-ten Partialsumme

$$\mathbf{s}_n(x) := \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$$

der Exponentialreihe an der Stelle $x = n$ betrachten.

(a) Berechnen Sie zunächst für $x \in \mathbb{R}$ fest,

$$\mathbf{s}_\infty(x) := \lim_{m\to+\infty} \mathbf{s}_m(x).$$

Schließen Sie daraus den Wert von $\mathbf{s}_\infty(n)$.

(b) Untersuchen Sie jetzt die Wachstumsrate der Folge $(\mathbf{s}_n(n))_{n\geq 0}$: Die beiden Variablen x und n sind dann gekoppelt. Die dafür vorgeschlagene Methode ist probabilistisch.

Sei $(X_i)_{i\geq 1}$ eine Folge unabhängiger, identisch verteilter Zufallsvariablen, wobei $X_i \sim \mathrm{Poi}(1)$.

Beweisen Sie:

$$\mathbb{P}(X_1 + \ldots + X_n - n \leq 0) = e^{-n}\,\mathbf{s}_n(n).$$

Schließen Sie daraus mit Hilfe des zentralen Grenzwertsatzes, dass asymptotisch

$$\mathbf{s}_n(n) \approx \frac{1}{2}\,e^n.$$

Lösung:

(a) Dank Exponentialreihe gilt

$$\mathbf{s}_\infty(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x$$

und daher $\mathbf{s}_\infty(n) = e^n$. Weiter folgt

$$\lim_{n\to\infty} e^{-n} \lim_{m\to+\infty} \mathbf{s}_m(n) = 1.$$

(b) Die Poisson-Verteilung ist stabil unter Faltung, siehe 2.35. Daher ist $S_n := \sum_{k=1}^n X_k$ Poisson-verteilt zum Parameter n und es gilt

$$\mathbb{P}(S_n - n \leq 0) = \mathbb{P}(S_n \leq n) = e^{-n} \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!} = e^{-n}\, \mathbf{s}_n(n).$$

Dank der Eigenschaften der Poisson-Verteilung ist $\mathbb{E}(S_n) = \mathrm{Var}(S_n) = n$. Nach dem zentralen Grenzwertsatz gilt dann

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(S_n - n \leq 0) = \mathbb{P}\Big(\frac{S_n - n}{\sqrt{n}} \leq 0\Big) \\
= \mathbb{P}\Big(\frac{S_n - \mathbb{E}(S_n)}{\sqrt{\mathrm{Var}(S_n)}} \leq 0\Big) \\
\xrightarrow{n\to\infty} \mathbb{P}(Z \leq 0) = \frac{1}{2},
\end{aligned}$$

wobei $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

Anders als bei der ersten Frage ergibt sich: $\lim_{n\to\infty} e^{-n}\, \mathbf{s}_n(n) = 1/2$.

Bemerkung: Beim Vergleichen der Ergebnisse aus (a) und (b) sieht man einerseits

$$\mathbf{s}_\infty(n) \not\approx \mathbf{s}_n(n)$$

und andererseits

$$\lim_{n\to+\infty} e^{-n} \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!} = \lim_{n\to+\infty} e^{-n} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{n^k}{k!} = \frac{1}{2}.$$

Aufgabe 4.19: Optimale Größe einer Kaffeetasse ○○●

Herr K. trinkt gerne Kaffee und hat sich daher einen Kaffee-Vollautomaten gekauft. Der Automat soll 300 *ml* Kaffee ausgeben, das heißt ungefähr den Inhalt einer großen Tasse. Allerdings ist der Automat unzuverlässig: Die Kaffeemenge schwankt bei jedem Brühen.

Herrn K.s Tasse ist besonders groß und fasst 320 *ml*. In etwa 68,3 % der Ausgaben enthält seine Tasse nicht weniger als 280 *ml* Kaffee und läuft auch nicht über.

Nehmen Sie an, dass die zufällig ausgegebene Menge Kaffee X normalverteilt ist.

(a) Bestimmen Sie den Mittelwert und die Standardabweichung von X.

(b) Welches Fassungsvermögen müsste Herrn K.s Tasse haben, sodass die Wahrscheinlichkeit des Überlaufens kleiner als 4,6 % wird?

Lösung:

(a) Der Mittelwert von X ist $\mu = 300\,(ml)$. Weiter ist für $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$

$$\mathbb{P}(Z \in [-1,1]) \approx 0{,}683 = \mathbb{P}(X \in [280,320]) = \mathbb{P}\left(\frac{X-300}{20} \in [-1,1]\right)$$

Man kann daher $X \sim \mathcal{N}(300, 20^2)$ annehmen.

(b) Sei $300 + x$ das gesuchte Fassungsvermögen (x wird in ml angegeben).

$$\mathbb{P}(X > 300 + x) = \mathbb{P}\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \geq \frac{x}{20}\right) = 1 - \Phi(x/20) \stackrel{!}{=} 0{,}046.$$

Daher $\Phi(x/20) \stackrel{!}{\approx} 0{,}954$ und $x/20 \approx 1{,}69$. Daraus ergibt sich für x ungefähr $33{,}8\,ml$. Das heißt, die Tasse müsste mindestens $334\,ml$ fassen, damit sie mit Wahrscheinlichkeit höher als 0,954 nicht überläuft.

Kapitel 5

Elementare Statistik

Franziska Göbel

5.1 Deskriptive Statistik

Aufgabe 5.1: Einfluss auf Mittelwert und Median ○●●

Gegeben seien die sechs Beobachtungen

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
2,1	3,4	4,2	4,9	5,3	5,9

(a) Berechnen Sie den Mittelwert $\bar{x}$, den Median und die empirische Varianz s^2 der Daten.

(b) Ergänzen Sie die Beobachtungen so um einen Wert, dass der Median den Wert 4,2 annimmt und der Mittelwert

(i) größer (ii) kleiner (iii) gleich

dem Median ist.

Lösung:

(a) Der Mittelwert lautet

$$\bar{x} = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^{6} x_i = \frac{25{,}8}{6} = 4{,}3.$$

Jeder Wert des Intervalls $[4{,}2; 4{,}9]$ kann als Median gewählt werden. Oft wird $q_{0,5} := 0{,}5\,(4{,}2 + 4{,}9) = 4{,}55$ gewählt. Die empirische Varianz lautet

$$s^2 = \frac{1}{6-1} \sum_{i=1}^{6} (x_i - \bar{x})^2 = \frac{9{,}58}{5} = 1{,}916.$$

Manchmal wird auch der nicht erwartungstreue Schätzer

$$s^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$$

für die Varianz als empirische Varianz genutzt. In diesem Fall mit $n = 6$, ist $s^2 \approx 1{,}597$.

(b) Ein zusätzlicher Wert hat Einfluss sowohl auf den Mittelwert als auch auf den Median. Bei $n = 7$ Beobachtungen ist der Median der viertgrößte Wert der Beobachtungen.

Damit der Median den Wert 4,2 annimmt, muss also $x_7 \leq 4{,}2$ gelten.

Für den Mittelwert $\bar{x}$ folgt

$$\bar{x} = \frac{1}{7}(25{,}8 + x_7).$$

Das heißt für $x_7 < 3{,}6$ ist der Mittelwert kleiner als der Median, für $3{,}6 < x_7 \leq 4{,}2$ ist der Mittelwert größer als der Median und für $x_7 = 3{,}6$ stimmen Mittelwert und Median überein.

Aufgabe 5.2: Empirische Quantile und Verteilungsfunktion ○○●

Gegeben seien folgende Beobachtungen:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}
3	5	3	6	10	1	3	8	4	10

(a) Bestimmen Sie den Median, das untere Quartil und das obere Quartil der Daten.

(b) Bestimmen und zeichnen Sie die empirische Verteilungsfunktion.

Hinweis:

Der Wert q_α mit $\alpha \in (0,1)$ heißt empirisches α-Quantil, wenn mindestens $100\alpha\%$ der Daten kleiner oder gleich q_α und mindestens $100(1-\alpha)\%$ der Daten größer oder gleich q_α sind. Damit ist ein empirisches Quantil nicht immer eindeutig bestimmt.

Der Wert $q_{0,5}$ heißt Median, $q_{0,25}$ unteres Quartil und $q_{0,75}$ oberes Quartil.

Lösung:

(a) Um empirische Quantile zu bestimmen, ist es hilfreich, von den unsortierten Daten x_i zu den sortierten Daten $x_{(i)}$ überzugehen:

$x_{(1)}$	$x_{(2)}$	$x_{(3)}$	$x_{(4)}$	$x_{(5)}$	$x_{(6)}$	$x_{(7)}$	$x_{(8)}$	$x_{(9)}$	$x_{(10)}$
1	3	3	3	$\underline{4}$	$\underline{5}$	6	8	10	10

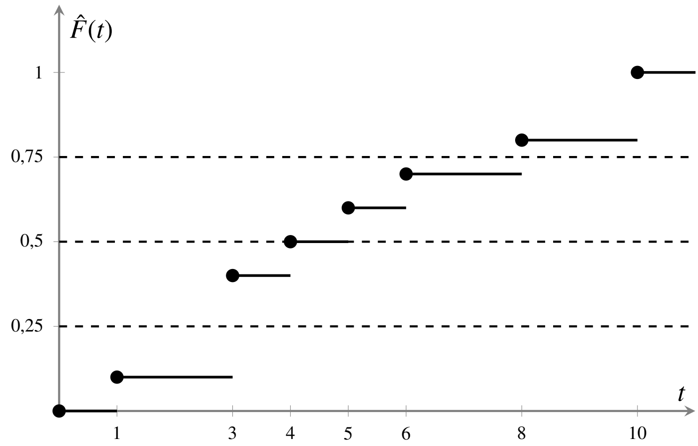


Abbildung 5.1: Graph der empirischen Verteilungsfunktion $\hat{F}$.

Da die Anzahl der Datenpunkte mit $n = 10$ gerade ist, ist der Median nicht eindeutig. Es gilt

$$q_{0,5} \in [4, 5].$$

Oft wird der Durchschnitt $\frac{1}{2}(x_{(n/2)} + x_{(n/2+1)})$ gewählt. In diesem Fall gilt also $q_{0,5} = \frac{1}{2}(4 + 5) = 4{,}5$. Oberes bzw. unteres Quartil sind gegeben durch

$$q_{0,25} = x_{(\lfloor 0,25 \cdot 10 \rfloor + 1)} = x_{(3)} = 3,$$

$$q_{0,75} = x_{(\lfloor 0,75 \cdot 10 \rfloor + 1)} = x_{(8)} = 8.$$

(b) Die empirische Verteilungsfunktion $\hat{F}(t) : \mathbb{R} \to [0, 1]$ ist gegeben durch

$$\hat{F}(t) = \begin{cases} 0, & \text{für } t < 1 \\ 1/10, & 1 \leq t < 3 \\ 4/10, & 3 \leq t < 4 \\ 5/10, & 4 \leq t < 5 \\ 6/10, & 5 \leq t < 6 \\ 7/10, & 6 \leq t < 8 \\ 8/10, & 8 \leq t < 10 \\ 1, & \text{für } t \geq 10. \end{cases}$$

Siehe auch Abbildung 5.1.

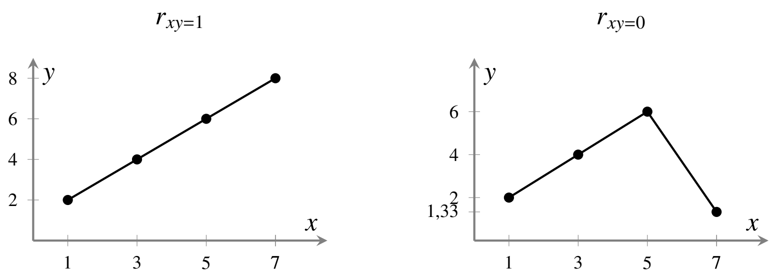


Abbildung 5.2: Datenreihen mit maximalem Korrelationskoeffizient und mit Korrelationskoeffizient Null.

Aufgabe 5.3: Empirischer Korrelationskoeffizient ○○●

Es sei eine Messreihe (x_i, y_i), $i \in \{1, \ldots, 4\}$, gegeben durch

i	1	2	3	4
x_i	1	3	5	7
y_i	2	4	6	u

Dabei ist $u \in \mathbb{R}$ ein unbekannter Wert. Wählen Sie, wenn möglich, u so, dass für den empirischen Korrelationskoeffizienten

$$r_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2}},$$

wobei $n = 4$, gilt: (a) $r_{xy} = 1$, (b) $r_{xy=0}$ und (c) $r_{xy} = -1$. Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösung:

(a) Es gilt $r_{xy} = 1$, wenn alle Punkte auf einer Geraden mit positivem Anstieg liegen. Das ist der Fall, wenn $u = 8$ gilt, siehe Abbildung 5.2, links.

(b) Aus $r_{xy} = 0$ folgt zunächst $\sum_{i=1}^{4}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = 0$. Da

$$\sum_{i=1}^{4}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = \sum_{i=1}^{4}(x_i y_i - y_i\bar{x} - x_i\bar{y} + \bar{x}\bar{y}) = \sum_{i=1}^{4} x_i y_i - 4\,\bar{x}\bar{y}$$

gilt, wird ein u gesucht, sodass $\sum_{i=1}^{4} x_i y_i = 4\,\bar{x}\bar{y}$ gilt. Die Gleichung ist für $u = 4/3$ erfüllt, siehe Abbildung 5.2, rechts.

(c) Es gibt keinen Wert u, sodass $r_{xy} = -1$. Dafür müssten alle Punkte auf einer Geraden mit negativem Anstieg liegen.

5.2 Punktschätzer

Aufgabe 5.4: Genauigkeit beim Schätzen der Poisson-Verteilung ○●●

Die Zufallsvariable X sei Poisson-verteilt zum Parameter $\lambda > 0$. Dabei ist λ unbekannt und soll durch n unabhängige Messungen $X_1, \ldots, X_n$ geschätzt werden, wobei $X_i \sim \mathrm{Poi}(\lambda)$. Betrachtet wird der Schätzer

$$\bar{X}_n := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i.$$

Angenommen, der wahre Wert ist $\lambda = 4$. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, bei 10 000 Messungen diesen Wert bis auf einen Fehler von $\varepsilon = 0{,}05$ genau zu schätzen?

(a) Schätzen Sie diese Wahrscheinlichkeit mit Hilfe der Bienaymé-Tschebyschoff-Ungleichung ab.

(b) Berechnen Sie diese Wahrscheinlichkeit approximativ mit Hilfe des zentralen Grenzwertsatzes. Was bemerken Sie?

Lösung:

Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(|\bar{X}_n - 4| < 0{,}05)$ für $n = 10\,000$.

(a) Unter Verwendung der Bienaymé-Tschebyschoff-Ungleichung gilt

$$\mathbb{P}(|\bar{X}_n - 4| < 0{,}05) = 1 - \mathbb{P}(|\bar{X}_n - 4| \geq 0{,}05) \geq 1 - \frac{4/10\,000}{0{,}05^2} = 0{,}84.$$

(b) Nach dem zentralen Grenzwertsatz gilt

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(|\bar{X}_n - 4| < 0{,}05) &= \mathbb{P}\left(\frac{|\bar{X}_n - 4|}{\sqrt{1/10\,000 \cdot 4}} < \frac{0{,}05}{\sqrt{1/10\,000 \cdot 4}}\right) \\ &\approx 2\,\Phi(2{,}5) - 1 \approx 0{,}9876.\end{aligned}$$

Diese Methode ist präziser.

Aufgabe 5.5: Hinreichende Bedingung für schwache Konsistenz ○●●

Sei $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), (\mathbb{P}_\vartheta)_{\vartheta\in\Theta})$ ein statistisches Modell und für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei $\hat{\vartheta}_n$ ein Schätzer für ϑ.

Für einen beliebigen Schätzer $\hat{\vartheta}$ definiere man

$$\mathbb{B}_\vartheta(\hat{\vartheta}) := \mathbb{E}_\vartheta(\hat{\vartheta} - \vartheta)$$

als seine *Verzerrung* (engl.: Bias) und

$$\mathrm{MSE}_\vartheta(\hat{\vartheta}) := \mathbb{E}_\vartheta((\hat{\vartheta} - \vartheta)^2)$$

als seine *mittlere quadratische Abweichung* (engl.: Mean Squared Error, MSE).

(a) Zeigen Sie, dass gilt

$$\mathrm{Var}_\vartheta(\hat{\vartheta}) = \mathrm{MSE}_\vartheta(\hat{\vartheta}) - (\mathbb{B}_\vartheta(\hat{\vartheta}))^2.$$

(b) Zeigen Sie, dass wenn beide Bedingungen

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{Var}_\vartheta(\hat{\vartheta}_n) = 0 \qquad \text{und} \qquad \lim_{n\to\infty} \mathbb{B}_\vartheta(\hat{\vartheta}_n) = 0$$

erfüllt sind, $(\hat{\vartheta}_n)_n$ eine schwach konsistente Schätzfolge ist.

Hinweis: *Zeigen Sie zuerst, dass* $\lim_{n\to\infty} \mathrm{MSE}_\vartheta(\hat{\vartheta}_n) = 0$ *eine hinreichende Bedingung für die Konsistenz ist.*

(c) Betrachten Sie unabhängige Beobachtungen $X = (X_1, \ldots, X_n)$ aus dem n-fachen Produktmodell $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), (\mathbb{P}_\vartheta^{\otimes n})_{\vartheta\in\Theta})$ und nehme Sie an, dass die Verteilungen $\mathbb{P}_\vartheta$ endliche Varianz haben.

Gegeben sei die Schätzfolge des Stichprobenmittels

$$\bar{X}_n := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i, \; n \in \mathbb{N}.$$

Weisen Sie die Erwartungstreue und mit Hilfe von (b) die schwache Konsistenz von $\bar{X}_n$ nach.

Lösung:

(a) Es gilt

$$\mathrm{Var}_\vartheta(\hat{\vartheta}) = \mathrm{Var}_\vartheta(\hat{\vartheta} - \vartheta) = \mathbb{E}_\vartheta((\hat{\vartheta} - \vartheta)^2) - (\mathbb{E}_\vartheta(\hat{\vartheta} - \vartheta))^2 = \mathrm{MSE}_\vartheta(\hat{\vartheta}) - (\mathbb{B}_\vartheta(\hat{\vartheta}))^2.$$

(b) Zu zeigen ist $\mathbb{P}_\vartheta(|\hat{\vartheta}_n - \vartheta| \geq \varepsilon) \to_n 0$ für alle $\varepsilon > 0$. Nach der Markov-Ungleichung gilt aber

$$\mathbb{P}_\vartheta(|\hat{\vartheta}_n - \vartheta| \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathbb{E}_\vartheta(|\hat{\vartheta}_n - \vartheta|^2)}{\varepsilon^2}.$$

Damit ist $\lim_{n\to\infty} \mathrm{MSE}_\vartheta(\hat{\vartheta}_n) = 0$ eine hinreichende Bedingung für die Konsistenz.

Nach (a) gilt $\mathrm{MSE}_\vartheta(\hat{\vartheta}_n) = \mathrm{Var}_\vartheta(\hat{\vartheta}_n) + (\mathbb{B}_\vartheta(\hat{\vartheta}_n))^2$. Wenn sowohl die Varianz als auch die Verzerrung gegen 0 konvergieren, dann ist die hinreichende Bedingung erfüllt und die Schätzfolge ist schwach konsistent.

(c) Sei $\gamma := \mathbb{E}_\vartheta(X_1)$. Der Schätzer ist erwartungstreu, denn

$$\mathbb{E}_\vartheta(\bar{X}_n) = \frac{1}{n} n\, \mathbb{E}_\vartheta(X_1) = \gamma,$$

d.h. die Verzerrung $\mathbb{B}_\vartheta(\bar{X}_n) = \mathbb{E}_\vartheta(\bar{X}_n - \gamma)$ beträgt 0. Die Varianz ist gegeben durch

$$\mathrm{Var}_\vartheta(\bar{X}_n) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^n \mathrm{Var}_\vartheta(X_i) = \frac{n}{n^2}\mathrm{Var}_\vartheta(X_1) = \frac{1}{n}\mathrm{Var}_\vartheta(X_1).$$

Damit konvergiert die Varianz gegen 0, wenn $n \to \infty$. Somit sind beide hinreichenden Bedingungen aus (b) erfüllt und die Schätzfolge ist schwach konsistent.

Bemerkung: Die schwache Konsistenz von $\bar{X}_n$ entspricht dem (schwachen) Gesetz der großen Zahlen.

Aufgabe 5.6: Varianz schätzen, wenn Erwartungswert unbekannt ○●●

Sei $X = (X_1, \ldots, X_n)$ eine zufällige Stichprobe, die auf n unabhängigen Beobachtungen beruht. Nehmen Sie an, dass $X_1, \ldots, X_n$ unabhängige und identisch verteilte, reellwertige Zufallsvariablen in L^2 seien.

Betrachten Sie den Schätzer

$$T(X) := \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2,$$

wobei $\bar{X}_n := \frac{1}{n}(X_1 + X_2 + \ldots + X_n)$ das Stichprobenmittel sei.

(a) Die Verteilung sei fix, aber Erwartungswert und Varianz seien unbekannt. Geben Sie ein statistisches Modell an.

(b) Prüfen Sie, ob der Schätzer T für die Varianz erwartungstreu ist.

Lösung: Aus Aufgabe 5.5 ist schon die Erwartungstreue von $\bar{X}_n$ des Stichprobenmittels und die schwache Konsistenz der Schätzfolge $(\bar{X}_n)_n$ bekannt. Es muss daher nicht mehr betrachtet werden.

(a) Sei $\mathbb{P}_\vartheta$ die Verteilung von X_i, wobei

$$\vartheta := (m, \sigma^2) = (\mathbb{E}(X_i), \mathrm{Var}(X_i)) \in \Theta := \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+.$$

Dann ist das statistische Modell das Produktmodell

$$(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), \mathbf{P})$$

mit $\mathbf{P} = \{\mathbb{P}_\vartheta^{\otimes n} : \vartheta \in \Theta\}$.

(b) Sei $\vartheta \in \Theta$ beliebig. Dann folgt

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_\vartheta(T(X)) &= \mathbb{E}_\vartheta\Big(\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2\Big) = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n \mathbb{E}_\vartheta(\underbrace{(X_i - \bar{X}_n))^2}_{X_i^2 - 2X_i\bar{X}_n + \bar{X}_n^2})\\
&= \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^n \mathbb{E}_\vartheta(X_i^2) - 2\sum_{i=1}^n \mathbb{E}_\vartheta(X_i\bar{X}_n) + \sum_{i=1}^n \mathbb{E}_\vartheta(\bar{X}_n^2)\right).
\end{aligned}$$

Als ersten Summanden erhält man

$$\sum_{i=1}^n \mathbb{E}_\vartheta(X_i^2) = \sum_{i=1}^n (\mathrm{Var}_\vartheta(X_i) + \mathbb{E}_\vartheta(X_i)^2) = n\,(\sigma^2 + m^2).$$

Für den zweiten Summanden erhält man

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n \mathbb{E}_\vartheta(X_i\bar{X}_n) &= \sum_{i=1}^n \mathbb{E}_\vartheta\left(X_i \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n X_j\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \Big(\mathbb{E}_\vartheta(X_i^2) + (n-1)\mathbb{E}_\vartheta(X_i)^2\Big)\\
&= \frac{1}{n}\Big(n\,\sigma^2 + n^2 m^2\Big) = \sigma^2 + n\,m^2.
\end{aligned}$$

Für den dritten Summanden gilt - unter Beachtung von $\bar{X}_n^2 = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n X_i X_j$ - analog zu oben,

$$\sum_{i=1}^n \mathbb{E}_\vartheta(\bar{X}_n^2) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \mathbb{E}_\vartheta(X_i X_j) = \sigma^2 + nm^2.$$

Zusammengesetzt ergibt sich die Erwartungstreue, denn

$$\mathbb{E}_\vartheta(T(X)) = \frac{1}{n-1}\Big(n(\sigma^2 + m^2) - 2(\sigma^2 + nm^2) + \sigma^2 + nm^2\Big) = \sigma^2.$$

Bemerkung: $T(X)$ ist die sogenannte *Stichprobenvarianz* und wird oft mit s^2 abgekürzt.

Aufgabe 5.7: Kombination von Schätzverfahren ○○●

Um eine bestimmte Größe ϑ durch Messen zu bestimmen, sind zwei verschiedenen Methoden verwendet worden. Es ist bekannt, dass beide Verfahren „im Mittel das Richtige liefern“, das heißt $\hat{\vartheta}_1$ und $\hat{\vartheta}_2$ sind erwartungstreue Schätzverfahren.

Die Genauigkeit des i-ten Verfahrens, $i \in \{1, 2\}$, wird durch die Standardabweichung $\sigma_i > 0$ charakterisiert. Man nehme an, beide Schätzverfahren seien unabhängig.

Man möchte auf kein Resultat verzichten und kombiniert daher beide Verfahren zu

$$\hat{\vartheta} := \alpha\, \hat{\vartheta}_1 + (1 - \alpha)\, \hat{\vartheta}_2, \quad \alpha \in (0, 1).$$

(a) Zeigen Sie, dass $\hat{\vartheta}$ ein erwartungstreues Schätzverfahren ist.

(b) Wählen Sie α so, dass die Varianz von $\hat{\vartheta}$ so klein wie möglich ist.

(c) Ist es sinnvoll, beide Verfahren wie oben angegeben zu kombinieren?

Lösung:

(a) Da

$$\mathbb{E}_\vartheta(\hat{\vartheta}) = \alpha\, \mathbb{E}_\vartheta(\hat{\vartheta}_1) + (1 - \alpha)\, \mathbb{E}_\vartheta(\hat{\vartheta}_2) = \alpha\, \vartheta + (1 - \alpha)\, \vartheta = \vartheta$$

für alle ϑ gilt, ist $\hat{\vartheta}$ ein erwartungstreuer Schätzer.

(b) Es soll die Funktion

$$f(\alpha) := \mathrm{Var}_\vartheta(\hat{\vartheta}) = \alpha^2\sigma_1^2 + (1 - \alpha)^2\sigma_2^2 = (\sigma_1^2 + \sigma_2^2)\, \alpha^2 - 2\sigma_2^2\, \alpha + \sigma_2^2$$

bezüglich α minimiert werden. Es gilt

$$f'(\alpha) = 2\alpha(\sigma_1^2 + \sigma_2^2) - 2\sigma_2^2, \qquad f''(\alpha) = 2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2) > 0$$

für alle $\alpha \in (0, 1)$. Da die zweite Ableitung von f positiv ist, hat daher f höchstens ein Minimum an der Stelle α^*. Aus $f'(\alpha^*) = 0$ erhält man schließlich

$$\alpha^* = \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}.$$

Damit hat der Schätzer $\hat{\vartheta}^* := \alpha^*\, \hat{\vartheta}_1 + (1 - \alpha^*)\, \hat{\vartheta}_2$ die minimale Varianz

$$f(\alpha^*) = \frac{\sigma_1^2\sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} < \min(\sigma_1^2, \sigma_2^2).$$

(c) Da die Varianz des kombinierten Verfahrens nach (b) stets strikt kleiner ist als die Varianzen der einzelnen Verfahren, ist es sinnvoll die Verfahren zu kombinieren.

Aufgabe 5.8: Zur Existenz und Eindeutigkeit von ML-Schätzern ○●●

Bestimmen Sie einen Maximum-Likelihood-Schätzer für ϑ im parametrischen Produktmodell $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), \mathbb{P}_\vartheta^{\otimes n})$ in den folgenden drei Fällen:

(a) $\mathbb{P}_\vartheta = \mathcal{U}_{[0,\vartheta]}$, $\vartheta > 0$.

(b) $\mathbb{P}_\vartheta = \mathcal{U}_{(0,\vartheta)}$, $\vartheta > 0$.

(c) $\mathbb{P}_\vartheta = \mathcal{U}_{[\vartheta,\vartheta+1]}$, $\vartheta \in \mathbb{R}$.

Lösung:

(a) $\mathbb{P}_\vartheta$ hat die Dichte $f(t) = \frac{1}{\vartheta}\mathbb{1}_{[0,\vartheta]}(t)$. Die Likelihood-Funktion für eine Stichprobe $x = (x_1, \ldots, x_n)$ ist damit

$$L(\vartheta, x) = \begin{cases} \frac{1}{\vartheta^n} & \text{wenn } 0 \le x_i \le \vartheta \text{ für } i = 1, \ldots, n\,, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Für den Maximum-Likelihood-Schätzer von ϑ ergeben sich also $n+1$ Bedingungen: $\vartheta \ge x_i$ für $i = 1, \ldots, n$ und $\frac{1}{\vartheta^n}$ möglichst groß.

Da $\vartheta \mapsto 1/\vartheta^n$ monoton fallend ist, wählen wir das kleinste ϑ, für das $\vartheta \ge x_i$ für alle $i = 1, \ldots, n$ gilt. Damit ist der Schätzer $\hat{\vartheta} := \max(X_1, \ldots, X_n)$.

(b) Die Dichte von $\mathbb{P}_\vartheta$ ist gegeben durch $f(t) = \frac{1}{\vartheta}\mathbb{1}_{(0,\vartheta)}(t)$. Die Likelihood-Funktion für eine Stichprobe $x = (x_1, \ldots, x_n)$ ist damit

$$L(\vartheta, x) = \begin{cases} \frac{1}{\vartheta^n} & \text{wenn } 0 < x_i < \vartheta \text{ für } i = 1, \ldots, n\,, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Für den MLE von ϑ ergeben sich also $n+1$ Bedingungen: $\vartheta > x_i$ für $i = 1, \ldots, n$ und $\frac{1}{\vartheta^n}$ möglichst groß.
Je näher wir an den Wert $\max(x_1, \ldots, x_n)$ kommen desto größer wird der Wert der Likelihood-Funktion, aber der Wert $\max(x_1, \ldots, x_n)$ selbst ist ausgeschlossen. Daher existiert in diesem Fall kein Maximum-Likelihood-Schätzer.

(c) Die Dichte von $\mathbb{P}_\vartheta$ ist gegeben durch $f(t) = \mathbb{1}_{[\vartheta,\vartheta+1]}(t)$. Die Likelihood-Funktion für eine Stichprobe $x = (x_1, \ldots, x_n)$ ist damit

$$L(\vartheta, x) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } \vartheta \le x_i \le \vartheta + 1 \text{ für } i = 1, \ldots, n\,, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$
$$= \begin{cases} 1 & \text{wenn } \max(x_1, \ldots, x_n) - 1 \le \vartheta \le \min(x_1, \ldots, x_n), \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Jeder Wert aus dem Intervall $[\max(x_1, \ldots, x_n) - 1, \min(x_1, \ldots, x_n)]$ kann also als Maximum-Likelihood-Schätzer für ϑ gewählt werden.

Das Intervall enthält nur eine einzige Zahl genau dann, wenn $\min(x_1, \ldots, x_n) = \vartheta$ und $\max(x_1, \ldots, x_n) = \vartheta+1$, was mit Wahrscheinlichkeit 0 eintritt. Der Maximum-Likelihood-Schätzer ist also fast sicher nicht eindeutig bestimmt.

Aufgabe 5.9: Maximum-Likelihood für geometrische Verteilung ○○●

Betrachten Sie das statistische Produktmodell $(\mathbb{N}^n, \mathcal{P}(\mathbb{N}^n), (\mathbb{P}_\vartheta^{\otimes n})_{\vartheta\in(0,1]})$ für $\mathbb{P}_\vartheta = \mathrm{Geo}(\vartheta)$.

(a) Bestimmen Sie den Maximum-Likelihood Schätzer für den Parameter $\vartheta \in (0, 1]$.

(b) Ist dieser Schätzer erwartungstreu?

Hinweis: *Nutzen Sie* $0^0 = 1$.

Lösung:

(a) Seien $X = (X_1, \ldots, X_n)$ unabhängige, geometrischverteilte Beobachtungen. Nach der Zähldichte der geometrischen Verteilung hat man für $0 < \vartheta < 1$

$$\mathbb{P}_\vartheta(X_i = x) = (1 - \vartheta)^{x-1}\vartheta, \;\; x \in \mathbb{N}.$$

Zur Bestimmung des Maximum-Likelihood-Schätzers wird zuerst die Likelihood-Funktion aufgestellt. Sei $x := (x_1, \ldots, x_n)$ eine Realisierung von X und $\bar{x}_n := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i$ das zugehörige Stichprobemittel. Dann gilt

$$L(\vartheta, x) = \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(X_i = x_i) = \vartheta^n\,(1 - \vartheta)^{\sum_{i=1}^n x_i - n}.$$

Betrachten Sie die Log-Likelihood-Funktion

$$l(\vartheta, x) := \ln L(\vartheta, x) = n\,\ln(\vartheta) + \Big(\sum_{i=1}^n x_i - n\Big)\ln(1 - \vartheta).$$

Nun gilt

$$\frac{\partial}{\partial\vartheta} l(\vartheta, x) = \frac{n}{\vartheta} + \frac{n - \sum_{i=1}^n x_i}{1 - \vartheta} = 0 \Leftrightarrow \vartheta = \frac{n}{\sum_{i=1}^n x_i} = \frac{1}{\bar{x}_n}.$$

Da die zweite Ableitung

$$\frac{\partial^2}{\partial\vartheta^2} l(\vartheta, x) = -\frac{n}{\vartheta^2} - \frac{\sum_{i=1}^n x_i - n}{(1 - \vartheta)^2}$$

wegen $\sum_{i=1}^n x_i \geq n$ negativ ist, wird an der Stelle $\vartheta = 1/\bar{x}_n$ tatsächlich das Maximum angenommen.

Nun muss noch der Randfall $\vartheta = 1$ betrachtet werden. In diesem Fall ist zwangsläufig $\sum_{i=1}^n x_i = n$ und

$$L(1, x) = 1^n \cdot 0^{\sum_{i=1}^n x_i - n} = 0^0 = 1.$$

Somit ist in allen Fällen der Maximum-Likelihood-Schätzer $\hat{\vartheta}_{ML}(x_1, \ldots, x_n) = 1/\bar{x}_n$, gleich dem Kehrwert des empirischen Mittels der Daten.

(b) Betrachten Sie die strikt konvexe Funktion $x \mapsto h(x) = 1/x$ auf $\mathbb{R}^+$. Dann gilt nach Jensen-Ungleichung

$$\mathbb{E}(\hat{\vartheta}_{ML}(X_1, \ldots, X_n)) = \mathbb{E}\left(\frac{n}{X_1 + \ldots + X_n}\right) > \frac{n}{\mathbb{E}(X_1 + \ldots + X_n)} = \vartheta.$$

Daher ist $\hat{\vartheta}_{ML}$ nicht erwartungstreu.

Aufgabe 5.10: Maximum-Likelihood für Poisson-Verteilung ○○●

Betrachten Sie das statistische Modell $(\mathbb{N}_0^n, \mathcal{P}(\mathbb{N}^n), (\mathbb{P}_\vartheta^{\otimes n})_{\vartheta \in \mathbb{R}_0^+})$ für $\mathbb{P}_\vartheta = \mathrm{Poi}(\vartheta)$.

(a) Bestimmen Sie den Maximum-Likelihood-Schätzer für den Parameter $\vartheta \in \mathbb{R}_0^+$ der Poisson-Verteilung $\mathrm{Poi}(\vartheta)$ bei $n \geq 2$ unabhängigen Beobachtungen.

(b) Ist dieser ML-Schätzer erwartungstreu?

Lösung:

(a) Sei $x := (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{N}_0^n$ eine Realisierung. Dann lautet die Log-Likelihood-Funktion

$$l(\vartheta, x) = \ln \prod_{i=1}^n e^{-\vartheta} \frac{\vartheta^{x_i}}{x_i!} = -n\,\vartheta + \sum_{i=1}^n x_i \ln(\vartheta) - \sum_{i=1}^n \ln(x_i!).$$

Für $\sum_{i=1}^n x_i = 0$ (d.h. wenn alle Beobachtungen gleich 0 sind) wird die Log-Likelihood-Funktion für $\vartheta = 0$ maximal.

Es ist weiter

$$\frac{\partial}{\partial \vartheta} l(\vartheta, x) = -n + \frac{1}{\vartheta} \sum_{i=1}^n x_i = 0 \Leftrightarrow \vartheta = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \bar{x}_n.$$

Wegen

$$\frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2} l(\vartheta, x) = -\frac{1}{\vartheta^2} \sum_{i=0}^n x_i < 0$$

wird die Funktion $\vartheta \mapsto l(\vartheta, x)$ an der Stelle $\vartheta = \bar{x}_n$ ihr Maximum annehmen.

Beide Fälle zusammengenommen ergeben, dass

$$\hat{\vartheta}_{ML}(X_1, \ldots, X_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i = \bar{X}_n$$

der ML-Schätzer für ϑ ist.

Bemerkung: Betrachtet man nur den Parameterraum $(0, \infty)$, kann man den ML-Schätzer nicht angeben, da für die Realisierung $(0, \ldots, 0)$, die mit positiver Wahrscheinlichkeit auftritt, die Likelihood-Funktion nicht maximiert werden kann.

(b) Für die Poisson-Verteilung ist der ML-Schätzer gerade das Stichprobenmittel, dessen Erwartungstreue (und schwache Konsistenz) bereits in Aufgabe 5.5 allgemein gezeigt wurde.

Aufgabe 5.11: Die Rückfangmethode ○●●

Man möchte die unbekannte Größe N, $N \in \mathbb{N}$, einer Herde einer bestimmten Tierart in einem abgeschlossenen Habitat bestimmen. Dazu benutzt man die sogenannte *Rückfangmethode*. Dabei werden zunächst R Individuen eingefangen, markiert und wieder freigelassen.

In einer weiteren Stichprobe im Umfang von $n \leq R$ finden sich $k \geq 0$ markierte Individuen. Das Verhältnis markierter zu unmarkierten Individuen sollte sich auch in der Stichprobe widerspiegeln, daher ist es sinnvoll,

$$\frac{R}{N} \approx \frac{k}{n} \Leftrightarrow N \approx \frac{n}{k} R$$

anzunehmen, sofern mindestens ein markiertes Individuum gefangen wurde.

Die Methode ist jedoch problematisch, wenn $k = 0$, also wenn kein markiertes Individuum gefangen wurde.

Daher werden in der Praxis solange Individuen gefangen, bis zum ersten Mal ein markiertes auftaucht. Die Stichprobengröße X ist somit zufällig und negativ hypergeometrisch zu den Parametern R, $N - R$ und $k = 1$ verteilt. Mittels der Momentenmethode erhält man

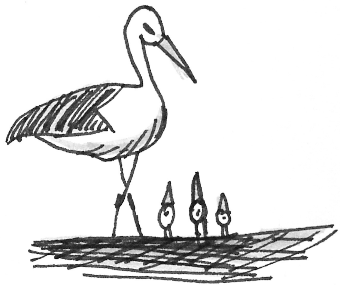
$$\hat{N} := (R + 1)\, X - 1$$

als Schätzer für N.

(a) Zeigen Sie, dass der Schätzer $\hat{N}$ erwartungstreu ist.

(b) Berechnen Sie die Varianz des Schätzers $\hat{N}$.

(c) Konstruieren Sie einen unverzerrten Schätzer $\tilde{N}$ für N, wobei man solange Individuen fange, bis $k \leq R$ markierte Individuen gefangen wurden. Vergleichen Sie ihn mit $\hat{N}$.



Lösung:

(a) Das zugehörige statistische Modell sei $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), (\mathbb{P}_N)_N)$, wobei $\mathbb{P}_N$ die negative hypergeometrische Verteilung ist, mit den Parametern R, $N-R$ und $k \geq 1$, wobei nur N unbekannt ist.

Nach Aufgabe 2.16 ist der Erwartungswert von X (mit $w = R$ und $s = N - R$ sowie $k = 1$) gleich $\frac{N+1}{R+1}$ und es ergibt sich

$$\mathbb{E}(\hat{N}) = (R+1)\,\mathbb{E}(X) - 1 = (R+1)\frac{N+1}{R+1} - 1 = N.$$

(b) Wie in (a), benutzt man Aufgabe 2.16 für die Varianz. Es ergibt sich

$$\operatorname{Var}(X) = sw\frac{s+w+1}{(w+1)^2(w+2)} = (N-R)\,R\,\frac{N+1}{(R+1)^2(R+2)}.$$

Die Varianz des Schätzers $\hat{N}$ ist daher

$$\operatorname{Var}(\hat{N}) = \frac{(N-R)\,R\,(N+1)}{R+2}.$$

(c) In diesem Fall lässt sich $\hat{N}$ leicht modifizieren, indem man für X eine negative hypergeometrische Verteilung mit allgemeinem $1 \leq k \leq R$ annimmt. Dann ist

$$\mathbb{E}(X) = k\,\frac{N+1}{R+1}.$$

Daher sei

$$\tilde{N} := \frac{R+1}{k}\,X - 1.$$

Der Schätzer $\tilde{N}$ ist offenbar unverzerrt. Seine Varianz erfüllt

$$\operatorname{Var}(\tilde{N}) = \frac{1}{k}\,\frac{(N-R)\,(R+1-k)(N+1)}{R+2}.$$

Die Varianz wird mit größer werdendem k kleiner und es gilt wegen der Unverzerrtheit der Schätzer

$$\mathrm{MSE}(\tilde{N}) \leq \mathrm{MSE}(\hat{N}).$$

Bemerkung: Zwar lässt sich die hypergeometrische Wahrscheinlichkeit bei festgelegter Stichprobengröße wie bei der Maximum-Likelihood-Methode maximieren, jedoch müsste man für $k = 0$ auf $N = +\infty$ schließen. Für dieses N ist aber die hypergeometrische Verteilung nicht definiert, vergleiche Aufgabe 5.8. Daher gibt es für die hypergeometrische Verteilung keinen Maximum-Likelihood-Schätzer.

Trotzdem wird die hypergeometrische Verteilung häufig benutzt, da in konkreten Beispielen die Wahrscheinlichkeit sehr klein ist, keine markierten Individuen zu fangen, siehe Aufgabe 2.14.

Aufgabe 5.12: Momentenmethode ○●●

Bestimmen Sie mittels der Momentenmethode einen Momentenschätzer für ϑ für die folgenden statistischen Produktmodelle:

(a) $(\mathbb{N}^n, \mathcal{P}(\mathbb{N}^n), \mathbf{P})$ mit $\mathbf{P} = \{\mathbb{P}_\vartheta^{\otimes n} : \mathbb{P}_\vartheta = \mathrm{Geo}(\vartheta), \vartheta \in (0,1)\}$

(b) $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), \mathbf{P})$ mit $\mathbf{P} = \{\mathbb{P}_\vartheta^{\otimes n} : \mathbb{P}_\vartheta = \mathcal{U}_{[-\vartheta,\vartheta]}, \vartheta > 0\}$

(c) $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), \mathbf{P})$ mit $\mathbf{P} = \{\mathbb{P}_\vartheta^{\otimes n} : \mathbb{P}_\vartheta = \mathrm{Beta}(\vartheta + 1, \vartheta), \vartheta > 0\}$.

Lösung:

(a) Es gilt $\mathbb{E}_\vartheta(X) = 1/\vartheta$. Umstellen nach ϑ und Einsetzen des ersten empirischen Momentes liefert

$$\hat{\vartheta}(x_1, \ldots, x_n) = \frac{n}{\sum_{i=1}^n x_i} = \frac{1}{\bar{x}_n}.$$

Das Ergebnis wird in Aufgabe 5.9 (a) mit einer anderen Methode hergeleitet.

(b) Es gilt $\mathbb{E}_\vartheta(X) = 0$ wenn $X \sim \mathcal{U}_{[-\vartheta,\vartheta]}$. Der Erwartungswert liefert hier daher keinen Ansatz. Mittels zweitem Moment ergibt sich

$$\mathbb{E}_\vartheta(X^2) = \frac{1}{2\vartheta} \int_{\mathbb{R}} x^2\, \mathbb{1}_{[-\vartheta,\vartheta]}(x)\, dx = \frac{1}{\vartheta} \int_0^\vartheta x^2\, dx = \frac{1}{3}\vartheta^2.$$

Umstellen nach ϑ und Einsetzen des zweiten empirischen Momentes liefert

$$\hat{\vartheta}(x_1, \ldots, x_n) = \sqrt{\frac{3}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2}.$$

(c) Die Dichte der Betaverteilung Beta(α,β) ist

$$f_X(x;\alpha,\beta) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\, x^{\alpha-1}\,(1-x)^{\beta-1}\,\mathbb{1}_{[0,1]}(x).$$

Der Erwartungswert einer betaverteilten Zufallsvariable X mit $\alpha = \vartheta + 1$ und $\beta = \vartheta$ ist

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_\vartheta(X) &= \int_{\mathbb{R}} x\, f_X(x;\vartheta+1,\vartheta)\,dx \\ &= \frac{\Gamma(2\vartheta+1)}{\Gamma(\vartheta+1)}\,\frac{\Gamma(\vartheta+2)}{\Gamma(2\vartheta+2)}\int_{\mathbb{R}} f_X(x;\vartheta+2,\vartheta)\,dx = \frac{\vartheta+1}{2\vartheta+1}.\end{aligned}$$

Umstellen der Gleichung nach ϑ und Einsetzen des ersten empirischen Moments ergibt

$$\hat{\vartheta}(x_1,\ldots,x_n) = \frac{1-\bar{x}_n}{2\bar{x}_n-1}.$$

Aufgabe 5.13: Momentenschätzer für zweiseitige Exponentialverteilung ○○●

Wir betrachten das Produktmodell $\left(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), \mathbb{P}_\vartheta^{\otimes n}\right)$, wobei $\mathbb{P}_\vartheta$, $\vartheta > 0$, die zweiseitige Exponentialverteilung mit Dichte

$$f_\vartheta(x) = \frac{1}{2}\vartheta\, e^{-\vartheta|x|}, \quad x \in \mathbb{R},$$

sei.

(a) Bestimmen Sie einen Momentenschätzer für ϑ.

(b) Bestimmen Sie einen Momentenschätzer für die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}_\vartheta((c,+\infty))$ für eine feste Konstante $c > 0$.

Lösung:

(a) Sei X eine Zufallsvariable, deren Verteilung gleich $\mathbb{P}_\vartheta$ ist. Aufgrund der Symmetrie der Dichte f_ϑ gilt $\mathbb{E}_\vartheta(X) = 0$, das heißt X ist zentriert.

Da das erste Moment keine Information über ϑ liefern kann, benutzen Sie das zweite Moment

$$\mathbb{E}_\vartheta(X^2) = \frac{1}{2}\vartheta\int_{\mathbb{R}} x^2 e^{-\vartheta|x|}\,dx = \int_{\mathbb{R}^+} x^2\vartheta e^{-\vartheta x}\,dx = 2\int_{\mathbb{R}^+} x\, e^{-\vartheta x}\,dx = \frac{2}{\vartheta^2}.$$

Da der Parameter ϑ positiv ist, kommt nur

$$\hat{\vartheta}(X_1,\ldots,X_n) = \sqrt{\frac{2n}{\sum_{i=1}^n X_i^2}}$$

als Momentenschätzer infrage.

(b) Man suche nun einen Schätzer für $g_c(\vartheta) := \mathbb{P}_\vartheta((c, +\infty))$, $c > 0$. Es gilt:

$$g_c(\vartheta) = \frac{\vartheta}{2} \int_c^\infty e^{-\vartheta x}\, dx = -\frac{1}{2} \exp(-\vartheta x)\Big|_c^\infty = \frac{1}{2} \exp(-\vartheta c).$$

Aus (a) folgt damit

$$\hat{g}_c = g_c(\hat{\vartheta}) = \frac{1}{2} exp(-\hat{\vartheta} c) = \frac{1}{2} \exp\left(-c \sqrt{\frac{2n}{\sum_{i=1}^n X_i^2}}\right).$$

Aufgabe 5.14: Vergleich von Schätzern im Gleichverteilungsmodell ○●●

Gegeben seien n unabhängige Zufallsvariablen $X_i \sim \mathcal{U}_{[0,\vartheta]}$, $i \in \{1, \ldots, n\}$, wobei $\vartheta > 0$ unbekannt ist und geschätzt werden soll.

Wir vergleichen nun Schätzer, die aus verschiedenen Verfahren entstehen.

(a) Bestimmen Sie mittels Maximum-Likelihood-Methode einen Schätzer $\hat{\vartheta}_1$ von ϑ.

(b) Bestimmen Sie mittels Momenten-Methode einen weiteren Schätzer $\hat{\vartheta}_2$ von ϑ.

(c) Überprüfen Sie, ob $\hat{\vartheta}_1$ und ϑ_2 erwartungstreu sind.

(d) Bestimmen Sie die mittlere quadratische Abweichung (MSE) der beiden Schätzer und vergleichen Sie sie.

(e) Gibt es bessere Schätzer bezüglich des MSE?

Lösung:

(a) In Aufgabe 5.8 (a) wurde bereits mittels ML-Methode ein Schätzer bestimmt. Es ergibt sich
$$\hat{\vartheta}_1(X_1, \ldots, X_n) = \max(X_1, \ldots, X_n) =: X_{(n)}.$$

(b) Man berechnet $\mathbb{E}(X_i) = \vartheta/2$. Nach Umstellen und Einsetzen des ersten empirischen Momentes ergibt sich

$$\hat{\vartheta}_2 = \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n X_i = 2\bar{X}_n.$$

(c) Zunächst gilt $X_i/\vartheta \sim \mathcal{U}_{[0,1]}$. Daher ist $X_{(n)} = \vartheta\, \tilde{X}_{(n)}$, wobei

$$\tilde{X}_{(n)} := \max(X_1/\vartheta, \ldots, X_n/\vartheta) \sim \text{Beta}(n, 1),$$

siehe Aufgabe 3.36.

Der Schätzer $\hat{\vartheta}_1$ ist somit nicht erwartungstreu, denn

$$\mathbb{E}_\vartheta(\hat{\vartheta}_1) = \vartheta\, \mathbb{E}_\vartheta(\tilde{X}_{(n)}) = \vartheta\, \frac{n}{n+1}.$$

Dahingegen ist $\hat{\vartheta}_2$ erwartungstreu, denn

$$\mathbb{E}_\vartheta(\hat{\vartheta}_2) = \frac{2}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}_\vartheta(X_i) = 2\mathbb{E}(X_1) = \vartheta.$$

(d) Die mittlere quadratische Abweichung (MSE) lässt sich aus der Gleichung

$$\mathrm{MSE}_\vartheta(\hat{\vartheta}) = \mathrm{Var}_\vartheta(\hat{\vartheta}) + (\mathbb{B}_\vartheta(\hat{\vartheta}))^2$$

bestimmen, siehe Aufgabe 5.5 (a).

Man berechnet zunächst die Verzerrung und Varianz:

$$\mathbb{B}_\vartheta(\hat{\vartheta}_1) = \mathbb{E}_\vartheta(\hat{\vartheta}_1 - \vartheta) = -\frac{1}{n+1}\vartheta,$$
$$\mathrm{Var}_\vartheta(\hat{\vartheta}_1) = \vartheta^2\ \mathrm{Var}_\vartheta(\tilde{X}_{(n)}) = \frac{n\vartheta^2}{(n+1)^2(n+2)}.$$

Daraus folgt

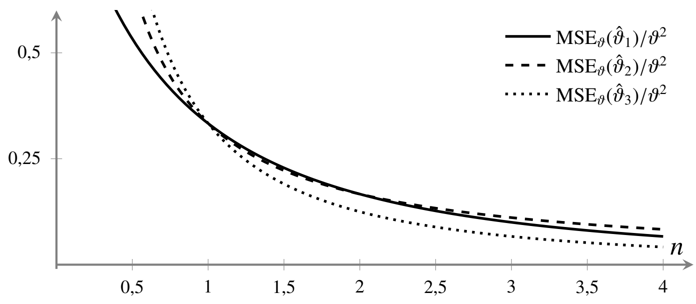
$$\mathrm{MSE}_\vartheta(\hat{\vartheta}_1) = \frac{2\vartheta^2}{(n+1)(n+2)}.$$

Da $\hat{\vartheta}_2$ erwartungstreu ist, ist $\mathbb{B}_\vartheta(\hat{\vartheta}_2) = 0$. Daher stimmt die mittlere quadratische Abweichung mit der Varianz überein. Dann ist

$$\mathrm{MSE}_\vartheta(\hat{\vartheta}_2) = \mathrm{Var}_\vartheta(\hat{\vartheta}_2) = \frac{4}{n}\,\mathrm{Var}_\vartheta(X_1) = \frac{\vartheta^2}{3n}.$$

Nun gilt für alle $n \geq 2$:

$$\frac{2}{(n+1)(n+2)} \leq \frac{1}{3n} \qquad \text{bzw.} \qquad \mathrm{MSE}_\vartheta(\hat{\vartheta}_1) \leq \mathrm{MSE}_\vartheta(\hat{\vartheta}_2).$$



Daher sollte der Schätzer $\hat{\vartheta}_1$ trotz seiner Verzerrtheit gewählt werden, da seine mittlere quadratische Abweichung kleiner ist als die mittlere quadratische Abweichung von $\hat{\vartheta}_2$.

(e) Man kann den Schätzer $\hat{\vartheta}_1$ noch verbessern, das heißt die Varianz verkleinern, indem man setzt

$$\hat{\vartheta}_3 = \frac{n+1}{n}\hat{\vartheta}_1 = \frac{n+1}{n}X_{(n)}.$$

Damit ist nun $\hat{\vartheta}_3$ erwartungstreu und somit unverzerrt. Die mittlere quadratische Abweichung ist dann für $n \geq 2$

$$\mathrm{MSE}_\vartheta(\hat{\vartheta}_3) = \frac{(n+1)^2}{n^2}\,\mathrm{Var}_\vartheta(\hat{\vartheta}_1) = \frac{\vartheta^2}{n\,(n+2)} < \frac{2\vartheta^2}{(n+1)(n+2)} = \mathrm{MSE}_\vartheta(\hat{\vartheta}_1).$$

Daher ist $\hat{\vartheta}_3$ noch besser als $\hat{\vartheta}_1$.

5.3 Konfidenzintervalle

Aufgabe 5.15: Bienaymé-Tschebyschoff-Ansatz ○○●

Ein Marmeladenbrot kann auf die Marmeladenseite fallen, oder auf die andere Seite. Mit unbekannter Wahrscheinlichkeit $q \in (0,1)$ falle es auf die Marmeladenseite. Es soll basierend auf $n \geq 2$ unabhängigen Experimenten ein Intervall konstruiert werden, das den wahren Parameter q mit hoher Wahrscheinlichkeit überdeckt.

(a) Es sei $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ die zufällige Anzahl der Brote, die auf ihre Marmeladenseite fallen. Dabei seien X_i Bernoulli-verteilte Zufallvariablen, wobei $X_i(\omega) = 1$, wenn das Brot auf die Marmeladenseite fällt.

Bestimmen Sie mit Hilfe der Bienaymé-Tschebyschoff-Ungleichung eine untere Schranke für die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses $\big\{\mathbb{E}(S_n)-\eta < S_n < \mathbb{E}(S_n)+\eta\big\}$, $\eta > 0$.

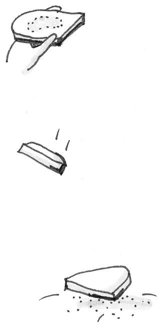
Hinweis: *Beweisen Sie, dass $q\,(1-q) \leq \frac{1}{4}$ für alle $q \in [0,1]$ gilt.*

(b) Folgern Sie, dass

$$\mathbb{P}\left(\left(\frac{S_n}{n} - \varepsilon, \frac{S_n}{n} + \varepsilon\right) \ni q\right) \geq 1 - \alpha$$

mit $\varepsilon = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{n\alpha}}$ gilt, d.h. $I := (\frac{S_n}{n} - \varepsilon, \frac{S_n}{n} + \varepsilon)$ ist ein Konfidenzintervall zum Irrtumsniveau α für den Parameter q.

(c) Es sei I_1 das Konfidenzintervall zum Irrtumsniveau $\alpha_1 = 0{,}01$ und I_2 das Konfidenzintervall zum Irrtumsniveau $\alpha_2 = 0{,}1$. Welches Intervall ist länger? Nun sei $\varepsilon = 0{,}1$. Wie müssen Sie n wählen, damit das Konfidenzniveau $1 - \alpha_1 = 0{,}99$ bzw. $1 - \alpha_2 = 0{,}9$ eingehalten wird?



Lösung:

(a) Die Zufallsvariable X_i beschreibt, ob das i-te Marmeladenbrot auf seine Marmeladenseite gefallen ist ($X_i = 1$) oder nicht ($X_i = 0$). Sie ist Ber(q)-verteilt, und somit ist $S_n \sim \mathrm{Bin}(n, q)$. Da $\mathbb{E}(S_n) = nq$ und $\operatorname{Var} S_n = nq\,(1-q)$, folgt mittels Bienaymé-Tschebyschoff-Ungleichung für beliebiges $\eta > 0$

$$\mathbb{P}(|S_n - nq| \geq \eta) \leq \frac{n\,q\,(1-q)}{\eta^2}.$$

Betrachten Sie die Funktion $q \mapsto g(q) := q\,(1-q)$ auf $[0, 1]$ definiert. Da

$$g'(q) = 1 - 2q \quad \text{und} \quad g''(q) = -2,$$

ist $q* = 1/2$ die Maximalstelle von g und $g(q) \leq g(q*) = 1/4$.

Es folgt daraus

$$\mathbb{P}(\mathbb{E}(S_n) - \eta < S_n < \mathbb{E}(S_n) + \eta) \geq 1 - \frac{nq\,(1-q)}{\eta^2} \geq 1 - \frac{n}{4\eta^2}.$$

(b) Beachten Sie dann, dass

$$\left\{\frac{S_n}{n} - \varepsilon < q < \frac{S_n}{n} + \varepsilon\right\} = \left\{nq - n\varepsilon < S_n < nq + n\varepsilon\right\}.$$

Deshalb folgt mit $\eta = n\varepsilon$ und Teil (a)

$$\mathbb{P}\left(\left(\frac{S_n}{n} - \varepsilon, \frac{S_n}{n} + \varepsilon\right) \ni q\right) \geq 1 - \frac{n}{4\eta^2} = 1 - \frac{1}{4n\varepsilon^2}.$$

Setzen Sie $\alpha = \frac{1}{4n\varepsilon^2}$, dann ist $\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{4n\alpha}}$.

(c) Die Länge des Konfidenzintervalls ist $2\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{n\alpha}}$. Deshalb ist I_1 länger. Wegen $\varepsilon = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{n\alpha}}$ gilt $n = \frac{1}{(2\varepsilon)^2\alpha}$. Deshalb folgt $n \geq 2\,500$ im Fall $\alpha_1 = 0{,}01$ und $n \geq 250$ im Fall $\alpha_2 = 0{,}1$.

Aufgabe 5.16: Stichprobenumfang und Länge des Konfidenzintervalls ○○●

Wie viele Personen muss man befragen, um mit 90%-iger Sicherheit den Wähleranteil einer Partei $\mathcal{P}$ auf einen Bereich von zwei Prozentpunkten einschränken zu können?

Hinweis: *Nutzen Sie, dass eine geeignete Transformation des Schätzers asymptotisch normalverteilt ist.*

Lösung: Man befrage n Personen. Die Antwort der k-ten Person wird durch eine zum Parameter $p \in [0, 1]$ Bernoulli-verteilte Zufallsvariable X_k modelliert: $X_k = 1$ genau dann, wenn sie $\mathcal{P}$ wählt. Wenn man voraussetzt, dass die Antworten $X_1, \ldots, X_n$ unabhängig sind, ist die Anzahl der befragten Personen, die $\mathcal{P}$ wählen, durch

$$S_n := \sum_{k=1}^{n} X_k \sim \mathrm{Bin}(n, p)$$

gegeben.

Das approximative Konfidenzintervall hat folgende Form:

$$\left[\hat{p} - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}\,(1-\hat{p})}{n}}, \hat{p} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}\,(1-\hat{p})}{n}}\right],$$

dabei sind $\hat{p} = S_n/n$ der Anteil der befragten Personen, die die Partei $\mathcal{P}$ wählen, und z_β das β-Quantil der Standardnormalverteilung.

Die Länge des Konfidenzintervalls soll nun maximal 0,02 sein und $\alpha = 0{,}10$. Das 95% Quantil der Standardnormalverteilung ist $z_{0,95} \approx 1{,}645$. Daraus ergibt sich

$$2\,z_{0,95}\sqrt{\frac{\hat{p}\,(1-\hat{p})}{n}} \leq 2\,z_{0,95}\sqrt{\frac{1/4}{n}} \leq 0{,}02 \quad \Rightarrow \quad n \geq 6\,766.$$

Daher müssen mindestens 6 766 Personen befragt werden.

Bemerkung: Es gibt neben dem hier betrachteten approximativen sogenannten *Konfidenzintervall vom Wald-Typ* auch das sogenannte Clopper-Pearson-Konfidenzintervall, basierend auf den Quantilen von Betaverteilungen. Die Länge dieses Intervalls hängt von den Quantilen ab, welche wiederum neben α auch von der gesuchten Größe n und der beobachteten Anzahl der Erfolge abhängt. Aufgrund der fehlenden geschlossenen Formel für die Quantile ist die analytische Bestimmung von n nicht möglich.

Aufgabe 5.17: Varianz einer Normalverteilung ●●●

Seien $X_1, \dots, X_n$ unabhängig und identisch verteilte Zufallsvariablen mit $X_i \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, wobei die Varianz σ^2 unbekannt ist.

(a) Nehmen Sie an, der Erwartungswert μ sei bekannt. Sei $\tilde{S}_n^2$ der folgende natürliche Schätzer für σ^2:

$$\tilde{S}_n^2 := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu)^2.$$

(i) Zeigen Sie, dass die Verteilung der Zufallsvariable $\frac{n}{\sigma^2} \tilde{S}_n^2$ die χ^2-Verteilung mit n Freiheitsgraden ist.

(ii) Bestimmen Sie ein Konfidenzintervall zum Niveau $1-\alpha$ für σ^2, wenn $\mu = 0$.

(b) Nehmen Sie an, der Erwartungswert μ sei auch unbekannt. Ein natürlicher Schätzer für σ^2 ist dann die empirische Streuung, wie folgt definiert:

$$S_n^2 := \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2 \quad \text{wobei} \quad \bar{X} := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i.$$

(i) Beweisen Sie, dass die skalierte empirische Streuung $\frac{n-1}{\sigma^2} S_n^2$ eine χ^2_{n-1}-Verteilung hat.

Hinweis: *Betrachten Sie eine geeignete orthogonale Transformation des Zufallsvektors* $(X_1, \dots, X_n)$.

(ii) Zeigen Sie, dass S_n^2 und $\bar{X}$ unabhängig sind.

(iii) Bestimmen Sie ein Konfidenzintervall zum Niveau $1-\alpha$ für die Varianz σ^2.

Lösung:

(a) (i) Es gilt

$$\frac{n}{\sigma^2} \tilde{S}_n^2 = \sum_{i=1}^{n} \Big(\frac{X_i - \mu}{\sigma} \Big)^2.$$

Die Zufallsvariablen $(X_i - \mu)/\sigma, i = 1, \dots, n$ sind unabhängig und $\mathcal{N}(0, 1)$-verteilt. Daher ist ihre Summe χ^2_n-verteilt.

(ii) Sei $q_{n,\beta}$ das β-Quantil der χ^2_n-Verteilung. Dann gilt

$$\mathbb{P}\Big(q_{n,\alpha/2} \le \frac{n}{\sigma^2} \tilde{S}_n^2 \le q_{n,1-\alpha/2} \Big) = 1 - \alpha.$$

Umstellen nach σ^2 liefert das Konfidenzintervall zum Niveau $1 - \alpha$ für σ^2:

$$\left[\frac{n\tilde{S}_n^2}{q_{n,1-\alpha/2}}, \frac{n\tilde{S}_n^2}{q_{n,\alpha/2}} \right].$$

(b) (i) Sei $\underline{1}$ der n-dimensionale 1-Vektor und I die $n \times n$-Einheitsmatrix. Dank der Unabhängigkeit der $(X_i)_i$ ist der Zufallsvektor $X := (X_1, \ldots, X_n)^\top$ normalverteilt mit Erwartungswert $\mu\underline{1}$ und Kovarianzmatrix $\sigma^2 I$.

Setzen Sie $Y := UX$, wobei U eine orthogonale $n \times n$-Matrix ist, deren erste Zeile durch $\frac{1}{\sqrt{n}}\underline{1}^\top$ gegeben ist (die anderen Zeilen ergeben sich z.B. durch ein Orthogonalisierungsverfahren mit weiteren linear unabhängigen Vektoren).

Der Zufallsvektor Y ist auch normalverteilt mit Erwartungswert $\mu\, U\underline{1} = \mu\sqrt{n}\,(1, 0, \ldots, 0)^\top$ und Kovarianzmatrix $\sigma^2 U^\top I U = \sigma^2 I$.

Aufgrund der Eigenschaften der mehrdimensionalen Normalverteilung folgt, dass die $(Y_i)_i$ unabhängig sind mit $Y_1 \sim \mathcal{N}(\mu\sqrt{n}, \sigma^2)$ und $Y_i \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ für $i = 2, \ldots, n$.

Damit lassen sich $\bar{X}$ und S_n^2 wie folgt darstellen:

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \frac{1}{\sqrt{n}} Y_1$$

und

$$\begin{aligned}
(n-1)\, S_n^2 &= \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2 = \sum_{i=1}^{n} X_i^2 - n\,\bar{X}^2 \\
&= X^\top X - n\,\bar{X}^2 \\
&= Y^\top Y - n\,\bar{X}^2 = \sum_{i=1}^{n} Y_i - Y_1^2 = \sum_{i=2}^{n} Y_i^2.
\end{aligned}$$

Die Zufallsvariable $\frac{1}{\sigma^2}(n-1)\, S_n^2$ ist also χ^2_{n-1}-verteilt.

(ii) Zudem folgt die Unabhängigkeit von $\bar{X}$ und S_n^2, da Y_1 und $(Y_2, \ldots, Y_n)$ unabhängig sind.

(iii) Es gilt

$$\mathbb{P}\Big(q_{n-1,\alpha/2} \leq \frac{(n-1)\, S_n^2}{\sigma^2} \leq q_{n-1,1-\alpha/2}\Big) = 1 - \alpha.$$

Umstellen nach σ^2 liefert das Konfidenzintervall zum Niveau $1 - \alpha$ für σ^2:

$$\left[\frac{(n-1)\, S_n^2}{q_{n-1,1-\alpha/2}}, \frac{(n-1)\, S_n^2}{q_{n-1,\alpha/2}}\right].$$

Aufgabe 5.18: Konfidenz-Intervall für Poissonverteilung ○●●

Seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängig und identisch Poisson-verteilt, wobei der Parameter λ unbekannt ist. Da $\lambda = \mathbb{E}(X_i)$, betrachten Sie

$$\hat{\lambda} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$$

als Schätzer dieses Parameters.

(a) Leiten Sie mittels $\hat{\lambda}$ ein approximatives Konfidenzintervall für λ zum Niveau $1-\alpha$ her.

(b) Nehmen Sie an, man hat $n = 88$ Messungen durchgeführt und dabei einen empirischen Durchschnittswert von $\hat{\lambda} = 47{,}2$ errechnet. Bestimmen Sie das Konfidenzintervall zum Niveau 0,95.

Lösung:

(a) Da $\mathbb{E}(\hat{\lambda}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \lambda = \lambda$ und $\operatorname{Var}\hat{\lambda} = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} \lambda = \frac{\lambda}{n}$, ist nach dem zentralen Grenzwertsatz, für n groß,

$$\frac{\hat{\lambda} - \mathbb{E}(\hat{\lambda})}{\sqrt{\operatorname{Var}\hat{\lambda}}} = \frac{\hat{\lambda} - \lambda}{\sqrt{\lambda/n}}$$

approximativ $\mathcal{N}(0, 1)$-verteilt.

Nach dem Gesetz der großen Zahlen konvergiert $\hat{\lambda}$ in Wahrscheinlichkeit gegen λ und damit $\lambda/\hat{\lambda}$ gegen Eins.

Nach dem Satz von Slutsky konvergiert das Produkt in Verteilung und ist asymptotisch normalverteilt, d.h.

$$\sqrt{\frac{\lambda}{\hat{\lambda}}}\,\frac{\sqrt{n}\,(\hat{\lambda} - \lambda)}{\sqrt{\lambda}} = \sqrt{n}\,\frac{\hat{\lambda} - \lambda}{\hat{\lambda}} \xrightarrow[n\to\infty]{(d)} \mathcal{N}(0, 1),$$

vergleiche Aufgabe 7.7.

Folglich ist

$$\mathbb{P}\left(\left|\sqrt{n}\,\frac{\hat{\lambda} - \lambda}{\hat{\lambda}}\right| \leq z_{1-\alpha/2}\right) \approx 2\,\Phi(z_{1-\alpha/2}) - 1 = 1 - \alpha,$$

wobei $z_{1-\alpha/2}$ das $(1 - \alpha/2)$-Quantil der Standardnormalverteilung ist.

Daraus ergibt sich

$$\left\{ \left| \sqrt{n}\, \frac{\hat{\lambda} - \lambda}{\hat{\lambda}} \right| \leq z_{1-\alpha/2} \right\} = \left\{ \hat{\lambda} - z_{1-\alpha/2}\, \sqrt{\hat{\lambda}/n} \leq \lambda \leq \hat{\lambda} + z_{1-\alpha/2}\, \sqrt{\hat{\lambda}/n} \right\}.$$

Das gesuchte approximative Konfidenzintervall für λ ist daher

$$\left[\hat{\lambda} - z_{1-\alpha/2} \sqrt{\hat{\lambda}/n}\,,\ \hat{\lambda} + z_{1-\alpha/2} \sqrt{\hat{\lambda}/n} \right].$$

Bemerkung: Es gäbe eine andere Methode, ein Konfidenzintervall zu bestimmen. Da die Zufallsvariable $Y := n\,\hat{\lambda}$ zum Parameter $n\lambda$ Poisson-verteilt ist, und aufgrund des Zusammenhanges von Poisson-Verteilung und χ^2-Verteilung (die χ^2-Verteilung ist als Gammaverteilung interpretierbar; vergleiche 3.15 für den Zusammenhang mit der Poisson-Verteilung) lässt sich ein Konfidenzintervall unter Nutzung der Quantile der χ^2-Verteilung mit $2n$ Freiheitsgraden und $2n + 2$ Freiheitsgraden herleiten.

(b) Mit der Formel aus Teil (a) und wegen $z_{0,975} \approx 1{,}96$, siehe Appendix A.2, ist das entsprechende Intervall

$$\left[47{,}2 - 1{,}96\, \sqrt{47{,}2/88}\,;\, 47{,}2 + 1{,}96 \sqrt{47{,}2/88} \right] = [45{,}76\,;\, 48{,}64].$$

5.4 Hypothesentests

Aufgabe 5.19: Hypothesen formulieren ○○●

Formulieren Sie für die folgenden Vermutungen ein geeignetes statistisches Testproblem:

(a) Die Chance, durch ein bestimmtes Medikament geheilt zu werden, ist bei Patienten, die zusätzlich eine Reha-Behandlung erhalten, größer als bei denen, die diese Reha-Behandlung nicht erhalten.

(b) Fahrzeuge der Marke „Supersprint“ verbrauchen durchschnittlich weniger als 5 Liter pro 100 km.

(c) Es besteht ein Zusammenhang zwischen dem Kalorien- und dem Alkoholgehalt bei Bier.

(d) Entsprechend einer genetischen Gesetzmäßigkeit treten bei einer bestimmten Sorte von Pflanzen verschiedene Blütenfarben mit unterschiedlicher Wahrscheinlichkeit auf: $1/4$ der Blüten sind rosa, $1/8$ gelb und $5/8$ blau.

Lösung:

(a) Sei $p_1 \in [0, 1]$ die Wahrscheinlichkeit, durch das Medikament geheilt zu werden mit Reha-Behandlung und sei $p_2 \in [0, 1]$ die Wahrscheinlichkeit, durch das Medikament geheilt zu werden ohne Reha-Behandlung. Ein Hypothesentest dafür ist

$$H_0 : p_1 \leq p_2 \quad \text{gegen} \quad H_1 : p_1 > p_2 \; .$$

(b) $\mu \in \mathbb{R}^+$ sei die erwartete Anzahl von Litern, die ein Fahrzeug der Marke „Supersprint" pro 100 Kilometer verbraucht. Ein Hypothesentest dafür ist

$$H_0 : \mu \geq 5 \quad \text{gegen} \quad H_1 : \mu < 5 \; .$$

(c) Kaloriengehalt und Alkoholgehalt seien Realisierungen von Zufallsvariablen X und Y. Der Korrelationskoeffizient $\rho_{X,Y}$ misst den Grad des linearen Zusammenhangs zwischen X und Y. Man kann testen

$$H_0 : \rho_{X,Y} = 0 \quad \text{gegen} \quad H_1 : \rho_{X,Y} \neq 0 \; .$$

Nimmt man H_1 an, so geht man davon aus, dass ein bestimmter Grad von linearem Zusammenhang zwischen Kalorien- und dem Alkoholgehalt besteht.

Alternativ könnte man testen, ob X und Y stochastisch unabhängig (Nullhypothese) oder stochastisch abhängig sind (Alternative).

(d) Sei p_1 die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten von rosa Blüten, p_2 die für gelbe und p_3 die für blaue Blüten.

Die Hypothese lautet

$$H_0 : p_1 \neq \frac{1}{4} \quad \text{oder} \quad p_2 \neq \frac{1}{8} \quad \text{oder} \quad p_3 \neq \frac{5}{8}$$

gegen

$$H_1 : p_1 = \frac{1}{4}, p_2 = \frac{1}{8}, p_3 = \frac{5}{8} \; .$$

Aufgabe 5.20: Binomialtest und Güte ○●●

Ein Medikamentenhersteller behauptet, durch den Zusatz eines Stoffes die negativen Nebenwirkungen eines Medikaments reduzieren zu können. Bisher klagten etwa 20% der Patienten, die dieses Medikament einnahmen, über Nebenwirkungen.

In einer Testserie mit 50 Patienten, bei der das neue Medikament mit dem Zusatzstoff verabreicht wurde, klagten 7 Patienten über diese Nebenwirkungen.

Es soll getestet werden, ob das neue Medikament bezüglich der Nebenwirkungen eine Verbesserung darstellt.

(a) Formulieren Sie das Testproblem.

(b) Bestimmen Sie einen Test zum Niveau $\alpha = 0{,}05$.

(c) Bestimmen Sie einen gleichmäßig besten Test. Entscheiden Sie für die vorliegenden Daten.

(d) Bestimmen Sie die Güte des Tests bei einem tatsächlichen Anteil von $q = 0{,}3$.

Lösung: Es sei $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ der Datenvektor und $X = (X_1, \ldots, X_n)$ ein Vektor von n unabhängigen Ber(q)-verteilten Zufallsvariablen. Hierbei ist $q \in [0, 1]$ die Wahrscheinlichkeit, dass bei Einnahme des Medikaments mit dem Zusatzstoff Nebenwirkungen auftreten. Dieser unbekannte Parameter ist zu bestimmen.

(a) Die Hypothese lautet

$$H_0 : q \geq 0{,}2 \quad \text{gegen} \quad H_1 : q < 0{,}2\,.$$

Für dieses Testproblem wird der *Binomialtest* genutzt. Der Wert der Teststatistik T ist die Anzahl der Patienten in der Stichprobe mit Nebenwirkungen, d.h.

$$T(x) := T(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i$$

mit $x_i = 1$, wenn Patient i über Nebenwirkungen klagt und $x_i = 0$ sonst. $T(x)$ ist somit Realisierung einer binomialverteilten Zufallsvariable mit $n = 50$ und unbekanntem $q \in [0, 1]$.

(b) Der Test lautet

$$\varphi(x) := \mathbb{1}_{\{T(x)<c\}}.$$

Man bestimmt c als die größte ganze Zahl, sodass

$$\mathbb{P}_{0,2}(T(X) < c) = \mathrm{Bin}(50; 0{,}2)(\{0, 1, \ldots, c-1\}) \leq \alpha.$$

Man hat $\mathbb{P}_{0,2}(T(X) \leq 5) = 0{,}048$ und $\mathbb{P}_{0,2}(T(X) \leq 6) = 0{,}103$. Daher bekommt man $c = 6$ wenn $\alpha = 0{,}05$.

(c) Da $T(x) = 7 > 6$, ist $\varphi(x) = 0$ und man entscheidet sich für H_0, d.h. die Daten sprechen nicht gegen die Nullhypothese. Es kann also nicht gezeigt werden, dass die negativen Nebenwirkungen reduziert wurden.

Alternativ kann man mit dem p-Wert arbeiten. Der p-Wert ist

$$\mathbb{P}_{0,2}\Big(T(X) \leq 7\Big) \approx 0{,}19.$$

Damit ist der p-Wert größer als $0{,}05 = \alpha$ und man entscheidet sich für die Nullhypothese H_0. D.h. die Daten sprechen nicht gegen die Nullhypothese. Es kann also nicht gezeigt werden, dass die negativen Nebenwirkungen reduziert wurden.

(d) Die Gütefunktion ist

$$q \mapsto G_\varphi(q) = \mathbb{E}_q(\varphi(X)) = \mathbb{P}_q\Big(T(X) < c\Big) = F_T(c-1),$$

wobei $T \sim \mathrm{Bin}(50, q)$ und $c = 6$.

Damit ist $G_\varphi(0{,}3) \approx 0{,}00072$. In diesem Fall, wobei $q = 0{,}3$ aus der Nullhypothese H_0 stammt, ist der Fehler 1. Art sogar durch 0,00072 beschränkt.

Aufgabe 5.21: Gleichmäßig bester Test bei monotonem Dichtequotient ○●●

Es seien $X_1, \ldots, X_n$, $n \geq 2$, unabhängige, identisch Poisson-verteilte Zufallsvariablen mit $X_1 \sim \mathrm{Poi}(\lambda)$, $\lambda > 0$ unbekannt. Es soll getestet werden, ob der wahre Parameter λ größer als ein vorgegebenenes $\lambda_0 \in \mathbb{R}^+$ ist.

(a) Beschreiben Sie einen gleichmäßig besten Test für das Problem

$$H_0 : \lambda \leq \lambda_0 \quad \text{gegen} \quad H_1 : \lambda > \lambda_0$$

zum Niveau α.

(b) Bestimmen Sie den Test für $n = 10$, $\lambda_0 = 3$ und $\alpha = 0{,}05$.

Lösung:

(a) Sei $\lambda < \lambda'$. Für $x = (x_1, \ldots, x_n)$ gilt für den Dichtequotienten

$$\frac{p_{\lambda'}(x)}{p_\lambda(x)} = \frac{\exp(-n\lambda')\frac{(\lambda')^{\sum_{i=1}^n x_i}}{\prod_{i=1}^n x_i!}}{\exp(-n\lambda)\frac{\lambda^{\sum_{i=1}^n x_i}}{\prod_{i=1}^n x_i!}} = \exp\left(-n(\lambda' - \lambda)\right)\left(\frac{\lambda'}{\lambda}\right)^{\sum_{i=1}^n x_i}.$$

Sei $T(x) = \sum_{i=1}^n x_i$. Dann ist der Dichtequotient eine wachsende Funktion von $T(x)$, da $\lambda' > \lambda$.

Nach dem Fundamentallemma von Neyman-Pearson hat der beste gleichmäßige Test für das gegebene Testproblem die Form

$$\delta(x) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } T(x) > c\,, \\ w & \text{wenn } T(x) = c\,, \\ 0 & \text{wenn } T(x) < c. \end{cases}$$

(b) Man bestimmt zunächst $c \in \mathbb{N}$.

Aus der Bedingung an den Test, das Niveau $\alpha = 0{,}05$ einzuhalten und auch auszuschöpfen, ergibt sich mit $T(X) \sim \mathrm{Poi}(3 \cdot 10) = \mathrm{Poi}(30)$,

$$\mathbb{P}_{30}(T(X) > c) < \alpha \text{ und } \mathbb{P}_{30}(T(X) > c - 1) > \alpha \Leftrightarrow c = 39.$$

Dann wird w bestimmt:

$$w = \frac{\alpha - \mathbb{P}_{\lambda=30}(T(X) > c)}{\mathbb{P}_{\lambda=30}(T(X) = c)} = \frac{0{,}05 - \mathbb{P}_{\lambda=30}(T(X) > 39)}{\mathbb{P}_{\lambda=30}(T(X) = 39)} \approx 0{,}202\,.$$

Aufgabe 5.22: Neyman-Pearson-Test für normalverteilte Stichproben ○●●

Gegeben sei eine Stichprobe $x = (x_1, \dots, x_n)$, wobei x_i die Realisierung einer Zufallsvariable X_i mit $X_i \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ sei. Nehmen Sie an, $X_1, \dots, X_n$ seien unabhängig und σ^2 sei bekannt, aber μ nicht. Seien $\mu_0, \mu_1 \in \mathbb{R}$ mit $\mu_0 > \mu_1$.

Bestimmen Sie einen gleichmäßig besten Test zum Niveau α für das folgende Testproblem:

$$H_0 : \mu = \mu_0 \quad \text{gegen} \quad H_1 : \mu = \mu_1\,.$$

Lösung: Das Neyman-Pearson-Lemma besagt, dass ein Test der Form

$$\delta(x) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } p_{\mu_1}(x) > c\, p_{\mu_0}(x), \\ w & \text{wenn } p_{\mu_1}(x) = c\, p_{\mu_0}(x), \\ 0 & \text{wenn } p_{\mu_1}(x) < c\, p_{\mu_0}(x) \end{cases}$$

gleichmäßig bester Test ist.

Die Konstanten c, w ergeben sich dabei aus der α-Niveaubedingung

$$\alpha = \mathbb{P}_{\mu_0}\left(\frac{p_{\mu_1}(X)}{p_{\mu_0}(X)} > c\right) + w\, \mathbb{P}_{\mu_0}\left(\frac{p_{\mu_1}(X)}{p_{\mu_0}(X)} = c\right).$$

Man betrachtet zuerst den Dichtequotienten:

$$\begin{aligned}\frac{p_{\mu_1}(x)}{p_{\mu_0}(x)} &= \exp\Big(-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^n \big((x_i-\mu_1)^2-(x_i-\mu_0)^2\big)\Big)\\ &= \exp\Big(-\frac{1}{2\sigma^2}\Big(n(\mu_1^2-\mu_0^2)+2(\mu_0-\mu_1)\sum_{i=1}^n x_i\Big)\Big)\\ &= \exp\Big(-\frac{n(\mu_0-\mu_1)}{\sigma^2}\,\bar{x}\Big)\exp\Big(-\frac{n(\mu_1^2-\mu_0^2)}{2\sigma^2}\Big),\end{aligned}$$

wobei wie üblich $\bar{x} := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i$. Damit gilt (beachte $\mu_0-\mu_1>0$)

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_{\mu_0}\Big(\frac{p_{\mu_1}(X)}{p_{\mu_0}(X)}>c\Big) &= \mathbb{P}_{\mu_0}\Big(\exp\Big(-\frac{n(\mu_0-\mu_1)}{\sigma^2}\bar{X}\Big)\exp\Big(-\frac{n(\mu_1^2-\mu_0^2)}{2\sigma^2}\Big)>c\Big)\\ &= \mathbb{P}_{\mu_0}\Big(-\frac{n(\mu_0-\mu_1)}{\sigma^2}\,\bar{X}>\ln\Big(c\exp\Big(\frac{n(\mu_1^2-\mu_0^2)}{2\sigma^2}\Big)\Big)\Big)\\ &= \mathbb{P}_{\mu_0}\Big(\bar{X}<\frac{\sigma^2\ln(c\exp(\frac{n(\mu_1^2-\mu_0^2)}{2\sigma^2}))}{-n(\mu_0-\mu_1)}\Big)\overset{!}{=}\alpha.\end{aligned}$$

Da die Verteilung von $\bar{X}$ stetig ist, kann α exakt erreicht werden, d.h. $w=0$.

Unter $\mathbb{P}_{\mu_0}$ gilt $\frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\bar{X}-\mu_0)\sim\mathcal{N}(0,1)$. Daher

$$\frac{\sqrt{n}\,\sigma^2\Big(\ln c+\frac{n(\mu_1^2-\mu_0^2)}{2\sigma^2}\Big)}{-n(\mu_0-\mu_1)\,\sigma}-\frac{\mu_0\sqrt{n}}{\sigma}=z_\alpha,$$

wobei z_α das α-Quantil von $\mathcal{N}(0,1)$ ist.

Auflösen nach c liefert

$$c=\exp\Big(\Big(z_\alpha+\frac{\mu_0\sqrt{n}}{\sigma}\Big)\frac{\sqrt{n}(\mu_1-\mu_0)}{\sigma}\Big)\exp\Big(-\frac{n(\mu_1^2-\mu_0^2)}{2\sigma^2}\Big).$$

Kapitel 6

Historische Probleme und Paradoxa

Peter Keller

6.1 Siebformel und Rencontre-Problem

Aufgabe 6.1: Siebformel von Sylvester-Poincaré ○●●

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$ eine Folge beliebiger, nichtleerer Ereignisse mit $n \geq 2$.

(a) Drücken Sie $\mathbb{P}(A_1 \cup A_2)$ mit Hilfe von $\mathbb{P}(A_1)$, $\mathbb{P}(A_2)$ und $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2)$ aus.

(b) Beweisen Sie die folgende Gleichung:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(A_1 \cup A_2 \cup A_3) \\
&\quad = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) + \mathbb{P}(A_3) \\
&\qquad - \mathbb{P}(A_1 \cap A_2) - \mathbb{P}(A_1 \cap A_3) - \mathbb{P}(A_2 \cap A_3) + \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3).
\end{aligned}$$

(c) Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion die sogenannte *Siebformel von Sylvester-Poincaré*:

$$\mathbb{P}(A_1 \cup \ldots \cup A_n) = \mathbb{P}\Big(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\Big) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{\substack{J \subseteq \{1,2,\ldots,n\} \\ |J|=k}} \mathbb{P}\Big(\bigcap_{j \in J} A_j\Big).$$

(d) Zeigen Sie mit Hilfe der Siebformel die dritte Bonferroni-Ungleichung

$$\mathbb{P}\Big(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\Big) \geq \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i) - \sum_{i<j} \mathbb{P}(A_i \cap A_j).$$

(e) Nehmen Sie an, es gilt für alle $I, J \subset \{1, 2, \ldots, n\}$ mit $\#I = \#J$

$$\mathbb{P}\Big(\bigcap_{j\in J} A_j\Big) = \mathbb{P}\Big(\bigcap_{i\in I} A_i\Big).$$

Wie vereinfacht sich in diesem Fall die Siebformel?

Lösung:

(a) Das Ereignis $A_1 \cup A_2$ lässt sich disjunkt zerlegen in

$$(A_1 \setminus A_2) \sqcup (A_1 \cap A_2) \sqcup (A_2 \setminus A_1).$$

Daraus folgt mittels σ-Additivität von $\mathbb{P}$:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A_1 \cup A_2) &= \underbrace{\mathbb{P}(A_1 \setminus A_2) + \mathbb{P}(A_1 \cap A_2)}_{=\mathbb{P}(A_1)} + \underbrace{\mathbb{P}(A_2) + \mathbb{P}(A_1 \cap A_2) - \mathbb{P}(A_1 \cap A_2)}_{=\mathbb{P}(A_2)} \\ &= \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) - \mathbb{P}(A_1 \cap A_2).\end{aligned}$$

(b) Durch zweimaliges Anwenden von (a) erhält man

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A_1 \cup A_2 \cup A_3) &= \mathbb{P}((A_1 \cup A_2) \cup A_3) \\ &\overset{(a)}{=} \mathbb{P}(A_1 \cup A_2) + \mathbb{P}(A_3) - \mathbb{P}((A_1 \cup A_2) \cap A_3) \\ &= \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) + \mathbb{P}(A_3) - \mathbb{P}(A_1 \cap A_2) - \mathbb{P}((A_1 \cap A_3) \cup (A_2 \cap A_3)) \\ &\overset{(a)}{=} \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) + \mathbb{P}(A_3) \\ &\quad - \mathbb{P}(A_1 \cap A_2) - \mathbb{P}(A_1 \cap A_3) - \mathbb{P}(A_2 \cap A_3) + \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3).\end{aligned}$$

(c) Der Fall $n = 2$ wurde in (a) gezeigt und dient als Induktionsanker (IA). Sei nun als Induktionsvoraussetzung (IV) angenommen, die Formel wäre bereits für $n > 2$ bewiesen. Dann gilt:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A_1 \cup \ldots \cup A_{n+1}) &= \mathbb{P}((A_1 \cup \ldots \cup A_n) \cup A_{n+1}) \\ &\overset{(IA)}{=} \mathbb{P}(A_1 \cup \ldots \cup A_n) + \mathbb{P}(A_{n+1}) - \mathbb{P}\Big(\bigcup_{i=1}^{n}(A_i \cap A_{n+1})\Big).\end{aligned}$$

Für die letzten beiden Summanden der rechten Seite gilt nun nach Induktionsvoraussetzung und mit einer Indexverschiebung im letzten Schritt

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A_{n+1}) - \mathbb{P}\Big(\bigcup_{i=1}^{n}(A_i \cap A_{n+1})\Big) \\
&= \mathbb{P}(A_{n+1}) - \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1} \sum_{\substack{J\subseteq\{1,2,\ldots,n\}\\ |J|=k}} \mathbb{P}\Big(\bigcap_{j\in J}(A_j \cap A_{n+1})\Big) \\
&= \mathbb{P}(A_{n+1}) - \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1} \sum_{\substack{J\subseteq\{1,2,\ldots,n+1\}\\ |J|=k+1, n+1\in J}} \mathbb{P}\Big(\bigcap_{j\in J} A_j\Big) \\
&= \sum_{k=1}^{n+1}(-1)^{k-1} \sum_{\substack{J\subseteq\{1,2,\ldots,n+1\}\\ |J|=k, n+1\in J}} \mathbb{P}\Big(\bigcap_{j\in J} A_j\Big).
\end{aligned}$$

Den ersten Summanden können wir nach Induktionsvoraussetzung ebenfalls auf diese Weise umformen:

$$\mathbb{P}(A_1 \cup \ldots \cup A_n) = \sum_{k=1}^{n+1}(-1)^{k-1} \sum_{\substack{J\subseteq\{1,2,\ldots,n+1\}\\ |J|=k, n+1\notin J}} \mathbb{P}\Big(\bigcap_{j\in J} A_j\Big).$$

Der letzte Summand für $k = n + 1$ ist Null. Nun folgt schließlich

$$\sum_{\substack{J\subseteq\{1,2,\ldots,n+1\}\\ |J|=k, n+1\in J}} \mathbb{P}\Big(\bigcap_{j\in J} A_j\Big) + \sum_{\substack{J\subseteq\{1,2,\ldots,n+1\}\\ |J|=k, n+1\notin J}} \mathbb{P}\Big(\bigcap_{j\in J} A_j\Big) = \sum_{\substack{J\subseteq\{1,2,\ldots,n+1\}\\ |J|=k}} \mathbb{P}\Big(\bigcap_{j\in J} A_j\Big),$$

was zu beweisen war.

(d) Die dritte Bonferroni-Ungleichung ist eine Approximation an die Siebformel, wobei die Summanden mit $\#J > 2$ weggelassen werden. Diese sind aber nicht alle positiv. Man verwendet einen Induktionsbeweis.

Wir nehmen an, die Ungleichung sei für n bereits bewiesen (Induktionsvoraussetzung (IV)); der Fall $n = 2$ wurde bereits in (a) gezeigt und dient als Induktionsanker (IA).

Für ein beliebiges aber festes $n \in \mathbb{N}$ gilt dann:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\Big(\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i\Big) &= \mathbb{P}\Big(\bigcup_{i=1}^{n} A_i \cup A_{n+1}\Big) \overset{(IA)}{=} \mathbb{P}\Big(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\Big) + \mathbb{P}(A_{n+1}) - \mathbb{P}\Big(\bigcup_{i=1}^{n} A_i \cap A_{n+1}\Big) \\ &\geq \mathbb{P}\Big(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\Big) + \mathbb{P}(A_{n+1}) \overset{(IV)}{\geq} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i) - \sum_{i<j\leq n} \mathbb{P}(A_i \cap A_j) + \mathbb{P}(A_{n+1}) \\ &\geq \sum_{i=1}^{n+1} \mathbb{P}(A_i) - \sum_{i<j\leq n+1} \mathbb{P}(A_i \cap A_j),\end{aligned}$$

was zu beweisen war.

(e) Für jedes k gibt es genau $\binom{n}{k}$ Teilmengen von $\{1, 2, \ldots, n\}$ mit k Elementen. Es gilt daher

$$\sum_{\substack{J\subseteq\{1,2,\ldots,n\} \\ |J|=k}} \mathbb{P}\Big(\bigcap_{j\in J} A_j\Big) = \binom{n}{k} \mathbb{P}\Big(\bigcap_{i=1}^{k} A_i\Big).$$

Bemerkung: Eine historische Anwendung der Siebformel ist das *Rencontre-Problem*, siehe Übung 6.2, das schon im 17. Jahrhundert gelöst wurde. Eine andere Anwendung ist zum Beispiel das sogenannte Fahrrad-Problem, siehe Aufgabe 6.13, das zu der Klasse der Überdeckungsprobleme gehört.

Nach Bonferroni sind noch zwei weitere Ungleichungen benannt, die Folgerungen aus der Siebformel sind:

- *Erste Bonferroni-Ungleichung* oder auch Boolesche Ungleichung:

$$\mathbb{P}\Big(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\Big) \leq \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i).$$

- *Zweite Bonferroni-Ungleichung*:

$$\mathbb{P}\Big(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\Big) \geq 1 - \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i) - (n-1).$$

Diese Ungleichungen sind besonders dann nützlich, wenn die Summanden der Siebformel nicht alle explizit ausgerechnet werden können oder eine Approximation genügt. Insbesondere findet man so eine untere und obere Schranke für die Wahrscheinlichkeit des Eintretens von mindestens einem der n Ereignisse. Für gerades n_1 und ungerades n_2 mit $1 \leq n_1, n_2 \leq n$ gilt die Approximation

$$\sum_{k=1}^{n_1} (-1)^{k-1} \sum_{\substack{J\subseteq\{1,2,\ldots,n\} \\ |J|=k}} \mathbb{P}\Big(\bigcap_{j\in J} A_j\Big) \leq \mathbb{P}\Big(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\Big) \leq \sum_{k=1}^{n_2} (-1)^{k-1} \sum_{\substack{J\subseteq\{1,2,\ldots,n\} \\ |J|=k}} \mathbb{P}\Big(\bigcap_{j\in J} A_j\Big).$$

Aufgabe 6.2: Das Rencontre-Problem ○●●

Zwei Spieler A und B vereinbaren das folgende Spiel: von zwei fabrikneuen identischen Sätzen Spielkarten zu je 52 Karten wird einer gründlich gemischt. Beide Stapel werden verdeckt nebeneinander gelegt. Anschließend wird immer die jeweils oberste Karte des einen Stapels zusammen mit derjenigen des anderen Stapels aufgedeckt.

Spieler B wettet, dass bei diesem Verfahren mindestens einmal zwei identische Karten erscheinen werden. Spieler A dagegen meint, dies sei doch „ganz unwahrscheinlich" und wettet dementsprechend dagegen. Wer hat die besseren Chancen?

Man modelliert dieses Problem zunächst allgemein und lässt $n \in \mathbb{N}$, die Anzahl der Spielkarten, beliebig aber fest. Dabei sei $\Omega = \mathcal{S}_n$ die Menge der Permutationen auf $\{1, \ldots, n\}$ und es sei $\mathbb{P}$ die Gleichverteilung auf Ω. Jede Permutation steht dabei für die Reihenfolge, in der die Karten nach dem Mischen im Stapel liegen.

Man sagt, es gibt ein Rencontre (frz.: Zusammentreffen) für Karte i für ein $\sigma \in \Omega$, wenn i ein Fixpunkt der Permutation σ ist bzw. wenn $\sigma(i) = i$.

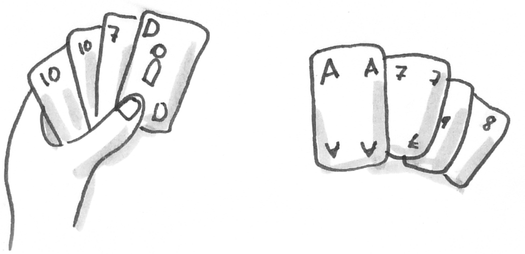
Sei

$$E_i := \{\sigma \in \Omega \ : \ \sigma(i) = i\} \subset \Omega$$

das Ereignis, bei dem für Karte $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ ein Rencontre auftritt. Man bemerke $E_i \cap E_j \neq \emptyset$ wenn $i \neq j$.

(a) Berechnen Sie $\mathbb{P}(E_i)$.

(b) Benutzen Sie die Siebformel von Poincaré-Sylvester, um die Wahrscheinlichkeit eines Rencontres zu berechnen. Approximieren Sie diese Wahrscheinlichkeit für $n \to \infty$ und schließen Sie daraus auf die Gewinnwahrscheinlichkeit des zweiten Spielers B.



Lösung:

(a) Es gibt genau $(n-1)!$ mögliche Permutationen, die fix sind an der Stelle i. Daher gilt:

$$\mathbb{P}(E_i) = \frac{\#E_i}{\#\Omega} = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}.$$

(b) Das Ereignis, dass mindestens an einer Stelle ein Rencontre auftritt, ist die Vereinigung der Ereignisse E_i, wofür die Siebformel angewandt werden kann:

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{\substack{J \subseteq \{1,2,\ldots,n\} \\ |J|=k}} \mathbb{P}\big(\bigcap_{j \in J} E_j\big).$$

Wegen der Gleichverteilung spielt es keine Rolle an welcher Stelle die Rencontres auftreten. Die Summanden der inneren Summe haben daher die gleiche Wahrscheinlichkeit und es kommt nur auf die Anzahl Rencontres an, aber nicht auf die genaue Indexmenge, über die in der inneren Summe summiert wird:

$$\mathbb{P}\big(\bigcap_{j \in J} E_j\big) = \mathbb{P}(E^{(k)}),$$

wobei $E^{(k)} = \bigcap_{i=1}^{k} E_i$. Die Ereignisse $E_1, \ldots, E_n$ sind damit vertauschbar.

Dann gilt (siehe Aufgabe 6.1)

$$\sum_{\substack{J \subseteq \{1,2,\ldots,n\} \\ |J|=k}} \mathbb{P}\big(\bigcap_{j \in J} E_j\big) = \binom{n}{k} \mathbb{P}\left(E^{(k)}\right).$$

Wenn k Elemente fixiert sind, können nur noch $n-k$ variieren und die Anzahl derartiger Permuationen ist $(n-k)!$. Daraus folgt

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \binom{n}{k} \frac{(n-k)!}{n!} = 1 - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}.$$

Der letzte Summand ist die n-te Partialsumme der Taylorreihe von $\exp(t)$ an der Stelle $t = -1$. Daher kann man approximativ

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) \approx 1 - \frac{1}{e} \approx 0{,}63$$

schreiben. Damit gewinnt Spieler B mit 63 % Wahrscheinlichkeit.

Bemerkung: Man kann auch die in Aufgabe 1.16 erwähnte Dérangementzahl benutzen und erhält das Ergebnis direkt über das Gegenereignis, denn

$$\# \bigcap_{i=1}^{n} E_i^c = D_{n,0}.$$

Aufgabe 6.3: Rencontre-Problem mit Zufallsvariablen ○●●

Das historische *Rencontre-Problem* (erstmals publiziert 1708 von Montmort) ist die Frage nach den Gewinnchancen in einem einfachen Kartenspiel mit einem Croupier (Spielleiter und Bank) und drei Spielern. Es wird ein Kartenblatt in die vier Farben ♣, ♠, ♡ und ♢ geteilt. Jeder Spieler erhält einen Stapel, der sodann gemischt wird. Nur der Kartenstapel des Croupiers bleibt geordnet. Jeder Spieler setzt einen Betrag. In jeder Runde decken alle Beteiligten die oberste Karte ihres Stapels auf. Deckt ein Spieler eine Karte mit der selben Wertigkeit auf wie der Croupier, kommt es zu einem sogenannten *Rencontre* (frz.: Zusammentreffen) und der Spieler gewinnt.

Gibt es keine Rencontres, so gewinnt die Bank. Das Spiel endet spätestens mit dem Aufdecken der dreizehnten Karte, denn es gibt je dreizehn Karten in vier Farben in einem Standardkartenblatt. Das Spiel wird deswegen auch *treize* (frz.: dreizehn) genannt.

Wie günstig ist das Spiel für jeden der drei Spieler? Wir betrachten im folgenden nur den ersten Spieler.

Üblicherweise wird dieses Problem mit der symmetrischen Gruppe $\mathcal{S}_{13}$ als Ergebnisraum modelliert; also die Menge aller Permutationen von dreizehn Elementen. Sei $\mathbb{P}$ die Gleichverteilung auf Ω.

Wir modellieren das Problem allgemein mit $n \in \mathbb{N}$ Karten. Für ein $\sigma \in \mathcal{S}_n$ bedeutet ein Rencontre im i-ten Zug $\sigma(i) = i$; die Permutation σ hat dann in i einen *Fixpunkt*. Die Menge aller Permutationen mit Fixpunkt in i sei $E_i \subset \Omega$.

Sei daher $(\mathcal{S}_n, \mathcal{P}(\mathcal{S}_n), \mathbb{P})$ das stochastische Modell für dieses Problem. Sei weiter $\mathbb{1}_{E_i}$ die Zufallsvariable, die angibt, ob Spieler 1 im i-ten Zug ein Rencontre hatte. Die Gesamtzahl Rencontres in n Zügen sei bezeichnet mit

$$N_n := \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{E_i}.$$

(a) Berechnen Sie die Verteilung von N_n mit Hilfe der Siebformel von Poincaré-Sylvester. Berechnen Sie dann die Verteilung von N_{13} explizit. Beschränken Sie sich auf die Werte, die größer als ein Prozent sind.

(b) Berechnen Sie den Erwartungswert von N_n, für $i \neq j$ dann $\mathrm{Cov}(\mathbb{1}_{E_i}, \mathbb{1}_{E_j})$ und schließlich die Varianz von N_n. Ist die Familie $(\mathbb{1}_{E_i})_{1 \leq i \leq n}$ stochastisch unabhängig?

(c) Lassen Sie nun n gegen unendlich gehen und berechnen Sie die Verteilung der Grenzvariable N_∞.

(d) Berechnen Sie mittels N_∞ noch einmal die Wahrscheinlichkeit für mindestens ein Rencontre und vergleichen Sie diese mit der Wahrscheinlichkeit für mindestens ein Rencontre im Fall $n = 13$.

Lösung: Zur Verdeutlichung ein Beispiel: es gab für den ersten Spieler ein Rencontre in der siebten Runde:

Runde	1	2	3	4	5	6	7	8
Croupier	$\clubsuit A$	$\clubsuit K$	$\clubsuit D$	$\clubsuit B$	$\clubsuit 10$	$\clubsuit 9$	$\clubsuit 8$	$\dots$
Spieler 1	$\heartsuit 10$	$\heartsuit 9$	$\heartsuit 2$	$\heartsuit 3$	$\heartsuit 7$	$\heartsuit D$	$\heartsuit 8$	$\dots$

Zunächst ist $\#\mathcal{S}_n = n!$ und es gibt $(n-1)!$ Permutationen mit Fixpunkt an einer festen, aber beliebigen Stelle, da noch $n-1$ der ursprünglich n Elemente permutiert werden können. Es spielt dabei keine Rolle, ob noch weitere Fixpunkte auftreten. Daher gilt für alle $i \in \{1, 2, \dots, n\}$:

$$\mathbb{P}(\mathbb{1}_{E_i} = 1) = \mathbb{P}(E_i) = \frac{\#\{\sigma \in \mathcal{S}_n : \sigma(i) = i\}}{\#\mathcal{S}_n} = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}.$$

(a) Aus Aufgabe 6.2 folgt:

$$\mathbb{P}(N_n \geq 1) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{1}{k!} = 1 - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$$

und somit

$$\mathbb{P}(N_n = 0) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}.$$

In der Aufgabe 6.2 wurde festgestellt, dass $(E_i)_{i=1}^n$ eine Familie vertauschbarer Ereignisse ist, daher gilt

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(N_n = k) &= \binom{n}{k} \cdot \mathbb{P}\Big(\bigcap_{i=1}^{n-k} E_i^c \cap \bigcap_{j=n-k+1}^{n} E_j\Big) \\
&= \binom{n}{k} \cdot \underbrace{\mathbb{P}\Big(\bigcap_{i=1}^{n-k} E_j^c \Big| \bigcap_{j=n-k+1}^{n} E_i\Big)}_{=\mathbb{P}(N_{n-k}=0)} \cdot \underbrace{\mathbb{P}\Big(\bigcap_{j=1}^{k} E_j\Big)}_{=(n-k)!/n!} = \frac{1}{k!} \sum_{j=1}^{n-k} \frac{(-1)^j}{j!}.
\end{aligned}$$

Die Wahrscheinlichkeiten für $n = 13$ ergeben die folgende Tabelle:

k	0	1	2	3	4
$\mathbb{P}(N_{13} = k)$	0,37	0,37	0,18	0,06	0,015

Insbesondere ist $\mathbb{P}(N_{13} \geq 1) = 1 - \mathbb{P}(N_{13} = 0) \approx 0{,}63$.

(b) Die Variablen $\mathbb{1}_{E_i}$ sind Bernoulli-verteilt, d.h. $\mathbb{1}_{E_i} \sim \mathrm{Ber}(p = 1/n)$. Daher ist

$$\mathbb{E}(\mathbb{1}_{E_i}) = \mathbb{P}(E_i) = \frac{1}{n}, \quad \mathrm{Var}(\mathbb{1}_{E_i}) = \mathbb{P}(E_i)(1 - P(E_i)) = \frac{n-1}{n^2}.$$

Die Zufallsvariable N_n ist daher eine Summe *abhängiger* Zufallsvariablen und insbesondere *nicht* binomialverteilt. Mittels Linearität des Erwartungswertes folgt weiter:

$$\mathbb{E}(N_n) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(E_i) = n \cdot \frac{1}{n} = 1.$$

Es ist also im Schnitt mit nur einem Rencontre zu rechnen, egal wie groß n ist.

Die Kovarianz der Indikatorzufallsvariablen lässt sich mit Hilfe der bedingten Wahrscheinlichkeit berechnen. Beachten Sie dazu zunächst für $i \neq j$

$$\mathbb{P}(E_i \cap E_j) = \mathbb{P}(E_i | E_j) \cdot \mathbb{P}(E_j) = \frac{1}{n-1} \cdot \frac{1}{n}.$$

Daraus folgt direkt für $i \neq j$

$$\mathrm{Cov}(\mathbb{1}_{E_i}, \mathbb{1}_{E_j}) = \mathbb{P}(E_i \cap E_j) - \mathbb{P}(E_i) \cdot \mathbb{P}(E_j) = \frac{1}{n^2(n-1)} > 0.$$

Die Variablen E_i und E_j sind daher positiv korreliert und die Kovarianz hängt nicht vom gewählten i oder j ab.

Die Varianz von N_n ist nun

$$\mathrm{Var}(N_n) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Var}(\mathbb{1}_{E_i}) + \sum_{i \neq j} \mathrm{Cov}(\mathbb{1}_{E_i}, \mathbb{1}_{E_j}) = 1,$$

unabhängig von n.

(c) Mit Hilfe der Taylorreihe der Exponentialfunktion $\exp(t)$ an der Stelle $t = -1$ ergibt sich für den Grenzübergang $n \to \infty$ eine Konvergenz in Verteilung:

$$\mathbb{P}(N_\infty = k) = \lim_{n \to \infty} \mathbb{P}(N_n = k) = \frac{1}{k!} e^{-1} = \mathrm{Poi}(1)(\{k\})$$

das heißt

$$N_n \xrightarrow[n \to \infty]{(d)} N_\infty \sim \mathrm{Poi}(1).$$

(d) Mit N_∞ erhält man ebenfalls

$$\mathbb{P}(N_\infty \geq 1) = 1 - \mathbb{P}(N_\infty = 0) = 1 - \frac{1}{e} \approx 0{,}63.$$

Bemerkung: Die Regeln des Spiels *treize* werden zum Beispiel in [Hal90], Kapitel 19.2, S. 328, beschrieben.

6.2 Gerechte Verteilung und Banachs Streichholzproblem

Aufgabe 6.4: Banachs Streichholzproblem ●●●

Banach ist bekannt als starker Raucher und trug daher stets in jeder Manteltaschen eine Schachtel mit Streichhölzern. Zum Anzünden seiner Pfeife greift er rein zufällig mit gleicher Wahrscheinlichkeit in eine der beiden Manteltaschen und holt ein Streichholz daraus hervor. Irgendwann greift er eine leere Schachtel. Wie viele Streichhölzer sind dann noch in der anderen Schachtel?

Nehmen Sie an, eine volle Schachtel hätte $n \in \mathbb{N}$ Streichhölzer. Es sei zudem X_n die Zufallsvariable, die angibt, wie viele Streichhölzer noch in der anderen Schachtel vorhanden sind, sobald eine leere Schachtel vorgefunden wurde.

(a) Sei zunächst $n = 2$. Berechnen Sie die Verteilung von X_2. Zeichnen Sie dazu ein geeignetes Baumdiagramm.

(b) Wie lässt sich das Ergebnis für $n \geq 2$ verallgemeinern? Bestimmen Sie $p_k := \mathbb{P}(X_n = k)$ explizit.

(c) Bestimmen Sie dann den Erwartungswert von X_n. Zeigen Sie dazu, dass für jedes $k = 0, \ldots, n$ die Rekursion

$$kp_k = (2n - k)(p_k - p_{k+1})$$

gilt. Zeigen Sie danach mit Hilfe dieser Rekursionsformel:

$$\mathbb{E}(X_n) = (2n + 1)p_0 - 1.$$

(d) Bestimmen Sie schließlich mit Hilfe der Stirlingformel eine Approximation für große n für den Erwartungswert von X_n und zeigen Sie:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mathbb{E}(X_n)}{\sqrt{n}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}.$$

(e) In einer Standard-Streichholzschachtel sind 38 Streichhölzer enthalten. Wie viele Hölzer können im Schnitt entnommen werden, bevor eine leere Schachtel vorgefunden wird?

Lösung:

(a) Wenn es in beiden Schachteln je zwei Streichhölzer gibt, so ist nach spätestens drei Entnahmen eine Schachtel geleert (Schubfachprinzip). Es ist möglich entweder zwei, ein oder kein Streichholz in der anderen Schachtel übrig zu haben, wenn nicht sofort die leere Schachtel gewählt wird, siehe auch Abbildung 6.1.

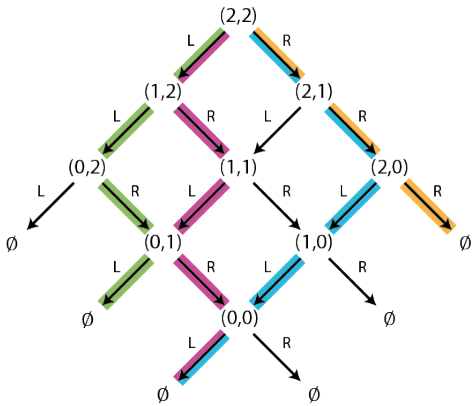


Abbildung 6.1: Banachs Streicholzproblem mit je zwei Streichhölzern pro Schachtel. Die leere Menge bedeute eine leere Schachtel; die Vektoren in den Knoten des Diagramms bezeichnen die Anzahl der noch übrigen Streichhölzer in der linken bzw. rechten Tasche.

Wegen der Symmetrie zwischen linker und rechter Tasche gilt nun

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_2 = 2) &= 2 \cdot \mathbb{P}(\{LLL\}) = 2 \cdot \frac{1}{2^3} = \frac{1}{4},\\
\mathbb{P}(X_2 = 1) &= 2 \cdot \mathbb{P}(\{LLRL, LRLL, RLLL\}) = 6 \cdot \frac{1}{2^4} = \frac{3}{8},\\
\mathbb{P}(X_2 = 0) &= 2 \cdot \mathbb{P}(\{LLRRL, LRLRL, RLRLL, RLLRL, RRLLL, LRRLLL\})\\
&= 12 \cdot \frac{1}{2^5} = \frac{3}{8}.
\end{aligned}$$

(b) Wenn noch $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ Streichhölzer übrig bleiben, so müssen $2n-k$ Streichhölzer verbraucht worden sein, bevor ein letzter Griff eine leere Schachtel hervorholt. Man setze daher

$$\Omega_{n,k} := \{\omega \in \{L, R\}^{2n-k+1} : \#\{i : \omega_i = R)\} = n + 1 \text{ oder } \#\{i : \omega_i = L)\} = n + 1\}.$$

Da jede Tasche mit gleicher Wahrscheinlichkeit gewählt wird, folgt für $\omega \in \Omega_{n,k}$

$$\mathbb{P}(\{\omega\}) = \frac{1}{2^{2n-k+1}}.$$

Wir setzen als Ergebnisraum

$$\Omega_n := \bigsqcup_{k=0}^{n} \Omega_{n,k}$$

und nehmen das stochastische Modell $(\Omega_n, \mathcal{P}(\Omega_n), \mathbb{P})$ an.

Es gibt eine Symmetrie zwischen den Elementen in $\Omega_{n,k}$, die R und L vertauscht. So ist beispielsweise die Sequenz *LRLRLL* symmetrisch zu *RLRLRR*. Da jedes $\omega \in \Omega_{n,k}$ die gleiche Wahrscheinlichkeit hat, genügt es die Kardinalität von $\Omega_{n,k}$ zu bestimmen, um die Wahrscheinlichkeit von $\{X_n = k\}$ zu bestimmen. Es gilt daher

$$\#\Omega_{n,k} = 2 \cdot \binom{2n-k}{n}$$

nach Aufgabe 1.6. Damit ergibt sich

$$p_k = \mathbb{P}(X_n = k) = 2 \cdot \binom{2n-k}{n} \cdot \frac{1}{2^{2n-k+1}} = \binom{2n-k}{n} \frac{1}{2^{2n-k}}.$$

Die Normierung der $(p_k)_{k=0}^n$ folgt aus Aufgabe 1.7

$$\sum_{k=0}^{n} p_k = \sum_{k=0}^{n} \binom{2n-k}{n} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n-k} = 1.$$

(c) Aus dem Quotienten p_{k+1}/p_k für festes k ergibt sich

$$\frac{p_{k+1}}{p_k} = 2 \cdot \frac{n-k}{2n-k}$$

und damit die Formel $k \cdot p_k = (2n-k)(p_k - p_{k+1})$. Aufsummieren dieses Ausdruckes über alle k ergibt die Gleichung

$$\mathbb{E}(X_n) = (2n+1)p_0 - 1 = (2n+1) \cdot \binom{2n}{n} \cdot \frac{1}{2^{2n}} - 1.$$

(d) Der Erwartungswert wird mit der Stirling-Formel

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

apporoximiert. Es folgt

$$\mathbb{E}(X_n) = (2n+1)\binom{2n}{n} \cdot \frac{1}{2^{2n}} - 1 \sim 2\sqrt{\frac{n}{\pi}} - 1 = O(\sqrt{n}).$$

Es gilt daher

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mathbb{E}(X_n)}{\sqrt{n}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}.$$

(e) Für $n = 38$ hat man im Schnitt nur

$$E(X_{38}) \approx 2\sqrt{38/\pi} - 1 \approx 6$$

Streichhölzer übrig. Dass heißt, im Schnitt werden $2 \cdot 38 - 6 = 70$ Streichhölzer verbraucht, bevor das erste Mal eine leere Streichholzschachtel vorgefunden wird. Das entspricht 92 % der anfangs vorhandenen Streichhölzer.

Bemerkung: Die Wahrscheinlichkeit von $\{X_n = k\}$ stimmt mit der Wahrscheinlichkeit überein, dass eine symmetrische Irrfahrt der Länge $2n$ genau k Nullstellen hat. Siehe [Hen13], Satz 2.7, S. 31. Die vorgestellte Methode zur Berechnung des Erwartungswertes stammt von Feller ([Fel57], Theorem 4, S. 234).

Skaliert man X_n mit $\sqrt{2n}$, ergibt sich im Grenzübergang für $n \to \infty$ der Wert $\sqrt{2/\pi}$. Das ist der Erwartungswert von $|Z|$, wobei Z eine standardnormalverteilte Zufallsvariable ist (siehe Aufgabe 3.16). Es gilt sogar

$$\frac{X_n}{\sqrt{2n}} \xrightarrow[n\to\infty]{(d)} |Z|.$$

Dies wird in [Hen13] in Theorem 2.8 bewiesen.

Aufgabe 6.5: Gewinnverteilung bei vorzeitigem Abbruch eines Spiels ●●●

Antoine und Béatrice vereinbaren einen Einsatz von 10 EUR, der am Anfang eines Spiels mit mehreren Runden von beiden eingesetzt wird. In jeder Runde gibt es einen Punkt zu gewinnen und wer zuerst 10 Punkte hat, gewinnt das Spiel und erhält den Gesamteinsatz von 20 EUR. Ein Unentschieden in einer Runde sei ausgeschlossen und die Runden seien unabhängig. Antoine gewinnt eine beliebige Runde mit Wahrscheinlichkeit $p \in (0, 1)$.

Unerwartet muss das Spiel abgebrochen werden. Wie kann der Gewinn unter Beachtung des Spielstandes fair auf beide Parteien verteilt werden?

(a) Der Spielstand, bei dem Antoine und Béatrice aufhören müssen, sei 7 : 8. Antoine fehlen noch drei Punkte, Béatrice zwei zum Gewinn. Berechnen Sie die Gewinnwahrscheinlichkeiten der Spieler für $p = 1/2$. Wäre eine Aufteilung des Gewinns im Verhältnis 7 : 8 fair?

(b) Allgemeiner sei $N \in \mathbb{N}$ die Anzahl Punkte, die zum Gewinn notwendig sind. Das Spiel wird nun bei einem Spielstand von $(N - j) : (N - k)$ für $j, k \in \{1, 2, \ldots, N\}$ abgebrochen. Die Zahlen j und k geben an, wie viele Punkte jedem der Spieler noch zum Sieg fehlen, dies sei durch das Ereignis $D_{j,k}$ ausgedrückt. Geben Sie an, in welchem Verhältnis der Einsatz nun gerecht zu teilen wäre. Berechnen Sie dazu Antoines und Béatrices Gewinnwahrscheinlichkeiten.

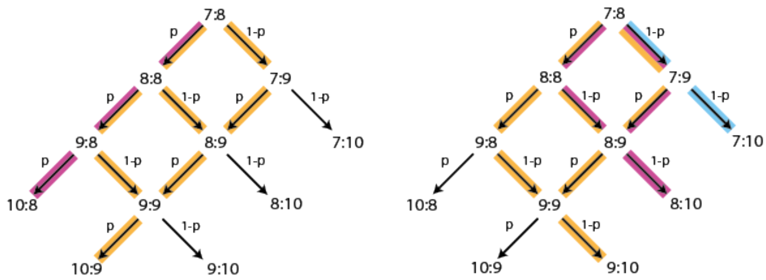


Abbildung 6.2: Günstige Pfade für beide Spieler (links Antoine, rechts Béatrice) mit $p \in (0,1)$ beliebig. Blau entspricht Gewinn in zwei Spielen, Magenta Gewinn in drei Spielen und Gelb Gewinn in vier Spielen.

Lösung:

(a) Wir können Aufgabe 1.6 verwenden, um die günstigen Pfade abzuzählen.

Sei A das Ereignis, bei dem Antoine gewinnt und B das Ereignis, bei dem Béatrice gewinnt. Dazu sind mindestens zwei, höchstens vier weitere Runden notwendig.

Mit dem Baumdiagramm in Abbildung 6.2 folgt:

$$\mathbb{P}(A) = p \cdot \left(\binom{2}{0}p^2 + \binom{3}{1} \cdot p^2(1-p)\right) = \frac{5}{16} \approx 0{,}31$$
$$\mathbb{P}(B) = (1-p) \cdot \left(\binom{1}{0}(1-p) + \binom{2}{1}p(1-p) + \binom{3}{2}p^2(1-p)\right) = \frac{11}{16} \approx 0{,}69$$

Eine Aufteilung im Verhältnis der Gewinnwahrscheinlichkeiten beider Spieler von $5 : 11$ ist hier gerecht (Antoine erhält 6,25 EUR, Béatrice 13,75 EUR).

(b) Tatsächlich ist das Banachsche Streichholzproblem aus Aufgabe 6.4 ein Spezialfall des Punktproblems für Gleichstand und $p = 1/2$, wir benutzen daher eine ähnliche Argumentation und zählen kürzeste Pfade, siehe auch Aufgabe 1.6.

Sei A das Ereignis, bei dem Antoine gewinnt und B der Gewinnfall für Béatrice. Es bezeichne

$$G^A_{j,k} := \mathbb{P}(A|D_{j,k}), \qquad G^B_{j,k} := \mathbb{P}(B|D_{j,k})$$

die Gewinnwahrscheinlichkeiten der beiden.

In jedem Fall wird Antoine insgesamt j Runden gewinnen müssen, und Béatrice darf höchstens $k-1$ Runden gewinnen. Gewinnt Béatrice keine Runde, so gibt es

$\binom{j-1}{0}$ verschiedene Verläufe (kürzeste Pfade), um von $N-j : N-k$ zum Spielstand $N-1 : N-k$ zu gelangen. Das abschließende Spiel muss Antoine gewinnen.

Gewinnt Béatrice einmal, so haben die beiden insgesamt $j+1$ Spiele gespielt, wofür es $\binom{j-1+1}{1}$ Verläufe gab, plus den letzten Gewinn von Antoine.

Analog, wenn Béatrice $\ell < k$ Spiele gewinnt, so gibt es $\binom{j-1+\ell}{\ell}$ Verläufe, bevor Antoine das letzte Spiel gewinnt. Genauso kann man für Béatrice argumentieren. Es ergibt sich durch Summieren

$$G_{j,k}^A = p\cdot\sum_{\ell=0}^{k-1}\binom{j-1+\ell}{\ell}p^{j-1}(1-p)^{\ell}, \qquad G_{j,k}^B = (1-p)\cdot\sum_{\ell=0}^{j-1}\binom{k-1+\ell}{\ell}p^{\ell}(1-p)^{k-1}.$$

Der Gewinn wird dann $G_{j,k}^A : G_{j,k}^B$ geteilt.

Die Gewinnwahrscheinlichkeiten lassen sich auch als Binomialverteilung bzw. negative Binomialverteilung auffassen.

Bemerkung: Erste Lösungsversuche für das in der Literatur als *Punktproblem* bekannte Phänomen tauchen schon vor 1654 auf, als Méré diese Frage Pascal stellte. Allerdings war Pascal der Erste, der die Aufgabe korrekt lösen konnte, was Fermat wenig später bestätigte. Danach wurde auch das allgemeine Problem der Einsatzverteilung bei abgebrochenem Spiel mit n Mitstreitern gelöst, unter anderem von de Moivre und Lagrange. Die frühen Lösungen basieren auf Rekursionsgleichungen. Eine Übersicht über verschiedene Lösungsstrategien für das Punktproblem und ihre historische Einordnung findet sich in [Gor14].

6.3 Geburtstagsparadoxon

Aufgabe 6.6: Geburtstagsproblem ○○●

Das *Geburtstagsproblem* ist ein klassisches Problem der Wahrscheinlichkeitstheorie und lässt sich folgendermaßen formulieren: Bei einer Party kommt das Thema Geburtstag auf. Erstaunt stellen die Gäste fest, dass zwei der Teilnehmer am selben Tag Geburtstag haben. Wie wahrscheinlich ist so ein Ereignis?

Zur Lösung seien ein paar hilfreiche (aber unrealistische) Annahmen gemacht:

- Der 29. Februar wird außen vor gelassen.
- Jeder Geburtstag habe die gleiche Wahrscheinlichkeit.

(a) Wie viele Paare von Personen muss man überprüfen, um feststellen zu können, welche Paare am gleichen Tag Geburtstag haben?

(b) Wie viele Personen werden benötigt, so dass die Wahrscheinlichkeit von mindestens zwei gleichen Geburtstagen mindestens 50 % ist?

(c) Berechnen Sie nun die Wahrscheinlichkeit, dass eine bestimmte Person unter den Gästen mit einem anderen Gast am gleichen Tag Geburtstag hat und finden Sie eine Zahl n, so dass diese Wahrscheinlichkeit größer ist als 0,5.

Hinweis: *Nutzen Sie das Gesetz der seltenen Ereignisse (Poisson-Approximation).*

Lösung:

(a) Es lassen sich $n(n-1)/2$ Paare bilden.

(b) Wir setzen als Ergebnisraum für festes $n \geq 2$

$$\Omega = \{(b_1, b_2, \ldots, b_n) \in \{1, 2, 3, \ldots, 365\}^n : b_1 \leq b_2 \leq \ldots \leq b_n\}$$

die Menge aller geordneter Listen von n Geburtstagen. Daher ist $\#\Omega = 365^n$. Das Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}$ sei die Gleichverteilung auf Ω.

Es sei weiter $G \subset \Omega$ das Ereignis, bei dem wenigstens zwei Gäste am gleichen Tag Geburtstag haben. Das Komplement von G ist das Ereignis, bei dem alle Gäste an verschiedenen Tagen Geburtstag habe. Es gilt

$$\#G^c = \frac{365!}{(365-n)!}.$$

Wegen der angenommenen Gleichverteilung der Geburtstage gilt somit

$$\mathbb{P}(G^c) = \frac{\#G^c}{\#\Omega} = \frac{365!}{(365-n)!365^n}.$$

Mit der Stirling-Formel

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

gilt weiter

$$\mathbb{P}(G^c) \sim e^{-n}\left(\frac{365}{365-n}\right)^{365,5-n}$$

Durch Einsetzen und Probieren findet man $n = 23$. Es genügen also 23 Personen, damit die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens ein Paar existiert, das am gleichen Geburtstag hat, über $1/2$ liegt.

(c) Setzt man $p := 1/365$, kann man das Problem auch mittels Binomialverteilung modellieren. Sei $X \sim Bin(n-1, p)$. Dann ist die Wahrscheinlichkeit, dass noch jemand am gleichen Tag Geburtstag hat

$$\mathbb{P}(X \geq 1) = \sum_{i=1}^{n-1} \binom{n-1}{i} p^i (1-p)^{n-1-i}.$$

Hier verschiedene n zu testen ist ineffektiv, daher verwenden wir die Poisson-Approximation, da p sehr klein ist. Sei $Y \sim Poi(n \cdot p)$, dann gilt

$$\mathbb{P}(G) \approx 1 - \mathbb{P}(Y = 0) = 1 - e^{-n \cdot p}.$$

In diesem Fall lässt sich nach n umstellen:

$$n \geq -\frac{\ln(1/2)}{p}.$$

Einsetzen ergibt $n \geq 253$. Es werden also mindestens 253 Personen gebraucht, damit jemand am selben Tag Geburtstag hat wie eine bestimmte Person. Das entspricht nach (a) für $n = 23$ der Anzahl Paare $\frac{n(n-1)}{2} = 253$, die gefragt werden müssen, ob sie am gleichen Tag Geburtstag haben.

Bemerkung: Das Geburtstags-Problem wird oft auch als Paradoxon bezeichnet. Das scheinbare Paradoxon liegt hier darin, dass objektivistische Wahrscheinlichkeit ((a) – *irgendwelche* zwei Personen haben an *irgendeinem* der 365 Tage zusammen Geburtstag) und subjektivistische Wahrscheinlichkeit ((b) – *ich* habe am gleichen Tag Geburtstag wie eine andere Person) verwechselt werden. Das wird nochmals unterstrichen durch die Tatsache, dass in beiden Fällen 253 Paare abgefragt werden, aber unterschiedlich viele Personen diese Paare bilden.

Aufgabe 6.7: Anzahl Paare mit gleichem Geburtstag ○●●

Es soll geschätzt werden, wie viele Personen in einem Raum am selben Tag Geburtstag haben.

Man beachte:

- Passende Geburtstage für verschiedene Paare sind paarweise unabhängig.
- Jedoch sind diese Ereignisse nicht zusammen unabhängig.

Seien $n \geq 2$ Personen anwesend. Seien weiter $B_1, \ldots, B_n$ die Geburtstage der einzelnen Personen. Die Ereignisse $(B_i)_i$ sind paarweise unabhängig, aber nicht als Familie.

Weiter sei für $i \neq j$

$$G_{ij} := \begin{cases} 1 & \text{falls } B_i = B_j \\ 0 & \text{falls } B_i \neq B_j \end{cases}.$$

Wir zählen die Anzahl passender Paare durch die Zufallsvariable

$$D := \sum_{1 \le i < j \le n} G_{ij}.$$

(a) Berechnen Sie Erwartungswert und Varianz von D.

(b) Nehmen Sie nun an $n = 100$. Schätzen Sie die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses $\{|D - \mathbb{E}[D]| \geq 6\}$ ab. Interpretieren Sie das Ergebnis.

Lösung:

(a) Zunächst ist die Wahrscheinlichkeit von $\{B_i = B_j\}$ für $i \neq j$ gegeben durch

$$\mathbb{P}(B_i = B_j) = 365 \, \frac{1}{365} \, \frac{1}{365} = \frac{1}{365}.$$

Daher ist $G_{ij} \sim \mathrm{Ber}(365^{-1})$. Wegen der Linearität des Erwartungswertes gilt

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(D) = \mathbb{E}\Big(\sum_{1 \le i < j \le n} G_{ij} \Big) &= \sum_{1 \le i < j \le n} \mathbb{E}(G_{ij}) \\ &= \binom{n}{2} \mathbb{P}(B_i = B_j) = \binom{n}{2} \frac{1}{365}. \end{aligned}$$

Für die Varianz bemerkt man, dass paarweise Unabhängigkeit hinreichend ist um die Varianz der Summe als Summe der Varianzen darzustellen. Die Kovarianzen verschwinden jeweils. Daher ist

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}(D) &= \mathrm{Var}\Big(\sum_{1 \le i < j \le n} G_{ij} \Big) = \sum_{1 \le i < j \le n} \mathrm{Var}(G_{ij}) \\ &= \binom{n}{2} \frac{1}{365} \Big(1 - \frac{1}{365}\Big). \end{aligned}$$

(b) Zunächst ist für $n = 100$ der Erwartungswert $\mathbb{E}(D) \approx 14$. Daher ist mittels Bienaymé-Tschebyschoff-Ungleichung für $\varepsilon = 6$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(|D - 14| \geq 6) &\leq \frac{\mathrm{Var}(D)}{\varepsilon^2} \\ &= \frac{50 \cdot 99}{36} \cdot \frac{364}{365^2} \approx 0{,}38. \end{aligned}$$

Daher gilt

$$\mathbb{P}(8 \leq D \leq 20) > \frac{1}{2}.$$

Also, wenn 100 Personen anwesend sind, gibt es mehr als 50 % Wahrscheinlichkeit, dass zwischen 8 und 20 Paare ihren Geburtstag am gleichen Tag haben.

6.4 Wartezeitprobleme

Aufgabe 6.8: Würfelproblem ●●●

Sei $(W_i)_{1\le i\le n}$ eine Familie unabhängiger, geometrisch verteilter Zufallsvariablen zum selben Parameter $p \in (0,1)$. Definieren Sie für $n \ge 2$

$$T_n := \max(W_1, W_2, \ldots, W_n).$$

Die Zufallsvariable T_n ist die Wartezeit bis zum letzten Erfolg in n gleichzeitig durchgeführten Bernoulli-Experimenten.

(a) Sei zunächst $n = 2$. Berechnen Sie explizit den Erwartungswert von T_2, indem Sie zunächst die Verteilung von $\min(W_1, W_2)$ berechnen und dann zeigen:

$$\mathbb{E}(T_2) = \mathbb{E}(\max(W_1, W_2)) = \frac{2}{p} - \frac{1}{1-(1-p)^2}.$$

Hinweis: *Zeigen Sie dazu*

$$\mathbb{P}(\max(W_1, W_2) \ge k) = \mathbb{P}(W_1 \ge k) + \mathbb{P}(W_2 \ge k) - \mathbb{P}(\min(W_1, W_2) \ge k)$$

und summieren Sie über alle $k \ge 1$.

(b) Nutzen Sie die Siebformel von Sylvester-Poincaré für $n \ge 2$ und zeigen Sie

$$\mathbb{E}[T_n] = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^{k+1}}{1-(1-p)^k}.$$

(c) Eine Anwendung dieses Ergebnisses ist ein Würfelproblem nach de Moivre. Es wird mit drei unterscheidbaren Würfeln in jeder Runde geworfen. Sobald ein Würfel eine Sechs zeigt, scheidet der Würfel aus und es wird mit den verbliebenen Würfeln solange gespielt, bis alle Würfel ausgeschieden sind, also jeder Würfel wenigstens einmal eine Sechs gezeigt hat. Wie viele Runden muss man dafür durchschnittlich spielen?

Lösung:

Als Ergebnisraum eignet sich zum Beispiel der Produkt-Folgenraum $\Omega_n := (\{0,1\}^{\mathbb{N}})^n$, wobei eine Null bedeute es wurde keine Sechs geworfen und eine Eins bedeute es wurde eine Sechs geworfen. Als Wahrscheinlichkeitsmaß setzt man $\mathbb{P}$ als das Produktmaß $(\operatorname{Ber}(p)^{\otimes\mathbb{N}})^{\otimes n}$.

Benutzen Sie das Ergebnis aus Aufgabe 2.19 für $p_i = p$ für die W_i aus der Aufgabenstellung. Es folgt:

$$\min(W_1, W_2, \ldots, W_n) \sim Geo(1-(1-p)^n).$$

(a) Es gilt:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\max(W_1, W_2) \geq k) &= \mathbb{P}(\{W_1 \geq k\} \cup \{W_2 \geq k\}) \\ &= \mathbb{P}(W_1 \geq k) + \mathbb{P}(W_2 \geq k) - \mathbb{P}(\{W_1 \geq k, W_2 \geq k\}) \\ &= \mathbb{P}(W_1 \geq k) + \mathbb{P}(W_2 \geq k) - \mathbb{P}(\min(W_1, W_2) \geq k).\end{aligned}$$

Summieren über alle $k \geq 1$ ergibt nach Formel für den Erwartungswert (siehe Aufgabe 2.27) und wegen $W_1 \sim W_2$

$$\mathbb{E}(T_2) = \mathbb{E}(\max(W_1, W_2)) = 2 \cdot \mathbb{E}(W_1) - \mathbb{E}(\min(W_1, W_2)) = \frac{2}{p} - \frac{1}{1-(1-p)^2}.$$

(b) Man bemerkt zuerst

$$\{\max_{1\leq i\leq n}(W_i) \geq k\} = \bigcup_{i=1}^{n}\{W_i \geq k\}, \qquad \{\min_{1\leq i\leq n}(W_i) \geq k\} = \bigcap_{i=1}^{n}\{W_i \geq k\}.$$

Da die W_i vertauschbar sind, gilt nach Siebformel von Sylvester-Poincaré (siehe Aufgabe 6.1)

$$\mathbb{P}\Big(\bigcup_{i=1}^{n}\{W_i \geq k\}\Big) = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}\binom{n}{i}\mathbb{P}\Big(\bigcap_{j=1}^{i}\{W_j \geq k\}\Big).$$

Durch Aufsummieren und Einsetzen der Erwartungswerte für die Minima ergibt sich die gesuchte Formel.

(c) Für $n = 3$ ergibt sich für $p = 1/6$

$$\mathbb{E}(T_3) = \binom{3}{1}\frac{1}{p} - \binom{3}{2}\frac{1}{1-(1-p)^2} + \binom{3}{3}\frac{1}{1-(1-p)^3} \approx 10{,}56.$$

Man wird das Spiel im Durchschnitt also elf Runden lang spielen.

Bemerkung: Für das Verhalten von $\mathbb{E}(T_n)$, wenn n gegen unendlich läuft, kann man das Fisher-Tippett-Gnedenko Limit-Theorem für Extremwerte benutzen. Es zeigt sich, dass $\mathbb{E}(T_n)$ in der Größenordnung von $ln(n)$ wächst und damit viel langsamer als der Erwartungswert im verwandten Sammelbilderproblem (siehe Aufgabe 6.9).

Eine erste Version dieser Aufgabe findet sich schon Mitte des 18. Jahrhunderts in de Moivres *Doctrine of Chances*, siehe [Moi56], Seite 270, Problem V. Dort werden statt Würfeln Lauflängen von Annuitäten betrachtet.

Aufgabe 6.9: Das Sammelbilderproblem ○●●

Wir betrachten das folgende bekannte *Sammelbilderproblem*, das schon de Moivre betrachtete. In der moderneren Version von G. Pólya stellt eine Firma ein Produkt her und legt jeder Packung ein Bild bei, das zu einer Kollektion von $n \geq 2$ Bildern gehört. Die vollständige Sammlung kann gegen einen Preis eingetauscht werden. Diese Marketingstrategie soll den Käufer verleiten, solange Produkte zu kaufen, bis seine Sammlung vollständig ist. Ein Produzent muss sich daher zwangsläufig die Frage stellen, wie viele Produkte pro kompletter Sammlung durchschnittlich verkauft werden.

Wenn man annehmen kann, dass die Bilder unabhängig und mit gleicher Wahrscheinlichkeit dem Produkt beigelegt werden, so kann man von einer geometrischen Wartezeit ausgehen, bis das nächste neue Bild auftaucht. Es sei T diese zufällige Wartezeit, bis die Sammlung komplettiert ist. Wir wollen den Erwartungswert berechnen und für große n approximieren.

(a) Beschreiben Sie T als Summe von n Wartezeiten $T_1, T_2, \ldots, T_n$, wobei T_i die Wartezeit ist, die verstreicht bis die Sammlung um ein weiteres Bild erweitert werden kann, nachdem bereits $i-1$ Bilder vorhanden sind. Welchen Parameter hat die Verteilung der Zufallsvariable T_i?

(b) Berechnen Sie den Erwartungswert von T für beliebiges $n \geq 2$ und finden Sie eine Approximation für n groß.

Hinweis: *Verwenden Sie eine Abschätzung für die Partialsumme $\mathcal{H}_n$ der harmonischen Reihe.*

(c) Berechnen Sie nun die Varianz von T und schätzen Sie die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses $\{T - n\mathcal{H}_n \geq c \cdot n\}$ für $c \in \mathbb{R}^+$ ab.

(d) In der Variante de Moivres wirft eine Spielerin einen fairen sechsseitigen Würfel und wartet auf das erste Mal, dass sie alle sechs Augen wenigstens einmal gesehen hat. Wie oft muss dafür der Würfel im Schnitt geworfen werden?

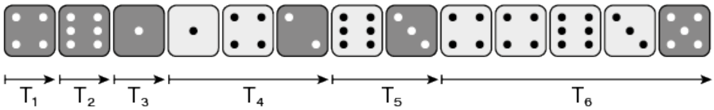


Abbildung 6.3: Beispiel für eine Folge von Würfen, bis das erste Mal alle sechs Augen gewürfelt wurden. Dunkel markiert sind jeweils die Würfe, bei denen die entsprechende Augenzahl zuerst auftritt.

Lösung:

(a) T ist eine Summe von n unabhängigen Zufallsvariablen $T_i \sim Geo(p_i)$, wobei $p_i = 1 - \frac{i-1}{n}$.

(b) Der Erwartungswert von T ist nun

$$\mathbb{E}[T] = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[T_i] = \sum_{i=1}^{n} \frac{n}{n-i+1} = n \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} = n \cdot \mathcal{H}_n,$$

wobei $\mathcal{H}_n = \sum_{i=1}^{n} i^{-1}$ die n-te harmonische Zahl ist.

Für die harmonische Reihe gilt

$$\int_1^{n+1} \frac{1}{x}\, dx \leq \mathcal{H}_n \leq \int_1^{n+1} \frac{1}{x}\, dx + 1.$$

Somit divergiert für große n die harmonische Reihe und $\mathcal{H}_n = O(\ln(n))$. Daher ist $\mathbb{E}(T) = O(n \cdot \ln(n))$. Eine genauere Abschätzung liefert $\mathbb{E}(T) \approx n \cdot (\ln(n) + \gamma_E) + 1/2$, wobei $\gamma_E \approx 0{,}577$ die Euler-Mascheroni-Konstante ist.

(c) Für eine zum Parameter $p \in (0,1)$ geometrisch verteilte Zufallsvariable X gilt $\mathrm{Var}(X) = \frac{1-p}{p^2}$. Zudem sind $T_1, T_2, \ldots, T_n$ unabhängig. Daher ist

$$\mathrm{Var}(T) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Var}(T_i) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1-p_i}{p_1^2} < n^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(n-i+1)^2} < \frac{\pi^2}{6} n^2.$$

Die letzte Abschätzung folgt wegen $\sum_{i \geq 1} i^{-2} = \frac{\pi^2}{6}$. Es gilt dann nach Bienaymé-Tschebyschoff:

$$\mathbb{P}(T - n \cdot \mathcal{H}_n \geq c \cdot n) \leq \frac{Var(T)}{(cn)^2} \leq \frac{\pi^2}{6c^2}.$$

(d) Im Beispiel für $n = 6$, siehe Abbildung 6.3, liefert die Vorbetrachtung eine Wartezeit von durchschnittlich

$$\mathbb{E}(T) = 6 \cdot \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6}\right) = 14{,}7 \approx 15$$

Runden. Eine Spielerin würfelt also im Schnitt fünfzehn Mal, bis sie alle sechs Augenzahlen gesehen hat.

Bemerkung: Eine erste Version des Sammelbildproblems taucht schon in de Moivres *Doctrines of Chance* auf, siehe [Moi56], Problem XXXIX. Dort wird die vorgestellte Würfelversion für beliebig facettierte, faire Würfel behandelt mit der Möglichkeit, pro Runde mehrmals zu werfen bzw. zusätzlich mehrere Seiten des Würfels einzubeziehen. Viele weitere Mathematiker, zum Beispiel Pólya in [Pól30], beschäftigten sich seither mit dem Problem und dessen Verallgemeinerungen, so dass eine reichhaltige Literatur entstanden ist.

6.5 Geometrische Wahrscheinlichkeit

Aufgabe 6.10: Zufälliges Dreieck legen ○●●

Ein Stab der Länge 1 wird zufällig an zwei Stellen zerbrochen. Aus den drei Teilstücken soll nun ein Dreieck gelegt werden. Mit welcher Wahrscheinlichkeit gelingt dies?

Lösung:

Betrachtet man zunächst ein beliebiges Dreieck, so ist die Summe der Länge zweier beliebiger Seiten stets länger als die dritte Seite. Man kann also zunächst ohne Beschränkung der Allgemeinheit $a + b > c$ annehmen, wobei a, b und c die Seitenlängen des Dreiecks bezeichnen. Fordert man zusätzlich Umfang eins, d.h. $a + b + c = 1$, so erhält man aus den beiden Beziehungen $c < 1/2$. Da die Bezeichnung a, b, c der Seiten beliebig ist, ist in jedem Dreieck mit Umfang Eins jede Seite des Dreiecks zwangsläufig kürzer als $1/2$.

Hat man nun umgekehrt einen Umfang von Eins vorgegeben, sowie drei Seiten, die jeweils kürzer sind als $1/2$, so wählt man für c die längste der drei Seiten. Wegen der Vorgabe des Umfangs gilt $a + b = 1 - c > 1/2$ und insbesondere $a + b > c$. Daher kann man unter dieser Voraussetzung stets ein bis auf Kongruenzabbildungen eindeutig bestimmtes Dreieck zusammensetzen.

Insbesondere sind daher die Forderungen $0 < a, b, c < 1/2$ und $a + b + c = 1$ notwendig und hinreichend für die Existenz eines Dreiecks mit Umfang 1.

Seien nun U_1 und U_2 zwei unabhängige Zufallsvariablen mit $U_i \sim \mathcal{U}_{[0,1]}$, $i \in \{1, 2\}$. Sie modellieren die zufälligen Bruchstellen. Betrachten Sie nun $U_{(1)} := \min(U_1, U_2)$ und $U_{(2)} := \max(U_1, U_2)$, um die Längen der Bruchstücke zu modellieren.

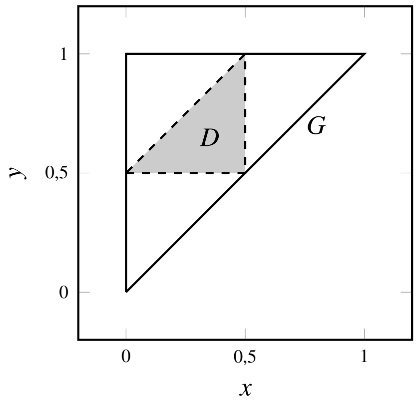
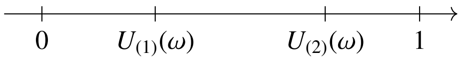


Abbildung 6.4: Bereich der möglichen Bruchstellen

Die folgende Zeichnung zeigt einen möglichen Ausgang:



Es handelt sich bei $(U_{(1)}, U_{(2)})$ um eine Ordnungsstatistik, deren gemeinsame Dichte gegeben ist durch:

$$f(x,y) := 2\,\mathbb{1}_G(x,y),$$

wobei $G := \{(x,y) \in [0,1]^2 : \ 0 \le x < y \le 1\}$, siehe Aufgabe 3.37.

Um aus den zufälligen Bruchstücken $U_{(1)}(\omega)$, $U_{(2)}(\omega) - U_{(1)}(\omega)$ und $1 - U_{(2)}(\omega)$ ein Dreieck legen zu können, müssen alle drei Abschnitte gleichzeitig kleiner als $1/2$ sein. Sei Ω_0 das Ereignis, bei dem dies der Fall ist. Dann

$$\Omega_0 = \{\omega : (U_{(1)}(\omega), U_{(2)}(\omega)) \in D\}$$

wobei $D := \{(x,y) \in G : \ x < 1/2, y - x < 1/2, 1 - y < 1/2\}$.

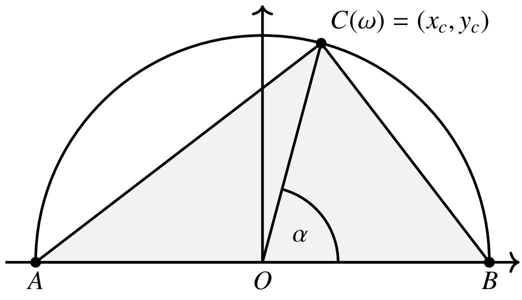
Die Wahrscheinlichkeit von Ω_0 ist nun:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\Omega_0) = \mathbb{P}_{(U_{(1)},U_{(2)})}(D) &= 2 \int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{1}_D(x,y)\,dxdy \\ &= 2 \int_0^{\frac{1}{2}} \int_{\frac{1}{2}}^{x+\frac{1}{2}} dydx = 2 \int_0^{\frac{1}{2}} x\,dx = x^2\Big|_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{4}.\end{aligned}$$

Die Mengen D und G sind in der Abbildung 6.4 dargestellt.

Aufgabe 6.11: Zufälliges Dreieck im Halbkreis ○●●

Es sei ein Halbkreis mit Radius $R = 1$ gegeben. Ein Dreieck $\triangle ABC$ werde erzeugt durch die drei Punkte $A = (-1, 0)$, $B = (0, 1)$ und C, wie in der nachfolgenden Skizze



Der Punkt C soll zufällig auf dem Kreisbogen gewählt werden, wie nachfolgend beschrieben wird. Es sei $\mathbf{F}$ der zufällige Flächeninhalt des Dreiecks.

(a) **Methode I:** Die y-Koordinate von C wird zufällig gewählt. Berechnen Sie $\mathbb{E}(\mathbf{F})$.

(b) **Methode II:** Die x-Koordinate von C wird zufällig gewählt. Berechnen Sie $\mathbb{E}(\mathbf{F})$.

(c) **Methode III:** Wählen Sie rein zufällig einen Winkel $\alpha \in [0, \pi]$ für C in Polarkoordinaten. Berechnen Sie $\mathbb{E}(\mathbf{F})$.

(d) Es wird nun ein weiterer Punkt D uniformverteilt im Halbkreis gewählt. Sei $\triangle_D$ das Ereignis, bei dem D im Inneren des Dreiecks $\triangle ABC$ liegt. Was ist die Wahrscheinlichkeit von $\triangle_D$? Beantworten Sie die Frage für alle drei Methoden I-III.

Lösung: Die Fläche des Dreiecks $\triangle ABC$ ist wegen der besonderen Konfiguration (Satz von Thales) stets gegeben durch $\mathbf{F} = y_c = \sqrt{1 - x_c^2}$. Dabei definiert $\mathbf{F}$ eine Zufallsvariable mit Wertebereich $[0, 1]$.

(a) Die Konstruktion ist nicht eindeutig, es gibt zwei passende x-Werte, $\pm\sqrt{1 - U_1^2}$, wobei $U_1 \sim \mathcal{U}_{[0,1]}$ die y-Koordinate des Punktes bestimme. Die entstehenden Dreiecke sind für beide Lösungen kongruent. Daher ist

$$\mathbb{E}(\mathbf{F}) = 2 \int_0^1 u \, du = 1.$$

(b) Hier ist $C = \left(U_2, \sqrt{1 - U_2^2}\right)$ wobei $U_2 \sim \mathcal{U}_{[-1,1]}$

$$\mathbb{E}(\mathbf{F}) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \sqrt{1 - u^2} \, du = \frac{\pi}{4}.$$

(c) Der Winkel α ist nun zufällig und kann als $U_3 \sim \mathcal{U}_{[0,\pi]}$ angenommen werden. Dann gilt $C = (\cos(U_3), \sin(U_3))$ und

$$\mathbb{E}(\mathbf{F}) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} sin(u)\, du = \frac{2}{\pi}.$$

(d) Es gilt:

$$\mathbb{P}(\triangle_D) = \frac{\mathbb{E}(F)}{\pi/2} = \begin{cases} \frac{2}{\pi} \approx 0{,}64 & \text{nach (a)} \\ 1/2 & \text{nach (b)} \\ \frac{4}{\pi^2} \approx 0{,}41 & \text{nach (c).} \end{cases}$$

Bemerkung: Die Übung ist eine vereinfachte Version des *Vier-Punkte-Problems von Sylvester*. Dabei geht es darum, ob die konvexe Hülle vier zufällig auf der Ebene gewählter Punkte ein Viereck oder ein Dreieck ist. Man kann dieses Problem *lokalisieren*, indem man auf einem Kreis mit gegebenem Radius drei zufällige Punkte wählt und dann danach fragt, ob ein vierter Punkt, zufällig auf der Kreisscheibe gewählt, innerhalb oder außerhalb des zufälligen Dreiecks liegt. Die Wahrscheinlichkeit lässt sich mittels Polarkoordinaten elementar berechnen.

Wie beim Paradox von Bertrand, siehe Aufgabe 6.12, entstehen auch hier andere Ergebnisse, wenn man ändert, auf welche Weise man *zufällig* das Dreieck konstruiert.

Aufgabe 6.12: Das Paradox von Bertrand ○●●

Ein klassisches Problem der Wahrscheinlichkeitstheorie ist das folgende geometrische Problem: Es werde zufällig eine Sehne in einen Kreis mit Radius Eins eingezogen, siehe Abbildung 6.5. Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Sehne länger als die Kante des eingeschriebenen, gleichseitigen Dreiecks ist?

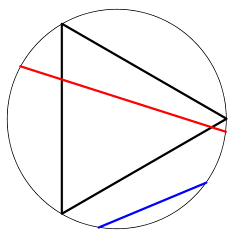


Abbildung 6.5: Bertrand-Paradox: Beispiele für eine Sehne länger als die Dreieckkante (rot) und eine Sehne kürzer (blau).

Berechnen Sie jeweils die gesuchte Wahrscheinlichkeit:

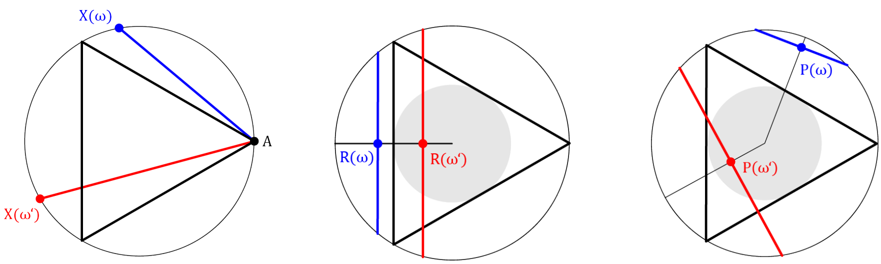
(a) **Methode I:** Wählen Sie zwei Punkte A und X auf dem Kreisumfang und verbinden Sie diese.

(b) **Methode II:** Wählen Sie einen Winkel. Die Linie vom Kreismittelpunkt mit dem Winkel erzeugt einen Radius der Länge 1. Wählen Sie auf diesem Radius einen zufälligen Punkt R und konstruieren Sie die Senkrechte durch den Punkt.

(c) **Methode III:** Wählen Sie einen zufälligen Punkt P im Inneren des Kreises und konstruieren Sie die Orthogonale bezüglich des Radius an P.

Bewerten Sie die Ergebnisse!

Lösung: Nach Annahme ist der Radius des Kreises Eins. Der Umfang ist damit 2π und die Kantenlänge des einbeschriebenen gleichseitigen Dreiecks ist $\sqrt{3}$. Das Zentrum des Kreises sei der Ursprung. Die zufällige Sehnenlänge L ist eine Zufallsgröße mit $0 \leq L \leq 2$. Die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses $\{L \geq \sqrt{3}\}$ hängt stark von der Modellierung der Sehnenkonstruktion ab.



(a) Methode I (b) Methode II (c) Methode III

Abbildung 6.6: Drei Methoden, Sehnen zufällig zu zeichnen.

(a) **Methode I:** Punkt A kann ohne Beschränkung der Allgemeinheit auf der Spitze des Dreiecks fest gewählt werden (A in Abbildung 6.6a). Der zweite Punkt X ist eine auf dem Kreis gleichverteilte Zufallsvariable mit $X \sim \mathcal{U}_{[0,2\pi]}$. Dann ist

$$\mathbb{P}(L \geq \sqrt{3}) = \mathbb{P}(X \in [2\pi/3, 4\pi/3]) = \frac{1}{3}.$$

(b) **Methode II:** Nach Wahl eines zufälligen Winkels kann die Figur stets so gedreht werden, dass der Punkt zum Beispiel auf der Strecke von $(-1, 0)$ nach $(0, 0)$ liegt. Das ergibt die Situation in Abbildung 6.6b. Dann genügt die Wahl eines zufälligen Radius $R \sim \mathcal{U}_{[0,1]}$.

Die Senkrechte zum Radius durch den Punkt $P = (0, -R)$ definiert eindeutig eine Sehne. Für $R \leq 1/2$ ist die Sehne länger als $\sqrt{3}$ und für $1/2 > R \geq 1$ ist sie kürzer. Daher gilt

$$\mathbb{P}(L \geq \sqrt{3}) = \mathbb{P}(R \in [0, 1/2]) = \frac{1}{2}.$$

(c) **Methode III:** Sei nun der Punkt $P \sim \mathcal{U}_{K_1}$ ein zufälliger Punkt auf der Kreissscheibe K_1 mit Radius Eins (siehe Abbildung 6.6c). Dabei sei eine Kreisscheibe mit Radius $r > 0$ zentriert um $(0, 0)$ beschrieben durch

$$K_r := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \leq r\}.$$

Die Dichte von P ist

$$f_P(x, y) = \frac{1}{\pi} \cdot \mathbb{1}_{K_1}(x, y).$$

Die Punkte innerhalb des Kreises mit Radius $1/2$ erzeugen dabei nach Methode III die Sehnen mit Länge größer als $\sqrt{3}$. Dann ist mittels Polarkoordinaten:

$$\mathbb{P}(L \geq \sqrt{3}) = \int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{1}_{K_{1/2}}(x, y) f_P(x, y) dx dy = 2 \cdot \int_0^{\frac{1}{2}} r\, dr = \frac{1}{4}.$$

Bemerkung: Mit allen drei Methoden lässt sich die gesuchte Wahrscheinlichkeit direkt berechnen, dennoch ergeben sich unterschiedliche Ergebnisse. Der Grund für dieses paradoxe Ergebnis ist die unzureichend präzisierte Konstruktionsvorschrift für eine „zufällige" Sehne. In [Szé90], S. 52 ff, finden sich noch weitere Methoden zur Sehnenkonstruktion, die wiederum andere Wahrscheinlichkeiten ergeben.

In [Jay73] wird argumentiert, Methode II wäre die natürlichste, da die Methode II als einzige der drei Methoden invariant unter Drehung und Verschiebung ist.

Aufgabe 6.13: Das Fahrrad-Problem ●●●

Ein Fahrradfahrer fährt über einen Streckenabschnitt, auf dem Reißnägel auf der Straße liegen. Er möchte noch während der Fahrt wissen, ob ein Reißnagel im Reifen steckt. Wegen des Straßenverkehrs kann er nur ab und zu kurz auf den Reifen schauen und beobachtet dabei jeweils nur einen Abschnitt des Rades. Der dadurch beobachtete Anteil des Rades sei $x \in (0, 1)$.

(a) Was ist die Wahrscheinlichkeit, nach n Blicken das gesamte Rad überprüft zu haben, wenn jeweils ein Anteil von x beobachtet wurde?

(b) Sei $x = 20\,\%$. Für welches $n \geq 1$ wird die Wahrscheinlichkeit einer vollständigen Beobachtung des Rades mindestens 0,5?

Lösung:

(a) Der Anteil x kann als der Prozentwert interpretiert werden, der vom Rad beobachtet wird. Daher ist der Umfang des Rades nicht wichtig und man setzt $u = 1$ für den Umfang. Sei weiter $(U_i)_{0 \leq i \leq n}$ eine Familie von $n + 1$ unabhängigen und identisch verteilten Zufallsvariablen mit $U_i \sim \mathcal{U}_{[0,1]}$. Wie nehmen dabei an, dass bei jedem Blick auf das Rad ein Intervall $[U_i, U_i + x)$ beobachtet wird. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann nun stets U_0 dem Intervall $[0, x)$ zugeordnet werden, da das Rad stets entsprechend gedreht werden kann. Für Beobachtungen $U_i(\omega) \geq 1 - x$ schneiden wir die Beobachtung nach 1 ab, da der Übertrag im Intervall $[0, x)$ enthalten ist.

Da U_0 in unserem Modell den Nullpunkt markiert, genügt es die Ordnungsstatistik von $U_1, U_2, \ldots, U_n$ zu betrachten, siehe dazu auch Aufgabe 3.36. Sei die Ordnungsstatistik bezeichnet mit $U_{(i)}$ für die i-größte Ausprägung. Im Folgenden werden aber keine konkreten Eigenschaften dieser Ordnungsstatistik benötigt.

Sei nun R das Ereignis, bei dem der gesamte Umfang des Rades begutachtet werden konnte und $L_r := \{U_{(r+1)} - U_{(r)} > x\}$ für $r = 1, \ldots, n - 1$ das Ereignis, wenn eine Lücke zwischen r und $r + 1$ entsteht. Analog sei $L_0 := \{U_{(1)} > x\}$ sowie $L_n := \{U_{(n)} < 1 - x\}$. Dann ist

$$R^c := \bigcup_{i=0}^{n} L_i,$$

das Ereignis, bei dem wenigstens ein Teil des Rades unbeobachtet bleibt. Da $U_{(1)}$ das Minimum und $U_{(n)}$ das Maximum ist, gilt $\mathbb{P}(L_0) = \mathbb{P}(L_n) = (1 - x)^n$.

Die Wahrscheinlichkeit einer einzelnen Lücke hängt nicht von ihrer Position ab. Man sieht dies ein, indem man die Intervalle $[U_{(i)}, U_{(i)} + x)$ für $i = r, \ldots, n$ um $x \cdot 360°$ dreht. Dadurch wird die Lücke bei r geschlossen, falls die Lücke kleiner als x war; sonst wiederholt man die Operation bis die Lücke geschlossen ist. Das Schließen der Lücke verändert die Reihenfolge der Zufallsvariablen nicht und die Ordnungsstatistik bleibt erhalten.

Gleichzeitig entsteht eine Lücke zwischen dem Maximum $U_{(n)}$ und dem Ende des Kreisumfangs bei 1. Man kann diese Transformation eindeutig umkehren, indem man die entsprechenden Kreisbögen um $-x \cdot 360°$ dreht. Wegen der Eindeutigkeit der Transformation sind die Ereignisse gleichwahrscheinlich, d.h. $\mathbb{P}(L_r) = \mathbb{P}(U_{(n)} > x) = (1 - x)^n$.

Für den allgemeinen Fall betrachten wir $1 \leq k \leq \lfloor 1/x \rfloor$ Lücken, die geordnet seien nach Reihenfolge ihres Auftretens. Wie für eine einzelne Lücke kann man nun die k-te Lücke durch eine Drehung aller $U_{(i)}$ um den Wert x entgegen des Uhrzeigersinns schließen (gegebenenfalls mehrmals). Dann kann die $(k - 1)$-te Lücke durch eine weitere Drehung um x geschlossen werden und so weiter.

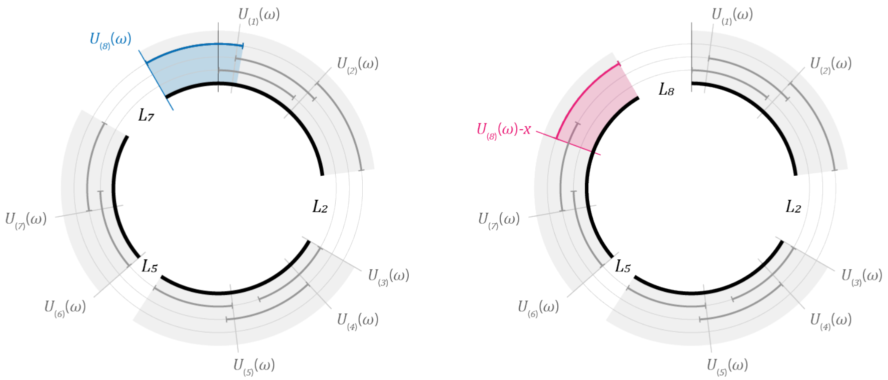


Abbildung 6.7: Überdeckung (schwarz, fett) mit neun Intervallen und drei Lücken. Verschieben von $U_{(8)}$ schließt L_7, stattdessen entsteht eine Lücke L_8 (blau vor, rot nach der Verschiebung).

Nach dem Schließen aller Lücken ist $U_{(n)}$ mindestens kx vom Endpunkt entfernt. Die letzte Lücke kann trotzdem kleiner als x sein.

Seien Lücken an den Positionen $r_1 < r_2 < \ldots < r_k$ gegeben. Dann folgt

$$\mathbb{P}\Big(\bigcap_{i=1}^{k} L_{r_i}\Big) = \mathbb{P}(U_{(n)} < kx) = (1-kx)^n.$$

Die Wahrscheinlichkeit der Lücken hängt also wiederum auch für mehrere Lücken nicht von deren Position ab. Die Ereignisse $(L_i)_i$ sind daher vertauschbar.

Nun ist nach Siebformel von Sylvester-Poincaré, siehe Aufgabe 6.1,

$$\mathbb{P}(R) = 1 - \sum_{k=1}^{n+1}(-1)^{k-1}\binom{n+1}{k}\mathbb{P}\Big(\bigcap_{i=1}^{k} L_i\Big) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{1}{x}\rfloor}(-1)^k\binom{n+1}{k}(1-kx)^n.$$

Man beachte, dass wegen $kx \leq 1$ höchstens $\lfloor 1/x\rfloor$ Lücken vorkommen können. Die erhaltene Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(R)$ ist der Dichte der Irwin-Hall-Verteilung sehr ähnlich, die in Aufgabe 3.24 berechnet wurde.

(b) Für $n = 15$ ergibt sich $\mathbb{P}(R) \approx 0{,}49$ und für $n = 16$ gilt $\mathbb{P}(R) \approx 0{,}56$. Zwar könnte man mit fünf Intervallen das Rad vollständig überdecken, dennoch braucht man ungefähr dreimal so viele Beobachtungen, um das Rad mit 50 % Wahrscheinlichkeit einmal vollständig zu sehen, siehe Abbildung 6.8.

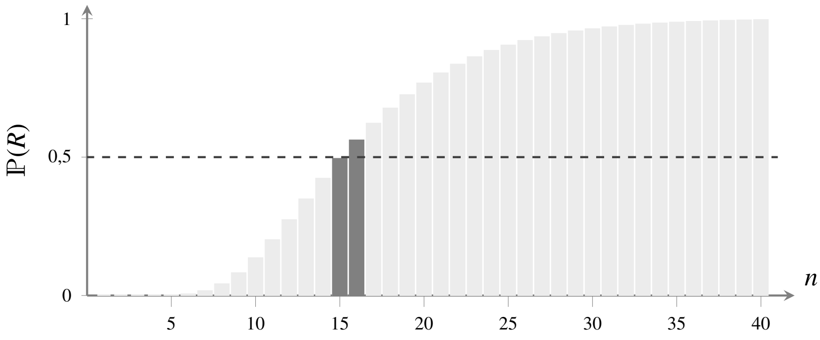


Abbildung 6.8: Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(R)$ für $x = 0{,}2$ in Abhängigkeit von n.

Bemerkung: In der hier vorgestellten Version mit gleichlangen und endlich vielen Intervallen wurde das Problem bereits im 19. Jahrhundert gelöst, siehe [Whi86].

Die nach [Cou19], Abschnitt 1.5.1, als Fahrradproblem bezeichnete Aufgabe ist eine einfachere Version des *Dvoretzky-Problems*. Dabei geht es um die Bedingungen, unter denen mit unendlich vielen Intervallen zufälliger Länge, die zufällig auf dem Kreis verteilt werden, dieser fast sicher zu überdecken wäre. Borel hatte schon erkannt, dass zwar jeder Punkt des Kreises fast sicher überdeckt wird. Dennoch folgt daraus nicht, dass fast sicher auch der Kreis vollständig überdeckt wird, siehe [Dvo56]. Notwendige und hinreichende Bedingungen für die fast sichere Überdeckung wurden 1972 von Shepp gefunden, siehe [She72].

Kapitel 7

Grenzwertsätze mit Maßtheorie

Sylvie Rœlly

7.1 Ungleichungen und Konvergenzsätze der Maßtheorie

Aufgabe 7.1: Über die Borel-σ-Algebra ○●●

Sei $\mathcal{K}$ die folgende Menge von Teilmengen in $\mathbb{R}$:

$$\mathcal{K} := \{[a, b) \ : \ a, b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}, \ a \leq b\}.$$

(a) Ist $\mathcal{K}$ eine (Mengen)-Algebra? eine σ-Algebra?

(b) Ist $\mathcal{K}$ eine monotone Klasse?

Betrachten Sie nun $\mathcal{B} := \sigma(\mathcal{K})$, die von $\mathcal{K}$ erzeugte σ-Algebra. Beweisen Sie, dass

(c) $\{a\}$, $a \in \mathbb{R}$, in $\mathcal{B}$ ist

(d) alle abzählbare Teilmengen von $\mathbb{R}$ in $\mathcal{B}$ sind

(e) alle Intervalle (a, b) in $\mathcal{B}$ sind

(f) alle offene Mengen in $\mathcal{B}$ sind

(g) alle geschlossenen Mengen in $\mathcal{B}$ sind

(h) $\mathcal{B}$ die Borel-σ-Algebra auf $\mathbb{R}$ ist.

Lösung:

(a) Die Klasse $\mathcal{K}$ ist keine Algebra, da sie nicht komplementstabil ist:

$$[a,b)^c =]-\infty, a) \cup [b, \infty[\notin \mathcal{K}.$$

Daher ist $\mathcal{K}$ auch keine σ-Algebra.

(b) $\mathcal{K}$ ist keine monotone Klasse, denn $\mathcal{K} \ni A_n := [0, 1 + \frac{1}{n})$ für alle $n \in \mathbb{N}$, aber $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = [0,1] \notin \mathcal{K}$.

(c) $\{a\} = \bigcap_{n\geq 1}[a, a + \frac{1}{n}) \in \sigma(\mathcal{K}) = \mathcal{B}$

(d) Sei D abzählbar. Dann $D = \bigsqcup_{a\in D}\{a\} \in \sigma(\mathcal{K})$.

(e) $(a,b) = [a,b) \cap \{a\}^c \in \sigma(\mathcal{K})$ für alle $a < b$.

(f) Jede offene Menge $O \in \mathbb{R}$ ist eine abzählbare Vereinigung von offenen Intervallen. Nach (e) gilt dann: $O \in \sigma(\mathcal{K})$.

(g) Sei B eine abgeschlossene Teilmenge von $\mathbb{R}$. Daraus folgt, dass $B^c \in \sigma(\mathcal{K})$, da sie offen ist. Insbesondere ist $B = (B^c)^c \in \sigma(\mathcal{K})$.

(h) Sei $\mathcal{B}_1$ die von den offenen Mengen in $\mathbb{R}$ erzeugte σ-Algebra. Dank (g) gilt $\mathcal{B}_1 \subset \sigma(\mathcal{K})$. Andererseits hat jedes Element E in $\mathcal{K}$ folgende Form:

$$E = [a,b[= \underbrace{]a,b[}_{\text{offene Menge}} \cup \underbrace{\{a\}}_{\{a\}^c \text{ offen}}.$$

Daraus folgt $\sigma(\mathcal{K}) \subset \mathcal{B}_1$ und damit ist die Behauptung bewiesen.

Aufgabe 7.2: Limes und Integral vertauschbar ○○●

Berechnen Sie

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{\infty} \frac{\ln(x+n)}{n}\, e^{-x} \cos(x)\, dx.$$

Lösung: Es gilt

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \ \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(x+n)}{n}\, e^{-x} \cos(x) = 0.$$

Darüber hinaus gilt für $x \in \mathbb{R}^+$ gleichmäßig in n

$$\left| \frac{\ln(x+n)}{n}\, e^{-x} \cos(x) \right| \leq \frac{x+n}{n}\, e^{-x} \leq (x+1)\, e^{-x}.$$

Da die Abbildung $x \mapsto (x+1)\, e^{-x}$ auf $\mathbb{R}^+$ integrierbar ist, kann man den Satz der dominierten Konvergenz anwenden. Daher gilt

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{\infty} \frac{\ln(x+n)}{n}\, e^{-x} \cos(x)\, dx = \int_0^{\infty} \Big(\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(x+n)}{n}\, e^{-x} \cos(x) \Big)\, dx = 0.$$

Aufgabe 7.3: Kommutieren Limes und Integral immer? ○●●

Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von nichtnegativen Funktionen, die wie folgt definiert sind:

$$f_n(x) = n^2 x\, \mathbb{1}_{[0,\frac{1}{n}]}(x) + n^2\left(\frac{2}{n} - x\right)\mathbb{1}_{(\frac{1}{n},\frac{2}{n}]}(x),\ \ x \in \mathbb{R}.$$

Vergleichen Sie folgende Größen:

$$\liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(x)\,dx, \quad \limsup_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(x)\,dx, \quad \int_{\mathbb{R}} \liminf_{n\to\infty} f_n(x)\,dx, \quad \int_{\mathbb{R}} \limsup_{n\to\infty} f_n(x)\,dx.$$

Was bemerken Sie?

Lösung: Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig.

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} f_n(x)\,dx &= \int_0^{\frac{1}{n}} n^2\, x\,dx + \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{2}{n}} n^2\left(\frac{2}{n} - x\right)dx \\ &= n^2\, \frac{x^2}{2}\bigg|_0^{\frac{1}{n}} + 2n\,x\bigg|_{\frac{1}{n}}^{\frac{2}{n}} - n^2\,\frac{x^2}{2}\bigg|_{\frac{1}{n}}^{\frac{2}{n}} = \frac{1}{2} + 4 - 2 - \frac{4}{2} + \frac{1}{2} = 1.\end{aligned}$$

Daher gilt in diesem Fall

$$\liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(x)\,dx = \limsup_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(x)\,dx = 1.$$

Andererseits ist der Träger von f_n gleich dem Intervall $[0, \frac{2}{n}]$, und $f_n(0) = 0$. Daher gilt für jedes $x \in \mathbb{R}$

$$\liminf_{n\to\infty} f_n(x) = \limsup_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0.$$

Es ergibt sich dann

$$\int_{\mathbb{R}} \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx = 0.$$

Somit haben wir gezeigt, dass in diesem Fall Integration und Limes nicht kommutieren können:

$$\int_{\mathbb{R}} \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx = 0 < 1 = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(x)\,dx.$$

Da die Folge $(f_n)_n$ nicht negativ und messbar ist, kann man das Lemma von Fatou anwenden. Es folgt:

$$\int_{\mathbb{R}} \liminf_{n} f_n(x)\,dx = 0 \le \liminf_{n} \int_{\mathbb{R}} f_n(x)\,dx = 1.$$

Aufgabe 7.4: Integralrechnung mit Hilfe des Satzes von Fubini ●●●

Sei $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge, die durch

$$u_n = \int_{(n-1)\pi}^{n\pi} \frac{\sin(x)}{x}\,dx$$

definiert sei.

(a) Beweisen Sie, dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ konvergiert.

(b) Schließen Sie daraus, dass das Integral $I := \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$ endlich ist.

(c) Definieren Sie $I_t := \int_0^t \frac{\sin(x)}{x}\,dx,\ t > 0$. Zeigen Sie, dass I_t endlich ist und dass

$$I_t = \int_0^t \int_0^{\infty} e^{-ux}\sin(x)\,du\,dx.$$

(d) Definieren Sie andererseits die Abbildung $J_t(u) := \int_0^t e^{-ux}\sin(x)\,dx$, $u > 0$. Zeigen Sie mit Hilfe einer zweimaligen partiellen Integration, dass

$$J_t(u) = \frac{1}{1+u^2}\Big(1 - e^{-ut}(u\sin(t)\ + \cos(t))\Big).$$

(e) Benutzen Sie den Satz von Fubini, um zu beweisen, dass

$$I_t = \int_0^{\infty} J_t(u)\,du.$$

(f) Schließen Sie daraus auf den Wert von I.

Lösung:

(a) Da die definierte Reihe alternierend ist, genügt es zu zeigen, dass sie eine Nullfolge ist. Es gilt

$$|u_n| = \left|\int_{(n-1)\pi}^{n\pi} \frac{\sin(x)}{x}\,dx\right| \leq \int_{(n-1)\pi}^{n\pi} \frac{1}{x}\,dx = \ln\left(\frac{n\pi}{(n-1)\pi}\right) \xrightarrow{n\to\infty} \ln(1) = 0.$$

(b) Aus der Konvergenz der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ erhält man die Konvergenz des Integrals I, da

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin(x)}{x}\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{(n-1)\pi}^{n\pi} \frac{\sin(x)}{x}\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} u_n < +\infty.$$

(c) Das Integral I_t ist endlich, da

$$\int_0^t \int_0^\infty e^{-ux} |\sin(x)|\, du\, dx = \int_0^t \frac{|\sin(x)|}{x}\, dx \le t,$$

weil die Abbildung $x \mapsto \left|\frac{\sin(x)}{x}\right|$, $x \in \mathbb{R}$, durch 1 beschränkt ist. Die Darstellung von I_t als Doppelintegral folgt aus $1/x = \int_0^\infty e^{-ux}\, du$.

(d) Mittels zweimaliger partieller Integration gilt

$$\begin{aligned}
J_t(u) &= \int_0^t e^{-ux} \sin(x)\, dx = -\frac{e^{-ux}}{u} \sin(x)\bigg|_0^t + \int_0^\infty \frac{e^{-ux}}{u} \cos(x)\, dx \\
&= -\frac{e^{-ut}\sin(t)}{u} - \frac{e^{-ux}}{u^2}\cos(x)\bigg|_0^t - \int_0^t \frac{e^{-ux}}{u^2} \sin(x)\, dx \\
&= -\frac{e^{-ut}\sin(t)}{u} - \frac{e^{-ut}\cos(t)}{u^2} + \frac{1}{u^2} - \frac{1}{u^2} J_t(u) \\
\Rightarrow J_t(u) &= \frac{1}{1+u^2}\Big(1 - e^{-ut}(u\sin(t) + \cos(t))\Big).
\end{aligned}$$

(e) Nach dem Satz von Fubini gilt nun

$$I_t = \int_0^t \int_0^\infty e^{-ux} \sin(x)\, dx du = \int_0^\infty J_t(u)\, du$$

und damit

$$\begin{aligned}
I_t &= \int_0^\infty \frac{du}{u^2+1} - \int_0^\infty \frac{e^{-ut}}{u^2+1}(u\sin(t) + \cos(t))\, du \\
&= \frac{\pi}{2} - \int_0^\infty \frac{e^{-ut}}{u^2+1}(u\sin(t) + \cos(t))\, du.
\end{aligned}$$

Da die Abbildung $u \mapsto \frac{u+1}{u^2+1}$, $u > 0$ durch 2 beschränkt ist, gilt weiter

$$\left|\int_0^\infty \frac{e^{-ut}}{u^2+1}(u\sin(t) + \cos(t))\, du\right| \le \int_0^\infty e^{-ut} \frac{u+1}{u^2+1}\, du \le 2\int_0^\infty e^{-ut} du = \frac{2}{t}.$$

(f) Daher erhält man $I = \lim_{t\to\infty} I_t = \pi/2$.

Aufgabe 7.5: Ist die Integrationsreihenfolge wichtig? ○○●

Betrachten Sie das Lebesgue-Maß auf dem Raum $(0,1)\times(1,+\infty)$. Die zugrunde liegende σ-Algebra ist die Borel-σ-Algebra. Sei f die auf $(0,1)\times(1,+\infty)$ definierte messbare Funktion

$$f(x,y) := e^{-xy} - 2e^{-2xy}.$$

(a) Vergleichen Sie die beiden Integrale

$$I_1 := \int_1^\infty \Big(\int_0^1 f(x,y)\,dx \Big) dy \quad \text{und} \quad I_2 := \int_0^1 \Big(\int_1^\infty f(x,y)\,dy \Big) dx.$$

(b) Kommentieren Sie das Ergebnis.

Lösung:

(a) Es gilt

$$\begin{aligned} I_1 &= -\int_1^\infty \frac{1}{y}\left(e^{-y} - e^{-2y}\right) dy < 0, \\ I_2 &= \int_0^1 \frac{1}{x}\left(e^{-x} - e^{-2x}\right) dx > 0. \end{aligned}$$

(b) Offensichtlich ist $I_1 \neq I_2$, was zeigt, dass die Reihenfolge der Integration eine Rolle spielt. In der Tat, eine Voraussetzung des Satzes von Fubini ist hier nicht erfüllt, nämlich f ist nicht integrierbar unter dem Lebesgue-Maß auf $(0,1)\times(1,+\infty)$.
Sei $y \in (1,+\infty)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \int_0^1 |f(x,y)|\,dx &= \int_0^1 |e^{-xy} - 2e^{-2xy}|\,dx \\ &= \int_0^{\ln(2)/y} (2e^{-2xy} - e^{-xy})\,dx + \int_{\ln(2)/y}^1 (e^{-xy} - 2e^{-2xy})\,dx \\ &= \left(-\frac{e^{-2xy}}{y} + \frac{e^{-xy}}{y}\right)\Bigg|_0^{\ln(2)/y} + \left(-\frac{e^{-xy}}{y} + \frac{e^{-2xy}}{y}\right)\Bigg|_{\ln(2)/y}^1 = \frac{1 - 2e^{-y} + 2e^{-2y}}{2y} \\ &\geq (1 - 2e^{-1})\frac{1}{2y} + \frac{e^{-2y}}{y} =: g_1(y) + g_2(y). \end{aligned}$$

Beide Funktionen g_1 und g_2 sind positiv, und die erste ist auf $(1,\infty)$ nicht integrierbar. Daher ist f nicht integrierbar.

Aufgabe 7.6: Ungleichungen rund um den Erwartungswert ○●●

Sei X eine integrierbare Zufallsvariable.

(a) Zeigen Sie, dass $\sqrt{1+\mathbb{E}(X)^2} \leq \mathbb{E}\Big(\sqrt{1+X^2}\Big)$.

(b) Nehmen Sie an, dass $0 < \mathbb{E}(X^2) < +\infty$. Beweisen Sie

$$\mathbb{P}(X \neq 0) \geq \frac{\mathbb{E}(X)^2}{\mathbb{E}(X^2)}.$$

Lösung:

(a) Zunächst verifiziert man, dass $\sqrt{1+X^2}$ integrierbar ist: Es ist eine direkte Konsequenz der Ungleichung $\sqrt{1+x^2} \leq 1+|x|,\ x \in \mathbb{R}$.
Die Konvexität von $\varphi(x) := \sqrt{1+x^2}$ folgt direkt aus der strengen Positivität der zweiten Ableitung:

$$\varphi'(x) = \frac{x}{(1+x^2)^{1/2}} \quad \text{und} \quad \varphi''(x) = \frac{1}{(1+x^2)^{3/2}} > 0.$$

Das Ergebnis folgt dann aus der Jensen-Ungleichung: $\varphi(\mathbb{E}(X)) \leq \mathbb{E}\big(\varphi(X)\big)$.

(b) Mittels Cauchy-Schwarz-Ungleichung ergibt sich:

$$\mathbb{E}(X)^2 = \mathbb{E}(X\,\mathbb{1}_{\{X\neq 0\}})^2 \leq \mathbb{E}(X^2)\,\mathbb{E}(\mathbb{1}_{\{X\neq 0\}}) = \mathbb{E}(X^2)\,\mathbb{P}(X \neq 0).$$

7.2 Konvergenz in Verteilung und charakteristische Funktion

Aufgabe 7.7: Konvergenz in Verteilung einer Folgensumme ○●●

Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reellwertiger Zufallsvariablen, die in Verteilung konvergiert: $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{(d)} X_\infty$. Sei $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reellwertiger Zufallsvariablen, die in Verteilung gegen eine Konstante konvergiert: $Y_n \xrightarrow[n\to\infty]{(d)} Y_\infty \equiv c$.

(a) Beweisen Sie, dass die Summe der Folgen $(X_n+Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in Verteilung gegen die Summe der Limites konvergiert: $X_n + Y_n \xrightarrow[n\to\infty]{(d)} X_\infty + c$.

Hinweis: *Betrachten Sie die Konvergenz der entsprechenden Verteilungsfunktionen.*

(b) Würde dieses Ergebnis noch gelten, wenn Y_∞ keine Konstante mehr wäre?

Lösung:

(a) Man betrachtet die Konvergenz der Folge der Verteilungsfunktionen $(F_{X_n+Y_n})_n$. Sei t ein Punkt in $\mathbb{R}$ so ausgewählt, dass $t-c$ eine Stetigkeitsstelle der Verteilungsfunktion F_{X_∞} sei. Wählen Sie $\varepsilon > 0$ so, dass auch $t-c+\varepsilon$ eine Stetigkeitsstelle von F_{X_∞} sei. Da

$$\begin{aligned}
&\{X_n+Y_n \le t\} \\
&\qquad = \{X_n + c + Y_n - c \le t, |Y_n - c| \le \varepsilon\} \cup \{X_n + c + Y_n - c \le t, |Y_n - c| > \varepsilon\} \\
&\qquad \subset \{X_n + c \le t + \varepsilon\} \cup \{|Y_n - c| > \varepsilon\}
\end{aligned}$$

bekommt man

$$F_{X_n+Y_n}(t) := \mathbb{P}(X_n + Y_n \le t) \le \mathbb{P}(X_n + c \le t + \varepsilon) + \mathbb{P}(|Y_n - c| > \varepsilon).$$

Die Konvergenz in Verteilung der Folge $(Y_n)_n$ gegen die Konstante c impliziert ihre (stärkere) Konvergenz in Wahrscheinlichkeit gegen c (siehe zum Beispiel [JP04],Theorem 18.3). Daher konvergiert der letzte Term gegen 0 wenn n gegen unendlich geht. Das heißt,

$$\limsup_n F_{X_n+Y_n}(t) \le F_{X_\infty}(t - c + \varepsilon).$$

Da ε beliebig klein sein darf, gilt dann

$$\limsup_n F_{X_n+Y_n}(t) \le F_{X_\infty}(t - c).$$

Der Beweis für den $\liminf_n$ ist ähnlich.

(b) Die Voraussetzung, dass der Limes von $(Y_n)_n$ deterministisch ist, spielt eine zentrale Rolle. Hierzu ein Gegenbeispiel. Betrachten Sie X, eine standardnormalverteilte Zufallsvariable. Seien $X_n :\equiv X$ und $Y_n :\equiv -X$, $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt offensichtlich für $n \in \mathbb{N}$, $X_n \sim Y_n \sim X$, dank der Symmetrie der Standardnormalverteilung.

Aber $0 \equiv X_n + Y_n \underset{n\to\infty}{\overset{(d)}{\not\longrightarrow}} X + X = 2X$.

Bemerkung: Dieses Ergebnis ist bekannt in der Literatur als *Lemma von Slutsky*. Eine nützliche Anwendung dieses Ergebnisses ist folgende Aussage: Wenn $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{(d)} X$ und $Y_n - X_n \xrightarrow[n\to\infty]{(d)} 0$, dann gilt $Y_n \xrightarrow[n\to\infty]{(d)} X$.

Aufgabe 7.8: Wichtige Eigenschaften der charakteristischen Funktion ○●●

Beweisen Sie folgende Eigenschaften der charakteristischen Funktion

$$\varphi_X(t) := \mathbb{E}(e^{itX}),\ t \in \mathbb{R}.$$

(a) *Affine Transformation* der Zufallsvariable: Seien $a, b \in \mathbb{R}$. Es gilt

$$\varphi_{aX+b}(t) = e^{itb}\varphi_X(at),\ \ t \in \mathbb{R}.$$

(b) Wenn die Zufallsvariablen X und Y unabhängig sind, dann gilt:

$$\varphi_{X+Y} \equiv \varphi_X \cdot \varphi_Y.$$

(c) Sie ist *normiert* und durch 1 *beschränkt*: $\varphi_X(0) = 1$ und $|\,\varphi_X(t)\,| \leq 1, t \in \mathbb{R}$.

(d) Sie ist *hermitesch*: $\varphi_X(-t) = \overline{\varphi_X(t)}, t \in \mathbb{R}$.

(e) Sie ist eine gleichmäßig stetige Funktion.

(f) Sie ist *positiv semidefinit*:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall\, t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{R}, \forall\, z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C} : \quad \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \varphi_X(t_j - t_k) z_j \bar{z}_k \geq 0.$$

(g) Sie bestimmt eindeutig die Momente, falls existent: Wenn $\mathbb{E}(|X|^k) < +\infty$ für $k \in \mathbb{N}$ dann gilt $\mathbb{E}(X^k) = \varphi_X^{(k)}(0)/i^k$. Insbesondere wenn $X \in L^2$ gilt

$$\mathbb{E}(X) = -i\,\varphi_X'(0), \quad \mathbb{E}(X^2) = -\,\varphi_X''(0).$$

(h) Wenn X (bzw. X^2) integrierbar ist, dann gilt folgende Entwicklung für t klein:

$$\varphi_X(t) = 1 + it\mathbb{E}(X) + o(t), \quad \text{bzw.} \quad \varphi_X(t) = 1 + i\,t\,\mathbb{E}(X) - \frac{t^2}{2}\,\mathbb{E}(X^2) + o(t^2).$$

Lösung:

(a) Die Aussage folgt aus der Unabhängigkeit der Zufallsvariablen e^{itX} und e^{itY}.

(b) Es gilt

$$\varphi_{aX+b}(t) = \mathbb{E}(e^{it(b+aX)}) = e^{ibt}\varphi_X(at).$$

(c) Folgt aus der Definition:

$$\varphi_X(0) = \mathbb{E}(1) = 1, \quad |\varphi_X(t)| \leq \mathbb{E}(|e^{itX}|) = \mathbb{E}(1) = 1.$$

(d) Es gilt

$$\varphi_X(-t) = \mathbb{E}(\cos(tX) - i\sin(tX)) = \overline{\mathbb{E}(\cos(tX) + i\sin(tX))} = \overline{\varphi_X(t)}.$$

(e) Es gilt

$$|\,\varphi_X(t) - \varphi_X(s)\,| \le \mathbb{E}(|e^{itX} - e^{isX}|) = \mathbb{E}(|e^{i(t-s)X} - 1|).$$

Da $|e^{i(t-s)X} - 1| \le 2$ gleichmäßig in s, kann man den Satz von der dominierten Konvergenz anwenden und daraus schließen, dass

$$\lim_{s\to t} |\varphi_X(t) - \varphi_X(s)| \le \lim_{s\to t} \mathbb{E}(|e^{i(t-s)X} - 1|) = \mathbb{E}(\lim_{s\to t} |e^{i(t-s)X} - 1|) = \mathbb{E}(0) = 0.$$

(f) Man hat

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \varphi_X(t_j - t_k)\, z_j\, \bar{z}_k = \mathbb{E}\Big(\sum_{j,k=1}^{n} z_j\, \bar{z}_k\, e^{i\,(t_j - t_k)X}\Big) = \mathbb{E}\Big(\Big|\sum_{j=1}^{n} z_j\, e^{it_jX}\Big|^2\Big) \ge 0.$$

(g) Nach Definition ist $\varphi_X(t) = \mathbb{E}(e^{itX})$. Wenn $\mathbb{E}(|X|^k)$ endlich ist, ist die charakteristische Funktion k-mal differenzierbar. Dann kann man Integration und Differentiation vertauschen. Also gilt

$$\varphi_X^{(k)}(t) = \mathbb{E}((itX)^k e^{itX}).$$

(h) Für beliebige $y \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt die folgende obere Abschätzung:

$$\Big|e^{iy} - \sum_{m=0}^{n} \frac{(iy)^m}{m!}\Big| \le 2\frac{|y|^n}{n!},$$

siehe zum Beispiel [Dur19], Lemma 3.3.19.

Ersetzt man y durch $t\,X(\omega)$ und nimmt den Erwartungswert davon, so erhält man für $n = 1$

$$|\,\varphi_X(t) - 1 - it\,\mathbb{E}(X)\,| \le 2t\,\mathbb{E}(|X|) < \infty.$$

Die erste Aussage folgt direkt daraus.

Die zweite Aussage folgt aus der obigen Abschätzung für $n = 2$.

Aufgabe 7.9: Bestimmung wichtiger charakteristischer Funktionen ○●●

Sei $\varphi_X : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ die charakteristische Funktion von X, die durch $\varphi_X(t) := E(e^{itX})$ definiert ist. Berechnen Sie φ_X in den folgenden Fällen:

(a) $X \equiv c$ f.s., $c \in \mathbb{R}$.

(b) $X \sim \text{Poi}(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}^+$.

(c) $X \sim \mathcal{U}([-a, a])$, $a \in \mathbb{R}^+$.

(d) $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma \in \mathbb{R}^+$.

(e) $X \sim \text{Exp}(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}^+$.

(f) $X \sim \Gamma_{k,\lambda}$ für $k \in \mathbb{N}$, $\lambda > 0$.

(g) X ist zweiseitig exponentialverteilt, wobei die Dichte von X durch

$$f_X(x) = \frac{1}{2}\, e^{-|x|},\ x \in \mathbb{R}.$$

gegeben sei.

(h) X ist Standard-Cauchy-verteilt, das heißt $X \sim \text{C}(0, 1)$, wobei die Dichte von X durch

$$f_X(x) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2},\ x \in \mathbb{R}$$

gegeben sei.

Hinweis: *Benutzen Sie die Fourier-Inversionsformel: wenn $\varphi_X \in L^1$, so besitzt X die beschränkte Dichte $f_X(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{-itx}\varphi_X(t)dt$.*

Lösung:

(a) Folgt direkt aus der Definition.

(b) Es gilt

$$\varphi_X(t) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{itk} e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} = e^{\lambda e^{it} - \lambda}.$$

(c) Nach Euler-Formel und wegen $\sin(x)$ ungerade gilt

$$\varphi_X(t) = \frac{1}{2a}\int_{-a}^{a} e^{itu}\, du = \frac{1}{2a}\int_{-a}^{a}\cos(tu)\, du + 0 = \frac{\sin(at)}{at}.$$

(d) Wenn Z eine standardnormalverteilte Zufallsvariable ist, gilt

$$\varphi_Z(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} e^{-u^2/2} e^{itu}\, du = e^{-t^2/2}\,\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} e^{-(u-it)^2/2}\, du = e^{-t^2/2}.$$

Wenn $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, gilt $X \overset{(d)}{=} \sigma Z + \mu$, wobei $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Die Aussage folgt dann aus dem Teil (a) von Aufgabe 7.8:

$$\varphi_X(t) = e^{i\mu t}\varphi_Z(\sigma t).$$

(e) $\varphi_X(t) = \int_0^\infty e^{itx}\lambda e^{-\lambda x}dx = \lambda \int_0^\infty e^{(it-\lambda)x}dx = \frac{\lambda}{\lambda - it}$.

(f) Die Gammaverteilung ist für $k \in \mathbb{N}$ eine Erlang-Verteilung, die sich als Summe von k unabhängigen zum Parameter λ exponentialverteilten Zufallsvariablen X_i, $1 \leq i \leq k$, schreiben lässt. Nach Aufgabe 7.8 (b) und der charakteristischen Funktion der Exponentialverteilung aus (e) gilt dann

$$\varphi_X(t) = \varphi_{\sum_{i=1}^k X_i}(t) = \left(\varphi_{X_1}(t)\right)^k = \left(\frac{\lambda}{\lambda - it}\right)^k .$$

(g) Für die zweiseitige Exponentialverteilung gilt $X \sim Y_1 - Y_2$. Dabei sind die Zufallsvariablen Y_1 und Y_2 zum Parameter 1 exponentialverteilt und unabhängig. Es folgt dann nach Aufgabe 7.8 (b) und (d) sowie nach Teilaufgabe (f):

$$\varphi_X(t) = \varphi_{Y_1}(t)\,\overline{\varphi_{Y_2}(t)} = \frac{1}{|1 - it|} = \frac{1}{1 + t^2}.$$

Ein alternativer Lösungsweg: die zweiseitige Exponentialverteilung ist symmetrisch. Daher gilt mittels zweimaliger partieller Integration

$$\begin{aligned}\varphi_X(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx}\frac{1}{2}e^{-|x|}dx &= \int_0^\infty \cos(tx)\,e^{-x}dx \\ &= -\cos(tx)\,e^{-x}\Big|_0^\infty - t\int_0^\infty \sin(tx)\,e^{-x}dx \\ &= 1 - t^2 \int_0^\infty \cos(tx)\,e^{-x}dx = 1 - t^2\varphi_X(t).\end{aligned}$$

Damit gilt $\varphi_X(t) = \dfrac{1}{1 + t^2}$.

(h) Sei Y zweiseitig exponentialverteilt. Nach Definition der charakteristischen Funktion ist dann

$$\begin{aligned}\varphi_X(t) &= \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{itx}\frac{1}{1 + x^2}\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{itx}\varphi_Y(x)\,dx \\ &= 2\,\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{-itx}\varphi_Y(-x)\,dx = 2\,f_Y(-t) = e^{-|t|}.\end{aligned}$$

Der vorletzte Schritt benutzt die Fourier-Inversionsformel.

Aufgabe 7.10: Konvergenz in Verteilung, aber nichts Besseres! ○○●

Definieren Sie auf $\Omega := \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$ die Gleichverteilung $\mathbb{P}$ und definieren Sie darauf die Zufallsvariable X mit Verteilung

$$X(\omega_1) = X(\omega_2) = 1, \qquad\qquad X(\omega_3) = X(\omega_4) = 0.$$

Seien $X_\infty := 1 - X$ und die konstante Folge $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definiert durch $X_i \equiv X$, $i \in \mathbb{N}$.

(a) Vergleichen Sie die Verteilungen $\mathbb{P}_{X_n}$ und $\mathbb{P}_{X_\infty}$. Konvergiert die Folge $(X_n)_n$ gegen X_∞ in Verteilung?

(b) Konvergiert die Folge $(X_n)_n$ gegen X_∞ auch in Wahrscheinlichkeit?

Lösung:

(a) X_n und X_∞ haben dieselbe Verteilung:

$$\mathbb{P}_{X_n} = \mathbb{P}_{X_\infty} = \mathcal{U}_{\{0,1\}} = \mathrm{Ber}(1/2).$$

Daher gilt $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{(d)} X_\infty$.

(b) X_n kann nicht gegen X_∞ in Wahrscheinlichkeit konvergieren, da für $0 < \varepsilon < 1$ und für alle $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}(|X_n - X_\infty| > \varepsilon) = \mathbb{P}(|X_n - X_\infty| = 1) = 1.$$

An diesem Gegenbeispiel sieht man, dass die Konvergenz in Verteilung schwächer ist als die Konvergenz in Wahrscheinlichkeit.

Aufgabe 7.11: Konvergenz einer Summe gegen die Cauchy-Verteilung ●●●

Sei $(X_n)_{n\geq 1}$ eine Folge von unabhängigen, identisch verteilten und symmetrischen Zufallsvariablen, die eine stetige gerade Dichtefunktion $f_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ besitzen, mit $f_X(0) > 0$.

Zeigen Sie

$$Z_n := \frac{1}{n}\left(\frac{1}{X_1} + \cdots + \frac{1}{X_n}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{(d)} Z_\infty,$$

wobei Z_∞ Cauchy-verteilt ist.

Hinweis: *Nach Aufgabe 7.9 ist die charakteristische Funktion der Cauchy-Verteilung* $\mathrm{C}(0, \lambda)$ *durch* $\varphi_\lambda(t) = \exp(-\lambda\,|t|)$ *gegeben.*

Benutzen Sie außerdem die Identität [1] $\int_0^\infty (1 - \cos(1/x))\,dx = \frac{\pi}{2}$.

[1] Es gilt $\int_0^z (1 - \cos(1/x))\,dx = \int_0^z \sin(x)/x\,dx =: \mathrm{Si}(z)$. Diese Funktion, auch *Integralsinus* genannt, lässt sich nicht durch elementare Funktionen darstellen. Ein bekannter Grenzwert ist $\mathrm{Si}(\infty) = \pi/2$, der sich mit elementaren Methoden berechnen lässt.

Lösung:

Sei zunächst $Y_i := 1/X_i$. Die Folge $(Y_n)_{n\geq 1}$ ist ebenfalls eine i.i.d. Folge mit Dichte

$$f_Y(y) = \frac{1}{y^2} f_X(1/y),\ y \neq 0,$$

siehe Aufgabe 3.31.

Außerdem ist die charakteristische Funktion von Z_n gegeben durch $\varphi_{Z_n}(t) = \varphi_Y(t/n)^n$.

Nun möchten wir folgende Konvergenz beweisen:

$$\lim_n \varphi_{Z_n}(t) = \exp(-\lambda\,|t|),\ t \in \mathbb{R},$$

wobei λ zu bestimmen ist.

Da $\varphi_{Z_n}(t) = \Big(1 - (1 - \varphi_Y(t/n))\Big)^n$, genügt es zu zeigen, dass

$$\lim_{n\to\infty} n\Big(1 - \varphi_Y(t/n)\Big) = \lambda\,|t|.$$

(Betrachten Sie dazu folgendes bekannte Lemma: $\lim_n c_n = c \Rightarrow \lim_n (1 - \frac{c_n}{n})^n = e^{-c}$.)

Nach Definition der charakteristischen Funktion gilt weiter

$$\begin{aligned} n\,(1 - \varphi_Y(t/n)) &= n \int_{\mathbb{R}} (1 - \exp(ity/n))\, f_Y(y)\, dy \\ &= n \int_{\mathbb{R}} (1 - \exp(ity/n)) \frac{1}{y^2}\, f_X(1/y)\, dy. \end{aligned}$$

Man benutzt nun die Symmetrie von X und zerlegt das Integral:

$$\begin{aligned} n\,(1 - \varphi_Y(t/n)) = &= n \int_0^\infty \Big(2 - \exp(i|t|y/n) + \exp(-i|t|y/n)\Big) \frac{1}{y^2}\, f_X(1/y)\, dy \\ &= 2 \int_0^\infty n\,(1 - \cos(|t|y/n)) \frac{1}{y^2}\, f_X(1/y)\, dy. \end{aligned}$$

Substituieren Sie nun mit $y := \frac{n}{|t|x}$. Dann gilt

$$n\,(1 - \varphi_Y(t/n)) = = 2|t| \int_0^\infty (1 - \cos(1/x))\, f_X\Big(\frac{|t|x}{n}\Big)\, dx.$$

Wegen der Stetigkeit der Dichte gilt für alle x, t

$$\lim_{n\to\infty} f_X\Big(\frac{|t|x}{n}\Big) = f_X(0) > 0.$$

Nach dem Satz der majorisierten Konvergenz ist daher

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} n\,(1-\varphi_Y(t/n)) &= 2|t| \lim_{n\to\infty} \int_0^\infty \Big(1-\cos(1/x)\Big)\, f_X\Big(\frac{|t|x}{n}\Big)\,dx \\ &= 2|t|\, f_X(0) \int_0^\infty \Big(1-\cos(1/x)\Big)\,dx = \pi\, f_X(0)\,|t|.\end{aligned}$$

Es folgt: $Z_n \xrightarrow[n\to\infty]{(d)} Z_\infty$, wobei $Z_\infty \sim \mathrm{C}(0, \pi f_X(0))$. Dies war zu zeigen.

Bemerkung:

Da die Zufallsvariable X eine stetige positive Dichte um 0 besitzt, ist die Wahrscheinlichkeit positiv, dass X Werte im Intervall $(-\varepsilon, \varepsilon)$, ε klein genug, annimmt. Daher explodiert $Y = 1/X$ in der Nähe von 0 und der Erwartungswert von Y kann nicht existieren. Man hat sogar den präzisen Abfall der Verteilung von Y asymptotisch für $y \to \infty$: $\mathbb{P}(Y \geq y) = \mathbb{P}(0 < X \leq 1/y) = \int_0^{1/y} f_X(x)\,dx \sim \frac{1}{y} f_X(0)$.

Die Aufgabe ist daher eine verallgemeinerte Version eines Grenzwertsatzes für die Zufallsvariablen $(Y_i)_i$, die keine Momente besitzen. Statt der klassischen Konvergenz in Verteilung der standardisierten Summe gegen die Normalverteilung hat man hier die Konvergenz in Verteilung des arithmetischen Mittels gegen eine Cauchy-Verteilung.

Man kann ähnliche Grenzwertsätze unter noch schwächeren Voraussetzungen an $(Y_i)_i$ beweisen, siehe zum Beispiel [Dur19], Theorem 3.8.2. Die Grenzwertverteilung ist selten explizit, sondern nur implizit durch ihre charakteristische Funktion beschrieben.

Aufgabe 7.12: Verteilung bestimmen mit charakteristischer Funktion ○●●

Sei $t \mapsto \varphi_X(t) := \cos^n(t)$, $t \in \mathbb{R}$, die charakteristische Funktion einer Zufallsvariablen X, wobei $n \in \mathbb{N}$. Sei $Y := (X+n)/2$.

(a) Zeigen Sie, dass X eine diskrete Zufallsvariable ist und identifizieren Sie die Verteilung von Y mit Hilfe der charakteristischen Funktion φ_X.

(b) Berechnen Sie den Erwartungswert von X.

Hinweis: *Benutzen Sie die Identität* $2\cos(t) = \exp(it) + \exp(-it)$.

Lösung:

(a) Da $2\cos(t) = \exp(it) + \exp(-it)$, erhält man

$$2^n \cos^n(t) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \exp\left(i\,(2k-n)t\right).$$

Damit ist der Bildbereich von X die endliche Menge $\{2k - n : k = 0, \ldots, n\}$ und es gilt

$$\mathbb{P}(X = 2k - n) = \mathbb{P}(Y = k) = \frac{1}{2^n}\binom{n}{k}.$$

Daher ist Y binomialverteilt, d.h. $Y \sim \mathrm{Bin}(n, 1/2)$.

(b) Den Erwartungswert von X erhält man, indem man die erste Ableitung von $\varphi_X(t)$ in $t = 0$ betrachtet:

$$\varphi_X'(t) = -n\,\sin(t)\cos^{n-1}(t), \quad \varphi_X'(0) = 0 = i\,\mathbb{E}(X).$$

Man kann auch den Erwartungswert von Y zur Berechnung benutzen:

$$\frac{n}{2} = \mathbb{E}(Y) = \frac{1}{2}(\mathbb{E}(X) + n) \Rightarrow \mathbb{E}(X) = 0.$$

Bemerkung: Da φ_X reellwertig ist, ist die Zufallsvariable X symmetrisch. Es bedeutet, wenn der Erwartungswert existiert, ist X zentriert.

7.3 Fast sichere und L^p-Konvergenz

Aufgabe 7.13: Konvergenz eines Folgenproduktes ○●●

Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reellwertiger Zufallsvariablen, die fast sicher gegen eine Konstante c konvergiert. Sei $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reellwertiger Zufallsvariablen, die in Verteilung konvergiert: $Y_n \xrightarrow[n\to\infty]{(d)} Y_\infty$. Man beweise, dass das Produkt der Folgen $(X_n\, Y_n)_n$ in Verteilung gegen das Produkt der Limes konvergiert: $X_n\, Y_n \xrightarrow[n\to\infty]{(d)} c\, Y_\infty$.

Lösung: Man betrachtet die Konvergenz der entsprechenden charakteristischen Funktionen. Für beliebige $t \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned}\varphi_{X_nY_n}(t) - \varphi_{cY_\infty}(t) &:= \mathbb{E}\left(e^{itX_nY_n} - e^{itcY_\infty}\right)\\ &= \underbrace{\mathbb{E}\left(e^{itX_nY_n} - e^{itcY_n}\right)}_{=:(*)} + \underbrace{\mathbb{E}\left(e^{itcY_n} - e^{itcY_\infty}\right)}_{=:(**)}.\end{aligned}$$

Der letzte Term konvergiert gegen 0 dank der Verteilungskonvergenz von $(Y_n)_n$:

$$(**) = \mathbb{E}(e^{ictY_n} - e^{ictY_\infty}) = \varphi_{Y_n}(ct) - \varphi_{Y_\infty}(ct) \to_n 0.$$

Weiter gilt für den Absolutbetrag des anderen Terms für beliebige $\varepsilon, M > 0$:

$$\begin{aligned}
|(*)| &= \left|\mathbb{E}\left(e^{itX_nY_n} - e^{itcY_n}\right)\right| \\
&\leq \left|\mathbb{E}\Big((e^{itX_nY_n} - e^{itcY_n})\mathbb{1}_{|(X_n-c)Y_n|\leq\varepsilon M}\Big)\right| + \left|\mathbb{E}\Big((e^{itX_nY_n} - e^{itcY_n})\mathbb{1}_{|(X_n-c)Y_n|>\varepsilon M}\Big)\right| \\
&\leq \left|\mathbb{E}\Big((e^{itX_nY_n} - e^{itcY_n})\mathbb{1}_{|(X_n-c)Y_n|\leq\varepsilon M}\Big)\right| + \sup_{u,v\in\mathbb{R}} |e^{iu} - e^{iv}|\, \mathbb{E}(\mathbb{1}_{|(X_n-c)Y_n|>\varepsilon M}) \\
&\leq \left|\mathbb{E}\Big((e^{itX_nY_n} - e^{itcY_n})\mathbb{1}_{|(X_n-c)Y_n|\leq\varepsilon M}\Big)\right| + 2\,\mathbb{P}(|X_n - c||Y_n| > \varepsilon M) \\
&\leq \left|\mathbb{E}\Big(\underbrace{(e^{itX_nY_n} - e^{itcY_n})\mathbb{1}_{|X_nY_n-cY_n|\leq\varepsilon M}}_{=:(\flat)}\Big)\right| + 2\,\underbrace{\mathbb{P}(|X_n - c| > \varepsilon)}_{=:(\natural)} + 2\,\underbrace{\mathbb{P}(|Y_n| > M)}_{=:(\sharp)}.
\end{aligned}$$

Der Ausdruck ($\flat$) konvergiert fast sicher gegen 0, wenn $n \to \infty$. Dank des Satzes der majorisierten Konvergenz konvergiert der Erwartungswert auch gegen 0. Der Term ($\natural$) konvergiert gegen 0, wenn $n \to \infty$, dank der fast sicheren Konvergenz von X_n gegen c. Der letzte Term ($\sharp$) ist beliebig klein für M groß genug.

Bemerkung: Dieses Ergebnis bleibt sogar dann richtig, wenn die Konvergenz von X_n gegen c nur in Wahrscheinlichkeit gilt. Man kann es aber nicht mehr mit Hilfe der charakteristischen Funktionen beweisen. Es ist bekannt in der Literatur als *Lemma von Slutsky*.

Aufgabe 7.14: Kriterium zur fast sicheren Konvergenz einer Folge ○●●

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Darauf definieren Sie $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, eine Folge reeller Zufallsvariablen und die Zufallsvariable X_∞. Nehmen Sie an, dass für beliebige $\varepsilon > 0$ die folgende Reihe konvergiert:

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(|X_n - X_\infty| > \varepsilon) < \infty.$$

Zeigen Sie, dass dann die Folge $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ fast sicher gegen X_∞ konvergiert, wenn $n \to \infty$.

Lösung: Sei $A_n(\varepsilon), n \in \mathbb{N}$, folgendes Ereignis:

$$A_n(\varepsilon) := \{\omega \in \Omega : |X_n(\omega) - X_\infty(\omega)| > \varepsilon\}.$$

Nach der Voraussetzung gilt $\sum_n \mathbb{P}(A_n(\varepsilon)) < \infty$. Nun wendet man das erste Lemma von Borel-Cantelli an, siehe Aufgabe 1.23.

Es folgt daraus, dass das Ereignis $\limsup_n A_n(\varepsilon)$ vernachlässigbar ist, oder gleichermaßen, dass

$$\mathbb{P}(\liminf_n A_n^c(\varepsilon)) = 1.$$

Das heißt, es existiert eine Menge $\Omega(\varepsilon) \subset \Omega$ mit Maß Eins, sodass

$$\forall \omega \in \Omega(\varepsilon), \exists N \in \mathbb{N}, \forall n > N, |X_n(\omega) - X_\infty(\omega)| \leq \varepsilon.$$

Definieren Sie jetzt $\Omega_0 := \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \Omega(1/k)$. Dieses Ereignis ist noch eine Menge mit Maß Eins. Darüber hinaus gilt:

$$\forall \omega \in \Omega_0, \forall \delta > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n > N, |X_n(\omega) - X_\infty(\omega)| \leq \delta.$$

Mit anderen Worten, die Folge $(X_n(\omega))_n$ konvergiert gegen $X_\infty(\omega)$ für $\omega \in \Omega_0$, wobei die Menge Ω_0 Maß Eins hat.

Aufgabe 7.15: Konvergenz einer Bernoulli-Folge ○●●

Sei $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge unabhängiger Zufallsvariablen mit $X_n \sim \mathrm{Ber}(p_n)$, wobei $p_n \in [0, 1]$ sei.

Man beweise folgende Konvergenzkriterien:

(a) $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} p_n = 0$.

(b) $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{f.s.} 0 \Leftrightarrow \sum_n p_n < \infty$.

Lösung:

(a) Nach der Definition konvergiert $(X_n)_n$ gegen 0 in Wahrscheinlichkeit genau dann, wenn für alle $0 < \varepsilon < 1$ gilt

$$\mathbb{P}(|X_n| > \varepsilon) \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Nun gilt aber

$$\mathbb{P}(|X_n| > \varepsilon) = \mathbb{P}(X_n > \varepsilon) = \mathbb{P}(X_n = 1) = p_n,$$

woraus die Behauptung folgt.

(b)„$\Leftarrow$“: Nehmen Sie an, dass $\sum_n p_n = \sum_n \mathbb{P}(X_n = 1) < \infty$. Dann gilt nach dem ersten Borel-Cantelli-Lemma (siehe Aufgabe 1.23):

$$\mathbb{P}(\limsup\{X_n = 1\}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathbb{P}(\liminf\{X_n = 0\}) = 1.$$

Das bedeutet, fast sicher tritt 0 ab einem bestimmten Index ein, also

$$X_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \,\text{f.s.}$$

„$\Rightarrow$“: Wenn $\mathbb{P}(\lim_n X_n = 0) = 1$, dann gilt insbesondere $\mathbb{P}(\liminf\{X_n = 0\}) = 1$ oder gleichermaßen $\mathbb{P}(\limsup\{X_n = 1\}) = 0$, weil $X_n \in \{0, 1\}$.

Aus der Unabhängigkeit der Folge $(X_n)_n$ und dem zweiten Borel-Cantelli-Lemma, siehe Aufgabe 1.41, folgt nun die Behauptung.

Bemerkung: Die Aufgabe zeigt, dass man im Bernoulli-Kontext die Diskrepanz zwischen einer Konvergenz in Wahrscheinlichkeit und einer fast sicheren Konvergenz genau quantifizieren kann. Zum Beispiel, wenn $X_n \sim \mathrm{Ber}(1/n), n \in \mathbb{N}$, konvergiert die Folge $(X_n)_n$ in Wahrscheinlichkeit, aber nicht fast sicher gegen 0. Man hat in diesem Fall sogar:

$$\mathbb{P}(\{\omega : X_n(\omega) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0\}) = 0.$$

Aufgabe 7.16: Stochastische Konvergenz versus L^q-Konvergenz ○●●

Sei $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge Bernoulli-verteilter Zufallsvariablen mit $Y_n \sim \mathrm{Ber}(p_n)$, wobei $\lim_{n\to\infty} p_n = 0$.

(a) Beweisen Sie die Konvergenz von $(Y_n)_n$ gegen 0 in L^q, für beliebige $q > 0$. Konvergiert diese Folge auch in Wahrscheinlichkeit?

(b) Sei $(a_n)_n$ eine Folge positiver Zahlen in $\mathbb{R}$ mit $\lim_n a_n = \infty$. Definieren Sie $X_n := a_n Y_n$ und zeigen Sie, dass die Folge $(X_n)_n$ gegen 0 in Wahrscheinlichkeit konvergiert.

(c) Suchen Sie eine notwendige und hinreichende Beziehung zwischen $(a_n)_n$ und $(p_n)_n$, so dass $(X_n)_n$ gegen 0 in L^q, $q > 0$, konvergiert.

Anwendung: Sei $a_n := \sqrt{n}$ und $p_n := \frac{1}{n\ln(n)}$, $n \in \mathbb{N}$. Für welche Werte von q konvergiert $(X_n)_n$ in L^q?

(d) Finden Sie ein (Gegen-)Beispiel einer Folge $(a_n)_n$, so dass X_n gegen Null in Wahrscheinlichkeit, aber nicht in L^q konvergiert.

Lösung:

(a) Nach Definition konvergiert $(Y_n)_n$ gegen 0 in L^q, genau dann wenn $\mathbb{E}(|Y_n|^q) \to 0$.

Da $Y_n \in \{0,1\}$ hat man $|Y_n|^q \equiv Y_n$ und daher

$$\mathbb{E}(|Y_n|^q) = p_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

nach Voraussetzung. Da die L^1-Konvergenz die Konvergenz in Wahrscheinlichkeit impliziert, gilt auch $Y_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} 0$. Siehe auch Aufgabe 7.15.

(b) Nach der Definition konvergiert $(X_n)_n$ gegen 0 in Wahrscheinlichkeit genau dann, wenn für alle $0 < \varepsilon < 1$ gilt

$$\mathbb{P}(|X_n| > \varepsilon) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Für n groß genug gilt $a_n > \varepsilon$ und daher

$$\mathbb{P}(|X_n| > \varepsilon) = \mathbb{P}(Y_n > \varepsilon/a_n) = \mathbb{P}(Y_n = 1) = p_n.$$

Das heißt, $(X_n)_n$ konvergiert gegen 0 in Wahrscheinlichkeit für alle divergierenden Folge $(a_n)_n$.

(c) Man hat

$$\mathbb{E}(|X_n|^q) = a_n^q\, \mathbb{E}(|Y_n|^q) = a_n^q\, p_n.$$

Die gesuchte Beziehung ist dann $\lim_n a_n^q\, p_n = 0$, oder in äquivalenter Weise

$$a_n \ll \Big(\frac{1}{p_n}\Big)^{1/q}.$$

Anwendung: $(X_n)_n$ konvergiert gegen 0 in L^q genau dann wenn,

$$\sqrt{n} \ll \Big(n\ln(n)\Big)^{1/q} \Leftrightarrow n^{q/2-1} \ll \ln(n) \Leftrightarrow q \le 2.$$

(d) Sei $q > 0$ beliebig. Man nehme $a_n := p_n^{-1/q}$, $n \in \mathbb{N}$. Es gilt $a_n^q p_n \equiv a_1^q p_1 = 1 \neq 0$. Nach der vorigen Frage kann man dann folgern, dass die entsprechende Folge $(X_n)_n$ nicht gegen 0 in L^q konvergiert.

Bemerkung: Die Aufgabe zeigt, dass die Konvergenz in Wahrscheinlichkeit nicht die Konvergenz in L^q impliziert.

Aufgabe 7.17: Fast sichere Konvergenz versus L^p-Konvergenz ○●●

Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Zufallsvariablen, deren Verteilung wie folgt definiert ist:

$$\mathbb{P}(X_n = n) = 1 - \mathbb{P}(X_n = 0) = \frac{1}{n}.$$

Sei $Z_n := Z + X_n$ eine Zufallsvariable, die man als *kleine* Abweichung von Z durch X_n auffassen kann.

(a) Beweisen Sie, dass $Z_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} Z$.

(b) Nehmen Sie $Z \in L^p$ an, wobei $p > 0$. Für $p < 1$ beweise man $Z_n \xrightarrow[n\to\infty]{L^p} Z$. Was passiert wenn $p \geq 1$?

(c) Beweisen Sie, dass die Folge $(Z_{2^k})_{k\in\mathbb{N}}$ fast sicher gegen Z konvergiert.

Hinweis: *Benutzen Sie das Konvergenzkriterium der Aufgabe 7.14.*

(d) Nehmen Sie an, die Folge $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist unabhängig. Beweisen Sie dann, dass die Folge $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht fast sicher konvergiert.

Hinweis: *Benutzen Sie das zweite Borel-Cantelli-Lemma, siehe Aufgabe 1.41.*

Lösung:

(a) Man bemerke, dass

$$Z_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} Z \Leftrightarrow Z_n - Z = X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} 0.$$

Es genügt dann, Aufgabe 7.16 (b) mit $a_n = 1/p_n = n$ anzuwenden.

(b) Man wendet Aufgabe 7.16 (c) mit $a_n = 1/p_n = n$ an:

$$Z_n - Z = X_n \xrightarrow[n\to\infty]{L^p} 0 \Leftrightarrow \lim_n a_n^p\, p_n = \lim_n n^{p-1} = 0 \Leftrightarrow p < 1.$$

Für $p \geq 1$ konvergiert insbesondere die Folge $(Z_n)_n$ nicht in L^p gegen Z.

(c) Nach Aufgabe 7.14 genügt es zu zeigen, dass für beliebige $0 < \varepsilon < 1$ die folgende Reihe konvergiert:

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(|X_{2^k}| > \varepsilon) < \infty.$$

Aber

$$\mathbb{P}(|X_{2^k}| > \varepsilon) = \mathbb{P}(X_{2^k} = 2^k) = 2^{-k},$$

und $\sum_k 2^{-k}$ ist endlich.

(d) Für beliebige $0 < \varepsilon < 1$ gilt

$$\sum_n \mathbb{P}(|Z_n - Z| > \varepsilon) = \sum_n \mathbb{P}(|X_n| > \varepsilon) = \sum_n \mathbb{P}(X_n = n) = \sum_n 1/n = +\infty.$$

Da die Ereignisse $\{|Z_n - Z| > \varepsilon\}, n \in \mathbb{N}$, unabhängig sind, kann man nach der Aufgabe 1.41 daraus schließen, dass fast sicher das Ereignis $\{\limsup |Z_n - Z| > \varepsilon\}$ realisiert wird. Es verhindert dann die fast sichere Konvergenz der Folge $(Z_n)_n$ gegen Z. Aber Z wäre der einzige mögliche fast sichere Grenzwert dieser Folge, da nach (a) Z der Grenzwert in Wahrscheinlichkeit ist.

Bemerkung: Mit (c) und (d) hat man ein Beispiel einer Folge von Zufallsvariablen, die selbst f.s. nicht konvergiert, für die aber eine bestimmte explizite Teilfolge f.s. konvergiert.

Aufgabe 7.18: Verallgemeinerte majorisierte Konvergenz ○●●

Sei $(X_n)_{n\geq 0}$ eine Folge von reellen Zufallsvariablen, die fast sicher gegen X_∞ konvergieren. Nehmen Sie an, es existiere eine nicht-negative, konvergierende, majorisierende Folge $(Y_n)_{n\geq 0}$, sodass

$$\forall n \in \mathbb{N},\ |X_n| \leq Y_n, \qquad Y_n \xrightarrow[n\to\infty]{f.s.} Y_\infty \text{ und } \quad \lim_n \mathbb{E}(Y_n) = \mathbb{E}(Y_\infty) < +\infty.$$

Beweisen Sie, dass dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(X_n) = \mathbb{E}(\lim_{n\to\infty} X_n) = \mathbb{E}(X_\infty).$$

Hinweis: *Benutzen Sie das Lemma von Fatou.*

Lösung: Zunächst merkt man, dass folgende f.s. Konvergenz gilt:

$$\lim_n (Y_n \mp X_n) = Y_\infty \mp X_\infty.$$

Da $0 \leq |X_n| \mp X_n \leq Y_n \mp X_n$ kann man den Satz von Fatou anwenden, um zu bekommen:

$$\begin{aligned} 0 \leq \mathbb{E}(Y_\infty \mp X_\infty) &= \mathbb{E}(\liminf_n (Y_n \mp X_n)) \\ &\leq \liminf_n \mathbb{E}(Y_n \mp X_n). \end{aligned}$$

Man behandelt ab jetzt beide Fälle getrennt:

$$\begin{aligned} 0 \leq \mathbb{E}(Y_\infty - X_\infty) &\leq \lim_n \mathbb{E}(Y_n) - \limsup_n \mathbb{E}(X_n) \\ &= \mathbb{E}(Y_\infty) - \limsup_n \mathbb{E}(X_n). \end{aligned}$$

Man schließt daraus, dass $\limsup_n \mathbb{E}(X_n) \leq \mathbb{E}(X_\infty)$.

Andererseits gilt

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Y_\infty + X_\infty) &\leq \lim_n \mathbb{E}(Y_n) + \liminf_n \mathbb{E}(X_n)\\ &= \mathbb{E}(Y_\infty) + \liminf_n \mathbb{E}(X_n).\end{aligned}$$

Man schließt daraus, dass $\liminf_n \mathbb{E}(X_n) \geq \mathbb{E}(X_\infty)$.

Zusammengefasst bekommt man

$$\limsup_n \mathbb{E}(X_n) \leq \mathbb{E}(X_\infty) \leq \liminf_n \mathbb{E}(X_n),$$

das heißt, $\lim_n \mathbb{E}(X_n)$ existiert und $\mathbb{E}(X_\infty) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(X_n)$.

Bemerkung: In dieser Aufgabe hat man die Vertauschbarkeit des fast sicheren Limes mit dem Erwartungswert unter einer schwächeren Annahme als die majorisierte Konvergenz bewiesen.

Aufgabe 7.19: Starke Konvergenz der normierten Poisson-Summe ●●●

Seien $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge unabhängiger Poisson-verteilter Zufallsvariablen, wobei für jedes k gilt $X_k \sim \mathrm{Poi}(\lambda_k)$ mit $\sum_k \lambda_k = +\infty$. Definieren Sie die endliche Summe

$$S_n := \sum_{k=1}^{n} X_k,\ n \in \mathbb{N}.$$

Es soll bewiesen werden, dass die normierte Poisson-Summe fast sicher konvergiert:

$$N_n := \frac{S_n}{\mathbb{E}(S_n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 \ \text{ f.s.}$$

(a) Sei die Folge $(n_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ wie folgt definiert:

$$n_j = \inf\{\, n : \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \ \geq j^2 \,\}.$$

Zeigen Sie, dass die Folge der Zufallsvariablen $(N_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ fast sicher gegen Eins konvergiert.

(b) Benutzen Sie die Monotonie der Folge $n \mapsto S_n$, um das Endergebnis zu bekommen.

Lösung: Zunächst bemerkt man, dass S_n Poissonverteilt zum Parameter $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k$ ist, siehe Aufgabe 2.35. Das heißt insbesondere, dass

$$\mathbb{E}(S_n) = \operatorname{Var}(S_n) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \,.$$

(a) Sei $\varepsilon > 0$. Es gilt nach der Bienaymé-Tschebyschoff-Ungleichung – siehe Aufgabe 4.4 (a) –

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{\mathbb{E}(S_n)} - 1\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\operatorname{Var}(S_n)}{\varepsilon^2\, \mathbb{E}(S_n)^2} = \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{1}{\sum_{k=1}^{n} \lambda_k}.$$

Da $\sum_{k=1}^{n_j} \lambda_k \geq j^2$ nach Definition von n_j, bekommt man:

$$\sum_{j\geq 1} \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_{n_j}}{\mathbb{E}(S_{n_j})} - 1\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{j\geq 1} \frac{1}{j^2} = \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\pi^2}{6} < \infty.$$

Nach Aufgabe 7.14 folgt nun bereits die fast sichere Konvergenz:

$$\frac{S_{n_j}}{\mathbb{E}(S_{n_j})} \xrightarrow[j\to\infty]{} 1 \text{ f.s.}$$

(b) Für jedes $\omega \in \Omega$ ist $n \mapsto S_n(\omega)$ monoton wachsend, da die Zufallsvariablen $(X_k)_k$ nicht negativ sind. Darüber hinaus kann man jedem $n \in \mathbb{N}$ einen eindeutigen Index n_j zuordnen, so dass $n_j \leq n < n_{j+1}$.

Es folgt nun für alle $\omega \in \Omega$

$$S_{n_j}(\omega) \leq S_n(\omega) \leq S_{n_{j+1}}(\omega)$$

und dank der Monotonie des Erwartungswertes

$$\mathbb{E}(S_{n_j}) \leq \mathbb{E}(S_n) \leq \mathbb{E}(S_{n_{j+1}}).$$

Damit gilt auch

$$\frac{\mathbb{E}(S_{n_j})}{\mathbb{E}(S_n)} \frac{S_{n_j}(\omega)}{\mathbb{E}(S_{n_j})} \leq \frac{S_n(\omega)}{\mathbb{E}(S_n)} \leq \frac{\mathbb{E}(S_{n_{j+1}})}{\mathbb{E}(S_n)} \frac{S_{n_{j+1}}(\omega)}{\mathbb{E}(S_{n_{j+1}})}.$$

Es ist aber nach Definition

$$\frac{\mathbb{E}(S_{n_{j+1}})}{\mathbb{E}(S_n)} = \frac{\sum_{k=1}^{n_{j+1}} \lambda_k}{\sum_{k=1}^{n} \lambda_k} \leq \frac{\sum_{k=1}^{n_{j+2}-1} \lambda_k}{\sum_{k=1}^{n_j} \lambda_k} \leq \frac{(j+2)^2}{j^2} = \left(1 + \frac{2}{j}\right)^2 \xrightarrow[j\to\infty]{} 1.$$

Analog gilt

$$\frac{\mathbb{E}(S_{n_j})}{\mathbb{E}(S_n)} = \frac{\sum_{k=1}^{n_j} \lambda_k}{\sum_{k=1}^{n} \lambda_k} = 1 - \frac{\sum_{k=n_j+1}^{n} \lambda_k}{\sum_{k=1}^{n} \lambda_k} \geq 1 - \frac{(j+1)^2 - j^2}{j^2} = 1 - \frac{3}{j} \xrightarrow[j\to\infty]{} 1.$$

Es folgt schließlich daraus, dass fast sicher

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{\mathbb{E}(S_n)} = 1.$$

Aufgabe 7.20: Wachstumsrate des Maximum exponentialverteilter ZV ○●●

Seien $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge unabhängiger, zum Parameter 1 exponentialverteilter Zufallsvariablen. Sei $M_n := \max_{1\leq m\leq n} X_m$.

(a) Beweisen Sie, dass für beliebige $0 < \varepsilon < 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}\Big(M_n < (1-\varepsilon)\log n\Big) < \infty$$

und schließen Sie daraus, dass fast sicher $\liminf_n \dfrac{M_n}{\log n} \geq 1$.

(b) Beweisen Sie, dass für beliebige $\varepsilon > 0$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}\Big(M_{2^k} \geq (1+\varepsilon)\log(2^k)\Big) < \infty$$

und schließen Sie daraus, dass fast sicher $\limsup_k \dfrac{M_{2^k}}{\log(2^k)} \leq 1$.

(c) Benutzen Sie ein Monotonieargument, um daraus zu schließen, dass

$$\lim_{n\to\infty} \frac{M_n}{\log n} = 1 \text{ f.s.}$$

Lösung:

(a) Sei $0 < \varepsilon < 1$. Es gilt dank der Unabhängigkeit der $(X_m)_m$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(M_n < (1-\varepsilon)\log n) &= \prod_{m=1}^{n} \mathbb{P}(X_m < (1-\varepsilon)\log n) \\ &= \Big(1 - \exp(-(1-\varepsilon)\log n)\Big)^n = \left(1 - \frac{n^\varepsilon}{n}\right)^n \approx \exp(-n^\varepsilon).\end{aligned}$$

Da die Summe $\sum_n \exp(-n^\varepsilon)$ konvergent ist, folgt nach dem ersten Borel-Cantelli-Lemma, siehe Aufgabe 1.23:

$$\liminf_n \frac{M_n}{\log n} \geq (1-\varepsilon) \text{ f.s.}$$

Man lässt dann $\varepsilon \to 0$ und dies liefert die erste Aussage.

(b) Für n groß gilt in Analogie zu den vorigen Rechnungen:

$$\mathbb{P}(M_n > (1+\varepsilon)\log n) = 1 - \left(1 - \frac{1}{n^{1+\varepsilon}}\right)^n \approx \frac{1}{n^\varepsilon}.$$

Betrachtet man jetzt die Teilfolge $(M_{2^k})_k$, so gilt

$$\sum_k \mathbb{P}(M_{2^k} > (1+\varepsilon)\log 2^k) \approx \sum_k \frac{1}{(2^\varepsilon)^k} < \infty.$$

Nun wird wieder das Borel-Cantelli-Lemma angewandt, um

$$\mathbb{P}(\limsup_k \frac{M_{2^k}}{\log 2^k} \leq 1+\varepsilon) = 1$$

zu erhalten.

Man lässt dann $\varepsilon \to 0$, was dann die zweite Aussage liefert.

(c) Nun wähle man für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein $k = k(n)$ mit $2^{k-1} \leq n < 2^k$. Dann gilt

$$\frac{M_n}{\log n} \leq \frac{M_{2^k}}{\log 2^{k-1}} = \frac{M_{2^k}}{\log 2^k} \underbrace{\frac{\log 2^k}{\log 2^{k-1}}}_{\to 1}.$$

Daher bekommt man

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{M_n}{\log n} \leq \limsup_{k\to\infty} \frac{M_{2^k}}{\log 2^k} \leq 1 \text{ f.s.}$$

Unter Berücksichtigung der Ungleichung aus (a) folgert man

$$\lim_{n\to\infty} \frac{M_n}{\log n} = 1 \text{ f.s.}$$

7.4 Starkes Gesetz der großen Zahlen

Aufgabe 7.21: Kein starkes (aber schwaches) Gesetz der großen Zahlen ●●●

Sei $(X_n)_{n\geq 2}$ eine Folge von unabhängigen Zufallsvariablen mit

$$\mathbb{P}_{X_n} = \frac{1}{2n\log n}\,\delta_{-n} + \left(1 - \frac{1}{n\log n}\right)\delta_0 + \frac{1}{2n\log n}\,\delta_n.$$

Betrachten Sie

$$S_n := \sum_{k=2}^{n} X_k.$$

(a) Zeigen Sie, dass die Folge $(X_n)_{n\geq 2}$ dem schwachen Gesetz der großen Zahlen genügt, das heißt

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} 0 = \mathbb{E}(X_k).$$

(b) Es soll nun bewiesen werden, dass die Folge $(X_n)_{n\geq 2}$ dem starken Gesetz der großen Zahlen nicht genügt.

(i) Beweisen Sie zunächst, dass

$$\mathbb{P}\left(\limsup_{n\to\infty}\left\{\left|\frac{X_{n+1}}{n}\right| \geq 1\right\}\right) = 1.$$

(ii) Beweisen Sie dann, dass für $n \geq 3$

$$\left|\frac{S_{n+1}}{n} - \frac{S_n}{n-1}\right| \geq \left|\left|\frac{X_{n+1}}{n}\right| - \left|\frac{S_n}{n\,(n-1)}\right|\right|.$$

(iii) Zeigen Sie, dass für genügend große n gilt $\left|\dfrac{S_n}{n\,(n-1)}\right| \leq \dfrac{3}{4}$.

(iv) Schließen Sie aus den vorigen Fragen, dass

$$\mathbb{P}\left(\limsup_{n\to\infty}\left\{\left|\frac{S_{n+1}}{n} - \frac{S_n}{n-1}\right| \geq \frac{1}{4}\right\}\right) = 1.$$

Lösung:

(a) Da die Folge $(X_n)_{n\geq 2}$ unabhängig ist, ist sie auch paarweise unkorreliert. Man wendet dann die Aufgabe 4.10 an und schließt daraus, dass sie dem schwachen Gesetz der großen Zahlen genügt.

(b) (i) Nach dem zweiten Lemma von Borel-Cantelli (siehe Aufgabe 1.41) genügt es zu zeigen, dass $\sum_n \mathbb{P}(|X_{n+1}| \geq n) = \infty$. Aber

$$\sum_{n=2}^{N} \mathbb{P}(|X_{n+1}| \geq n) = \sum_{n=2}^{N} \mathbb{P}(|X_{n+1}| \neq 0) = \sum_{m=3}^{N+1} \frac{1}{m \log m} \xrightarrow[N\to\infty]{} \infty.$$

(ii) Es gilt

$$\begin{aligned}\left|\frac{S_{n+1}}{n} - \frac{S_n}{n-1}\right| &= \left|\frac{X_{n+1}}{n} + \frac{S_n}{n} - \frac{S_n}{n-1}\right| \\ &= \left|\frac{X_{n+1}}{n} - \frac{S_n}{n(n-1)}\right| \geq \left|\left|\frac{X_{n+1}}{n}\right| - \left|\frac{S_n}{n(n-1)}\right|\right|.\end{aligned}$$

(iii) Man hat für $\omega \in \Omega$

$$\left|\frac{S_n(\omega)}{n(n-1)}\right| \leq \frac{1}{n(n-1)} \sum_{k=2}^{n} |X_k(\omega)| \leq \frac{1}{n(n-1)} \sum_{k=2}^{n} k = \frac{1}{2} + \frac{1}{n}.$$

Daher gilt, für alle $n \geq 4$, $\left|\frac{S_n}{n(n-1)}\right| \leq \frac{3}{4}$.

(iv) Es gilt

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}\left(\limsup_{n\to\infty}\left\{\left|\frac{S_{n+1}}{n} - \frac{S_n}{n-1}\right| \geq \frac{1}{4}\right\}\right) \\ &\quad \geq \mathbb{P}\left(\limsup_{n\to\infty}\left\{\left|\left|\frac{X_{n+1}}{n}\right| - \left|\frac{S_n}{n(n-1)}\right|\right| \geq \frac{1}{4}\right\}\right) \\ &\quad\quad \geq \mathbb{P}\left(\limsup_{n\to\infty}\left\{\left|\frac{X_{n+1}}{n}\right| - \left|\frac{S_n}{n(n-1)}\right| \geq \frac{1}{4}\right\}\right) \\ &\quad\quad\quad = \mathbb{P}\left(\limsup_{n\to\infty}\left\{\left|\frac{X_{n+1}}{n}\right| \geq 1\right\}\right) = 1.\end{aligned}$$

Demnach existiert fast sicher eine divergente Teilfolge von $\left(\frac{S_n}{n-1}\right)_n$. Daher kann die Folge $\left(\frac{S_n}{n}\right)_{n\geq 2}$ nicht konvergieren und $(X_n)_{n\geq 2}$ genügt damit dem starken Gesetz der großen Zahlen nicht. Es gilt sogar

$$\mathbb{P}\left(\left\{\omega : \frac{S_n(\omega)}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0\right\}\right) = 0.$$

Aufgabe 7.22: Summe der Produkte von Zufallsvariablen ○●●

Sei $(X_n)_{n\geq 1}$ eine Folge von unabhängigen, identisch verteilten Zufallsvariablen mit endlichem Erwartungswert. Definieren Sie die Zufallsvariablen

$$Y_n := X_1X_2 + X_2X_3 + \ldots + X_{n-1}X_n + X_nX_{n+1},\ n \in \mathbb{N}.$$

Beweisen Sie, dass die Folge $(\frac{1}{n}Y_n)_n$ fast sicher gegen eine Konstante konvergiert und bestimmen Sie diese Konstante.

Hinweis: *Zerlegen Sie die Summe in zwei Teilsummen.*

Lösung: Es gilt

$$\frac{1}{n}Y_n = \frac{1}{n}\underbrace{\sum_{k=1}^{\lfloor\frac{n+1}{2}\rfloor} X_{2k-1}X_{2k}}_{=:S_u^{(n)}} + \frac{1}{n}\underbrace{\sum_{k=1}^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor} X_{2k}X_{2k+1}}_{=:S_g^{(n)}} = \frac{1}{n}S_u^{(n)} + \frac{1}{n}S_g^{(n)}.$$

Sowohl $(X_{2k-1}X_{2k})_k$ als auch $(X_{2k}X_{2k+1})_k$ sind Folgen unabhängiger, identisch verteilter L^1-Zufallsvariablen. Daher gilt nach dem starken Gesetz der großen Zahlen

$$\frac{1}{n}S_u^{(n)} = \underbrace{\frac{\lfloor\frac{n+1}{2}\rfloor}{n}}_{\to\frac{1}{2}}\underbrace{\frac{1}{\lfloor\frac{n+1}{2}\rfloor}S_u^{(n)}}_{\to\mathbb{E}(X_1X_2)} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{2}\mathbb{E}(X_1X_2) = \frac{1}{2}\mathbb{E}(X_1)^2 \text{ f.s.}$$

Analog gilt

$$\frac{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}{n}\frac{1}{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}S_g^{(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{2}\mathbb{E}(X_2X_3) = \frac{1}{2}\mathbb{E}(X_1)^2 \text{ f.s.}$$

Demnach gilt

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}Y_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}S_u^{(n)} + \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}S_g^{(n)} = \frac{1}{2}\mathbb{E}(X_1)^2 + \frac{1}{2}\mathbb{E}(X_1)^2 = \mathbb{E}(X_1)^2 \text{ f.s.}$$

Aufgabe 7.23: Proportionalität zwischen Summen ○○●

Sei $(X_n)_{n\geq 1}$ eine Folge unabhängiger, identisch verteilter und positiver Zufallsvariablen mit $\mathbb{E}(X_n^3) < +\infty$. Man beweise, dass die Folge der Zufallsvariablen

$$Z_n := \frac{X_1^3 + X_2^3 + \ldots + X_n^3}{X_1 + X_2 + \ldots + X_n},\ n \in \mathbb{N},$$

fast sicher gegen eine Konstante konvergiert. Bestimmen Sie den Wert dieser Konstanten.

Lösung: Zunächst gilt für $n \in \mathbb{N}$

$$\mathbb{P}(X_1 + X_2 + \ldots + X_n > 0) \geq \mathbb{P}(X_1 > 0) = 1.$$

Z_n ist daher f.s. wohl definiert.

Nach dem starken Gesetz der großen Zahlen bekommt man

$$Z_n = \frac{X_1^3 + X_2^3 + \ldots + X_n^3}{n} \cdot \frac{n}{X_1 + X_2 + \ldots + X_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{\mathbb{E}(X_1^3)}{\mathbb{E}(X_1)} \text{ f.s.}$$

Aufgabe 7.24: Selbstnormierende Summe ●●●

Sei $(V_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge unabhängiger, identisch verteilter und zentrierter L^2-Zufallsvariablen, wobei $\mathbb{P}(V_k = 0) = 0$.

Beweisen Sie, dass die Folge der Zufallsvariablen

$$W_n := \frac{\sum_{k=1}^n V_k}{\sqrt{\sum_{k=1}^n V_k^2}}, \quad n \in \mathbb{N},$$

in Verteilung konvergiert und identifizieren Sie den Limes.

Lösung: Zunächst ist der Bruch W_n fast sicher wohldefiniert, da

$$\mathbb{P}\Big(\sum_{k=1}^n V_k^2 = 0\Big) \leq \mathbb{P}(V_1 = 0) = 0.$$

Nach dem starken Gesetz der großen Zahlen gilt die folgende fast sichere Konvergenz:

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^n V_k^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbb{E}(V_1^2) = \mathrm{Var}(V_1) > 0$$

und daher

$$X_n := \sqrt{\frac{n}{\sum_{k=1}^n V_k^2}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{\sqrt{\mathrm{Var}(V_1)}} =: c\,.$$

Nach dem zentralen Grenzwertsatz hat man folgende Konvergenz in Verteilung

$$Y_n := \frac{\sum_{k=0}^n V_k}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{(d)} \frac{1}{c} Z\,,$$

wobei $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$.

Man wendet jetzt die Aufgabe 7.13 und bekommt

$$W_n = X_n \cdot Y_n \xrightarrow[n\to\infty]{(d)} c \cdot \frac{1}{c} Z = Z\,.$$

Aufgabe 7.25: Verallgemeinerte Taylor-Formel ○●●

Sei f eine stetige, beschränkte Funktion, die auf $\mathbb{R}$ definiert ist.

(a) Seien $x \in \mathbb{R}$ beliebig und $h > 0$. Beweisen Sie:

$$f(x+h) = \lim_{n\to\infty} e^{-nh} \sum_{k=0}^{\infty} f\Big(x + \frac{k}{n}\Big)\frac{(nh)^k}{k!}.$$

Hinweis: *Führen Sie unabhängige, zum Parameter h Poisson-verteilte Zufallsvariablen $(X_i)_i$ ein und betrachten Sie das Limesverhalten von $S_n := \sum_{i=1}^n X_i$.*

(b) Definieren Sie den diskreten Differenz-Operator ∇_u, $u > 0$, durch

$$\nabla_u f(x) := \frac{f(x+u) - f(x)}{u}.$$

Durch Iteration definiert man analog $\nabla_u^2 := \nabla_u \circ \nabla_u$ und $\nabla_u^k := \nabla_u \circ \nabla_u^{k-1}$, $k \geq 2$.

Beweisen Sie die folgende verallgemeinerte Taylor-Formel:

$$f(x+h) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{h^k}{k!} \nabla_{1/n}^k f(x).$$

Lösung:

(a) Definieren Sie eine Folge $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ unabhängiger, identisch verteilter Zufallsvariablen mit $X_i \sim \mathrm{Poi}(h)$. Es sei $S_n := \sum_{i=1}^n X_i$.

Nach dem starken Gesetz der großen Zahlen gilt fast sicher

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} = \mathbb{E}(X_1) = h \text{ und } \lim_{n\to\infty} x + \frac{S_n}{n} = x + h.$$

Da f stetig ist, gilt auch fast sicher

$$\lim_{n\to\infty} f\Big(x + \frac{S_n}{n}\Big) = f(x+h).$$

Dank des Satzes der dominierten Konvergenz (f ist beschränkt) gilt die Konvergenz auch für den Erwartungswert:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\Big(f\Big(x + \frac{S_n}{n}\Big)\Big) = \mathbb{E}(f(x+h)) = f(x+h).$$

Nach Aufgabe 2.35 (b) ist S_n Poisson-verteilt zum Parameter nh, d.h. $S_n \sim \mathrm{Poi}(nh)$. Es folgt

$$f(x+h) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\Big(f\Big(x + \frac{S_n}{n}\Big)\Big) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} e^{-nh} f\Big(x + \frac{k}{n}\Big)\frac{(nh)^k}{k!}.$$

(b) Mit Hilfe einer Induktion über i beweist man, dass

$$\nabla^i_{1/n} f\,(x) = n^i \sum_{k=0}^{i} (-1)^k \binom{i}{k} f\,(x + k/n)\,.$$

Daraus folgert man nun mittels (a):

$$\begin{aligned} f(x+h) &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} f\Big(x + \frac{k}{n}\Big) \frac{(nh)^k}{k!}\, e^{-nh} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} f\Big(x + \frac{k}{n}\Big) \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j\, \frac{n^{j+k} h^{j+k}}{j!k!} \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=k}^{\infty} f\Big(x + \frac{k}{n}\Big) (-1)^{i-k}\, \frac{n^i h^i}{k!(i-k)!} \\ &\overset{Fubini}{=} \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{h^i}{i!}\, n^i \sum_{k=0}^{i} (-1)^k \binom{i}{k} f\Big(x + \frac{k}{n}\Big) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{h^i}{i!}\, \nabla^i_{1/n} f(x). \end{aligned}$$

Aufgabe 7.26: Darstellung einer zufälligen Zahl im Dezimalsystem ○●●

Für eine beliebige Zahl $x \in [0, 1)$ betrachte man ihre eindeutige dezimale Darstellung

$$x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x_n}{10^n},$$

wobei $x_n \in \{0, 1, \ldots, 9\}$. Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ darf nicht in einer unendlichen Folge von 9 enden.

Sei nun X eine rein zufällige Zahl aus dem Intervall $[0, 1)$. Ziel der Aufgabe ist, die Folge $(X_n)_n$ der zufälligen Ziffer ihrer dezimalen Darstellung zu untersuchen.

(a) Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Beweisen Sie, dass die Ziffer X_n, die an der n-ten Nachkommastelle von X vorkommt, gleichmäßig verteilt ist:

$$\mathbb{P}(X_n = i) = \frac{1}{10}, \quad i \in \{0, \ldots 9\}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

(b) Beweisen Sie, dass die Zufallsvariablen $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$ unabhängig sind.

Hinweis: *Beweisen Sie zunächst, dass die Zufallsvariablen paarweise unabhängig sind.*

(c) Es sei $\nu_n(x, i)$ die Anzahl des Auftretens der Ziffer i unter den n ersten Nachkommastellen der Zahl $x \in [0, 1)$:

$$\nu_n(x, i) = \#\{k \le n : x_k = i\}.$$

Beweisen Sie, dass sich die Häufigkeit des Auftretens jeder Ziffer i unter den n ersten Nachkommastellen der zufälligen Zahl X im folgenden Sinne stabilisiert:

$$\frac{\nu_n(X, i)}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{10} \text{ f.s.}, \quad i \in \{0, \ldots, 9\}. \tag{*}$$

(d) Bestimmen Sie die dezimale Darstellung der Zahlen $x = \frac{1}{11}$, $y = \frac{1}{8}$ und $z = \frac{1}{3}$. Berechnen Sie auch $\nu_n(x, 1)$, $\nu_n(y, 1)$ und $\nu_n(z, 1)$. Was bemerken Sie? Führt es zu einem Widerspruch zu (*)?

Lösung:

(a) Prüfen Sie zuerst die Aussage für $n = 1$ und $n = 2$. Dazu bemerkt man folgendes:

$$\{X_1 = i\} = \Big\{X \in \Big[\frac{i}{10}, \frac{i+1}{10}\Big)\Big\}.$$

Da das Lebesgue-Maß des Intervalls $[\frac{i}{10}, \frac{i+1}{10})$ gleich $\frac{1}{10}$ ist, ist die Behauptung bewiesen.

Weiter gilt

$$\{X_2 = i\} = \bigcup_{m_1=0}^{9} \Big\{X \in \Big[\frac{m_1}{10} + \frac{i}{10^2}, \frac{m_1}{10} + \frac{i+1}{10^2}\Big)\Big\}.$$

Also gilt $\mathbb{P}(X_2 = i) = 10 \cdot \dfrac{1}{10^2} = \dfrac{1}{10}$.

Für beliebige $n \geq 2$ ist das Ereignis $\{X_n = i\}$ die disjunkte Vereinigung von 10^{n-1} Intervallen der Art

$$I_{m_1,m_2,\ldots,m_{n-1},i} := \Big[\frac{m_1}{10} + \ldots + \frac{m_{n-1}}{10^{n-1}} + \frac{i}{10^n}, \frac{m_1}{10} + \ldots + \frac{m_{n-1}}{10^{n-1}} + \frac{i+1}{10^n}\Big),$$

also gilt $\mathbb{P}(X_n = i) = 10^{n-1} \cdot \dfrac{1}{10^n} = \dfrac{1}{10}$.

(b) Um die paarweise Unabhängigkeit zu zeigen, berechnet man $\mathbb{P}(X_{k_1} = i, X_{k_2} = j)$ für beliebige $k_1 < k_2$ und $i, j \in \{0, \ldots, 9\}$.

Das Ereignis $\{X_{k_1} = i, X_{k_2} = j\}$ ist gebildet aus der disjunkten Vereinigung Intervallen der Art

$$I_{m_1,\ldots,m_{k_1-1},i} \cap I_{\bar{m}_1,\ldots,\bar{m}_{k_2-1},j},$$

wobei die natürliche Zahlen m_ℓ, $1 \leq \ell \leq k_1$ und $\bar{m}_\ell$, $1 \leq \ell \leq k_2$, beliebige Werte zwischen 0 und 9 annehmen können.

Der Durchschnitt solcher Intervalle ist entweder leer oder hat die Länge 10^{-k_2}. Die Anzahl der nicht leeren Durchschnitte ist 10^{k_2-2}, da nur $10^{k_2-k_1-1}$ Intervalle der Art $I_{\bar{m}_1,\ldots,\bar{m}_{k_2-1},j}$ jedes Intervall der Art $I_{m_1,\ldots,m_{k_1-1},i}$ schneiden. Das impliziert

$$\mathbb{P}(X_{k_1} = i, X_{k_2} = j) = \frac{1}{10^2} = \mathbb{P}(X_{k_1} = i)\,\mathbb{P}(X_{k_2} = j).$$

Analog zeigt man, dass für beliebige $k_1 < \ldots < k_r, r > 2$, die Zufallsvariablen $X_{k_1}, \ldots, X_{k_r}$ unabhängig sind:

$$\mathbb{P}(X_{k_1} = i_1, \ldots, X_{k_r} = i_r) = \frac{1}{10^r} = \mathbb{P}(X_{k_1} = i_1) \ldots \mathbb{P}(X_{k_r} = i_r).$$

(c) Man bemerkt, dass

$$\nu_n(X, i) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}_{\{X_k = i\}}.$$

Da die Zufallsvariablen $(\mathbb{1}_{\{X_k=i\}})_k$ unabhängig, identisch Ber$(\frac{1}{10})$-verteilt sind, darf man das starke Gesetz der großen Zahlen anwenden.

(d) Sei $x = \frac{1}{11} = 0{,}090909\ldots$. Man hat daher $x_{2n} \equiv 9$ und $x_{2n-1} \equiv 0$ für alle $n \geq 1$. Es impliziert $\nu_n(x, i) \equiv 0,\ i \notin \{0, 9\}$ und

$$\lim_n \frac{\nu_n(x, 0)}{n} = \lim_n \frac{\nu_n(x, 9)}{n} = \frac{1}{2} \neq \frac{1}{10}.$$

Sei $y = \frac{1}{8} = 0{,}125000\ldots$. Man hat $y_k \equiv 0$ für alle $k \geq 4$. Dies impliziert

$$\frac{\nu_n(y, 0)}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 \text{ und } \frac{\nu_n(y, i)}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,\ i \neq 0.$$

Sei $z = \frac{1}{3} = 0{,}333\ldots$. Man hat $z_k \equiv 3$ für alle $k \geq 1$. Dies impliziert

$$\frac{\nu_n(z, 3)}{n} \equiv 1 \text{ und } \frac{\nu_n(z, i)}{n} \equiv 0,\ i \neq 3.$$

Die dezimale Darstellung einer rationalen Zahl ist ab einer bestimmten Stelle periodisch. Daher muss die Häufigkeit des Auftretens einer Ziffer nicht unbedingt gegen $1/10$ konvergieren. Es führt aber zu keinem Widerspruch zu (c), da die Teilmenge der rationalen Zahlen in $[0, 1)$ Lebesgue-Maß 0 hat.

Bemerkung: Dank des Gesetzes des iterierten Logarithmus von Khinchin für die unendliche Bernoulli-Kette Ber$(1/10)$ kann man sogar die Konvergenzrate in (*) bestimmen:

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\nu_n(X, i) - n/10}{\sqrt{n \log\log n}} = \sqrt{2\frac{1}{10}\frac{9}{10}} = \frac{3\sqrt{2}}{10} \quad \text{f.s.}$$

Aufgabe 7.27: Bernoulli-Wette ●●●

André wettet auf den Ausgang eines Münzwurfs, dessen Erfolg mit Wahrscheinlichkeit $p \in (0, 1)$ eintritt.

Es sei $X_0 := 1$. Sei X_n Andrés zufälliges Kapital nach dem n-ten Wurf, $n \in \mathbb{N}$.

André setzt bei der n-ten Wette einen festen Anteil $0 < \alpha < 1$ seines aktuellen Kapitals ein. Wenn er gewinnt, bekommt er zweimal seinen Einsatz zurück, sonst verliert er seinen Einsatz.

(a) Beweisen Sie, dass

$$X_n = \prod_{k=1}^{n} (1 + \alpha Y_k).$$

Geben Sie die Folge $(Y_k)_k$ explizit an.

(b) Studieren Sie den Limes der Folge $\left(\frac{1}{n} \log X_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ in Abhängigkeit der beiden Parameter p und α.

(c) Sei $p \leq \frac{1}{2}$. Zeigen Sie, dass $(X_n)_n$ fast sicher konvergiert und bestimmen Sie den Limes.

(d) Sei $p > \frac{1}{2}$. Zeigen Sie die Existenz eines kritischen Wertes α_c, sodass falls $\alpha > \alpha_c$, die Folge $(X_n)_n$ fast sicher gegen 0 konvergiert und falls $\alpha < \alpha_c$, die Folge $(X_n)_n$ fast sicher gegen ∞ divergiert.

Lösung:

(a) Definieren Sie $Y_k = 1$, falls André beim k-ten Spiel gewinnt, und sonst $Y_k = -1$. Die Zufallsvariablen $(Y_k)_{k \in \mathbb{N}}$ sind unabhängig und identisch verteilt mit

$$\mathbb{P}(Y_k = 1) = p = 1 - \mathbb{P}(Y_k = -1).$$

Daraus folgt die Rekursion

$$X_n = X_{n-1} + Y_n \, \alpha X_{n-1} = X_{n-1} \, (1 + \alpha Y_n) = X_0 \prod_{k=1}^{n} (1 + \alpha Y_k).$$

Damit ist die Aussage für beliebige $n \in \mathbb{N}$ bewiesen.

(b) Es gilt

$$\frac{1}{n} \log X_n = \frac{1}{n} \log \left(\prod_{k=1}^{n} (1 + \alpha Y_k) \right) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \log(1 + \alpha Y_k).$$

Da die Zufallsvariablen $(Y_k)_{k \in \mathbb{N}}$ unabhängig sind, sind auch $\Big(\log(1 + \alpha Y_k) \Big)_{k \in \mathbb{N}}$ unabhängig.

Sie sind auch in L^1, denn

$$\mathbb{E}\Big(|\log(1+\alpha Y_n)|\Big) = p|\log(1+\alpha)| + (1-p)|\log(1-\alpha)| < \infty$$

Man kann daher das starke Gesetz der großen Zahlen anwenden. Es folgt die folgende fast sichere Konvergenz:

$$Z_n := \frac{1}{n}\log X_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbb{E}\Big(\log(1+\alpha Y_1)\Big),$$

mit

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\Big(\log(1+\alpha Y_1)\Big) &= p\log(1+\alpha) + (1-p)\log(1-\alpha)\\ &= \log\Big((1+\alpha)^p(1-\alpha)^{1-p}\Big) =: z_{\alpha,p}.\end{aligned}$$

(c) Da $X_n = \exp(n Z_n)$ hat man

$$X_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \text{ f.s.} \iff z_{\alpha,p} < 0.$$

Man bemerke, dass

$$p \mapsto z_{\alpha,p} = p\log\Big(\frac{1+\alpha}{1-\alpha}\Big) + \log(1-\alpha)$$

eine wachsende Funktion ist. Daher gilt für $p \leq \frac{1}{2}$:

$$z_{\alpha,p} \leq z_{\alpha,1/2} = \frac{1}{2}\log(1-\alpha^2) < 0.$$

Demnach gilt fast sicher

$$\lim_{n\to\infty} X_n = \lim_{n\to\infty} \exp(n\, z_{\alpha,p}) = 0.$$

(d) Sei nun $p > \frac{1}{2}$. Man untersuche die Monotonie-Eigenschaften auf $[0,1)$ der Funktion $\alpha \mapsto z_{\alpha,p}$ oder in äquivalenter Weise, der Funktion

$$\alpha \mapsto (1+\alpha)^p(1-\alpha)^{1-p}.$$

Ihre erste Ableitung ist gleich $(2p-1-\alpha)(1+\alpha)^{p-1}(1-\alpha)^{-p}$. Dies impliziert, dass $\alpha \mapsto z_{\alpha,p}$ auf $[0, 2p-1]$ streng monoton steigend und auf $[2p-1, 1)$ streng monoton fallend ist, mit Randwerten $z_{0,p} = \log 1 = 0, \lim_{\alpha\to 1} z_{\alpha,p} = -\infty$. Dank des Zwischenwertsatzes gibt es einen kritischen Wert $\alpha_c \in (2p-1, 1)$, so dass $z_{\alpha_c,p} = 0$, siehe Abbildung 7.1.

Daraus folgt

$$0 < \alpha < \alpha_c \Rightarrow z_{\alpha,p} > z_{\alpha_c,p} = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} X_n = \lim_{n\to\infty} \exp(n\, z_{\alpha,p}) = +\infty \text{ f.s.}$$

und

$$\alpha_c < \alpha < 1 \Rightarrow z_{\alpha,p} < z_{\alpha_c,p} = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} X_n = \lim_{n\to\infty} \exp(n\, z_{\alpha,p}) = 0 \text{ f.s.}$$

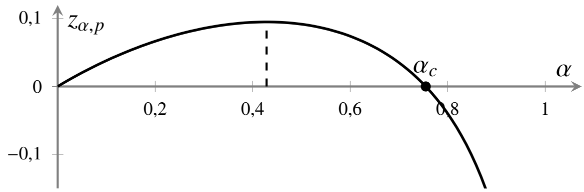


Abbildung 7.1: Graph der Funktion $\alpha \mapsto z_{\alpha,p}$ für $p = 5/7$. Der kritische Wert α_c liegt bei 0,76.

7.5 Sonstiges

Aufgabe 7.28: Legendre-Transformation ○●●

Sei

$$\Lambda(t) := \log\Big(\mathbb{E}(e^{tX})\Big), \quad t \in \mathbb{R},$$

die logarithmische momenterzeugende Funktion der reellen Zufallsvariable X, falls sie existiert.

Die Legendre-Transformierte von Λ ist durch

$$\Lambda^*(z) = \sup_{t\in\mathbb{R}} \Big(t\,z - \Lambda(t)\Big), \quad z \in \mathbb{R},$$

definiert.

Man berechne Λ^* in den folgenden Fällen:

(a) X ist standardnormalverteilt.

(b) X ist $\mathcal{U}_{\{-1,1\}}$-verteilt.

Hinweis: *Benutzen Sie die Identität:* $2\operatorname{arctanh}(z) = \log(1+z) - \log(1-z)$.

Lösung:

(a) Sei $X \sim \mathcal{N}(0,1)$. Dann existiert $\Lambda(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ und es gilt

$$\Lambda(t) = \log\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} e^{tx}e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx\right) = \log\left(e^{\frac{t^2}{2}}\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x+t)^2}{2}}\,dx}_{=1}\right) = \frac{t^2}{2}.$$

Es folgt $\Lambda^*(z) = \sup_{t\in\mathbb{R}}\Big(t\,z - t^2/2\Big)$.

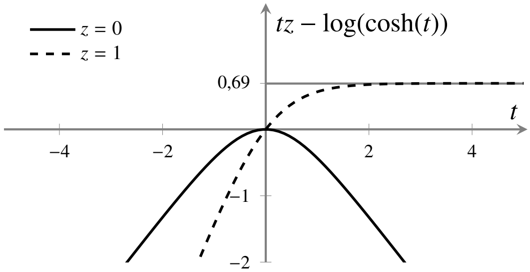


Abbildung 7.2: Graph der Funktion $t \mapsto tz - \Lambda(t)$ für $z = 0$ und $z = 1$.

Zur Bestimmung des Supremums berechne man:

$$\frac{d}{dt}\Big(t\,z - \frac{t^2}{2}\Big) = z - t \overset{!}{=} 0 \Leftrightarrow t = z,$$
$$\frac{d^2}{dt^2}\Big(tz - \frac{t^2}{2}\Big) = \frac{d}{dt}(z - t) = -1.$$

Daher ist $t = z$ die Stelle des Maximums der Funktion $t \mapsto t\,z - \frac{t^2}{2}$ und es folgt

$$\Lambda^*(z) = z \cdot z - \frac{z^2}{2} = \frac{z^2}{2}.$$

(b) Sei $X \sim \frac{1}{2}\delta_{-1} + \frac{1}{2}\delta_1$. Dann ist die Funktion Λ wohl definiert auf $\mathbb{R}$ und sie erfüllt

$$\Lambda(t) = \log\left(\frac{e^{-t} + e^t}{2}\right) = \log(\cosh(t)).$$

Analog zu (a) berechne man

$$\frac{d}{dt}\,(t\,z - \log(\cosh(t))) = z - \tanh(t) \overset{!}{=} 0 \Leftrightarrow t = \operatorname{arctanh}(z)$$
$$\frac{d^2}{dt^2}(t\,z - \log(\cosh(t)) = \frac{d}{dt}(z - \tanh(t)) = -1 + \tanh^2(t) < 0.$$

Daher hat die Funktion $t \mapsto t\,z - \log(\cosh(t))$ an der Stelle $\operatorname{arctanh}(z)$ ein Maximum, falls $|z| < 1$.

Nun ist $\operatorname{arctanh}(z) = \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$. Daraus folgert man für $|z| < 1$,

$$\begin{aligned}\Lambda^*(z) &= z\ \operatorname{arctanh}(z) - \log\left(\cosh(\operatorname{arctanh}(z))\right)\\ &= \frac{z}{2}\log\left(\frac{1+z}{1-z}\right) + \frac{1}{2}\log\left((1+z)(1-z)\right)\\ &= \frac{1+z}{2}\log(1+z) + \frac{1-z}{2}\log(1-z).\end{aligned}$$

Sonst gilt $\Lambda^*(\pm 1) = \log 2 \approx 0{,}69$ und $\Lambda^*(z) = +\infty$ für $|z| > 1$, siehe Abbildung 7.2.

Bemerkung: Die Funktion Λ^* kommt als Ratenfunktion der großen Abweichungen im Satz von Cramér vor.

Aufgabe 7.29: Große Abweichungen im Poisson-Fall ●●●

Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge unabhängiger zum Parameter 1 Poisson-verteilter Zufallsvariablen. Man betrachte $S_n := \sum_{i=1}^n X_i$.

Ziel der Aufgabe ist es, einen direkten Beweis für das folgende Prinzip der großen Abweichungen durchzuführen:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\mathbb{P}\Big(\frac{S_n}{n} \geq nx\Big) = x - 1 - x\log x =: -I_{Poi}(x),\ x > 1. \qquad (\star)$$

(a) Zeigen Sie zunächst, dass $\mathbb{P}(S_n = j+1) = \dfrac{n}{j+1}\mathbb{P}(S_n = j)$, $j \in \mathbb{N}_0$, und schließen Sie daraus, dass

$$\mathbb{P}(S_n \geq k) = \mathbb{P}(S_n = k)\sum_{j=1}^{\infty}\frac{n^j}{(k+1)\dots(k+j)},\ k \in \mathbb{N}.$$

(b) Zeigen Sie folgende asymptotische Äquivalenz für $n \to \infty$ und $\frac{k}{n} \to x > 1$,

$$\mathbb{P}\Big(\frac{S_n}{n} \geq x\Big) \sim c\ \mathbb{P}(S_n = k),$$

wobei c eine Konstante ist, die Sie bestimmen sollen.

(c) Für $k \sim xn$ beweisen Sie, dass asymptotisch in n gilt:

$$\mathbb{P}(S_n = k) \sim \frac{e^{n(x-1)}}{\sqrt{2\pi nx}}\, x^{-nx}.$$

Schließen Sie $(\star)$ daraus.

Lösung:

(a) Die Poisson-Verteilung ist faltungsstabil (siehe Aufgabe 2.35), daher ist S_n Poisson-verteilt zum Parameter $n \cdot 1 = n$.

Nun ergibt sich offenbar

$$\mathbb{P}(S_n = j+1) = e^{-n} \frac{n^j}{j!} \frac{n}{j+1} = \mathbb{P}(S_n = j) \frac{n}{j+1},$$

und daher

$$\mathbb{P}(S_n \geq k) = \sum_{j=k}^{\infty} \mathbb{P}(S_n = j) = \mathbb{P}(S_n = k) \sum_{j=1}^{\infty} \frac{n^j}{(k+1)\dots(k+j)}.$$

(b) Sei nun $x > 1$ beliebig aber fest und $k_n := \lfloor xn \rfloor$. Man hat $\lim_{n\to\infty} \frac{k_n}{n} = x$. Damit gilt nach (a)

$$\mathbb{P}(S_n \geq k_n) = \mathbb{P}(S_n = k_n) \sum_{j=1}^{\infty} \left(\left(\frac{k_n}{n} + \frac{1}{n}\right) \dots \left(\frac{k_n}{n} + \frac{j}{n}\right) \right)^{-1}.$$

Der allgemeine Term der Reihe konvergiert für n groß gegen $\frac{1}{x^i}$. Daraus folgt asymptotisch

$$\mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} \geq x\right) \sim c\, \mathbb{P}(S_n = k_n) \text{ wobei } c := \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{x^j} < +\infty.$$

(c) Mit Hilfe der Stirlingformel schätzt man weiter für große n ab,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(S_n = k_n) &= e^{-n}\, n^{k_n} \frac{1}{k_n!} \sim e^{-n}\, n^{k_n} \frac{e^{k_n}}{\sqrt{2\pi k_n}\, k_n^{k_n}} \\ &= \frac{e^{n\left(\frac{k_n}{n}-1\right)}}{\sqrt{2\pi k_n}} e^{-k_n \log(k_n/n)} \sim \frac{e^{n\,(x-1)} e^{-nx \log x}}{\sqrt{2\pi n x}}. \end{aligned}$$

Daraus folgert man

$$I_{Poi}(x) = -\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \mathbb{P}(S_n = k_n) = x \log x + 1 - x, \;\; x > 1.$$

Bemerkung: Man könnte auch den Cramérschen Satz über große Abweichungen anwenden. Die Ratenfunktion I_{Poi} wird dann als Legendre-Transformierte der logarithmischen momentenerzeugenden Funktion von X_i berechnet, siehe Aufgabe 7.28.

Aufgabe 7.30: Große Abweichungen für den fairen Münzwurf ○●●

Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge unabhängiger Zufallsvariablen mit $\mathbb{P}_{X_i} = \frac{1}{2}(\delta_{-1}+\delta_1)$. Betrachten Sie $S_n := \sum_{i=1}^n X_i$.

Ziel der Aufgabe ist es, einen direkten Beweis für das folgende Prinzip der großen Abweichungen durchzuführen:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} \geq x\right) = -I_{MW}(x), \quad x \in \mathbb{R}^+, \tag{$\star$}$$

wobei

$$I_{MW}(x) = \begin{cases} \frac{1+x}{2}\log(1+x) + \frac{1-x}{2}\log(1-x), & x \leq 1, \\ \infty, & x > 1. \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie zunächst, dass für $x \in (0,1)$

$$\mathbb{P}(S_n \geq xn) = 2^{-n} \sum_{k\geq(1+x)n/2}^{n} \binom{n}{k}.$$

(b) Schließen Sie daraus, dass

$$2^{-n}\, b_n(x) \leq \mathbb{P}(S_n \geq xn) \leq \left(\frac{n}{2}+1\right) 2^{-n}\, b_n(x),$$

wobei

$$b_n(x) := \max\left\{\binom{n}{k} : a_n(x) \leq k \leq n\right\} = \binom{n}{a_n(x)}$$

mit $a_n(x) := \lceil (1+x)n/2 \rceil$.

(c) Schließen Sie mit Hilfe der Stirlingformel auf ($\star$).

Lösung:

(a) Da $(X_i+1)/2 \sim \mathrm{Ber}(1/2)$ hat man $Y_n := (S_n+n)/2 \sim \mathrm{Bin}(n,1/2)$. Das heißt:

$$\mathbb{P}(S_n \geq xn) = \mathbb{P}(Y_n \geq (1+x)\,n/2) = \mathrm{Bin}(n,1/2)([(1+x)\,n/2, n]).$$

(b) Die Anzahl der Terme in der Summe in (a) ist durch $(\frac{n}{2}+1)$ beschränkt. Außerdem ist die Abbildung $k \mapsto \binom{n}{k}$ monoton fallend ab $k = n/2$. Daher ist $b_n(x) = \binom{n}{a_n(x)}$. Dies impliziert die Abschätzung.

(c) Es gilt asymptotisch in n dank der Stirlingformel

$$\begin{aligned} \frac{1}{n}\log b_n(x) &\sim \frac{1}{n}\log \frac{n^n}{a_n(x)^{a_n(x)}(n-a_n(x))^{n-a_n(x)}} \\ &\sim \log n - \frac{a_n(x)}{n}\log a_n(x) - \frac{n-a_n(x)}{n}\log(n-a_n(x)). \end{aligned}$$

Anschließend bekommt man für $x \in (0,1)$

$$\lim_n \frac{1}{n} \log b_n(x) = \frac{1+x}{2} \log \frac{1+x}{2} + \frac{1-x}{2} \log \frac{1-x}{2} = -I_{MW}(x) + \log 2.$$

Dies impliziert $(\star)$ für $x \in (0,1)$ nach (b).

Für $x > 1$ gilt $(\star)$ da $\mathbb{P}(S_n > n) = 0$. Schließlich gilt $(\star)$ auch für $x = 1$ da

$$\mathbb{P}(S_n \geq n) = \mathbb{P}(S_n = n) = 2^{-n} \Rightarrow \frac{1}{n} \log \mathbb{P}(S_n \geq n) = -\log 2 = -I_{MW}(1).$$

Bemerkung: Man könnte auch den Cramérschen Satz über große Abweichungen anwenden. Die Ratenfunktion I_{MW} wurde als Legendre-Transformierte der logarithmischen momentenerzeugenden Funktion von X_i in Aufgabe 7.28 gerechnet.

Aufgabe 7.31: Kein Gesetz vom iterierten Logarithmus ●●●

Sei $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge zentrierter, unabhängiger, identisch verteilter Zufallsvariablen. Nehmen Sie an, $X_n \notin L^2$, das heißt, es existiere $1 < \alpha < 2$ mit $\mathbb{E}|X_n|^\alpha = +\infty$. Betrachten Sie $S_n := \sum_{i=1}^n X_i$.

(a) Beweisen Sie zunächst, dass fast sicher

$$\limsup_{n \to \infty} \frac{|X_n|}{n^{\frac{1}{\alpha}}} = +\infty.$$

(b) Beweisen Sie, dass die Folge $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ keinem Gesetz vom iterierten Logarithmus genügt:

$$\limsup_{n \to \infty} \frac{|S_n|}{\sqrt{n \log(\log n)}} = +\infty.$$

Lösung:

(a) Es gilt nach der Aufgabe 3.4, für beliebige Konstante $c > 0$ und $i \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{E}(|X_i|^\alpha) = \int_0^\infty \mathbb{P}(|X_i|^\alpha \geq x)\, dx = c \int_0^\infty \mathbb{P}(|X_i|^\alpha \geq c\, y)\, dy = +\infty.$$

Damit divergiert auch die Reihe

$$\sum_n \mathbb{P}(|X_i|^\alpha \geq c\, n) = \sum_n \mathbb{P}(|X_i| \geq c' n^{\frac{1}{\alpha}}) = \sum_n \mathbb{P}(|X_n| \geq c' n^{\frac{1}{\alpha}}), \text{ wobei } c' := c^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Nach dem zweiten Lemma von Borel-Cantelli (siehe Aufgabe 1.41) folgt nun

$$\limsup_n \frac{|X_n|}{n^{\frac{1}{\alpha}}} \geq c' \quad \text{f.s.}$$

für beliebige $c' > 0$. Daraus folgt nun

$$\limsup_n \frac{|X_n|}{n^{\frac{1}{\alpha}}} = +\infty \quad \text{f.s.}$$

(b) Außerdem gilt weiter

$$\max(\,|S_n|, |S_{n-1}|\,) \geq \frac{1}{2}(\,|S_n| + |S_{n-1}|\,) \geq \frac{1}{2}|S_n - S_{n-1}| = \frac{1}{2}|X_n|$$

und damit

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{|S_n|}{n^{\frac{1}{\alpha}}} = +\infty \quad \text{f.s.}$$

Da $1/\alpha > 1/2$, ist $n^{1/\alpha} \gg n^{1/2}\sqrt{\log(\log(n))}$. Es folgt nun

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{|S_n|}{\sqrt{n\log(\log n)}} \geq \limsup_{n\to\infty} \frac{|S_n|}{n^{\frac{1}{\alpha}}} = +\infty.$$

Das Gesetz des iterierten Logarithmus gilt in diesem Fall nicht, da die Zufallsvariablen X_n nicht quadratintegrierbar sind.

Aufgabe 7.32: Konvergenzradius einer zufälligen Potenzreihe ○●●

Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reellwertiger Zufallsvariablen. Sei $\mathcal{F}_k$, $k \in \mathbb{N}$, die σ-Algebra $\sigma(X_k, X_{k+1}, \ldots)$ und $\mathcal{T}$ die terminale σ-Algebra durch $\cap_k \mathcal{F}_k$ definiert.

(a) Beweisen Sie, dass die Zufallsvariable $\limsup_n |X_n|^{\frac{1}{n}}$ $\mathcal{T}$-messbar ist.

(b) Es wird jetzt angenommen, dass die Zufallsvariablen $(X_n)_n$ unabhängig sind. Sei R der Konvergenzradius der zufälligen Potenzreihe $z \mapsto \sum_n X_n z^n$ mit Koeffizienten X_n.

Beweisen Sie, dass R fast sicher konstant ist.

Lösung:

(a) Man hat per Definition

$$\limsup |X_n|^{\frac{1}{n}} = \lim_{k\to\infty} \underbrace{\sup_{n\geq k} |X_n|^{\frac{1}{n}}}_{=:Y_k}.$$

Sei $k_0 \in \mathbb{N}$ beliebig, aber fest. Für jedes $k \geq k_0$ ist Y_k $\mathcal{F}_k$-messbar und daher auch $\mathcal{F}_{k_0}$-messbar. Folglich ist $\lim_{k\to\infty} Y_k$ $\mathcal{F}_{k_0}$-messbar. Dies bedeutet aber nichts anderes, als die $\mathcal{T}$-Messbarkeit der Zufallsvariable $\lim_{k\to\infty} Y_k = \limsup |X_n|^{\frac{1}{n}}$.

(b) Der Konvergenzradius R der Potenzreihe ist durch

$$R = 1/\limsup_{n\to\infty} |X_n|^{\frac{1}{n}}$$

definiert. Nach (a) ist also die Zufallsvariable R $\mathcal{T}$-messbar. Aber wegen der Unabhängigkeit der Folge $(X_n)_n$ gilt das 0-1 Gesetz von Kolmogoroff: die σ-Algebra $\mathcal{T}$ ist trivial. Die Zufallsvariable R ist damit fast sicher konstant.

Aufgabe 7.33: Konvergenz versus Divergenz einer Gaußschen Reihe ●●●

In dieser Aufgabe wird die Konvergenz bzw. Divergenz einer Reihe von quadrierten Gauß-Variablen bewiesen.

(a) Sei $(Z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge positiver unabhängiger Zufallsvariablen in L^1. Beweisen Sie, dass die zufällige Reihe $\sum_k Z_k$ in L^1 genau dann konvergiert, wenn die reelle Reihe $\sum_k \mathbb{E}(Z_k)$ in $\mathbb{R}$ konvergiert.

(b) Sei $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge unabhängiger Zufallsvariablen mit $X_k \sim \mathcal{N}(\mu_k, \sigma_k^2)$ wobei $\sigma_k > 0$.

Beweisen Sie, dass $\sum_k X_k^2$ in L^1 genau dann konvergiert, wenn $\sum_k(\mu_k^2 + \sigma_k^2) < \infty$. Wenn diese Bedingung erfüllt ist, beweisen Sie, dass $\sum_k X_k^2$ sogar in L^p konvergiert für jedes $p > 1$.

(c) Sei $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge unabhängiger Zufallsvariablen mit $X_k \sim \mathcal{N}(0, \sigma_k^2)$. Nehmen Sie an, die Reihe $\sum_k \sigma_k^2$ divergiert.

Beweisen Sie zuerst, dass $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(e^{-\sum_{k=1}^n X_k^2}) = 0$ und schließen Sie daraus, dass unter dieser Bedingung

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^n X_k^2 = +\infty \quad \text{f.s.}$$

Hinweis: *Man kann das 0-1 Gesetz von Kolmogoroff benutzen.*

Lösung:

(a) Die L^1-Konvergenz, wenn $n \to \infty$, der zufälligen Partialsummen $\sum_{k\geq 1}^{n} Z_k$ ist gleichbedeutend mit der L^1-Konvergenz gegen 0 der Restsummen $\sum_{k=n}^{\infty} Z_k$.

Dank des Satzes von Beppo-Levi gilt aber

$$\mathbb{E}\Big(\sum_{k=n}^{\infty} Z_k\Big) = \sum_{k=n}^{\infty} \mathbb{E}(Z_k).$$

(b) Nach (a) gilt

$$\sum_k X_k^2 < \infty \text{ in } L^1 \Leftrightarrow \sum_k \mathbb{E}(X_k^2) < \infty.$$

Man bemerke dann, dass $\mathbb{E}(X_k^2) = \sigma_k^2 + \mu_k^2,\ k \in \mathbb{N}$.

X_k lässt sich als $\sigma_k Y_k + \mu_k$ darstellen, wobei $Y_k \sim \mathcal{N}(0,1)$. Daher gilt:

$$\begin{aligned}
0 \leq \|\sum_{k\geq n} X_k^2\|_p &= \|\sum_{k\geq n} (\sigma_k^2 Y_k^2 + 2\sigma_k \mu_k Y_k + \mu_k^2)\|_p \\
&\leq \sum_{k\geq n} \sigma_k^2 \|Y_k^2\|_p + 2\sum_{k\geq n} \sigma_k |\mu_k| \|Y_k\|_p + \sum_{k\geq n} \mu_k^2 \\
&= \|Y_1^2\|_p \sum_{k\geq n} \sigma_k^2 + 2\|Y_1\|_p \sum_{k\geq n} \sigma_k |\mu_k| + \sum_{k\geq n} \mu_k^2 \\
&\leq \|Y_1^2\|_p \sum_{k\geq n} (2\sigma_k^2 + \mu_k^2) + \sum_{k\geq n} \mu_k^2.
\end{aligned}$$

Unter der Annahme, dass die positive Reihe $\sum_k (\sigma_k^2 + \mu_k^2)$ konvergiert, konvergieren die oberen Restsummen gegen 0, wenn $n \to \infty$. Die impliziert dann die Konvergenz der L^p-Norm der zufälligen Reihe $\sum_k X_k^2$, da $\|Y_1^2\|_p < +\infty$ für jedes $p \in \mathbb{R}^+$.

(c) Es gilt wegen der Unabhängigkeit der Folge $(X_k)_k$

$$\mathbb{E}(e^{-\sum_{k=1}^n X_k^2}) = \prod_{k=1}^{n} \mathbb{E}(e^{-\sigma_k^2 Y_k^2})$$

wobei wie vorher $Y_k \sim \mathcal{N}(0,1)$.

Wir berechnen zunächst

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(e^{-\sigma_k^2 Y_k^2}) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-(2\sigma_k^2+1)\frac{y^2}{2}}\, dy = \frac{1}{\sqrt{2\sigma_k^2+1}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\sigma_k^2+1}}.
\end{aligned}$$

Außerdem gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$\prod_{i=1}^{n}(1 + 2\sigma_i^2) \geq 1 + \sum_{i=1}^{n} 2\sigma_i^2 \geq \sum_{i=1}^{n} 2\sigma_i^2.$$

Daraus erhält man nach obigen Rechnungen

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\Big(\exp\big(-\sum_{k=1}^{n} X_k^2\big)\Big) \leq \lim_{n\to\infty}\Big(2\sum_{i=1}^{n}\sigma_i^2\Big)^{-\frac{1}{2}} = 0$$

Daraus folgt dank Monotonie

$$\mathbb{E}\Big(\exp\big(-\sum_{k=1}^{\infty} X_k^2\big)\Big) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\Big(\exp\Big(-\sum_{k=1}^{n} X_k^2\Big)\Big) = 0.$$

Dies impliziert

$$\mathbb{P}\Big(\sum_{k=1}^{\infty} X_k^2 = +\infty\Big) > 0.$$

Da das Ereignis $\{\omega : \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} X_k^2(\omega) = +\infty\}$ zur terminalen σ-Algebra gehört, die wegen des 0-1 Gesetzes von Kolmogoroff trivial ist, folgt

$$\mathbb{P}\Big(\sum_{k=1}^{\infty} X_k^2 = +\infty\Big) = 1.$$

Aufgabe 7.34: Konvergenz einer (skalierten) zufälligen Reihe ●●●

In dieser Aufgabe wird die Konvergenz einer (skalierten) Reihe von parametrisierten Zufallsvariablen untersucht. Die Skalierung hängt vom Parameter $\beta > 0$ ab.

Sei $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Folge unabhängiger Zufallsvariablen, wobei

$$\mathbb{P}_{X_i} = \frac{1}{2i^\beta}(\delta_{-i} + \delta_i) + \big(1 - \frac{1}{i^\beta}\big)\,\delta_0, \quad i \geq 1, \quad \beta > 0.$$

(a) Berechnen Sie $\mathbb{E}(X_i)$ und $\mathrm{Var}(X_i)$.

(b) **Fall $\beta > 3$**: Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum_i \mathrm{Var}(X_i)$ konvergiert. Schließen Sie daraus, dass in diesem Fall die zufällige Reihe $\sum_i X_i$ in L^2 konvergiert.

(c) **Fall $\beta > 1$**: Beweisen Sie, dass die Reihe $\sum_i \mathbb{P}(X_i \neq 0)$ konvergiert. Schließen Sie daraus auf die fast sichere Konvergenz der zufälligen Reihe $\sum_i X_i$.

(d) **Fall** $\beta < \mathbf{1}$:

(i) Beweisen Sie zunächst folgende Äquivalenz:

$$\alpha_n^2 := \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Var}(X_i) \approx \frac{1}{3-\beta}\, n^{3-\beta}.$$

Hinweis: *Approximieren Sie ein Riemann-Integral durch Riemann-Summen.*

(ii) Beweisen Sie, dass $(X_i)_{i\geq 1}$ die folgende Lyapunov-Bedingung

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\alpha_n^4} \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(X_k^4) = 0$$

erfüllt ist und schließen Sie daraus, dass die skalierte Summe

$$n^{\frac{\beta-3}{2}} \sum_{i=1}^{n} X_i$$

in Verteilung gegen eine Normalverteilung konvergiert.

(e) **Fall** $\beta = \mathbf{1}$: Beweisen Sie, dass $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$ in Verteilung gegen $\bar{X}$ konvergiert, wobei die charakteristische Funktion von $\bar{X}$ folgende Form hat:

$$\varphi_{\bar{X}}(t) = \exp\left(- \int_0^1 \frac{1-\cos(xt)}{x}\, dx \right).$$

Ist $\bar{X}$ Gauß-verteilt?

Lösung:

(a) Wegen Symmetrie sind die Zufallsvariablen X_i zentriert. Sonst berechnet man

$$\mathrm{Var}(X_i) = \mathbb{E}(X_i^2) = i^{2-\beta}.$$

(b) Für $\beta > 3$ ist die Reihe

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{Var}(X_i) = \sum_{i=1}^{\infty} i^{2-\beta}$$

konvergent. Es folgt die L^2-Konvergenz der zufälligen Reihe.

(c) Man berechnet

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(X_i \neq 0) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^{\beta}} < \infty.$$

Nach dem Lemma von Borel-Cantelli – siehe Aufgabe 1.23 – impliziert dies, dass

$$\mathbb{P}\Big(\limsup \{X_i \neq 0\}\Big) = 0.$$

Daher verschwindet X_i fast sicher für i groß genug, und damit ist die Reihe $\sum_{i=1}^{\infty} X_i$ fast sicher konvergent.

(d) (i) Es gilt

$$\alpha_n^2 = \sum_{i=1}^{n} i^{2-\beta} = n^{3-\beta}\,\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\Big(\frac{i}{n}\Big)^{2-\beta} \approx n^{3-\beta}\int_0^1 x^{2-\beta}dx = \frac{1}{3-\beta}\,n^{3-\beta}.$$

(ii) Es gilt nun

$$\begin{aligned}\frac{1}{(\alpha_n^2)^2}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}(X_i^4) &\approx \frac{(3-\beta)^2}{n^{6-2\beta}}\sum_{i=1}^{n} i^{4-\beta} = (3-\beta)^2\,n^{\beta-1}\,\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\Big(\frac{i}{n}\Big)^{4-\beta}\\ &\approx (3-\beta)^2\,n^{\beta-1}\int_0^1 x^{4-\beta}dx = \frac{(3-\beta)^2}{5-\beta}\,n^{\beta-1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.\end{aligned}$$

Die Lyapunov-Bedingung ist also erfüllt für den Exponenten $\delta = 2$. Daher gilt die Konvergenz der skalierten Summe $\dfrac{1}{\alpha_n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ gegen die Normalverteilung, siehe zum Beispiel [FF99], Kapitel 18 oder [Dur19], Exercise 3.4.12.

(e) Betrachten Sie zunächst die charakteristische Funktion der Zufallsvariablen X_k.

$$\varphi_{X_k}(t) := \mathbb{E}(e^{itX_k}) = \frac{1}{2k}e^{itk} + \frac{1}{2k}e^{-itk} + \Big(1-\frac{1}{k}\Big) = \frac{1}{k}\cos(kt) + \Big(1-\frac{1}{k}\Big).$$

Daher gilt wegen der Unabhängigkeit der Folge $(X_k)_k$

$$\begin{aligned}\log\varphi_{\sum_{k=1}^n X_k/n}(t) &= \log\Big(\prod_{k=1}^{n}\big(\frac{1}{k}\cos\frac{kt}{n} + (1-\frac{1}{k})\big)\Big)\\ &= \sum_{k=1}^{n}\log\Big(1-\frac{1}{k}\Big(1-\cos\frac{kt}{n}\Big)\Big)\\ &\approx -\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\Big(1-\cos\frac{kt}{n}\Big) = -\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1-\cos\frac{kt}{n}}{\frac{k}{n}}\\ &\xrightarrow[n\to\infty]{} -\int_0^1\frac{1-\cos xt}{x}\,dx.\end{aligned}$$

Man bekommt

$$\varphi_{\bar{X}}(t) := \lim_{n\to\infty} \varphi_{\sum_{k=1}^{n} X_k/n}(t) = \exp\Big(- \int_0^1 \frac{1 - \cos xt}{x} dx \Big) \neq \exp\Big(- \frac{t^2}{2} \Big).$$

Im Gegensatz zum Fall $\beta < 1$, behandelt in (d), ist der Grenzwert $\bar{X}$ nicht Gauß-verteilt.

Literatur

[BCD21] Q. Berger, F. Caravenna und P. Dai Pra. *Un primo corso attraverso esempi, modelli e applicazioni*. 2a ed. Springer-Verlag Italia, 2021.

[Cou19] D. Coupier (Ed.) *Stochastic geometry. Modern research structure frontiers.* Bd. 2237. Lecture Notes in Mathematics. Cham: Springer, 2019.

[Dor+97] A. Y. Dorogovtsev, D. S. Silvestrov, A. V. Skorokhod und M. I. Yadrenko. *Probability theory: collection of problems*. Bd. 163. Translations of Mathematical Monographs. Translated from the 1976 Ukrainian original by O. I. Klesov and V. A. Kotov. Providence: American Mathematical Society, 1997.

[Dur19] R. Durrett. *Probability. Theory and examples*. 5th ed. Bd. 49. Cambridge Series in Statistical and Probabilistic Mathematics. Cambridge: Cambridge University Press, 2019.

[Dvo56] A. Dvoretzky. „On covering a circle by randomly placed arcs“. In: *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* 42 (1956), S. 199–203.

[Fel57] W. Feller. „The numbers of zeros and of changes of sign in a symmetric random walk“. In: *L'enseignement mathématique* 3-1 (1957), S. 229–235.

[Fel68] W. Feller. *An introduction to probability theory and its applications. Volume I*. 3rd ed. Chichester: John Wiley & Sons, 1968.

[FF99] D. Foata und A. Fuchs. *Wahrscheinlichkeitsrechnung.* Basel: Birkhäuser, 1999.

[Gor14] P. Gorroochurn. „Thirteen Correct Solutions to the "Problem of Points" and Their Histories“. In: *Math Intelligencer* 36 (2014), S. 56–64.

[GS20] G. Grimmett und D. Stirzaker. *One Thousand Exercises in Probability.* 3rd ed. Oxford: Oxford University Press, 2020.

[Hal90] A. Hald. *History of Probability and Statistics and Their Applications before 1750*. Wiley Series in Probability and Statistics. Hoboken, New Jersey: John Wiley & Sons, 1990.

[Hen13] N. Henze. *Irrfahrten und verwandte Zufälle. Ein elementarer Einstieg in die stochastischen Prozesse*. Wiesbaden: Springer Spektrum, 2013.

[Hen21] N. Henze. *Stochastik für Einsteiger. Eine Einführung in die faszinierende Welt des Zufalls*. 13. Auflage. Berlin: Springer Spektrum, 2021.

[HM05] C. Hesse und A. Meister. *Übungsbuch zur angewandten Wahrscheinlichkeitsrechnung. Aufgaben und Lösungen.* Wiesbaden: Vieweg, 2005.

[JP04] J. Jacod und P. Protter. *Probability essentials.* 2nd revised ed. Universitext. Berlin: Springer, 2004.

[Jay73] E. T. Jaynes. „The Well-Posed Problem". In: *Foundations of Physics* 3-4 (1973), S. 477–492.

[Moi56] A. de Moivre. *The doctrine of chances*. London: A. Millar, 1756.

[Pól30] G. Pólya. „Eine Wahrscheinlichkeitsaufgabe in der Kundenwerbung". In: *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik* 10-1 (1930), S. 96–97.

[She72] L. A. Shepp. „Covering the line with random intervals". In: *Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und Verwandte Gebiete* 23 (1972), S. 163–170.

[Szé90] G. J. Székely. *Paradoxa. Klassische und neue Überraschungen aus Wahrscheinlichkeitsrechnung und mathematischer Statistik.* Frankfurt am Main: Harri Deutsch Verlag, 1990.

[Tod65] I. Todhunter. *A history of the mathematical theory of probability from the time of Pascal to that of Laplace*. London: Macmillan, 1865.

[Whi86] W. A. Whitworth. *Choice and Chance*. 4th ed. London: George Bell und Sons, 1886.

ANHANG A

Appendix

A.1 Spezielle Verteilungen

Diskrete Verteilungen

Dirac-Verteilung

Die Dirac-Verteilung gibt einem einzelnen Punkt ein Gewicht. Sie ist definiert für $a \in \mathbb{R}$ durch das Maß

$$\delta_a(\{t\}) = \begin{cases} 1, & \text{falls } t = a, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Diskrete Gleichverteilung

Mit $\mathcal{U}_{\{1,2,\dots,n\}}$, $n \in \mathbb{N}$, sei die Verteilung einer *diskret gleichverteilten Zufallsvariable* $X : \Omega \to \{1, 2, \dots, n\}$ bezeichnet.

$$1 \leq k \leq n : \mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{n}, \qquad \mathbb{E}(X) = \frac{n+1}{2}, \qquad \operatorname{Var}(X) = \frac{n^2 - 1}{12}.$$

Bernoulli-Verteilung

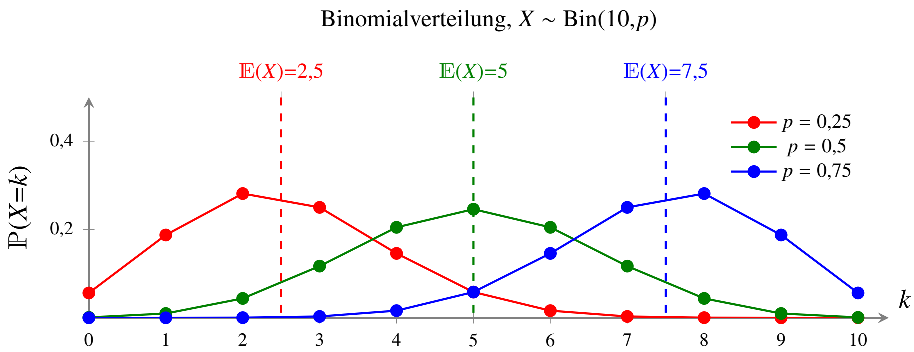
Mit $\operatorname{Ber}(p)$, $p \in [0, 1]$, sei die Verteilung einer *Bernoulli-verteilten Zufallsvariablen* $X : \Omega \to \{0, 1\}$ bezeichnet. Dabei ist p die Erfolgswahrscheinlichkeit eines Experiments.

$$\mathbb{P}(X = k) = \begin{cases} 1 - p, & k = 0 \\ p, & k = 1 \end{cases}, \qquad \mathbb{E}(X) = p, \qquad \operatorname{Var}(X) = p\,(1 - p).$$

Binomialverteilung

Mit $\operatorname{Bin}(n, p)$, $n \in \mathbb{N}$, $p \in [0, 1]$, sei die Verteilung einer binomialverteilten Zufallsvariablen $X : \Omega \to \{0, 1, \dots, n\}$ bezeichnet. Dabei wird ein Experiment n-mal unabhängig wiederholt, das mit Wahrscheinlichkeit p erfolgreich ist. X zählt die Anzahl der Erfolge.

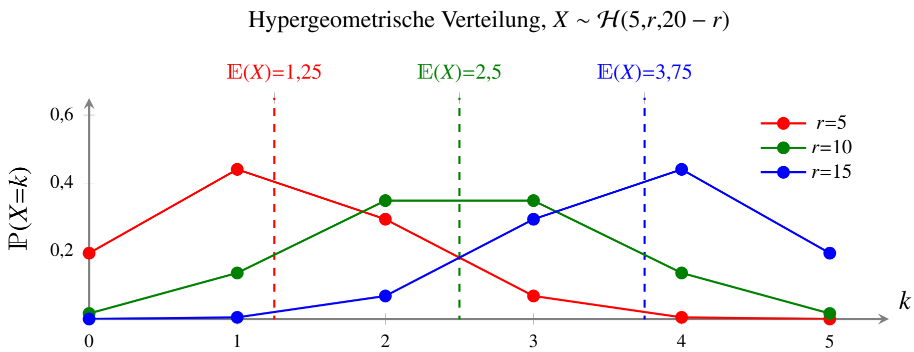
$$0 \leq k \leq n : \mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \qquad \mathbb{E}(X) = np, \qquad \operatorname{Var}(X) = np\,(1-p).$$



Hypergeometrische Verteilung

Mit $\mathcal{H}(n, r, s)$, $n, r, s \in \mathbb{N}$, $n \leq r + s$, sei die Verteilung einer *hypergeometrisch verteilten Zufallsvariable* $X : \Omega \to \{0, 1, \ldots, n\}$ bezeichnet. Dabei ist $r + s$ die Größe einer Population und r die Anzahl Individuen aus der Population mit einem eindeutig unterscheidbaren Merkmal. Aus der Gesamtpopulation wird eine Stichprobe der Größe n gezogen. X zählt die Anzahl Individuen in der Stichprobe mit dem Merkmal.

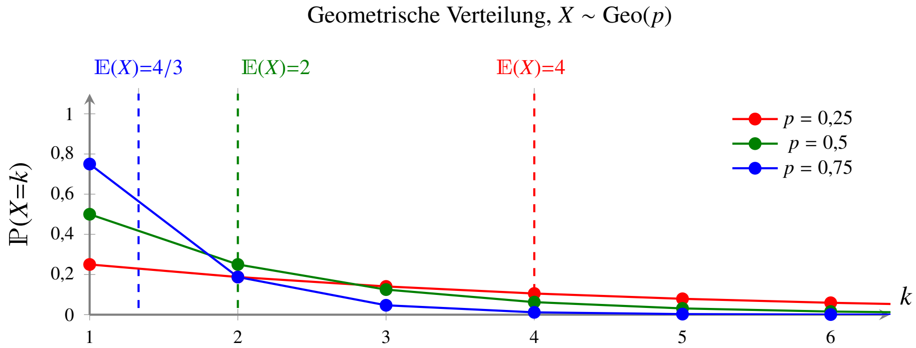
$$0 \leq k \leq n : \mathbb{P}(X = k) = \frac{\binom{r}{k}\binom{s}{n-k}}{\binom{r+s}{n}}, \quad \mathbb{E}(X) = n\,\frac{r}{r+s}, \quad \operatorname{Var}(X) = n\,\frac{r\,s}{(r+s)^2}\,\frac{r+s-n}{r+s-1}.$$



Geometrische Verteilung

Mit Geo(p), $p \in (0,1]$, sei die Verteilung einer *geometrisch verteilten Zufallsvariable* $X : \Omega \to \mathbb{N}$ bezeichnet. Dabei ist p die Erfolgswahrscheinlichkeit eines Experiments und X die Anzahl Experimente bis einschließlich des ersten Erfolgs[1].

$$k \in \mathbb{N} : \mathbb{P}(X = k) = (1-p)^{k-1}\, p, \qquad \mathbb{E}(X) = \frac{1}{p}, \qquad \operatorname{Var}(X) = \frac{1-p}{p^2}.$$



Negative Binomialverteilung

Mit NegBin(r, p), $r \in \mathbb{N}$, $p \in (0,1]$, sei die Verteilung einer *negativ binomialverteilten Zufallsvariable* $X : \Omega \to \{r, r+1, \ldots\}$ bezeichnet. Dabei ist p die Wahrscheinlichkeit des Erfolgs eines Experiments und X die Anzahl Experimente bis einschließlich des r-ten Erfolges.

$$k \geq r : \mathbb{P}(X = k) = \binom{k-1}{r-1} p^r\, (1-p)^{k-r}, \qquad \mathbb{E}(X) = \frac{r}{p}, \qquad \operatorname{Var}(X) = r\frac{1-p}{p^2}.$$

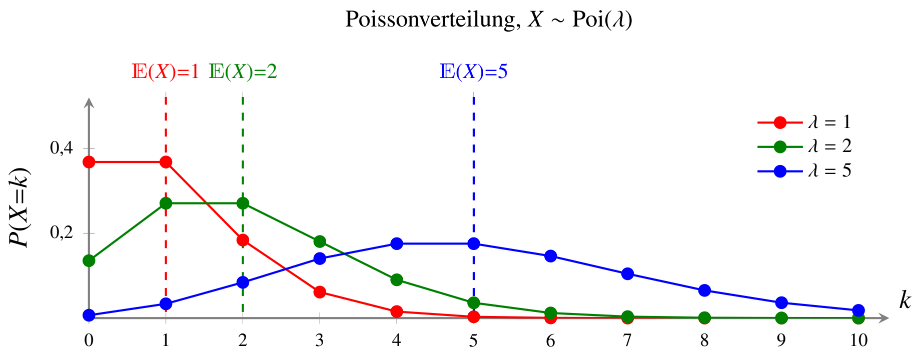
Spezialfall: Für $r = 1$ ergibt sich die geometrische Verteilung Geo(p).

Poisson-Verteilung

Mit Poi(λ) sei die Verteilung einer *Poisson-verteilten Zufallsvariable* $X : \Omega \to \mathbb{N}_0$ bezeichnet, wobei $\lambda \in \mathbb{R}^+$. Dabei ist λ die *Intensität* der Verteilung.

$$k \in \mathbb{N}_0 : \mathbb{P}(X = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}, \qquad \mathbb{E}(X) = \lambda, \qquad \operatorname{Var}(X) = \lambda.$$

[1] In der englischsprachigen Literatur wird häufig nur die Anzahl der Misserfolge gezählt. Dies ergibt eine andere Version der geometrischen Verteilung auf $\mathbb{N}_0$. Das Gleiche gilt für die negative Binomialverteilung.



Absolutstetige Verteilungen

Stetige Gleichverteilung auf dem Intervall $[a, b] \subset \mathbb{R}$

Mit $\mathcal{U}_{[a,b]}$, $a, b \in \mathbb{R}$ und $a < b$, sei die Verteilung einer *stetig gleichverteilten Zufallsvariable* $X : \Omega \to [a, b]$ bezeichnet.

$$f_X(t) = \frac{1}{b-a}\mathbb{1}_{[a,b]}(t), \qquad \mathbb{E}(X) = \frac{b-a}{2}, \qquad \mathrm{Var}(X) = \frac{1}{12}(b-a)^2.$$

Beta-Verteilung

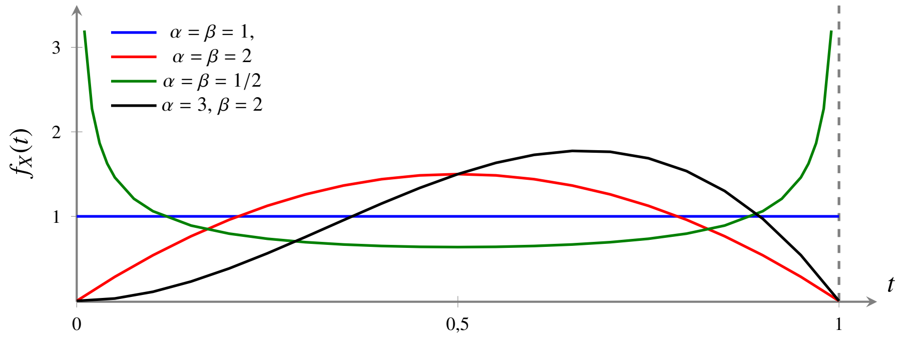
Mit $\mathrm{Beta}(\alpha,\beta)$, $\alpha,\beta \in \mathbb{R}^+$, sei die Verteilung einer *betaverteilten Zufallsvariable* mit $X : \Omega \to [0, 1]$ bezeichnet.

$$f_X(t) = \frac{t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}}{B(\alpha,\beta)}\mathbb{1}_{[0,1]}(t), \quad \mathbb{E}(X) = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}, \quad \mathrm{Var}(X) = \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)},$$

wobei $B(\alpha,\beta) := \Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)(\Gamma(\alpha+\beta))^{-1}$ die Betafunktion ist.

Spezialfall: Für $\alpha = \beta = 1$ ergibt sich die stetige Gleichverteilung $\mathcal{U}_{[0,1]}$.

Betaverteilung, $X \sim \mathrm{Beta}(\alpha, \beta)$



Gamma-, Erlang- und Exponentialverteilung

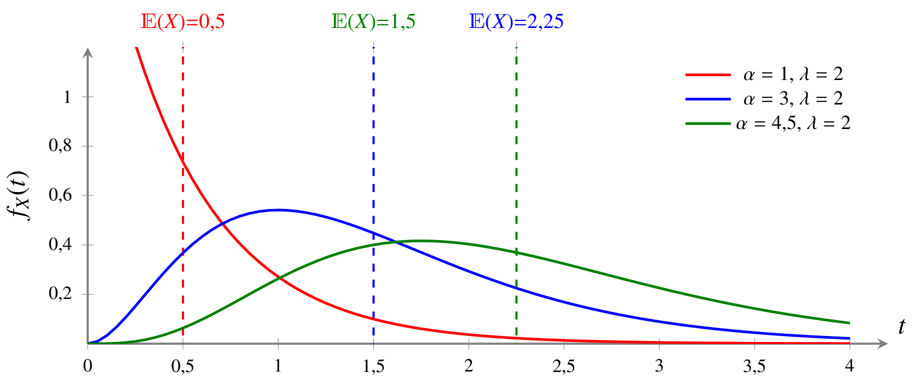
Mit $\Gamma_{\alpha,\lambda}$, $\alpha, \lambda \in \mathbb{R}^+$, sei die Verteilung einer *gammaverteilten Zufallsvariable* $X : \Omega \to \mathbb{R}^+$ bezeichnet.

$$f_X(t) = \lambda \frac{(\lambda\, t)^{k-1}}{\Gamma(\alpha)} e^{-\lambda t} \mathbb{1}_{R^+}(t), \qquad \mathbb{E}(X) = \frac{\alpha}{\lambda}, \qquad \mathrm{Var}(X) = \frac{\alpha}{\lambda^2}.$$

Spezialfall 1: Für $\alpha = k \in \mathbb{N}$ erhält man die *Erlang-Verteilung*, abgekürzt mit $\mathrm{Erl}(k, \lambda)$.

Spezialfall 2: Für $\alpha = 1$ ergibt sich die *Exponentialverteilung*, abgekürzt mit $\mathrm{Exp}(\lambda)$.

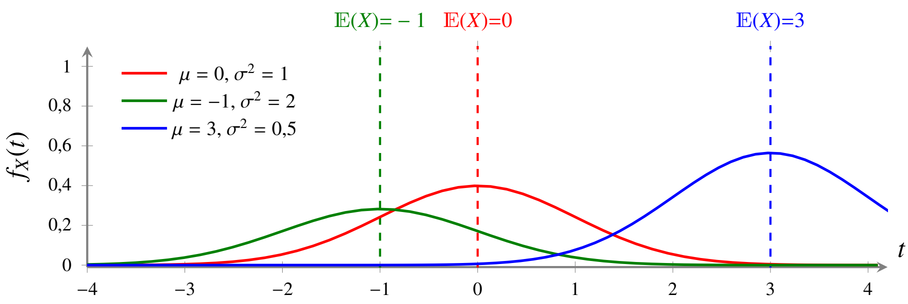
Gammaverteilung, $X \sim \Gamma(\alpha, \lambda)$



Normalverteilung

Mit $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma \in \mathbb{R}^+$, sei die Verteilung einer *normalverteilten Zufallsvariable* $X : \Omega \to \mathbb{R}$ bezeichnet. Für $\mu = 0$ und $\sigma^2 = 1$ spricht man von *Standardnormalverteilung*.

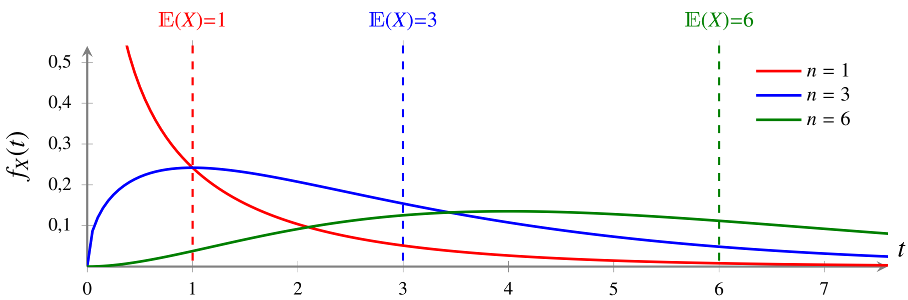
$$f_X(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \qquad \mathbb{E}(X) = \mu, \qquad \mathrm{Var}(X) = \sigma^2.$$



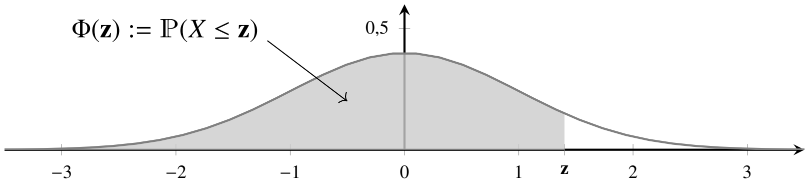
Chi-Quadrat-Verteilung

Mit χ_n^2, $n \in \mathbb{N}$, sei die Verteilung einer *Chi-Quadrat verteilten Zufallsvariable mit n Freiheitsgraden* $X : \Omega \to \mathbb{R}^+$ bezeichnet.

$$f_X(t) = \frac{1}{2^{n/2}\Gamma(n/2)} t^{n/2-1} e^{-t/2} \mathbb{1}_{R^+}(t), \qquad \mathbb{E}(X) = n, \qquad \mathrm{Var}(X) = 2n.$$



A.2 Tabelle der Standardnormalverteilung



z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,00	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,10	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,20	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,30	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,40	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,50	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,60	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,70	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,80	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,90	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,00	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,10	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,20	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,30	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,40	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,50	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,60	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,70	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,80	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,90	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,00	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,10	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,20	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,30	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,40	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,50	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,60	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,70	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,80	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,90	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,00	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,10	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993

Tabelle A.1: Tabelle der Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung (gerundet auf vier Stellen).

A.3 Bildnachweis

Die Abbildung in der Danksagung ist eine Reproduktion von Paul Klees *freundliches Spiel* von 1933. Gemeinfrei, Wikimedia Commons: `https://commons.wikimedia.org/wiki/File:1933_Klee_freundliches_Spiel_anagoria.JPG`

Sämtliche anderen Abbildungen in diesem Buch sind mit dem TikZ-Paket von LaTeX von Peter Keller erstellt worden. Ausgenommen davon sind die Abbildungen 6.3, 6.6 - 6.8 sowie der Zeitstrahl im Kapitel *Historischer Einblick*, die in Adobe Illustrator erstellt wurden.

Die Graphen wurden mit dem pgfplot-Paket in TikZ erstellt.

Die Karikaturen für dieses Buch wurden von der Zeichnerin *Gisela Gurr* erstellt, mit freundlicher Genehmigung zur Nutzung. Die Illustrationen sind urheberrechtlich geschützt und sind nicht unter der Creative-Commons-Lizenz CC-BY 4.0 lizenziert, unter der dieses Werk veröffentlicht ist.

Dieses Buch stellt Übungen zu den Grundbegriffen und Grundsätzen der Stochastik und ihre Lösungen zur Verfügung. So wie man Tonleitern in der Musik trainiert, so berechnet man Übungsaufgaben in der Mathematik. In diesem Sinne soll dieses Übungsbuch vor allem als Vorlage dienen für das eigenständige Lernen und Üben.

Die Schönheit und Einzigartigkeit der Wahrscheinlichkeitstheorie besteht darin, dass sie eine Vielzahl von realen Phänomenen modellieren kann. Daher findet man hier Aufgaben mit Verbindungen zur Geometrie, zu Glücksspielen, zur Versicherungsmathematik, zur Demographie und vielen anderen Themen.

ISBN 978-3-86956-563-7
9 783869 565637