Universität Potsdam

Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät

Institut für Mathematik

Wintersemester 2019 / 2020

Grundvorstellungen bei Zahlbereichserweiterungen

Von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{Q}^+$ oder von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{Z}$?

Eingereicht von Melina Fabian

Zur Erlangung des akademischen Grades Master of Education

Erstgutachter:	Christian Dohrmann
Zweitgutachter:	Prof. Dr. Ulrich Kortenkamp

Melina Fabian

Online veröffentlicht auf dem
Publikationsserver der Universität Potsdam:
https://doi.org/10.25932/publishup-56593
https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:kobv:517-opus4-565930

Inhaltsverzeichnis

1 Problemstellung

> „Der wahrscheinlich größte Fehler des traditionellen Unterrichts besteht darin, dass zu schnell auf eine formal-regelhafte Ebene aufgestiegen wird, bevor noch ausreichend intuitive und anschauliche Vorstellungen vom jeweiligen Stoff erworben wurden.“ (Malle 2004, S. 4)

Die von Malle (2004) formulierte Problematik versteht sich als vermutlich bedeutsamster Kritikpunkt am heutigen Mathematikunterricht: In strenger Orientierung an den erprobten traditionell-axiomatischen Vorgehensweisen wird in mathematischen Lehr-Lern-Prozessen nach wie vor auf die Vermittlung von Standardverfahren und dem damit einhergehenden formalen Regelwissen gesetzt (vgl. vom Hofe 2003). Bereits in der Grundschule werden die Schülerinnen und Schüler im Mathematikunterricht dazu aufgefordert, sich deduktiv vermittelte Lerngegenstände mit Hilfe von Rechenregeln, Formeln und eingängigen Merksätzen einzuprägen. Eine vollständige inhaltliche Durchdringung kann hier wohl kaum angenommen werden. Wo leicht verständliche Merksätze und Formeln wie *Zähler mal Zähler und Nennen mal Nenner* (für die Multiplikation von Brüchen) oder *Minus mal Minus ergibt Plus* (für die Multiplikation zweier negativer Zahlen) eine an Ideen und Vorstellungen geknüpfte Erschließung des Themas ersetzen, entstehen Fehlvorstellungen und Irritationen, die es zunehmend erschweren, sich in stetig erweiterten Zahlbereichen zurechtzufinden (vgl. Hefendehl-Hebeker & Prediger 2006). Dass der heutige Mathematikunterricht den Erwerb flexibel einsetzbarer mathematischer Fähigkeiten vernachlässigt, bestätigen auch die internationalen Vergleichsstudien TIMMS und PISA (vgl. vom Hofe 2003). Als besonders fehleranfällig gehen aus diesen die Anwendungsbereiche elementarer Fertigkeiten wie die Bruch- und Prozentrechnung hervor. Zurückzuführen sind diese Erkenntnisse vor allem auf ein „eingeschränktes Repertoire von Grundvorstellungen“ (Prediger 2009, S. 171), das die Schülerinnen und Schüler beim Mathematisieren und Interpretieren von Sachverhalten daran hindert, erprobte Rechenregeln mit dem notwendigen inhaltlichen Verständnis zu unterfüttern. Nur ein Mathematikunterricht, der sich gemäß dieser Beobachtung um den gezielten „Aufbau adäquater Vorstellungsrepertoires“ (ebd.) bemüht, kann nachhaltig wirksam sein und ein kontinuierlich verständnisförderndes Arbeiten von der Primar- bis hin zur Sekundarstufe ermöglichen. In diesem Zusammenhang werden in jüngeren Publikationen Forderungen nach einer zeitgemäßen Modifizierung mathematischer Grundbildung laut und diverse Vorschläge für die Etablierung neuer Methoden, Materialien und Modelle unterbreitet (vgl. vom Hofe 2003; Malle 2004). Gleichermaßen wie bereits entwickelte Unterrichtskonzepte vor einer frühzeitigen Zuhilfenahme von Formalismen (bei fehlender Verständnisgrundlage) warnen, versteht sich auch die vorliegende Arbeit als Plädoyer für eine Forcierung der den mathematischen Inhalten zu Grunde liegenden intuitiven Vorstellungen und Ideen.

Ein Feld der unterrichtlichen Praxis, welches in der Forschung immer wieder Diskussionen aufwirft und bei den Schülerinnen und Schülern häufig auf Verständnisschwierigkeiten trifft, ist das Operieren in den verschiedenen Zahlbereichen des Zahlsystems. Hefendehl-Hebeker und Prediger (2006) beschreiben das Zahlsystem als „Gebäude von höchster architektonischer Perfektion" (ebd., S. 7), dessen Aufbau im Mathematikunterricht durch sukzessive Erweiterung des natürlichen Zahlbereichs nachvollzogen werden soll. Oftmals wird hierbei der Fokus auf die Endprodukte der Zahlbereichserweiterungen und weniger auf die dahinterstehenden Prozesse gelegt, wodurch mühsam aufgebaute Vorstellungen ins Wanken geraten können. Üblicherweise wird die Existenz nicht-natürlicher Zahlen von der Lehrkraft geleugnet, bis die curricularen Vorgaben die Erweiterung des bekannten Zahlbereichs vorsehen: Demnach bleibt die Gleichung $3x = 5$ vorerst unlösbar und der Ausdruck $\sqrt{2}$ gilt so lang als *nicht definiert*, bis die vertrauten Zahlen und Gewohnheiten den Ansprüchen des Mathematikunterrichts nicht mehr genügen können. Die Schülerinnen und Schüler werden dann damit konfrontiert, dass $3 - 5$ plötzlich doch eine präzise zu berechnende Differenz darstellt und dass zwischen den Zahlen 1 und 2 unvermittelt eine überabzählbar unendliche Menge an neuen Zahlen auftaucht – und zwar genau an der Stelle auf der Zahlengeraden, die vorher noch durch eine große, nicht weiter thematisierte Lücke gekennzeichnet war. Berücksichtigt man, dass die Schülerinnen und Schüler in ihrem Alltag bereits mehrfach mit Bruchzahlen (ein Viertel Liter Milch) oder negativen Zahlen[1] in Berührung gekommen sind, erscheint es umso widersprüchlicher, ihnen diese bekannten,

[1] In Fahrstühlen ist der Ausdruck -1 für das erste Kellergeschoss üblich.

vielleicht sogar vertrauten, Denkobjekte im Unterrichtsgeschehen vorzuenthalten. Insofern liegen Irritationen als grundlegende Fehlerquellen im Umgang mit erweiterten Zahlbereichen zum einen „in der Stoffstruktur selbst“ (ebd., S. 3) und zum anderen in den gängigen mathematikdidaktischen Vorgehensweisen und Methoden begründet. In der Literatur wird nach wie vor die Abfolge von den natürlichen Zahlen über die Bruchzahlen zu den rationalen (und damit ganzen) Zahlen für die Auseinandersetzung im Schulunterricht empfohlen (vgl. Padberg, Dankwerts & Stein 1995). Diese Reihenfolge gilt als traditionell. Die Argumentation, die Bruchzahlen und ihre Rechenoperationen seien deutlich leichter zu verstehen und darüber hinaus bedeutsamer für das alltägliche Leben als die negativen Zahlen (vgl. ebd.), wird allerdings vor allem in jüngeren Publikationen hinterfragt. Vom Hofe (2007) berichtet außerdem von ersten Ansätzen alternativer Lehrgänge, die die Behandlung negativer Zahlen vor oder parallel zur Bruchrechnung vorsieht.

In diesem Spannungsfeld zwischen traditionell-axiomatischen Ansichten und der Etablierung neuer Lehrgänge setzt die vorliegende Arbeit an. Vor dem Hintergrund des mathematikdidaktischen Konzepts der Grundvorstellungen sollen die Zahlbereichserweiterungen von den natürlichen Zahlen zu den Bruchzahlen sowie von den natürlichen Zahlen zu den ganzen Zahlen untersucht werden. Hierfür werden zunächst die stoffdidaktischen Grundlagen erarbeitet. Neben der ausführlichen Darlegung der Ideen des Grundvorstellungen-Konzepts nach vom Hofe (1995) wird außerdem ein Überblick über die Arten mathematischen Wissens gegeben und in die Leitideen des systemorientierten und genetischen Mathematikunterrichts eingeführt. Diese theoretischen Kenntnisse sollen den Zugang zur Didaktik der Zahlbereichserweiterung erleichtern. Darauf aufbauend werden die oben genannten Prozesse der Zahlbereichserweiterung eingehend beleuchtet: Weshalb ist es notwendig, Zahlbereiche zu erweitern und welche sinnstiftenden Motive lassen sich für Schülerinnen und Schüler formulieren? Welche Grundvorstellungen sind für die inhaltliche Durchdringung des Stoffes unverzichtbar und welche existenten Vorstellungen können übernommen beziehungsweise müssen modifiziert werden? Schließlich sollen für beide Zahlbereichserweiterungen eine Vielzahl an anschaulichen Modellen der Erklärung präsentiert sowie die Hürden und Fehlvorstellungen erarbeitet werden, denen mit diesen Modellen begegnet werden kann. Im Anschluss werden die

Betrachtungen in einen unterrichtlichen Kontext gebettet, indem die verschiedenen Herangehensweisen zur Vermittlung im Mathematikunterricht auf der Grundlage des Rahmenlehrplans Berlin-Brandenburg (vgl. Ministerium für Bildung, Jugend und Sport 2015) zueinander in Beziehung gesetzt werden. Insbesondere dem Konzept der didaktischen Phänomenologie nach Freudenthal (2002) soll sich in diesem Zusammenhang gewidmet werden. Abschließend werden die gewonnenen Erkenntnisse zusammengefasst und gemäß einem sinnstiftenden und Grundvorstellungen aktivierenden Mathematikunterricht diskutiert. Ziel der vorliegenden Ausarbeitung ist die Unterbreitung eines stofflich und stoffdidaktisch logisch nachvollziehbaren Vorschlags für eine Unterrichtskonzeption, welche alle zusammengetragenen Erkenntnisse berücksichtigt und im Sinne eines schülerorientierten Lernprozesses wirksam sein kann. In der Erarbeitung soll sich hierbei an der eingangs skizzierten Problemstellung orientiert und bereits zu Beginn von der einseitigen Anwendung des traditionell-axiomatischen Vorgehens distanziert werden. Die Arbeit bemüht sich um eine ausführliche und ausgewogene Aufzeigung wissenschaftlicher Erkenntnisse und Standpunkte und hinterfragt diese kritisch. Inwieweit es eine phänomenologische Herangehensweise zu leisten vermag, intuitive Vorstellungen und Ideen nachhaltiger zu aktivieren als ein auf Formalismen gestützter Mathematikunterricht, gilt es, nachfolgend zu erörtern.

2 Mathematikdidaktische Grundlagen

2.1 Mathematische Grundvorstellungen

Um die Problematik, die sich bei der Erweiterung bekannter Zahlbereiche im schulischen Kontext ergibt, sowie die Hürden und Fehlerquellen, die ihren Ursprung zumeist in fehlenden inhaltlichen Vorstellungen haben, aus der Perspektive der Lernenden besser einordnen und nachvollziehen zu können, soll im Folgenden zunächst der theoretische Rahmen skizziert werden.

In der deutschsprachigen Mathematikdidaktik werden inhaltliche Vorstellungen und Ideen zu mathematischen Inhalten durch das Konzept der *Grundvorstellungen* charakterisiert. Grundvorstellungen helfen, mathematische Inhalte und Objekte (beispielsweise Begriffe oder Operationen) mit dem eigenen Begriffsverständnis in Beziehung zu setzen und so individuelle Interpretationen dieser Objekte aufbauen zu können (vgl. vom Hofe 1995). Sie sind dementsprechend als „Elemente der Vermittlung […] zwischen der Welt der Mathematik und der individuellen Begriffswelt de[r] Lernenden" (ebd., S. 98) zu verstehen und ermöglichen eine angemessen verständliche Repräsentation eines Sachgegenstandes. Des Weiteren spielen Grundvorstellungen eine zentrale Rolle in mathematischen Modellierungsprozessen: Immer wenn mathematische Begriffe und Verfahren zur Mathematisierung einer Sachsituation gebraucht oder umgekehrt mathematische Sachverhalte im Hinblick auf eine Sachsituation interpretiert werden sollen, kommen Grundvorstellungen zum Einsatz (vgl. ebd.). Insofern sind Modellierungsprozesse, die von Grundvorstellungen und dem kognitiven Übersetzen zwischen Mathematik und Realität begleitet werden, als zyklisch zu beschreiben (siehe Abbildung 1).

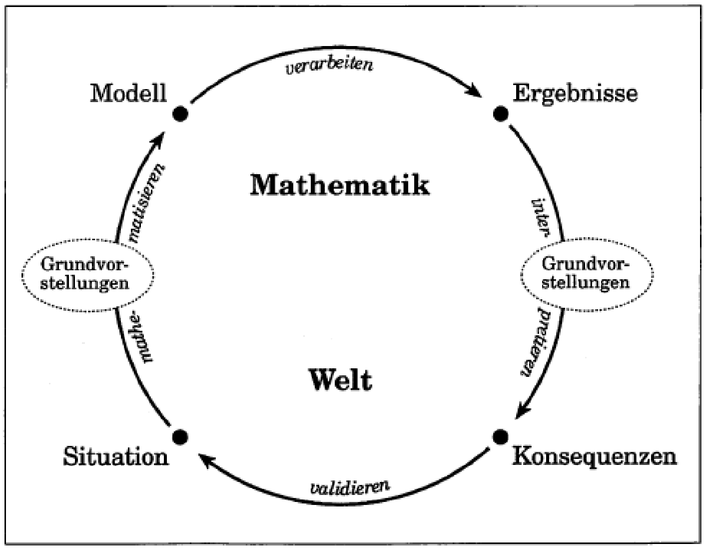


Abb. 1: Modellierungskreislauf, aus: vom Hofe (2003), S. 5

Vom Hofe (1995) verweist zudem auf drei wesentliche Aspekte im Zusammenhang mit der Grundvorstellungsidee: Zum einen verhelfen kontinuierlich aufgebaute Grundvorstellungen dazu, an die Lebenswirklichkeit (der Schülerinnen und Schüler) anzuknüpfen und so die Sinnkonstituierung des entsprechenden mathematischen Begriffs zu fördern, indem bereits vertraute Handlungsmuster und -vorstellungen aktiviert werden. Weiter unterstützt ein vielseitiges Repertoire an Grundvorstellungen den Aufbau (visueller) Repräsentationen, die fortan kognitiv mit dem mathematischen Inhalt gekoppelt sind, und ermöglicht so, operativ auf der Vorstellungsebene zu handeln. Schließlich befähigt die Aktivierung von Grundvorstellungen zur Anwendung

eines Begriffs auch im Kontext der Wirklichkeit (vgl. ebd.). Dieser dritte Aspekt betont nochmals die Bedeutsamkeit des Konzepts für den Modellierungskreislauf (siehe Abbildung 1). Prediger (2009) unterstreicht darüber hinaus die Notwendigkeit inhaltlicher Vorstellungen im Kontrast zu kalkülorientierten Rechenverfahren insbesondere für die folgenden unterrichtsrelevanten Tätigkeiten und Denkprozesse: Das nachhaltige Verinnerlichen und weniger fehleranfällige Anwenden erlernter Rechenverfahren, das Einsetzen geeigneter Operationen zur Mathematisierung von Sachsituationen sowie das Erschließen mathematischer Phänomene, die sich im Zusammenhang mit den Operationen ergeben[2] (vgl. ebd.).
Der Anspruch, mit Hilfe von tragfähigen Grundvorstellungen in der Vermittlung zwischen der Welt der Mathematik und der Wirklichkeit (auf der Vorstellungsebene) agieren zu können, erfordert von den Schülerinnen und Schülern eine hohe Flexibilität. Insofern überrascht es nicht, dass mathematische Begriffe häufig nicht nur durch eine, sondern durch mehrere Grundvorstellungen getragen werden müssen, um eine tiefgreifende Sinnkonstituierung zu ermöglichen (vgl. vom Hofe 2003; Prediger 2009). Prediger (2009) zeigt anschaulich an Hand von Testaufgaben und den Antworten einer Schülerin der neunten Klasse, wie wichtig es für das nachhaltige Erschließen einer Problemstellung ist, situativ aus verschiedenen relevanten Grundvorstellungen eine geeignete auswählen zu können. Nachdrücklich plädiert sie in Anlehnung an ihre vorgestellten Forschungsergebnisse dafür, das eingeübte Kalkül (beispielsweise das rechnerische Vorgehen beim Erweitern und Kürzen von Brüchen) stets an inhaltliche Vorstellungen zu koppeln. Hierfür biete sich besonders das „eigenständig[e] Formulieren von Textaufgaben oder Rechengeschichten" (ebd., S. 173) an.
Grundvorstellungen lassen sich außerdem in sogenannte *primäre* und *sekundäre* Grundvorstellungen unterscheiden. Primäre Grundvorstellungen lassen sich hauptsächlich auf gegenständliche, das heißt, im Umgang mit konkreten Gegenständen haptisch gewonnene, Handlungserfahrungen zurückführen (vgl. vom Hofe 2003). Diese werden vor allem im Vorschulalter generiert und schließlich im Laufe der Schulzeit nach und nach durch sekundäre Grundvorstellungen ergänzt oder vollständig ersetzt. Sekundäre Grundvorstellungen können unter Hinzuziehung mathematischer

[2] Beispielsweise die für Schülerinnen und Schüler oftmals überraschende Erkenntnis, dass eine Zahl beim Dividieren größer werden kann, erfordert einen Rückgriff auf inhaltliche Vorstellungen.

Darstellungsmittel wie Zahlengerade, Koordinatensystem, geometrische Figuren oder Graphen aufgebaut werden und spielen zumeist bei der Durchdringung nicht-gegenständlicher Objekte wie Zustände und Änderungen eine wichtige Rolle (vgl. ebd.). In diesem Zusammenhang wird auch der dynamische Charakter des Konzepts deutlich: Grundvorstellungen lassen sich keineswegs als stabiles und allgemeingültiges gedankliches Konstrukt verstehen. Sie sind vielmehr einer andauernden Erweiterung und Modifizierung unterworfen oder ergänzen sich gegenseitig, was schließlich langfristig die „Ausbildung eines Netzwerks“ (ebd., S. 6) bewirkt. Problematisch wird es dann, wenn der Aufbau adäquater Vorstellungen über einen längeren Zeitraum hinweg nicht gefördert wird. Die Gefahr hierbei besteht in der Etablierung von Fehlvorstellungen, die wiederum eine „einseitig[e] und unzureichend[e] Entwicklung mathematischer Kompetenzen“ (ebd., S. 7) zur Folge hat. Vom Hofe beschreibt diese Problematik als sukzessiv herbeigeführten Sog in immer mehr durch Regeln und Merksätze ausgelöste Verwirrungen. Die Schülerinnen und Schüler sind bei fehlenden inhaltlichen Vorstellungen gezwungen, sich an Formalismen zu orientieren, die sie möglicherweise als „denkentlastende Abkürzungen“ (Prediger 2009, S. 172) empfinden, tatsächlich aber gedanklich in keiner Weise nachvollziehen können. Um dieser Entwicklung vorzubeugen, bietet vom Hofe (1995) ein Modell an, welches die Vermittlung zwischen individuellen Schülerinnen- und Schülervorstellungen und den normativ geprägten, didaktisch motivierten Grundvorstellungen der Lehrperson moderieren soll (siehe Abbildung 2). Die Kernaussage des Modells stützt sich auf die Annahme, dass didaktisch festgelegte Kategorien und an Erfahrungsbereiche geknüpfte Vorstellungen der Lernenden einander durchaus nahegebracht werden können.

Abb. 2: Ausbilden von Grundvorstellungen, aus: vom Hofe (1995), S. 124

Abbildung 2 verdeutlicht, wie dieser Prozess wirksam werden soll: Auf der rechten Seite sind die Aktivitäten des Schülers oder der Schülerin formuliert, die durch die didaktischen Entscheidungen auf der linken Seite unterstützt werden können. Auf der Grundlage intuitiv verankerter Handlungsvorstellungen sollen subjektiv gewonnene Erfahrungen seitens der Schülerinnen und Schüler aktiviert werden und so eine Erfassung des Sachzusammenhangs (zumindest im Kern) ermöglicht werden. Langfristig lasse sich, so vom Hofe, auf diese Weise eine Grundvorstellung in das Spektrum individueller Handlungsmöglichkeiten integrieren und zum *Verstehen* eines mathematischen Begriffs oder Verfahrens aktivieren. In diesem Rahmen versteht vom Hofe das Modell als Versuch, „zur Aufdeckung und konstruktiven Behebung von Konflikten zwischen formalem und intuitivem Bereich“ (ebd., S. 125f.) beizutragen, weswegen es zur Annäherung an die in dieser Arbeit untersuchte Problemstellung berücksichtigt werden sollte.

2.2 Arten mathematischen Wissens

Bei der Auseinandersetzung mit dem Konzept der Grundvorstellungen begegnet man zwangsläufig auch den Termini der mathematischen Begriffe, Sachverhalte und Verfahren. Es erscheint daher sinnvoll, sich diesen Begrifflichkeiten, auch im Hinblick auf ihre Rolle im Mathematikunterricht, noch einmal intensiver zu widmen.

Es gilt als eine Kernaufgabe des Mathematikunterrichts, den Schülerinnen und Schülern mathematisches Wissen zu vermitteln. Besonders hinsichtlich der Perspektive der Lernenden bedarf es einer Ausdifferenzierung dieser Forderung, welche Vollrath und Roth (2012) mit der Erläuterung der verschiedenen Arten mathematischen Wissens vornehmen: Es wird eine Unterscheidung in die vier Kategorien der *Begriffe*, *Sachverhalte* und *Verfahren* sowie *metamathematisches Wissen* angeboten. Der Fokus liegt dabei eher auf der Vermittlung mathematischen Wissens in gängigen systematischen Darstellungen der Mathematik und weniger auf einer Schülerinnen- und Schülerorientierung. Das Wissen über mathematische *Begriffe* wird hierbei von den Autoren als grundlegend und notwendig für die Erschließung weiterer mathematischer Inhalte beschrieben. Die für das Verstehen und Verinnerlichen des Begriffs nötigen Informationen werden den Schülerinnen und Schülern in Form von Definitionen zugänglich gemacht und an Hand von Beispielen belegt. Im Mathematikunterricht besprochene Beispiele sollen Auskunft darüber geben, welche Objekte unter den erlernten Begriff fallen (vgl. ebd.). In diesem Zusammenhang formulieren Vollrath und Roth die Aussage, das Angeben von Beispielen helfe (bereits) dabei, verständnisfördernde Vorstellungen zum Inhalt des Begriffs zu vermitteln. Dieser sehr theoretische Standpunkt ist besonders im Hinblick auf die in diesem Rahmen untersuchte Problemstellung und das fundamentale Konzept der Grundvorstellungen zwingend zu hinterfragen (vgl. vom Hofe 2003; Prediger 2009). Auf den Begriffen aufbauend soll im Mathematikunterricht außerdem Wissen über mathematische *Sachverhalte*, die sich aus den Eigenschaften der bekannten Begriffe und deren Beziehung zueinander ergeben, vermittelt werden (vgl. Vollrath & Roth 2012). In der Regel geht man hierbei von sogenanntem begründetem Wissen aus, welches durch die Angabe von Sätzen und ihren Beweisen Verständnis fördern soll. Es ergibt sich die Frage, inwieweit diese Vorgehensweise für den Mathematikunterricht geeignet erscheint und auch die Autoren distanzieren sich an dieser Stelle klar von der Übertragung systematischer Darstellungsmittel auf die Unterrichtspraxis. Das Wissen über *Verfahren* informiert darüber, auf welche Weise bestimmte Aufgaben zu lösen sind und kann daher an Hand von Sätzen, Rechenregeln und Algorithmen verdeutlicht werden (vgl. ebd.). Auch hierbei ist die direkte Umsetzung systematischer Darstellungen der Mathematik für den Unterricht als fragwürdig zu bewerten. *Metamathematisches* Wissen vereint Kenntnisse über das Problemlösen, das Formulieren von Sätzen und Beweisen sowie das Entwickeln von Algorithmen und wird in systematischen Darstellungen der Mathematik höchstens implizit formuliert. Dass die Bedeutung metamathematischen Wissens als „notwendige[s] Handwerkzeug“ (ebd., S. 46) für die Schülerinnen und Schüler aber unbedingt explizit thematisiert und nicht vorausgesetzt werden sollte, steht im Hinblick auf die bisher zusammengetragenen Erkenntnisse dieser Arbeit außer Frage.

Es wird deutlich, dass die vorgeschlagenen Vermittlungswege im starken Kontrast zu Predigers (2009) Forderung nach stärkerer inhaltlicher Orientierung stehen. Der Mathematikunterricht ist insofern gezwungen, eine Brücke zwischen den systematischen Darstellungen auf theoretischer Ebene und dem Erfahrungsbereich der Schülerinnen und Schüler zu schlagen. Darüber hinaus erhebt Mathematikunterricht den Anspruch, über das deklarative Wissen hinaus auch mathematische Beziehungsgefüge sichtbar zu machen (vgl. Vollrath & Roth 2012). Verschiedene Konzeptionen, die sich mit dieser Problematik auseinandersetzen, werden in den nachfolgenden zwei Kapitelabschnitten diskutiert.

2.3 Systemorientierter Mathematikunterricht

Eine, an die systematischen Darstellungen der Mathematik (siehe Kapitel 2.2) angelehnte, Unterrichtskonzeption stellt der systemorientierte Mathematikunterricht oder das systemorientierte Lernen dar. Die Grundannahme dieses Konzepts besteht darin, dass der axiomatische Aufbau der Mathematik (Begriffe, Sachverhalte, Verfahren) den Lernenden innerhalb ihrer Verstehensprozesse Sicherheit gibt (vgl. ebd.): So können neue Begriffe mit Hilfe von Definitionen, die wiederum bereits bekannte Begriffe aufgreifen, und Verfahren mittels Merkregeln und Algorithmen gelernt werden. Auf diese Weise erscheinen die Lerngegenstände geordnet und angemessen begründet, erfordern aber gleichermaßen eine enorme Abstraktionsleistung und das Verfügen über metamathematische Kenntnisse (vgl. ebd.). Damit systemorientierte Lehr-Lern-Prozesse in diesem Sinne eingeleitet werden können, besprechen Vollrath und Roth verschiedene Bedingungen wie beispielsweise die Kenntnis von Lernzielen oder die innermathematische Folgerichtigkeit der Lerngegenstände. Sie weisen außerdem darauf hin, dass es beim systemorientierten Lernen im Wesentlichen um das *Einprägen* und *Behalten* von erlernten Begriffen und Definitionen geht. In diesem Zusammenhang wird auch das Etablieren „‚künstliche[r]‘ Verbindungen“ (ebd., S. 57) im Mathematikunterricht legitimiert, um Begriffe reichhaltiger zu machen und Verstehensprozesse zu fördern. Eselsbrücken, Merksätze und Rechenregeln scheinen damit elementare Instrumente des systemorientierten Lernens und für das langfristige Einprägen mathematischen Wissens zumindest in dieser Unterrichtskonzeption vollkommen berechtigt zu sein. Bekräftigt wird diese Annahme zusätzlich durch Vollrath (1994), der anführt, dass *einsichtiges* Regellernen die besten Lernergebnisse zur Folge habe. Die relativierende Behauptung der Autoren Vollrath und Roth (2012), „das ‚Auswendig-Lernen‘ spiel[e] heute im Mathematikunterricht keine besondere Rolle“ (ebd., S. 56) mehr, muss an dieser Stelle (auch im Hinblick auf die bereits zusammengetragenen Erkenntnisse zum Umgang mit neuen Zahlen im Mathematikunterricht) stark angezweifelt werden (vgl. Leuders 2006; Prediger 2009).

Dass die unterrichtliche Praxis nicht ausschließlich systemorientiert gestaltet werden kann und der axiomatische Aufbau den Schülerinnen und Schülern nur bedingt die erhoffte Sicherheit geben kann, räumen auch Vollrath und Roth (2012) ein. Seit Anstoß der Unterrichtsreform der „Neuen Mathematik“ (New Math) im Jahre 1961 werden immer wieder neue Impulse im Hinblick auf die große Diskrepanz zwischen dem traditionellen systemorientierten Mathematikunterricht und den tatsächlichen Bedürfnissen der Lernenden formuliert (vgl. OEEC 1961). Eine Hinwendung zu didaktischen Prinzipien wie Problemorientierung, Zielorientierung, Öffnung des Unterrichts und Arbeit mit neuen Medien bestimmt hierbei den Kurs neuer Lehrwege. Eine solche Unterrichtskonzeption, die die Kritik am systemorientierten Lernen aufgreift und auch hinsichtlich der Problemstellung im Kontext der Zahlbereichserweiterung berücksichtigt werden soll, wird im folgenden Abschnitt vorgestellt.

2.4 Genetischer Mathematikunterricht

Der Ursprung der Forderungen, die im Kontext der Unterrichtsreform der *Neuen Mathematik* nachhaltig bekräftigt wurden, lässt sich in der geschichtlichen Entwicklung der Mathematikdidaktik tatsächlich noch weitaus früher datieren: Angesichts der *Meraner Vorschläge* im Jahre 1905 wurden im Hinblick auf die mathematische Grundbildung grundsätzliche Thesen zur Aufbereitung des Lernstoffes an Schulen erarbeitet (vgl. Gesellschaft Deutscher Naturforscher und

Ärzte 1908). Zu dieser Zeit wurde durch die Psychologie immer mehr Aufklärung im Bereich der geistigen Entwicklung von Kindern geleistet, weshalb der Vorschlag, in der Strukturierung des Mathematikunterrichts ebendiese zu berücksichtigen, diskutiert wurde. Im starken Kontrast zur Lehrtradition der Axiomatik appellierte man schließlich, die „*Darstellung auf der Schule* m[üsse] nämlich […] *psychologisch, nicht systematisch* sein“ (Klein 1933, S. 4). Vor dem Hintergrund der *Meraner Vorschläge* berief man sich fortan auf das sogenannte psychologische sowie auf das utilitaristische Prinzip (vgl. Lietzmann 1926). Das psychologische Prinzip meint vor allem die Anpassung des mathematischen Lehrgangs an die geistige Entwicklung der Lernenden, wohingegen sich das utilitaristische Prinzip mehr gegen den Erwerb einseitiger Kenntnisse zu speziellen mathematischen Standardverfahren ausspricht. Eine Hinwendung zur unmittelbaren Lebenswelt der Lernenden und die Erziehung zur mathematischen Erfassung dieser unter Berücksichtigung der natürlichen Entwicklungsstufen von Kindern bilden den Kern der Reform. In diesem Zusammenhang finden sich bereits Überlegungen zur Einführung des propädeutischen Unterrichtens in der Literatur des frühen 20. Jahrhunderts. Auf diesen Aspekt wird im weiteren Verlauf der vorliegenden Untersuchung noch einmal Bezug genommen.

Die hier erläuterten und historisch aufbereiteten Forderungen nach einem sich sozusagen kindgerecht entwickelnden Lehrgang mündeten schließlich in der Unterrichtskonzeption des *genetischen* (= entwickelnden) Mathematikunterrichts, die im Grunde als Widerstand gegen eine systemorientiert-axiomatische Vorgehensweise zu verstehen ist (vgl. Vollrath & Roth 2012). Klein (1933) betont diesen Kontrast, indem er das Prinzip des genetischen Unterrichts wie folgt erläutert: „Das ganze Lehrgebäude wird auf Grund bekannter anschaulicher Dinge ganz allmählich von unten aufgebaut, [wo]rin […] ein scharf ausgeprägter Gegensatz gegen den […] üblichen […] *systematischen* Unterrichtsbetrieb [liegt]“ (ebd., S. 6). Wittmann (2009) definiert die genetische Vorgehensweise als Orientierung an „*erkenntnistheoretischen Prozessen der Erschaffung und Anwendung von Mathematik*“ (ebd., S. 130) und charakterisiert sie darüber hinaus als „*oberstes* Unterrichtsprinzip“ (ebd., S. 144). Eine tragende Rolle beim Unterrichten gemäß dem genetischen Prinzip wird dem Mathematisieren als genetische Aktivität zugeschrieben (vgl. ebd.). Die Berufung auf anschaulich darzustellende Probleme aus der wirklichen und der mathematischen Welt mit dem Ziel der Entwicklung inhaltlicher Mathematik lässt sich vollständig mit den Ausführungen vom Hofes (1995) zusammenbringen. Insofern kann Mathematikunterricht gerade dann als genetisch gelten, wenn er Grundvorstellungen aktiviert und mathematische Modellierungsprozesse (zwischen der Wirklichkeit und der Welt der Mathematik) in Gang setzt (siehe hierzu auch Kapitel 2.1). Das genetische Prinzip vereint erkenntnistheoretische, mathematische, mathematikdidaktische, psychologische und pädagogische Forschungsergebnisse und ist als einzige Methode zur Lernsequenzbildung (im Vergleich zur deduktiven Sequenzbildung und zur Sequenzbildung nach Aufgabenklassen), so Wittmann (2009), mit den Erkenntnissen moderner Mathematikdidaktik vereinbar. Dementsprechend ist eine genetische Aufbereitung des Lerngegenstandes durch die nachfolgend skizzierten Merkmale gekennzeichnet (vgl. ebd.):

Zunächst orientiert sich der Unterricht am Vorwissen und -verständnis der Schülerinnern und Schüler. Freudenthal (1973) unterbreitet zur praktischen Realisierung des Prinzips im Mathematikunterricht den Vorschlag des *Gedankenexperiments*, mit dessen Hilfe sich die Lehrperson in die Lage der Lernenden hineinversetzen und ihre individuellen Erfahrungen und Begegnungspunkte mit der Sachsituation erfassen soll. Im Prinzip wird die Grundidee dieser Handlungsanweisung auch in vom Hofes (1995) Modell zur Ausbildung tragfähiger Grundvorstellungen (siehe Abbildung 2) angesprochen. Wittmann (2009) unterstreicht zudem, dass dieses Merkmal genetischen Unterrichts keineswegs nur in beobachtbaren Interaktionsakten zwischen der Lehrkraft und den Lernenden begreiflich werden sollte. Es gehe viel eher darum, das Eingehen auf das Vorwissen und -verständnis der Schülerinnen und Schüler als persönliche Haltung der Lehrperson zu verinnerlichen, den Lernenden wirklich zuzuhören und ihre Wortbeiträge für die weitere Unterrichtsplanung zu nutzen (vgl. ebd.). Bereits an dieser Stelle wird deutlich, dass die Schwerpunkte innerhalb der genetischen Methode konträr zu den Leitgedanken des systemorientierten Lernens gelegt werden: Während im systemorientierten Unterricht der Ausgangspunkt der Vermittlung im mathematischen Wissen liegt und man hierbei auf die logisch zu begründende Anordnung der Lerninhalte vertraut (vgl. Vollrath & Roth 2012), scheint das Fundament des genetischen Unterrichtens die Schülerin und der Schüler selbst zu sein. Mathematische Inhalte müssen in dieser Unterrichtskonzeption nicht zwingend in einer bestimmten Reihenfolge, sondern in Abhängigkeit von Entwicklungsstufe und Erfahrungen der Lernenden gelehrt werden (vgl. Wittmann 2009; Klein 1933). Ein weiteres von Wittmann (2009) benanntes Merkmal des genetischen Unterrichts ist die „Einbettung der Überlegungen in größere ganzheitliche Problemkontexte außerhalb oder innerhalb der Mathematik“ (ebd., S. 131). Das genetische Prinzip fordert folglich ein (nicht zwingend mathematisches) Bezugssystem für die Besprechung neuer Inhalte, um den Schülerinnen und Schülern eine bessere Orientierung zu ermöglichen. Beim systemorientierten Lernen hingegen werden Orientierung und Sicherheit vor allem durch die innere Logik des Stoffes geboten und durch das Bereitstellen von Eselsbrücken und Merksätzen weiter gestützt. Schließlich ist das genetische Prinzip durch die Legitimation informeller Begriffserarbeitungen gekennzeichnet. Erkennt die Lehrperson, beispielsweise mittels eines von Freudenthal (1973) vorgeschlagenen Gedankenexperiments, dass die Vorkenntnisse der Lerngruppe nicht ausreichen, um ein entsprechendes Begriffsverständnis zu fördern, gilt es gemäß dem genetischen Prinzip als zulässig, den Begriff an Hand von offenen Kontexten und über „intuitive und heuristische Ansätze“ (Wittmann 2009, S. 131) einzuführen. So sollen inhaltliche Vorstellungen aufgebaut werden. Es ergibt sich an dieser Stelle erneut ein starker Kontrast zum systemorientierten Unterricht: Die gängige, im vorherigen Kapitelabschnitt erläuterte, Vorgehensweise entspricht der der traditionellen Axiomatik, nach der Begriffe über Definitionen, Sachverhalte über Begriffe und Verfahren über Algorithmen eingeführt werden (vgl. Vollrath & Roth 2012). Ein informeller Kontext kann hierbei nur schwer zum Tragen kommen.

Ein Merkmal, durch das beide Unterrichtskonzeptionen charakterisiert sind, ist das *Prinzip der Reich- und Beziehungshaltigkeit*. Das genetische Prinzip kann sich besonders bei Inhalten, die zu anderen (mathematischen) Inhalten und zur Wirklichkeit Bezüge aufweisen, als wirksam erweisen. Freudenthal (1973) beschreibt in diesem Kontext die Bedeutsamkeit zusammenhängender Mathematik und meint damit zum einen die Zusammenhänge der mathematischen Begriffe untereinander und zum anderen die Verknüpfungen zur erlebten Wirklichkeit der Schülerinnen und Schüler. Die Forderung, ebendiese Zusammenhänge in der Unterrichtspraxis sichtbar zu machen, wird auch beim systemorientierten Lehren laut. Vor allem die innermathematischen Bezüge und

Verknüpfungen gilt es, gemäß dieser Unterrichtskonzeption zu verdeutlichen und in den Kontext eines mathematischen Beziehungsgefüges zu betten.

Nachdem nun die Betrachtungen zum Konzept der Grundvorstellungen nach vom Hofe (1995), zu den Arten mathematischen Wissens sowie zu verschiedenen Unterrichtskonzeptionen einen Überblick über wichtige mathematikdidaktische Grundlagen und Tendenzen liefern konnten, soll es im weiteren Verlauf der Arbeit darum gehen, das theoretisch Zusammengetragene auf die unterrichtliche Praxis zu übertragen. Hierzu soll im Spannungsfeld sich ständig wandelnder Unterrichtskonzeptionen eine Annäherung an die im Unterricht der Primar- und Sekundarstufe praktizierten Zahlbereichserweiterungen zu den positiven Bruchzahlen und den ganzen Zahlen erfolgen. Vor allem die in diesem Kapitel gewonnenen Erkenntnisse hinsichtlich der besonderen Rolle der Grundvorstellungen sollen dabei helfen, Verständnishürden aufzudecken und geeignete Modelle zur Erklärung zusammenzutragen.

3 Grundvorstellungen bei Zahlbereichserweiterungen

3.1 Motivation zur Erweiterung des natürlichen Zahlbereichs

Bevor die Prozesse der Zahlbereichserweiterung im Allgemeinen und im Hinblick auf ihre Rolle innerhalb der unterrichtlichen Praxis untersucht werden sollen, erscheint es zunächst sinnvoll, die Beweggründe, die in der Geschichte der Mathematik und gleichermaßen im Unterrichtsverlauf die Wege zu neuen Zahlen ebnen, zu erschließen. Im Folgenden soll daher untersucht werden, welche Motivation sich hinter der Erweiterung des natürlichen Zahlbereichs verbirgt.

Auf der Suche nach einer innerfachlichen Begründung von Zahlbereichserweiterungen gewinnt man im Wesentlichen das Argument der uneingeschränkten Lösbarkeit von Gleichungen (vgl. Hefendehl-Hebeker & Prediger 2006). Einen Anlass für die Einführung der negativen Zahlen liefert hierbei beispielsweise die in $\mathbb{N}$ unlösbare Gleichung $4 + x = 2$, die im Zahlenraum der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ einen wohldefinierten Gleichungstyp darstellt. Gleichermaßen bietet die in $\mathbb{N}$ unlösbare Gleichung $3x = 7$ einen Grund zur Einführung der Bruchzahlen. Bereits bei einfachen linearen Gleichungen und schließlich beim systematischen Lösen komplexer Gleichungssysteme wird deutlich, dass man „sowohl bei den erforderlichen Äquivalenzumformungen als auch bei der Angabe der Lösungsmenge nur in Ausnahmefällen allein mit natürlichen Zahlen aus[kommt]“ (vgl. Padberg, Dankwerts & Stein 1995, S. 64). Während das Motiv der theoretischen Vollständigkeit und Fortsetzung der innermathematischen Logik die Erweiterung des natürlichen Zahlbereichs bereits ausreichend plausibilisiert, erscheint es sinnvoll, für den Mathematikunterricht weitere, von praktischen Anforderungen getragene Leitideen zu formulieren. Hierbei kann eine Skizzierung historischer Zahlbereichserweiterungsprozesse aus didaktischer Perspektive hilfreich sein. Die Entstehung neuer Zahlen lässt sich in allen Fällen als langwieriger und nur mühsam beschrittener Weg beschreiben, welcher von Malle (2007a) als „Wechselspiel von mathematischer Theorie und intuitiver Vorstellung“ (ebd., S. 7) charakterisiert wird. Diese beiden Ebenen verhalten sich oftmals sehr konträr zueinander und beeinflussen sich gegenseitig mit dem Ergebnis der Veränderung. Gerade wenn die intuitiv verankerten inhaltlichen Vorstellungen die offizielle Theorie nicht stützen können, birgt das Konfliktpotenzial und es muss zwangsläufig eine Modifikation einer der beiden Ebenen erfolgen. Im Hinblick auf historische Prozesse im Kontext der Zahlbereichserweiterung hat diese gegenseitige Beeinflussung ständige Anpassung und Veränderung zur Folge, was das Entstehen neuer Zahlen erst ermöglicht (vgl. ebd.). Malle stellt mittels detaillierter Betrachtungen zu einzelnen Zahlbereichserweiterungen in der Geschichte der Mathematik fest, dass alle Prozesse nach einem ähnlichen Muster abgelaufen sein könnten: Es kann angenommen werden, dass die neuen Zahlen zunächst als rein formale Objekte ohne eigene Bezeichnung in Erscheinung traten, bevor die wechselseitige Beeinflussung von mathematischer Theorie und intuitiver Vorstellung schließlich die Anerkennung als eigenständige Zahlen ermöglichte. Malle stellt die historischen Prozesse zur Veranschaulichung schematisch dar (siehe Abbildung 3) und plädiert dafür, die Erkenntnis, Zahlbereichserweiterungen lägen stets lang andauernde Prozesse zu Grunde, für den Mathematikunterricht zu nutzen.

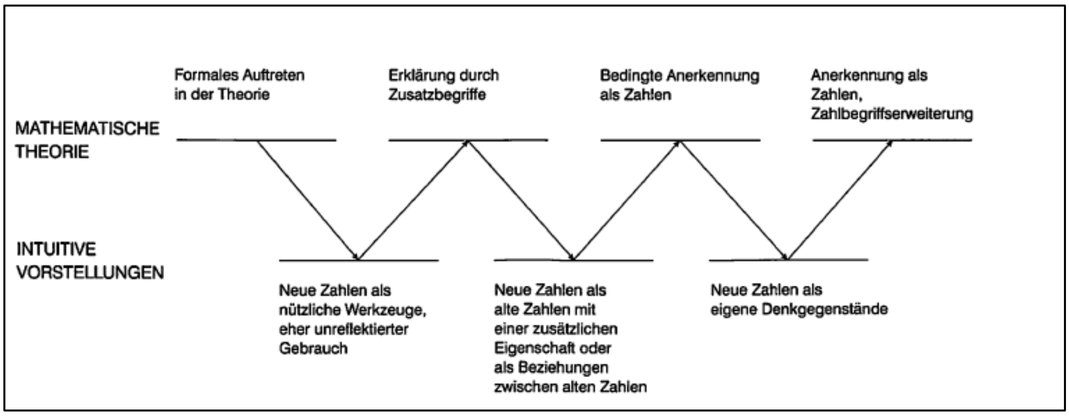


Abb. 3: Entstehung neuer Zahlen aus alten Zahlen, aus: Malle (2007a), S. 11

Überträgt man einzelne Abschnitte der historischen Prozesse auf den Lernprozess der Schülerinnen und Schüler, kann das zu einem tieferen Verständnis der anfänglichen Skepsis, die die Lernenden neuen Zahlen häufig entgegen bringen, führen[3] (vgl. ebd.). Für den Mathematikunterricht bedeutet das, dass Schülerinnen und Schüler viel Zeit benötigen, um sich an neu eingeführte Zahlen zu gewöhnen und sie schließlich als eigenständige Denkobjekte zu akzeptieren, was die Notwendigkeit, sinnstiftende Motive für die Zahlbereichserweiterungen zu formulieren, nur noch verdeutlicht. Es erscheint im Hinblick auf die Unsicherheit der Schülerinnen und Schüler im Umgang mit neuen, noch unbekannten Zahlen sinnvoll, sich bei der Erarbeitung von praktischen Anlässen für Zahlbereichserweiterungen an den vertrauten Objekten (den natürlichen Zahlen) zu orientieren und die Motive aus der Lebenswirklichkeit der Lernenden abzuleiten:

Der Umgang mit den natürlichen Zahlen ist heutzutage als derart selbstverständlich zu beschreiben, dass die große Abstraktionsleistung, die mit dem Zahlbegriff einhergeht, fast vollständig über alltägliche Begegnungen und Berührungspunkte mit den natürlichen Zahlen in Vergessenheit gerät (vgl. Padberg, Dankwerts & Stein 1995). Tatsächlich erfolgt die Verwendung natürlicher Zahlen aber auf so vielfältige Weise in den verschiedensten Kontexten, dass in der Mathematikdidaktik zur Charakterisierung des Zahlbegriffs häufig auf verschiedene *Zahlaspekte* zurückgegriffen wird. Die natürlichen Zahlen beschreiben ursprünglich Anzahlen abzählbarer Dinge und aktivieren insofern eine inhaltliche Mengenvorstellung: Die Tendenz, Objekte mit ähnlichen Eigenschaften in Gruppen zusammenfassen, ist eine intuitiv verankerte, bereits im

[3] Genauer wird auf die Ursachen dieser Skepsis in den nachfolgenden Kapiteln eingegangen.

Kindesalter beobachtbare Handlungsvorstellung, welche lang vor der Begegnung mit Zahlen als Rechenobjekte aktiviert wird. Der zu dieser Vorstellung zugehörige Zahlaspekt wird als *Kardinalzahlaspekt* bezeichnet (vgl. ebd.). Bringt man nun die Zahlen durch den Vorgang des Abzählens in eine geordnete Reihenfolge, wird der *Ordinalzahlaspekt* des Zahlbegriffs erfasst (vgl. Hefendehl-Hebeker & Prediger 2006). Weitere elementare Zahlaspekte sind beispielsweise der *Codierungsaspekt* (Telefonnummern, Postleitzahlen), der *Operatoraspekt* (vervielfältige Handlung, beispielsweise dreimaliges Klatschen) oder der *Rechenzahlaspekt*. Letzterer bezieht sich allerdings eher auf das Kalkül des Rechnens, während die übrigen genannten Aspekte inhaltliche Vorstellungen transportieren. Obwohl die natürlichen Zahlen auf diese Weise vielseitig einsetzbar sind, stellt man schnell fest, dass diese zur Erläuterung vieler alltäglicher Sachverhalte nicht mehr ausreichen (vgl. Padberg, Dankwerts & Stein 1995). Um die Notwendigkeit der Zahlbereichserweiterung an dieser Stelle begreifen zu können, lohnt es sich, einen weiteren Zahlaspekt in die Überlegungen miteinzubeziehen: Der *Maßzahlaspekt* beschreibt die im Zusammenhang mit Zahlen vorherrschende Größenvorstellung und ermöglicht insofern die Angabe von Größenwerten (*Der Schulweg ist 5 km lang. Das Buch ist 200 g schwer.*). Auf der Ebene des Zählens und Messens erscheint die Unverzichtbarkeit einer Erweiterung des natürlichen Zahlbereichs am plausibelsten. „Es werden zusätzliche Zahlen benötigt, wenn die verfügbaren Zahlen ihre Aufgabe, quantitative Angaben zu präzisieren, nicht mehr zufriedenstellend erfüllen“ (vgl. Hefendehl-Hebeker & Prediger 2006, S. 2). Das Hinzuziehen von Bruchzahlen bietet die Möglichkeit, genauere Messungen durchzuführen und erweist sich hinsichtlich der Angabe von Maßzahlen oftmals praktikabler. Bruchzahlen sind demnach für alle Arten von exakten Größenmessungen (Längen, Flächeninhalte, Volumina, Geldbeträge, Gewichte) bedeutsam (vgl. Padberg, Dankwerts & Stein 1995), während das Hinzuziehen negativer Zahlen vor allem vergleichendes Messen gegenüber einer Nullmarke beziehungsweise einem festen, willkürlich gewählten Referenzpunkt zulässt. Rationale Zahlen eignen sich also besonders für das Beschreiben gerichteter Größen. Häufig wird die Einführung der negativen Zahlen daher auch durch die Erweiterung des Zahlenstrahls zur Zahlengeraden begleitet, womit das vertraute Darstellungsmittel nochmals an Anschaulichkeit gewinnt. Viele symmetrische

Skalen können auf diese Weise geometrisch verdeutlicht werden. Außerdem lässt sich die Bedeutsamkeit negativer Zahlen an Hand von einheitlichen Beschreibungen von Zustandsänderungen erläutern (vgl. ebd.). Alltägliche Kontexte sind hierbei beispielsweise durch das Ein- und Auszahlen auf einem Konto oder das Ansteigen und Fallen des Wasserspiegels oder der Temperatur gegeben. Das Vordringen in den reellen Zahlbereich $\mathbb{R}$ befähigt darüber hinaus zum präzisen Messen beliebiger Streckenlängen wie beispielsweise die Länge der Diagonalen eines Quadrats (vgl. Ulovec 2007) und der Anlass zur Einführung der reellen Zahlen kann beispielsweise im *Ausfüllen der Lücken* auf der Zahlengeraden gefunden werden (vgl. Hefendehl-Hebeker & Prediger 2006).

Um die Suche nach sinnstiftenden Leitideen für die Einführung neuer Zahlen zusammenzufassen, sei nochmals auf Ulovec (2007) verwiesen, der im Hinblick auf Zahlbereichserweiterungen von der beständigen Absicht, etwas dazuzugewinnen, spricht. Die Hinzugewinnung neuer Zahlen erschließt erweiterte Anwendungsmöglichkeiten und Handlungsfelder[4] und ermöglicht nach und nach das uneingeschränkte Durchführen von Rechenoperationen[5]. Eine Erweiterung des natürlichen Zahlbereichs kann insofern als *zweckmäßig* beschrieben werden. Dass diese Prozesse im Mathematikunterricht nicht immer problemlos und ohne Verständnisschwierigkeiten seitens der Schülerinnen und Schüler ablaufen, zeigen die Ausführungen Malles (2007a). Diese Erkenntnis soll in den nachfolgenden Kapiteln gefestigt werden, indem erarbeitet wird, welche Grundvorstellungen nötig sind, um Verständnisschwierigkeiten angemessen begegnen zu können. Die Annäherungen an die positiven Bruchzahlen $\mathbb{Q}^+$ und die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ erfolgen hierbei auf dieselbe Weise und unter Berücksichtigung derselben Aspekte, sollen aber zunächst separat voneinander beleuchtet werden. In den nächsten Abschnitten soll eine erste unterrichtliche Kontextualisierung unter starker Bezugnahme zur Grundvorstellungsidee nach vom Hofe (1995) vorgenommen werden, um schließlich im vierten Kapitel der Arbeit die Untersuchungen zu beiden Zahlbereichserweiterungen zusammenzuführen und sich so der Frage nach der im Sinne der vorliegenden Arbeit richtigen Abfolge beziehungsweise Vorgehensweise im Unterrichtsgeschehen zu widmen. Die Reihenfolge, welcher nach die folgenden Betrachtungen zu den

---

[4] Gemeint sind hierbei neue (andere) Sachsituationen, die sich mit Hilfe der erweiterten Zahlbereiche beschreiben und mathematisieren lassen.

[5] In $\mathbb{Q}$ sind Subtraktion und Division ohne Einschränkung möglich.

Zahlbereichserweiterungen vorgenommen werden, steht hierbei in keinem Zusammenhang mit einer zugeschriebenen Bedeutsamkeit und soll dementsprechend keine Gewichtung (für den Unterrichtshergang) suggerieren.

3.2 Bruchzahlen $\mathbb{Q}^+$

3.2.1 Entstehung aus den natürlichen Zahlen

Bei der Auseinandersetzung mit der Literatur zur Didaktik der Bruchrechnung wird deutlich, dass die Ansichten zur Erarbeitung der Bruchzahlen auf der Grundlage der natürlichen Zahlen einem stetigen Wandel unterliegen. Es kann daher lohnenswert sein, die verschiedenen Standpunkte und ihre Entwicklung historisch nachzuvollziehen.

Ältere Publikationen skizzieren die Genese der Bruchrechnung vor allem auf innermathematische Weise, die sich lediglich die axiomatische Vorgabe der natürlichen Zahlen und entsprechende Gesetzmäßigkeiten zu Nutze macht. Die traditionell gewonnene Definition der Bruchzahlen beruft sich auf die Annahme, es könne gelingen, „das Bruchrechnen aufzubauen, wenn […] lediglich die natürlichen Zahlen zur Verfügung" (Sieber 1955, S. 18) stünden. Voraussetzung dafür ist die vollständige Durchdringung der natürlichen Zahlen und ihrer elementaren Eigenschaften, welche durch das Peanosche Axiomensystem gegeben sind (vgl. ebd.). Die Notwendigkeit der Erweiterung des Zahlbereichs ergebe sich demnach ganz von allein, wenn das System der natürlichen Zahlen zwar als abgeschlossen[6] hinsichtlich der Verknüpfungen Addition und Multiplikation betrachtet werden kann, die Operationen Subtraktion und Division allerdings nicht ohne Einschränkung durchführbar sind. Der Zugewinn neuer Zahlen kann dann unter Berücksichtigung verschiedener Forderungen verwirklicht werden: Die Elemente des erweiterten Systems müssen sich vergleichen und anordnen lassen und es gilt, die Verknüpfungen so zu definieren, dass die Peanoschen Axiome (auch noch hinsichtlich der „alten" Zahlen) weiterhin erfüllt werden. Ausgangspunkt der Zahlbereichserweiterung bildet dann eine Definition, die bereits festlegt, wie die Verknüpfungen Addition und Multiplikation unter Beteiligung der natürlichen Zahlen ausgeführt werden sollen. Ergänzt man diese Definition um den Beweis, dass auch die Division im erweiterten System ohne Einschränkung (bis auf die Division durch Null) durchführbar ist und dieses

[6] Hiermit ist die uneingeschränkte Durchführbarkeit einer Rechenoperation gemeint.

System bestimmte allgemeine Eigenschaften aufweist, ist die Zahlbereichserweiterung vollständig vollzogen (vgl. ebd.). Dass eine wissenschaftliche Begründung der Bruchrechnung nach Sieber jedoch im Hinblick auf die Schulpraxis wenig praktikabel ist, scheint auch die Einsicht der Publikationen aus den 1970er und 80er Jahren zu sein. Mit dem Ziel, der „Diskrepanz zwischen der Lehre vom Aufbau des Zahlensystems […] und der Bruchrechnung in der Schule“ (Griesel 1981, S. 5) angemessen zu begegnen, werden weitere Vorschläge zur Herleitung der Bruchzahlen entwickelt. Ein gängiger, in der Literatur zur Didaktik vielfach ausgeführter Ansatz findet sich in der Einführung der Bruchzahlen über *Größenbereiche*. Kirsch (1975) unterstreicht, dass der Größenbegriff und die Handlungsvorstellung des Verteilens von Größen dem Bruchzahlbegriff vorangestellt sein müssen. Die Fähigkeit, flexibel zwischen den verschiedenen Zahlaspekten auswählen zu können (siehe Kapitel 3.1), ist hierfür unabdingbar. Die Erfassung der Struktur von Größenbereichen und ihrer Repräsentanten sowie die Definition der Teilbarkeitseigenschaft[7] ermöglichen darauf aufbauend die Hinführung zu den Bruchzahlen (vgl. Messerle 1975; Kirsch 1975). Als hinreichend für dieses Vorhaben benennt Kirsch (1975) den Wunsch, Größenbezeichnungen mit Hilfe von Zahlen zu vereinfachen. Ermöglicht werden kann das durch eine neu eingeführte Schreibweise: $\frac{5}{4}$ cm bezeichnet den vierten Teil der Größe 5 cm und wird *konkreter Bruch* genannt (vgl. ebd.). Eine wirkliche Zahlbereichserweiterung ist an dieser Stelle noch nicht vollzogen, da der Bruchzahlbegriff möglichst unabhängig von einer bestimmten Größe beziehungsweise in Verbindung mit ihr lediglich als ein auf sie wirkender Operator aufgefasst werden sollte. Aus diesem Grund wird auch innerhalb dieser Herangehensweise schließlich auf die klassische Definition zurückgegriffen. Kirsch scheint in diesem Verfahren keine größeren Schwierigkeiten zu sehen und erklärt die „klassische Definition […] als Hintergrund für ein natürlich motiviertes Vorgehen im Unterricht [für] brauchbar“ (ebd., S. 13). Die Lehrkraft könne „gute[n] Gewissen[s] die Bruchzahlen einfach mittels ‚Weglassen der Einheiten konkreter Brüche‘ ein[]führen“ (ebd.). Gerade im Hinblick auf die im vorangegangenen Kapitelabschnitt zusammengetragenen sinnstiftenden Leitideen ist diese Methodik unbedingt anzuzweifeln. Auch in der

[7] „Zu jeder Größe G und jeder Zahl n ∈ ℕ [existiert] genau eine Größe H […], deren n-faches die Größe G ist: nH = G“ (Kirsch 1975, S. 7).

Literatur scheint dieser Weg der Einführung auf Widerstand zu stoßen. Seyfferth (1975) weist beispielsweise auf die für die Schülerinnen und Schüler nur schwer zu erbringende Abstraktionsleistung der Anerkennung des Dualismus hin, welcher sich hinter den auf diese Weise gewonnenen Bruchzahlen verbirgt: Interpretiert man die Bruchzahlen im Mathematikunterricht als „Multiplikationsoperatoren auf Größenbereichen mit Teilbarkeitseigenschaft“ (ebd., S. 35), sind die Schülerinnen und Schüler dazu angehalten, Bruchzahlen sowohl als Zustandsbeschreibungen (einer Größe) als auch als Operatoren der multiplikativen Zustandsüberführung anzuerkennen (vgl. ebd.).

Seyfferth entwickelt auf der Grundlage seiner Kritik einen Alternativvorschlag zur Einführung der Bruchzahlen, der sich klar von der mathematischen Systematik klassischer Methoden distanziert und stattdessen das didaktische Kriterium des natürlichen Sprachgebrauchs zum Leitmotiv erhebt. Der Erweiterung des Zahlbereichs wird in diesem Fall die Überlegung vorangestellt, in welchem Umfang Bruchzahlen innerhalb des natürlichen Sprachgebrauchs auftreten beziehungsweise an welcher Stelle uns Bruchzahlen im alltäglichen Leben begegnen (siehe Abbildung 4).

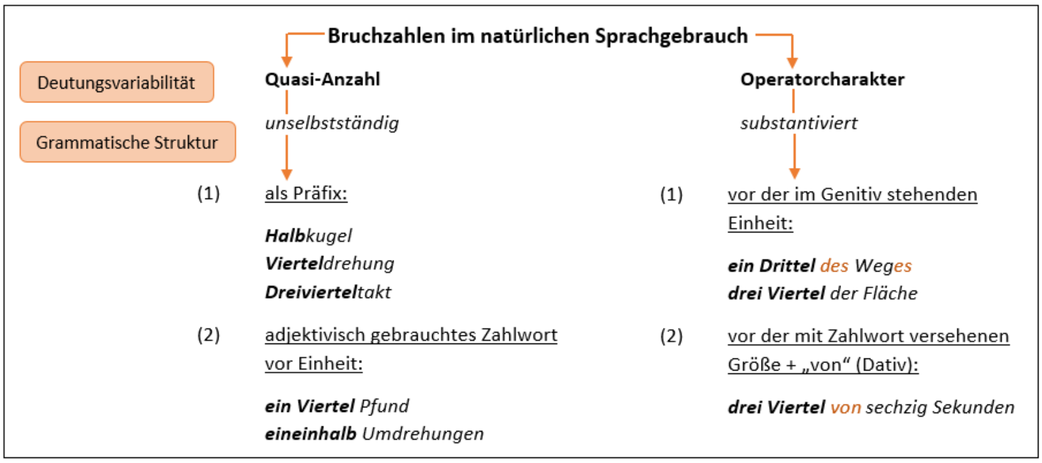


Abb. 4: Bruchzahlen im natürlichen Sprachgebrauch, eigens erstellt in Anlehnung an: Seyfferth (1975)

Es finden sich, so Seyfferth, zwei Möglichkeiten der Deutung: Informationen lassen sich mit Hilfe der Bruchzahlen zum einen vor dem Hintergrund einer Quasi-Anzahl und zum anderen unter Verwendung eines Operators übermitteln. Unter Berücksichtigung grammatischer Besonderheiten ergibt sich außerdem die Unterscheidung nach der Art des Auftretens einer Bruchzahl im Satz auf der Ebene der Wortbildung oder auf syntaktischer Ebene. Dementsprechend erscheinen Bruchzahlen im natürlichen Sprachgebrauch in unselbstständiger und substantivierter Form (vgl. ebd.): Unselbstständig auftretende Brüche lassen sich beispielsweise in durch Derivation entstandenen Lexemen oder als adjektivisch gebrauchte Zahlwörter vor Einheiten ausmachen, während Brüche in substantivierter Form vor einer im Genitiv stehenden Einheit oder in Kombination mit einem Zahlwort vor einer Größe (dann unter Hinzunahme der Präposition *von*) vorkommen[8]. Die beiden Deutungsebenen der Quasi-Anzahl und des Operators lassen sich auf diese grammatikalische Differenzierung übertragen (siehe Abbildung 4): Unselbstständig gebrauchte Bruchzahlen bedienen in Anlehnung an den Kardinalzahlaspekt (siehe Kapitel 3.1) eine Mengenvorstellung und treten in diesem Zusammenhang in der Rolle als Quasi-Anzahlen auf, während die substantivierten Formulierungen den Operatorcharakter artikulieren (vgl. ebd.).

Auf der Grundlage dieser Betrachtungen schlägt Seyfferth vor, von einer vorangestellten Definition der Bruchzahlen für den Mathematikunterricht abzusehen und stattdessen eine Genese einzuleiten, die zum einen „im Einklang mit dem natürlichen Sprachgebrauch“ (ebd., S. 38) erscheint und zum anderen berücksichtigt, dass Bruchzahlen schon früh als eigenständige Denkobjekte in der Lebenswelt der Schülerinnen und Schüler auftauchen. Diese Herangehensweise ermöglicht es, so Seyfferth, die durch den Rahmen der Definition vorgegebene Forderung nach Eindeutigkeit zu umgehen und stattdessen die Deutungsvariabilität (Quasi-Anzahl und Operatorausdruck) hervorzuheben. Schnell wird allerdings deutlich, dass die in Distanz zur mathematischen Systematik formulierte Idee der sprachlichen Orientierung letztendlich ebenfalls in eine axiomatische Einführung der Bruchzahlen mündet. Seyfferth verzichtet in seinen Überlegungen zwar auf eine klassische Definition der Bruchzahlen, regelt die Verwendung der neuen Grundbegriffe aber durch die Angabe verschiedener Axiome. Während der Ansatz dieses Vorgehens im Wesentlichen mit den Motiven des genetischen (entwickelnden) Mathematikunterrichts vereinbar ist, erinnert der weitere Prozess der Einführung eher an die Leitidee des systemorientierten Lernens, die nach dem axiomatischen Aufbau der Mathematik den Schülerinnen und Schülern Sicherheit geben soll.

[8] Substantiviert auftretende Bruchzahlen sind insofern kasusdeterminierend und liefern eine präzisere Beschreibung der Beziehung zwischen Einheit und Größe.

Erst in jüngeren Publikationen finden sich Abwandlungen des Einführungskonzepts. Der Zugang zu den Bruchzahlen wird zwar nach wie vor über Größenangaben (und später über Bruchoperatoren) empfohlen, der Fokus der Genese wird aber viel stärker auf das Vorwissen der Schülerinnen und Schüler, die Nutzung verschiedener Hilfs- und Darstellungsmittel (beispielsweise der Zahlenstrahl) sowie die Berücksichtigung verschiedener Zahlaspekte (Maßzahlaspekt, Operatoraspekt, Relationsaspekt) gelegt (vgl. Postel 1981; Padberg & Bienert 2000). Es entfaltet sich entgegen den traditionellen Lehrwegen die Ansicht, es sei „*nicht* wichtig, daß definiert wird, was eine Bruchzahl *ist*" (ebd., S. 21). In diesem Zusammenhang wird anerkannt, dass die systematische Genese von Bruchzahlen oftmals mit (nach wie vor gegenwärtigen) Problemen wie der mangelnden Fundierung des Bruchzahlbegriffs oder dem Verharren auf der syntaktischen Ebene beim Rechnen einhergeht. Der Tenor jüngerer Veröffentlichungen manifestiert sich daher vor allem in der Forderung, die Bruchzahlen an Hand von anwendungsbezogenen inhaltlichen Vorstellungen einzuführen und schlägt sich in der vielseitigen Suche nach Veranschaulichungs- und Erklärungsmodellen, die diese Vorstellungen angemessen repräsentieren können, nieder (vgl. Postel 1981; Hefendehl-Hebeker 1996; Padberg & Bienert 2000; Padberg & Wartha 2017). Im Folgenden sollen daher die für die Zahlbereichserweiterung relevanten Grundvorstellungen zusammengetragen werden.

3.2.2 Vorstellungs- und Darstellungsebene

Obgleich sich die in der Zeitschrift *Der Mathematikunterricht* veröffentlichten Aufsätze aus dem Jahre 1955 bereits mit den Herausforderungen auseinandersetzen, die sich im Zusammenhang mit der Einführung der Bruchzahlen im Mathematikunterricht ergeben, lässt sich eine deutliche Abkehr von der axiomatischen, an die innermathematische Systematik angelehnten, Herangehensweise nicht verzeichnen. Schönwald (1955), der seine Betrachtungen streng an die geistige Entwicklung der Schülerinnen und Schüler knüpft und sie damit im Wesentlichen ins Zeichen des genetischen Prinzips stellt (siehe Kapitel 2.4), erkennt zwar die Kernproblematik im Hinblick auf die Bruchrechnung, kann sich aber mit seinem Lösungsvorschlag nicht von einem rechnerisch-verfahrensorientierten Lernvorgang distanzieren. Er diagnostiziert präzise, die Rechenfertigkeit der Schülerinnen und Schüler sei „weiter nichts als bloßes

Abgerichtetsein, eine Dressur, eine Technik“ (ebd., S. 37) und liefert gleichermaßen die Ursache für diese Erkenntnis: „Die Begriffe sind inhaltsleer, die Brüche sind nichts als nur Ziffern […]; die Regeln werden hergesagt ohne Verständnis, ohne Verknüpfung mit der inneren Anschauung, ohne Einsicht“ (ebd.). Mit der Forderung, die *Anschauung* als Grundlage der *Abstraktion* innerhalb eines Lernprozesses zu begreifen und den Mathematikunterricht als zur begriffsnahen Auffassung hinführende Instanz zu verpflichten, formuliert er einen zeitlosen Anspruch an die unterrichtliche Praxis (vgl. ebd.). Wie genau der Mathematikunterricht die Aufgabe, „stets die ausführliche allseitige Veranschaulichung [zu] pflegen und [zu] fordern“ (ebd.), bewältigen soll, bleibt allerdings unklar.

Im Laufe der Zeit konzentrierten sich die Untersuchungen zur Bruchrechnung und ihrer Didaktik jedoch immer weniger auf eine möglichst axiomatisch erarbeitete Genese der Bruchzahlen und widmeten sich stattdessen immer stärker dem von Schönwald zur Grundlage erklärten Prinzip der Anschauung. Die Idee von Grundvorstellungen nach vom Hofe (1995) wird schließlich zur allgemeinverbindlichen didaktischen Leitlinie deklariert und die Notwendigkeit der Entwicklung tragfähiger inhaltlicher Vorstellungen zu mathematischen Begriffen betont. Damit die Zahlbereichserweiterung von den natürlichen Zahlen zu den Bruchzahlen nicht nur auf der mathematisch-formalen Ebene erfolgreich im Unterricht begleitet werden kann, ist eine „Stärkung der hinter dem Bruchrechnen stehenden intuitiven und anschaulichen Vorstellungen“ (Malle 2004, S. 4) unabdingbar. Die Schülerinnen und Schüler werden bei Einführung der Bruchzahlen mit Veränderungen auf der Vorstellungs- und Darstellungsebene des Zahlbegriffs konfrontiert. Während Verlust, Hinzugewinnung oder Modifikation bisheriger Grundvorstellungen sich als langsam entwickelnde Prozesse darstellen, erscheinen die Veränderungen auf der Darstellungsebene umso offensichtlicher: Die Eindeutigkeit, mit der die natürlichen Zahlen im Stellenwertsystem darstellbar sind, geht bei der Erweiterung des Zahlbereichs verloren und die Lernenden begegnen hinsichtlich der Bruchzahldarstellung einem breiten Spektrum an Möglichkeiten. Die gleiche Bruchzahl lässt sich durch unendlich viele verschiedene Brüche darstellen, weil sie das Resultat unendlich vieler Mess- und Teilungsvorgänge ist (vgl. Ulovec 2007; Hefendehl-Hebeker & Prediger 2006). Außerdem kann zur Darstellung einer Bruchzahl auch die

Dezimalschreibweise herangezogen werden, was die Möglichkeiten nochmals vervielfältigt[9]. Diese Vielfalt auf der Darstellungsebene spiegelt sich auch auf der Ebene der intuitiven und offiziellen Vorstellungen wider. Einige wichtige Vorstellungen zum Bruchzahlbegriff sollen im Folgenden zusammengetragen werden.

Wird in einer anwendungsbetonten Aufgabe von der Teilung einer Pizza in mehrere gleichgroße Stücke gesprochen oder nach dem gefärbten Anteil eines Kreises gefragt, so ist in diesem Zusammenhang die Grundvorstellung *Bruchzahl als (An)Teil (eines Ganzen)* relevant. Malle (2004) weist darauf hin, dass *das Ganze* kontextabhängig eine Größe oder ein Objekt darstellen kann und der Teil selbst ebenfalls als eigenständiges Objekt wahrgenommen wird. Weiter stellen Padberg und Wartha (2017) heraus, dass das betrachtete Ganze bei der Anteilbestimmung nicht zwangsläufig als kontinuierlich charakterisiert werden muss (wie im Beispiel mit der Pizza), sondern auch eine diskrete Beschreibung vorliegen kann (zum Beispiel bei einer Menge von 30 Schülern). Ein weiterer Teilaspekt, der sich aus dieser Situation der Anteilbestimmung ergeben kann, ist die Auffassung eines Bruchs als Teil mehrerer Ganzer: Aufgaben, die diese Grundvorstellung modellieren, konstruieren beispielsweise eine gerechte Verteilung mehrerer Kuchen auf eine Menge von Kindern (vgl. ebd.). Die Grundvorstellung *Bruchzahl als (An)Teil (eines Ganzen)* lässt sich im Wesentlichen als Spezialfall der Vorstellung *Bruchzahl als relativer Anteil* beschreiben (vgl. Malle 2004). Häufig wird dieser Aspekt im Zusammenhang mit der Größenvorstellung, derer nach Bruchzahlen als Maßzahlen fungieren, angesprochen, wenn beispielsweise Strecken oder Geldbeträge in gleichgroße Anteile geteilt werden sollen.

Die Grundvorstellung *Bruchzahl als Vergleichsoperator* lässt sich im Hinblick auf die Ausführungen zur Einführung der Bruchzahlen nach Seyfferth (1975) und Kirsch (1975) interpretieren. In der Formulierung $\frac{2}{5}$ *mal so viel wie* wird die Operatorvorstellung deutlich, noch stärker tritt sie in Form von (auf eine Größe wirkenden) multiplikativen Handlungsanweisungen auf. Hinter einer Aufgabenstellung, die Lernende dazu auffordert, $\frac{3}{5}$ von $20\,\mathrm{kg}$ zu bestimmen,

[9] Die Grundlage aller Betrachtungen zu den Bruchzahlen in diesem Abschnitt und allen nachfolgenden Kapiteln bildet die Darstellung als gemeine Brüche. Die Dezimalschreibweise wird im Hinblick auf den Umfang dieser Ausarbeitung vernachlässigt.

verbirgt sich demnach die Handlungsanweisung, die Größenangabe zunächst durch 5 zu teilen (Divisionsoperator ($\div 5$)) und das Ergebnis im Anschluss zu verdreifachen (Multiplikationsoperator ($\cdot 3$)). Die Reihenfolge der Operatoranwendung kann dabei beliebig gewählt werden (vgl. Padberg & Wartha 2017).

Als weitere zentrale Grundvorstellung zu den Bruchzahlen wird sowohl von Malle (2004) als auch von Padberg und Wartha (2017) die Vorstellung *Bruchzahl als Verhältnis* benannt, derer nach sich innere Teilverhältnisse (die Längen der Streckenabschnitte verhalten sich wie $3:4$) problemlos mittels Bruchangaben ausdrücken lassen ($\frac{3}{4}$). Nur wenn diese Grundvorstellung aufgebaut werden kann, lassen sich Proportionsaussagen als gleichwertig zu Bruchgleichungen und damit Bruchzahlen als eigenständige Denkobjekte auffassen. Hinter der Erschließung von solchen Verhältnisangaben verbergen sich enorme kognitive Anforderungen für die Schülerinnen und Schüler (vgl. Malle 2004). Interpretiert man den Doppelpunkt in einem anderen Kontext nicht als Verhältnis- sondern als Divisionszeichen, kommt die Grundvorstellung *Bruchzahl als Resultat einer Division* zum Tragen. Obgleich diese Vorstellung weniger inhaltlich motiviert ist und eher als kalkülorientiert beschrieben werden kann, spielt sie vor allem im Hinblick auf den Modellierungskreislauf eine entscheidende Rolle (siehe Kapitel 2.1): Um eine in einer anwendungsbezogenen Aufgabe beschriebene Verteilsituation zu lösen, beispielsweise wenn zwei Pizzen gerecht auf drei Personen aufgeteilt werden sollen, muss die dargebotene Sachsituation mathematisiert werden. Hierbei kann es hilfreich sein, die Problematik als Divisionsaufgabe ($2 : 3$) zu deuten und je nach Verwendungssituation auch hinsichtlich der Zahlaspekte flexible Vorstellungen aktivieren zu können (vgl. Padberg & Wartha 2017)

In Anlehnung an den Kardinalzahlaspekt, der auf eine Mengenvorstellung und die Auffassung von Zahlen als eigenständige, zählbare Denkobjekte zurückzuführen ist, kann die Grundvorstellung *Bruchzahl als Quasikardinalzahl* beschrieben werden. Unter Aktivierung dieser inhaltlichen Vorstellung werden Bruchzahlen als neue Einheiten mit dem Ziel der Analogieherstellung zu den Kardinalzahlen aufgefasst. Besonders bei der Addition und Subtraktion gleichnamiger Brüche hilft diese Vorstellung, das Rechnen mit Bruchzahlen auf das Rechnen mit natürlichen Zahlen, also auf eine Umgebung, deren Rechengesetze den

Schülerinnen und Schülern vertraut sind, zurückzuführen. Malle (2004) liefert hierfür das folgende Beispiel, in dem die Ausdrücke *1 Fünftel* und *3 Fünftel* jeweils als Einheiten begriffen werden, die leicht addiert werden können, weil sie im Sinne einer Mengenvorstellung ähnlich wie Kardinalzahlen (also *quasikardinal*) zusammengefasst werden:

$$\frac{1}{5} + \frac{3}{5} = 1 \text{ Fünftel} + 3 \text{ Fünftel}$$
$$= 4 \text{ Fünftel}$$
$$= \frac{4}{5}$$

Auch eine Analogiebildung zu den Ordinalzahlen ist möglich, indem Bruchzahlen in Stammbruchdarstellung als *Quasiordinalzahlen* gedeutet werden. Dementsprechend ist eine Interpretation der Bruchzahl $\frac{1}{6}$ als *jeder Sechste* gemeint.

Sowohl Malle als auch Padberg und Wartha (2017) führen noch weitere, weniger geläufige Grundvorstellungen zu den Bruchzahlen an. Im engen Zusammenhang mit dem Maßzahlaspekt steht beispielsweise die Vorstellung *Bruchzahl als Skalenwert*, die aus der Motivation, präzisere Messergebnisse zu gewinnen, hervorgeht. Eine Vorstellung, die vor allem bei statistischen Erhebungen genutzt wird, ist *Bruchzahl als absoluter Anteil*. Die Deutung der Bruchzahl $\frac{2}{3}$ als *zwei von drei* kann allerdings nur formuliert werden, wenn mit den Brüchen nicht gerechnet werden soll und ist deshalb für den Mathematikunterricht eher ungeeignet. Legen sich die Schülerinnen und Schüler zu stark auf diese Vorstellung fest, besteht die Gefahr, dass sich diese inhaltliche Überlegung auch auf die Rechenoperationen überträgt. Das kann dazu führen, dass die Addition ungleichnamiger Brüche von den Lernenden ohne vorheriges Gleichnamigmachen durchgeführt wird (Zähler werden addiert, Nenner werden addiert).

An Hand dieser Überlegungen wird deutlich, dass zu den Bruchzahlen eine Vielzahl an inhaltlichen Grundvorstellungen existiert und nutzbar gemacht werden kann. Die hohe Deutungsvariabilität der Bruchzahlen wird von Malle (2004) in einer Übersicht zusammengefasst (siehe Abbildung 5):

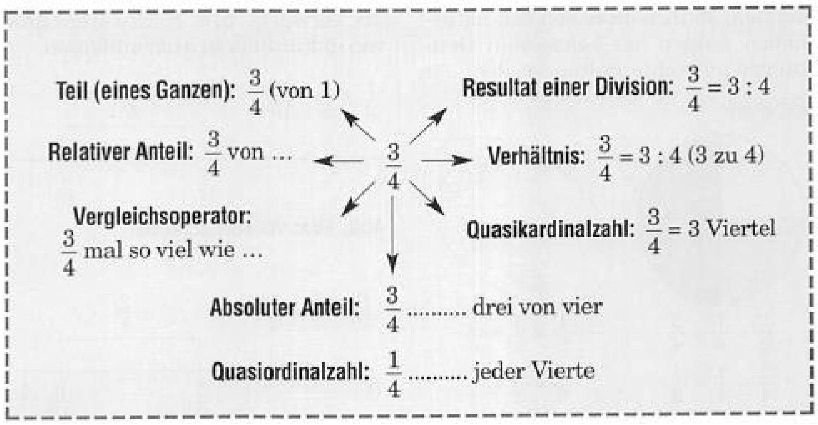


Abb. 5: Einige Deutungen einer Bruchzahl, aus: Malle (2004), S. 5

Padberg und Wartha (2017) stellen heraus, dass zwischen den einzelnen Bruchzahlaspekten vielfältig Bezüge hergestellt werden können und es insofern häufig zu Überlappungen der Vorstellungen kommt. Als zentral erweist sich bei Beleuchtung der Zusammenhänge die Vorstellung *Bruchzahl als Anteil*, weshalb dieser Aspekt im Mathematikunterricht unbedingt Berücksichtigung finden sollte. Es erscheint jedoch nicht sinnstiftend, die Ausbildung *aller* hier zusammengetragenen Vorstellungen gleichzeitig zu fördern, um der Entwicklung von Fehlvorstellungen vorzubeugen. Im Sinne des genetischen Prinzips empfiehlt es sich, Vorstellungen schon frühzeitig sukzessiv aus situativen Kontexten heraus aufzubauen und weiterzuentwickeln, die dann später bei der Anerkennung der Zahlbereichserweiterung und der Bearbeitung von problem- oder kalkülorientierten Aufgabenstellungen hilfreich sein können. Wie die Gestaltung eines solchen Lernprozesses gelingen kann, soll mit der Suche nach geeigneten Veranschaulichungs- und Erklärungsmodellen untersucht werden. An dieser Stelle sollen außerdem verschiedene Möglichkeiten der Verortung von Grundvorstellungen im Unterrichtsgeschehen, also reale Situationen und Gelegenheiten, die sich für die Aktvierung bestimmter Vorstellungen anbieten, diskutiert werden.

3.2.3 Vorstellungen zu den Rechenoperationen

Während sich die bisherigen Betrachtungen im Hinblick auf tragfähige Grundvorstellungen vor allem auf den Zahlbegriff an sich konzentriert haben, soll der Fokus im Folgenden auf den weiteren Umgang mit den Bruchzahlen im Unterrichtsgeschehen gelegt werden. Damit die Schülerinnen und Schüler auch die Erschließung kalkülorientierter Aufgaben mit entsprechendem inhaltlichen Verständnis unterfüttern können, ist es als ebenso bedeutsam zu bewerten, adäquate Vorstellungen zu den Rechenoperationen aufzubauen, zumal die anschaulichen Vorkenntnisse hinsichtlich der Addition und Subtraktion einfacher Brüche (vor der Einführung im Unterricht) oftmals sehr gering sind (vgl. ebd.). Innerhalb dieser Ausarbeitung werden die Vorstellungen zur Ordnungsrelation und zum Größenvergleich von Brüchen sowie Vorstellungen zum Erweitern und Kürzen nicht berücksichtigt, da etwaige Betrachtungen mit dem vorgegebenen Umfang der Arbeit nicht vereinbar wären.

Die für die Addition und Subtraktion der natürlichen Zahlen relevanten Vorstellungen des *Hinzufügens* beziehungsweise *Zusammenfügens* und *Wegnehmens* bedürfen bei der Zahlbereichserweiterung hin zu den Bruchzahlen keiner Modifikation: Obgleich Bruchzahlen im Wesentlichen nicht als Repräsentanten einer Mengenvorstellung (Beschreibung von Anzahlen) dienen, lassen sich die Deutungen zumeist problemlos übernehmen (vgl. ebd.). Hefendehl-Hebeker und Prediger (2006) betonen in diesem Zusammenhang aber, dass diese die Vorstellungen betreffende Einfachheit keineswegs mit einer Einfachheit in der Durchführung der Rechenoperationen gleichgesetzt werden sollte: Vor allem bei der Addition ungleichnamiger Brüche müssen zunächst prozedurale Kompetenzen erworben werden, um auf der Basis der inhaltlichen Vorstellungen Strategien zur Ergebnisermittlung entwickeln zu können (vgl. Padberg & Wartha 2017). Analog ergeben sich auch bei der Subtraktion von ungleichnamigen Brüchen Schwierigkeiten in der Durchführung, die zunächst eine gemeinsame Unterteilung notwendig machen. Als hilfreich für die Bewältigung dieser prozeduralen Herausforderungen wird in der Literatur der Quasikardinalzahlaspekt benannt, der einen für die Schülerinnen und Schüler wichtigen Bezug zu den natürlichen Zahlen herstellen kann. Außerdem profitieren die Lernenden von der Beziehung zwischen Addition und Subtraktion im Sinne einer Umkehrung, die auch bei der Zahlbereichserweiterung unverändert bleibt (vgl. ebd.). Zusätzlich erläutert Ulovec (2007) die Vorstellung des *Weiterschreitens*, *Weiterzählens* oder *Vorwärtsschreitens* im Hinblick auf die Addition beziehungsweise des *Rückwärtsschreitens* hinsichtlich der Subtraktion als modifikationsbedürftig. Um diese Vorstellung auch weiterhin aktivieren zu können, muss eine veränderte Schrittweite (Bruchteile) definiert werden. Hierbei erweist sich ein Rückgriff auf den quasikardinalen Bruchzahlaspekt ebenfalls als hilfreich: Die Rechnung $\frac{1}{2} + \frac{1}{5} = \frac{7}{10}$ kann so beispielsweise als Vorwärtsschreiten in *Fünftelschritten* gedeutet werden (vgl. Malle 2004).

Während die Vorstellungen zur Addition und Subtraktion von Brüchen größtenteils übernommen oder nur geringfügig angepasst werden müssen, erfordert das Durchdringen der Rechenoperationen Multiplikation und Division eine weitaus größere Bereitschaft, *alte* Vorstellungen zu modifizieren oder gänzlich aufzugeben. Untersuchungen zeigen, dass es den Schülerinnen und Schülern vor allem schwerfällt, die intuitiv verankerte Idee *Multiplizieren vergrößert* zu überwinden, was bei der Anwendung der Rechenregeln zur Multiplikation von Brüchen (die den Lernenden häufig keine Probleme bereitet) zu falschen Ergebnissen führt und Irritation hervorruft (vgl. Hefendehl-Hebeker & Prediger 2006). Bei der systematischen Behandlung der Multiplikation von Brüchen im Unterricht unterscheidet man drei Fälle: Natürliche Zahl mal Bruch (starke Analogie zur Multiplikation zweier natürlicher Zahlen), Bruch mal natürliche Zahl sowie Bruch mal Bruch. Im ersten Fall lässt sich die Multiplikation auf die bereits im Umgang mit den natürlichen Zahlen erworbene Grundvorstellung der *Multiplikation als wiederholte Addition* (des zweiten Faktors) zurückführen (vgl. Padberg & Wartha 2017). Was im natürlichen Zahlbereich bisher gut funktioniert hat, kann also in diesem Fall für die Vervielfältigung von Brüchen nutzbar gemacht werden. Es erfolgt außerdem ein Rückgriff auf die im Zusammenhang mit der Addition gleichnamiger Brüche ausgebildeten Vorstellungen (siehe Abbildung 6).

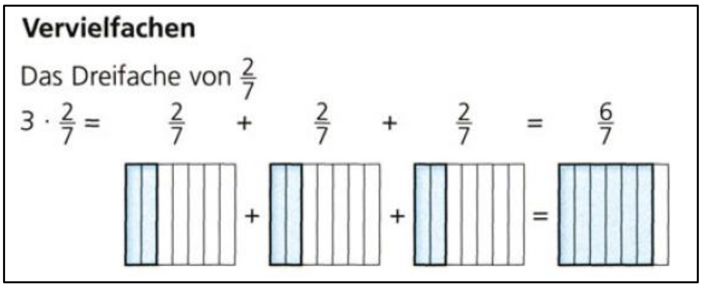


Abb. 6: Schulbuchbeispiel, aus: Mathematik Neue Wege 6, zit. nach Padberg & Wartha (2017), S. 105

Es wird deutlich, dass diese Grundvorstellung nur tragfähig ist, wenn der erste Faktor eine natürliche Zahl ist. Stellt der erste Faktor hingegen eine Bruchzahl dar, die mit einer natürlichen Zahl multipliziert werden soll, muss in Anlehnung an die Operator-Vorstellung eine alternative inhaltliche Idee aktiviert werden. Die

Grundvorstellung *Von-Deutung der Multiplikation* definiert in diesem Zusammenhang die Multiplikation $\frac{2}{3} \cdot 6$ als $\frac{2}{3}$ *von* 6 und erleichtert somit zumindest den Zugang zu allen Multiplikationsaufgaben, bei denen der Nenner der Bruchzahl den natürlichen Faktor teilt. Ist das, wie bei der Aufgabe $\frac{2}{7} \cdot 3$, nicht der Fall, lässt sich eine anschauliche Annäherung über die Bildung eines *neuen Ganzen* erreichen (vgl. ebd.): Der Faktor 3 verlangt dementsprechend zunächst die Zusammenfassung von drei Ganzen zu einem neuen, damit im Anschluss von jedem einzelnen Ganzen $\frac{2}{7}$ gebildet werden können, indem der Zähler des Bruchs mit dem Faktor 3 multipliziert wird. Diese Grundvorstellung kann als einzige auch für die Multiplikation zweier Bruchzahlen übernommen werden. Ulovec (2007) erklärt hierzu, dass „‚das Vierfache von drei' […] sich auch auf ‚das ein Viertelfache von zwei Fünftel' übertragen" lässt (ebd., S. 16). Zusätzlich lässt sich die Multiplikation zweier Bruchzahlen und schließlich auch die Ableitung der Produktregel durch die Vorstellung *Flächeninhalt eines Rechtecks* in Verbindung mit dem Permanenzprinzip unterstützen. Diese Annäherung, wie sie von Padberg und Wartha (2017) vorschlagen wird, mündet allerdings eher in eine Einsicht, die zwangsläufig (auf der Grundlage formaler Gesetze, die ihre Gültigkeit behalten sollen) und weniger anschaulich gewonnen wird, von den Autoren aber als leichter im Vergleich zur Von-Deutung beschrieben wird. Weiterhin muss die Vorstellung der Multiplikation als Streckung (beispielsweise entlang der Zahlengeraden), die im Umgang mit den natürlichen Zahlen problemlos aktiviert werden kann, dahingehend modifiziert werden, dass bei der Multiplikation von Bruchzahlen gleichermaßen eine Stauchung erfolgen kann (vgl. Ulovec 2007).

Die im Hinblick auf die Division im natürlichen Zahlbereich zentral wirksamen Grundvorstellungen des *Aufteilens* und *Messens* lassen sich zumindest zum Teil auf die Bruchrechnung übertragen. Leichte Einschränkungen werden sichtbar, wenn im Kontext des *Aufteilens* eine Divisionsaufgabe modelliert werden soll, bei der der Divisor keine natürliche Zahl ist[10], oder wenn die Vorstellung des *Messens* im Zusammenhang mit einem Dividenten, der kleiner als der Divisor ist, aktiviert werden soll (vgl. Malle 2004). Letztendlich werden die Schülerinnen und Schüler auch mit Divisionsaufgaben konfrontiert, die weder mit der einen noch mit der

[10] Es ergibt wenig Sinn, $\frac{5}{7}\ l$ Saft auf $\frac{2}{5}$ Personen aufzuteilen.

anderen Grundvorstellung in einen sinnvollen Einklang gebracht werden können. An dieser Stelle scheint eine formale Interpretation der Division als Rechnung (zumindest nach aktuellem Forschungsstand) nicht abzuwenden zu sein. Hierbei verweisen Padberg und Wartha (2017) auf die Bedeutsamkeit einer sorgfältigen und langfristig vorbereiteten Ableitung der Divisionsregel unter Einbeziehung vielfältiger Darstellungen und Veranschaulichungen. Zum Abschluss der Betrachtungen zur Zahlbereichserweiterung von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{Q}^+$ sollen nachfolgend einige Modelle zusammengetragenen werden, die den Prozess der Einführung der Bruchzahlen sowie der Erschließung der Rechenoperationen mit ihren Gesetzmäßigkeiten anschaulich und verständnisfördernd begleiten können.

3.2.4 Veranschaulichungs- und Erklärungsmodelle

Bei der im Rahmen dieser Ausarbeitung präsentierten Veranschaulichungshilfen handelt es sich lediglich um eine Auswahl aus einer Vielzahl an möglichen Modellen und Visualisierungen, die in jüngeren Publikationen vorgestellt und im Hinblick auf einen möglichen Einsatz im Mathematikunterricht erläutert werden. Die nachfolgende Darstellung bemüht sich daher keineswegs um Vollständigkeit, wohl aber um den logischen Anschluss an die in den vorherigen Kapiteln gewonnen Erkenntnisse hinsichtlich der zentralen inhaltlichen Vorstellungen zum Zahlaspekt und den Rechenoperationen im Umgang mit den Bruchzahlen.

Die bisherigen Untersuchungen haben gezeigt, dass Grundvorstellungen (im Gegensatz zu vorgegebenen Rechenregeln) sich zumeist nicht deckungsgleich einer bestimmten Aufgabe zuordnen und schon gar nicht auswendig lernen lassen, sondern nur „aus einer individuellen und aktiven Auseinandersetzung mit den […] Bruchzahlen und ihren Eigenschaften [erwachsen]“ (Wittmann 2007, S. 17) können. Eine Auseinandersetzung dieser Art lässt sich beispielweise durch bestimmte Aufgabenformate fördern, die von den Schülerinnen und Schülern die Begründung einer Rechnung oder die Erklärung eines Rechenfehlers verlangen. Das Ziel entsprechender Aufgaben ist die explizite Thematisierung von Irritationen und Unregelmäßigkeiten (beispielsweise in welcher Hinsicht sich die Bruchzahlen von den natürlichen Zahlen unterscheiden) sowie das Aufdecken von Denkhürden und Fehlvorstellungen. Prediger (2004) plädiert für den Einsatz von Fantasie- und Rechengeschichten im Mathematikunterricht und betont die Bedeutsamkeit von Fehlersuchaufgaben im Hinblick auf die formale Ebene. Dementsprechend führt die Konfrontation der Lernenden mit realen, fehlerhaft gelösten Rechenaufgaben zu einer Auseinandersetzung mit verbreiteten Fehlvorstellungen, „ohne [dass sie] alle Fehler selbst gemacht haben [] müssen“ (ebd., S. 12). Rechengeschichten helfen dabei, die deutlichen Unterschiede zwischen den natürlichen Zahlen und den neu gewonnenen Bruchzahlen klar herauszustellen: „Erfinde zu dem Produkt $\frac{2}{5} \cdot 15$ eine Textaufgabe. Erkläre mit der Textaufgabe, wieso das Produkt kleiner als 15 sein muss“ (Schulbuchbeispiel, aus: Mathematik Neue Wege 6, zit. nach Prediger 2004, S. 12). Paulitsch (1998) versteht es auf ganz besondere Weise, einen schülerinnen- und schülernahen Zugang zu den Bruchzahlen zu erarbeiten. In einem an alle Mathematiklehrer und -lehrerinnen adressierten „offene[n] Brief der natürlichen Zahlen“ (ebd., S. 20) wird gefordert, die Fantasie und Vorstellungskraft der Lernenden im Unterrichtsgeschehen zu nutzen. Verpackt in eine Fantasiegeschichte lässt Paulitsch die Zahlen lebendig werden, die den Vorschlag unterbreiten, im Unterricht „von Freundschaften unter den Zahlen und von Nachbarschaftshilfe auf dem Zahlenstrahl“ (ebd., S. 21) zu erzählen und die darauf hinweisen, dass es enorm wichtig sei „zu erklären, wie es ein Bruch fertigbringt zu laufen, ohne den Bruchstrich zu verlieren“ (ebd.). Dieser Ansatz versteht sich als spielerische Begegnung mit den Bruchzahlen, kann vielfältig sowohl im Hinblick auf die Eigenschaften als auch auf die korrekte Durchführung der Rechenoperationen eingesetzt und von den Lehrkräften beliebig modifiziert werden. Exemplarisch sei an dieser Stelle auf die Fantasiegeschichte *Das Märchen von dem bösen Drachen und dem klugen Bruch* verwiesen, die die prinzipielle Erweiterbarkeit von Brüchen thematisiert und das Ausbilden inhaltlicher Vorstellungen zur Ordnungsrelation unterstützt (siehe Abbildung 7).

Wittmann (2007) kritisiert diese Art von Aufgaben- und Darstellungsformaten auf Grund ihrer hohen Sprachlastigkeit. Dass es sich hierbei oftmals um Erklärungen, Begründungen und Formulierungen handelt und die Informationen insofern überwiegend auf der verbalen Ebene repräsentiert und verarbeitet werden, sieht er problematisch: Gerade für nicht-muttersprachliche Schülerinnen und Schüler bestünden an dieser Stelle große sprachliche Herausforderungen. Er schlägt stattdessen die Darstellung abstrakter Sachverhalte auf handelnder (enaktiver) und bildhafter (ikonischer) Repräsentationsebene vor und begründet seinen Standpunkt an Hand von erweiterten Denkmöglichkeiten und erleichterten Kommunikationsbedingungen im Unterricht (vgl. ebd.). Eine beliebte Form der

Darstellung bilden hierbei Kreis- und Rechteckmodelle. Gerade zu Beginn der Zahlbereichserweiterung eignet sich das Kreismodell besonders gut, um die Grundvorstellung *Bruchzahl als (An)Teil (eines Ganzen)* aufzubauen, da die Kreisdarstellung das Ganze im besonderen Maße sichtbar macht. Hierbei kann das Modell auch in einem anwendungsbezogenen Kontext, beispielsweise in der Form einer Pizza, zum Tragen kommen. Das Rechteckmodell vermag es vor allem, die Grundvorstellung *Von-Deutung der Multiplikation* zu fördern und lässt sich in formaler Hinsicht (siehe Abbildung 6), zur Modellierung einer anwendungsbezogenen Sachsituation (siehe Abbildung 8) oder als haptische Erfahrung für die Schülerinnen und Schüler einsetzen.

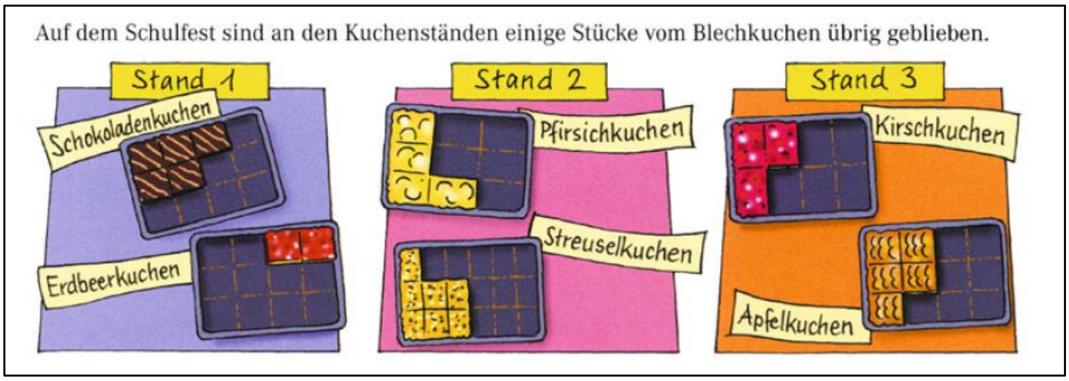


Abb. 8: Schulbuchbeispiel aus: Elemente der Mathematik 6, zit. nach Padberg & Wartha (2007), S. 74

Letztere lässt sich beispielsweise über das Experimentieren am Geobrett gewinnen. Durch das Spannen eines Gummirings um die in einem (5x5-)Brett befestigten Nägel, die die Gesamtfläche des Bretts in gleichgroße Felder unterteilen, können die Schülerinnen und Schüler konkrete Handlungen ausführen, reflektieren und schließlich auch auf kognitiver Ebene nutzbar machen (vgl. Wittmann 2007). Einen weiteren haptischen Zugang in Vorbereitung auf die Einführung der Multiplikation von Bruchzahlen kann außerdem die Faltumgebung öffnen, die sich zunächst der Grundvorstellung *Bruchzahl als (An)Teil (eines Ganzen)* beziehungsweise *Bruchzahl als relativer Anteil* durch das Falten von Papier nähert (vgl. Prediger 2006). An Hand der durch das Papier vorgegebenen Rechteckstruktur können die Schülerinnen und Schüler handlungsorientierte Erkenntnisse im Hinblick auf das *Anteile von Anteilen Bilden* gewinnen und im Verlauf des Lernprozesses (beispielsweise bei der Erschließung der Multiplikation von Bruchzahlen) darauf zurückgreifen. Die Handlungserfahrungen können innerhalb der Faltumgebung bereits am allgemeinen Fall der Multiplikation ($\frac{3}{4}$ von $\frac{2}{5}$ falten) explizit gemacht werden und müssen nicht, wie in einigen Unterrichtskonzeptionen vorgeschlagen, zunächst an vielen separaten Fällen untersucht werden (vgl. ebd.).

Einen weiteren innovativen Ansatz, der vor allem langfristig den Aufbau inhaltlicher Vorstellungen begleiten soll, stellt das *Bruchalbum* dar. Mit der Entwicklung und Gestaltung eines Bruchalbums soll es den Schülerinnen und Schülern ganz individuell ermöglicht werden, ihr persönliches Bruchzahlverständnis weiterzuentwickeln und variantenreich zum Ausdruck zu bringen (vgl. Tessars 2011). Die Lernenden sollen in ihre Alben „Geschichten schreiben, Brüche aus dem Alltag, aus Zeitschriften einkleben, Bilder malen" (ebd., S. 6). Außerdem werden sie dazu aufgefordert, zu jedem Bild einen Satz, der die symbolische Repräsentationsebene der Darstellung hervorhebt, oder eine Rechnung zu notieren, um einer vordergründlich bildhaften Zusammenstellung vorzubeugen (siehe Abbildung 9).

Abb. 9: Beispiel aus einem Bruchalbum, aus: Tessars (2011), S. 7

Diese Methode spricht vor allem die Vorstellungs- und Darstellungsebene des Bruchzahlbegriffs an und ermöglicht eine Verknüpfung der Erfahrungswelt der Schülerinnen und Schüler mit der Welt der Mathematik. Tessars Erfahrungen im Unterrichten mit dem Bruchalbum zeigen, dass die Schülerinnen und Schüler eigenständig viele Beispiele und Darstellungen aus ihrer Lebenswelt abbilden: „Geld in einem Portemonnaie, das einen Bruchteil einer größeren Geldmenge darstellt; ein Schwimmbecken, das […] zu einem Drittel abgesperrt ist; ein Glas Limonade ist nur zu einem Sechstel gefüllt" (ebd., S. 6). Insbesondere bei diesen alltagsnahen Interpretationen des Bruchzahlbegriffs kann die Ausbildung der Vorstellung *Bruchzahl als Quasikardinalzahl* unterstützt werden. Insofern kann bei Einsatz der Veranschaulichungsform des Bruchalbums eine Ausbildung von Grundvorstellungen gemäß vom Hofes (1995) Modell angenommen werden (siehe Abbildung 2). Das Bruchalbum lässt sich stetig erweitern sowie hinsichtlich der Lerngruppe leicht abwandeln und bietet außerdem die Möglichkeit der wertschätzenden und motivierenden Rückmeldung, wenn die Ergebnisse im Unterricht abschließend mit einem *Museumsgang* präsentiert werden (vgl. Tessars 2011). Das Prinzip des ganzheitlichen Lernens (mit allen Sinnen), das dieser Methode zu Grunde liegt, lässt sich beispielsweise auch durch das Lernen im Stationsbetrieb oder mit einer Lerntheke verwirklichen. An der im Rahmen einer Stationsarbeit von Tessars geplanten Station *Saftmischungen* können die Schülerinnen und Schüler Bruchzahlen sozusagen konkret erleben, wobei sowohl die enaktive als auch die symbolische Repräsentationsebene berücksichtigt wird. In Partnerarbeit sollen die Lernenden an dieser Station jeweils mit verbundenen Augen verschiedene Mischverhältnisse (beispielsweise $\frac{1}{3}$ Saft und $\frac{2}{3}$ Wasser) *schmecken*, erraten und schließlich der entsprechenden symbolischen Schreibweise der Bruchzahlen zuordnen (vgl. ebd.). Es werden vor allem die Grundvorstellungen *Bruchzahl als (An)Teil (eines Ganzen)* und *Bruchzahl als Verhältnis* aktiviert.

Die zusammengetragenen Modelle zeigen deutlich, dass eine abwechslungsreiche und aktivierende Auseinandersetzung mit den Bruchzahlen im Mathematikunterricht möglich ist. Gerade im Hinblick auf die Vorstellungs- und Darstellungsebene lassen sich unterschiedliche Aufgabenformate, alltagsnahe Kontexte, ikonische und enaktive Handlungsformate sowie genetische Lernumgebungen in das Unterrichtsgeschehen integrieren, um den Schülerinnen und Schülern eine langfristige Begegnung mit der Zahlbereichserweiterung auf inhaltlicher Ebene zu ermöglichen. Diese Modelle und Methoden lassen sich zum Teil auch für die Annäherung an die Rechenoperationen (auch in spielerischer Form) nutzen.

Bevor jedoch eine umfangreiche Kontextualisierung dieser Untersuchungen im Rahmen eines Vorschlags für eine Unterrichtskonzeption geleistet wird, soll sich im Folgenden zunächst auf analoge Weise an die Zahlbereichserweiterung von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{Z}$ angenähert werden.

3.3 Ganze Zahlen $\mathbb{Z}$

3.3.1 Entstehung aus den natürlichen Zahlen

In der im Rahmen dieser Ausarbeitung studierten Literatur wird vielfach beschrieben, dass die Entstehung der negativen Zahlen aus den natürlichen Zahlen historisch gesehen weitaus komplizierter verlief und sich ihre Anerkennung als eigenständige Denkobjekte weitaus länger hinauszögerte, als es bei der Zahlbereichserweiterung hin zu den Bruchzahlen der Fall war (vgl. Hefendehl-Hebeker 1989; Malle 2007a). Dieser Umstand ist vor allem darauf zurückzuführen, dass der im Hinblick auf die negativen Zahlen bestehende Konflikt mit den elementaren Größenvorstellungen zunächst geistig überwunden werden musste, bevor eine allgemeingültige Akzeptanz als theoretische Objekte erfolgen konnte (siehe Abbildung 3). Es ist also davon auszugehen, dass auch die Schülerinnen und Schüler bei der Einführung der negativen Zahlen auf gedankliche Hürden stoßen werden, die den Prozess der begrifflichen Erschließung erheblich erschweren können. In diesem Kapitel sollen auf der Grundlage dieser Überlegung daher verschiedene Ansätze zur Erschließung des ganzen Zahlbereichs unter Berücksichtigung ihrer historischen Einordung skizziert werden.

Der klassische algebraische Weg, die Einführung der negativen Zahlen zu gestalten, führt über die Einbettung der regulären Halbgruppe $(\mathbb{N}_0, +)$ in die kommutative Gruppe $(\mathbb{Z}, +)$. Hierbei wird zunächst das kartesische Produkt $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ gebildet und auf dieser Menge eine Äquivalenzrelation, eine Ordnungsrelation sowie eine Verknüpfung definiert (vgl. Messerle 1975). Innerhalb der Klassen aus dieser Menge lässt sich die geordnete zyklische Gruppe der ganzen Zahlen derart definieren, dass die zuvor für das kartesische Produkt geforderten Gesetzmäßigkeiten erhalten bleiben. Demnach lässt sich dann „jedes Element […] der ganzen Zahlen [als] die Differenz aus zwei Elementen […] der natürlichen Zahlen" (Schindler 2014, S. 74) darstellen. Als neutrales Element kann 0 und als das zu x inverse Element kann $-x$ angegeben werden. Um auch die (uneingeschränkt) durchführbare Multiplikation definieren und die Teilbarkeitsregeln der natürlichen Zahlen auf die ganzen Zahlen übertragen zu können, erfolgt gemäß dieser traditionellen Herleitung abschließend die Erweiterung zum Ring der ganzen Zahlen (vgl. Messerle 1975).

Diese Herangehensweise gilt vor allem in der Hochschulmathematik als sehr verbreitet, birgt allerdings erhebliche begriffliche Anforderungen. Es zeichnet sich insbesondere in den Argumentationen weniger alter Publikationen der Tenor ab, die negativen ganzen Zahlen nicht per Neudefinition, sondern ausgehend vom Zahlbereich $\mathbb{Q}^+$ über die Konstruktion entsprechender negativer Elemente (und unter Hinzufügung der Null als weiteres Element) dazuzugewinnen. Die Autoren Padberg, Danckwerts und Stein (1995) sehen in dieser Variante der Annäherung den Vorteil, auf eine Klassenbildung und die „damit verbundene[n] Nachweise der Repräsentantenunabhängigkeit bei den Verknüpfungen" (ebd., S. 115) verzichten zu können. Die ganzen Zahlen werden auf diese Weise von vornherein als Obermenge von $\mathbb{N}_0$ eingeführt: Zu jedem Element $m \in \mathbb{N}$ wird ein neues Objekt $\overline{m}$ (negativ m) konstruiert, das die folgenden Eigenschaften erfüllt (vgl. Kirsch 1973):

$\overline{m} \neq n$ für alle $m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}_0;$

$\overline{m}_1 \neq \overline{m}_2,$ wenn $m_1 \neq m_2.$

Die Menge aller dazugewonnenen Elemente $\overline{m}$ wird als $\overline{\mathbb{N}}$ mit

$$\overline{\mathbb{N}} = \{\overline{m}\,; m \in \mathbb{N}\}$$

bezeichnet. Eine Definition der ganzen Zahlen lässt sich darauf aufbauend dann wie folgt konstruieren:

$$\mathbb{Z}_{def} = \mathbb{N}_0 \cup \overline{\mathbb{N}}$$

Die Bezeichnung der neu definierten Elemente als ganze Zahlen und damit die vollständige Erarbeitung der Zahlbereichserweiterung muss anschließend noch durch die Definition der entsprechenden Rechenoperationen geleistet werden. Das kann beispielsweise mittels additiver Operatoren erfolgen, soll aber an dieser Stelle nicht konkreter ausgeführt werden. Diese Einführungsmethode wird von Kirsch als völlig legitim und praktikabel für den Mathematikunterricht beschrieben. Im Hinblick auf die nach wie vor sehr axiomatisch-systematisch angeleitete Genese und das hohe Abstraktionsniveau ist dieser Standpunkt aber unbedingt zu hinterfragen. Beide Varianten genügen den Prinzipien eines systemorientierten Mathematikunterrichts und stützen die Legitimation der Zahlbereichserweiterung auf die Definitionen mittels bekannter mathematischer Begriffe und die Permanenz formaler Gesetzte (siehe Kapitel 2.3). Obgleich die Annäherung nach Kirsch oder Padberg, Danckwerts und Stein (1995) sowohl innermathematisch als auch im Hinblick auf die Schülerinnen und Schüler als leichter verständlich zu bewerten ist, ist die Eignung für den Aufbau tragfähiger Vorstellungen anzuzweifeln.

Griesel (1973) führt im Sinne dieser Kritik einen alternativen Vorschlag zur Einführung der negativen Zahlen an: Nach dem *Prinzip des natürlichen Zugangs* kann eine Genese der negativen Zahlen auch ausgehend von elementaren wirklichkeitsbezogenen Anwendungssituationen erfolgen. Dieser Zugang komme der Erkenntnis zugute, dass Schülerinnen und Schüler Begriffe, die sie eigenständig aus ihrer Lebenswelt abstrahiert haben, leichter erschließen können. Im Wesentlichen erinnert dieser Ansatz an das Konzept Seyfferths (1975), das im Hinblick auf die Einführung der Bruchzahlen das Kriterium des natürlichen Sprachgebrauchs und damit ebenfalls die Lebenswelt der Lernenden berücksichtigt (siehe Kapitel 3.2.1). Griesel (1973) räumt zwar ein, dass „ein solcher Weg weitschweifiger als ein nach mathematischen Einfachheitskriterien entwickeltes, möglichst umwegfreies Zurückführen auf die natürlichen Zahlen" (ebd., S. 55), dieser Umstand aber hinsichtlich „de[r] vielen pädagogischen Vorteil[e] in Kauf" (ebd.) zu nehmen sei. Er unterscheidet für die negativen Zahlen die Anwendungssituationen der Beschreibung von Skalenbereichen (Kontostände, Temperaturen), Verschiebungsoperatoren (Konto-, Temperaturänderungen) und Vergleichen zwischen Veränderungen. Für die Hinführung zur Definition der negativen Zahlen präsentiert er zunächst einige Beispiele für Skalenwerte und wie sie in der alltäglichen Lebenswelt zur Koordination gebraucht werden. Anschließend wird übergreifend für die Punkte, Elemente oder Zustände der aufgelisteten Beispiele die Gesetzmäßigkeit einer Ordnungsrelation festgestellt und weiter für je zwei Elemente aus diesen geordneten Mengen eine idealisierte Abstandsdefinition formuliert. Schnell wird deutlich, dass inhaltliche Vorstellungen spätestens an dieser Stelle nicht weiter berücksichtigt werden und Griesels weiteres Vorgehen sich eher an der traditionellen Axiomatik orientiert: Ausgehend von der Idealisierung der angegebenen Verwendungskontexte werden der Begriff des symmetrischen Skalenbereichs und schließlich die negativen Zahlen als Koordinaten in symmetrischen Skalenbereichen definiert. Inwieweit sich dieser Annäherungsvorschlag daher tatsächlich von den nach Messerle (1975) oder Kirsch (1973) beschriebenen Einführungsmodellen hinsichtlich der inhaltlichen Tragfähigkeit unterscheidet, muss demnach kritisch hinterfragt werden.

Während diese (algebraischen) Einführungskonzepte vor allem eine formale Begegnung mit den negativen Zahlen im Sinne einer wissenschaftshistorischen Genese ermöglichen, wird in jüngeren Publikationen die Variante der kontextuellen Anbindung des negativen Zahlbegriffs diskutiert (vgl. Schindler 2014). Die Argumentationen berufen sich hierbei auf die Position, eine formale Einführung würde „Inkonsistenzen hinsichtlich aufgebauter Vorstellungen nicht bearbeite[n] und den Bezug von negativen Zahlen zur Alltagswelt im Dunkeln l[a]ss[en]“ (Hussmann & Schindler 2014, S. 28). Eine kontextgebundene Einführung verzichtet auf hinführende Definitionen und Beweise und widmet sich stattdessen der Suche nach einem geeigneten (prototypischen) Kontext, der authentisch und reichhaltig darzustellen ist und darüber hinaus „das Potenzial ha[t], Lernprozesse zu begleiten und tragfähig für ganze Unterrichtsreihen zu sein“ (Schindler 2014, S. 98). Kontexte, die in der Mathematikdidaktik untersucht und hinsichtlich ihrer Eignung für die unterrichtliche Praxis kritisch diskutiert werden, sind beispielsweise Temperaturen, die Höhe über und unter dem Meeresspiegel, Etagen- beziehungsweise Aufzugkennzeichnungen, Guthaben und Schulden, Populationsentwicklungen oder das Sinken von Preisen. Ziel der kontextgebundenen Einordnung ist das Erkennen struktureller Ähnlichkeiten in unterschiedlichen Kontexten sowie das Erfassen situativer Invarianzen als Ausgangspunkt eines umfangreichen Begriffsbildungsprozesses (vgl. ebd.). Schindler weist in diesem Zusammenhang darauf hin, dass eine ausschließlich kontextorientierte Annäherung an den negativen Zahlbegriff insbesondere bei der richtigen Durchführung der Rechenoperationen problematisch werden kann und dass das Handeln auf der formal-symbolischen Ebene aus diesem Grund parallel geübt werden sollte. Es wird daher empfohlen, die gewählten Kontexte im Unterricht mit geeigneten, sinnstiftenden Modellen und konkretem Material zu kombinieren. Eine Auswahl geläufiger Modelle soll nachfolgend vorgestellt und diskutiert werden, nachdem zunächst die für die Zahlbereichserweiterung notwendigen Grundvorstellungen zusammengetragen wurden.

3.3.2 Vorstellungs- und Darstellungsebene

Bereits in einem der ersten Jahrgänge der Zeitschrift *Praxis Mathematik* wird die Erkenntnis formuliert, dass es sich bei der Einführung der negativen Zahlen „um die erste, die Grenzen der konkreten Wirklichkeit überschreitende Erweiterung des Zahlbereiches“ (Kemper 1965, S. 231) handle und daher mit

Verständnisschwierigkeiten seitens der Schülerinnen und Schüler zu rechnen sei. Bei der Zahlbereichserweiterung von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{Z}$ sind (möglicherweise erstmalig) große Umbrüche im bisher aufgebauten Grundvorstellungsgefüge zu verzeichnen, die es im Unterrichtsgeschehen aufzufangen gilt. Grundvorstellungen, die im Umgang mit den natürlichen Zahlen bisher problemlos aktiviert werden konnten, müssen beim Übergang zu den ganzen Zahlen (wie auch bei der Einführung der Bruchzahlen) modifiziert, teilweise neu interpretiert oder gänzlich aufgegeben werden (vgl. vom Hofe & Hattermann 2014). Hierbei kann zwischen Veränderungen auf der Vorstellungs- und Darstellungsebene unterschieden werden.

Während die Zahldarstellung der ganzen Zahlen im Gegensatz zu der der Bruchzahlen als weiterhin eindeutig[11] beschrieben werden kann, ergibt sich bei der Erschließung des negativen Zahlbegriffs ein anderes Phänomen: Der Zugewinn an negativen Zahlen hat gleichermaßen die dreifach mögliche Interpretation des Minuszeichens zur Folge, zwischen denen die Schülerinnen und Schüler unterscheiden müssen. Das Minuszeichen kann dementsprechend die Bedeutung eines Vor-, Rechen- oder Inversionszeichens erhalten (vgl. Hefendehl-Hebeker & Prediger 2006). Während das Minuszeichen im Term $-(7+5)$ also invers (umkehrend) zu deuten ist, beschreibt es im Ausdruck -5 ein Vorzeichen und beim Term $5-2$ die Verknüpfung der Subtraktion.

Deutliche Änderungen sind außerdem auf der Vorstellungsebene zu beobachten. Der Maßzahlaspekt (siehe Kapitel 3.1) beziehungsweise die Vorstellung einer negativen Zahl als Maßzahl kann bei der Erweiterung des natürlichen Zahlbereichs übernommen werden, da beispielsweise die Temperatur eine den Lernenden bekannte Größe ist, die auch negative Zahlen als Ergebnisse eines Messvorgangs zulässt. Allerdings müssen der Kardinal- und Ordinalzahlaspekt für eine sinnstiftende Erschließung aufgegeben werden (vgl. Ulovec 2007). Die gelegentlich im Zusammenhang mit natürlichen Zahlen aktivierte Grundvorstellung *Ergebnis eines Zählvorgangs* lässt sich in abgewandelter Form durch das Rückwärtszählen beziehungsweise die Einsicht, dass im Zahlbereich der ganzen Zahlen in beide Richtungen (unendlich) weitergezählt werden kann, weiterführen. Als zentrale Grundvorstellung stellen Hefendehl-Hebeker und Prediger (2006) die Vorstellung als *relative Zahlen bezüglich einer fest gewählten*

[11] Auch bei den natürlichen Zahlen ist eine eindeutige Zahldarstellung möglich.

Vergleichsmarke heraus. Um dieser Idee Tragfähigkeit zu verleihen, sei es insbesondere von Bedeutung, das Auftreten negativer Zahlen als eigenständige mathematische Objekte und „nicht einfach als positive Zahlen in spezieller Verwendung“ (ebd., S. 4) zu modellieren. Weiterhin kann die Grundvorstellung *Gegensätze* bei der inhaltlichen Durchdringung des Lerngegenstands hilfreich sein. Nach dieser werden beispielsweise 10€ Gewinn im Gegensatz zu -10€ Verlust (im Guthaben-und-Schulden-Kontext) aufgefasst (vgl. Ulovec 2007). Auch die neu auftretende Vorstellung *Richtung* wird von Ulovec als hinreichend verständnisfördernd beschrieben. Diese Idee lässt sich jedoch nur an Hand der Zahlengeraden formulieren, die die Interpretation von -3 als *drei (Schritte) nach links* im Vergleich zu 3 als *drei (Schritte) nach rechts* nahelegt. Das Hinzuziehen des Darstellungsmittels Zahlengerade offenbart an dieser Stelle, dass im Umgang mit negativen Zahlen vor allem der Aufbau sekundärer, also nicht unbedingt auf der Grundlage haptischer Erfahrungen gewonnener, Grundvorstellungen (vgl. vom Hofe 2003) erforderlich wird (siehe Kapitel 2.1). Diese Tatsache verwundert nicht, wenn man berücksichtigt, dass negative Zahlen größtenteils innerhalb innermathematischer Anwendungsfelder auftreten (vgl. vom Hofe & Hattermann 2014). Die kardinale Zahlvorstellung, die im Zusammenhang mit den natürlichen Zahlen eine zentrale Rolle einnimmt, tritt bei der Zahlbereichserweiterung von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{Z}$ in den Hintergrund beziehungsweise muss durch an die Eigenschaften der negativen Zahlen (als Skalenwerte) angepasste Vorstellungen ersetzet werden. Unter stetiger Berücksichtigung eines geeigneten Kontextes gilt es dann, die ganzen Zahlen in ihrer Funktion zur Beschreibung von Zuständen oder Änderungen zu erschließen und anzuerkennen, was insbesondere unter Hinzuziehung neuer Ebenen der Repräsentation gelingen kann (vgl. ebd.). Während Handlungsvorstellungen im natürlichen Zahlbereich problemlos an Hand von konkretem Material (Dingmengen wie Äpfel oder Plättchen) gewonnen werden und auf Grund der haptischen Realisation langfristig tragfähig wirken können, ist eine derart gegenständliche Repräsentation der negativen Zahlen im Allgemeinen nicht mehr möglich. Im Zusammenhang mit den negativen Zahlen und Rechenoperationen gewinnen daher vor allem die sekundären Grundvorstellungen *Zustände* und *Zustandsänderungen*, die auf häufig schon während der Grundschulzeit intuitiv verankerten Vorstellungen aufbauen, an Bedeutung. Vom Hofe und Hattermann stellen den Unterschied der beiden

Aspekte an Hand von verschiedenen Kontexten, der Temperaturskala und dem Stausee, heraus. Die Vorstellung ganzer Zahlen zur Beschreibung von Zuständen lässt sich mit Hilfe des Szenarios *Zustand-Änderung-Zustand* modellieren: „Die Temperatur 5 °C (Zustand) erhöht sich um 3 °C (Änderung) auf 8 °C (Zustand)“ (ebd., S. 3). Im Gegensatz dazu wird die Sachsituation, derer nach die Wasserhöhe eines Stausees an einem Tag um 3 cm fällt (Änderung) und am darauffolgenden Tag um 8 cm steigt (Änderung), gemäß der Vorstellung *Änderung-Änderung-Änderung* beschrieben, wenn abschließend die Frage nach der absoluten Änderung der Wasserhöhe gestellt wird (vgl. ebd.). Als umfangreiche Vorstellungsgrundlage kann in diesen Fällen die Zahlengerade dienen.

Im Hinblick auf die bisher zusammengetragenen Erkenntnisse lässt sich im Vergleich zu den Bruchzahlen feststellen, dass die für die Einführung der negativen Zahlen notwendigen inhaltlichen Vorstellungen zwar weniger vielseitig, aber keineswegs auch weniger komplex erscheinen. Tatsächlich bereitet der Umgang mit Zuständen und Zustandsänderungen den Schülerinnen und Schülern zum Teil noch größere Probleme als die Orientierung im Zahlenbereich der Bruchzahlen. Der enge Bezug aller Grundvorstellungen zur Zahlengeraden erfordert im Vergleich zu den gegenständlich realisierbaren Ideen der Bruchzahlen eine höhere Abstraktionsleistung, die Bereitschaft, Zahlaspekte stets hinsichtlich eines geeigneten Kontextes zu deuten und das schrittweise Anerkennen von auftretenden Invarianzen, die möglicherweise in einem Konflikt zu den Vorerfahrungen und Erwartungen der Lerngruppe stehen. Um die inhaltliche Durchdringung der Zahlbereichserweiterung zu den ganzen Zahlen gedanklich zu vervollständigen, werden im nächsten Abschnitt die Grundvorstellungen zu den Rechenoperationen (insbesondere beim Rechnen mit negativen Zahlen) untersucht.

3.3.3 Vorstellungen zu den Rechenoperationen

Während die bisherigen Überlegungen sich eher auf den Zahlaspekt der negativen Zahl an sich und die damit verbundenen Deutungsmöglichkeiten konzentrierten, soll nun eine inhaltliche Annäherung an das Rechnen mit negativen ganzen Zahlen im Unterrichtsgeschehen erfolgen.

Zunächst sei an dieser Stelle auf eine Besonderheit im Hinblick auf die Ordnungsrelation der negativen Zahlen verwiesen, die sich aus der im letzten

Abschnitt diskutierten, starken Orientierung an der Zahlengeraden ergibt und die in der Rechenumgebung der (positiven) Bruchzahlen zunächst kein Rolle spielt: Zwar lässt sich den ganzen Zahlen im Gegensatz zu den Bruchzahlen, die keinen eindeutigen Vorgänger oder Nachfolger besitzen[12], jeweils ein eindeutiger Vorgänger und Nachfolger zuordnen, die Symmetrie der Zahlengeraden wirft jedoch einen neuen Aspekt auf: Dass die neu dazugewonnenen Zahlen gemeinsam mit den sozusagen alten natürlichen Zahlen auf einer symmetrischen Skala angeordnet werden, birgt die Gefahr, die Ordnungsrelation spiegelbildlich aufzufassen, das heißt, fälschlicherweise die Relation $-5 > -3$ anzunehmen (vgl. Hefendehl-Hebeker & Prediger 2006). Insofern ist die Vorstellung *geringer als* beziehungsweise *weniger als* für Besitzstände (beispielsweise im Guthaben-und-Schulden-Kontext) unbedingt modifikationsbedürftig. Als Anhaltspunkt kann hierfür die Orientierung der Zahlengeraden von links nach rechts dienen, die gleichermaßen eine Fortsetzung der gewohnten Orientierung nahelegt.

Weiterhin beschreibt Ulovec (2007) die im Zahlenbereich der natürlichen Zahlen aufgebauten Vorstellungen des *Zusammen-* und *Hinzufügens* als anpassungsbedürftig. Insbesondere bei unterschiedlichen Vorzeichen sollte die metaphorische Deutung innerhalb des gewählten Kontextes betont werden, da sonst die Gefahr des Transfers unangepasster Vorstellungen besteht: Demnach entspricht der Ausdruck $5 + (-3)$ im Guthaben-und-Schulden-Kontext dem Hinzufügen von Schulden zu einem bestehenden Guthaben im übertragenden Sinn. Hefendehl-Hebeker und Prediger (2006) sehen in dieser geringfügigen Anpassung allerdings kein Problem und benennen ebenfalls den Guthaben-und-Schulden-Kontext als „gute gedankliche Stütz[e]" (ebd., S. 5). Die Autorinnen bezeichnen die modifizierte Vorstellung in diesem Zusammenhang als *gerichtetes Hinzufügen* für die Addition und *gerichtetes Wegnehmen* für die Subtraktion. Die hinsichtlich der Subtraktion natürlicher Zahlen aufgebaute Grundvorstellung des *Rückwärtszählens* muss ebenfalls marginal variiert werden. Durch die Erweiterung des Zahlenstrahls zur Zahlengeraden ist dieser gedankliche Prozess auch über Null hinaus möglich (vgl. Ulovec 2007). Analoge Überlegungen fordert auch die Weiterführung der Vorstellung des *Vorwärtszählens* in Bezug auf die Addition. Berücksichtigt man die symmetrische Struktur der Zahlengeraden und erkennt, dass der Startpunkt des Zählvorgangs auch im negativen Zahlbereich

[12] Zum adäquaten Umgang mit diesem Phänomen im Mathematikunterricht sei an dieser Stelle nochmals auf Abbildung 7 verwiesen.

liegen kann, kann die Vorstellung ohne Einschränkung übernommen werden. Zumeist haben Schülerinnen und Schüler jedoch große Schwierigkeiten, die intuitiv verankerte Idee *Hinzufügen vermehrt immer* beziehungsweise *Wegnehmen vermindert immer* zu überwinden. An dieser Stelle wird deutlich, dass auch die Berufung auf den zuverlässigen Guthaben-und-Schulden-Kontext kognitiv herausfordernd ist: Nur eine Deutung, die das Hinzufügen von Schulden zu einem Guthaben als Verminderung des Guthabens (und analog das Wegnehmen als Vermehrung des Guthabens) herausstellt, kann sinnvoll und wirksam sein (vgl. ebd.). Darüber hinaus muss berücksichtigt werden, dass das im letzten Kapitel erläuterte Deutungsspektrum des Minuszeichens bei Schülerinnen und Schülern schnell zu Irritationen führen kann. Insbesondere bei Rechnungen wie $(-3)-(-7)=4$ erschlägt „die Wucht der Signale" (Hefendehl-Hebeker & Prediger 2006, S. 5) und darauf zu vertrauen, dass eine Häufung von Minuszeichen ein positives Ergebnis bewirken soll, scheint für Lernende nur schwer möglich.

Während die Grundvorstellungen zur Addition und Subtraktion durch geringfügige Abwandlung auch für ganze Zahlen zum Großteil weiterhin tragfähig erscheinen, bedarf es im Hinblick auf die Operationen Multiplikation und Division, wie auch bei den Bruchzahlen, größerer Modifikation. Die Deutung der Multiplikation als *fortgesetzte Addition* kann nur erfolgen, wenn der erste Faktor eine natürliche Zahl darstellt und ist daher nur stark eingeschränkt nutzbar. Die schon im Zusammenhang mit den Bruchzahlen diskutierte *Von-Deutung* der Multiplikation muss für das Rechnen mit negativen Zahlen sogar gänzlich aufgegeben werden[13]. Die Grundvorstellung *Streckung* entlang der Zahlengeraden lässt sich zwar teilweise aktivieren, da das Multiplizieren (außer mit $0, +1$ oder -1) nach wie vor eine echte Streckung bewirkt, bei der Multiplikation mit negativen Zahlen muss jedoch zusätzlich eine *Richtungsumkehr* berücksichtigt beziehungsweise mit der Vorstellung einer *Spiegelung an der Zahlengeraden* kombiniert werden, um das entsprechende Ergebnis inhaltlich zu stützen (vgl. Ulovec 2007; vom Hofe & Hattermann 2014). Gemäß diesem Modell lässt sich die Division höchstens in Verbindung zur Multiplikation, also über die Vorstellung des *Rückwärtsrechnens* als Multiplikation mit dem Kehrwert interpretieren, was im Schulkontext aber ohne vorangestellte

[13] *Das Minus-Fünffache von zwei* ergibt in dieser Beziehung wenig Sinn.

Zahlbereichserweiterung hin zu den Bruchzahlen nicht möglich ist. Die Division durch eine negative Zahl erfährt an Hand der Zahlengeraden keine sinnvolle Deutung (vgl. vom Hofe & Hattermann 2014).

Wirklich anschauliche und einschränkungslos tragfähige Vorstellungen zur Multiplikation und Division ganzer Zahlen lassen sich offenbar unter Aktivierung der Vorerfahrungen der Schülerinnen und Schüler nicht generieren. Vor allem bei dem Versuch, die Multiplikationsregel für zwei negative Zahlen (*Minus mal Minus ergibt Plus*) durch inhaltliche Vorstellungen zu unterfüttern, „versagt […] die einfache Anschauung“ (Hefendehl-Hebeker & Prediger 2006, S. 5). Der Tenor der Publikationen zu diesen Überlegungen besteht in diesem Punkt in der Argumentation über die Permanenz formaler Gesetze. Die an möglichst anschauliche Untersuchungen zum negativen Zahlbegriff anschließende formale Herleitung der Rechenregeln zur Multiplikation und Division gilt als legitimer Zugang (vgl. Hefendehl-Hebeker 1989; Hefendehl-Hebeker & Prediger 2006; vom Hofe & Hattermann 2014). Die Forderung, dass sich inhaltliche und formale Aspekte bei der Erschließung und Deutung der Operationen stets ergänzen sollten, wird hierbei vielfach betont.

Zieht man einen ersten Vergleich zu den Veränderungen auf der Vorstellungs- und Darstellungsebene, die sich bei der Zahlbereichserweiterung von den natürlichen Zahlen zu den Bruchzahlen ergeben, erkennt man, dass die Schülerinnen und Schüler im Wesentlichen mit ähnlichen kognitiven Herausforderungen konfrontiert werden. Zwar scheinen die für die Genese der Bruchzahlen hilfreichen Grundvorstellungen in der Summe vielfältiger und stärker mit den bekannten Vorstellungen zu natürlichen Zahlen verknüpft zu sein als die im Bereich der negativen Zahlen, jedoch spiegelt sich diese Vielfalt auch in den Möglichkeiten der Zahldarstellung wieder, was im Gegensatz zur Darstellungsebene der ganzen Zahlen (hier ergeben sich keine Veränderungen) herausfordernd sein kann. Der Fokus bei den ganzen Zahlen liegt im Vergleich zu den Bruchzahlen außerdem viel stärker auf dem Aufbau tragfähiger sekundärer Grundvorstellungen, womit eine Repräsentation an Hand von mathematischen Darstellungsmitteln elementare gedankliche Unterstützung leistet. Im Bereich der Bruchzahlen werden inhaltliche Vorstellungsprozesse vor allem durch gegenständliche Realisanten unterstützt. Beide untersuchten Zahlbereichserweiterungen stoßen im Hinblick auf eine anschauliche Deutung bei der Erarbeitung der Operationen Multiplikation und Division auf Hindernisse, die es mit Hilfe formaler Herleitungen zu bewältigen gilt.

In diesem Zusammenhang soll im folgenden Abschnitt das Permanenzprinzip als zentrales Erklärungsmodell für die Multiplikation negativer Zahlen diskutiert werden. Weiterhin wird eine Auswahl von Kontexten und Veranschaulichungsmöglichkeiten zur Verortung der negativen ganzen Zahlen im Mathematikunterricht zusammengetragen.

3.3.4 Veranschaulichungs- und Erklärungsmodelle

Bei den nachfolgend vorgestellten Modellen zur Darstellung und Veranschaulichung der negativen ganzen Zahlen und ihren rechnerischen Gesetzmäßigkeiten handelt es sich (wie schon innerhalb des analog für die Bruchzahlen diskutierten Abschnitts) lediglich um eine Auswahl aus einer Vielzahl an möglichen Unterstützungs- beziehungsweise Visualisierungsmethoden. Hierbei gilt es, unter enger Bezugnahme auf die in den vorangegangenen Abschnitten zum Zahlbereich der ganzen Zahlen erläuterten Phänomene und Herausforderungen zu arbeiten.

Bei der Einführung der ganzen Zahlen im Mathematikunterricht wird im Sinne des genetischen Prinzips die Absicht verfolgt, an das Vorwissen der Schülerinnen und Schüler anzuknüpfen und auf der Grundlage der mathematischen Inhalte einen Lebensweltbezug zu moderieren (siehe Kapitel 2.4). Bestehende Vorerfahrungen und alltägliche Situationen lassen sich vor allem über die in Kapitel 3.3.1 angesprochenen Kontexte miteinbeziehen. Modelle, die Kontexte wie Kontostände, Temperaturen, Wasserstände oder das Fahren in einem Fahrstuhl zum Ausgangspunkt aller weiterer Überlegungen deklarieren, werden nach Wagner und Wörn (2013) als *Realmodelle* bezeichnet. An Hand von Realmodellen lassen sich einfache Fragestellungen unter Aktivierung der Grundvorstellungen *Zustand-Änderung-Zustand* beziehungsweise *Änderung-Änderung-Änderung* modellieren. So lässt sich beispielsweise das Thermometer als vertrauter Gegenstand haptisch oder ikonisch in die unterrichtlichen Betrachtungen zu negativen Zahlen integrieren. In diesem Zusammenhang kann eine Thermometer-Abbildung durch Drehung um 90 ° anschaulich an das mathematische Modell der Zahlengeraden angenähert (siehe Abbildung 10) und im weiteren Verlauf des Lernprozesses gänzlich zur Zahlengeraden abstrahiert werden.

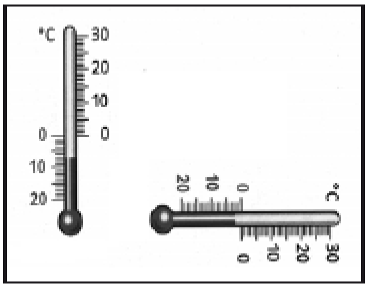


Abb. 10: Thermometer-Modell, aus: Wagner & Wörn (2013), S. 192

Auf diese Weise wird der Übergang von primären zur Ausbildung sekundärer Grundvorstellungen begleitet und die Grundvorstellung *relative Zahlen bezüglich einer fest gewählten Vergleichsmarke* gestärkt. Aufgabenumgebungen, die das Ablesen oder Eintragen von Temperaturen sowie das Interpretieren von Temperaturschwankungen oder -verläufen über einen längeren Zeitraum fordern, können zur Vorbereitung auf das Rechnen mit der Zahlengeraden hilfreich sein. Die Alltagsgegenwart des Kontextes erlaubt es außerdem, die Schülerinnen und Schüler darum zu bitten, selbstständig über einen bestimmten Zeitraum Temperaturen zu messen und zu dokumentieren (im Garten, an der Bushaltestelle, im Wohnzimmer) und die gewonnenen Daten für den Unterricht zu nutzen.
Ein weiterer gedanklich hilfreicher Kontext stellt das *Guthaben-und-Schulden-Modell* dar, welches einen klaren Lebensweltbezug aufweist, jedoch an manchen Stellen (wie im letzten Kapitel erwähnt) inhaltliche Vorstellungshürden bereithält. Insbesondere der fehlende Bezug zur Zahlengeraden birgt die Gefahr, die beiden Größenbereiche Guthaben und Schulden auf verschiedenen Skalen zu verorten und somit die Entwicklung einer einheitlichen Ordnungsrelation zu verhindern (vgl. Hussmann & Schindler 2014). Dieser Gefahr kann jedoch durch eine Umwandlung der Zahlengeraden zu einer Kontostandleiste, an Hand derer die beiden Größenbereiche eingetragen und entsprechende Rechnungen visualisiert werden können, vorgebeugt werden. Im Rahmen des Projekts KOSIMA[14] wurde auf der Grundlage dieser Überlegung und aufbauend auf dem bekannten Kontext eine reichhaltige Lernumgebung zur Erkundung negativer Zahlen entwickelt (vgl. ebd.). Das Spiel *Raus aus den Schulden* für zwei bis fünf Mitspielerinnen und Mitspieler bemüht sich dementsprechend um eine authentisch modellierte Begegnung mit ganzen Zahlen. Die Spielregeln der Lernumgebung werden in

[14] Das ist die Abkürzung für ‚Kontexte für sinnstiftendes Mathematiklernen‘.

Abbildung 11 kurz skizziert[15]. Das Spiel unterstützt die differenzierte Wahrnehmung der Vorstellungen von *Zuständen* (beziehungsweise *Beständen*) und *Veränderungen*, indem es die gezielte Interpretation der Größenbereiche als Kontostände (Guthaben und Schulden) oder als Geldfluss (Einnahmen und Ausgaben) nahelegt. Hinsichtlich der Rechenoperationen erfährt der weiterentwickelte Kontext einen Zugewinn innerhalb des Deutungsspektrums: Indem das Operationszeichen als zeitliche Veränderung beziehungsweise Entwicklung (von Guthaben und Schulden) interpretiert wird, kann den Schülerinnen und Schülern eine kontinuierliche und sinnstiftende Orientierung geliefert werden, die bei den im Kapitel 3.3.2 beschriebenen Irritationen (bezüglich der Mehrdeutigkeit des Minuszeichens) gedankliche Unterstützung leistet. Das Operationszeichen ‚$+$' wird in diesem Sinne als *Blick in die Zukunft* und das Operationszeichen ‚$-$' analog als *Blick in die Vergangenheit* aufgefasst, womit auf der Vorstellungsebene Ideen zu den Rechenoperationen generiert und weiterentwickelt werden, die im vorhergehenden Kapitel noch keine Berücksichtigung fanden (vgl. ebd.). Diese Überlegungen werden für die Schülerinnen und Schülern an einen konkreten Zeitraum gebunden, sodass sich die zu den Rechenoperationen passenden Fragestellungen jeweils wie folgt formulieren lassen: Wie viel werde ich in einem Monat haben? Wie viel hatte ich vor einem Monat? Für jede denkbare formal-symbolische Additions- und Subtraktionsaufgabe lässt sich auf diese Weise eine entsprechende lebensweltliche Situation beschreiben und an der Zahlengeraden (Kontostandleiste) visualisieren (vgl. Schindler 2014). Weiter wird innerhalb des Kontextes die Multiplikation als *wiederholte zeitliche Veränderung in die Zukunft oder Vergangenheit* und die Division über die Idee der *Schuldentilgung* eingeführt. Ganz allgemein lässt sich damit beispielsweise die Multiplikation zweier negativer Zahlen $(-a) \cdot (-b)$ mit Hilfe der Sachsituation „Ich habe monatliche *Ausgaben* von b €. Wie viel hatte ich vor a *Monaten* mehr/weniger?" (ebd., S. 113) vergegenwärtigen. An dieser Stelle wird auch ein starker Bezug zu vom Hofes (1995) Modell zur Ausbildung von Grundvorstellungen (siehe Abbildung 2) erkennbar. Insofern erweist sich das Spiel *Raus aus den Schulden* in vielerlei Hinsicht als gewinnbringend, da sowohl inhaltliche Deutungen zur Ordnungsrelation und zu den Rechenoperationen als auch das grundlegende Verständnis von negativen Zahlen im authentischen

[15] Eine ausführlichere Darstellung findet sich zudem bei Schindler (2014).

Kontext gefördert werden. Weiterhin wird durch das gemeinsame Abtragen von Kontoständen, Einnahmen und Ausgaben an der Kontostandleiste die Orientierung an Hand der Zahlengeraden und somit der Aufbau sekundärer Vorstellungen begünstigt. Das selbstständige Übertragen der Kontostandveränderungen in ein Spielprotokoll ermöglicht darüber hinaus das Üben flexibler Darstellungswechsel. Von entscheidender Bedeutung ist jedoch die sich an die Einführung über das Spiel anschließende Transferleistung, derer nach die Schülerinnen und Schüler die gewonnenen Erkenntnisse auch auf andere Kontexte und symbolisch-formale Aufgabenformate übertragen sollen. Auf Grund der starken Festlegung auf eine ganz bestimmte Deutung der Rechenoperationen erscheint es fraglich, inwieweit die Schülerinnen und Schüler im Anschluss in der Lage sein werden, „situationsinvariante Urteile und Inferenzen auf[zu]bauen" (ebd., S. 120). Möglicherweise verlieren die Lernenden auf Kosten der Anschaulichkeit des Kontextes an gedanklicher Flexibilität, die aber insbesondere bei der formalen Deutung von Multiplikation und Division ganzer Zahlen unabdingbar ist.

Ein weiteres, etwas abstrakteres Modell zur Annäherung an die negativen Zahlen und ihre Rechenoperationen ist das Pfeilmodell, das ebenfalls unter Hinzuziehung der Zahlengeraden als mathematisches Darstellungsmittel arbeitet und ganz im Zeichen des Aufbaus sekundärer Vorstellungen steht (vgl. vom Hofe & Hattermann 2014). Die Grundidee des Modells besteht in der Repräsentation positiver Zahlen durch einen nach rechts zeigenden Pfeil entsprechender Länge und der Darstellung negativer Zahlen durch einen nach links zeigenden Pfeil (vgl. Wagner & Wörn 2013). Hierbei lassen sich die Pfeile entlang der Zahlengeraden ausschließlich auf ikonischer Ebene oder in Ergänzung um einen haptischen Zugang darstellen (siehe Abbildung 12).

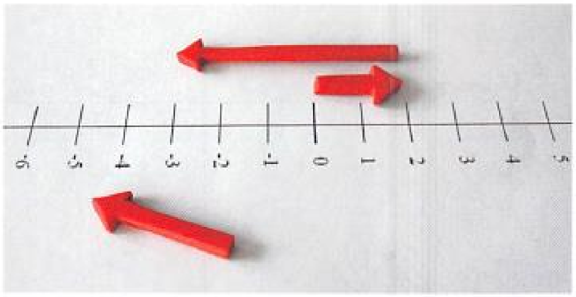


Abb. 12: Addition im Pfeilmodell, aus: vom Hofe & Hattermann (2014), S. 5

In Anlehnung an die bereits ausführlich diskutierten Grundvorstellungen *Zustand-Änderung-Zustand* und *Änderung-Änderung-Änderung* lassen sich die Rechenoperationen innerhalb des Pfeilmodells ohne jegliche Referenz auf gegenständliche Modelle trotzdem anschaulich deuten. Während die Addition als Ansetzen eines Pfeils an einem Punkt oder als Aneinanderfügen von Pfeilen interpretiert wird, ergibt sich die umfassend geometrische Deutung der Multiplikation als eine Kombination aus Strecken und Spiegeln (vgl. vom Hofe & Hattermann 2014). Für die Erklärung von Subtraktion und Division werden bereits bekannte Vorstellungen wie das *Rückwärtsrechnen* oder die *Gegenoperation* bemüht, womit das Pfeilmodell eine umfangreiche Vorstellungsgrundlage liefert und ein anschließender Transfer zwischen inhaltlichen und formalen Darstellungen keinen gedanklichen Bruch bedeutet.

Einen ausschließlich formalen Zugang zu den Rechengesetzen der ganzen Zahlen bilden die sogenannten Permanenzreihen, die eine innermathematisch logische Ableitung von Gesetzmäßigkeiten ermöglichen (vgl. Wagner & Wörn 2013). Über die Auflistung ähnlicher Rechnungen, bei denen sich der eine Teil unter Konstanthaltung des anderen Teils verändert, können Ergebnisse geschlussfolgert und Strukturen sichtbar gemacht werden. Auf diese Weise lässt sich auch die Multiplikationsregel für negative Zahlen herleiten: Die Schülerinnen und Schüler erkennen an Hand des Permanzprinzips, dass die Multiplikation zweier negativer Zahlen eine positive Zahl ergeben *muss* (siehe Abbildung 13). Der Vorteil bei diesem Erklärungsmodell liegt in der kontinuierlichen Einsetzbarkeit innerhalb des Mathematikunterrichts, da es Aufgaben für alle Rechenoperationen (bis auf die Division durch Null) sinnvoll herleiten und kontextunabhängig Verständnis für die innermathematischen Gesetzmäßigkeiten fördern kann (vgl. ebd.). Obgleich der alleinige Zugang über das Permanenzprinzip von vom Hofe und Hattermann (2014) als fachlich legitim beschrieben wird, ergibt sich die Frage, inwieweit eine ausschließlich formale Annäherung an den Zahlbereich der ganzen Zahlen für die Praxis der Schulmathematik geeignet ist. Die Überlegungen jüngerer Publikationen formulieren diesbezüglich die Empfehlung für Lehrkräfte, „aus den diversen möglichen Zugängen zur Behandlung der negativen Zahlen auszuwählen" (ebd., S. 6) und dementsprechend formale und inhaltliche Aspekte ausgeglichen zueinander in Beziehung zu setzen (vgl. Hefendehl-Hebeker & Prediger 2006). In diesem Zusammenhang warnen Warner und Wörn (2013) vor einem zu häufig praktizierten Modellwechsel innerhalb einer Lernsequenz zur Begegnung mit den ganzen Zahlen. Insbesondere die alltagsnahen Realmodelle erweisen sich zumeist nur bis zu einem bestimmten Punkt der unterrichtlichen Betrachtungen als tragfähig und müssen dann durch andere Modelle oder Erklärungsansätze ersetzt werden. Um die in der Theorie mitunter erschlagend wirkende Vielfalt an Erklärungsmodellen nicht ungefiltert auf die Unterrichtspraxis abzubilden, empfiehlt es sich daher, sich auf wenige, durch formale Erkenntnisse gestützte, authentische Kontexte und Modelle zu beschränken, die sich als durchgängig konsistent erweisen (vgl. ebd.). Ein gelungenes Beispiel für die anschauliche Verknüpfung zwischen inhaltlichen und formalen Aspekten präsentiert Malle (2007b) in einem Aufgabenset zum Kontext Fahrstuhl (siehe Abbildung 14), das die sinnvolle Einbettung des Permanenzprinzips in ein Realmodell zeigt.

Um die bis zu diesem Punkt gewonnenen Erkenntnisse zu den beiden diskutieren Zahlbereichserweiterungen abschließend zusammenzufassen, soll im nachfolgenden Kapitel noch einmal auf die mit den Lernprozessen verbundenen Herausforderungen hingewiesen werden.

3.4 Herausforderungen bei Zahlbereichserweiterungen

Da die elementaren Leitideen, Grundvorstellungen und Verständnisschwierigkeiten sowohl im Zusammenhang mit der Zahlbereichserweiterung $\mathbb{N} \to \mathbb{Q}^+$ als auch im Hinblick auf die Zahlbereichserweiterung $\mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ bereits ausführlich dargestellt und diskutiert wurden, sollen an dieser Stelle noch einmal die wesentlichen Herausforderungen beim Übergang in einen neuen Zahlbereich pointiert formuliert werden.

Während Schülerinnen und Schüler zumeist die Notwendigkeit einer Zahlbereichserweiterung akzeptieren können, ergeben sich die eigentlichen Schwierigkeiten erst im konkreten Umgang mit den neuen Zahlen und ihren Rechenoperationen: Zahlbereichserweiterungen „führ[en] in eine veränderte Gedankenwelt“ (Hefendehl-Hebeker & Prediger 2006, S. 3). Die Lernenden werden damit konfrontiert, dass vertraute Regeln und Gesetzmäßigkeiten beim Übergang von den natürlichen Zahlen zu den Bruchzahlen oder den ganzen Zahlen keine Gültigkeit mehr besitzen. Wer sich in den neuen Zahlbereichen zurechtfinden will, muss bereit sein, mühsam aufgebaute Vorstellungen und Ideen weiterzuentwickeln, zu modifizieren und mitunter auch vollständig aufzugeben.

Andernfalls läuft man Gefahr, zwischen die Fronten neu erworbenen Wissens und vertraut gewordener Gewohnheiten zu geraten, was die Strategiebildung beim Lösen von Rechenaufgaben erschwert und langfristig den Aufbau von Fehlvorstellungen begünstigen kann. Als modifikationsbedürftig erscheinen alle elementaren Aspekte, nach denen Zahlen charakterisiert werden: Vorstellungen zu Verwendungszwecken von Zahlen, zur Zahldarstellung, zur Ordnungsrelation und zu den Rechenoperationen bedürfen, wie in den vorhergehenden Kapiteln umfangreich belegt wurde, einer Anpassung. Eine Herausforderung, die sich hierbei im Detail ergibt, liegt in der Abkehr vom Kardinalzahlaspekt, welcher im Hinblick auf die natürlichen Zahlen noch als gedanklich veranschaulichende Stütze dienen konnte. Die Vorstellung, eine Zahl sei immer auch dazu in der Lage, eine konkrete Dingmenge im Sinne einer Anzahl zu beschreiben, verliert bei negativen Zahlen und Bruchzahlen ihre Tragfähigkeit (vgl. Prediger 2004). In diesem Zusammenhang zeigt es sich häufig, dass Schülerinnen und Schüler Schwierigkeiten mit dem Objektivierungsschritt haben: Weil die sozusagen neuen Zahlen sich zunächst nicht auf bekannte Weise beschreiben und interpretieren lassen, fällt es ihnen schwer, sie als eigenständige Denkobjekte (Zahlen) anzuerkennen. Dementsprechend vermeiden sie wenn möglich das Denken in den irritierenden Zahlbereichen und „weichen auf ein Denken in natürlichen Zahlen aus“ (Malle 2004, S. 5). Eine weitere gedankliche Hürde stellt die diskrete Ordnung der natürlichen Zahlen dar. Die aufgebaute Vorstellung, für jede Zahl wäre eindeutig ein Vorgänger und ein Nachfolger bestimmbar, muss im Bereich der Bruchzahlen aufgegeben werden. Zudem konkurriert die Vorstellung, die Menge der Zahlen sei wie eine Kette mit festgelegtem Anfang (die kleinste Zahl) und ohne Ende, mit der symmetrischen Erweiterung des Zahlenstrahl bei der Einführung der negativen Zahlen (vgl. Prediger 2004). Im Hinblick auf die Rechenoperationen wird die Überwindung der Vorstellungen *Multiplizieren vergrößert immer* beziehungsweise *Subtrahieren bedeutet Vermindern* als hinreichend problematisch beschrieben (vgl. Prediger 2004; Hefendehl-Hebeker & Prediger 2006; Ulovec 2007). Solche intuitiv verankerten Ideen hindern die Schülerinnen und Schüler daran, prinzipiell vertraute Rechenoperationen für die Lösung von Aufgaben zu aktivieren und bringen sie gleichermaßen dazu, an sich selbst und ihren Fähigkeiten zu zweifeln. Nicht zuletzt verhindert ironischerweise das Beharren auf erlernten Regeln und formalem Verfahrenswissen (wozu die

Schülerinnen und Schüler immerzu angehalten werden) das Erschließen neuer Sachzusammenhänge und das flexible Auswählen adäquater Vorstellungen.
Die vermutlich wichtigste Erkenntnis auf der Suche nach einer geeigneten Variante des Unterrichtshergangs, die neue Zahlen und Operationen behutsam einführt, Verständnishürden offenbart und vielfältige Lernangebote schafft, besteht vermutlich darin, die angesprochenen Herausforderungen als der Stoffstruktur zu Grunde liegende Schwierigkeiten und nicht als Defizite der Schülerinnen und Schüler einzuordnen (vgl. Hefendehl-Hebeker & Prediger 2006). Die Gesamtheit der im Rahmen dieser Arbeit bisher zusammengetragenen Beobachtungen erfordert einen Perspektivwechsel, der Verständnishürden nicht zwangsläufig als Fehlvorstellungen seitens der Lernenden deklariert, sondern sie „in der sachlichen Struktur der jeweiligen Inhalte“ (Prediger 2004, S. 10f.) begründet sieht, „weil sie unmittelbar mit ihrer Entstehungs- und Entwicklungsgeschichte zusammenhängen“ (ebd., S. 11). Darauf aufbauend lässt sich durch entsprechende Unterrichtsgestaltung, beispielsweise unter Einbeziehung einiger der hier vorgestellten Veranschaulichungs- und Erklärungsmodelle, Einfluss auf die Lernentwicklung und die individuellen Begriffsbildungsprozesse der Schülerinnen und Schüler nehmen. Entscheidend für die Einbettung der Zahlbereichserweiterungen in den Mathematikunterricht ist die Entwicklung eines Lehrgangs, der sich um die Berücksichtigung aller Herausforderungen bemüht und inhaltliche Vorstellungen aufbaut und aktiviert. Malle (2004) betont: „**Es gibt kein Anwenden ohne Grundvorstellungen**“ (S. 8), denn „auch wenn die Schülerinnen und Schüler die Regeln […] noch so gut beherrschen, ohne Grundvorstellungen bleibt dies ein totes Wissen, mit dem man nichts anfangen kann“ (ebd.).
Darüber, wie genau ein Lehrgang dieser Art aussehen soll und welche Anforderungen an einen solchen Unterricht gestellt werden sollen, wird in der Literatur viel nachgedacht und diskutiert. Die Frage, mit der sich die Mathematikdidaktik diesbezüglich auseinandersetzt, ist jene nach dem Aufbau des Unterrichtshergangs: Sollte man ausgehend von den natürlichen Zahlen zuerst den Bruchzahlbegriff oder den Zahlbegriff der negativen (ganzen) Zahlen entwickeln? Verschiedene Standpunkte und Ansichten in Bezug auf diese Frage sollen im nachfolgenden Kapitel reflektiert werden. Hierbei wird sich in der Darlegung und Gegenüberstellung der einzelnen Lehrgänge um die Verknüpfung mit den

theoretischen Aspekten aus Kapitel 2 sowie mit den inhaltlichen Untersuchungen aus Kapitel 3 bemüht.

4 Zahlbereichserweiterung im Mathematikunterricht

4.1 Vorgaben des Rahmenlehrplans

Bevor ausgehend von einem Vergleich verschiedener Vorschläge hinsichtlich eines unterrichtlichen Lehrgangs zur Zahlbereichserweiterung die Konzeption eines Alternativzugangs erfolgen kann, erscheint es sinnvoll, zunächst die durch curriculare Vorgaben ausgestalteten Rahmenbedingungen zu beleuchten. Der vorliegenden Ausarbeitung soll hierfür im Folgenden die amtliche Fassung des Rahmenlehrplans Berlin-Brandenburg für die Jahrgangsstufen eins bis zehn im Fach Mathematik zu Grunde liegen (vgl. Ministerium für Bildung, Jugend und Sport 2015). In Anlehnung an die bisher gewonnenen Erkenntnisse gilt es, in einer knappen Analyse herauszufinden, inwiefern der Lehrplan Regelungen für die Einführung der Bruchzahlen und der negativen Zahlen (und wenn dem so ist, in welcher Klassenstufe beziehungsweise in welcher Reihenfolge) festlegt.
Der Rahmenlehrplan Berlin-Brandenburg orientiert sich im Hinblick auf die Qualität mathematischer Bildung an einem Kompetenzmodell, welches sich in drei Dimensionen unterteilt: Die prozessbezogenen mathematischen Kompetenzen, die fachübergreifend erworben werden sollen, die inhaltsbezogenen mathematischen Kompetenzen (Leitideen) und die Anforderungsbereiche mathematischen Handelns bilden die Grundlage für die konkret formulierten Standards (vgl. ebd.). Die Standards wiederum erläutern unter starker Bezugnahme auf die inhaltsbezogenen Kompetenzen, welche Kompetenzen die Schülerinnen und Schüler auf unterschiedlichen Niveaustufen (A bis H) erwerben sollten. Diese Standards werden schließlich um explizite Themen und Inhalte konkretisiert. Es wird betont, dass die angegebenen Leitideen und Themenbereiche stets in Verknüpfung zu den prozessbezogenen Kompetenzen und unter Berücksichtigung der individuellen Lernvoraussetzungen der Schülerinnen und Schüler unterrichtet werden sollten (vgl. ebd.). Der Lerngegenstand der Zahlbereichserweiterungen lässt sich unter der Leitidee L1 *Zahlen und Operationen* verorten, derer nach die Lernenden „ausgehend von den natürlichen Zahlen[] tragfähige Vorstellungen zu Zahlen, Operationen und

Strategien in verschiedenen Zahlenbereichen“ (ebd., S. 8) entwickeln sollen. Diese Kompetenzerwartung deckt sich offenkundig mit den hier vorgestellten Aspekten der Zahlbereichserweiterung und lässt die Empfehlung einer Annäherung auf inhaltlicher Ebene vermuten. Als Teilkompetenzen werden in diesem Zusammenhang das Auffassen und Darstellen von Zahlen, das Ordnen von Zahlen sowie das Beschreiben von Zahlbeziehungen ausgeführt. Bei genauerer Untersuchung der empfohlenen Themen und Inhalte zur Leitidee L1 wird deutlich, dass der Fokus beim Aufbau von Zahlvorstellungen vor allem auf den Wechsel zwischen verschiedenen Darstellungsformen (Wort, Ziffern, Bild) gelegt wird. Im Zahlbereich der natürlichen Zahlen soll hier ausgehend vom Kardinalzahlaspekt, beispielsweise durch Verwendung von Mengenbildern, gearbeitet werden. Weitere Zahlaspekte werden allerdings nicht benannt (vgl. ebd.). Auf der Ebene der Operationen wird der Aufbau geeigneter Grundvorstellungen frühzeitig initiiert: Bereits auf der Niveaustufe B (Klasse zwei bis drei) sollen tragfähige Vorstellungen zu den Rechenoperationen „in statischen und dynamischen Situationen“ (ebd., S. 35) entwickelt werden. Beispielhaft werden an dieser Stelle sogar geeignete Vorstellungen zu den Grundrechenoperationen angeführt. Die Bruchzahlen finden erstmals Erwähnung in den Anforderungsbeschreibungen zur Niveaustufe D (Klasse fünf und sechs), während das Identifizieren von negativen (ganzen und gebrochenen) Zahlen erst für die Niveaustufe E (Klasse sieben) vorgesehen ist. Der Rahmenlehrplan gibt diesbezüglich also eine klare Struktur für die Einbettung der Zahlbereichserweiterung in den Unterricht vor: Ausgehend von den natürlichen Zahlen sollen zunächst die positiven gebrochenen Zahlen und darauf aufbauend die negativen Zahlen eingeführt werden. Dass bestimmte, innerhalb der Niveaustufe B aufgebaute, Vorstellungen modifizierungsbedürftig sind und an dieser Stelle eine enorme Abstraktionsleistung erforderlich ist, wird nur knapp erwähnt. Der Rahmenlehrplan formuliert im Zusammenhang mit den gebrochenen Zahlen (Niveaustufe D) die Erwartung, die „Übertragbarkeit der bisherigen Vorstellungen zu den Grundrechenoperationen“ (ebd., S. 37) müsse geprüft werden. Hinweise zu anpassungsnotwendigen oder nicht mehr tragfähigen Vorstellungen beziehungsweise zum vielseitigen Deutungsspektrum der Bruchzahlen werden nicht erteilt. Es erfolgen lediglich kurze Verweise auf die Zahlvorstellungen *Bruchzahl als (An)Teil eines Ganzen* und *Bruchzahl als*

Operator. Im Bereich der Niveaustufe E wird darüber hinaus eine Erweiterung der Vorstellungen zu den Rechenoperationen für die Einführung negativer Zahlen empfohlen. Vielfach wird hierbei auf die Bedeutung der Zahlengeraden als mathematisches Darstellungsmittel hingewiesen, an Hand derer gemäß dem Rahmenlehrplan alle erweiterten Operationsvorstellungen sowie Aspekte der Ordnungsrelation visualisiert und erläutert werden sollen (ebd.). Auch im Bereich der negativen (ganzen) Zahlen finden sich keine konkreten Informationen zu den wesentlichen Zahlvorstellungen.

Des Weiteren ist hervorzuheben, dass die Leitidee *Zahlen und Operationen* das Rechnen beziehungsweise Entwickeln von Rechenstrategien in bestimmten Kontexten vorsieht. In den Ausführungen zu den Standards und den Themenbereichen wird jedoch nicht deutlich, innerhalb welcher Kontexte diese Kompetenzen entwickelt werden sollen beziehungsweise welche Kontexte sich für die Untersuchung gebrochener und negativer Zahlen besonders gut eignen würden. An dieser Stelle sind die Vorgaben des Rahmenlehrplans als für die Konzeption eines Unterrichtsmodells nicht ausführlich genug zu beschreiben. Insbesondere unter Berücksichtigung der Forderung, die angegebenen Kompetenzen sollten stets in Abhängigkeit von den individuellen Lern- und Handlungsstrategien der Schülerinnen und Schüler entwickelt werden, wird schnell klar, dass der Rahmenlehrplan als einzige Bezugsgrundlage nicht ausreichen kann. Nichtsdestotrotz (oder gerade deswegen) bieten die Regelungen und Empfehlungen einen geeigneten Ausganspunkt für weitere Überlegungen, die in den nachfolgenden Kapiteln der Arbeit formuliert werden. Vor allem der starke Fokus auf den prozessbezogenen mathematischen Kompetenzen lässt vermuten, dass auch auf der Ebene der Zahlbereichserweiterung eher inhaltliche Schwerpunkte gelegt werden sollen und das Beherrschen des Rechenkalküls nicht im Mittelpunkt entsprechender Lehrgänge stehen muss.

4.2 Axiomatisch-traditionelle Herangehensweise

Im Spannungsfeld verschiedener Unterrichtsmodelle und -konzeptionen finden sich verschiedene Wege, auf denen man in unterschiedlich strukturierten Etappen im Mathematikunterricht von den natürlichen Zahlen zu den rationalen Zahlen gelangt. Für die Konzeption eines Vorschlags, der sich auf die gesammelten Erkenntnisse der vorliegenden Arbeit gründet, ist es unabdingbar, sich mit den gängigen Herangehensweisen auseinanderzusetzen und im Hinblick auf alles bisher Zusammengetragene zu reflektieren.

Vom Hofe (2007) beschreibt den traditionellen Weg, ausgehend von den natürlichen Zahlen zunächst zu den (positiven) Bruchzahlen und anschließend zu den rationalen (also auch ganzen) Zahlen zu gelangen, als für die Schulpraxis typisch. Dieser Lehrgang entspricht im Wesentlichen den Empfehlungen des Rahmenlehrplans: In der fünften Klasse wird das Rechnen mit natürlichen Zahlen in Vorbereitung auf die Zahlbereichserweiterung $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}^+$ in der sechsten Klasse wiederholt. Dann werden zunächst alle Gesetzmäßigkeiten der Bruchrechnung behandelt, bevor in der siebten Klasse erst die ganzen und schließlich die rationalen Zahlen eingeführt werden. Zumeist wird diese Verfahrensweise mit der Behauptung, Bruchzahlen seien auf Grund der hohen Anzahl an gegenständlichen Realisanten leichter zugänglich als die negativen Zahlen, legitimiert. Dieser Standpunkt findet sich ebenfalls bei Messerle (1975), der eine Konzeption gemäß der Tradition vorschlägt, da „es schwierig [sei], die Einführung negativer Zahlen von Anwendungsaufgaben des täglichen Lebens her zu motivieren“ (ebd., S. 72). Er verortet die Einführung negativer ganzer Zahlen diesbezüglich in der Klassenstufe sieben oder acht. Oftmals wird für diese Reihenfolge auch über eine historische Argumentation plädiert: Da das Rechnen mit Bruchzahlen viel älter ist als die Genese der negativen Zahlen, sei es nur sinnvoll, in der Schulmathematik einen ähnlichen Weg zu beschreiten. Außerdem sei das Rechnen mit Bruchzahlen dem Rechnen mit natürlichen Zahlen näher und darüber hinaus viel bedeutsamer für den Alltag der Schülerinnen und Schüler (vgl. vom Hofe 2007). Eine Argumentation in diesem Sinne, die auch von Padberg, Danckwerts und Stein (1995) gestützt wird, legt die Vermutung nahe, die traditionellen Lehrgänge sprächen dem negativen Zahlbegriff gegenüber der *klassischen* Bruchrechnung seine Relevanz ab. Dass die Schülerinnen und Schüler innerhalb ihrer Lebenswirklichkeit frühzeitig auch in Kontakt mit negativen Zahlen kommen, wurde jedoch in den vorhergehenden Kapiteln vielfach belegt, weswegen die Argumentationsgrundlage für einen Lehrweg im herkömmlichen Sinne an Überzeugungskraft verliert. Die unterrichtliche Zahlbereichserweiterung folgt üblicherweise einer sequenziellen Erweiterung um die entsprechenden Teilmengen. Vollzieht man die Erweiterungsschritte im Einzelnen nach, die im Mathematikunterricht die sequenzielle Ergänzung der positiven Bruchzahlen um die negativen Zahlen abhandeln (siehe Abbildung 15), stellt sich die Frage, inwieweit der Zahlbereich der ganzen Zahlen als eigenständiger Zahlenraum mit seinen Gesetzmäßigkeiten und Besonderheiten erschlossen wird.

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z}^+ \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{Q}^+ \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{R}^+ \arrow[d] \\ \mathbb{Z} \arrow[r] & \mathbb{Q} \arrow[r] & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

Abb. 15: Weg der sequenziellen Zahlbereichserweiterung, aus: Bruno & Martinón (1999), S. 791

Es wird deutlich, dass eine sequenzielle Erweiterung die Zahlbereiche eher isoliert voneinander behandelt, weswegen die erfolgreiche Ausbildung eines referentiellen Netzes an sich gegenseitig ergänzenden Grundvorstellungen in diesem Zusammenhang hinterfragt werden muss. Schindler (2014) beschreibt im Kontext dieses vielfach gewählten unterrichtlichen Weges die Beobachtung, die etappenweise Erweiterung werde nochmals separiert, sodass der Lehrpfad zunächst von $\mathbb{N}$ zu $\mathbb{Q}^+$, dann nochmals von $\mathbb{N}$ zu $\mathbb{Z}$ und schließlich unverbunden von $\mathbb{Q}^+$ und $\mathbb{Z}$ jeweils zu $\mathbb{Q}$ führe. Auf diese Weise kann eine kontinuierliche Weiterentwicklung des Zahlbegriffs entsprechend der im Rahmen dieser Arbeit diskutierten Aspekte nicht gewährleistet werden. Die Tendenz, gemäß den Vorgaben des Rahmenlehrplans die einzelnen Erweiterungsschritte in bestimmten Klassenstufen zu verorten, begünstigt diese strikt isolierte Vorgehensweise zusätzlich.

Zudem steht das rechnerische Kalkül oftmals im Zentrum der traditionellen Lehrgänge, über das häufig nur Erkenntnisse auf formal-regelhafter Ebene gewonnen werden können (vgl. vom Hofe 2007). Alternative Konzeptionen bemühen sich bei Beibehaltung der Reihenfolge um eine veränderte Schwerpunktlegung, die Überlegungen auf prozessbezogener Ebene (Argumentieren, Begründen, Reflektieren) miteinbezieht. Konkrete Empfehlungen, welche der in Kapitel 3 vorgestellten Grundvorstellungen innerhalb derer Kontexte für einen unterrichtlichen Lehrgang am relevantesten erscheinen, werden in der Literatur allerdings nicht ausgesprochen. Die Formulierungen für die Anforderungen an einen geeigneten Lehrgang bleiben größtenteils vage und beschränken sich auf den Hinweis, man müsse aus einer Vielzahl an Modellen und Kontexten die für die Lerngruppe passende auswählen und angemessen lang auf einer inhaltlichen Vorstellungsebene der

Zahlbereichserweiterung verweilen. Es überrascht daher nicht, dass insbesondere im Zusammenhang mit der Tradition der sequenziellen Erweiterung immer wieder auf kalkülorientierte Verfahren zurückgegriffen wird, die auch den Lehrkräften Sicherheit und Orientierung bieten.

Seit Einführung der Bildungsstandards zeichnet sich jedoch der *Trend* ab, die Zahlbereiche im Mathematikunterricht auf alternativen Wegen zu erweitern (vgl. ebd.). Der nachfolgende Abschnitt widmet sich daher den vom traditionellen Lehrgang abweichenden Lehrwegen.

4.3 Neue Lehrwege

Vom Hofe erläutert die Etablierung von Kompetenzerwartungen im Rahmenlehrplan als Voraussetzung, um im Unterrichtshergang von der traditionellen Reihenfolge der Zahlbereichserweiterung abzuweichen. Er beleuchtet in diesem Zusammenhang die unterrichtliche Praxis in verschiedenen Bundesländern und stellt hierbei die Tendenz zu alternativen Lehrwegen fest, die im Wesentlichen auf ähnlichen Leitideen basieren. Zum einen bieten die neuen Lehrgänge mehr Zeit für die Genese des Bruchzahlbegriffs (vgl. ebd.): Während die Bruchzahlen üblicherweise erst in der sechsten Klasse eingeführt werden, fördert dieses Vorgehen die Auseinandersetzung mit den Brüchen über einen längeren Zeitraum hinweg, indem sie oftmals bereits in Klasse fünf und zum Teil sogar schon in der Grundschule behandelt werden. Die Einführung erfolgt hierbei zunächst nur über die gemeinen Brüche und Anteile, bevor in den darauffolgenden Jahrgangsstufen die entsprechenden Rechenoperationen unterrichtet werden. Vom Hofe beschreibt diesen Lehrgang als zweiphasig, da die Bruchzahlen zunächst auf einer intuitiv-anschaulichen (inhaltlichen) Ebene kennengelernt und gedeutet werden, die im Anschluss um Erkenntnisse auf der formal-regelhaften Ebene ergänzt werden. Eine klassenstufenübergreifend zweiphasig strukturierte Genese genügt damit auch der Forderung Hefendehl-Hebekers und Predigers (2006), es müsse stets eine dynamische Beziehung zwischen Form und Inhalt gepflegt werden, und wird im Rahmenlehrplan so nicht skizziert. Zwar wird hier an wenigen Stellen auf die Notwendigkeit adäquater inhaltlicher Vorstellungen verwiesen, der Schwerpunkt scheint allerdings auf dem Formal-Regelhaften zu liegen: Ab Niveaustufe D wird stetig das sichere Anwenden operativer Strategien in unterschiedlichen Zahlbereichen als

Kompetenzerwartung formuliert (vgl. Ministerium für Jugend Bildung und Sport 2015).

Dem gegenüberstehend wird insbesondere an Gymnasien entgegen der traditionellen Reihenfolge die Entwicklung des negativen Zahlbegriffs in neuen Lehrgängen vor die Einführung der Bruchzahlen gestellt oder parallel dazu begonnen (vgl. vom Hofe 2007). Häufig erfolgt die Zahlbereichserweiterung von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{Z}$ gemäß den neuen Lehrgängen schon in der Klassenstufe fünf oder sechs und die Erweiterung zu den rationalen Zahlen dann in Klasse sechs oder sieben. Inwieweit sich ein solches Vorgehen im Hinblick auf die Lernentwicklung der Schülerinnen und Schüler als wirksamer erweisen kann als die herkömmliche Reihenfolge, bleibt angesichts fehlender Lernstandserhebungen in diesem Bereich abzuwarten. Es ist allerdings davon auszugehen, dass der alternative Weg der Zahlbereichserweiterung $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}$ eher von Kontinuität geprägt ist und eine zusammenhängende Zahlbegriffsentwicklung ermöglicht, was unbedingt positiv herauszustellen ist (vgl. Schindler 2014). Überdies kann eine parallele Einführung und Behandlung von Brüchen und negativen Zahlen die ganzheitliche Zahlbegriffserweiterung zusätzlich begünstigen. Auf diese Weise lässt sich den mit dem Zahlbegriff verbundenen Grundvorstellungen mehr Zeit einräumen (vgl. Rütten 2016). In der Realisierung dieser Leitidee kann sich die Verortung der ersten Begegnung mit den sozusagen neuen Zahlen in der Grundschule, wie von vom Hofe (2007) beschrieben, als hilfreich erweisen.

Auf der Grundlage der elementaren Standpunkte neuer Lehrgänge entwickelte Malle (2007b) ein Unterrichtskonzept für die Einführung negativer Zahlen, welches die erste Auseinandersetzung bereits für die Grundschule vorsieht und im Rahmen der vorliegenden Arbeit exemplarisch aufzeigen soll, wie ein solcher alternativer Lehrweg strukturiert werden kann. Malle stützt seine Überlegungen auf die Annahme, mit Hilfe eines sich langfristig weiterentwickelnden Lernprozesses zunächst ein tieferes Verständnis und schließlich eine Akzeptanz gegenüber den negativen Zahlen bei Schülerinnen und Schülern aufbauen zu können. In Anlehnung an den historischen Entwicklungsprozess der negativen Zahlen ist der Lehrgang in vier Stadien gegliedert. Im Stadium des *ersten Kennenlernens* erfolgt ein Rückgriff auf die *Vorkenntnisse* und das *Alltagsverständnis negativer Zahlen*. Die Legitimation, dieses Stadium schon in der Grundschule zu beginnen, ergibt sich aus der innerhalb empirischer

Untersuchungen gewonnenen Erkenntnis, dass Grundschulkinder fast immer über Alltagserfahrungen mit negativen Zahlen verfügen und daher beispielsweise in der Lage sind, Temperaturen korrekt abzulesen. Oftmals bereitet es ihnen keine Schwierigkeiten, einfache Rechnungen der Art *Ausgangszustand* + *Veränderung* = *Endzustand* zu formulieren oder Unterschiede zwischen positiven und negativen Zahlen (beispielsweise im Kontext eines Temperaturunterschieds) zu bestimmen. Auch die Vorzeichen ‚$+$' und ‚$-$' kennen Grundschulkinder bereits aus ihrer alltäglichen Lebenswelt, wo sie zumeist Gegensätze modellieren, die registriert werden, aber die Kinder nicht dazu veranlassen, den Vorzeichen eine besondere Bedeutung zuzumessen (vgl. ebd.). Es wird deutlich, dass die negativen Zahlen in diesem Stadium noch keine eigenständigen Denkobjekte sind, sondern zunächst die Rolle „*alte[r] Zahlen in bestimmten Interpretationen*" (ebd., S. 52) einnehmen. Sie verfügen zu diesem Zeitpunkt dennoch über intuitiv über Alltagserfahrungen generierte Lösungsschemata (insbesondere Richtungsschemata), die zumindest einfaches Rechnen im Thermometer-Kontext, nicht jedoch die Darstellung negativer Zahlen an der Zahlengeraden, ermöglichen. Malle betont angesichts dieser Beobachtung, dass ein erstes Kennenlernen mit negativen Zahlen unbedingt in der Grundschule aufbereitet werden sollte, gibt aber in diesem Zusammenhang keine konkrete Klassenstufe vor. In einem zweiten Stadium wird der *erste Anstoß zur Objektivierung* über die Thematisierung der *Ordnungsrelation* etabliert. Malle schlägt im Hinblick auf die im Kapitelabschnitt 3.4 erläuterte Herausforderung, die spiegelbildliche Vorstellung der Ordnung ganzer Zahlen zu überwinden, vor, die Verständnisschwierigkeiten ganz bewusst anzusprechen und die Zweckmäßigkeit einer fortlaufenden Ordnung offen mit den Schülerinnen und Schülern zu diskutieren. Die von Prediger (2004) in Bezug auf die Bruchzahlen formulierte Forderung, Schülervorstellungen und Irritationen innerhalb des Unterrichts offen zu kommunizieren, kann an dieser Stelle auf die ganzen Zahlen übertragen und innerhalb des dargestellten Lehrgangs erfüllt werden. Im dritten Stadium sollen schließlich *Addition und Subtraktion negativer Zahlen* spielerisch vermittelt werden (vgl. Malle 2007b). Eine mögliche Zielorientierung ist durch das bewusste Wahrnehmen des Unterschieds zwischen einem Vor- und einem Rechenzeichen gegeben. In diesem Stadium müssen die Schülerinnen und Schüler auch an die Klammerschreibweise[16] gewöhnt werden,

[16] Klammerausdrücke der Form $(-a) - (+b) = -a - b$ sollen helfen, die Addition und

was auf inhaltlicher Ebene spielerisch über Deutungen der Richtungsumkehr und Hintereinanderausführung oder innerhalb des Guthaben-und-Schulden-Kontextes gelingen kann. Im letzten Stadium des *endgültigen Anstoßes zur Objektivierung* müssen die Schülerinnen und Schüler an Hand der Multiplikation den Charakter negativer Zahlen als eigenständige Denkgegenstände vollumfänglich anerkennen. In diesem Zusammenhang ist die Erschließung der Multiplikationsregel aufbauend auf der Einsicht in die Permanenz formaler Gesetze ein wichtiger Schritt (siehe Kapitel 3.3.4). Laut Malle sollte der Prozess der Anerkennung negativer Zahlen optimalerweise in der siebten Klassenstufe abgeschlossen sein. Hier kann der Unterschied zwischen den traditionellen Lehrgängen und den Empfehlungen des Rahmenlehrplans klar herausgestellt werden: Der alternative Lehrgang in vier Stadien ermöglicht die Erschließung des negativen Zahlbegriffs über einen viel längeren Zeitraum hinweg, während eine Vorgehensweise gemäß dem Rahmenlehrplan die Entdeckung und Anerkennung negativer Zahlen auf ein Schuljahr begrenzen würde (vgl. Ministerium für Jugend, Bildung und Sport 2015).

Ein Lehrgang, der in Anlehnung an Malles (2007b) Überlegungen strukturiert ist und viel Zeit für den Weg vom ersten Kennenlernen der negativen Zahlen bis zur Anerkennung als eigenständige Denkobjekte einräumt, ist auch für die Einführung der Bruchzahlen in ähnlicher Weise denkbar: In einem analog strukturierten ersten Stadium des *ersten Kennenlernens* der Bruchzahlen könnte beispielsweise eine starke Orientierung am quasikardinalen Aspekt beziehungsweise an der quasikardinalen Schreibweise von Brüchen hilfreich sein, weil sie die Analogie zu den natürlichen Zahlen aufzeigt und so mit der Zeit den Anstoß zur Objektivierung angemessen vorbereiten kann. Padberg und Wartha (2017) betonen außerdem die Bedeutung des quasikardinalen Aspekts für die Erschließung der Addition und Subtraktion von Bruchzahlen, welche analog zu den negativen Zahlen in einem dritten Stadium angeleitet werden könnte.

Die Offenheit, die die Erläuterungen des Lehrgangs in Bezug auf die Einbettung der einzelnen Stadien in die verschiedenen Klassenstufen zulässt, kann jedoch die praktische Umsetzung für Lehrkräfte erschweren. Da Malles (2007b)

Subtraktion natürlicher Zahlen auf den Zahlbereich der ganzen Zahlen auszudehnen.

Empfehlungen diesbezüglich vage bleiben[17], sind die zeitlichen Angaben vor einem Transferversuch in den Mathematikunterricht unbedingt zu präzisieren.
Bevor aber die vorliegende Arbeit einen solchen Versuch unternehmen kann, soll im nachfolgenden Abschnitt ein weiteres lerntheoretisches Konzept zur Kontextualisierung der beiden Zahlbereichserweiterungen innerhalb des Mathematikunterrichts vorgestellt werden.

4.4 Phänomenologische Herangehensweise

Aufbauend auf fachwissenschaftlichen und didaktischen Überlegungen zu den Voraussetzungen des Begriffsverständnisses entwickelte Freudenthal (2002) in den achtziger Jahren die Idee einer didaktischen Phänomenologie mathematischer Strukturen. Die Grundlage dieser Idee bildet die Annahme, mathematische Strukturen seien im Wesentlichen durch *nooumena* (gedankliche Objekte) und *phainomena* (Ergebnisse des Zusammenspiels aus mathematischen Konzepten und Ideen) bestimmt. Ferner erläutert er: „The mathematical *objects* are *nooumena*, but a piece of mathematics can be experienced as a *phainomenon*" (ebd., S. 28). Phänomenologie in diesem Sinne meint nach Freudenthal die Beschreibung mathematischer Konzepte, Strukturen und Ideen in ihrer Beziehung zu den für den Lernprozess relevanten Phänomenen. Im Allgemeinen können diese Überlegungen „als Leitlinie für die Entwicklung von *Begriffsvorstellungen* dienen" (Weigand 2015, S. 261) und im Besonderen eine Orientierungshilfe für den Aufbau tragfähiger Zahlvorstellungen darstellen. Entscheidend für die richtige Einordnung Freudenthals (2002) Ansatzes ist die Erklärung, es gehe ihm nicht um das Vermitteln eines abstrakten Begriffes, der an Hand von Phänomenen veranschaulicht werden kann, sondern um den Aufbau von Begriffsvorstellungen *ausgehend* von diesen Phänomenen: „Starting from those phenomena that beg to be organised and from that starting point teaching the learner to manipulate these means of organising" (ebd., S. 32). Als Voraussetzung für einen wirksamen Lernprozess wird demnach die Einbettung eines mathematischen Begriffs in eine Situation mit Sachkontext verstanden. Eine besondere Bedeutung wird hierbei der „constitution of mental objects" (ebd., S. 33) beigemessen, die, so Freudenthal, stets vor dem tatsächlichen Begriffserwerb erfolgen sollte. Verschiedene mentale

[17] Es ist lediglich von einem Lehrgang die Rede, „dessen erste Stadien schon in die Grundschule fallen können und dessen Ende bei optimalem Verlauf etwa im 7. Schuljahr zu suchen ist" (Malle 2007b, S. 52).

Objekte können dabei die Erschließung ein und desselben Begriffs vorbereiten beziehungsweise in ihn münden (vgl. Vollrath 1987). Konkret bedeutet das für die unterrichtliche Strukturierung der Zahlbereichserweiterung, dass zunächst unterschiedliche mentale Objekte (Vorstellung einer Bruchzahl als Quasikardinalzahl, als Anteil eines Ganzen, etc.) aufgebaut werden müssen, bevor der Begriffserwerb, im Prinzip also die endgültige Objektivierung der Zahlbegriffe (Anerkennung der Bruchzahlen als eigenständige Denkobjekte), vollzogen werden kann. Für den Mathematikunterricht formuliert Freudenthal (2002) die folgende Empfehlung: „One shall look first for phenomena that might compel the learner to constitute the mental object[s]" (ebd., S. 32). Bevor also benannt und definiert wird, was eine Bruchzahl oder eine negative Zahl ist beziehungsweise bevor vermittelt wird, wie mit den *neuen* Zahlen gerechnet werden kann, sollen an Hand von alltagsbezogenen Phänomenen zahlreiche Beobachtungen und Untersuchungen zu Bruchzahlen und negativen Zahlen vorangestellt werden. An dieser Stelle lassen sich enge Bezüge zum Konzept der Grundvorstellungen nach vom Hofe (1995) herstellen, die auch von Weigand (2015) herausgearbeitet werden: Insofern repräsentieren mentale Objekte „nicht nur sie erzeugende Phänomene, sondern [sie] beinhalten Aspekte, die über die Erscheinungsform dieser Phänomene hinausgehen" (ebd., S. 261). Als charakteristisch für mentale Objekte beschreibt er insbesondere, dass sie dynamisch und flexibel seien, was ebenfalls an die unter Abschnitt 2.1 diskutierten Überlegungen erinnert. Berechtigterweise stellt Weigand im Hinblick auf Freudenthals (2002) didaktische Phänomenologie die Frage, welche Phänomene nun konkret für die Begriffsentwicklung von Bedeutung wären. Auch Vollrath (1987) merkt an, dass einige, von Freudenthal (2002) angesprochene Aspekte der Präzision bedürfen und die Idee der didaktischen Phänomenologie mathematischer Strukturen „prinzipiell offen für Ergänzungen und Revisionen" (Vollrath 1987, S. 255) sei.

Ohne konkretere Ausführungen in Bezug auf tragfähige Phänomene und mentale Objekte lässt sich diese Herangehensweise also nicht auf die unterrichtliche Praxis übertragen. Vollrath erkennt in dieser Leitlinie jedoch sinnvolles Potential und sieht den „wesentlichen Beitrag der Mathematikdidaktik darin […], äußere Einflüsse, insbesondere den Mathematikunterricht, in die Untersuchungen mit einzubeziehen" (ebd., S. 254). Die vorliegende Ausarbeitung unternimmt im

Folgenden den Versuch, dieser Forderung gerecht zu werden und Freudenthals (2002) Ansatz sowie Malles (2007b) Ausführungen zu einem alternativen Lehrgang im Hinblick auf die unterrichtliche Praxis zu präzisieren. Auf der Grundlage der in Kapitel 2 diskutierten theoretischen Konzepte und der in Kapitel 3 gewonnenen Erkenntnisse zu den Zahlbereichserweiterungen $\mathbb{N} \to \mathbb{Q}^+$ und $\mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ soll nach einer knappen Begründung der Literaturrecherche eine Unterrichtskonzeption entwickelt werden, die auch die in Kapitel 4 diskutierten Aspekte vollumfänglich berücksichtigt.

5 Begründung der Literaturrecherche

Die vorliegende Arbeit stützt alle gewonnenen Erkenntnisse auf eine umfangreiche Literaturrecherche. Mit der im Folgenden formulierten Erläuterung und Begründung des Vorgehens sollen die Auswahlkriterien transparent und nachvollziehbar dargelegt werden.

Die recherchierte Literatur setzt sich zu einem Großteil aus fachdidaktischen Artikeln aus mathematisch-naturwissenschaftlichen Fachzeitschriften und in Ergänzung dazu aus ausgewählten fachwissenschaftlichen Publikationen zusammen. Auf fachwissenschaftlicher Ebene handelt es sich hierbei um elementare Einführungen zum Aufbau der Zahlbereiche beziehungsweise zur systematischen Zahlbereichserweiterung, die eine theoretische Durchdringung des Lerngegenstands zur anschließenden fachdidaktischen Auseinandersetzung ermöglichen. Über eine Schlagwortsuche innerhalb verschiedener Datenbanken konnten darauf aufbauend einige Monographien zur Algebra in der Sekundarstufe sowie zu mathematikdidaktischen Konzepten herangezogen werden. Die hierzu verwendeten Schlagwörter waren ‚Algebra', ‚Sekundarstufe', ‚Zahlbereiche' und ‚Grundvorstellungen'. Bei der Auswahl der Monographien wurde auf eine überblicksartige Darstellung didaktischer Grundlagen unter Einbeziehung der unterrichtlichen Praxis geachtet. Die Auswahl der wissenschaftlichen Artikel erfolgte mit dem Ziel der Erweiterung der theoretischen Inhalte um einen praktischen Transfer. Hierbei wurden auf Grund der starken inhaltlichen Praxisorientierung sowie der Bereitstellung von Konzepten und Materialien für den Mathematikunterricht insbesondere die Fachzeitschriften *Mathematik lehren, Praxis der Mathematik in der Schule* und *Der Mathematikunterricht* gesichtet. Die Schlagwortsuche, die sich vor allem auf die Suchbegriffe

‚Grundvorstellungen‘, ‚Zahlen‘, ‚Zahlbereiche‘, ‚Zahlbereichserweiterung‘ sowie ‚Brüche‘, ‚Bruchzahlen‘, ‚Negative Zahlen‘ und ‚Ganze Zahlen‘ stützte, ergab zunächst eine Auswahl an veröffentlichten Heften, die sich sowohl mit der Didaktik der Zahlbereichserweiterung (und den damit verbundenen Herausforderungen) im Allgemeinen als auch konkret mit den Zahlbereichserweiterungen zu den Bruchzahlen und den ganzen Zahlen auseinandersetzen. Schließlich wurden aus der Vielzahl an Beiträgen jene selektiert, die sich mit den Zahlbereichserweiterungen auf der inhaltlichen Vorstellungsebene beschäftigen. Im Kontext der Bruchzahlen fanden die Artikel, die Dezimalbrüche oder die Problematik des Erweiterns und Kürzens von Brüchen thematisieren, keine Berücksichtigung, um die Ausarbeitung in ihrem Umfang einzugrenzen. Stattdessen wurde sich bei der Literaturauswahl zu den beiden Zahlbereichserweiterungen um das Zugrundlegen ähnlicher Aspekte (Zahldarstellung, Vorstellungen zum Zahlbegriff, Vorstellungen zu den Rechenoperationen, Herausforderungen und Hürden) bemüht. Ferner beabsichtigt die vorliegende Arbeit eine möglichst umfangreiche historische Darstellung sich wandelnder Konzepte und Standpunkte, weswegen sowohl ältere als auch jüngere Publikationen herangezogen wurden. Ziel dieser Herangehensweise ist, die historische Entwicklung didaktischer Tendenzen und Entscheidungen im Hinblick auf die Einbettung der Zahlbereichserweiterungen in den Mathematikunterricht nachvollziehen und an Hand von intertextuellen Bezügen reflektieren zu können.
Die auf diesem Wege erarbeitete Darstellung der gesichteten Literatur kann insofern als fundierte Grundlage dienen und die Ableitung einer klassenstufenübergreifenden Unterrichtskonzeption gewährleisten. Die in diesem Zusammenhang ausgearbeiteten Überlegungen sollen im nachfolgenden Kapitel erläutert und diskutiert werden.

6 Ableitung einer Unterrichtskonzeption

Die nachfolgend vorgestellte Unterrichtskonzeption versteht sich als Diskussion und Zusammenfassung aller im Rahmen der vorliegenden Arbeit untersuchten Zugänge zu den Bruchzahlen und den negativen Zahlen. Alle bisher gewonnenen Erkenntnisse auf inhaltlicher Ebene sowie im Hinblick auf Veranschaulichungsund Erklärungsmodelle vereint die Konzeption in einer klassenstufenübergreifend strukturierten, praxisorientierten Handreichung[18].

Da sowohl der Rahmenlehrplan als auch die skizzierten Vorschläge für alternative Lehrgänge in der Beschreibung eines Lernprozesses eher vage bleiben und daher für die Umsetzung in der Unterrichtspraxis als nicht konkret genug bewertet werden können, versucht sich die vorgestellte Konzeption in einer solchen Konkretisierung. Während der Rahmenlehrplan vor allem zielorientierte Empfehlungen formuliert und dabei weniger auf die einzelnen Entwicklungsstufen des Lernprozesses Bezug nimmt beziehungsweise nicht hervorhebt, an welche Grundvorstellungen die Zielerwartungen jeweils geknüpft sind, soll die entwickelte Konzeption den Lernprozess der Schülerinnen und Schüler transparent und nachvollziehbar darstellen. Es wird deutlich, dass dieser Lernprozess bereits in der ersten Klasse beginnen kann und dass hierbei eine parallele Zahlbereichserweiterung von den natürlichen Zahlen zu den Buchzahlen und den negativen Zahlen nahegelegt wird. Diese Abkehr vom traditionellen Lehrgang, wie ihn auch der Rahmenlehrplan skizziert, erscheint sinnvoll, da sich beide Zahlbereiche auf der Grundlage des Maßzahlaspektes untersuchen lassen und darüber hinaus gleichermaßen bedeutsam für die Lebenswirklichkeit der Schülerinnen und Schüler sind. Der Aufbau eines ganzheitlichen Zahlbegriffs soll auf diese Weise gewährleistet und die Existenz der neu zu entdeckenden Zahlen muss (und sollte) gegenüber den Schülerinnen und Schülern zu keiner Zeit geleugnet werden. Die Empfehlungen der Unterrichtkonzeption erstrecken sich über den Zeitraum von der ersten bis zur siebten Klassenstufe, was der behutsamen Weiterentwicklung und Modifikation des Zahlbegriffs viel Zeit einräumt und die Schülerinnen und Schüler nicht dazu zwingt, neu eingeführte Objekte auf Anhieb akzeptieren zu müssen. Sie erhalten somit die Möglichkeit, Bruchzahlen und negative Zahlen zunächst an Hand einer Vielzahl von Alltagsphänomenen entdecken und kennenlernen zu dürfen, bevor sie schließlich zu einem späteren Zeitpunkt auch formal eingeführt werden. Die Konzeption stützt sich in diesem Zusammenhang auf die Leitideen des genetischen Prinzips und der didaktischen Phänomenologie.

Weiterhin macht die Unterrichtskonzeption explizit, dass die einzelnen Stadien der Zahlbegriffsentwicklung in beiden Zahlbereichen $\mathbb{Q}^+$ und $\mathbb{Z}$ an tragfähige

[18] Die tabellarisch dargestellte Unterrichtskonzeption wird im Anschluss an die Erläuterungen an das Ende des Kapitels platziert.

Grundvorstellungen geknüpft sind, die wiederum durch spezifische Aufgabenformate gefördert werden müssen. Der tabellarischen Darstellung der Konzeption lässt sich entnehmen, dass die notwendigen Grundvorstellungen in beiden Zahlbereichen stets aufeinander aufbauen und bestimmte Vorstellungen und Aspekte behandelt und verinnerlicht werden müssen, bevor andere Vorstellungen wirksam gefördert werden können. Diese Darstellung folgt der elementaren Idee des Grundvorstellungen-Konzeptes, das Vorstellungsrepertoire entspräche dem Aufbau eines sich stetig weiterentwickelnden Netzes, und kann durch die fehlenden Angaben im Rahmenlehrplan für einen Einsatz in der Praxis legitimiert und motiviert werden. Der Entwicklungsprozess wird also sowohl im Hinblick auf die einzelnen Etappen der Zahlbereichserweiterung als auch auf der Vorstellungsebene konkretisiert. Die Überlegungen auf jeder Etappe in jeder Klassenstufe werden schließlich um exemplarische Aufgabenformate ergänzt, die in ihrer Gesamtheit die zahlreichen Facetten des jeweiligen Zahlbegriffs spiegeln und entdecken lassen. Diese Aufbereitung erscheint im Hinblick auf einen Einsatz im Mathematikunterricht sinnvoll und ist in den allgemeinen Formulierungen des Rahmenlehrplans ebenfalls nicht gegeben. Die ausgewählten Formate gestalten einen abwechslungsreichen Lernprozess, der ein dynamisches Verhältnis zwischen formalen und inhaltlichen Aspekten pflegt und insbesondere viel Raum für offene Aufgabenstellungen und die Thematisierung von Denkhürden, Fehlvorstellungen und Irritationen bereithält. Eine transparente Darstellung der Lerninhalte und der stofflichen Struktur zu Grunde liegenden Besonderheiten im Mathematikunterricht soll so gewährleistet werden, um Hemmungen im Umgang mit den neu eingeführten Zahlen frühzeitig abzubauen. Die ausgewählten Aufgabenformate lassen sich (immer unter Berücksichtigung der entsprechend zu fördernden Grundvorstellungen) beliebig abwandeln, ergänzen oder ersetzen, wobei auf die Hinzuziehung sinnvoller und angemessen zahlreicher Erklärungsmodelle und Kontexte geachtet werden sollte.

Die entwickelte Unterrichtskonzeption nähert sich der Erarbeitung des Bruchzahlbegriffs und des negativen Zahlbegriffs offen und vielseitig und ist durch eine starke Praxis- und Prozessorientierung gekennzeichnet. Um die Gestaltung des Mathematikunterrichts auf der Grundlage dieser Konzeption zu unterstützen, sollen nachfolgend einige Leitideen visualisiert werden, die bei der

Arbeit mit der tabellarischen Darstellung stets Berücksichtigung finden sollten. Diese Leitideen werden dann um die erläuterte Konzeption ergänzt[19].

Leitideen zur Unterrichtskonzeption:

[19] Zur besseren Lesbarkeit wird mit der Darstellung der Leitideen auf dieser Seite begonnen und die tabellarisch strukturierte Konzeption ab der darauffolgenden Seite abgebildet.

Zahlbereichserweiterung im Mathematikunterricht Eine Unterrichtskonzeption				
$\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}^{+}$	Bruchzahlbegriff			
	Inhalt	**Grundvorstellungen**	**Aufgabenformate**	**Zielorientierung**
Klasse 1	Alltagserfahrungen zu Größen sammeln	(Maßzahlaspekt)	Enaktive Handlungserfahrungen generieren, z.B. Messen, Wiegen	Aktivierung von Vorwissen
Klasse 2	Austausch über Begegnungen mit Bruchzahlen im Alltag Interpretieren und Vergleichen von Mengenangaben in Rezepten	(Maßzahlaspekt)	Sammeln von Koch- und Backrezepten Gemeinsames Backen	Erstes Kennenlernen
Klasse 3	Identifizieren von Bruchzahlen im natürlichen Sprach-gebrauch und in der Lebenswelt: Dreivierteltakt, eine Vierteldrehung, Halbzeit	Bruchzahl als Quasi-kardinalzahl	Zusammentragen von Situationen und Zusammenhängen, in denen Brüche auftreten Visualisierung auf Symbol- und Bildebene Interpretation dieser Zusammenhänge: Wozu brauchen wir Brüche?	Entdeckung von Bruchzahlen als Alltagsphänomen Irritationen vorbeugen

Zahlbereichserweiterung im Mathematikunterricht Eine Unterrichtskonzeption				
$\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$	Negativer Zahlbegriff			
	Inhalt	**Grundvorstellungen**	**Aufgabenformate**	**Zielorientierung**
Klasse 1	Rückgriff auf Alltagserfahrungen mit negativen Zahlen	(Maßzahlaspekt)	Kontext Thermometer: Temperaturen ablesen	Aktivierung von Vorwissen
Klasse 2	Austausch über Begegnungen mit negativen Zahlen im Alltag Interpretieren und Vergleichen von Temperaturangaben	Relative Zahlen bezüglich einer fest gewählten Vergleichsmarke Gegensätze	Verschiedene Kontexte modellieren: Fahrstuhl, Thermometer, Meeresspiegel, Kontostände Interpretation der Vorzeichen als Gegensätze	Erstes Kennenlernen
Klasse 3	Zustände und Änderungen im Alltag identifizieren und langfristig beobachten Unterschiede zwischen positiven und negativen Zahlen erarbeiten	Zustände Zustandsänderungen	Dokumentation von Temperaturen über einen längeren Zeitraum hinweg Beschreibung einfacher Zustandsänderungen in verschiedenen Kontexten Interpretation der Untersuchungen: Welche Funktionen erfüllen negative Zahlen?	Entdeckung von negativen Zahlen als Alltagsphänomen Richtungsschemata aktivieren

Zahlbereichserweiterung im Mathematikunterricht Eine Unterrichtskonzeption				
$\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}^{+}$	Bruchzahlbegriff			
	Inhalt	**Grundvorstellungen**	**Aufgabenformate**	**Zielorientierung**
Klasse 4	Einfache Rechnungen am konkreten Material nachvollziehen	Bruchzahl als Anteil eines Ganzen Bruchzahl als Quasikardinalzahl	Modellierung einfacher Verteilsituationen: eine Pizza halbieren, einen Kuchen auf vier Personen aufteilen Rechnen mit Quasikardinalzahlen: 1Fünftel + 2Fünftel	Analogiebildung zum Rechnen mit natürlichen Zahlen
Klasse 5	Bruchzahlen auf symbolischer Ebene kennenlernen Übersetzung von Bruchzahlen: Wort – Bild – Symbol Anteilbestimmung bei kontinuierlicher und diskreter Beschreibung eines Ganzen Addition und Subtraktion gleichnamiger Brüche	Bruchzahl als Anteil eines Ganzen/als relativer Anteil Bruchzahl als Quasikardinalzahl Bruchzahl als Vergleichsoperator Hinzufügen/Wegnehmen unter Betonung des quasikardinalen Aspekts Vorwärtsschreiten/Rückwärtsschreiten unter Betonung des quasikardinalen Aspekts	Erarbeitung eines Bruchalbums Erfindung von Rechengeschichten zur Vergegenwärtigung von Handlungsanweisungen Rechenaufgaben mit hohem ikonischen Charakter: Nutzung von Kreis- und Rechteckmodellen	Erster Anstoß zur Objektivierung (auch über formale Einführung der Bruchzahlen) Vorstellungen zu den Rechenoperationen aufbauen

Zahlbereichserweiterung im Mathematikunterricht Eine Unterrichtskonzeption				
$\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$	Negativer Zahlbegriff			
	Inhalt	**Grundvorstellungen**	**Aufgabenformate**	**Zielorientierung**
Klasse 4	Einfache Rechnungen der Form Anfangszustand + Änderung = Endzustand nachvollziehen	Zustand-Änderung-Zustand	Annäherung des Thermometer-Modells an die Zahlengerade durch Drehung um 90°	Erster Anstoß zur Objektivierung Vorbereitung des Aufbaus sekundärer Grundvorstellungen
Klasse 5	Spielerische Entdeckungen zu negativen Zahlen im Guthaben-und-Schulden-Kontext	Zustände/Bestände Änderungen	Spiel *Raus aus den Schulden*: Zahlengerade als Kontostandleiste Interpretation der Größenbereiche als Kontostände oder als Geldfluss (Einnahmen und Ausgaben)	Entwicklung einer einheitlichen Ordnungsrelation
	Deutung des Plus- bzw. Minuszeichens als Operationszeichen	Blick in die Zukunft/Blick in die Vergangenheit	Beantwortung von an einen bestimmten Zeitraum gebundenen Fragestellungen (Wie viel Geld habe ich in einem Monat?)	Irritationen thematisieren (Mehrdeutigkeit des Minuszeichens)

Zahlbereichserweiterung im Mathematikunterricht Eine Unterrichtskonzeption				
$\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}^{+}$	Bruchzahlbegriff			
	Inhalt	**Grundvorstellungen**	**Aufgabenformate**	**Zielorientierung**
Klasse 6	Erarbeitung der prinzipiellen Erweiterbarkeit von Brüchen (Gleichwertigkeit)		Erklärung durch Fantasiegeschichten (z.B. *Das Märchen vom bösen Drachen und dem klugen Bruch*)	„Wundern und Wundern lassen“: Irritationen und Besonderheiten thematisieren
	Addition und Subtraktion von Brüchen	Hinzufügen/Wegnehmen	Fehlersuchaufgaben	
	Multiplikation und Division von Brüchen	Anteile von Anteilen bilden (Von-Deutung der Multiplikation)	Begründen von Rechnungen	
		Multiplikation als wiederholte Addition	Arbeiten am Geobrett oder in der Faltumgebung: Vervielfachung von Brüchen	Endgültiger Anstoß zur Objektivierung
			Explizites Thematisieren von Verständnishürden: Multiplizieren vergrößert nicht immer!	
		Division als (Ver)Teilen/Messen	Modellierung von Verteilsituationen (auch enaktiv)	
			Schreiben von Rechengeschichten	
Klasse 7	Brüche in verschiedenen alltagsnahen Kontexten erleben	Verschiedene Grundvorstellungen (Vernetzung/Zusammen-spiel)	Stationenlernen oder Lerntheke mit vielfältigen Angeboten (z.B. *Saftmischungen*)	Akzeptanz der Bruchzahlen als eigenständige Denkobjekte mit ihren Besonderheiten
	Rechnen mit Brüchen			
	Erarbeitung von Unterschieden zwischen natürlichen Zahlen und Brüchen		Offene Aufgaben: Berichte schreiben, Plakate erstellen (Zusammenfassungen auf der Meta-Ebene)	Explizite Gegenüberstellung von Unterschieden, um den Aufbau von Fehlvorstellungen zu vermeiden

Zahlbereichserweiterung im Mathematikunterricht Eine Unterrichtskonzeption				
$\mathbb{N} \to \mathbb{Z}$	Negativer Zahlbegriff			
	Inhalt	**Grundvorstellungen**	**Aufgabenformate**	**Zielorientierung**
Klasse 6	Erarbeitung des mathematischen Darstellungsmittels Zahlengerade	Relative Zahlen bezüglich einer fest gewählten Vergleichsmarke Skalenwerte	Abstraktion von Kontostandleiste/ Thermometer-Modell: Zahlen ablesen, abtragen, vergleichen	Vorstellungen zur Ordnungsrelation stärken (Fortsetzung der gewohnten Orientierung)
	Addition und Subtraktion ganzer Zahlen	Zustand-Änderung-Zustand Änderung-Änderung-Änderung	Arbeiten mit dem Pfeilmodell (haptisch/enaktiv und ikonisch): Additions- und Subtraktions-aufgaben visualisieren	Vorstellungen zu den Rechenoperationen aufbauen
		Gerichtetes Hinzufügen/Wegnehmen	Herausarbeitung einer metaphorischen Vorzeichendeutung mit Kontextbezug (Hinzufügen von Schulden zu einem Guthaben)	
		Vorwärtszählen/Rück-wärtszählen	Rechnen mit dem Pfeil- oder Leitermodell	
		Richtung	Explizites Thematisieren von Verständnishürden: Hinzufügen vermehrt nicht immer!	„Wundern und Wundern lassen“: Irritationen und Besonderheiten thematisieren
Klasse 7	Multiplikation und Division ganzer Zahlen	Multiplikation als Streckung/Stauchung und ggf. Richtungs-umkehr/Spiegelung	Geometrisch anschauliche Deutung der Multiplikation im Pfeilmodell	Endgültiger Anstoß zur Objektivierung
	Erarbeitung der Multiplikations- und Divisionsregel		Entdeckungen an Permanenzreihen, Argumentationen über das Permanenzprinzip (auch unter Einbettung in Realmodellen, z.B. Kontext Fahrstuhl)	Anerkennung negativer Zahlen als eigenständige Denkobjekte mit ihren Besonderheiten

7 Fazit

Die Erweiterung des natürlichen Zahlbereichs und der damit verbundene Aufbau eines ganzheitlichen und widerspruchsfreien Zahlbegriffs stellen für Schülerinnen und Schüler eine große gedankliche Herausforderung dar, die es innerhalb des Mathematikunterrichts zu bewältigen gilt. Dass beim Übergang in einen neuen Zahlbereich vertraute Regeln und Gesetzmäßigkeiten ihre Gültigkeit verlieren und intuitiv verankerte Vorstellungen immer wieder zu Hürden im Lernprozess werden können, fördert Skepsis und Irritationen seitens der Lernenden, denen es mit Verständnis und Veranschaulichung zu begegnen gilt. Die Untersuchungen der vorliegenden Arbeit haben gezeigt, dass die Einbettung von Zahlbereichserweiterungen in den Mathematikunterricht insbesondere wirksam und verständnisfördernd sein kann, wenn den Schülerinnen und Schülern ausreichend Zeit gegeben wird, einen umfangreichen Zahlbegriff aufzubauen und diesen von Anfang an mit adäquaten inhaltlichen Vorstellungen anreichern zu können. Eine Unterrichtspraxis, die sich gemäß dem genetischen Prinzip und in Anlehnung an die didaktische Phänomenologie der Entdeckung neuer mathematischer Inhalte auf intuitiver Ebene nähert und die sich gleichermaßen auf die Vorerfahrungen und Vorkenntnisse der Lerngruppe stützt, bildet hierbei die Basis für den Aufbau entsprechender Grundvorstellungen. Dass sowohl mit der Zahlbereichserweiterung von den natürlichen zu den ganzen Zahlen als auch mit der Erweiterung von den natürlichen Zahlen zu den Bruchzahlen zahlreiche Anlässe zur Modifikation bereits aufgebauter Vorstellungen einhergehen, haben die Überlegungen auf der Darstellungs- und Vorstellungsebene sowie zu den Rechenoperationen eindrucksvoll aufgezeigt. Es erscheint demnach zwingend notwendig, Bruchstellen, Irritationen und Unterschiede zu den natürlichen Zahlen immer wieder gezielt aufzugreifen und mit den Schülerinnen und Schülern zu besprechen, anstatt „von Anfang an so [zu tun], als ob den neuen Zahlen nichts Mysteriöses anhaften würde“ (Malle 2007a, S. 11).

Die im Rahmen dieser Ausarbeitung entwickelte Unterrichtskonzeption stützt sich auf die zusammengetragenen Erkenntnisse und unternimmt den Versuch einer Konkretisierung der in der Literatur formulierten Ideen und Empfehlungen. Hierbei wird sich klar von einem auf Formalismen gestützten axiomatischen Vorgehen sowie von den Prinzipien traditioneller Lehrgänge distanziert. Die in der Literatur vielfach diskutierte Frage, ob sich ausgehend von den natürlichen Zahlen für die unterrichtliche Praxis zunächst eine Erweiterung zu den Bruchzahlen oder eher zu den ganzen Zahlen anbieten würde, wird im Kontext der vorgestellten Konzeption mit der Struktur paralleler Betrachtungen beantwortet. Diese didaktische Entscheidung kann mit der großen Relevanz beider Zahlbereiche für die Alltagserfahrungen der Schülerinnen und Schüler begründet werden und beinhaltet außerdem die Verortung erster Entdeckungen zu den neuen Zahlen bereits in der ersten Klasse. Die Unterrichtskonzeption überzeugt insofern durch ihre starke Praxisorientierung, durch präzise Formulierungen zu Grundvorstellungen und Aufgabenformaten (die den Lernprozess als langfristig und etappenweise anerkennen) und durch die Betonung inhaltlich-intuitiver Aspekte.

Inwiefern eine Orientierung an der entwickelten Konzeption für den Mathematikunterricht jedoch tatsächlich gewinnbringend sein kann, kann nur durch eine entsprechende Transferleistung überprüft werden. Der praktische Nutzen für die Gestaltung von Unterricht ließe sich demnach durch die Strukturierung eines Lehrgangs, wie er in der Konzeption skizziert wird, unter Berücksichtigung der elementaren Leitideen sowie durch begleitende Lernstandserhebungen feststellen. Gegebenenfalls böte es sich an, die Untersuchungen im Bereich der Bruchzahlen um etwaige Betrachtungen zum Erweitern und Kürzen beziehungsweise zu den Dezimalbrüchen zu ergänzen, um die Ideen der Konzeption inhaltlich zu vervollständigen. Das Unterrichtskonzept kann Inspiration und Motivation für Lehrkräfte sein, bestehende Lehrgänge mit dem Ziel der Schülerinnen- und Schülerorientierung zu reflektieren und gegebenenfalls zu ergänzen oder zu überarbeiten. Es liefert konkrete Anregungen für eine inhaltlich motivierte und abwechslungsreiche Einbettung der Zahlbereichserweiterungen in den Mathematikunterricht und präsentiert verschiedene alltagsnahe Zugänge und Modelle. Die Konzeption wird folglich der didaktischen Forderung, der Genese des Zahlbegriffs und den damit verbundenen Grundvorstellungen mehr Unterrichtszeit zu schenken, gerecht und leistet damit einen wichtigen und hilfreichen Beitrag zur Innovation von Mathematikunterricht sowie zur Didaktik der Zahlbereichserweiterung im Besonderen und zur Mathematikdidaktik im Allgemeinen.

8 Literaturverzeichnis

Bruno, Alicia & Martinón, Antonio (1999): The teaching of numerical extensions. The case of negative numbers, in: International Journal of Mathematical Education in Science and Technology (Jg. 30 / 6. Heft), S. 789-809.

Freudenthal, Hans (1973): Mathematik als pädagogische Aufgabe Bd. 1, 1. Auflage. Stuttgart: Ernst Klett Verl.

Freudenthal, Hans (2002): Didactical Phenomenology of Mathematical Structures. Dordrecht [u.a.]: Kluwer Academic Publishers.

Gesellschaft Deutscher Naturforscher und Ärzte (1908): Die Tätigkeit der Unterrichtskommission der Gesellschaft Deutscher Naturforscher und Ärzte. Gesamtbericht enthaltend die Vorverhandlungen auf den Versammlungen in Cassel und Breslau sowie die seitens der Kommission den Versammlungen in Meran, Stuttgart und Dresden unterbreiteten Reformvorschläge. Leipzig, Berlin: B.G. Teubner.

Griesel, Heinz (1973): Der mathematische Hintergrund der natürlichen Zugänge zu den negativen Zahlen, in: Der Mathematikunterricht (Jg. 19 / 1. Heft), S. 54-77.

Griesel, Heinz (1981): 20 Jahre moderne Didaktik der Bruchrechnung, in: Der Mathematikunterricht (Jg. 27 / 4. Heft), S. 5-15.

Hefendehl-Hebeker, Lisa (1996): Brüche haben viele Gesichter, in: Mathematik lehren (78), S. 20-49.

Hefendehl-Hebeker, Lisa & Prediger, Susanne (2006): Unzählig viele Zahlen: Zahlbereiche erweitern – Zahlvorstellungen wandeln, in: Praxis der Mathematik in der Schule (Jg. 48 / 11. Heft), S. 1-7.

Hussmann, Stephan & Schindler, Maike (2014): Ein Kontext für negative Zahlen – auch für die Multiplikation, in: Mathematik lehren (183), S. 28-32.

Kemper, Heinrich (1965): Wohin gehören die negativen Zahlen im Unterricht?, in: Praxis der Mathematik in der Schule (Jg. 7 / 9. Heft), S. 231-234.

Kirsch, Arnold (1973): Die Einführung negativer Zahlen mittels additiver Operatoren, in: Der Mathematikunterricht (Jg. 19/ 1. Heft), S. 5-39.

Kirsch, Arnold (1975): Gehört die Multiplikation vor die Addition? Zur Operatormethode in der Bruchrechnung und möglichen Alternativen, in: Der Mathematikunterricht (Jg. 21 / 1. Heft), S. 7-18.

Klein, Felix (1933): Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus. Berlin: Springer. (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen).

Lietzmann, Walther (1926): Methodik des mathematischen Unterrichtens. Leipzig: Quelle & Meyer.

Leuders, Timo (2006): Erlebnis Algebra: zum aktiven Entdecken und selbstständigem Erarbeiten. Berlin, Heidelberg: Springer Spektrum.

Malle, Günther (2004): Grundvorstellungen zu Bruchzahlen, in: Mathematik lehren (123), S. 4-8.

Malle, Günther (2007a): Zahlen fallen nicht vom Himmel. Ein Blick in die Geschichte der Mathematik, in: Mathematik lehren (142), S. 4-10.

Malle, Günther (2007b): Die Entstehung negativer Zahlen. Der Weg vom ersten Kennenlernen bis zu eigenständigen Denkobjekten, in: Mathematik lehren (142), S. 52-57.

Messerle, Gerhard (1975): Zahlbereichserweiterungen. Stuttgart: B.G. Teubner. (Mathematik für die Lehrerausbildung).

Ministerium für Bildung, Jugend und Sport des Landes Brandenburg (Hrsg.) (2015): Rahmenlehrplan für die Jahrgangstufen 1-10 der Berliner und Brandenburger Schulen. Teil C Mathematik.
Verfügbar unter:
https://bildungsserver.berlinbrandenburg.de/fileadmin/bbb/unterricht/rahmenlehrplaene/Rahmenlehrplanprojekt/amtliche_Fassung/Teil_C_Mathematik_2015_11_10_WEB.pdf
[01.12.2019]

OEEC (1961): Synopses for modern secondary school mathematics. Paris: OEEC.

Padberg, Friedhelm; Dankwerts, Rainer & Stein, Martin (1995): Zahlbereiche – Eine elementare Einführung. Heidelberg [u.a.]: Spektrum, Akad. Verl. (Mathematik Primarstufe und Sekundarstufe I + II).

Padberg, Friedhelm & Bienert, Tanja (2000): Zur Entwicklung des Bruchzahlverständnisses und der Rechenoperationen mit gemeinen Brüchen innerhalb eines Schuljahres, in: Der Mathematikunterricht (Jg. 46 / 2. Heft), S. 24-37.

Padberg, Friedhelm & Wartha, Sebastian (2017): Didaktik der Bruchrechnung, 5. Auflage. Berlin: Springer Spektrum. (Mathematik Primarstufe und Sekundarstufe I + II).

Paulitsch, Annelies (1998): Offener Brief der natürlichen Zahlen, in: Mathematik lehren (87), S. 20-49.

Postel, Helmut (1981): Größen- oder Operatorkonzept in der Bruchrechnung?, in: Der Mathematikunterricht (Jg. 27 / 4. Heft), S. 16-46.

Prediger, Susanne (2004): Brüche bei den Brüchen – aufgreifen oder umschiffen?, in: Mathematik lehren (123), S. 10-13.

Prediger, Susanne (2006): Vorstellungen zum Operieren mit Brüchen entwickeln und erheben – Vorschläge für vorstellungsorientierte Zugänge und diagnostische Aufgaben, in: Praxis der Mathematik in der Schule (Jg. 48 / 11. Heft), S. 8-12.

Prediger, Susanne (2009): Verstehen durch Vorstellen, in: Mathemagische Momente, hg. von Timo Leuders, Lisa Hefendehl-Hebeker und Hans-Georg Weigand. Berlin: Cornelsen, S. 166-175.

Rütten, Christian (2016): Sichtweisen von Grundschulkindern auf negative Zahlen. Metaphernanalytisch orientierte Erkundungen im Rahmen didaktischer Rekonstruktion. Wiesbaden: Springer Spektrum. (Essener Beiträge zur Mathematikdidaktik).

Schindler, Maike (2014): Auf dem Weg zum Begriff der negativen Zahl. Empirische Studie zur Ordnungsrelation für ganze Zahlen aus inferentieller Perspektive. Wiesbaden: Springer Spektrum. (Dortmunder Beiträge zur Entwicklung und Erforschung des Mathematikunterrichts).

Schönwald, Kurt (1955): Psychologische Betrachtungen zur Bruchrechnung in der Schule, in: Der Mathematikunterricht (Jg. 1 / 2. Heft), S. 37-50.

Seyfferth, Siegfried (1975): Bruchrechnung und natürliche Sprache, in: Der Mathematikunterricht (Jg. 21 / 1. Heft), S. 35-47.

Sieber, Helmut (1955): Eine wissenschaftliche Begründung des Bruchrechnens, in: Der Mathematikunterricht (Jg. 1 / 2. Heft), S. 18-36.

Tessars, Julia (2011): Ganzheitliches Lernen bei der Einführung des Bruchbegriffes (Klasse 5/6), in: Der Mathematikunterricht (Jg. 57 / 6. Heft), S. 4-15.

Ulovec, Andreas (2007): Wenn sich Vorstellungen wandeln. Ebenen der Zahlbereichserweiterungen, in: Mathematik lehren (142), S. 14-16.

Vollrath, Hans-Joachim (1987): Didaktische Phänomenologie als Grundlage für die Erforschung der Konstitution mentaler Objekte – Gedanken zu Freudenthals Buch, in: Journal für Mathematik-Didaktik (8), S. 247-256.

Vollrath, Hans-Joachim (1994): Algebra in der Sekundarstufe. Mannheim [u.a.]: BI-Wiss.-Verlag. (Lehrbücher und Monographien zur Didaktik der Mathematik).

Vollrath, Hans-Joachim & Roth, Jürgen (2012): Grundlagen des Mathematikunterrichts in der Sekundarstufe, hg. von Friedhelm Padberg, 2. Auflage. Heidelberg [u.a.]: Spektrum, Akad. Verl. (Primarstufe und Sekundarstufe I + II).

vom Hofe, Rudolf (1995): Grundvorstellungen mathematischer Inhalte. Heidelberg [u.a.]: Spektrum, Akad. Verl. (Texte zur Didaktik der Mathematik).

vom Hofe, Rudolf (2003): Grundbildung durch Grundvorstellungen, in: Mathematik lehren (118), S. 4-8.

vom Hofe, Rudolf (2007): Varianten im Unterrichtsgang – Von den natürlichen zu den rationalen Zahlen, in: Mathematik lehren (142), S. 12-13.

vom Hofe, Rudolf & Hattermann, Mathias (2014): Zugänge zu negativen Zahlen, in: Mathematik lehren (183), S. 2-7.

Wagner, Anke & Wörn, Claudia (2013): Veranschaulichungs- und Erklärmodelle zum Rechnen mit negativen Zahlen. Ein Plädoyer für eine Reduzierung der Vielfalt an Repräsentationen im Unterricht, in: Mathematik lernen, darstellen, deuten, verstehen. Didaktische Sichtweisen vom Kindergarten bis zur Hochschule, hg. von Jasmin Sprenger, Anke Wagner und Marc Zimmermann. Wiesbaden: Springer Spektrum, S. 191-204.

Weigand, Hans-Georg (2015): Begriffsbildung, in: Handbuch der Mathematikdidaktik, hg. von Regina Bruder et al. Berlin, Heidelberg: Springer Spektrum, S. 255-278.

Wittmann, Erich Ch. (2009): Grundfragen des Mathematikunterrichts, 6., neu bearb. Auflage. Wiesbaden: Vieweg + Teubner. (Didaktik des Mathematikunterrichts).

Wittmann, Gerald (2007): Mit Bruchzahlen experimentieren. Darstellungen wechseln – Grundvorstellungen entwickeln, in: Mathematik lehren (142), S. 17-23.

9 Anhang

Abbildungsverzeichnis:

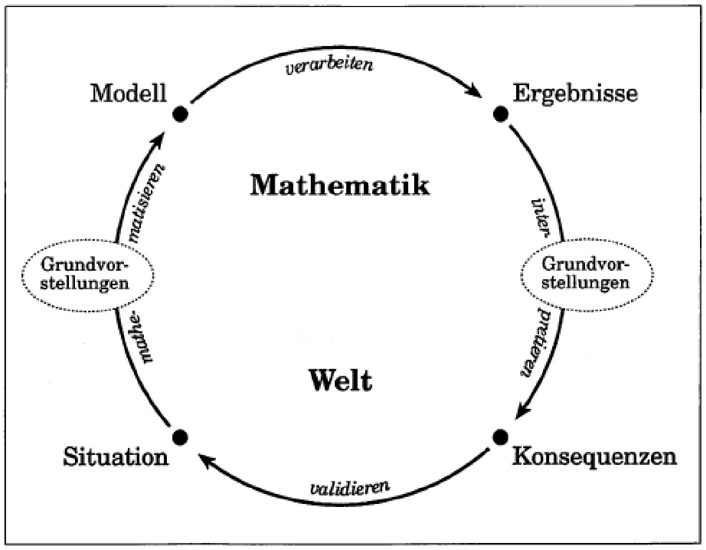


Abb. 1: Modellierungskreislauf, aus: vom Hofe (2003), S. 5

Abb. 2: Ausbilden von Grundvorstellungen, aus: vom Hofe (1995), S. 124

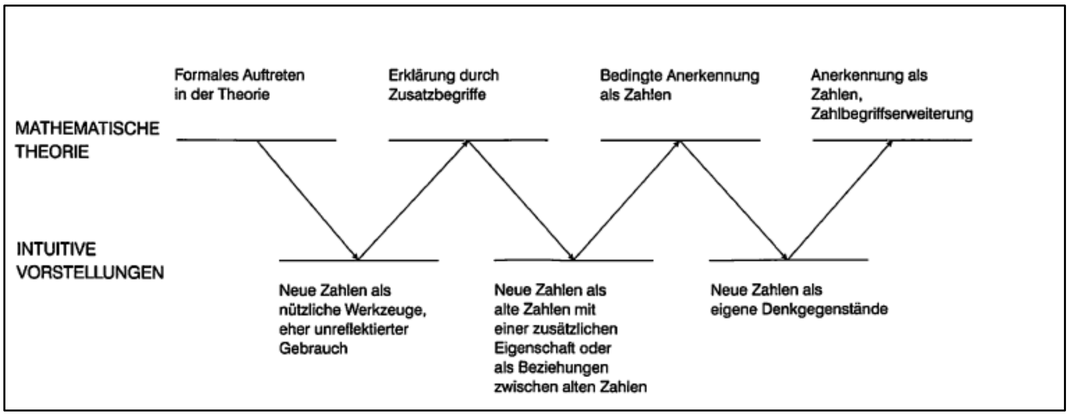


Abb. 3: Entstehung neuer Zahlen aus alten Zahlen, aus: Ulovec (2007), S. 11

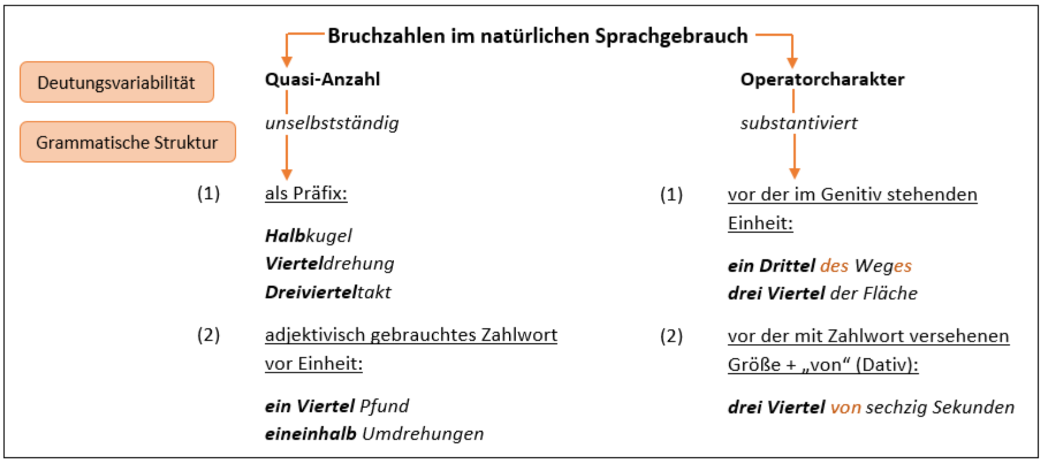


Abb. 4: Bruchzahlen im natürlichen Sprachgebrauch, erstellt in Anlehnung an: Seyfferth (1975)

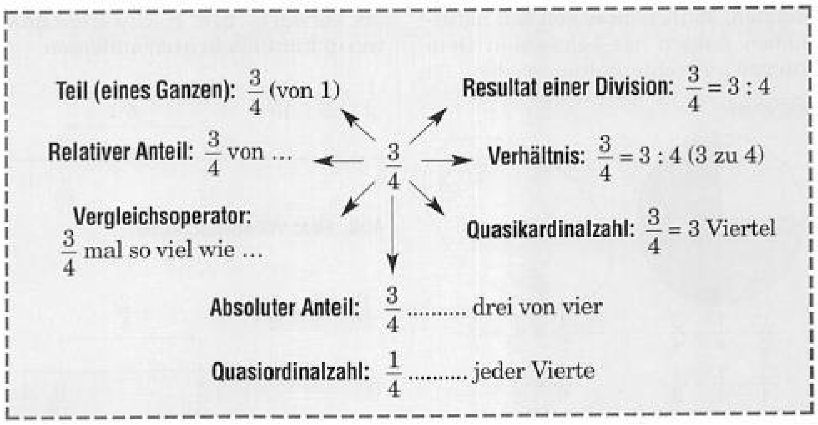


Abb. 5: Einige Deutungen einer Bruchzahl, aus: Malle (2004), S. 5

Vervielfachen

Das Dreifache von $\frac{2}{7}$

$$3 \cdot \frac{2}{7} = \frac{2}{7} + \frac{2}{7} + \frac{2}{7} = \frac{6}{7}$$

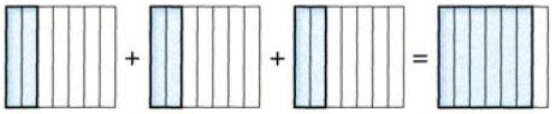


Abb. 6: Schulbuchbeispiel, aus: Mathematik Neue Wege 6, zit. nach Padberg & Wartha (2017), S. 105

Vor langer, langer Zeit wütete im Land der Bruchzahlen ein fürchterlicher Drachen. Er war aus dem Land der geometrischen Figuren ausgebrochen und versetzte seitdem die Brüche in Angst und Schrecken.
Täglich fraß er zehn von ihnen, wobei er Quadratzahlen im Zähler oder Nenner als besondere Leckerbissen bevorzugte. Flehten die Brüche um Gnade, lachte er hämisch und weidete sich an ihrer Angst.
Eines Tages hatte er sich etwas besonders Grausames ausgedacht; er machte ihnen falsche Hoffnungen auf eine Rettung. „Meine lieben Brüche", brüllte er, so laut, dass man es in jedem Winkel des Landes hören konnte, „ich gebe euch eine Chance! Ihr könnt mich loswerden! – Ich werde auf der Stelle verschwinden, wenn einer von euch mir eine Aufgabe stellt, die ich nicht lösen kann. Ihr habt genau drei Tage Zeit und dürft höchstens drei Aufgaben stellen."
Der erste Tag verstrich. Die Brüche waren entweder vor Anspannung wie gelähmt oder in tiefes Nachdenken versunken.
Am Morgen des zweiten Tages trat mutig $\frac{49}{81}$ vor den Drachen. „Nenne mir", sprach er, „einen Bruch, der zwischen $\frac{71}{1000}$ und $\frac{72}{1000}$ liegt!" $\frac{49}{81}$ war überzeugt, dass der Drachen diese Aufgabe nicht würde lösen können; denn er selber hatte die ganze Nacht über vergeblich nach einem Bruch zwischen $\frac{71}{1000}$ und $\frac{72}{1000}$ gesucht.
Aber, oh Schreck, es kam anders als erwartet: „ $\frac{143}{2000}$ ", schrie der Drachen. Und noch lauter brüllte er:
„Die erste Chance ist vertan,
Bruch gegen Drachen – welch ein Wahn!"
Die Brüche waren entsetzt, aber auch sauer auf $\frac{49}{81}$. „Das hättest du doch wissen müssen", warfen sie ihm vor, „dass $\frac{71}{1000}$ und $\frac{72}{1000}$ durch Erweitern mit 2 in $\frac{142}{2000}$ und $\frac{144}{2000}$ verwandelt werden können. Und schon passt $\frac{143}{2000}$ dazwischen!" $\frac{49}{81}$ sah das ein und schlich beschämt von dannen.
Die Zeit verging. Da, endlich, am Abend des zweiten Tages, wagte sich $\frac{121}{36}$ hervor, nicht ganz so sicher wie $\frac{49}{81}$ vorher.

„Nenne mir", sprach er zu dem Drachen, „zwei Brüche, für die Folgendes gilt: Sie haben gleiche Zähler und verschiedene Nenner und sind trotzdem gleich groß."
Leider überlegte der Drachen auch jetzt nicht lange. „ $\frac{0}{11}$ und $\frac{0}{12}$", schrie er. „Beide haben den gleichen Platz auf dem Zahlenstrahl, nämlich genau auf der 0." – Er grinste hämisch, holte tief Luft und brüllte:
„Die zweite Chance ist vertan.
Bruch gegen Drachen – welch ein Wahn!"
Der zweite Tag hatte keine Rettung gebracht. Der dritte Tag begann. Die Zeit schien zu rasen; nur noch fünf Stunden, noch vier Stunden,..., noch zehn Minuten!
Da trat $\frac{1}{2}$ vor den Drachen. „Nenne mir", sprach er, „den Bruch, der größer ist als ich und auf dem Zahlenstrahl mein nächster Nachbar ist."
Diesmal dauerte es länger. Der Drachen schien angestrengt zu überlegen. Mehrmals sah es aus, als wollte er etwas sagen. Die Brüche zitterten jedesmal vor Aufregung. Doch immer wieder schien der Drachen zu merken, dass seine geplante Antwort falsch sein würde. Und er schwieg.
$\frac{1}{2}$ wurde immer aufgeregter. Er würde gewinnen! Wie sie ihm alle dankbar sein würden!
Da wurde er jäh aus seinen Träumen gerissen. Der Drachen gab sich noch nicht geschlagen. „Ich nehme mir einen Tag Bedenkzeit", ließ er die Brüche wissen. „Morgen um die gleiche Zeit komme ich wieder und nenne euch den nächsten rechten Nachbarn von $\frac{1}{2}$!" Sprach's und verschwand.
„Die Bedenkzeit wird ihm nichts nützen", rief $\frac{1}{2}$ fröhlich. „Er kann es nicht schaffen. Wenn ihr wollt", wandte er sich an seine Freunde, „erkläre ich euch, warum ich keinen nächsten rechten Nachbarn habe. Ihr übrigens auch nicht." Natürlich wollten sie; und $\frac{1}{2}$ begann: „Nehmen wir einen Bruch, der größer ist als ich, etwa $\frac{13}{25}$. Jetzt bringen wir $\frac{13}{25}$ und mich durch Erweitern auf den Hauptnenner 50. $\frac{13}{25} = \frac{26}{50}$ und $\frac{1}{2} = \frac{25}{50}$. Nun sieht es zunächst so aus, als ob es keinen Bruch zwischen $\frac{26}{50}$ und $\frac{1}{2} = \frac{25}{50}$ gäbe. Aber Erweitern mit 2 ergibt die Brüche $\frac{52}{100}$ und $\frac{50}{100}$. Und dazwischen liegt z. B. $\frac{51}{100}$. Aber auch $\frac{51}{100}$ ist nicht mein nächster Nachbar; $\frac{101}{200}$ steht mir noch näher. Doch auch er ist nicht mein nächster rechter Nachbar. Ich kann mit der vorhin beschriebenen Methode einen näheren finden. Das Verfahren klappt immer. Probiert es einmal für euch und eure Nachbarn aus." Das taten sie; und alle merkten erfreut, dass $\frac{1}{2}$ Recht hatte.
So sahen sie gelassen dem nächsten Tag entgegen.
Aber der Drachen kam nicht. Er kam nie mehr. Er konnte die Aufgabe nicht lösen!
Jahrhunderte später wurde er entdeckt. Er saß auf einem Felsen und murmelte vor sich hin, ohne Pause, immer dasselbe.
Wer nahe genug heranging, konnte folgendes hören: „ $\frac{1}{2}$ hat keinen nächsten rechten Nachbarn, kein Bruch hat einen nächsten rechten Nachbarn, es gibt immer einen noch näheren; $\frac{1}{2}$ hat keinen nächsten rechten Nachbarn, kein...."
Und wenn der Drachen nicht gestorben ist, dann murmelt er noch heute.

Abb. 7: Das Märchen von dem bösen Drachen und dem klugen Bruch, aus: Paulitsch (1998), S. 48

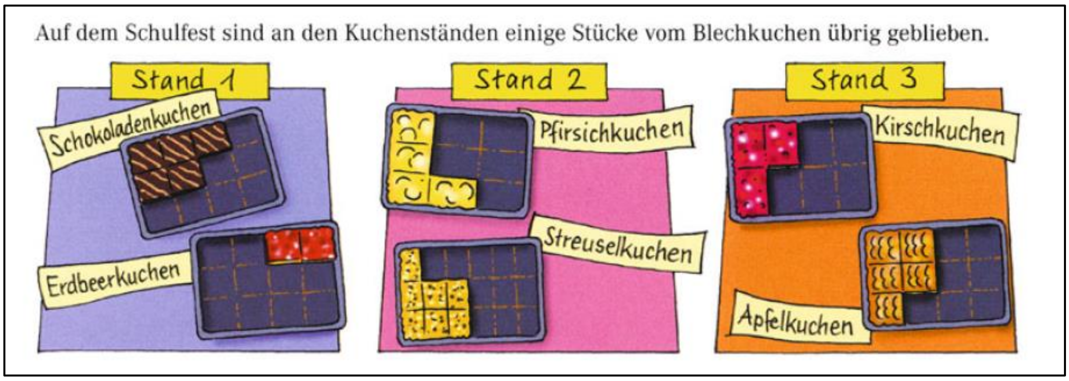


Abb. 8: Schulbuchbeispiel aus: Elemente der Mathematik 6, zit. nach Padberg & Wartha (2007), S. 74

Abb. 9: Beispiel aus einem Bruchalbum, aus: Tessars (2011), S. 7

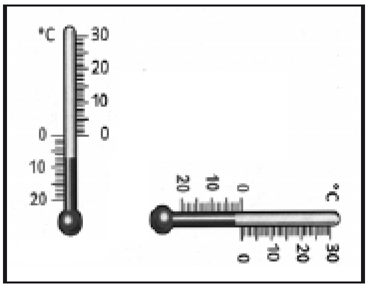
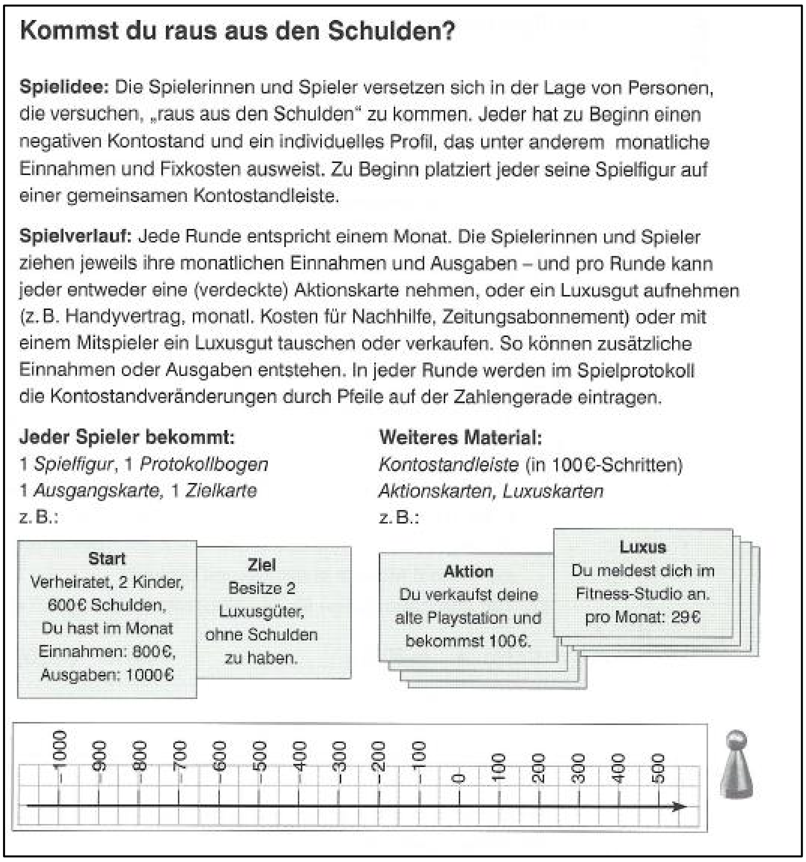


Abb. 10: Thermometer-Modell, aus: Wagner & Wörn (2013), S. 192



Kommst du raus aus den Schulden?

Spielidee: Die Spielerinnen und Spieler versetzen sich in die Lage von Personen, die versuchen, „raus aus den Schulden“ zu kommen. Jeder hat zu Beginn einen negativen Kontostand und ein individuelles Profil, das unter anderem monatliche Einnahmen und Fixkosten ausweist. Zu Beginn platziert jeder seine Spielfigur auf einer gemeinsamen Kontostandleiste.

Spielverlauf: Jede Runde entspricht einem Monat. Die Spielerinnen und Spieler ziehen jeweils ihre monatlichen Einnahmen und Ausgaben – und pro Runde kann jeder entweder eine (verdeckte) Aktionskarte nehmen, oder ein Luxusgut aufnehmen (z. B. Handyvertrag, monatl. Kosten für Nachhilfe, Zeitungsabonnement) oder mit einem Mitspieler ein Luxusgut tauschen oder verkaufen. So können zusätzliche Einnahmen oder Ausgaben entstehen. In jeder Runde werden im Spielprotokoll die Kontostandveränderungen durch Pfeile auf der Zahlengerade eintragen.

Jeder Spieler bekommt:
1 *Spielfigur*, 1 *Protokollbogen*
1 *Ausgangskarte*, 1 *Zielkarte*
z. B.:

Weiteres Material:
Kontostandleiste (in 100€-Schritten)
Aktionskarten, Luxuskarten
z. B.:

Abb. 11: Spielregeln der Lernumgebung „Raus aus den Schulden“, aus: Hussmann & Schindler (2014), S. 31

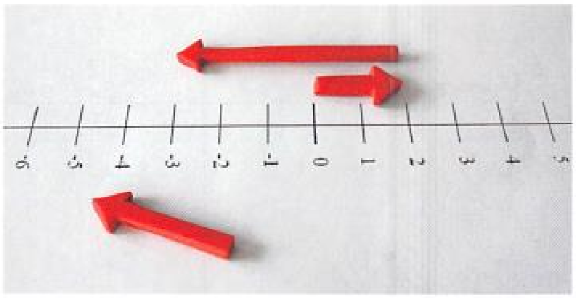


Abb. 12: Addition im Pfeilmodell, aus: vom Hofe & Hattermann (2014), S. 5

Multiplikation:

$4 \cdot 2 \quad = 8$	$2 \cdot (-4) \quad = -8$
$4 \cdot 1 \quad = 4$	$1 \cdot (-4) \quad = -4$
$4 \cdot 0 \quad = 0$	$0 \cdot (-4) \quad = 0$
$4 \cdot (-1) = ?$	$(-1) \cdot (-4) \quad = ?$
$4 \cdot (-2) = ?$	$(-2) \cdot (-4) \quad = ?$
…	…

$-4 \quad -4 \quad -4 \qquad\qquad +4 \quad +4 \quad +4$

Von Zeile zu Zeile nimmt in der linken Spalte der zweite Faktor um 1 ab und das Ergebnis um 4 ab. Fortgesetzt ergibt sich für die Multiplikation mit einer negativen Zahl:
$4 \cdot (-1) = -4, \qquad 4 \cdot (-2) = -8 \ldots$

In der rechten Spalte nimmt der erste Faktor um 1 ab und das Ergebnis um 4 zu. Für das Produkt zweier negativer Zahlen ergibt sich:
$(-1) \cdot (-4) = 4, \quad (-2) \cdot (-4) \; = 8 \ldots$

Abb. 13: Argumentation mit Hilfe von Permanenzreihen, aus: vom Hofe & Hattermann (2014), S. 7

➔ **AUFGABE 2**

Ein Lift in einem Hochhaus bewegt sich mit der annähernd gleich bleibenden Geschwindigkeit $4 \frac{m}{s}$ aufwärts. In der nebenstehenden Tabelle ist die Höhe des Lifts zu verschiedenen Zeitpunkten angegeben.

Zeit (in s)	Höhe (in m)
−2	−8 (2. Untergeschoss)
−1	−4 (1. Untergeschoss)
0	0 (Erdgeschoss)
1	4 (1. Stock)
2	8 (2. Stock)
3	12 (3. Stock)
…	…

a Aus der ersten Zeile kann man ablesen: 2 Sekunden vor dem Passieren des Erdgeschosses war der Lift 8 m unter dem Erdgeschoss. Interpretiere die übrigen Zeilen auf ähnliche Weise.

b Die Höhe h des Lifts zum Zeitpunkt t kann man nach folgender Formel berechnen: $h = 4 \cdot t$.
Überprüfe diese Formel anhand der Tabelle.

c Würde diese Formel auch für negative Werte von t gelten, wenn wir $(+a) \cdot (-b) = +(a \cdot b)$ gesetzt hätten?

d Welche der Festsetzungen $(+a) \cdot (-b) = +(a \cdot b)$ und $(+a) \cdot (-b) = -(a \cdot b)$ erscheint zweckmäßiger? Begründe die Antwort.

Abb. 14: Aufgaben zur Multiplikation ganzer Zahlen, aus: Malle (2007b), S. 56

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{Z}^+ & \rightarrow & \mathbb{Q}^+ & \rightarrow & \mathbb{R}^+ \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{Z} & \rightarrow & \mathbb{Q} & \rightarrow & \mathbb{R} \end{array}$$

Abb. 15: Weg der sequenziellen Zahlbereichserweiterung, aus: Bruno & Martinón (1999), S. 791

10 Eigenständigkeitserklärung

Ich versichere, dass ich, Melina Fabian, die Masterarbeit *Grundvorstellungen bei Zahlbereichserweiterungen – von* $\mathbb{N}$ *nach* $\mathbb{Q}^+$ *oder von* $\mathbb{N}$ *nach* $\mathbb{Z}$*?* selbstständig und nur mit den angegebenen Quellen und Hilfsmitteln (z. B. Nachschlagewerke oder Internet) angefertigt habe. Alle Stellen der Arbeit, die ich aus diesen Quellen und Hilfsmitteln dem Wortlaut oder dem Sinne nach entnommen habe, sind kenntlich gemacht und im Literaturverzeichnis aufgeführt. Weiterhin versichere ich, dass weder ich noch andere diese Arbeit weder in der vorliegenden noch in einer mehr oder weniger abgewandelten Form als Leistungsnachweise in einer anderen Veranstaltung bereits verwendet haben oder noch verwenden werden.

Die „Richtlinie zur Sicherung guter wissenschaftlicher Praxis für Studierende an der Universität Potsdam (Plagiatsrichtlinie) - Vom 20. Oktober 2010“, im Internet unter http://uni-potsdam.de/ambek/ambek2011/1/Seite7.pdf, ist mir bekannt.

Es handelt sich bei dieser Arbeit um meinen ersten Versuch.

Potsdam, 19.12.2019 Unterschrift