Universität Potsdam
Humanwissenschaftliche Fakultät

Masterarbeit

Zur Erlangung des Grades Master of Education (M. Ed.)
im Studiengang Lehramt für die Primarstufe

Denkhürden in den rationalen Zahlen –

Eine Analyse des Professionswissens von Lehramtsstudierenden

vorgelegt von: Birgit Piaskowski
Studiengang: Lehramt Primar

Erstprüferin: Fr. Dr. K. Reitz-Koncebovski
Zweitprüfer: Hr. P. Klöpping

eingereicht im November 2021

Online veröffentlicht auf dem
Publikationsserver der Universität Potsdam:
https://doi.org/10.25932/publishup-53277
https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:kobv:517-opus4-532777

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis

Tabellenverzeichnis

Abkürzungsverzeichnis

CK	content knowledge
COACTIV	Cognitive Activation in the Classroom: The Orchestration of Learning Opportunities for the Enhancement of Insightful Learning in Mathematics
EIS	enaktiv–ikonisch–symbolisch
GV	Grundvorstellung
N	Menge der natürlichen Zahlen
NNB	Natural Number Bias
PCK	pedagogical content knowledge
PSI-Potsdam	Professionalisierung – Schulpraktische Studien – Inklusion Potsdam
Q	Menge der rationalen Zahlen
R	Menge der reellen Zahlen
SRCK	school-related content knowledge
St	Studierender
SuS	Schülerinnen und Schüler
SWS	Semesterwochenstunden
Z	Menge der ganzen Zahlen

1 Einleitung

Der Pisa-Schock im Jahre 2000 sorgte sowohl bei Politikern als auch bei Lehrkräften und Eltern für Aufruhr, lagen doch die Leistungen der deutschen Schülerinnen und Schüler[1] im internationalen Vergleich im unterdurchschnittlichen Bereich. Die entfachte bildungspolitische Debatte gab Anlass für diverse Reformmaßnahmen und hat bis heute an Brisanz nicht verloren. Einen Aspekt dieser Debatte stellt die Frage der Professionalität der Lehrkräfte dar. Die Qualität des Unterrichts hängt unter anderem vom Professionswissen der Lehrkräfte ab. Der Grundstein des Professionswissen wird nachweislich in der universitären Ausbildung gelegt (Kunter & Baumert, 2011), weshalb der Qualität der universitären Ausbildung eine besondere Bedeutung zukommt. Im Rahmen der von Bund und Ländern unterstützten *Qualitätsoffensive Lehrerbildung* wird an der Universität Potsdam das Projekt *Professionalisierung – Schulpraktische Studien – Inklusion* (PSI) geführt. Die Professionalisierung beinhaltet eine Neukonzeption und Modifizierung von Lehrveranstaltungen. So wurde auch die Lehrveranstaltung *Arithmetik und ihre Didaktik I und II*, eine Grundlagenveranstaltung für angehende Mathematiklehrkräfte der Primarstufe, auf der Basis eigens hierfür entwickelter Gestaltungskriterien neu konzipiert. Die Gestaltungskriterien sehen eine Verknüpfung von fachwissenschaftlichem und fachdidaktischem Wissen vor (Reitz-Koncebovski, 2019). Einen Schwerpunkt der Lehrveranstaltung Arithmetik und ihre Didaktik II bildet das Thema der rationalen Zahlen, welches im Rahmenlehrplan Berlin-Brandenburg für den Unterricht der fünften und sechsten Klassen der Grundschule festgeschrieben ist und damit im Sinne des Spiralcurriculums die Basis für den Mathematikunterricht der weiterführenden Schule bildet. Zahlreiche Studien belegen, dass nicht nur SuS, sondern auch Studierende und Erwachsene Schwierigkeiten in der Bruchrechnung aufweisen. Die Zahlbereichserweiterung von den natürlichen Zahlen zu den rationalen Zahlen bringt Umbrüche in den bisher erworbenen Grundvorstellungen mit sich, so lassen sich bestehende Vorstellungen und Operationen aus den natürlichen Zahlen nicht ohne Weiteres auf die rationalen Zahlen übertragen. Diese notwendigen Umbrüche in den Grundvorstellungen bezeichnet Prediger (2004) als „epistemologische Denkhürden" (S. 2) im Rahmen von mathematischen Lernprozessen, deren Überwindung für ein fortschreitendes Verständnis von gravierender

[1] Zur Verbesserung der Lesbarkeit wird in dieser Masterarbeit die Formulierung Schülerinnen und Schüler mit SuS abgekürzt.

Bedeutung sei. Mit dem Ziel etwaige Denkhürden der Studierenden zu identifizieren und gleichzeitig die Effektivität der Gestaltungsprinzipien zu überprüfen sowie die Qualität der Lehrerausbildung stetig zu verbessern, untersucht die vorliegende Arbeit folgende Forschungsfrage:

Über welches fachwissenschaftliche Wissen sowie fachdidaktische Wissen verfügen die Lehramtsstudierenden der Universität Potsdam nach Besuch der Lehrveranstaltung Arithmetik und ihre Didaktik I und II im Bereich der rationalen Zahlen?

Zur Untersuchung der Forschungsfrage werden verschiedene Erhebungsinstrumente eingesetzt. Ein auf die Gestaltungskriterien ausgerichteter schriftlicher Wissenstest ermöglicht die Datenerhebung jener Studierenden, die die Lehrveranstaltung Arithmetik und ihre Didaktik I und II besucht haben. Die Durchführung zweier Gruppeninterviews liefert tiefere Einsichten in die Denkprozesse der Studierenden. Die schriftlichen und verbalen Daten werden computergestützt mithilfe der qualitativen Inhaltsanalyse ausgewertet. Die Interpretation der Ergebnisse nimmt Bezug zur Forschungsfrage und unterbreitet Vorschläge zur zukünftigen Konzeption der Lehrveranstaltung.
Die vorliegende Arbeit ist folgendermaßen aufgebaut: In Kapitel 2.1. werden zunächst theoretische Grundlagen bezüglich des Professionswissens dargestellt. Im Rahmen der Professionalisierung der Lehrerbildung Mathematik werden die Konzeption der Lehrveranstaltung und die zugrundeliegenden Gestaltungskriterien erläutert. In Kapitel 2.2. werden mathematische Grundlagen beschrieben, welche den Zahlbereich der rationalen Zahlen sowie die Besonderheiten der rationalen Zahlen im Vergleich zu den natürlichen Zahlen umfassen. Der aktuelle Forschungsstand wird anhand empirischer Studien vorgestellt. Anschließend erfolgt eine curriculare Einordnung. Kapitel 3 beinhaltet die Konkretisierung der Forschungsfrage und stellt die ausgewählten Erhebungs- und Auswertungsinstrumente vor. Kapitel 4 umfasst die deskriptive Darstellung der Daten. In Kapitel 5 erfolgt eine Zusammenfassung und Interpretation der Ergebnisse sowie der Rückschluss auf die Forschungsfrage. Darauf aufbauend werden Veränderungsvorschläge für die zukünftige Gestaltung der Lehrveranstaltung unterbreitet. Die Arbeit schließt mit einer Reflexion inklusive der kritischen Hinterfragung des methodischen Vorgehens und einem Ausblick auf zukünftige Forschungsfragen.

2 Theoretische Grundlagen

Um die Qualität der Lehrerausbildung zu beurteilen, muss zu Beginn die Frage geklärt werden, welches Wissen angehende Lehrkräfte tatsächlich erwerben sollen.

2.1 Professionswissen

Der Begriff des Professionswissens wird zunächst im Rahmen des Kompetenzmodells von Lehrkräften erläutert und anschließend in das Projekt der Lehrerbildung der Universität Potsdam eingeordnet.

2.1.1 Das Kompetenzmodell

Welche Kompetenzen sollte eine Lehrkraft besitzen, um qualitativ guten Unterricht zu erteilen und den SuS zu maximalem Lernerfolg zu verhelfen? Die Forschungsgruppe um COACTIV beantwortet die Frage mit einem mehrdimensionalen Kompetenzmodell. Dieses beschreibt die Professionelle Kompetenz von Lehrkräften als ein Zusammenspiel aus Professionswissen, Überzeugungen, motivationalen Orientierungen und Selbstregulation (s. Abbildung 1).

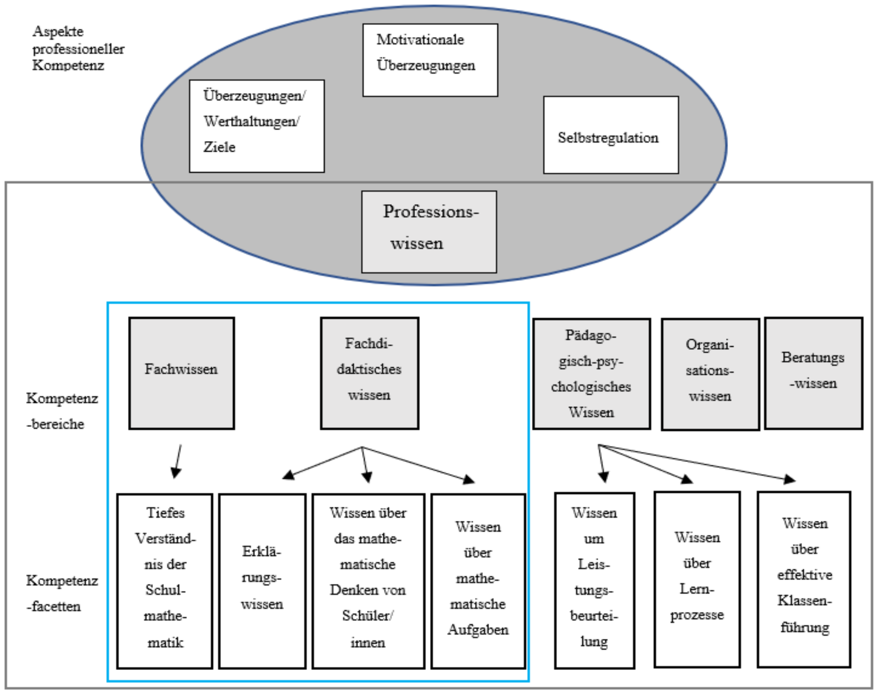


Abbildung 1: Das Kompetenzmodell von COACTIV mit Fokus auf das Professionswissen
(eigene Darstellung; vgl. Baumert & Kunter 2011, S. 32)

Bei den Kompetenzbereichen des Professionswissens handelt es sich um Fachwissen, fachdidaktisches Wissen, pädagogisch-psychologisches Wissen, Organisationswissen und Beratungswissen. Die einzelnen Kompetenzbereiche umfassen wiederum verschiedene Kompetenzfacetten. So zeichnet sich das Fachwissen durch ein tiefes Verständnis der Schulmathematik aus. Fachdidaktisches Wissen setzt sich aus Erklärungswissen, Wissen über mathematische Denkprozesse von SuS sowie Wissen über mathematische Aufgaben zusammen (Baumert & Kunter, 2011). Baumert und Kunter bezeichnen sowohl fachinhaltliches Wissen als auch fachdidaktisches Wissen als Kern der professionellen Kompetenz von Lehrkräften. Die Ergebnisse führen zu dem Schluss:

> Fachdidaktisches Wissen ist ein zentraler Schlüssel zum Unterrichtserfolg. Zu wissen, wie man bestimmte Fachinhalte auf unterschiedliche Art und Weise erklärt, was Schülerinnen und Schüler über die unterrichteten Inhalte denken und wo ihre typischen Schwierigkeiten liegen, ermöglicht adäquate Aufgabenauswahl und erleichtert es, Lernende beim Auftreten von Verständnisschwierigkeiten individuell zu unterstützen. (Kunter & Baumert, 2011, S. 353)

Ein solides Fachwissen stellt nach Baumert und Kunter die Bedingung für den Erwerb von fachdidaktischem Wissen dar und ist damit von ebenso großer Bedeutung. Es wird als „profundes mathematisches Verständnis des Hintergrunds des Schulstoffs" (Baumert & Kunter, 2011, S. 37) aufgegriffen, welches „sein Fundament in der akademischen Referenzdisziplin" (ebd.) hat, jedoch einen eigenen Wissensbereich darstellt:

> Dieses professionelle Fachwissen schließt die souveräne Beherrschung des Schulstoffs selbst mit ein; aber weder solches Schulwissen, geschweige denn mathematisches Alltagswissen genügen, um die mathematischen Herausforderungen zu bewältigen, die sich Lehrkräften bei der Vorbereitung und Durchführung des Unterrichts stellen. (Baumert & Kunter, 2011, S. 37)

In der Analyse des Professionswissens von Mathematiklehrkräften legt die Forschungsgruppe von COACTIV zugrunde, dass Kompetenzen grundsätzlich vermittelbar sind (ebd.). Damit kommt der universitären Ausbildung eine entscheidende Bedeutung zu. „COACTIV betont nicht nur die Erwerbbarkeit und Veränderbarkeit professionellen Wissens, sondern auch seine Ausbildungsabhängigkeit." (Baumert et al., 2011, S. 11) Obgleich auch kognitive und nicht kognitive Eingangsvoraussetzungen von Lehramtsstudierenden für den Kompetenzerwerb eine Rolle spielen, lassen sich Ursachen für Kompetenzunterschiede von Lehrkräften vor allem auf Unterschiede in der Qualität der Ausbildung zurückführen. Eine defizitäre Ausbildung kann auch durch spätere Berufspraxis nicht kompensiert werden (Kunter et al., 2011).

Es folgen Ausführungen hinsichtlich der Professionalisierung in der Lehrerbildung an der Universität Potsdam.

2.1.2 Professionalisierung in der Lehrerbildung Mathematik

Das Projekt *Qualitätsoffensive Lehrerbildung*, welches 2015 an der Universität Potsdam startete, umfasst die drei Schwerpunkte Professionalisierung – Schulpraktische Studien – Inklusion, kurz PSI-Potsdam genannt. Der Schwerpunkt Professionalisierung zielt auf die Verbesserung des Professionswissen von Lehramtsstudierenden ab. Als Antwort auf die Frage, über welches Wissen (zukünftige) Lehrpersonen verfügen sollen, wurde das Modell des Professionswissens von Lehrkräften nach Baumert und Kunter (2011) weiterentwickelt und um das fachübergreifende Konstrukt des erweiterten Fachwissens für den schulischen Kontext ergänzt (Woehlecke et al., 2017; Reitz-Koncebovski, Kortenkamp & Goral, 2018).

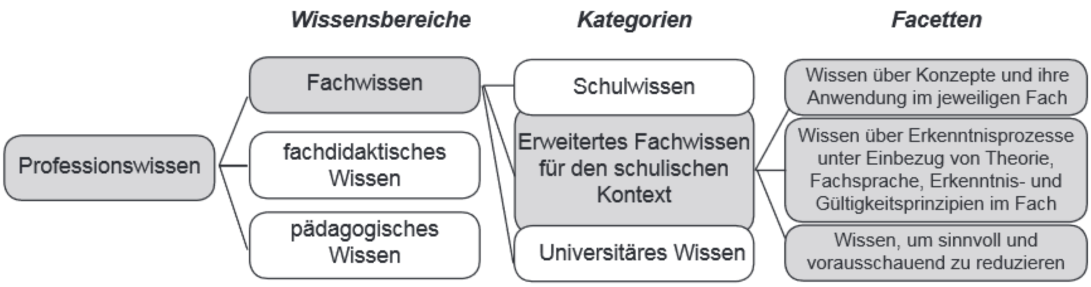


Abbildung 2: Einordnung des erweiterten Fachwissens für den schulischen Kontext in das Modell des Professionswissens (Woehlecke et al, 2017)

Abbildung 2 veranschaulicht die Einordnung des erweiterten Fachwissens für den schulischen Kontext in das Fachwissen. Nach Woehlecke et al. wird das erweiterte Fachwissen für den schulischen Kontext weniger als Niveaustufe oder hierarchische Abstufung verstanden, sondern als Kategorie des Fachwissens, welche Schulwissen und universitäres Wissen verbindet. Es beinhaltet ein universitär vermitteltes Fachwissen, welches sich professionsspezifisch auf den schulischen Kontext richtet und einerseits an das Schulwissen der Studierenden anknüpft, andererseits auf die zukünftige Praxis der Lehrtätigkeit vorbereitet und damit der doppelten Diskontinuität entgegenwirkt:

> Das erweiterte Fachwissen für den schulischen Kontext ist eine Art Überblickswissen, welches das Wissen um übergeordnete Konzepte des Fachs, das Wissen um fachliche Arbeitsweisen und Erkenntniswege sowie dasjenige Wissen einschließt, das eine Lehrperson benötigt, um sinnvoll und vorausschauend zu reduzieren. (Reitz-Koncebovski, Hermanns, Kortenkamp & Kuzle, 2020, S. 26)

Auch Heinze, Dreher, Lindmeier und Niemand (2016) identifizierten neben dem akademischen Fachwissen (CK) und dem fachdidaktischen Wissen (PCK) ein mathematik-spezifisches Fachwissen im schulischen Kontext, school-related content knowledge (SRCK) genannt, und wiesen deren Bedeutsamkeit und Unterscheidbarkeit empirisch nach. In Anlehnung an die Modelle von Woehlecke et al. sowie Heinze et al. wurden im Rahmen des PSI-Projektes Gestaltungsprinzipien als Grundlage für die Konzeption von Lehrveranstaltungen entwickelt, welche im folgenden Abschnitt beschrieben werden.

2.1.3 Die Gestaltungsprinzipien

Die Gestaltungsprinzipien greifen folgende Facetten des berufsfeldspezifischen Fachwissens auf:

> - Wissen über Konzepte, die sinnstiftend mit Erklärungen und Beispielen vernetzt werden – bzw. explizites Wissen über curriculare Strukturen und deren Begründungen, die sich in der Regel auf fundamentale Ideen der Mathematik beziehen,
>
> - Wissen über fachliche Arbeitsweisen und Erkenntniswege, verbunden mit dem Wissen über die Genese von Begriffen und Theorien […], d.h. Wissen über Zusammenhänge zwischen schulischer und akademischer Mathematik in bottom-up-Richtung
>
> - Wissen, um sinnvoll und vorausschauend zu reduzieren – sodass Mathematik anschlussfähig im Sinne des Spiralprinzips gelehrt werden kann, d.h. Wissen über Zusammenhänge zwischen akademischer und schulischer Mathematik in top-down-Richtung (Reitz-Koncebovski et al., 2018, S. 177f.)

Aus der Analyse und Weiterentwicklung der Lehrveranstaltungen „Elemente der Arithmetik” und „Kapitel der Elementarmathematik” gingen im Rahmen des PSI-Projektes die neuen Lehrveranstaltungen „Arithmetik und ihre Didaktik I” sowie „Arithmetik und ihre Didaktik II” hervor, welche für das Fach Mathematik im Lehramtsstudium der Primarstufe in den Studienverordnungen ab 2018 verankert wurden. Mit Beginn des 1. Januar 2019 schloss die zweite Förderphase des Projektes an. Das hierin eingebettete mathematikspezifische Projekt wird unter den Namen SPIES-M (Spiralcurriculum und Erweitertes Schulwissen im Fach Mathematik) geführt und fokussiert die Implementierung des erweiterten Fachwissens für den schulischen Kontext sowie die Neuentwicklung von Lehrveranstaltungen, welche Fachwissenschaft und Fachdidaktik verbinden. Es finden Beobachtungen der neuen Lehrveranstaltungen durch sog. Spies (Spione) sowie die Evaluation mittels geeigneter Testinstrumente statt. Übergeordnetes Ziel ist der Zuwachs

des Professionswissens der angehenden Lehrkräfte im Sinne des erweiterten Fachwissens für den schulischen Kontext (Reitz-Koncebovski et al., 2020).
Die Gestaltungsprinzipien setzen sich aus den folgenden fünf Strukturelementen zusammen:

(1) *Fundamentale Ideen der Mathematik verfolgen*
(2) *Mathematik als Handlung erfahrbar machen*
(3) *Grundprinzipien der Mathematikdidaktik verfolgen*
(4) *pädagogische Doppeldecker*
(5) *Lernprozesse von SuS erfahrbar machen* (Reitz-Koncebovski, 2019a)

Die Strukturelemente sind einerseits der fachwissenschaftlichen oder fachdidaktischen Ebene zuzuordnen, andererseits wird zwischen Inhaltsebene und Prozessebene differenziert (s. Tabelle 1). Zusätzlich zu den fünf Strukturelementen findet das Querschnittsprinzip Anwendung, welches auf einer metakognitiven Ebene Zusammenhänge explizit macht.

	Inhalt	Prozess	
Fachwissenschaft	Fundamentale Ideen	Mathematik als Handlung	Querschnitt
Fachdidaktik	Grundprinzipien der Mathematikdidaktik	Pädagogischer Doppeldecker	
		Lernprozesse von SuS	

Tabelle 1: Die Gestaltungsprinzipien (eigene Darstellung auf Basis von Reitz-Koncebovski, 2019a)

Mit dem Begriff *Fundamentale Ideen* werden grundlegende Prinzipien und Denkweisen aus der Fachwissenschaft bezeichnet. Auf horizontaler Ebene sind Fundamentale Ideen in verschiedene Gebiete der Mathematik übertragbar und umfassend anwendbar. Die vertikale Ebene ermöglicht den Einsatz auf verschiedenen Niveaustufen von der Elementarschule bis zur Hochschule und spiegelt damit das Spiralprinzip wider (Krauthausen & Scherer, 2007). Winter beschreibt Fundamentale Ideen als „Ideen, die starke Bezüge der Wirklichkeit haben, verschiedene Aspekte und Zugänge aufweisen, sich durch hohen inneren Beziehungsreichtum auszeichnen und in den folgenden Schuljahren immer wieder ausbauen lassen" (1976, S.15). Beispiele für Fundamentale Ideen sind das Stellenwertsystem sowie das Bündeln in verschiedenen Systemen. Das Gestaltungsprinzip

Mathematik als Handlung zielt darauf ab, Mathematik als Prozess und Handlung zu erfahren und zu verstehen. Es beinhaltet typische Arbeitsweisen der Mathematik wie das Führen von Beweisen, die Bildung und Überprüfung von Hypothesen, das Lösen von Problemen oder die Entwicklung von Lösungsstrategien. Das Gestaltungsprinzip *Grundprinzipien der Mathematikdidaktik verfolgen* beinhaltet den Bezug didaktischer Inhalte auf grundlegende didaktische Prinzipien durch unterschiedliche Themengebiete hindurch. Hervorzuheben sind hier Grundvorstellungen, das EIS-Prinzip, der Wechsel zwischen verschiedenen Darstellungsebenen, die Verwendung analoger wie auch digitaler Medien sowie der Lebensweltbezug. Das Gestaltungsprinzip *Lernprozesse von Schülerinnen und Schülern erfahrbar machen* versetzt die Studierenden durch geeignete Lernumgebungen in die Rolle der SuS. Dadurch werden Lernhürden aufgezeigt und Lernprozesse reflektiert. Das Gestaltungsprinzip *Pädagogischer Doppeldecker* sieht die Umsetzung der didaktischen Grundprinzipien (Darstellungswechsel, Eis-Prinzip, ...) in der Lehr-veranstaltung selbst vor. Der Begriff Pädagogischer Doppeldecker steht für das Prinzip der direkten praktischen Erfahrbarkeit dessen, was inhaltlich vermittelt werden soll. Auf der Metaebene werden die Inhalte und Handlungen der einzelnen Gestaltungsprinzipien explizit gemacht. Dies gelingt u.a. durch das Ziehen von vertikalen und horizontalen Querverbindungen, die Einnahme verschiedener Perspektiven oder der Anfertigung visueller Darstellungen wie Mindmaps, Organizer und Tabellen zur Veranschaulichung von Überblickswissen (vgl. Reitz-Koncebovski et al., 2018; Reitz-Koncebovski, 2019a).

Die beschriebenen Gestaltungskriterien liegen der Konzeption der Lehrveranstaltungen „Arithmetik und ihre Didaktik I" sowie „Arithmetik und ihre Didaktik II zugrunde". Die Lehrveranstaltungen wurden erstmals im Wintersemester 2018/19 sowie im Sommersemester 2019 durchgeführt und beinhalten folgende Elemente:

- eine wöchentliche Vorlesung (2 SWS)
- eine wöchentliche Übung in Seminarstärke von 20-30 Studierenden mit aktiver Teilnahme zur Vertiefung und Erweiterung der Vorlesungsinhalte (2 SWS)
- wöchentliche Hausaufgaben, welche in Kleingruppen (i.d.R. 3 Studierende) bearbeitet werden
- wöchentliche Hausaufgabentutorium
- wöchentliche Selbsttests zu den thematisierten Inhalten

- eine digitale Plattform, auf der Vorlesungsvideos, Übungsfolien, Arbeitsblätter, zusätzliche Literatur, digitale Tools sowie Foren zum gegenseitigen Austausch zur Verfügung stehen
- Klausurvorbereitungstutorien (Reitz-Koncebovski et al., 2018)

Aufgrund der pandemischen Situation wurden die Lehrveranstaltungen im Wintersemester 2020/21 sowie Sommersemester 2021 online durchgeführt. Die Effektivität der Gestaltungskriterien soll in der vorliegenden Arbeit anhand des Professionswissens der Studierenden bezüglich der Eigenschaften von rationalen Zahlen überprüft werden. In diesem Rahmen ist es zunächst notwendig, die mathematischen Grundlagen zu erläutern.

2.2 Mathematische Grundlagen

Da das Wissen über rationale Zahlen das zentrale Thema der Forschungsarbeit darstellt, ist es unerlässlich, grundlegende mathematische Begriffe zu definieren und für die Forschungsarbeit relevante Zusammenhänge darzustellen.

2.2.1 Rationale Zahlen

Die Zahlbereichserweiterung von den natürlichen bzw. ganzen Zahlen zu den rationalen Zahlen ermöglicht die uneingeschränkte Ausführung von Divisionsaufgaben sowie die eindeutige Lösung linearer Gleichungen der Form $a = b \cdot x$ (Büchter & Padberg, 2018, S. 293). Rationale Zahlen werden auch Bruchzahlen genannt, doch soll zunächst geklärt werden, was unter einem Bruch zu verstehen ist. Hierbei liegt die Vorstellung „Teil eines Ganzen" nahe: Teilt man eine Pizza in vier gleich große Stücke, dann stellt jedes Teil ein Viertel der Pizza dar (Beutelspacher, 2018). Die mathematische Definition eines Bruchs lautet:

> „Seien a und b ganze Zahlen mit $b \neq 0$. Dann ist das geordnete Paar (a, b) ein Bruch. Wir schreiben dafür auch a/b. Die Zahl a heißt Zähler, die Zahl b wird Nenner des Bruchs a/b genannt." (Beutelspacher, 2018, S. 124)

Von dem Begriff Bruch ist der Begriff der Bruchzahl abzugrenzen. Die Herleitung erfolgt über den Begriff der äquivalenten Brüche:

„Wir nennen zwei Brüche äquivalent, falls die Gleichung ab´ = a´b gilt. Wenn die Brüche a/b und a´/b´ äquivalent sind, dann schreiben wir dafür a/b ∼ a´/b´." (Beutelspacher, 2018, S. 126)

Der Zusammenhang soll an einem Beispiel verdeutlicht werden: Teilt man eine Pizza in vier gleich große Teile, um vier Kindern gerecht zu werden, so erhält jedes Kind 1/4 der Pizza. Teilt man die Pizza in acht gleich große Teile und verteilt diese auf vier Kinder, so erhält jedes Kind 2 Stücke, also 2/8 und damit denselben Anteil wie zuvor. Es gilt: 1/4 ∼ 2/8, da 1 · 8 = 4 · 2 (Beutelspacher, 2018). Die Relation „ist äquivalent zu" zerlegt die Menge aller Brüche in Äquivalenzklassen jeweils zueinander äquivalenter oder gleichwertiger Brüche. Diese Klassen werden als Bruchzahl bezeichnet (Büchter & Padberg, 2019, S. 295). Die formale Definition lautet:

„Die Bruchzahl $\frac{a}{b}$ ist die Menge aller zu dem Bruch a/b äquivalenter Brüche.
In einer Formel: $\frac{a}{b}$ = a´/b´|a´/b´∼ a/b}." (Beutelspacher, 2018, S. 128)

Ein Bruch stellt demnach eine Schreibweise bzw. einen Repräsentanten für eine Bruchzahl dar (Beutelspacher, 2018). „Eine gegebene Bruchzahl ist **eine** Zahl. Sie besitzt unendlich viele Darstellungen durch Brüche" (Büchter & Padberg, 2018, S. 295). In der vorliegenden Arbeit wird zwischen den Schreibweisen a/b und $\frac{a}{b}$ nicht differenziert. Die Unterscheidung der Begriffe Bruch und Bruchzahl hingegen ist von Bedeutung.

Bruchzahlen werden auch rationale Zahlen genannt. Das lateinische Wort *ratio* bedeutet Verhältnis. Der Buchstabe Q als Abkürzung für Quotient bezeichnet die Menge der rationalen Zahlen:

Q = { $\frac{a}{b}$ | a, b ∈ Z, b≠ 0} (Beutelspacher, 2018, S. 128)

Die rationalen Zahlen enthalten die ganzen Zahlen, somit gilt Z ⊆ Q.
Die Äquivalenz von Brüchen ist eng verbunden mit dem Erweitern und Kürzen von Brüchen. Die inhaltliche Vorstellung des Erweiterns entspricht dem Verfeinern, die inhaltliche Vorstellung des Kürzens entspricht dem Vergröbern (Beutelspacher, 2018).

Es heißt, dass „der Bruch a´/b´ eine Erweiterung von a/b ist, […], wenn es eine ganze Zahl q gibt mit a´= qa und b´= qb." (Beutelspacher, 2018, S. 126)

Die Umkehrung des Erweiterns ist das Kürzen.

Für bestimmte Rechenoperationen, beispielsweise die Addition, ist es notwendig, Brüche „gleichnamig" zu machen.

„Wir nennen zwei Brüche gleichnamig, falls ihre Nenner gleich sind. Genauer: Zwei Brüche a/b und c/d werden gleichnamig genannt, falls b = d ist." (Beutelspacher, 2018, S. 129)

Zwei Brüche lassen sich gleichnamig machen, indem auf äquivalente Brüche zurückgegriffen wird. Der gemeinsame Nenner kann beispielsweise durch das Produkt der Nenner der beiden Brüche gebildet wird. Das Erweitern von Brüchen stellt ein zentrales Thema der Forschungsfrage zum Wissen über die Dichte der Bruchzahlen dar. Das Wissen über weitere Rechenoperationen spielt in der vorliegenden Untersuchung eine untergeordnete Rolle und wird deshalb an dieser Stelle zusammengefasst dargestellt:

- Gleichnamige Brüche werden addiert, indem ihre Zähler addiert werden.
- Zwei Bruchzahlen werden multipliziert, indem man Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner multipliziert.
- Wird eine positive rationale Zahl $\frac{a}{b}$ mit einer positiven Bruchzahl > 1 multipliziert, dann ist das Produkt größer als $\frac{a}{b}$.
- Wird eine positive rationale Zahl $\frac{a}{b}$ mit einer positiven Bruchzahl < 1 multipliziert, so ist das Produkt kleiner als $\frac{a}{b}$ (Beutelspacher, 2018).
- Ein Bruch wird durch einen anderen Bruch dividiert, indem man mit dem Kehrwert des Bruches multipliziert (Padberg und Wartha, 2017).
- Jede ganze Zahl z kann als Bruchzahl $\frac{z}{1}$ dargestellt werden (Beutelspacher, 2018).

An dieser Stelle sei lediglich kurz aufgeführt, dass Bruchzahlen als Brüche oder Dezimalbrüche notiert und gesprochen werden können. Jeder Bruch (auch gemeiner Bruch genannt) lässt sich als endlicher Dezimalbruch (z.B. 0,5) oder periodischer Dezimalbruch (z.B. $0,\overline{3}$) darstellen (Padberg & Wartha, 2017). In der Lehrveranstaltung wurde der Begriff Dezimalbruch verwendet, in der Literatur ist ebenfalls der Begriff Dezimalzahl zu finden. Da das Wissen über Dezimalbrüche in der vorliegenden Untersuchung von untergeordnetem Interesse ist, wird an dieser Stelle auf weitere Ausführungen verzichtet.

Im Vergleich zu den natürlichen (und auch ganzen Zahlen) besitzen rationale Zahlen eine Reihe von besonderen Eigenschaften. Die für die Forschungsfrage relevanten Unterschiede der Zahlbereiche werden im Folgenden erläutert.

2.2.2 Besondere Eigenschaften der rationalen Zahlen

1) Ordnung der Bruchzahlen auf der Zahlengeraden

Entgegen den natürlichen Zahlen lassen sich Bruchzahlen nicht so ohne Weiteres in Reih und Glied auf der Zahlengeraden ordnen. Die Ordnung der natürlichen Zahlen lässt sich gut mit dem Bild einer Perlenkette veranschaulichen:

> Die Zahlen folgen, mit der kleinsten Zahl (0 oder 1) beginnend, der Größe nach Stück für Stück aufeinander, und es gibt kein Ende, keine größte Zahl. Die Zahlen sind wie Perlen auf einer Schnur aufgereiht, wobei es eine Anfangsperle aber keine letzte gibt, vielmehr gibt es immer weitere Perlen, wie weit man auch schreitet. (Winter, 1999, S. 29)

Zwei Bruchzahlen $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ lassen sich dahingehend vergleichen, dass eine Aussage möglich ist, ob $\frac{a}{b}$ kleiner als $\frac{c}{d}$, größer als $\frac{c}{d}$ oder genauso groß wie $\frac{c}{d}$ ist. Demnach lassen sich Bruchzahlen zwar der Größe nach ordnen, jedoch nicht in der Form von Perlen auf einer Schnur wie die natürlichen Zahlen. Die nächste Bruchzahl von $\frac{1}{3}$ ist beispielsweise nicht $\frac{2}{3}$, da z.B. $\frac{1}{2}$ der Größe nach näher an $\frac{1}{3}$ liegt. $\frac{1}{2}$ stellt aber auch nicht die nächste Bruchzahl nach $\frac{1}{3}$ dar, da z.B. $\frac{5}{12}$ wiederum näher an $\frac{1}{3}$ als $\frac{1}{2}$ liegt.

> Im Gegensatz zu den Verhältnissen im Bereich der natürlichen Ordnung liegen die Bruchzahlen der Größe nach nicht diskret (voneinander getrennt), sondern dicht, was bedeutet: Zwischen zwei verschiedenen Bruchzahlen, und sei ihre Differenz noch so gering, liegen stets unendlich viele weitere Bruchzahlen. (Winter, 1999, S. 29)

2) Nimmt man aufgrund der Dichte der rationalen Zahlen intuitiv an, dass es mehr rationale Zahlen als natürliche Zahlen gibt und damit die Mächtigkeit der natürlichen und rationalem Zahlen ungleich ist, so kann diese Annahme mithilfe des Cantor´schen Diagonalverfahrens widerlegt werden. Cantor ist es gelungen, eine Anordnung der Bruchzahlen zu finden, die eine Eins-Zu-Eins-Zuordnung der Bruchzahlen zu den natürlichen Zahlen ermöglicht und somit die Gleichmächtigkeit der beiden Zahlbereiche belegt. Abbildung 3 zeigt die Anordnung exemplarisch anhand der positiven Bruchzahlen.

Äquivalente Brüche werden nicht mitgezählt und sind daher in der Darstellung durchgestrichen (Büchter & Padberg, 2019).

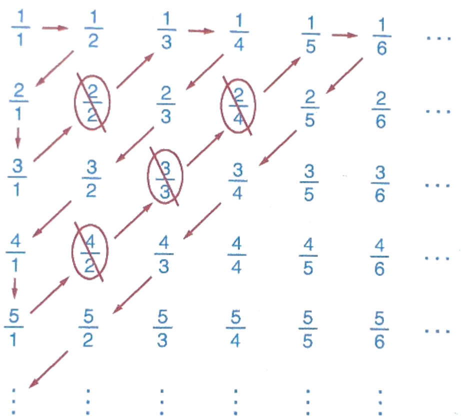


Abbildung 3: Das Cantor´sche Diagonalverfahren (Büchter & Padberg, 2019, S. 298)

Mithilfe dieser Anordnung lässt sich jeder Bruchzahl eine natürliche Zahl zuordnen (s. Tabelle 2), was zu dem Ergebnis führt, dass beide Mengen abzählbar unendlich und gleichmächtig sind (Büchter & Padberg, 2019).

Nummer der Bruchzahl	1	2	3	4	5	6	7	…
Bruchzahl	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{1}$	$\frac{3}{1}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{3}$	…

Tabelle 2: Nummerierung der Bruchzahlen (Büchter & Padberg, 2019, S. 298)

3) Die in Punkt 1) beschriebene Dichte der Bruchzahlen führt dazu, dass rationale Zahlen im Gegensatz zu den natürlichen Zahlen keinen direkten Vorgänger oder Nachfolger besitzen.

4) Während der Größenvergleich von zwei natürlichen Zahlen direkt anhand der Ziffern-schreibweise erfolgen kann, ist dies bei den Bruchzahlen nicht ohne weiteres möglich, da der Blick sowohl auf die Größe der Anteile (Nenner) als auch auf die Anzahl der Teile (Zähler) gerichtet werden muss. Im Falle von Brüchen mit gleichen Zählern bedeutet eine größere Ziffer im Nenner eine kleinere Bruchzahl. So gilt $\frac{1}{6} < \frac{1}{5}$, obwohl 6 > 5 (Padberg & Wartha, 2017).

5) Brüche können beliebig oft erweitert werden, indem sowohl Zähler als auch Nenner mit

der gleichen Zahl multipliziert werden (vgl. 2.2.1). Das führt zu einer Veränderung der Zahldarstellung. Während die Notation von natürlichen Zahlen eindeutig ist, gibt es in den rationalen Zahlen unendlich viele Möglichkeiten, eine Bruchzahl in Form jeweils äquivalenter Brüche darzustellen (Padberg & Wartha, 2017).

6) Während sich die Grundvorstellungen bei der Addition und Subtraktion von den natürlichen Zahlen weitestgehend auf die rationalen Zahlen übertragen lassen, fordern sowohl Multiplikation als auch Division massive Umbrüche in den Grundvorstellungen. Zentrale Grundvorstellungen der Multiplikation in den natürlichen Zahlen stellen die sukzessive Addition oder auch Mengenvereinigung dar. Diese Grundvorstellung lässt sich in den rationalen Zahlen nur bei dem Sonderfall „Natürliche Zahl mal Bruch" (Padberg & Wartha, 2017, S. 152) anwenden. In den rationalen Zahlen lässt sich die Multiplikation hauptsächlich über die von-Sprechweise als „Anteil vom Anteil" (ebd.) beschreiben.

> Als Konsequenz hiervon gilt aber plötzlich eine zentrale Gewissheit aus ℕ nicht mehr, dass nämlich Multiplizieren (außer mit 0 und 1) stets vergrößert. Bei den Bruchzahlen kann das Ergebnis der Multiplikation zweier Brüche sowohl größer als auch kleiner als die beiden Faktoren sein. Oder es kann auch von der Größe her zwischen diesen beiden Faktoren liegen. (Padberg & Wartha, 2017, S. 152)

Ebenso massive Umbrüche liegen in der Division vor. Die bevorzugten Grundvorstellungen der Division in den natürlichen Zahlen, Verteilen und Aufteilen, lassen sich nur sehr eingeschränkt auf die rationalen Zahlen übertragen. Hingegen ist das Dividieren im Zahlenraum der rationalen Zahlen uneingeschränkt möglich (mit Ausnahme der Null), selbst wenn der Dividend kleiner als der Divisor ist. Divisionen (außer durch 1) können im Zahlbereich der rationalen Zahlen entgegen den bisherigen Vorstellungen zu einem größeren oder kleineren Ergebnis führen (Padberg & Wartha, 2017).

7) Zentrale Grundvorstellungen dienen dazu, Zahlen grundlegend zu verstehen und in der Schule einzuführen. Die Grundvorstellungen zu den rationalen Zahlen unterscheiden sich deutlich von denen der natürlichen Zahlen. Da die vorliegende Arbeit jedoch nicht explizit die Grundvorstellungen zu Brüchen untersucht, sollen an dieser Stelle lediglich unterschiedliche Grundvorstellungen benannt werden. Brüche lassen sich als Anteil eines Ganzen, als Maßzahl, als Operator, als Verhältnis, als Quotient, als Lösung linearer Gleichungen oder quasikardinal verstehen (Padberg & Wartha, 2017).

Die beschriebenen Unterschiede der Zahlbereiche stellen eine besondere Herausforderung im Erwerb des Bruchzahlverständnisses dar, welches in verschiedenen Studien untersucht wurde.

2.2.3 Empirische Studien

Es existieren verschiedene Studien zum Bruchzahlverständnis bezüglich Größenvorstellungen, Rechenoperationen oder der Dichte von rationalen Zahlen. Da das Wissen über die Dichte von Bruchzahlen im Fokus der vorliegenden Arbeit steht, sind Studien mit ähnlichem Schwerpunkt von hohem Interesse. Nach Wartha (2007) setzt die Angabe eines Bruchs zwischen zwei gegebenen Brüchen „ein tiefes Verständnis von der Anordnung der Bruchzahlen voraus. Die Eigenschaft der Dichte ist hierbei grundlegend.” (S. 78). Auch Schadl (2020) behauptet: „Die Vorstellung, dass rationale Zahlen dicht liegen in dem Sinn, dass zwischen zwei Bruchzahlen unendlich viele weitere Zahlen liegen, scheint eine der schwierigsten Vorstellungen beim Bruchzahlerwerb zu sein" (S. 42). Pehkonen und Merenluoto (2002) stellten Lehramtsstudierenden die Frage, was die größte Bruchzahl wäre, die noch kleiner als drei sei. Sie kamen zu dem Ergebnis, dass lediglich ein Zehntel der Teilnehmer in der Lage war, eine mathematisch korrekte Antwort zu geben. Vamvakoussi und Vosniadou (2004) interviewten in ihrer Studie NeuntklässlerInnen und stellten unter anderem die Fragen, welche Zahl(en) zwischen 0,001 und 0,01 lägen und welche Zahl(en) zwischen $\frac{3}{8}$ und $\frac{5}{8}$ lägen. Sie kamen zu dem Ergebnis, dass sich das Konzept der Dichte langsam und schrittweise entwickle und entwarfen ein Modell, welches fünf Niveaustufen des Verständnisses der Anordnung von Bruchzahlen unterscheidet. Sie bezeichnen die Stufen als *naiv diskret* (1), *fortgeschritten diskret* (2), *diskret dicht* (3), *naiv dicht* (4) und *mathematisch dicht* (5) (s. Tabelle 3).

Stufe	Bezeichnung	Kompetenz
1	naiv diskret	Es liegt kein Bruch dazwischen oder es liegt nur ein Bruch dazwischen (4/8).
2	fortgeschritten diskret	Es liegen mehrere Brüche dazwischen.
3	diskret dicht	Zwischen zwei gegebenen Zahlen können unendlich viele Brüche liegen, jedoch nicht in allen Fällen.
4	naiv dicht	Es gibt sowohl bei Dezimalzahlen als auch bei Bruchzahlen unendlich viele Zahlen dazwischen, allerdings ist zur Erklärung eine Umrechnung notwendig.
5	mathematisch dicht	Zwischen 2 Bruchzahlen gibt es stets eine weitere Bruchzahl und damit unendlich viele Bruchzahlen.

Tabelle 3: Niveaustufen des Verständnisses der Dichte von Bruchzahlen (eigene Darstellung in Anlehnung an Vamvakoussi & Vosniadou, 2004; vgl. Wartha, 2007)

In der Untersuchung von Vamvakoussi und Vosniadou war keiner der interviewten SuS der Stufe fünf zuzuordnen, ein Schüler wurde der Stufe vier zugeordnet. 56% der Befragten antworteten, dass es genau einen Bruch dazwischen gäbe und waren somit der Stufe eins zuzuordnen (2004). Neumann (1998) fügt dem Modell von Vamkoussi und Vosniadou noch eine zusätzliche Stufe Null zu, ordnet diese der Stufe eins unter und beschreibt die Stufe Null mit *fehlendem Wissen über Bruchzahlen*. Stufe eins betitelt Neumann als *falschen Transfer von den natürlichen Zahlen auf die Bruchzahlen* und greift damit eine der Hauptfehlerstrategie auf (s. 2.2.4). Markovits und Sowder (1994) stellten in einer Längsschnittstudie fest, dass erworbene Kenntnisse über die Dichte von Bruchzahlen durch Instruktion häufig nur zeitlich begrenzt vorhanden sind und Fehlvorstellungen im zeitlichen Verlauf zurückkehren.
Die vorliegende Masterarbeit untersucht konkret das Wissen der Lehramtsstudierenden nach Besuch der Lehrveranstaltung Arithmetik und ihre Didaktik I und II. Entgegen den beschriebenen Studien wird nicht nur fachwissenschaftliches, sondern auch fachdidaktisches Wissen untersucht. Cierpinski (2020) untersuchte das Professionswissen der Lehramtsstudierenden nach dem Besuch der Lehrveranstaltung Arithmetik und Didaktik I und II im Jahr 2019. Einerseits wurden seitdem Anpassungen in der Durchführung der Lehrveranstaltung sowie im Erhebungsinstrument (s. 3.2) vorgenommen, so dass eine erneute Untersuchung von Interesse ist, andererseits beschränkt sich die Erhebung von Cierpinksi auf schriftliche Daten. Die zusätzliche Durchführung von Interviews in der vorliegenden Arbeit zielt auf vertiefte Erkenntnisse zum Forschungsthema.

Als Ursache für die Schwierigkeiten im Bruchzahlerwerb wird in der Literatur eine hauptsächliche Fehlerquelle identifiziert, welche im Folgenden dargelegt wird.

2.2.4 Natural Number Bias

In bisherigen Studien wurde aufgezeigt, dass nicht nur SuS, sondern auch Lehramtsstudierende und Erwachsene Schwierigkeiten mit strukturellen Eigenschaften des Zahlbereichs aufweisen. Eine häufige Fehlerstrategie wird in der Orientierung an den natürlichen oder ganzen Zahlen verortet:

> Nevertheless, the performance of the children in the sample seemed to be dominated, or overpowered, by their knowledge of the ordering of whole numbers. The results suggest that children´s schemas for ordering whole numbers are very strong, and, at least during initial instruction in fractions, are overgeneralized […] (Behr, Wachsmuth, Post & Lesh, 1984, S. 334)

Der Zahlbereich der rationalen Zahlen ist mit Umbrüchen verbunden, welche neue Anforderungen mit sich bringen. Als kongruente Anforderungen werden solche Anforderungen bezeichnet, die sich mit den inhaltlichen Vorstellungen zu den natürlichen Zahlen bewältigen lassen. So ist beispielsweise $\frac{3}{5}$ größer als $\frac{2}{5}$, da 3 > 2. Hingegen lassen sich inkongruente Anforderungen nicht mit den Vorstellungen zu den natürlichen Zahlen lösen. Beispielsweise ist $\frac{1}{2}$ größer als $\frac{1}{3}$, obwohl $2 < 3$ gilt. Die Anforderungen der Bruchrechnung, die nicht mit inhaltlichen Vorstellungen zu den natürlichen Zahlen bewältigt werden können, erfordern ein konzeptionelles Umdenken. Dieses Umdenken wird auch als *Conceptual Change* bezeichnet und erfordert eine Reorganisation bereits erworbener Vorstellungen (Schadl, 2020). Der Übertrag der Eigenschaften und Gesetzmäßigkeiten aus den natürlichen Zahlen auf die rationalen Zahlen in inkongruenten Anforderungen wird in der Literatur als *Natural Number Bias* (NNB) bezeichnet (vgl. Wartha, 2007; Schadl, 2020). Wartha verortet die Schwierigkeiten in der Bruchrechnung in unzulänglich ausgebildeten Grundvorstellungen und nennt den NNB als häufigste Fehlerursache.

Das erweiterte Fachwissen im schulischen Kontext wird von curricularen Vorgaben und Regelungen der Kultusministerkonferenz geprägt. Der Rahmenlehrplan Berlin-Brandenburg nennt anzustrebende Kompetenzen der SuS sowie verbindliche Themen und Inhalte (LISUM, 2015) und wird in Auszügen im folgenden Unterkapitel vorgestellt.

2.2.5 Curriculare Einordnung

Im Rahmenlehrplan Berlin-Brandenburg sind rationale Zahlen ab Niveaustufe D verortet und damit Inhalt der fünften und sechsten Klassenstufe (LISUM, 2015). Unter der Leitidee *Zahlen und Operationen*, einer der fünf inhaltsbezogenen Kompetenzbereiche, werden die formulierten Standards durch Themen und Inhalte konkretisiert. Der Kompetenzbereich *Zahlvorstellungen* beinhaltet für Niveaustufe D die Kompetenz *Zahlen auffassen und darstellen* und nennt auszugweise folgende Inhalte:

- „Übersetzen von gebrochenen Zahlen (gemeine Brüche und Dezimalzahlen) zwischen Bild, Wort und Symbol"
- „Kürzen und Erweitern von Brüchen" (LISUM, 2015, S. 36)

Bezüglich der Kompetenz *Zahlen ordnen* werden u.a. folgende Inhalte aufgeführt:

- „Anordnen von gebrochenen Zahlen am Zahlenstrahl"
- „Vergleichen und Ordnen von gemeinen Brüchen durch direktes Vergleichen, gleichnamig Machen und am Zahlenstrahl"
- „Erklären der Dichtheit der gebrochenen Zahlen auch am Zahlenstrahl (im Sinne von: Zwischen zwei gebrochenen Zahlen ist immer noch eine weitere.)" (LISUM, 2015, S. 36)

Ein Inhalt zur Kompetenz *Zahlbeziehungen beschreiben* lautet:

- „Beschreiben von Zahlbeziehungen innerhalb eines Zahlenbereiches (auch unter dem Aspekt der Teilbarkeit) und zwischen natürlichen und gebrochenen Zahlen" (LISUM, 2015, S. 36)

Der Kompetenzbereich *Operationsvorstellungen und Rechenstrategien* umfasst die Kompetenz *Operationsvorstellungen entwickeln* und nennt u.a. den Inhalt:

- „Unterscheiden zwischen Erweitern und Vervielfachen bzw. Kürzen und Dividieren eines Bruchs" (LISUM, 2015, S. 37)

Die aufgeführten Kompetenzen und Inhalte fungieren im Sinne des Spiralcurriculums als Grundlage für den Mathematikunterricht der weiterführenden Schulen.

3 Methode

Die eingangs formulierte Forschungsfrage, über welches fachwissenschaftliche und fachdidaktische Wissen die Lehramtsstudierenden im Bereich der rationalen Zahlen nach Besuch der Lehrveranstaltung Arithmetik und ihre Didaktik I und II verfügen, wird aufbauend auf dem in Kapitel 2.1 und Kapitel 2.2 beschriebenen theoretischen Hintergrund folgendermaßen konkretisiert:

- Über welche Vorstellungen verfügen die Studierenden bezüglich der Dichte von rationalen Zahlen?
- Inwieweit sind die Studierenden in der Lage, eine kindgerechte Erklärung zu einer gegebenen Aufgabe zu formulieren und typische Schülerprobleme zu erkennen?
- Inwiefern sind die Studierenden in der Lage horizontale Querverbindungen zwischen den natürlichen und rationalen Zahlen zu ziehen und relevante Unterschiede explizit zu benennen?
- Welche Denkhürden liegen seitens der Studierenden vor?

Basierend auf diesen Forschungsfragen wurde ein passendes Forschungsdesign gewählt. Es folgen die methodische Begründung sowie die Beschreibung der konkreten Umsetzung der Erhebung und Auswertung.

3.1 Untersuchungsdesign

Um festzustellen, über welches Professionswissen die Lehramtsstudierenden im Bereich der rationalen Zahlen verfügen und welche Denkhürden vorliegen, bedarf es einer qualitativen Untersuchung. In der Forschung werden prinzipiell qualitative und quantitative Ansätze unterschieden. Während im quantitativen Ansatz theoretisch abgeleitete Forschungshypothesen überprüft und numerische Daten mithilfe statistischer Kennwerte ausgewertet werden, liegen dem qualitativen Ansatz offene Forschungsfragen zugrunde. Es erfolgt eine interpretative Auswertung der qualitativen nicht-numerischen Daten (Döring & Bortz 2016). Um sowohl fachwissenschaftliches als auch fach-didaktisches Wissen sowie Denkweisen der Studierenden in Erfahrung zu bringen und damit verbunden die Effektivität der Gestaltungsprinzipien zu prüfen, werden Aussagen der Studierenden, welche im Wintersemester 2020/21 die Lehrveranstaltung Arithmetik und ihre Didaktik I und im Sommersemester 2021 die darauf aufbauende Lehrveranstaltung Arithmetik und ihre Didaktik II besuchten, querschnittlich untersucht. Der Untersuchungszeitraum schließt sich unmittelbar an den Vorlesungszeitraum an und liegt zwischen Juli und September 2021. In der qualitativen Forschung stehen als Erhebungsinstrumente qualitative Beobachtungen, qualitative Interviews, qualitative Fragebogen oder qualitative Dokumentenanalyse zur Verfügung (Döring & Bortz, 2016). Aufgrund der hohen Anzahl von 152 Studierenden, die an der Lehrveranstaltung teilnahmen, bietet sich zunächst eine schriftliche Befragung an. Um tiefere Einblicke zu erhalten und Vorstellungen zu hinterfragen, werden im Anschluss Interviews geführt.

3.2 Wissenstest

Im Rahmen des PSI-Projektes wurde ein Wissenstest als Instrument konstruiert, der darauf ausgerichtet ist, sowohl fachwissenschaftliches als auch fachdidaktisches Wissen anhand konkreter Aufgabenstellungen zu testen. Der Fokus des mathematischen Fachwissens liegt auf dem erweiterten Fachwissen für den schulischen Kontext (s. 2.1.2). Somit prüft der Test die Wirkung der Gestaltungsprinzipien, welche der Konzeption der Lehrveranstaltung zugrunde liegen (Reitz-Koncebovski, 2019b). Der Test wurde in die Abschlussklausur integriert, welche die Studierenden am Ende des Sommersemesters nach Besuch der Lehrveranstaltung Arithmetik und ihre Didaktik II absolvierten. Den Studierenden standen zwei Klausurtermine zur Wahl. In der vorliegenden Untersuchung werden die Daten der ersten Klausur ausgewertet. Damit stehen anonymisierte Daten von 112 Studierenden zur Verfügung. Die Aufgabe zu den rationalen Zahlen ist in Abbildung 4 dargestellt.

15. Aufgabe: Rationale Zahlen **(9 Punkte)**

15.1. Lösen Sie die Aufgabe im Kasten (kurz!), **ohne** Dezimalbrüche zu verwenden.

Betrachten Sie die Zahlen $\frac{1}{6}$ und $\frac{1}{5}$.

a) Ist es möglich, eine rationale Zahl zu finden, die zwischen diesen beiden Zahlen liegt? Falls ja, geben Sie diese Zahl an.
b) Gibt es womöglich mehr als eine Zahl? Wenn ja, geben Sie alle Zahlen an, die zwischen diesen beiden Zahlen liegen.

15.2. Erklären Sie nun einem Schüler oder einer Schülerin der fünften/sechste Klasse kindgerecht, wie die Aufgabenteile a und b richtig gelöst werden können.

15.3. Nennen und erläutern Sie kurz mindestens zwei Probleme, die Schülerinnen und Schüler beim Lösen der Aufgabe haben könnten.

15.4. Benennen Sie zwei wesentliche Eigenschaften der rationalen Zahlen im Unterschied zu den natürlichen Zahlen, die für die Lösung der Aufgaben a) und b) eine Rolle spielen.

Abbildung 4: Aufgabe 15: Rationale Zahlen (Modulprüfung „Zahlen und Operationen und ihre Didaktik", 2021)

Die einzelnen Aufgabenteile lassen sich den Gestaltungskriterien zuordnen. Aufgabe 15.1. testet fachwissenschaftliches Wissen bezüglich der Dichte von rationalen Zahlen (Reitz-Koncebovski, 2019b). Die Lösung der Frage 15.1.a) kann auf verschiedene Art erfolgen:

- Die Erweiterung der beiden Brüche auf einen gemeinsamen Nenner mit anschließender Angabe eines Bruchs, der denselben Nenner besitzt und einen Zähler, der größer als der Zähler des erweiterten Bruchs $\frac{1}{6}$ und kleiner als der Zähler des erweiterten Bruchs $\frac{1}{5}$ ist. Hierbei ist anzumerken, dass die Erweiterung der beiden Brüche auf Dreißigstel noch nicht ausreicht, um einen solchen Zähler zu finden. Es bedarf der Erweiterung auf Sechzigstel oder mehr, um zu einer Lösung zu gelangen:
  $\frac{1}{6} = \frac{5}{30} = \frac{10}{60}$ $\qquad$ $\frac{1}{5} = \frac{6}{30} = \frac{12}{60}$ $\qquad$ $\frac{11}{60}$ liegt dazwischen
- Die Erweiterung der Brüche auf einen größeren gleichnamigen Zähler lässt eine Zwischenzahl erkennen, dessen Nenner größer als der Nenner des erweiterten Bruchs $\frac{1}{6}$ und kleiner als der Nenner des erweiterten Bruchs $\frac{1}{5}$ ist. Beispiel:
  $\frac{1}{6} = \frac{2}{12}$ $\qquad$ $\frac{1}{5} = \frac{2}{10}$ $\qquad$ $\frac{2}{11}$ liegt dazwischen
- Um den Mittelwert zu bilden, werden beide Brüche addiert und im Anschluss durch zwei dividiert:
  $\frac{5}{30} + \frac{6}{30} = \frac{11}{30}$; $\frac{11}{30} : 2 = \frac{11}{30} \cdot \frac{1}{2}$; Ergebnis: $\frac{11}{60}$ (vgl. Wartha, 2007, S. 177)
- Über die sog. „falsche Addition" („Mischen") gelangt man zu der Lösung $\frac{2}{11}$, da $\frac{1+1}{6+5} = \frac{2}{11}$ (Zähler + Zähler, Nenner + Nenner) (vgl. Winter, 1999, S. 41)

Um Aufgabe 15.1.b) zu beantworten benötigt es ebenfalls fachwissenschaftliches Wissen. Eine Musterlösung könnte lauten:
Aufgrund der Dichte der rationalen Zahlen existieren unendlich viele Zahlen zwischen den beiden Brüchen.

Aufgabe 15.2. testet fachdidaktisches Wissen mit Bezug zum Gestaltungskriterium *Grundprinzipien der Mathematikdidaktik* (Reitz-Koncebovski, 2019b). Darstellungswechsel und Veranschaulichungen bieten sich als kindgerechte Erklärung an, um das Verständnis zu fördern (s. 2.1.3). Als Musterlösung kann folgende Antwort dienen: Wir tragen die Zahlen $\frac{1}{6}$ und $\frac{1}{5}$ mal am Zahlenstrahl ein. Du hast bereits gelernt, dass sich Brüche beliebig verfeinern lassen ohne dabei ihren Wert zu verändern. Um die beiden Brüche gut vergleichen zu können, machen wir sie zuerst gleichnamig, das heißt wir bringen sie auf denselben Nenner von 30. Wir multiplizieren den Zähler und Nenner von $\frac{1}{6}$

jeweils mit 5 und erhalten $\frac{5}{30}$. Wir multiplizieren den Zähler und Nenner von $\frac{1}{5}$ jeweils mit 6 und erhalten $\frac{6}{30}$. Zwischen $\frac{5}{30}$ und $\frac{6}{30}$ können wir noch keinen Bruch erkennen. Erweitern wir nun aber beispielsweise mit 10, so erhalten wir $\frac{50}{300}$ und $\frac{60}{300}$. Jetzt kannst du erkennen, dass zwischen $\frac{50}{300}$ und $\frac{60}{300}$ die Zahlen $\frac{51}{300}, \frac{52}{300}, \dots$ und $\frac{59}{300}$ liegen. Da du die Brüche $\frac{5}{30}$ und $\frac{6}{30}$ mit beliebig großen und mit beliebig vielen Zahlen erweitern kannst, findest du unendlich viele Brüche, die zwischen $\frac{1}{6}$ und $\frac{1}{5}$ liegen.

Aufgabe 15.3. ist dem Gestaltungskriterium *Lernprozesse von SuS* zuzuordnen (Reitz-Koncebovski, 2019b). Als Teil des didaktischen Wissens ist es notwendig, Lernprozesse von SuS nachzuvollziehen sowie Schwierigkeiten im Lernprozess zu identifizieren (s. 2.1.3). Als Lösung wären u.a. folgende Antworten denkbar:

- SuS greifen auf Vorstellungen aus den natürlichen Zahlen zurück und argumentieren, dass es zwischen 5 und 6 keine Zahl gibt und deshalb auch zwischen $\frac{1}{5}$ und $\frac{1}{6}$ keine Zahl liegt.
- Es könnten Rechenfehler beim Erweitern (oder auch Addieren sowie Dividieren) entstehen, die zu falschen Lösungen führen.
- Das Konzept der Unendlichkeit ist für SuS schwer zu verstehen, so dass sie ggf. nur eine oder einige Zahlen zwischen $\frac{1}{6}$ und $\frac{1}{5}$ finden, aber nicht bedenken bzw. verstehen, dass unendlich viele Zwischenzahlen existieren.

Aufgabe 15.4. benötigt fachwissenschaftliches Wissen und ist damit einerseits dem Gestaltungskriterium *Fundamentale Ideen* zuzuordnen, andererseits braucht es Wissen auf der metakognitiven Ebene, um Querverbindungen auf horizontaler Ebene zu ziehen und Eigenschaften der beiden Zahlbereiche zu vergleichen sowie speziell für diese Aufgabe relevante Eigenschaften herauszustellen. Folgende Antworten wären u.a. möglich: -

- Rationale Zahlen liegen dicht, d.h. zwischen zwei rationalen Zahlen liegen unendlich viele weitere rationale Zahlen.
- Rationale Zahlen besitzen im Gegensatz zu natürlichen Zahlen keinen direkten Vorgänger oder Nachfolger.
- Natürliche Zahlen besitzen eine eindeutige Zahldarstellung. Rationale Zahlen

können beliebig oft erweitert werden und somit auf verschiedene Weisen dargestellt werden.

Der schriftliche Wissenstest erlaubt die Datenerhebung einer großen Stichprobe. Tiefere Erkenntnisse über individuelle Vorstellungen und Denkweisen lassen sich jedoch im Interview gewinnen, so dass ergänzend zum Wissenstest die Entscheidung auf die Durchführung von Interviews fiel.

3.3 Gruppendiskussion

Qualitative Interviews stellen ein Kernelement der empirischen Forschung dar. In dem Prozess der mündlichen Kommunikation werden detailreiche Informationen und tiefe Erkenntnisse über Denkweisen, Meinungen und Motivationen gewonnen (Misoch, 2018). Damit bietet sich dieses Instrument idealerweise an, um der Forschungsfrage nachzugehen. Es existieren eine Vielzahl an unterschiedlichen Interviewmethoden. Die Entscheidung fiel auf Gruppeninterviews anstelle von Einzelinterviews. Der Vorteil liegt darin, dass Prozesse der Gruppeninteraktion und Gruppendynamik genutzt werden, um beispielsweise Ängste und Sprechhemmungen abzubauen, aber auch um gegenseitige Anregungen und Denkanstöße im Sinne des Schneeballeffekts zu fördern. In der Literatur werden mitunter Gruppendiskussionen von Fokusgruppen sowie Gruppeninterviews unterschieden, häufig werden die Begriffe als synonym angesehen (Misoch, 2019). Der vorliegenden Arbeit wird folgende Definition nach Lamnek (2005) zugrunde gelegt: „Die Gruppendiskussion ist eine Erhebungsmethode, die Daten durch die Interaktionen der Gruppenmitglieder gewinnt, wobei die Thematik durch das Interesse des Forschers bestimmt wird" (S. 27). Mit diesem Hintergrund werden die Begriffe Gruppendiskussion und Gruppeninterview in der vorliegenden Arbeit synonym verwendet. Die durchgeführten Interviews werden in Anlehnung an Kühn und Koschel als *problemzentrierte Interviews* verstanden, da die Befragung ein im Vorfeld identifiziertes Themengebiet behandelt (2018, S. 95). Mit Blick auf den Strukturierungsgrad werden standardisierte, halboffene und offene Interviews unterschieden. Die Wahl der vorliegenden Interviewmethode zur Untersuchung des Professionswissens der Studierenden ist dem halboffenen Interview zuzuordnen. Dem halboffenen Interview dient ein Leitfaden als Orientierung, um auf relevante Themen und Fragstellungen der Untersuchung zu fokussieren. Die Gruppendiskussion nimmt im vorliegenden Untersuchungsdesign die Rolle einer Lupenfunktion ein. In der schriftlichen Befragung sind die Studierenden gezwungen, stark zu abstrahieren und aufgrund der limitierten Zeit die Antworten kurz und knapp zu halten. Die mündliche Befragung kann tiefere Einblicke liefern und Lücken schließen (Kühn & Koschel, 2018).

Die Zusammensetzung der Gruppe ist entscheidend für den Verlauf der Diskussion (Kühn & Koschel, 2018). Die Rekrutierung der Interviewpartner startete mit einem allgemeinen Aufruf über die digitale Plattform der Lehrveranstaltung. Im Rücklauf meldeten sich zwei Personen. Um weitere Studierende zu gewinnen und die Motivation zu erhöhen, wurden nach der Anmeldung zur Klausureinsicht gezielt jene Studierende persönlich per Mail kontaktiert, welche sich zur Einsicht angemeldet hatten und aufgrund des Nichtbestehens der Klausur erneut zur Prüfung antreten mussten. Bei dieser Personengruppe wurde eine persönliche Motivation angenommen, sich im Rahmen der erneuten Klausurvorbereitung mit dem Thema der Bruchrechnung intensiv auseinanderzusetzen und von dem Austausch mit Mitstudierenden zu profitieren. Von sechs kontaktierten Personen meldeten sich vier zurück, die sich bereit erklärten, an der Gruppendiskussion teilzunehmen. Unter diesen vier Personen befand sich eine Person, die sich bereits auf den ersten Aufruf gemeldet hatte. Die zweite Person, die sich anfänglich zur Teilnahme bereit erklärte, hatte den ersten Klausurtermin nicht wahrgenommen und wurde ebenfalls zum Interview eingeladen. So setzte sich die Gruppe aus insgesamt fünf Personen zusammen. Hinsichtlich der Wissensbestände wurde die Gruppe im Vorfeld als heterogen eingeschätzt. Bei den vier Personen, die die Klausur nicht bestanden hatten, war von eher geringeren Wissensbeständen auszugehen, was für das Forschungsziel, Denkhürden zu ergründen, von besonderem Interesse schien. Die fünfte Person wurde aufgrund ihrer aktiven und regen Teilnahme in den Übungsgruppen der Arithmetik und ihre Didaktik als eher leistungsstark eingeschätzt, was als Kontrast ebenfalls dem Forschungsinteresse dient und gleichzeitig auf kontroverse Denk- und Diskussionsprozesse sowie eine anregende Gruppendynamik hoffen ließ. Das Gruppeninterview wurde am 30. August 2021 in einem Seminarraum auf dem Campus Golm der Universität Potsdam durchgeführt und dauerte etwa eineinhalb Stunden. Die Grundzüge des Verstehens, der Offenheit, der Alltagsorientierung, der Prozessorientierung und der Reflexivität waren leitend für die Durchführung (vgl. Kühn & Koschel, 2018). Basale Prinzipien wie Respekt, Informationspflicht, Anonymität und Datenschutz, Einverständnis sowie Freiwilligkeit wurden berücksichtigt (vgl. Misoch, 2018). Für eine gelungene Gruppendiskussion ist die Nähe zum Alltagsgespräch von Bedeutung, welche dazu beiträgt, dass sich die Teilnehmer[2] öffnen und eigene Gedanken

[2] Die Bezeichnung Teilnehmer bezeichnet in dieser Masterarbeit stets die männliche und weibliche Form.

offenbaren (Kühn & Koschel, 2018). Es fand eine Audioaufnahme der Diskussion statt, welche als Grundlage für die anschließende Transkription dient. Dem Interview ging eine gründliche Vorbereitung sowie der Entwurf eines Leitfadens voraus.

3.4 Interviewleitfaden

Dem Interviewleitfaden kommt eine besondere Rolle im Interview zu, da er das Interview strukturiert. Gleichzeitig soll er ausreichend Offenheit und Flexibilität zulassen, um dem Gedanken der qualitativen Forschung gerecht zu werden. Den Ausführungen von Kühn und Koschel zufolge heißt es:

> Durch den Leitfaden wird sichergestellt, dass im Vorfeld als wichtig erachtete Themen und Fragestellungen während der Gruppendiskussion berücksichtigt werden. Versteht man ihn als eine unvollständige Landkarte für eine Wanderung, gibt er zumindest auch Impulse für die Reihenfolge, in der Themen und Fragestellungen besprochen werden – ohne eine feste Abfolge zu determinieren. (2018, S. 94)

Im Rahmen eines problemzentrierten Interviews orientieren sich die Fragen am Problem. Dabei ist es wichtig, die Fragen nicht als bloße Aneinanderreihung zu sehen, sondern prozessorientiert zu formulieren und damit den unterschiedlichen Phasen der Interviewsituation gerecht zu werden. „Als Folge von Prozessorientierung ist es wichtig, Kernfragen, die mit einer Problemstellung verbunden sind, in der Befragung mehrfach aufzugreifen und aus mehreren Perspektiven zu erörtern." (Kühn & Koschel, 2018, S. 97) Zur besseren Übersicht sind die Fragen in Themenblöcken angeordnet (s. Anhang I). Grundsätzlich werden vier Phasen unterschieden: die Einführungsphase, die Warm-Up-Phase, der Hauptteil sowie der Abschlussteil. In der Einführungsphase stellt der Moderator die Regeln und Rahmenbedingungen vor. Die Warm-Up-Phase dient vor allem dazu, eine vertrauensvolle Gesprächssituation herzustellen. Eine kurze Vorstellungsrunde trägt zu einer persönlichen Atmosphäre bei und nimmt die Angst vor der ersten Äußerung (Kühn & Koschel, 2018). Der Hinweis auf die ausstehende Klausur dient der Bildung eines Gemeinschaftsgefühls. Der erste thematische Bezugspunkt dient der Annäherung an das Thema und soll die Gesprächsteilnehmer zum Erzählen ermutigen. Die Empfehlung, sowohl einen Lebensweltbezug herzustellen als auch die emotionale Ebene anzusprechen, wird mit der Frage, welches Gefühl die Teilnehmer am ehesten mit dem Thema der Bruchrechnung im Rahmen der Klausurvorbereitung verbinden, verwirklicht. Als visueller Stimulus wird der Emoti*Scape-Fragebogen, ein Tool des Instituts Ipsos (2004), eingesetzt, um den Teilnehmern den sprachlichen Ausdruck zu erleichtern und bloße

Antworten wie „Finde ich gut" oder „Finde ich nicht gut" zu umgehen (Kühn & Koschel, 2018; kein Bestandteil der online-Veröffentlichung). Die zentralen Leitfragen zum spezifischen Forschungsthema finden sich im Hauptteil wieder. Der Einstieg mittels einer Geschichte zum Thema Bruchzahlen (s. Anhang II) verfolgt das Ziel, das Interesse der Teilnehmer am Thema zu wecken und sich dem Thema anzunähern (vgl. Thömmes, 2005; vgl. Prediger, 2004). Die anschließenden Leitfragen nehmen Bezug zu den einzelnen Teilaufgaben der Aufgabe 15 aus dem Wissenstest. Zu jedem Oberthema wurden verschiedene Stimuli-Materialien vorbereitet, welche zur Aktivierung der Teilnehmer dienen (Kühn & Koschel, 2018). Den Teilnehmern werden verschiedene anonymisierte Aufgabenlösungen vorgestellt, welche Gesprächsanlass über Vorstellungen und Fehlvorstellungen bieten. Der Hauptteil schließt mit der Frage, ob etwas vergessen wurde und bietet erneut Raum für Diskussion und weitere Anmerkungen. Ein Fragebogen zur Häufigkeit der Nutzung der verschiedenen Lehrveranstaltungsangebote erhebt quantitative Daten mit dem Interesse, Hinweise zur Lernmotivation zu erhalten. Das Interview endet mit einer kurzen Zusammenfassung durch den Moderator sowie einem Ausblick auf die Zukunft (Kühn & Koschel, 2018).

3.5 Online-Interview

Eine weitere Interviewgruppe wurde auf Grundlage der Ergebnisse des von Stampfer und Hell entwickelten Bruchrechentests rekrutiert (vgl. Stampfer, Reitz-Koncebovski & Hell, 2019). Der Test wurde von den Studierenden im Verlauf der Lehrveranstaltung Arithmetik und ihre Didaktik II zu zwei verschiedenen Messzeitpunkten absolviert. Der Auswertung von Stampfer zufolge stellte sich eine Personengruppe heraus, welche im Pretest aufgrund von Schwierigkeiten bei der Lösung der inkongruenten Aufgaben Hinweise auf das Vorliegen eines NNB lieferte. Diese Schwierigkeiten waren hingegen im Posttest nicht mehr zu verzeichnen (2021). In der Annahme, dass bestehende Denkhürden überwunden wurden und im Verlauf der Lehrveranstaltung ein bedeutender Wissenszuwachs stattgefunden hat, stellte sich diese Personengruppe als interessante potentielle Stichprobe für ein Interview dar, um der Forschungsfrage nachzugehen. Die individuell erstellten Teilnehmercodes wurden für einen weiteren Aufruf zur Interviewteilnahme über die Plattform der Lehrveranstaltung genutzt. Auf den Aufruf meldeten sich zunächst 4 Studierende, wovon eine Person auf die konkrete Terminabsprache nicht weiter reagierte. Da sich die Rekrutierung der Studierenden insgesamt mühsam darstellte, fiel die Wahl der

Durchführung auf das Format des online-Interviews, um den Aufwand für die Studierenden zu reduzieren. Die Vorbereitung und Planung des online-Interviews orientierte sich zum Zweck der Vergleichbarkeit stark an dem Interview der ersten Gruppe. Im Leitfaden wurden lediglich die Ansagen zur Begrüßung sowie das Situationsbeispiel bezüglich der Emotionen angepasst, nicht thematisierte Beispiellösungen aus dem ersten Interview wurden im Vorfeld entfernt (s. Anhang IV). Das online-Interview wurde per zoom am 14. September 2021 durchgeführt und dauerte etwa 70 Minuten. Die Teilnehmer waren der Sitzung jeweils per Kamera und Mikrofon zugeschaltet. Die geplante Videoaufzeichnung konnte aufgrund technischer Schwierigkeiten nicht umgesetzt werden, stattdessen fand eine Audioaufnahme des Interviews statt. Die quantitative Umfrage zum Ende des Interviews fand mithilfe einer zoom-Umfrage statt.

3.6 Transkription

Zur qualitativen Auswertung der aufgezeichneten Gruppendiskussionen bedarf es ihrer Verschriftlichung. Der Übertragungsvorgang der verbalen Daten in schriftliche Daten wird als Transkription bezeichnet. Die zusammenfassende Transkription wie auch die journalistische Transkription sind für Forschungszwecke zu ungenau. Um eine detaillierte Auswertungsbasis zu schaffen, wurde ein wissenschaftliches Transkript angefertigt und wortwörtlich verschriftlicht (s. Anhang IX und X). Hinsichtlich des Detaillierungsgrades existieren unterschiedliche Formen (Fuß & Karbach, 2019). Die Festlegung der Transkriptionsregeln fand der Forschungsfrage entsprechend in Anlehnung an Kuckartz statt. In Annäherung an das Schriftdeutsche findet eine leichte Glättung von Sprache und Interpunktion statt. Vorhandene Dialekte werden nicht mit transkribiert, umgangssprachliche Ausdrücke sowie Fehler in der Satzstellung werden jedoch beibehalten. Längere Pausen, Betonungen einzelner Wörter, nonverbale Äußerungen und Aktivitäten werden markiert (Kuckartz, 2018). Die vollständigen Transkriptionsregeln sind im Transkriptionskopf dokumentiert und dem Transkript vorangestellt. Die Transkription fand direkt im Anschluss an die jeweiligen Interviews statt und erfolgte nach Import der Audioaufnahmen in die MAXQDA Software direkt im Programm. Im Rahmen der Anonymisierung wurden die Namen durch Pseudonamen ersetzt. Um die Interviews als Fokusgruppeninterviews darzustellen und somit verschiedene Auswertungstools nutzen zu können, ist es notwendig, jeden Sprachbeitrag als eigenen Absatz zu transkribieren. Die Absätze sind mit Zeitmarken versehen, welche ermöglichen, während der Analyse im entsprechenden Abschnitt in das Originalmaterial hineinzuhören (Rädiker & Kuckartz, 2019).

3.7 Qualitative Inhaltsanalyse

Das vorliegende Datenmaterial wurde mithilfe der qualitativen Inhaltsanalyse ausgewertet. Bei der qualitativen Inhaltsanalyse handelt es sich um eine regelgeleitete und systematische, interpretative Auswertungsmethode. Häufig unterschieden werden die qualitative Inhaltsanalyse nach Mayring und Kuckartz. Hier sei anzumerken, dass es nicht *die* eine qualitative Inhaltsanalyse gibt und sich die Vorgehensweisen ähneln (Kuckartz, 2018). Die vorliegende Analyse orientiert sich aufgrund der deduktiv-induktiven Vorgehensweise an der Methode nach Kuckartz (s.u.). Allen Formen gemeinsam ist die Bildung eines Kategoriensystems als Hauptmerkmal der Methode. Kategorien haben einen abstrakten klassifizierenden Charakter und fassen verschiedene Textstellen mit ähnlichem Inhalt zusammen. Im Folgenden werden die Begriffe Kategorie und Code synonym verwendet. Der Begriff Kategoriensystem bezeichnet die Gesamtheit aller Kategorien. In der Kategorienbildung wird zwischen einer deduktiven und induktiven Vorgehensweise unterschieden. Bei der deduktiven Kategorienbildung, auch A-Priori-Kategorienbildung genannt, erfolgt die Kategorienbildung anhand einer Theorie oder anhand einer bereits bestehenden inhaltlichen Systematisierung. Bei der induktiven Kategorienbildung erfolgt die Kategorienbildung direkt am Material. Häufig werden Mischformen verwendet (Kuckartz, 2018). So findet auch in der vorliegenden Arbeit ein deduktiv-induktives Vorgehen Anwendung, um die Offenheit der qualitativen Forschung zu gewährleisten. Ein hierarchisch aufgebautes Kategoriensystem besteht aus Hauptkategorien und untergeordneten Subkategorien. Jede Kategorie wird definiert und mit einem Ankerbeispiel belegt, um die Kategorien voneinander abzugrenzen. Das Kategorienhandbuch enthält alle Kategorien inklusive Beschreibungen (s. Anhang XIII). Die Zuordnung von Kategorien zu Textstellen wird als Codieren bezeichnet.

Abbildung 5 zeigt das allgemeine Ablaufschema einer qualitativen Inhaltsanalyse und bildet die Phasen der Textarbeit, Kategorienbildung, Codierung, Analyse und Ergebnisdarstellung ab. Die Phasen sind nicht als streng geordnete Folge zu verstehen, stattdessen ist die zirkuläre Anordnung von Bedeutung. Im Zentrum steht stets die Forschungsfrage. Während der Analyse werden die Kategorien überarbeitet und verfeinert.

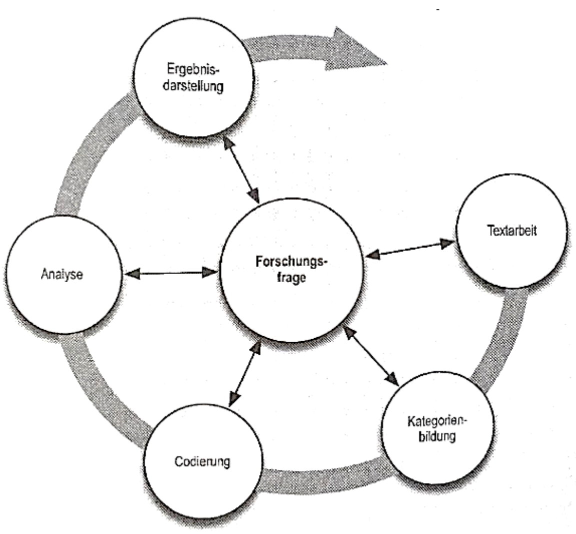


Abbildung 5: Generelles Ablaufschema einer qualitativen Inhaltsanalyse (Kuckartz, 2018, S. 45)

Kuckartz unterscheidet drei Basismethoden der qualitativen Inhaltsanalyse: die inhaltlich strukturierende, die evaluative sowie die typenbildende Methode. Da in der vorliegenden Arbeit weder Typen klassifiziert werden noch Bewertungskategorien zugrunde liegen, fällt die Wahl auf die inhaltlich strukturierende Inhaltsanalyse mit dem Schwerpunkt der inhaltlichen und themenorientierten Auswertung sowie der Herausbildung von Ober- und Unterthemen (Kuckartz, 2018).

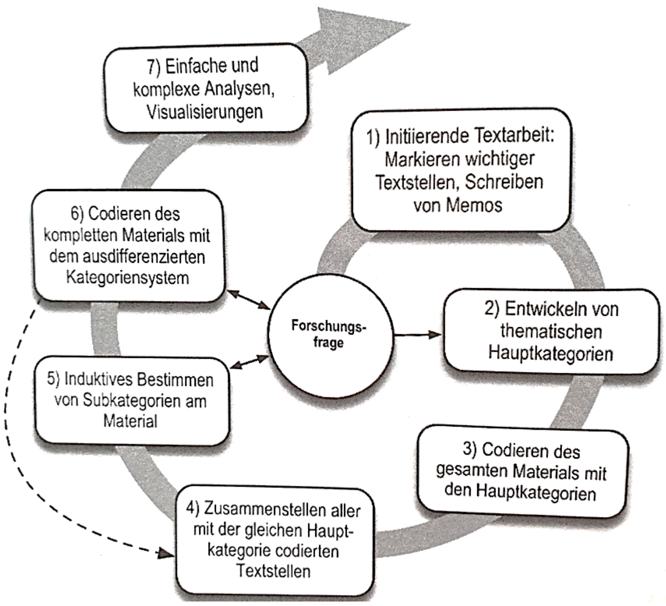


Abbildung 6: Ablaufschema einer inhaltlich strukturierenden Inhaltsanalyse (Kuckartz, 2018, S. 100)

Phase 1 besteht aus der initiierenden Textarbeit. Bereits während der Transkription entsteht eine Vertrautheit mit den Daten, erste Markierungen und Memos, welche analog zu einem Notizzettel als Gedankenstütze dienen, wurden erstellt (Kuckartz, 2018). In Phase 2 wurden die Hauptkategorien entwickelt, welche in Orientierung an das Kategoriensystem von Cierpinski (2020) gebildet wurden und analog zu den Teilaufgaben der Aufgabe 15 des Wissenstests benannt sind (s. Tabelle 4).

Hauptkategorien (Wissenstest)
15.1.a) eine Zahl zwischen 1/6 und 1/5
15.1.b) alle Zahlen zwischen 1/6 und 1/5
15.2. kindgerechte Erklärung
15.3. Schülerprobleme
15.4. wesentliche Eigenschaften von rationalen Zahlen

Tabelle 4: Hauptkategorien des Kategoriensystems (Wissenstest)

Das Kategoriensystem für die Interviews basiert auf den bereits genannten Hauptkategorien und wurde am Material um die Hauptkategorien Grundvorstellungen, Rechenoperationen, Lösungsstrategien und Motivation ergänzt (s. Tabelle 5).

Hauptkategorien (Interview)
15.1.a) eine Zahl zwischen 1/6 und 1/5
15.1.b) alle Zahlen zwischen 1/6 und 1/5
15.2. kindgerechte Erklärung
15.3. Schülerprobleme
15.4. wesentliche Eigenschaften von rationalen Zahlen
Grundvorstellungen
Rechenoperationen
Lösungsstrategien
Motivation

Tabelle 5: Hauptkategorien des Kategoriensystems (Interview 1 und 2)

In Phase 3, 4 und 5 wurde das Material mit den Hauptkategorien codiert und Subkategorien anhand des Materials bestimmt. Anschließend wurde das gesamte Material mit dem vollständigen Kategoriensystem codiert, eine Ausdifferenzierung fand in einem zweiten und dritten Codiervorgang statt.

Mit dem Ziel der höchstmöglichen Transparenz erfolgte die qualitative Inhaltsanalyse in der vorliegenden Arbeit computergestützt mithilfe des Programms MAXQDA. Das spezielle Softwareprogramm dient als Werkzeug einer effizienten Datenanalyse und hat den Vorteil auch große Datenmengen übersichtlich zu strukturieren. Die Zuordnung von

Kategorien zu Textsegmenten sowie verschiedene Visualisierungsmöglichkeiten werden unterstützt (Kelle, 2006). Die Codierung wie auch die sinnrekonstruierende Interpretation erfolgt jedoch ebenso wie im manuellen Verfahren durch den Forschenden selbst (Döring & Bortz 2016).

Die Ergebnisse der qualitativen Inhaltsanalyse werden in Kapitel 4 dargestellt.

4 Auswertung der Ergebnisse

Im Wissenstest konnten in Aufgabe 15 insgesamt 9 Punkte erzielt werden. Das Erreichen der vollen Punktzahl gelang 7 Studierenden (6%). Insgesamt 36% der Studierenden erzielten zwischen 7 und 9 Punkte und damit mindestens 75% der Gesamtpunkte. Die durchschnittlich erreichte Punktzahl der Gesamtaufgabe liegt bei 4,9 Punkten (s. Abbildung 7). Insgesamt 26% der Studierenden hat maximal ein Viertel der Gesamtpunkte (zwischen 0 und 2 Punkte) erreicht. 12 Studierende (11%) haben in der gesamten Aufgabe 0 Punkte erzielt. Die vollständige Ergebnisdarstellung ist Anhang VII zu entnehmen.

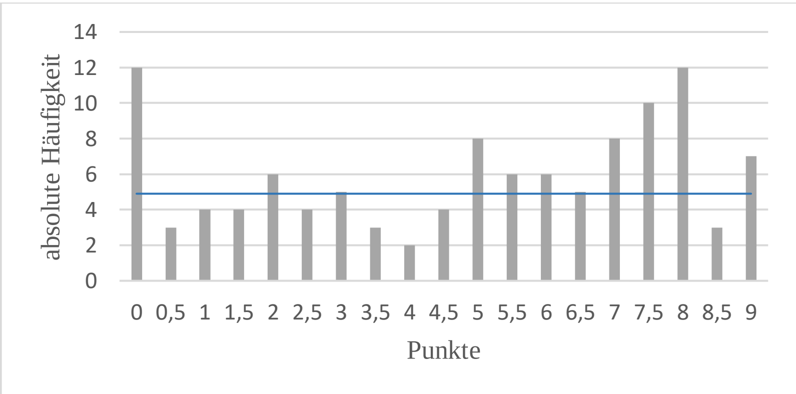


Abbildung 7: erzielte Gesamtpunkte in Aufgabe 15

Tabelle 6 liefert einen Überblick über die jeweils erzielten Punkte in den Teilaufgaben des schriftlichen Tests.

Aufgabe	15.1.a)	15.1.b)	15.2.	15.3.	15.4.	Aufgabe 15
erzielte Punkte	71%	69%	50%	61%	32%	53%

Tabelle 6: Anteil der erzielten Punkte in den Teilaufgaben

In Aufgabe 15.1.a) erzielten die Studierenden 71 % der Punkte, in Aufgabe 15.1.b) wurden 69% und in Aufgabe 15.2. 50% der Punkte erzielt. Die Lösungshäufigkeit von Aufgabe 15.3 lag bei 61%, die Lösungshäufigkeit von Aufgabe 15.4 bei 32%. Somit wurden insgesamt 53% der Punkte in Aufgabe 15 erzielt.

Die detaillierte Ergebnisdarstellung wird in die Beschreibung von fachwissenschaftlichem Wissen, fachdidaktischem Wissen, metakognitivem Wissen sowie motivationale Aspekte untergliedert. Es werden jeweils die Ergebnisse aus dem Wissenstest zusammengefasst und durch wesentliche Ergebnisse aus den beiden Interviews ergänzt. Die in Kategorien zusammengefassten Antworten aus dem Wissenstest addieren sich nicht immer zu 100 Prozent. Einerseits haben Studierende zum Teil mehrere Antworten zu einer Aufgabe geschrieben, andererseits konzentrieren sich einige Darstellungen zur Übersicht auf die häufigsten Antworten. Beispielantworten werden anonymisiert mit Zeilenangabe aus der MAXQDA Datei wiedergegeben. Antworten aus dem Wissenstest werden mit *St* (für Studierender) und jeweiliger Nummer gekennzeichnet, Antworten aus den Interviews werden mit dem jeweiligen Pseudonamen und der Interviewnummer angegeben.

4.1 Fachwissenschaftliches Wissen

Eine Zahl zwischen $\frac{1}{6}$ und $\frac{1}{5}$

Abbildung 8 zeigt die erzielten Punkte aus Aufgabe 15.1.a), welche bei korrekter Antwort mit 1 Punkt bewertet wurde

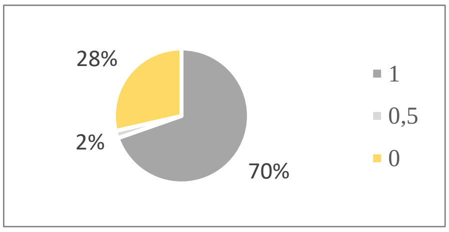


Abbildung 8: erzielte Punkte in Aufgabe 15.1.a)

Insgesamt waren 79 (70%) der 112 Personen in der Lage, eine korrekte Zahl zwischen $\frac{1}{6}$ und $\frac{1}{5}$ zu nennen. 8 Studierende (7%) nannten eine falsche Zahl. 4 Studierende gaben an, dass eine solche Zahl existiere, ohne sie zu benennen. 6 Studierende (5%) waren der Meinung, es gäbe keine rationale Zahl zwischen $\frac{1}{6}$ und $\frac{1}{5}$, wovon zwei Personen aussagten, dass sich eine solche Zahl nur unter Verwendung von Dezimalbrüchen finden ließe. 7

Studierende (6%) haben die Aufgabe nicht bearbeitet. Abbildung 9 gibt einen Überblick über die Lösungswege. 53 Personen (47%) erweiterten die gegebenen Brüche, um eine Zwischenzahl zu finden. 9 Personen (8%) fanden die Zahl durch Bildung des Mittelwertes und 10 Personen (9%) über das Verfahren der „falschen Addition".

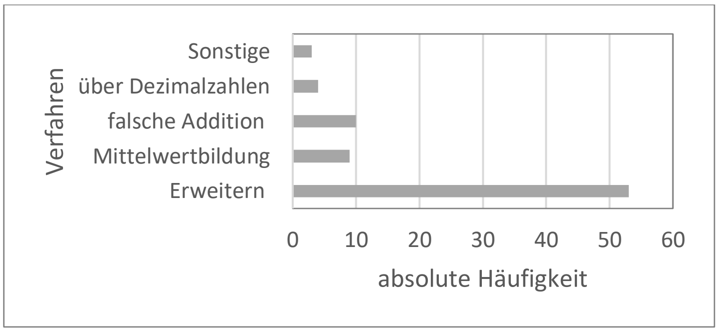


Abbildung 9: Verfahren zur Ermittlung einer Zwischenzahl

Entgegen der Aufgabenstellung leiteten 4 Personen einen korrekten Bruch über die Verwendung von Dezimalbrüchen her. 7 Personen gaben als Lösung einen Dezimalbruch an. Von den insgesamt 53 Studierenden, die das Erweitern nutzten, machten 44 Studierende die Brüche zunächst gleichnamig und erweiterten anschließend beide Brüche mit derselben Zahl, so dass sie einen Zähler fanden, der zwischen den Zählern der erweiterten Brüche lag („$\frac{1}{6} = \frac{5}{30}$ und $\frac{1}{5} = \frac{6}{30}$, $\frac{5}{30} = \frac{10}{60}$ und $\frac{6}{30} = \frac{12}{60}$. Die Zahl $\frac{11}{60}$ liegt zwischen $\frac{1}{6}$ und $\frac{1}{5}$ "(St110, Pos. 2-5)). Zusätzlich gab es eine Person (St061), die die Brüche gleichnamig machte, jedoch dann die Brüche $\frac{5}{30}$ und $\frac{6}{30}$ nicht stärker erweiterte und daher zu keiner Lösung fand. Eine Person (St009) erweiterte ebenfalls auf $\frac{5}{30}$ und $\frac{6}{30}$, setzte jedoch den anschließenden Rechenweg falsch fort. 5 Studierende erweiterten die Brüche bereits zu Beginn mit derselben Zahl, so dass sie einen Nenner fanden, der zwischen den Nennern der erweiterten Brüche lag. 4 Personen wählten eine Mischform („Durch erweitern: $\frac{10}{60}$ und $\frac{10}{50}$, z.B. $\frac{9}{50}$ und $\frac{11}{60}$ " (St103, Pos. 2-4)).

Im Interview übertrug Amina die Aufgabe spontan auf das Uhrenmodell und leitete auf diesem Weg den Bruch $\frac{11}{60}$ her.

> Ich denke dann immer gleich an die Uhr. Und stelle mir das bildlich vor, weil ein Fünftel zum Beispiel wäre das dann bei zwölf Minuten und ein Sechstel bei zehn Minuten und dazwischen sind halt elf Minuten. Dann müsste ich halt den Bruch finden, der für die elf Minuten passt […]. (Amina, Interview 1, Pos. 43)

Im Gegensatz zu Amina zweifelten die anderen Teilnehmer aus Interview 1 wiederholt an der Existenz einer Zwischenzahl („Weil wenn ich jetzt fünf und sechs sehen würde, würde ich erstmal denken, also bei dem Nenner, okay, da ist nichts zwischen." (Lennox, Interview 1, Pos. 57)) Die Frage nach einer Zahl zwischen 1/6 und 1/5 wurde von der zweiten Interviewgruppe über die Methode des Erweiterns mit Fokus auf den Zähler korrekt gelöst. Andere Methoden wie die Mittelwertbildung oder die falsche Addition fanden in den Interviews keine Anwendung.

Alle Zahlen zwischen $\frac{1}{6}$ und $\frac{1}{5}$

Abbildung 10 gibt die erzielten Punkte aus Teilaufgabe 15.1.b) wieder. 67 Studierende (60%) erreichte mit 1 Punkt die volle Punktzahl. 22% erreichte 0 Punkte, wobei 14 Studierende (13%) die Aufgabe nicht bearbeiteten.

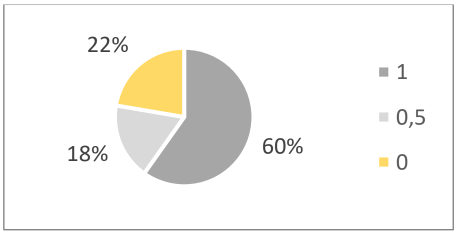


Abbildung 10: erzielte Punkte in Aufgabe 15.1.b)

Abbildung 11 gibt einen Überblick über die Antworten aus Aufgabe 15.1.b). Insgesamt 69% der Studierenden gaben an, dass es unendlich viele Zahlen zwischen den beiden Brüchen gibt, darunter waren 6 Studierende, deren Antwort als falsch bewertet wurde, weil sie entgegen der Aufgabenstellung über Dezimalzahlen argumentierten.

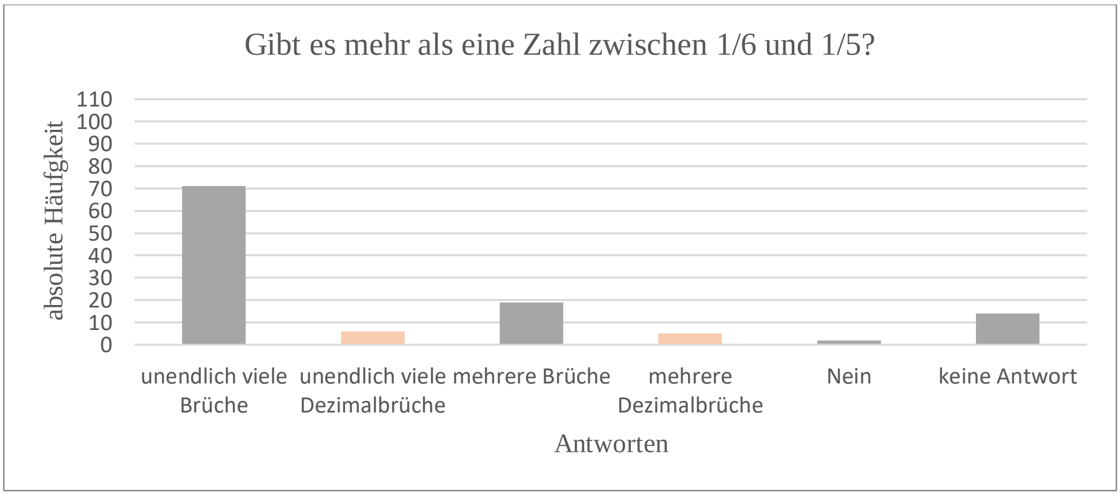


Abbildung 11: Aufgabe 15.1.b): häufigste Antworten

19 Studierende (17%) fügten ihrer Antwort die Begründung hinzu, dass sich Brüche immer stärker erweitern ließen. 2 Studierende gaben an, dass die Mittelwertbildung beliebig oft fortgesetzt werden könne und 6 Studierende (5%) gaben ein Intervall an. 1 Person gab Brüche einer Äquivalenzklasse an und begründete damit die unendliche Anzahl an Zwischenzahlen. Insgesamt 11 Studierende (10%) gaben eine endliche Zahl von korrekten Zwischenzahlen an, nahmen jedoch keinen Bezug zur Unendlichkeit. 2 Studierende gaben an, dass mehrere bzw. viele Zahlen zwischen $\frac{1}{6}$ und $\frac{1}{5}$ liegen. 2 Personen beantworteten die Frage ohne weitere Begründung mit nein.

Die Teilnehmer aus Interview 2 lösten die Aufgabe 15.1.b) korrekt. Sie beschrieben die unendliche Anzahl an Zwischenzahlen zwischen zwei Brüchen und waren in der Lage, über stärkere Erweiterung weitere Zwischenzahlen zu nennen. Die Darstellung der Aufgabe am Zahlenstrahl gelang unmittelbar, zusätzlich stellten die Teilnehmer den Bezug zum Streifenmodell her. Die Mehrzahl der Teilnehmer aus Interview 1 ging im Verlauf von einer einzigen Zahl ($\frac{11}{60}$) zwischen den Brüchen $\frac{1}{6}$ und $\frac{1}{5}$ aus, welche Amina zuvor über das Uhrenmodell hergeleitet hatte. Zusätzlich wurde die Existenz einer Zwischenzahl wiederholt angezweifelt („Oder es liegt doch nichts dazwischen?" (Lennox, Interview 1, Pos. 205)) Lediglich Amina gelang die Verbindung zur stärkeren Erweiterung und damit das Finden weiterer Zwischenzahlen. Die selbständige Darstellung am Zahlenstrahl bereitete Schwierigkeiten („Ich wüsste jetzt nicht in welchem Abstand man den Zahlenstrahl einteilen soll. Hat jemand eine Idee?" (Lennox, Interview 1, Pos. 168)) Das Ordnen gegebener Brüche am Zahlenstrahl war mit Schwierigkeiten verbunden. Lennox verhalf die Darstellung am Zahlenstrahl zunächst nicht zum Ergebnis („und wir sehen aber nicht, was jetzt dazwischen liegt."), hingegen konnte Amina den Sachverhalt lösen („Naja dazwischen liegt halt, wenn du dir jetzt zum Beispiel die fünfzehn Neunzigstel und die achtzehn Neunzigstel anguckst, liegen dazwischen sechzehn und siebzehn Neunzigstel" (Interview 1, Pos. 212-213)) So gelangten auch die Teilnehmer der ersten Diskussion im Verlauf zu der Erkenntnis, dass unendlich viele Brüche zwischen $\frac{1}{6}$ und $\frac{1}{5}$ liegen.

Die Gruppendiskussionen geben weitere Einblicke bezüglich des fachwissenschaftlichen Wissens der Studierenden, welche unter den Überschriften Lösungsstrategien sowie Grundvorstellungen und Rechenfähigkeiten auszugsweise dargestellt werden.

Lösungsstrategien

Im Verlauf der Gruppendiskussionen nutzen die Teilnehmer verschiedene Strategien, um Lösungen zu finden. Um Aufgabe 15.1. zu lösen, wandelten die Teilnehmer des ersten Interviews die Brüche entgegen der Aufgabenstellung in Dezimalbrüche um („Aber du kannst das ja vielleicht in deinem Kopf irgendwie machen. Schreibst das nur nicht auf." (Jana, Interview 1, Pos. 193)). Die Strategie der Umwandlung von Brüchen in Dezimalbrüche wurde wiederholt genutzt, jedoch traten bei der Umwandlung mitunter auch Fehler auf („Und ein Drittel im Dezimalbruch ist null Komma drei drei drei drei drei und ein Sechstel ist null Komma eins acht drei glaube ich und drei drei drei drei drei." (Amina, Interview 1, Pos. 313)). Eine andere Strategie bestand darin, einen Darstellungswechsel vorzunehmen und den Sachverhalt auf ein Modell zu übertragen. Neben dem Uhrenmodell nutzten die Interviewteilnehmer zur Veranschaulichung das Streifenmodell sowie das Kuchenmodell. Amina verwendete zusätzlich das Rechteckmodell, um die fehlerhafte Beispiellösung der Zwischenzahl $\frac{11}{30}$ zu überprüfen und die Größenverhältnisse zu veranschaulichen:

> Ich würde sagen, es ist nicht richtig. Weil...elf Dreißigstel- wenn man sich so- wenn <u>ich</u> mir so die Dreißigstel vorstelle: Es passen ja dreißig in eins. Das heißt ein Halb ist in Dreißigstel fünfzehn Dreißigstel und das wäre ja dichter an ein Halb als an null dran. Und deswegen ist es größer als die beiden. Soll ich es nochmal anmalen? (Interview 1, Pos. 90)

Der Zahlenstrahl fand wiederholt Anwendung, zeigte mitunter aber auch defizitäre Vorstellungen. Im Rahmen des Märchens stellte der Bruch ein Halb das Rätsel, auf dem Zahlenstrahl seinen nächstgrößeren Nachbarn zu nennen. Darauf antwortete Jana:

> Also ich finde es auch schwierig, in welchem Zahlenbereich man sich befindet, weil eigentlich halt so danach sozusagen 0,5 habe ich direkt an die eins gedacht, weil ich habe noch nie einen Zahlenstrahl gesehen, der halt irgendwie so in die Nachkommastellen reingeht (Interview 1, Pos. 38)

Grundvorstellungen und Rechenfähigkeiten

Die Untersuchung der fehlerhaften Beispiellösungen durch die Interviewteilnehmer gab weitere Einblicke in vorhandene Grundvorstellungen bzw. Fehlvorstellungen sowie die Sicherheit in der Durchführung von Rechenoperationen. Im zweiten Interview gelang es den Teilnehmern nach kurzer Zeit, die Verwechslung von Erweitern und Multiplikation in Beispiellösung 1 zu identifizieren. Die gleiche Fehleridentifikation gelang den

Teilnehmern des ersten Interviews erst nach langer Diskussion und offenbarte erhebliche Schwierigkeiten in der Ausführung und Notation des Erweiterns in Abgrenzung zur Multiplikation („Also, das war mit Sicherheit der Gedanke. Erst den Nenner gleich machen, dann wie du meintest zwischen fünf und sechs ist nichts und deswegen dann noch mal zwei." (Amina, Interview 1, Pos. 85)). Die Verwechslung von Erweitern und Multiplikation trat sowohl im Wissenstest als auch in den Interviews wiederholt auf und wurde als separate Farbmarkierung gekennzeichnet. Weitere Defizite bestanden in der Ausführung der Multiplikation Bruch mal Bruch oder Bruch mal natürliche Zahl sowie im Umwandeln natürliche Zahl in Bruch („Aber fünf Ganze sind doch fünf Fünftel oder nicht" (Tanja, Interview 1, Pos. 78)). Lösungsbeispiel 2 zielte auf Größenvorstellungen zu Brüchen ab. Drei Studierende äußerten, der Lösung nicht folgen zu können („Also da hätte ich gern eine Begründung, wie man auf diese Idee kommt. Also kann ich mir gerade auch nicht erklären wie man (...) den Nenner einfach um eins erweitert." (Carla, Interview 2, Pos. 60)). Zwei Studierende fanden hingegen korrekte Erklärungen:

> Denn wenn der Nenner ja immer größer wird, dann wird ja sozusagen der Wert der Zahl ja immer kleiner, denn wenn man es jetzt so aufteilt, dann muss man es ja sozusagen durch mehrere- mehr Personen aufteilen. Dann erklärt sich jetzt auch b) sage ich mal, weshalb sozusagen der Nenner mal größer wird (Jana, Interview 1, Pos. 129).

Beispiellösung 3 testet das Wissen zur Bruchzahl als Äquivalenzklasse wertgleicher Brüche. Während sich alle 8 Interviewteilnehmer mit dem Begriff der Äquivalenzklasse unsicher waren („Und <u>Äquivalenzklassen</u> weiß ich auch nicht, ob das der richtige Begriff dazu ist." (Hedy, Interview 2, Pos. 68)), verwendeten die Studierenden aus Interview 2 den Begriff der Bruchzahl und verfügten über das inhaltliche Verständnis wertgleicher Brüche (Carla: „Also sprich, dass das immer derselbe Bruch ist, wenn man ihn kürzt."; Nina: „Das Kind hätte schr- oder der Schüler hätte schreiben sollen die <u>Bruchzahl"</u> (Interview 2, Pos. 69-70)). Vier Teilnehmer des ersten Interviews hielten die gegebenen Brüche für unterschiedliche Zahlen, bis Amina den Fehler aufdeckte („Also was ich mich halt frage, ist, ob die Antwort richtig ist, weil die Zahlen bedeuten ja im Prinzip alle das Gleiche." (Amina, Interview 1, Pos. 154)). Einschränkungen zeigten sich auch in der Vorstellung von Unendlichkeit („Also ich tue mich irgendwie damit schwer zu- mir das vorzustellen <u>unendlich</u> viele Möglichkeiten zu haben, wie ich das Messer halte" (Lennox, Interview 1, Pos. 241)).

4.2 Fachdidaktisches Wissen

Kindgerechte Erklärung

In Aufgabe 15.2. erhielten 52 Studierende (46%) 1,5 oder 2 Punkte, zusätzlich 12 Studierende (11%) erzielten mit 1 Punkt die Hälfte der zu erreichenden Punktzahl (s. Abbildung 12). 43 Studierende (38%) erhielten 0 Punkte, darunter sind 30 Studierende (27%), die die Aufgabe nicht bearbeiteten.

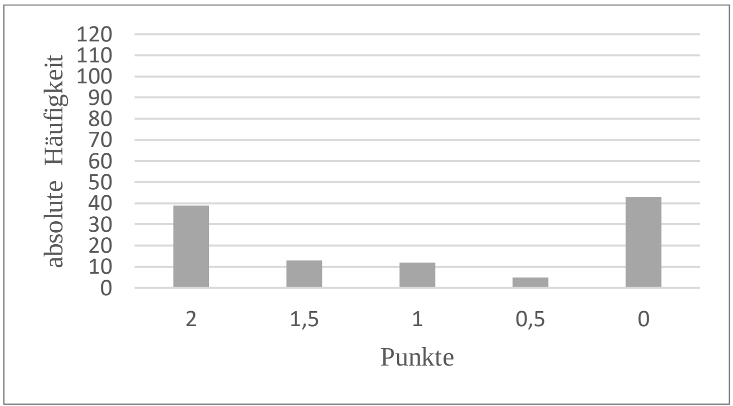


Abbildung 12: erzielte Punkte in Aufgabe 15.2.

Abbildung 13 gibt einen Überblick, welchen Weg die angehenden Lehrkräfte wählten, um den SuS die Aufgabe 15.1. zu erklären.

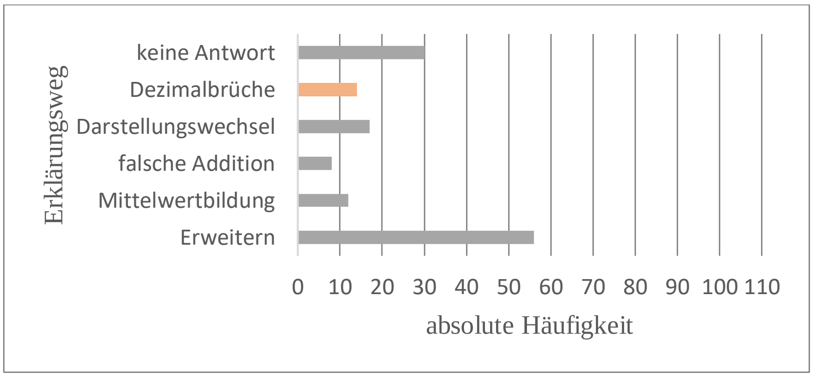


Abbildung 13: kindgerechte Erklärung

56 Personen erklärten die Lösung der Aufgabe über das Erweitern der Brüche:

> Zu a) Du kannst die Aufgabe lösen, in dem du den Bruch verfeinerst. Das heißt, der Nenner wird immer größer, der Zähler wird um den gleichen Faktor erweitert. Wenn der Nenner immer größer wird, so werden die einzelnen Teilstücke immer kleiner. Wenn du einen Kuchen in 5, 30, 60,… Stücke teilst, werden diese Stücke ja auch immer kleiner und kleiner.
> Zu b) Wenn du immer und immer wieder verfeinerst, findest du immer noch einen

Bruch der dazwischen liegt. Und wenn du diesen neuen Bruch wieder verfeinerst, ebenso wie den anderen, dann gibt es wieder einen neuen. Du kommst nicht zum Ende. Damit sind es unendlich viele dazwischen. (St110, Pos. 9-10)

12 Personen (11%) nutzen die Mittelwertbildung zur Erklärung und 8 Personen (7%) das Verfahren der „falschen Addition". Insgesamt 17 Studierende (15%) nutzten einen Darstellungswechsel, um einem Kind die Lösung der Aufgabe zu erklären. Zur Visualisierung nutzten 4 Personen den Zahlenstrahl:

Wenn ich einen Zahlenstrahl habe und trage die Werte dort ein und die Maßeinheit ist 30-stel, dann sieht es so aus, als wäre da nichts dazwischen. Wenn ich aber jetzt die Einheit einmal verfeinere auf 60stel, dann passt schon die $\frac{11}{60}$ dazwischen. Wenn ich beliebig oft weiter verfeinere, noch genauer wie mit einem Zoom mir den Ausschnitt immer genauer (größer) ansehe, entdecke ich sehr viele Zahlen (unendlich viele Zahlen) dazwischen. (St087, Pos. 8)

4 weitere Personen nutzten zur Erklärung das Kreismodell und 1 Person das Streifenmodell:

a) Das Kind könnte diese Aufgabe lösen, in dem es zunächst beide Brüche erweitert auf einen gemeinsamen Nenner und dann die beiden Brüche addiert. So erhält es zunächst die Summe beider Brüche. Da wir eine Zahl dazwischen wollen können wir nun diesen entstandenen Bruch durch 2 teilen. Damit erhalten wir genau die Mitte beider Brüche.

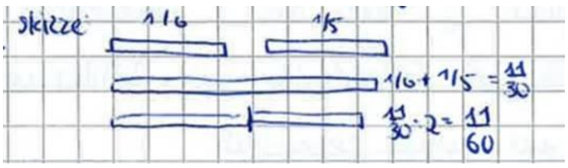


Abbildung 14: Streifenmodell (St073, Pos. 9-10)

Insgesamt 8 Personen stellten einen Lebensweltbezug her und nutzten Beispiele mit einem Alltagsbezug zur Erklärung. So erklärt St007 die „falsche Addition" wie folgt:

Stell dir vor du hast 2 Tüten Gummibärchen, in der einen ist ein grünes Gummibärchen von insgesamt 6 und in der anderen ist auch ein Grünes, aber von insgesamt 5, weil du schon eins genascht hast. Wenn du die beiden Mengen zusammenfügst hast du ja insgesamt 2 grüne Gummibärchen aus insgesamt 11 und somit liegt $\frac{2}{11}$ zwischen $\frac{1}{6}$ und $\frac{1}{5}$. (St007, Pos. 13)

14 Personen nahmen in ihrer Erklärung Bezug auf die Dezimalbrüche und erhielten dafür aufgrund der Aufgabenstellung keine Punkte.

Die Interviews brachten zusätzliche Ergebnisse. So antwortete Tanja auf die Frage nach einer kindgerechten Erklärung, dass sie nicht wisse, wie sie die Aufgabe einem Kind erklären solle:

> Aber ich wüsste halt auch nicht, wie man das kindgerecht macht. Ich hätte da auch meine Probleme bei. Auf die Lösung selber zu kommen, war ja für mich schon schwer genug und dann einem Kind zu erklären ist ja endless. Also- schwierig. (Tanja, Interview 1, Pos. 230)

Zwei Studierende brachten an, die Aufgabe zunächst zu vereinfachen („Ich glaube ich würde anfangen, indem ich erstmal gar nicht zwei unterschiedliche Brüche von den Nennern her wähle, sondern erst einmal zum Beispiel: Welche Zahl liegt zwischen ein Fünftel und vier Fünftel?" (Amina, Interview 1, Pos. 234)). Ebenso benannten die Studierenden mehrfach das Prinzip des Darstellungswechsels („Man müsste das denen auf jeden Fall mal irgendwie veranschaulichen. Also es ist ja meistens so, dass man Kindern irgendwie ein Bild zeigen muss, damit sie sich das vorstellen können." (Jana, Interview 1, Pos. 235)) Das Vorstellungsbild der zwei Kannen mit Apfelsaftschorle mit unterschiedlichen Mischverhältnissen konnte von keiner Interviewperson auf den Inhalt der Aufgabe übertragen werden („Ich weiß nicht. Für mich würde das Zusammenkippen keinen Sinn machen, etwas dazwischen zu finden" (Carla, Interview 2, Pos. 129)). Die Teilnehmer brachten das Vorstellungsbild mit der Addition in Verbindung („Vor allem weil man ja dann addieren würde." (Nina, Interview 2, Pos. 131)). Die Teilnehmer der zweiten Gruppe brachten eigene Vorschläge wie beispielsweise das Streifenmodell an, bewerteten jedoch den Zahlenstrahl als bevorzugte Veranschaulichung.

Schülerprobleme

Abbildung 15 zeigt die erzielten Punkte aus Aufgabe 15.3. zu der Frage nach Problemen von SuS beim Lösen der Aufgabe. 42% der Studierenden erreichten mit 3 Punkten die volle Punktzahl. Zusätzliche 7% erreichten 2 oder 2,5 Punkte. 20% erhielten 0 Punkte.

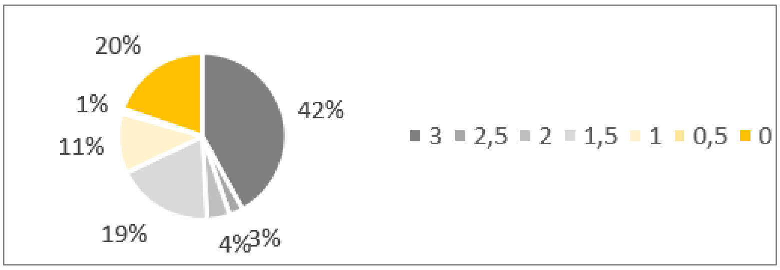


Abbildung 15: erzielte Punkte in Aufgabe 15.3.

Abbildung 16 stellt die häufigsten Antworten der Studierenden dar. 10 Studierende (9%) gaben Probleme in der Grundvorstellung von Brüchen an. 15 Studierende (13%) nannten Probleme in der Grundvorstellung von Größen von Brüchen („Ein mögliches Problem ist ein fehlendes Verständnis der Größe von Brüchen. Demnach könnte ein Kind denken $\frac{1}{6}$ wäre größer als $\frac{1}{5}$, da die 6 größer ist als die 5." (St011, Pos. 9))

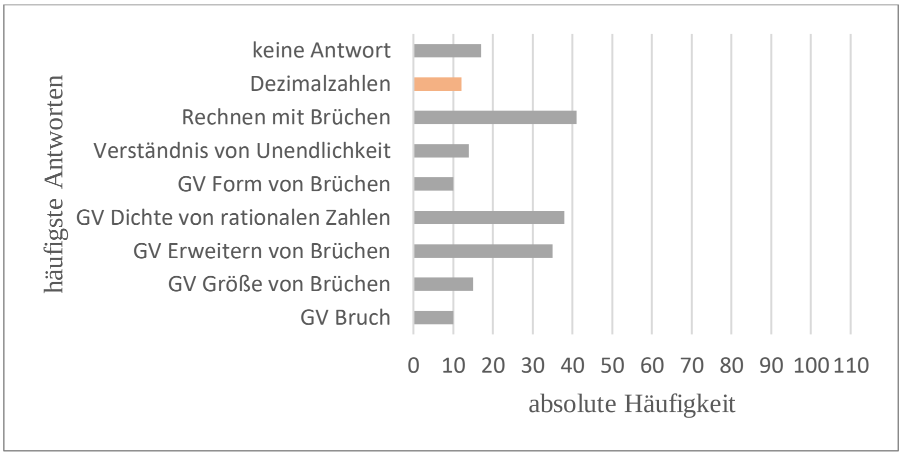


Abbildung 16: Schülerprobleme: häufigste Antworten

35 Personen (31%) nannten Schwierigkeiten in der Vorstellung des Erweiterns von Brüchen („Mangelndes Verständnis der Bruchzahlen → Verstehen nicht, dass man Brüche erweitern und kürzen kann ohne Wertigkeit zu ändern" (St105, Pos. 10-11)) 38 Studierende (34%) führten Schwierigkeiten in der Grundvorstellung der Dichte von rationalen Zahlen auf („Sie können denken, dass es keine Zahl dazwischen gibt, da zwischen 5 und 6 keine Zahl existiert." (St015, Pos. 8)). 10 Personen nannten Probleme in der Grundvorstellung zu der Form von Brüchen („Auch kann eine Schwierigkeit darin bestehen, dass das Kind denkt, um eine Zahl dazwischen zu finden, müsste es etwas wie 6,5 in den Nenner schreiben. Dezimalzahlen können jedoch nicht im Bruch stehen." (St011, Pos. 10)). 14 Personen (13%) nannten Schwierigkeiten in der Vorstellung von Unendlichkeit („Sie könnten Probleme beim Verständnis vom Begriff der Unendlichkeit haben, da sie sich nur schwer vorstellen können, was ´unendlich´ ist. Sie könnten denken, dass die 2 Brüche einen Rahmen darstellen, in dem nur endlich viele Zahlen sind." (St093, Pos. 11)) Insgesamt 41 Studierende (37%) führten Probleme beim Rechnen mit Brüchen auf, wobei sich die meisten Antworten (23%) auf Rechenfehler beim Erweitern bezogen („SuS können Brüche nicht erweitern, indem sie Nenner und Zähler gleichermaßen multiplizieren." (St110, Pos. 14)). Andere nannten Rechenfehler bei der Bildung eines

gemeinsamen Nenners (6%), jeweils 3 Personen nannten Rechenfehler bei der Division oder Addition von Brüchen. 9 Studierende (8%) führten Schwierigkeiten im Verständnis von Dezimalzahlen oder der Umwandlung von Brüchen in Dezimalzahlen an, 3 Personen hingegen benannten als Schwierigkeit der Aufgabe, dass Dezimalzahlen nicht verwendet werden dürfen. 17 Studierende (15%) haben die Aufgabe nicht bearbeitet.

Auf die Frage nach typischen Schülerproblemen beim Lösen der Aufgabe benennt Tanja im Interview das Aufgabenformat:

> Ja für mich war es die allgemeine Herangehensweise an die Aufgabe. Wie löse ich es? Da dachte ich echt- ein Rausch im Kopf (...) Und ich glaube, weil es auch nicht- also wir haben herausgefunden, dass jetzt ganz viele Sachen man irgendwie nennen könnte. Das es halt kein explizites Ergebnis gibt. Okay, dass, ich sag mal drei, ist es tatsächlich nicht- nicht eine Lösung gibt, sondern viele Herangehensweisen. (Tanja, Interview 1, Pos. 253)

Als weitere Schwierigkeiten wurden im Interview ebenfalls das Größenverständnis für Brüche sowie das Verständnis des Erweiterns und das Verständnis wertgleicher Brüche wie auch die Vorstellung von Unendlichkeit und der Dichte genannt:

> Na die Vorstellung der Unendlichkeit muss ja erstmal da sein. Was das bedeutet. Also gerade dann auch noch- Also man hat ja vorher irgendwie man hat ja nur die ganz- äh, die natürlichen Zahlen und vielleicht auch noch die anderen Zahlen. Aber dass das immer so weiter läuft- aber dass auch dieser Bereich dazwischen unendlich weiter gehen kann. Das merke ich selbst als Erwachsener. Klar weiß ich das theoretisch, aber dieses- ich finde es nicht so greifbar wie bei den natürlichen Zahlen, dass da immer noch mehr dazwischen passt. (Carla, Interview 2, Pos. 135)

4.3 Metakognitives Wissen

Die Antworten aus Aufgabe 15.4. werden dem metakognitiven Wissen zugeordnet (s. 3.2)

Wesentliche Eigenschaften von rationalen Zahlen

Abbildung 17 gibt eine Übersicht über die in Aufgabe 15.4. erzielten Punkte. 16 Studierende (14%) erzielten die volle Punktzahl (2 Punkte), 3 Personen erzielten 1,5 Punkte und 29 Personen (26%) erzielten die Hälfte der Punktzahl. 53 Studierende (47%) erhielten 0 Punkte. Hierzu zählen 24 Studierende (21%), die die Teilaufgabe nicht bearbeitet haben und zusätzlich 29 Personen (26%), deren Antwort als falsch bewertet wurde.

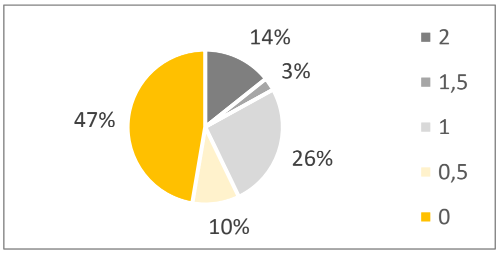


Abbildung 17: erzielte Punkte in Aufgabe 15.4.

Eine Übersicht über die häufigsten Antworten der Studierenden auf die Frage nach wesentlichen und für die Lösung der Aufgabe relevanten Eigenschaften von rationalen Zahlen im Unterschied zu natürlichen Zahlen ist in Abbildung 18 dargestellt. Insgesamt 51 Personen (46%) nahmen Bezug zur Dichte von Brüchen, davon 7 Personen, die angaben, dass rationale Zahlen keinen eindeutigen Vorgänger bzw. Nachfolger besitzen („bei Natürlichen Zahlen kann man genau sagen, welche Zahl der Nachfolger ist, bei rationalen nicht" (St030, Pos. 14)) und 28 Personen, die angeben, dass zwischen zwei Zahlen unendlich viele andere Zahlen existieren („Es gibt zwischen zwei Zahlen immer eine weitere Zahl." (St082, Pos. 15))

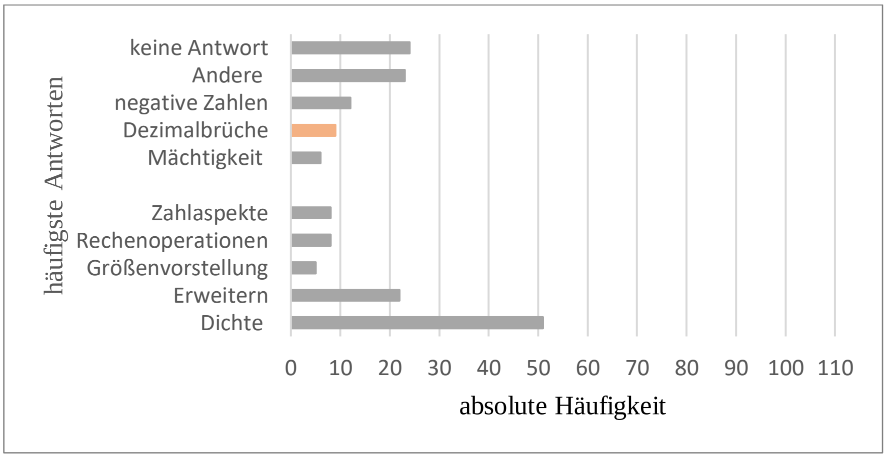


Abbildung 18: wesentliche Eigenschaften von rationalen Zahlen: häufigste Antworten

9 Studierende bezogen sich in ihrer Argumentation auf Dezimalbrüche („Dezimalbrüche können unendlich viele Nachkommastellen haben, womit sie den Platz zwischen zwei natürlichen Zahlen füllen." (St031, Pos. 18)) 22 Personen (20%) gaben als Unterschied an, dass sich Brüche beliebig erweitern lassen. 5 Studierende nannten Änderungen in der Größenvorstellung, 8 Studierende (7%) gaben Unterschiede in den Rechenoperationen an („zwischen zwei Zahlen p, q $\in \mathbb{Q}$ kann immer der Mittelwert gebildet werden" (St071, Pos. 18)) Weitere 8 Personen benannten Unterschiede in den Zahlaspekten. 6 Studierende waren der Meinung, dass die Mächtigkeit der rationalen Zahlen größer wäre als die

Mächtigkeit der natürlichen Zahlen („größere Mächtigkeit der rationalen Zahlen" (St015, Pos. 11)). Die in Abbildung 18 als *Andere* bezeichneten Antworten umfassen 12 allgemeine Aussagen zu den Zahlenbereichen und weitere 11 Aussagen, die sich keiner anderen Kategorie zuordnen lassen. 11 Studierende nannten als wesentliche Eigenschaft die Teilmenge der ganzen Zahlen („Rationale Zahlen können auch negativ sein, natürliche Zahlen nicht ” (St020, Pos. 12)). 9 Studierende bezogen ihre Antwort auf Dezimalbrüche („Rationale Zahlen können ein Komma besitzen, wie z.B. 1,45. Natürliche Zahlen besitzen dies nicht, z.B. 1,2,3” (St020, Pos. 11)). 24 Studierende (21%) gaben keine Antwort.

Im ersten Interview stellte sich bei der Frage nach wesentlichen Eigenschaften von rationalen Zahlen im Unterschied zu den natürlichen Zahlen heraus, dass vier von fünf Personen über fehlerhafte Vorstellungen zu den Zahlbereichen verfügen:

> Also natürliche Zahlen sind ja nicht nur ganze Zahlen, ne? Also sonst könnte man ja sagen, wenn wir fünf und sechs haben, da liegt nichts zwischen. Wenn wir jetzt in den ganzen Zahlen wären. Aber natürliche Zahlen beinhalten ja noch? Genau. Die Dezimalzahlen. Würde ich auch sagen. (Lennox, Interview 1, Pos. 259)

Amina war hingegen in der Lage, die Zahlbereiche korrekt zu beschreiben („Erst kommen die natürlichen Zahlen, dann kommen die ganzen Zahlen, dann kommen die-, dann gibt es noch die- dann kommen die rationalen Zahlen, dann die reellen Zahlen." (Interview 1, Pos. 268)) Die Beispiellösung ´Dezimalzahlen: Zwischen zwei Zahlen gibt es unendlich viele andere Zahlen.´ (Interview 1, Pos. 273) zeigten jedoch Unsicherheiten bei Amina.

> Aber war das nicht falsch? Wir hatten doch mal, da muss ich gerade an diese - wir hatten doch in den Übungen- haben wir doch darüber diskutiert, ob die Menge der natürlichen Zahlen größer ist oder die Menge der ganzen Zahlen jetzt. Und rein logisch hätte man ja gedacht, dass die ganzen Zahlen größer sind als die natürlichen Zahlen. Und dann hatten wir das mit dem Hotel und dann hatten wir irgendwie nochmal- den irgendwie so- zwischen fünf und acht und da war meiner Meinung nach, dass es da nicht unendlich viele gibt. Zwischen zwei bestimmten Zahlen. Aber da bin ich mir gerade auch nicht sicher. (Interview 1, Pos. 276)

Lennox hingegen argumentierte: „Na du kannst ja immer noch eins dran hängen hinter dem Komma. Immer noch weiter gehen. Irgendwann- also die Periode" (Interview 1, Pos. 277) Die erste Gruppe brachte die Beispiellösung im Gegensatz zur zweiten Gruppe nicht in Verbindung mit Bruchzahlen und zeigte Schwierigkeiten, für die Aufgabe relevante Eigenschaften von irrelevanten Eigenschaften zu unterscheiden. Einigkeit bestand unter den Teilnehmern hinsichtlich der Eigenschaft, dass Brüche beliebig oft erweiterbar sind.

Die Einstiegsfrage nach einer unlösbaren Aufgabe für den Drachen im Rahmen des Märchens erfordert ebenfalls ein hohes Maß an metakognitivem Wissen. Die Teilnehmer des ersten Interviews waren nicht in der Lage, eine unlösbare Aufgabe zu formulieren. Auch die Auflösung des Rätsels war für Tanja zunächst nicht nachvollziehbar: „Also ich wäre erstmal verwirrt. Ich wäre erstmal raus. Ich würde die nächste Aufgabe nehmen oder ich hätte freiwillig (unv.) etwas anderes gegessen außer Bruchzahlen." (Tanja, Interview 1, Pos. 36)). Im zweiten Interview hingegen fand Hedy eine selbständige Lösung:

> Man könnte sagen, er soll alle Brüche zwischen denen nennen, dann wäre er ja nicht fertig damit, weil er ja immer weiter erweitern kann und immer mehr Brüche findet, die dazwischen liegen. Also es wäre dann so eine unendliche Aufgabe. Dann ist er sehr lange damit beschäftigt. (Hedy, Interview 2, Pos. 18)

Reflexion Lernprozess

Die Kategorie *Lösungsstrategien* beinhaltet u.a. die Reflexion der Studierenden über ihren eigenen Lernprozess sowie Lösungswege auf einer metakognitiven Ebene. Während der Interviews betonten die Studierenden, dass die Veranschaulichung anhand geeigneter Modelle für sie eine große Hilfe sei, um inhaltliches Verständnis zu entwickeln. Die Teilnehmer der zweiten Gruppe betonten die Bedeutung von Handlungen auf der enaktiven Ebene und Darstellungen auf der ikonischen Ebene für die Ausbildung der eigenen Grundvorstellungen:

> Also für mich persönlich fand ich es am schwierigsten wirklich diese mal-Multiplikation und die Division, wenn es um die Brüche ging. Und da glaube ich war auch der Knackpunkt dann durch die Seminare, dass ich dann hier und da besser verstanden habe durch wirklich gute bildliche Vorstellungen. Also genau, das war- hat mir auf jeden Fall sehr geholfen. Da hat nämlich ein Mitstudierender mir das mit der Division erklärt mit Karl´s Erdbeeren und ich glaube in dem Moment hat es bei mir erstmal so richtig Klick gemacht. Also warum die Division größer ist danach bei Brüchen. Da sind wir wieder bei dem Thema halt Grundvorstellung […]. Ist halt, wenn man das immer nur plastisch alles so übt, denn theoretisch, dann macht man es halt, aber man versteht es halt irgendwie nicht und er hatte das halt ganz cool erklärt. Wenn er halt sechs Packungen Erdbeeren hat und davon jeweils die Hälfte rausnimmt, also sie teilt, hat man ja am besten- hat man ja am Ende zwölf Packungen Erdbeeren. Oder man hat halt zwölf Schalen dann. Hat dadurch mehr so. Also die Zahl wird halt größer. Und seitdem hat es erstmal- kam so dieses Verständnis dafür. Es sind zwar weniger Erdbeeren in der Schale, aber ich habe im Endeffekt ja mehr Schalen zum Verkaufen. Das war so cool. (Carla, Interview 2, Pos. 175)

Auch die Teilnehmer des ersten Interviews benannten den Darstellungswechsel als hilfreiche Strategie im Lösungsprozess („Also die Denkweise hätte ich tatsächlich gern.

Das macht es eindeutig einfacher, wenn man es sich aufzeichnet." (Jana, Interview 1, Pos. 98)) Amina fand eine Zahl zwischen $\frac{1}{6}$ und $\frac{1}{5}$, indem sie das Uhrenmodell anwendete und löste damit Erstaunen der restlichen Gruppe aus:

> **Lennox:** Krass, wenn das so funktioniert ist das eine super Taktik. Das stimmt. Weil wenn ich jetzt fünf und sechs sehen würde, würde ich erstmal denken, also bei dem Nenner okay, da ist nichts zwischen. Aber wie du es erklärt hast, da ist tatsächlich etwas dazwischen
> **Jana:** Hast du das in der Schule gelernt?
> **Amina:** Ne. Das ist irgendwie- ich weiß nicht, das ist so bei mir drin. Das kann ich nicht erklären. (Interview 1, Pos. 57-59)

Neben dem eigenen Lernprozess wurde auch die Bedeutung für den Lernprozess der SuS beschrieben:

> Diese Rechtecke sage ich jetzt mal. Ich hoffe das ist das Rechteckmodell. Das fand ich sozusagen nochmal sehr hilfreich, weil ich mich selber auch sehr oft ertappt habe, dass ich es einfach nur angewendet habe. Kehrwert, bla, multiplizieren, dass man da überhaupt nicht darüber nachdenkt. Oder auch welche Brüche können dazwischen liegen und und und. Dass das glaube ich wichtig ist, dass man das wirklich mal- Schon in der Grundschule, weil so wurde es mir noch nie erklärt. Ich bin mir da relativ sicher, dass es bei uns hieß: ´Wenn du dividierst, nimmst du den Kehrwert.´ Und dann war es das so mehr oder weniger. Und das ist halt total schade, weil das ist ja von dem- vom Verständnis her, wenn man das gut aufbaut, glaube ich, kann man das da auch ganz gut vemitteln, warum das so ist oder warum das mehr wird. Dass man da nochmal expliziter darauf eingeht in den Schulen. (Nina, Interview 2, Pos. 177)

4.4 Motivationale Aspekte

Verschiedene Erhebungsinstrumente geben Einblick in motivationale Aspekte.

Gefühl

Im Interview wurden die Personen nach dem Gefühl gefragt, welches sie mit der Bruchrechnung in Verbindung bringen. Insgesamt gab es 10 positive Gefühlsäußerungen:

> Also ich habe entspannt und gelassen, selbstsicher und wünschend/sehnsüchtig. Mit Bruchrechnung hatte ich eigentlich noch nie ein Problem und dieses wünschend und sehnsüchtig habe ich eingekreist, weil es vielleicht noch so ein paar kleine Dinge gibt, die jetzt nicht unbedingt mit dem Rechnen zu tun haben, sondern dann damit wie man es den Kindern erklärt (Amina, Interview 1, Pos. 21)

Demgegenüber stehen 9 negative Gefühlsäußerungen („Und ängstlich und eingeschüchtert auch, weil Bruchrechnung so gar nicht meins ist, auch noch nie war" (Tanja, Interview 1, Pos. 22)). Die mit Bruchrechnung in Verbindung gebrachten Gefühle sind der Wortwolke in Abbildung 19 zu entnehmen. Die meist genannten Antworten waren *selbstsicher*, *neugierig/interessiert* und *skeptisch*.

Abbildung 19: Gefühle in Bezug auf Bruchrechnung (eigene Darstellung)

Nutzungshäufigkeit der Lernangebote

In den Interviews erfolgte zusätzlich eine quantitative Umfrage bezüglich der Nutzungshäufigkeit der Lehrveranstaltungsangebote (s. Tabelle 7 und 8). 1 Person gab an, die Vorlesungsvideos nie angesehen zu haben. 7 Personen gaben an, an den Übungen immer teilgenommen zu haben, 1 Person habe oft teilgenommen.

	nie	selten	oft	immer
Ich habe mir die Vorlesungsvideos zur Bruchrechnung angesehen	20%	0%	20%	60%
Ich habe an den Übungen zum Thema Bruchrechnung teilgenommen	0%	0%	20%	80%
Ich habe die Selbsttests zum Thema Bruchrechnung absolviert	60%	40%	0%	0%
Ich habe das Hausaufgabentutorium besucht	60%	20%	0%	20%

Tabelle 7: Umfrageergebnisse aus Interview 1

	nie	selten	oft	immer
Ich habe mir die Vorlesungsvideos zur Bruchrechnung angesehen	0%	0%	0%	100%
Ich habe an den Übungen zum Thema Bruchrechnung teilgenommen	0%	0%	0%	100%
Ich habe die Selbsttests zum Thema Bruchrechnung absolviert	33%	0%	0%	67%
Ich habe das Hausaufgabentutorium besucht	33%	67%	0%	0%

Tabelle 8: Umfrageergebnisse aus Interview 2

4 der 8 Personen gaben an, die Selbsttests nie absolviert zu haben, 2 Personen absolvierten diese selten und 2 Personen immer. 1 Person gab an, das Hausaufgabentutorium immer besucht zu haben, 3 Personen besuchten das Tutorium selten und 4 nie (vgl. Tabelle 7 und 8). Die offene Frage, welche Lernangebote den Studierenden beim Verständnis des Themas zusätzlich geholfen hätten, wurde lediglich von 2 Studierenden beantwortet. Tanja gab den Wunsch nach zusätzlichen Basisaufgaben an, Amina wünschte sich „noch mehr kindliche Erklärungen" (Interview 1). Vor Beginn des Interviews teilte Ida im Gespräch mit, dass sie als Inklusionsstudierende die Hausaufgaben zur Lehrveranstaltung Arithmetik und ihre Didaktik II aufgrund von Zeitmangel nicht bearbeitet hätte, ihr jedoch der Austausch mit der Hausaufgabengruppe im Vergleich zum vorangegangenen Semester sehr fehlen würde (persönliches Gespräch, 30. August 2021). In der Umfrage teilte Ida mit, dass sie immer an den Übungen teilgenommen habe, dagegen nie die Vorlesungsvideos gesehen habe, nie die Selbsttests absolviert habe und nie das Hausaufgabentutorium besucht habe.

Evaluation

88 der insgesamt 156 Studierenden nahmen am Ende der Lehrveranstaltung an einer schriftlichen Evaluation teil. Die Frage nach der Motivation, sich intensiv mit den Inhalten der Lehrveranstaltung auseinanderzusetzen, beantworteten insgesamt 31% der Befragten mit *trifft gar nicht zu* oder trifft *eher nicht zu* (s. Tabelle 9; vgl. Feedback zur Fachwissenschaft und Fachdidaktik in der Lehrveranstaltung, 2021).

In dieser Lehrveranstaltung war ich motiviert, mich intensiv mit den Inhalten auseinanderzusetzen.	trifft gar nicht zu	trifft eher nicht zu	trifft eher zu	trifft völlig zu	Gesamt
absolut	5	22	50	11	88
in Prozent	6%	25%	57%	12%	100%

Tabelle 9: Evaluationsergebnisse zur Motivation (Feedback zur Fachwissenschaft und Fachdidaktik in der Lehrveranstaltung, 2021)

25 der Befragten (28%) waren der Meinung, das in der Lehrveranstaltung vermittelte mathematische Wissen über rationale Zahlen im späteren Beruf nicht zu brauchen (s. Tabelle 10; vgl. Feedback zur Fachwissenschaft und Fachdidaktik in der Lehrveranstaltung, 2021).

Ich bin überzeugt, dass ich das mathematische Wissen über rationale Zahlen, das in der Vorlesung vermittelt wurde, in meinem späteren Beruf brauche.	trifft gar nicht zu	trifft eher nicht zu	trifft eher zu	trifft völlig zu	Gesamt
absolut	2	23	44	19	88
in Prozent	2%	26%	50%	22%	100%

Tabelle 10: Evaluationsergebnisse zur Relevanzzuschreibung (Feedback zur Fachwissenschaft und Fachdidaktik in der Lehrveranstaltung, 2021)

5 Diskussion der Ergebnisse

5.1 Zusammenfassung und Interpretation der Ergebnisse

Gemessen an der Gesamtpunktzahl erzielten die Studierenden im Wissenstest in Aufgabe 15 insgesamt 53 % der Punkte. Mit dem Hintergrund, dass die Lehrveranstaltung Arithmetik und ihre Didaktik I und II als Grundlagenseminar für das weitere Studium fungiert und die Ausbildung den entscheidenden Grundstein für die spätere Berufspraxis legt (s. 2.1.1), ist das Ergebnis als unbefriedigend einzustufen. Mit Blick auf die Ergebnisse der Teilaufgaben lässt sich feststellen, dass die Lösungshäufigkeit mit 71% und 69% in Aufgabe 15.1 höher ist als die Lösungshäufigkeit von 50% in Aufgabe 15.2. und 61% in Aufgabe 15.3. Am geringsten stellt sich die Lösungshäufigkeit von Aufgabe 15.4. mit 32 % dar. Damit schneiden die Studierenden in den Aufgaben zum fachwissenschaftlichen Wissen besser ab als in den Aufgaben zum fachdidaktischen Wissen, am niedrigsten waren die Ergebnisse zum metakognitiven Wissen. Einerseits stellt das fachdidaktische Wissen einen eigenen Wissensbereich dar, andererseits sei an die Ausführungen von Baumert und Kunter erinnert, die ein solides Fachwissen als Voraussetzung für die Entwicklung von fachdidaktischem Wissen erklären. Ohne ausreichende fachwissenschaftliche Grundlage ist es folglich nicht möglich, den mathematischen Inhalt didaktisch aufzubereiten (s. 2.1.1). Die erreichten 61% der Punkte in Aufgabe 15.3. übersteigen die erzielten 50% der Punkte in Aufgabe 15.2. und zeigen, dass es den Studierenden bezüglich des fachdidaktischen Wissens offensichtlich leichter fällt, Schwierigkeiten der SuS im Lernprozess nachzuvollziehen als den mathematischen Inhalt kindgerecht zu erklären.

Nachdem Cierpinski 2019 eine sehr ähnliche Untersuchung durchführte und aus den Ergebnissen Änderungsvorschläge für die Durchführung der Lehrveranstaltung ableitete, ist ein Vergleich der Ergebnisse von Interesse. In der Klausur 2019 waren knapp 62% der Studierenden in der Lage, eine korrekte Zahl zwischen zwei Brüchen zu nennen, in der vorliegende Untersuchung fanden 71% der Studierenden eine korrekte Zahl. Etwa 44% der Studierenden nahmen 2019 beim Finden einer Zwischenzahl Bezug zur Unendlichkeit, demgegenüber stehen 69% in der aktuellen Untersuchung. Die Zahlen weisen auf einen deutlichen Zuwachs bezüglich des Wissens über die Dichte von Bruchzahlen hin. Die Lösungshäufigkeit von Teilaufgabe 2 lässt ebenfalls eine positive Steigerung erkennen, so erreichten 2019 rund 15% der Studierenden für ihre kindgerechte Erklärung die volle Punktzahl, im aktuellen Wissenstest waren es 34%. Die Frage nach Schülerproblemen wurde 2019 von 47 % der Studierenden richtig gelöst, in der vorliegenden Untersuchung war der Anteil von 42% etwas geringer. Im Unterschied zur aktuellen Wissenstestaufgabe erhielt die damalige Aufgabenstellung nicht die Einschränkung, die Aufgabe ohne Verwendung von Dezimalbrüchen zu lösen, was den Antwortspielraum vergrößerte. Teilaufgabe 4 lässt sich nicht vergleichen, da die Aufgabenformulierung erheblich verändert wurde.

Die aktuellen Ergebnisse lassen Rückschlüsse auf die verschiedenen Wissensbereiche zu.

Fachwissenschaftliches Wissen

Ordnet man die Antworten aus dem Wissenstest in das Modell der Niveaustufen des Verständnisses der Dichte von Vamkoussi und Vosniadou (s. 2.2.3) ein, so sind 68 Studierende (61%) der Niveaustufe 5 (mathematisch dicht), 4 Studierende der Niveaustufe 4 (naiv dicht), 21 Studierende (19%) der Stufe 2 (fortgeschritten dicht) und 5 Studierende (4%) der Stufe 1 (naiv dicht) zuzuordnen (s. Tabelle 11).

Niveaustufe	0	1	2	3	4	5
Bezeichnung	fehlendes Wissen	naiv diskret	fortgeschrit-ten dicht	diskret dicht	naiv dicht	mathemat. dicht
Anteil der Studierenden	12%	4%	19%	0%	4%	61%

Tabelle 11: Einordnung der Ergebnisse in das Stufenmodell des Verständnisses der Dichte von Bruchzahlen

Jene 14 Studierende, die die Aufgabe 15.1.b) nicht beantworteten, wurden der von Neumann ergänzten Stufe 0 (fehlendes Wissen) zugeordnet, jedoch lässt sich hier keine eindeutige Zuordnung treffen, da auch andere Ursachen wie beispielsweise Zeitmangel für die fehlenden Antworten in Frage kommen. Von den 8 Interviewteilnehmern sind 3 Personen (Hedy, Nina und Carla) der Stufe 5 zuzuordnen, 1 Person der Stufe 3 (Amina) und 4 Personen der Stufe 1 (Lennox, Tanja, Ida, Jana). Damit liegen die Ergebnisse der vorliegenden Arbeit bezüglich des Verständnisses der Dichte von rationalen Zahlen weit über den Ergebnissen der in 2.2.3 vorgestellten Forschungsergebnisse. Bedenkt man jedoch, dass das „Erklären der Dichtheit der gebrochenen Zahlen auch am Zahlenstrahl (im Sinne von: Zwischen zwei gebrochenen Zahlen ist immer noch eine weitere.)" (LISUM, 2015) im Rahmenlehrplan Berlin-Brandenburg als Inhalt der fünften bzw. sechsten Klasse genannt wird (s. 2.2.5), stellen mit Blick auf die spätere Berufspraxis 39% der Studierenden und angehenden Lehrkräfte, die Niveaustufe 5 nicht erreicht haben, ein alarmierendes Ergebnis dar.

Als Denkhürden können verschiedene Fehlvorstellungen beobachtet werden. Neben Schwierigkeiten in der Vorstellung der Dichte von rationalen Zahlen und dem Übertrag von Vorstellungen aus den natürlichen Zahlen („Weil wenn ich jetzt fünf und sechs sehen würde, würde ich erstmal denken, also bei dem Nenner okay, da ist nichts zwischen" (Lennox, Interview 1, Pos. 57)) lassen sich vor allem Unsicherheiten in der Operation des Erweiterns in Abgrenzung zur Multiplikation sowie Defizite im Verständnis von äquivalenten Brüchen ausmachen. Auch grundlegende Operationen wie die Umwandlung einer natürlichen Zahl in einen gemeinen Bruch bereiteten einzelnen Teilnehmern Schwierigkeiten. Die im Interview gezeigten Probleme in der Durchführung eines Darstellungswechsels lassen auf eingeschränkte Grundvorstellungen im allgemeinen Bruchverständnis sowie im Größenverständnis von Brüchen schließen. Auch hier sei anzumerken, dass das „Kürzen und Erweitern von Brüchen", das „Unterscheiden zwischen Erweitern und Vervielfachen eines Bruchs" sowie das „Anordnen von gebrochenen Zahlen am Zahlenstrahl" (LISUM, 2015) Inhalte der 6. Klassenstufe und damit Basiskompetenzen darstellen (s. 2.2.5).

Metakognitives Wissen

Schwer zu erklären sind die unterdurchschnittlichen Ergebnisse aus Aufgabe 15.4. Eine mögliche Erklärung liegt in dem hohen Abstraktionsanspruch, die Eigenschaften der Zahlbereiche zu vergleichen und gleichzeitig die Unterschiede explizit auf die konkrete Aufgabe zu beziehen. Damit ist die Aufgabe dem Anforderungsbereich III

„Verallgemeinern und Reflektieren" (Lisum, 2015, S. 5) zuzuordnen. Möglicherweise wurde die Aufgabenstellung auch missverstanden, da ein Großteil der Studierenden allgemeine Beschreibungen der Zahlbereiche lieferte („Rationale Zahlen können ein Komma besitzen, wie z.B. 1,45. Natürliche Zahlen besitzen dies nicht, z.B. 1,2,3." (St020, Pos. 11)) Neben den allgemeinen Beschreibungen tätigten die Studierenden weitere Aussagen bezüglich der Zahlaspekte, der Mächtigkeit, der uneingeschränkten Division u.ä., die aufgrund der untergeordneten Bedeutung für die vorliegende Aufgabe in der Bewertung nicht berücksichtigt wurden. Die Daten aus dem Interview weisen jedoch entgegen der Annahme der missverstandenen Aufgabenstellung darauf hin, dass es den Studierenden teilweise an basalem Wissen über Zahlbereiche fehlt. So waren 4 von 5 Teilnehmern in Interview nicht in der Lage, die Menge der Zahlbereiche korrekt wiederzugeben („Aber natürliche Zahlen beinhalten ja noch? Genau. Die Dezimalzahlen." (Lennox, Interview 1, Pos. 259)). Fehlt es an fachinhaltlichen Grundlagen, lässt sich folglich auch kein Vergleich auf einer übergeordneten Metaebene ziehen.

Fachdidaktisches Wissen

Die Ergebnisse bezüglich des fachdidaktischen Wissens weisen ebenfalls eine große Bandbreite auf. So stehen im Wissenstest sehr anschaulichen kindgerechten Erklärungen 30 fehlende Antworten (27%) gegenüber. Tanja teilte im Interview mit, dass sie nicht wisse, wie sie einem Kind die Aufgabe erklären solle und führt als Grund die eigenen Verständnisschwierigkeiten auf (Interview 1, Pos. 230). Lediglich 17 Studierende (15%) nutzten im Rahmen ihrer kindgerechten Erklärung einen Darstellungswechsel und damit ein Grundprinzip der Mathematikdidaktik. Das Prinzip des Darstellungswechsels scheinen die Studierenden verinnerlicht zu haben, zumindest wurde der Nutzen eines Darstellungswechsels wie auch das EIS-Prinzips und auch das Prinzip der didaktischen Reduktion mehrfach von den Teilnehmern des Interviews benannt. Die Vorteile eines Darstellungswechsels schilderten die Teilnehmer anschaulich anhand eigener Erfahrungen und benannten sie explizit in der Reflexion von Lern- und Lösungsprozessen. Die Auswahl und konkrete Anwendung geeigneter Darstellungen am Beispiel hingegen gelang nur einem Teil der Studierenden, andere Teilnehmer hingegen zeigten große Schwierigkeiten in der Umsetzung. Weiterhin wurde deutlich, dass die persönlichen Erfahrungen im Lernprozess den Studierenden das Nachvollziehen der Lernprozesse von SuS erleichtern. Die Ausführungen erklären die überlegenden Ergebnisse aus Aufgabe 15.3.

(Schülerprobleme) im Vergleich zu den schlechteren Ergebnissen aus Aufgabe 15.2 (kindgerechte Erklärungen). Gleichzeitig wird die Effektivität und hohe Bedeutung der Gestaltungskriterien *Pädagogischer Doppeldecker* wie auch *Lernprozesse von SuS* (s. 2.1.3) untermauert.

Bezug zu den Inhalten der Lehrveranstaltung

Ein Blick auf die vermittelten Inhalte der Lehrveranstaltung zeigt, dass der notwendige fachliche Hintergrund zur Lösung der Aufgabe 15 mehrfach thematisiert wurde. Die Studierenden stellten Bruchzahlen auf der enaktiven Ebenen mittels Falten von Papierstreifen her und verfeinerten diese. Das Prinzip des Verfeinerns wurde auf ikonischer Ebene durch verschiedene Darstellungen visualisiert (Folie 35, S02E07, s. Anhang S. 85) und das Bestimmen äquivalenter Brüche war wiederholt Teil der Hausaufgaben (z.B. Nr. 77, S02E05, s. Anhang S. 85). Die Bedeutung von Bruch und Bruchzahl wurde sowohl in der Vorlesung (Folie 14, S02E07, s. Anhang S. 86) als auch in den Übungen wiederholt erläutert und diskutiert (Übungsfolien 10-12, S02E07, s. Anhang S. 86 f.). Bezüglich der Dichte heißt es auf Folie 14 „Zwischen zwei Brüchen gibt es immer noch (mindestens) einen weiteren – zum Beispiel den Mittelwert der beiden Brüche" (Kortenkamp, 2021, S02E07, s. Anhang S. 86). Die Folie „Alles wird anders, weil es gleich bleiben soll" (Kortenkamp, 2021, S02E09; s. Anhang S. 88) stellt Eigenschaften der Zahlbereiche explizit gegenüber und kann als Grundlage für die Lösung der Aufgabe 15.4 verstanden werden. Das EIS-Prinzip wurde sowohl auf theoretischer Ebene vermittelt (Folie 18/20/25, S02E08, s. Anhang S. 88 f.) als auch im Rahmen geeigneter Lernumgebungen wiederholt angewandt. Es wurden anschauliche Erklärungen wie die der falschen Addition präsentiert (Folie 3, S02E08, s. Anhang S. 90) und fehlerhafte Schülerlösungen zur Diskussion gestellt (Übungsfolie 10, s. Anhang S. 90). Kindgerechte Erklärungen wurden wiederholt als Rollenspiel in die Übungen eingebaut (Übungsfolie 4, S02E06, s. Anhang S. 91). Die genannten Beispiele stellen lediglich einen Auszug der Lehrveranstaltungsinhalte dar.

Weitere Einflussfaktoren

Im Rahmen der Frage nach der Effektivität der Gestaltungskriterien muss darauf hingewiesen werden, dass die erlangten Wissensbestände nicht unmittelbar und ausschließlich auf die Gestaltungskriterien zurückzuführen sind. Exemplarisch sei an Ida erinnert, die angab, regelmäßig an den Übungen teilgenommen zu haben, jedoch keines der anderen Lernangebote genutzt zu haben und selbst die Vorlesungsvideos nicht gesehen zu haben (Interview 1, Umfrage zur Nutzungshäufigkeit). Mit dem Hintergrund, dass Kompetenzen erlernbar sind (s. 2.1.1), kommt der Qualität der Lehrveranstaltung zwar eine bedeutende Rolle zu, jedoch lässt sich aufgrund von Drittvariablen kein direkter kausaler Zusammenhang zwischen der Qualität der Lehrveranstaltung und dem Professionswissen schließen. So stellen auch Kunter et al. heraus:

> In den Weiterentwicklungen professioneller Kompetenz ist die Qualität des Lernangebots genauso entscheidend wie die individuelle aktive und reflexive Nutzung dieser Angebote, welche durch persönliche Merkmale der lernenden Person mitbestimmt wird. (2011, S. 62)

Demnach sind auch individuelle Personenmerkmale wie „relevante Vorerfahrungen, allgemeine kognitive Fähigkeiten, selbstbezogene Überzeugungen, grundlegende Motive und Zielorientierungen" (Kunter et al., 2011, S. 62) von hoher Bedeutung und in der Diskussion der Professionalisierung zu berücksichtigen.

5.2. Implikation für die Praxis

Aus den Ergebnissen der Untersuchung lassen sich Schlussfolgerungen für die zukünftige Konzeption der Lehrveranstaltung Arithmetik und ihre Didaktik I und II ableiten.

Kompetenzentwicklung

Mit Bezug auf die Wissenslücken und die Erkenntnis, dass es mitunter an basalen Kenntnissen auf dem Niveau der Grundschule mangelt, ist die Frage berechtigt, ob im Fach Mathematik bei der Zulassung zum Lehramtsstudium ähnlich wie in den Fächern Sport und Musik eine Zulassungsbeschränkung sinnvoll wäre, welche ausschließlich Bewerber mit ausreichenden mathematischen Vorkenntnissen berücksichtigt. Dieser Diskussion stehen jedoch die aktuellen statistischen Zahlen der offenen Lehrkräftestellen gegenüber. Deutschlandweit führt ein deutlich niedrigeres Lehrereinstellungsangebot im Vergleich zum Lehrereinstellungsbedarf zu einem mitunter verheerenden Lehrermangel an den Schulen. Demnach können im Jahr 2021 lediglich 74% der Lehrerstellen im Primarbereich besetzt werden. Auch die Prognosen für die kommenden Jahre weisen eine ähnlich angespannte Personalsituation auf. Die Einstellung von Neuabsolventen in den Vorbereitungsdienst stellt eine der Hauptmaßnahmen der Deckung des

Lehrereinstellungsbedarfs dar (Konferenz der Kultusminister der Länder, 2020). Diese Notsituation an den Schulen führt dazu, dass das oben beschriebene Selektionsmodell in den Hintergrund tritt und dem Kompetenzmodell Vorrang gewährt. Der Fokus sollte folglich darauf liegen, Wissenslücken, die bei Eintritt ins Studium bestehen, durch ein angepasstes Lernangebot zu beheben, um das notwendige erweiterte Fachwissen für den schulischen Kontext zu erwerben. Mit der Betonung auf der aktiven Nutzung von Lernangeboten (s.o.) sollen neben der konkreten Frage der inhaltlichen Gestaltung der Lehrveranstaltung zunächst die organisatorischen Rahmenbedingungen kritisch hinterfragt werden.

Motivation und Zielorientierung

In der Evaluation der Lehrveranstaltung Arithmetik und ihre Didaktik II wurde die Frage nach der Motivation, sich intensiv mit den Inhalten der Lehrveranstaltung auseinanderzusetzen, von 31% der Studierenden als gering eingestuft (s. 4.4). Diese Zahl ist alarmierend, hat doch die Motivation einen erheblichen Einfluss auf den Lernerfolg (Göller, 2020). „Unter Lern- und Aufgabenmotivation versteht man im Allgemeinen den Wunsch beziehungsweise die Absicht, bestimmte Inhalte oder Fertigkeiten zu lernen beziehungsweise bestimmte Aufgaben auszuführen" (Schiefele und Köller, 2001, S. 304). Die Ergebnisse führen zu der Forderung, die Motivation der Studierenden zu fördern. Dabei ist die intrinsische von der extrinsischen Motivation zu unterschieden. Intrinsisch motiviert ist eine Person, die eine Handlung ausführt, da die Handlung selbst als interessant und spannend erlebt wird. Extrinsische Motivation bezeichnet die Durchführung einer Handlung aus Gründen, die außerhalb der Handlung selbst liegen, beispielsweise das Bestehen einer Klausur, das Erreichen eines hohen Kompetenzgrades oder eigener Berufsziele. Das Setzen von Zielen sowie die Bedeutungszuschreibung stellt folglich einen wichtigen Aspekt dar. So meint auch Göller (2020), dass „Lernerfolg nicht nur dadurch bestimmt ist, welche Informationen Lernenden vermittelt werden, sondern vor allem dadurch welchen Sinn Lernende aus diesen Daten konstruieren. Lernende bekommen dadurch eine aktivere Rolle im Lernprozess." (S. 32) Die Evaluation ergab außerdem, dass 28% der Studierenden nicht davon überzeugt waren, das vermittelte Wissen über rationale Zahlen für den späteren Beruf zu benötigen (s. 4.4). Der Rahmenlehrplan Berlin-Brandenburg hingegen widerlegt diese Auffassung, so ist die ausführliche Behandlung des Themas Bruchrechnung für die fünfte und sechste Klasse der

Grundschule vorgesehen (s. 2.2.5). Schließlich ist es unerlässlich, auf die Überzeugungen der Studierenden einzugehen. Um die Notwendigkeit des Themas für den späteren Berufsalltag herauszustellen, schlage ich vor, den Studierenden die Aufgabe zu erteilen, konkrete Beispielaufgaben zur Bruchrechnung aus Schulbüchern herauszusuchen, zu vergleichen und zu analysieren. Weiterhin ist die konkrete Auseinandersetzung mit dem Rahmenlehrplan unbedingt zu empfehlen, indem beispielsweise Schulbuchaufgaben den einzelnen Standards und Inhalten zugeordnet werden. Eine solche Aufgabenstellung ließe sich sowohl in die Übungen als auch in die Hausaufgaben integrieren. Aufgrund der pandemischen Lage und der daraus resultierenden Durchführung der Lehrveranstaltung im online-Format war die Ausleihe von Schulbüchern in der zurückliegenden Lehrveranstaltung nicht möglich.

Hausaufgaben

Die aktuellen Vorgaben der Studienordnung für Studierende der Inklusionspädagogik sieht im Gegensatz zur Studienordnung für das Lehramt Primarstufe vor, dass die Studierenden in der Arithmetik und ihre Didaktik II keine Hausaufgaben bearbeiten müssen (Universität Potsdam, 2018). Diese Regelung entzieht sich jeder theoretischen Grundlage von Lernprozessen. Die Wiederholung der Vorlesungs- und Übungsinhalte, die aktive Auseinandersetzung mit dem Thema, der Prozess der Problemlösung, die Kommunikation innerhalb der Hausaufgabengruppe sowie das Feedback zu den eigenen Lösungen oder auch der Vergleich mit Lösungen anderer Gruppen ist notwendig, um die Inhalte der Lehrveranstaltung zu vertiefen und zu festigen und hat einen bedeutenden Einfluss auf den individuellen Lernerfolg. In der Evaluation der Lehrveranstaltung gaben auf die offene Frage nach besonders lernwirksamen Merkmalen der Konzeption der Lehrveranstaltung 21% aller Befragten die Bearbeitung der Hausaufgaben in den Kleingruppen an – wohlbemerkt war nur ein Teil der Befragten zur Bearbeitung verpflichtet. Die Aussagen in den Interviews untermauern diese Angaben. Auch Göller stellt in seiner Untersuchung zu selbstreguliertem Lernen von Mathematikstudierenden der ersten zwei Semester die Bedeutung der Bearbeitung von Hausaufgaben heraus und kommt zu dem Ergebnis, dass ein Großteil der Studierenden die Bearbeitung der Hausaufgaben als sehr hilfreich empfand. Gleichzeitig stellt die Abgabe von Aufgabenlösungen eine wichtige externe Motivationsstütze dar (2020). Dieser Hintergrund führt zu der unbedingten Forderung nach der Verpflichtung der wöchentlichen Hausaufgabenbearbeitung für <u>alle</u> Teilnehmer der

Lehrveranstaltung, was einer Änderung der Studienordnung bedarf.

Selbsttests

Als externe Motivationsstütze können auch die auf der Lernplattform zur Verfügung stehenden wöchentlichen Selbsttests betrachtet werden. Sie dienen dazu, das eigene Wissen zu überprüfen und strukturieren, gleichzeitig geben sie ein direktes Feedback zum eigenen Wissensstand. Die Bearbeitung der Selbsttests war den Studierenden freigestellt. In Anbetracht dessen, dass die sechs Selbsttests zum Thema Bruchrechnung im Durchschnitt lediglich von 30% der Studierenden bearbeitet wurden (Kortenkamp, 2021), empfehle ich die Einführung der verpflichtenden Bearbeitung der Selbsttests für alle Teilnehmer. Anzuraten ist ein fakultatives Format mit beliebiger Anzahl an Wiederholungen ohne zeitliche Einschränkungen und der Vorgabe einer zu erzielenden Mindestpunktanzahl von 80% je Test als Voraussetzung für die Klausurzulassung.

Anwesenheitspflicht

Auf der Basis der bisherigen Ausführungen wird ebenfalls die Vorgabe und klare Kommunikation einer Anwesenheitspflicht in den Übungen angeraten.

Auf die bislang getätigten Empfehlungen bezüglich der Organisation und Struktur der Lehrveranstaltung folgen konkrete inhaltliche Vorschläge.

Konkrete Vorschläge

Die grundlegenden Prinzipien wie das EIS-Prinzip und häufige Darstellungswechsel werden als wichtige Bausteine im Erwerb des Bruchzahlverständnisses angesehen. Autoren wie Prediger (2004) und Winter (1999) plädieren auf die explizite Thematisierung der Denkumbrüche im Rahmen der Zahlbereichserweiterung. Die Gestaltungsprinzipien setzen diese Forderungen bereits um. Da jedoch die Ergebnisse der Untersuchung zeigen, dass es nicht allen Studierenden gelungen ist, ein adäquates Bruchzahlverständnis zu entwickeln, empfehle ich die Aufnahme zusätzlicher Handlungen auf enaktiver Ebene in die Übungen. Es folgen konkrete Aufgabenvorschläge mit dem Ziel der Förderung eines grundlegenden Bruchzahlverständnisses sowie der Ausbildung adäquater Grundvorstellungen:

a) Winter (1999) zufolge genügt es nicht, SuS als Veranschaulichung die Darstellung von

Bruchzahlen als Streckenlängen zu zeigen. „Viel nachhaltiger ist es, wenn sie lernen, Bruchzahlen als Streckenlängen auf der Zahlengeraden selbst auf geometrische Weise darzustellen.” Über fortgesetztes Falten lassen sich verschiedene Strecken wie Viertel, Achtel usw. herstellen. Legen die Lernenden die Streifen im Anschluss untereinander und übertragen verschiedene Brüche auf die Zahlengerade, so lassen sich einprägsame Entdeckungen und Größenvergleiche tätigen. Diese Methode wurde in der Vorlesung zwar theoretisch vermittelt (Folie 27 und 28, S02E07, s. Anhang 91 f.), sollte jedoch als geeignete Lernumgebung im Sinne des Pädagogischen Doppeldeckers (s. 2.1.3) innerhalb der Übung direkt umgesetzt werden.

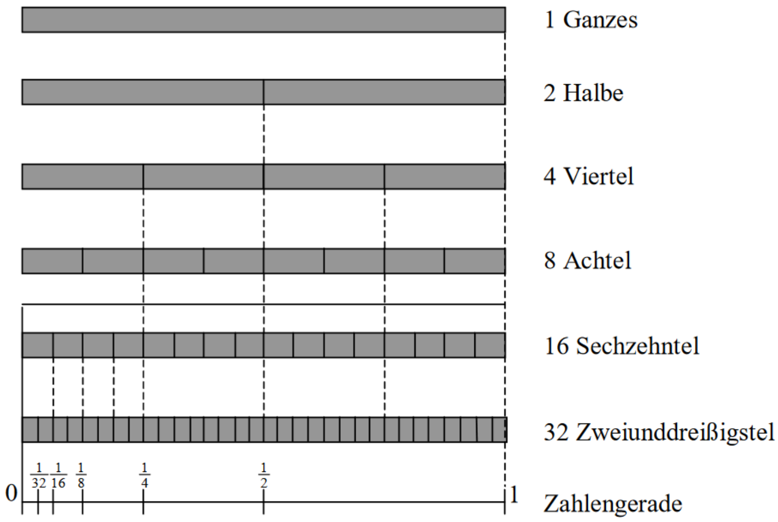


Abbildung 20: Darstellen von Bruchzahlen über fortgesetztes Falten von Papierstreifen auf der Zahlengeraden (Winter, 1999, S. 31)

b) Eine Variation von Form und Fläche bietet umfangreiche Erfahrungen und fördert den Ausbau des Bruchzahlverständnisses. So lassen sich nicht nur Streifen, Kreise und Rechtecke in gleich große Teile teilen, sondern auch jedes beliebige Dreieck lässt sich durch Falten in vier deckungsgleiche Teildreiecke zerlegen (s. Abbildung 21). Gleichzeitig erfolgt die Entdeckung, dass jedes Teildreieck eine maßstäbliche Verkleinerung im Maßstab 1:2 des ursprünglichen Dreiecks darstellt.

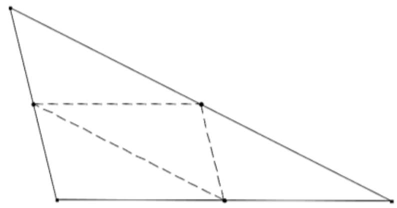


Abbildung 21: Mittellinien im Dreieck (Winter, 1999, S. 32)

c) Zur Ausbildung von Grundvorstellungen eignet sich ebenfalls der Einsatz von Geobrettern und das Spannen von Gummiringen (s. Abbildung 22). Entsprechende Aufgaben wie „Gib jeweils den Anteil der umspannten Fläche als Bruchzahl an" und „Finde eine andere Lösung als p" sowie „Stelle folgende Anteile q der Gesamtfläche dar" oder auch „Welche Anteile kannst du nicht darstellen?" (Wittmann, 2007, S. 22) tragen zur Ausbildung von Größenvorstellungen und Vorstellungen zum Erweitern und Kürzen bei.

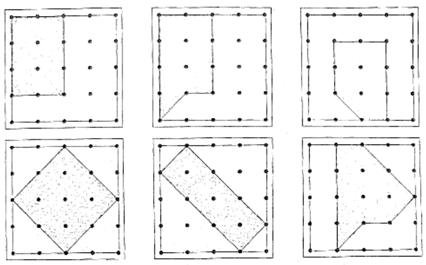


Abbildung 22: Brüche am Geobrett (Wittmann, 2007, S. 22)

d) Alternativ zum Geobrett lässt sich auch das Tangram einsetzen (s. Abbildung 23). Aufgabenstellungen wie „Sortiere die Tangram-Teile der Größe nach" und „Welchen Anteil der Gesamtfläche hat jedes Tangram-Teil?" sowie „Wie kannst du deine Ergebnisse überprüfen?" als auch „Stelle folgende Anteile p mit Hilfe der Tangram-Teile dar" oder „Arbeitet zu zweit mit 14 Tangram-Teilen und stellt q dar" (Wittmann, 2007, S. 22) lassen sich in den Übungen hervorragend umsetzen und geben Anlass zur Diskussion und Reflexion.

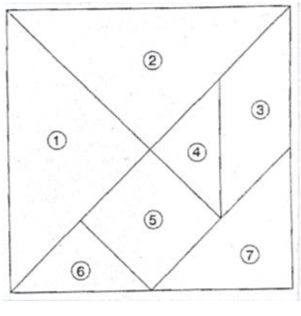


Abbildung 23: Brüche mit Tangram (Wittmann, 2007, S. 22)

Solche Übungen tragen nicht nur zur Ausbildung eigener Grundvorstellungen bei, sondern tragen gleichermaßen zum Erwerb didaktischen Wissens bei, indem sie Grundprinzipien der Mathematikdidaktik widerspiegeln, Lernprozesse von SuS nachstellen und im Sinne der Gestaltungsprinzipien als Pädagogischer Doppeldecker fungieren. Zusätzlich werden Querverbindungen zum Fachbereich der Geometrie gezogen.

e) Keine der Interviewpersonen war in der Lage, das erworbene Wissen auf das Vorstellungsbild der zwei Kannen mit Apfelsaftschorle zu übertragen, obwohl dieses hervorragend als Veranschaulichung für die Mittelwertbildung verwendet werden kann. Es fanden korrekte Überlegungen wie beispielsweise die Notwendigkeit der Berücksichtigung des Gesamtvolumens statt. Das Zusammenschütten verschiedenartiger Mischungen in ein Glas wurde jedoch fälschlicherweise mit der Addition in Verbindung gebracht. Die Mischprozedur lässt sich beliebig oft wiederholen und veranschaulicht auf besondere Weise die Dichte der Bruchzahlen (Winter, 1999). Für ausführlichere Übungsbeispiele verweise ich auf die Ausführungen zu verschiedenen Sirupmischungen von Winter (1999).

f) Alternativ zur enaktiven Ebene lässt sich die Gültigkeit des Satzes $\frac{m}{n} < \frac{h}{k} \Rightarrow \frac{m}{n} < \frac{m+h}{n+k} < \frac{h}{k}$ auf bildlicher Ebene mit Hilfe des Pizzamodells veranschaulichen (s. Abbildung 24). Werden 2 Pizzen durch 3 Personen geteilt, so erhält jede Person $\frac{2}{3}$ Pizza. Werden am Nachbartisch 3 Pizzen durch 4 Personen geteilt, so erhält an diesem Tisch jede Person $\frac{3}{4}$ Pizza. Setzen sich die Personen zusammen und möchten gerecht teilen, so könnten 5 Pizzen auf sieben Personen verteilt werden, indem jede Person zunächst $\frac{2}{3}$ Pizza erhält und das restliche Drittel durch sieben Personen geteilt wird. Damit lässt sich das Prinzip des Ausgleichs (auch mit Alltagsbezug auf arm und reich) veranschaulichen (Winter, 1999, S. 42). Ich empfehle die Aufnahme dieser Erklärung in die Übung oder Hausaufgaben.

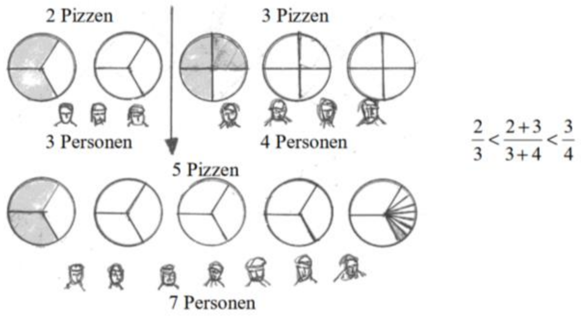


Abbildung 24: Bildliche Darstellung der falschen Addition am Pizzamodell (Winter, 1999, S. 42)

Wissenstest

Um das Professionswissen der Studierenden zu prüfen, sollte ebenfalls die Passung der Aufgabenstellung im Wissenstest überdacht werden. Entgegen der Aufgabenstellung löste ein Teil der Studierenden die Aufgabe unter Verwendung von Dezimalbrüchen. Fraglich ist, ob der Hinweis schlicht überlesen wurde. In diesem Fall wäre es sinnvoll, den Ausdruck **ohne Dezimalzahlen** in Aufgabe 15.1. optisch noch stärker hervorzuheben. In Aufgabe 15.2. beschrieben viele Studierende ihren eigenen Lösungsweg aus 15.1. verbal. Liegt die Erwartung in der Verwendung einer bildlichen Darstellung, könnte die Aufgabenstellung dahingehend geändert werden: „Erklären Sie nun einem Schüler oder einer Schülerin der fünften/sechsten Klasse unter Verwendung einer bildlichen Darstellung, wie die Aufgabenteile a und b richtig gelöst werden können." In der Antwort zu Aufgabe 15.4. trafen 30% der Studierenden allgemeine Aussagen zu den Zahlbereichen, so dass auch diese Aufgabenstellung überdacht werden sollte. Ein Änderungsvorschlag liegt darin, den Fokus auf die Denkumbrüche zu richten: „Welche Denkumbrüche müssen bei der Zahlbereichserweiterung von den natürlichen Zahlen zu den rationalen Zahlen vollzogen werden, um die Aufgabenteile a und b lösen zu können?"

5.3 Reflexion und Gütekriterien

Während in der quantitativen Forschung weitestgehend Konsens bezüglich der zentralen Gütekriterien besteht, wird in der qualitativen Forschung eine kontroverse Debatte bezüglich geeigneter Qualitätskriterien geführt. Die Hauptkriterien Objektivität, Reliabilität und Validität, welche der quantitativen Forschung zugrunde liegen, lassen sich nicht uneingeschränkt auf die qualitative Forschung übertragen, ohne das Postulat der Offenheit und Flexibilität in der qualitativen Forschung zu beschränken (Döring & Bortz, 2016). Kuckartz (2018) folgt einer Modifizierung der klassischen Kriterien, um dem prozeduralen Charakter der qualitativen Forschung gerecht zu werden und fokussiert in Bezug auf die qualitative Inhaltsanalyse als Auswertungsmethode zunächst eine *interne Studiengüte* im Sinne von Zuverlässigkeit, Regelgeleitetheit, Nachvollziehbarkeit und Glaubwürdigkeit. Dagegen wird die *externe Studiengüte* mit Blick auf Übertragbarkeit und Verallgemeinerbarkeit vorwiegend vom Design der Studie und dem gewählten Auswahlverfahren beeinflusst. Analog zur internen und externen Validität stellt wiederum die interne Studiengüte eine Voraussetzung für die externe Studiengüte dar.

Interne Güte

Im Folgenden werden einzelne Punkte zur Beurteilung der internen Studiengüte thematisiert. Die Daten, die mithilfe des Wissenstests erhoben wurden, liegen anonymisiert in schriftlicher Form vor und sind in der zughörigen MAXQDA Datei jederzeit einsehbar. Beide Interviews wurden per Audioaufnahme festgehalten. Damit ist eine hohe Transparenz und Nachvollziehbarkeit gewährleistet, die kompletten Daten können jederzeit abgerufen werden. Während der Interviews wurden Notizen gemacht, um die spätere Transkription zu erleichtern. Die Transkription erfolgte jeweils unmittelbar nach den Interviews vom Forschenden selbst und wurde vollständig durchgeführt. Der Transkription liegen im Vorfeld festgelegte Transkriptionsregeln zugrunde, welche vollständig eingehalten wurden. Sowohl Besonderheiten des Interviews als auch die Transkriptionsregeln werden im Transkriptionskopf offengelegt und sind damit für jeden Leser transparent. In der konkreten Durchführung der Interviews trägt der Leitfaden in bedeutendem Maße zur Güte der Untersuchung bei. Die Konstruktion des Leitfadens wurde sorgfältig in Anlehnung an geltende Regeln und Empfehlungen entworfen. Der Leitfaden trägt dazu bei, auf das Forschungsthema zu fokussieren. Gleichzeitig ist es meiner Ansicht nach gelungen, eine offene Gesprächssituation herzustellen, in der die Teilnehmer ihre Gedanken offen und ehrlich mitgeteilt haben. Um diese Gesprächsatmosphäre zu ermöglichen, wurde in der Moderation Wert auf eine entspannte Gesprächsatmosphäre gelegt. Selbstkritisch sei anzumerken, dass die sprachliche Ausdrucksweise umgangssprachlich geprägt ist. In der Durchführung ist es ratsam, die Fragen hinsichtlich der Präzision zu optimieren. Dazu gehört die Formulierung von jeweils nur einer Frage in einem kurzen Satz. So fehlte beispielsweise bei dem Vorstellungsbild der Kannen mit Apfelsaftschorle die Information, dass es sich jeweils um die gleiche Menge (beispielsweise ein Liter) handle, was zu Irritationen führte. Der zeitliche Rahmen der Gruppendiskussionen war für mich schwer einzuschätzen und überstieg in der Umsetzung den anvisierten Zeitrahmen von maximal einer Stunde. Das Interview in Golm fand direkt vor den Termin der Klausureinsicht statt, um den Aufwand für die Teilnehmer zu reduzieren. Im Rückblick ist diese Planung als suboptimal zu werten. Aufgrund der erschwerten Rekrutierung von Interviewteilnehmern fiel die Entscheidung für die Form des zweiten Interviews auf ein Online-Interview. Auch in diesem Interview gelang es, einen intensiven Austausch der Teilnehmer anzuregen. Dennoch würde ich ein Face-to-Face Interview zukünftig bevorzugen, um einerseits die persönliche Gesprächsatmosphäre zu nutzen und die Option von Tafelbildern zu gewährleisten und andererseits die Gefahr technischer Schwierigkeiten zu umgehen. Hinsichtlich der Gütekriterien muss auch die Durchführung der qualitativen Inhaltsanalyse hinterfragt werden. Mit Blick auf die Zuverlässigkeit wurde der Forschungsprozess nachvollziehbar gestaltet und durchlaufen. Der Verlauf wurde im Logbuch des Softwareprogrammes dokumentiert. Die Codierung des gesamten Materials wurde in insgesamt drei Durchgängen angepasst, die computergestützte Durchführung schafft einen hohen Grad der Transparenz. Die sowohl deduktive als auch induktive Kategorienbildung orientiert sich einerseits an früheren Ergebnissen, berücksichtigt anderseits aber auch das individuelle Datenmaterial und gewährleistet eine ausreichende Offenheit und Flexibilität im Sinne der qualitativen Forschung. Das Kategoriensystem ist in sich konsistent und aufeinander abgestimmt, die einzelnen Kategorien wurden präzise definiert und mit Ankerbeispielen belegt. Die im Verlauf geschriebenen Memos tragen zur Nachvollziehbarkeit bei. Die computergestützte Analyse ermöglicht eine langfristige Archivierung des gesamten Materials. Trotz der Prämisse größtmöglicher Neutralität ist kein Forschender frei von subjektiven Einflüssen und Wahrnehmungen. So wäre die Bestätigbarkeit im Sinne der Objektivität deutlich erhöht, wenn anstelle eines einzelnen Codierenden mehrere Codierende die Daten parallel auswerten würden (Döring & Bortz, 2016).

Externe Güte

Im Rahmen der externen Gütekriterien stellt sich die Frage nach der Übertragbarkeit und Verallgemeinerung der Ergebnisse (Kuckartz, 2018). Die Stichprobe der Studierenden, welche die Klausur schrieben, ist mit 112 Personen relativ groß, stellt jedoch nur einen Anteil der insgesamt 156 Studierenden dar, die an der Lehrveranstaltung Arithmetik und ihre Didaktik II teilnahmen. Somit kann weder eine Aussage über alle Teilnehmer dieser Lehrveranstaltung getroffen werden noch etwa über alle Mathematikstudierenden des Grundschullehramts oder Ähnliches. Um die Repräsentativität für diese spezielle Gruppe zu erhöhen, wäre es notwendig, ebenfalls die Daten des zweiten Klausurtermins auszuwerten. Aufgrund der zeitlichen Limitation war dies in der vorliegenden Arbeit nicht möglich. Erschwerend käme außerdem hinzu, dass die Aufgaben in der zweiten Klausur variiert wurden und damit die Vergleichbarkeit der Ergebnisse nicht ohne Weiteres gegeben wäre. Die Auswahl der Interviewteilnehmer war dem Forschungsinteresse, Denkhürden zu ergründen, angepasst und konzentrierte sich vorwiegend auf jene

Studierende, die im Verlauf der Lehrveranstaltung Schwierigkeiten in der Bruchrechnung zeigten. Aufgrund der Auswahlkriterien konnten wertvolle Einblicke in vorhandene Denkhürden gewonnen werden. Am ersten Interview nahm eine Person teil, die den anderen vier Teilnehmern in ihren Kompetenzen deutlich überlegen war und damit das Gespräch inhaltlich in bedeutsamem Maße bereicherte und zu einer dynamischen Gesprächssituation beitrug. Die Teilnehmer des zweiten Interviews erwiesen sich als relativ homogen hinsichtlich ihres Wissensstandes. Anzumerken ist jedoch, dass die Stichprobengröße von 8 Personen einerseits relativ gering ist und andererseits nicht als Durchschnitt zu betrachten ist, da jene Studierende, die offensichtlich über ein sehr ausgeprägtes Professionswissen verfügen und dies durch besonders gute Leistungen in den Übungen, in den Bruchrechentests oder in der Klausur bewiesen, nicht befragt wurden. Somit sind die vorliegenden Daten und Rückschlüsse auf die Wissensbestände keineswegs als repräsentativ anzusehen, sondern als exemplarisch zu bewerten. Dennoch liefern die Ergebnisse sowie die daraus resultierenden Veränderungsvorschläge wichtige Hinweise für nachfolgende Lehrveranstaltungen der Arithmetik und ihre Didaktik, um potentielle Denkhürden der folgenden Jahrgänge explizit aufzugreifen und vorbeugend zu agieren.

5.4 Fazit und Ausblick

Es bleibt festzuhalten, dass die Dichte der Bruchzahlen ein herausforderndes Konzept darstellt und ein solides Bruchzahlverständnis voraussetzt. Die Entwicklung des Bruchzahlverständnisses wird durch den Einsatz von Grundprinzipien der Mathematikdidaktik effektiv gefördert. Es ist von hoher Bedeutung, notwendige Denkumbrüche in der Zahlbereichserweiterung von den natürlichen zu den rationalen Zahlen explizit zu thematisieren, um bereits erworbene Grundvorstellungen aus den natürlichen Zahlen zu reorganisieren. Ein fundiertes fachwissenschaftliches Wissen fungiert als Voraussetzung für die Entwicklung fachdidaktischen Wissens.

Sollten die Änderungsvorschläge umgesetzt werden, wäre im Anschluss eine erneute Untersuchung von Interesse, um die Effektivität der Änderungen zu überprüfen und Vergleiche zur vorliegenden Untersuchung zu ziehen. Um den konkreten Wissenszuwachs der Studierenden nach Besuch der Lehrveranstaltung Arithmetik und ihre Didaktik I und II beurteilen zu können, wäre ebenfalls eine längsschnittliche Untersuchung von Interesse, die vorhandene Wissensbestände vor und nach Besuch der Lehrveranstaltung misst. Alternativ bietet sich eine detaillierte Auswertung der Ergebnisse des Bruchrechentests nach Stampfer (2019) mit den verschiedenen Messzeitpunkten von Pre- und Posttest an. Da die Motivation einen entscheidenden Einfluss auf den Lernerfolg hat und die aktuelle Untersuchung bedeutsame Einflüsse erkennen lässt, wäre eine Forschungsarbeit von großem Interesse, die schwerpunktmäßig die Motivation der Studierenden als komplexes Konstrukt sowie Einflussfaktoren auf die Motivation untersucht.

Literaturverzeichnis

Baumert, J. & Kunter, M. (2011). Das Kompetenzmodell von COACTIV. In: Kunter, M., Baumert, J., Blum, W., Klusmann, U., Krauss, S. & Neubrand, M. (Hrsg.): *Professionelle Kompetenz von Lehrkräften. Ergebnisse des Forschungsprogramms COACTIV* (S. 29-53). Münster: Waxmann.

Baumert, J., Kunter, M., Blum, W., Klusmann, U., Krauss, S. & Neubrand, M. (2011). Professionelle Kompetenz von Lehrkräften, kognitiv aktivierender Unterricht und die mathematische Kompetenz von Schülerinnen und Schülern (COACTIV) – Ein Forschungsprogramm. In: Kunter, M., Baumert, J., Blum, W., Klusmann, U., Krauss, S. & Neubrand, M. (Hrsg.): *Professionelle Kompetenz von Lehrkräften. Ergebnisse des Forschungsprogramms COACTIV* (S. 7-25). Münster: Waxmann.

Behr, M., Wachsmuth, I., Post, T. & Lesh, R. (1984). Order and equivalence of rational numbers: a clinical teaching experiment. *Journal for Research in Mathematics Education 15*(5), 323-341. Abrufbar unter: https://noah.nrw/ubbihs/content/titleinfo/5111438?Lang=de. Zuletzt zugegriffen: 20. September 2021.

Beutelspacher, A. (2018). *Zahlen, Formen, Gleichungen. Algebra für Studium und Unterricht*. Wiesbaden: Springer Spektrum.

Büchter, A. & Padberg, F. (2019). *Einführung in die Arithmetik. Primarstufe und Sekundarstufe* (3. Aufl.). Berlin: Springer Spektrum.

Cierpinski, P. (2020). Qualitative Untersuchung des Professionswissens von Lehramtsstudierenden im Bereich rationale Zahlen. (August 2020, unveröffentlicht)

Döring, N. & Bortz, J. (2016). *Forschungsmethoden und Evaluation in den Sozial- und Humanwissenschaften* (5. Aufl.) Berlin Heidelberg: Springer.

Feedback zu Fachwissenschaft und Fachdidaktik in der Lehrveranstaltung (2021). In: Kortenkamp, U. (2020/2021). Arithmetik und ihre Didaktik. moodle-Kurs Universität Potsdam. Abrufbar unter: https://moodle2.uni-potsdam.de/mod/feedback/edit.php?id=055445. Zuletzt zugegriffen: 10. September 2021.

Fuß, S. & Karbach, U. (2019). *Grundlagen der Transkription* (2. Aufl.). Opladen und Toronto. Budrich.

Göller, R. (2020). *Selbstreguliertes Lernen im Mathematikstudium*. In: R. Biehler (Hrsg.): Studien zur Hochschuldidaktik und zum Lehren und Lernen mit digitalen Medien in der Mathematik und in der Statistik. Abrufbar unter: https://link.springer.com/content/pdf/10.1007%2F978-3-658-28681-1.pdf. Zuletzt zugegriffen: 4. Oktober 2021.

Heinze, A., Dreher, A. Lindmeier, A. & Niemand, C. (2016). Akademisches versus schulbezogenes Fachwissen – ein differenziertes Modell des fachspezifischen Professionswissens von angehenden Mathematiklehrkräften der Sekundarstufe. *Zeitschrift für Erziehungswissenschaft,* 19(2), 329 – 349.

Ipsos (2005). Moods, Minds, and Motivations. Emoti*Scape. Abrufbar unter: https://www.ipsos.com/sites/default/files/publication/1970-01/asi_ideas_moods_minds_motivations.pdf. Zuletzt zugegriffen: 4. Oktober 2021.

Kelle, U. (2006). Computerunterstützung in der qualitativen Forschung. In: R. Bohnsack, W. Marotzki & M. Meuser (Hrsg.), *Hauptbegriffe qualitativer Sozialforschung* (2. Aufl.). Opladen: Budrich.

Konferenz der Kultusminister der Länder (2020). *Statistische Veröffentlichungen der Kultusministerkonferenz. Lehrereinstellungsbedarf und -angebot in der Bundesrepublik Deutschland 2020 - 2030. Zusammengefasste Modellrechnungen der Länder*. Abrufbar unter: https://www.kmk.org/fileadmin/Dateien/pdf/Statistik/Dokumentationen/Dok_226_ Bericht_LEB_LEA_2020.pdf. Zuletzt zugegriffen: 27. September 2021.

Kortenkamp, U. (2021). Arithmetik und ihre Didaktik. Moodle-Kurs. Abrufbar unter: https://moodle2.uni-potsdam.de/course/view.php?id=24985. Zuletzt zugegriffen: 30. Oktober 2021.

Krauthausen, G. & Scherer, P. (2007). *Einführung in die Mathematikdidaktik* (3. Aufl.). München: Elsevier.

Kuckartz, U. (2018). *Qualitative Inhaltsanalyse. Methoden, Praxis, Computerunterstützung*. (4. Aufl.). Weinheim Basel: Beltz Juventa.

Kühn, T. & Koschel, K. (2018). *Gruppendiskussion. Ein Praxis-Handbuch* (2. Aufl.). Wiesbaden: Springer.

Kunter, M. & Baumert, J. (2011). Das COACTIV-Forschungsprogramm zur Untersuchung professioneller Kompetenz von Lehrkräften – Zusammenfassung und Diskussion. In: Kunter, M., Baumert, J., Blum, W., Klusmann, U., Krauss, S. & Neubrand, M. (Hrsg.): *Professionelle Kompetenz von Lehrkräften. Ergebnisse des Forschungsprogramms COACTIV* (S. 345-366). Münster: Waxmann.

Kunter, M., Kleickmann, T., Klusmann, U. & Richter, D. (2011). Die Entwicklung professioneller Kompetenz von Lehrkräften. In: In: Kunter, M., Baumert, J., Blum, W., Klusmann, U., Krauss, S. & Neubrand, M. (Hrsg.): *Professionelle Kompetenz von Lehrkräften. Ergebnisse des Forschungsprogramms COACTIV* (S. 55-68). Münster: Waxmann.

Lamnek, S. (2005). *Gruppendiskussion. Theorie und Praxis* (2. Aufl.) Weinheim/Basel: Beltz UTB.

Landesinstitut für Schule und Medien Berlin-Brandenburg (LISUM) (o.J.). Rahmenlehrplan Online 1-10. Mathematik. Abrufbar unter: https://bildungsserver. berlin-brandenburg.de/rlp-online/c-faecher/mathematik/kompetenzen-und-standards. Zuletzt zugegriffen: 27. September 2021.

Markovits, Z. & Sowder, J. (1994). Developing number sense. An intervention study in grade 7. *Journal for Research in Mathematics Education 25*, 4-29.

Misoch, S. (2019). *Qualitative Interviews* (2. Aufl.). Berlin/Boston: De Gruyter.

Modulprüfung „Zahlen und Operationen und ihre Didaktik" (19.7.2021). Universität Potsdam (unveröffentlicht)

Neumann, R. (1998). Schülervorstellungen bezüglich der Dichtheit von Bruchzahlen. *Mathematica Didactica 2*, 109-119.

Padberg, F. & Wartha, S. (2017). *Didaktik der Bruchrechnung* (5. Aufl.). Berlin: Springer Spektrum

Pehkonen, E. & Merenluoto, K. (2002). Über das Verstehen von Lehramtsstudenten in der Elementarmathematik. In: W. Peschek (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht* (S. 391-394). Hildesheim: Franzbecker.

Prediger, S. (2004). Brüche bei den Brüchen- aufgreifen oder umschiffen? Abrufbar unter: http://www.mathematik.tu-dortmund.de/~prediger/veroeff/04-ml-brueche-langfassung. pdf. Zuletzt zugegriffen: 1. Oktober 2021.

Rädiker, S. & Kuckartz, U. (2019). *Analyse qualitativer Daten mit MAXQDA. Text, Audio und Video.* Wiesbaden: Springer.

Reitz-Koncebovski, K. (2019a). *Gestaltungsprinzipien für neue Lehrveranstaltungen, die Fachwissenschaft und Fachdidaktik Mathematik verknüpfen. Handreichung für die Konzeption und Beobachtungsinstrument* (Fassung 8/2019, unveröffentlicht).

Reitz-Koncebovski, K. (2019b). *Instrument Wissenstest*. (Fassung 08/2019, unveröffentlicht).

Reitz-Koncebovski, K., Hermanns, J., Kortenkamp, U. & Kuzle, A. (2020). Projekt SPIES zur Professionalisierung der Lehrerbildung Mathematik. Qualitätsoffensive Lehrerbildung an der Universität Potsdam. *Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik (GDM), 109,* 25-30.

Reitz-Koncebovski, K., Kortenkamp, U. & Goral, J. (2018). Gestaltungsprinzipien für fachwissenschaftliche Einführungsveranstaltungen in den Lehramtsstudiengängen Mathematik. In: A. Borowski, A. Ehlert & H. Prechtl (Hrsg.). *PSI-Potsdam: Ergebnisbericht zu den Aktivitäten im Rahmen der Qualitätsoffensive Lehrerbildung (2015-2018)* (S.175-188). Potsdam, Deutschland: Universitätsverlag.

Schadl, C. (2020). *Individuelle Lernvoraussetzungen für den Erwerb des Bruchzahlkonzepts. Strukturanalysen und Untersuchung der längsschnittlichen Prädiktivität*. Empirische Studien zur Didaktik der Mathematik 38. Münster: Waxmann.

Schiefele, U. & Köller, O. (2001). Intrinsische und extrinsische Motivation. In: D. H. Rost (Hrsg.), *Handwörterbuch Pädagogische Psychologie* (2. Aufl., S. 304-310). Weinheim: Beltz.

Stampfer, F., Reitz-Koncebovski, K. & Hell, T. (2019). *Feststellung und Entwicklung des Natural Number Bias bei Lehramtsstudierenden in der fachdidaktischen Ausbildung*. In: A. Frank, S. Krauss & K. Binder (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2019* (S. 781-784). Münster: WTM-Verlag.

Thömmes, A. (2005). *Produktive Unterrichtseinstiege*. Mülheim an der Ruhr: Verlag an der Ruhr.

Vamvakoussi, X. & Vosniadou, S. (2004). Understanding the structure of the set of rational numbers: a conceptual change approach. *Learning and Instruction, Elsevier 14*, 443-467. Abrufbar unter: https://telearn.archives-ouvertes.fr/file/index/docid/190233/filename/ Vamvakoussi_2004.pdf. Zuletzt zugegriffen: 20. September 2021.

Wartha, S. (2007). *Längsschnittliche Untersuchungen des Bruchzahlbegriffs*. - Texte zur mathematischen Forschung und Lehre 54. Hildesheim: Franzbecker.

Winter, H. (1976). Was soll Geometrie in der Grundschule? *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 14-18.

Winter, H. (1999). *Mehr Sinnstiftung, mehr Einsicht, mehr Leistungsfähigkeit, im Mathematikunterricht, dargestellt am Beispiel der Bruchrechnung*. Abrufbar unter: http://www.matha.rwth-aachen.de/de/lehre/ss09/sfd/Bruchrechnen.pdf. Zuletzt zugegriffen: 25. September 2021.

Wittmann, G. (2007). Mit Bruchzahlen experimentieren. Darstellungen wechseln – Grundvorstellungen entwickeln. *Mathematik lehren, 142*, 17-23.

Woehlecke, S., Massolt, J., Goral, J., Hassan-Yavuz, S., Seider, J., Borowski, A., Fenn, M., Kortenkamp, U. & Glowinski, I. (2017). Das erweiterte Fachwissen für den schulischen Kontext als fachübergreifendes Konstrukt und die Anwendung im universitären Lehramtsstudium. *Beiträge zur Lehrerinnen- und Lehrerfortbildung, 35*(3), 413-426.

Anlagenverzeichnis

* Dieser Anhang ist kein Bestandteil der Online-Veröffentlichung.

I: Leitfaden Interview 1

Phase	**Thema**	**Leitfrage**	Material
Einführung	Rahmenbedingungen	Dank Datenschutz, Anonymität Aufnahmegerät Grundregeln: Respekt und Wertschätzung kein Wissenstest! keine richtigen und falschen Antworten	
Warm-Up	allg. Aspekte des Themas Gesprächsatmosphäre	Vorstellungsrunde: Gemeinsamkeit: bevorstehende Klausur **Du beschäftigst dich im Rahmen der Klausurvorbereitung mit dem Thema Bruchrechnung:** **Welches Gefühl passt am besten zu dir?**	Emoti*Scape-Fragebogen
Hauptteil	Dichte der Brüche	Moderator erzählt den Beginn des Märchens vom bösen Drachen **Wie könnte es wohl weitergehen? Was kommt dir in den Sinn?**	Das Märchen von dem bösen Drachen
	Zahl zwischen zwei Brüchen	Klausuraufgabe: Finde eine Zahl zwischen 1/6 und 1/5… **Was fällt dir zu dieser Aufgabe spontan ein?** **- Was sagst du zu folgenden Klausurantworten?** **- Könnt Ihr das mal am Zahlenstrahl darstellen?**	Antworten aus Wissenstest Karten mit Brüchen (ordnen lassen)

	kindgerechte Erklärung	**Fallen euch zur Erklärung noch andere Vorstellungsbilder als der Zahlenstrahl ein?** **- Was sagst du zu folgender Antwort?** **- Stelle dir 2 Kannen mit Apfelschorle vor...** **- Welches Vorstellungsbild gefällt dir am besten? Begründe.**	Klausur-antworten
	Perspektivwechsel, Metaebene	**Worin liegt die Schwierigkeit bei der Aufgabe?** **- Was könnte für SuS schwierig sein?** **- Was ist für euch schwierig?**	
	Eigenschaften von rationalen Zahlen	zu Aufgabe 15.4.: Eigenschaften von rationalen Zahlen im Vergleich zu den natürlichen Zahlen: **Was meinst du? Sind die folgenden Antworten wahr oder falsch?**	Klausur-antworten Tafel
		Haben wir etwas vergessen?	
Abschlussteil	Gewichtung der Schwierigkeiten Zusammenfassung	**Wenn du nur eine Stunde Zeit für die Klausvorbereitung hast- Was schaust du dir an? Wo ist am meisten Handlungsbedarf?** **Rückblick auf Lehrveranstaltung** **Bezug zur bevorstehenden Klausur; Bedeutung für die Schule** **Dank** **Einwilligungserklärung**	Fragebogen Einwilligungserkl.

II: Das Märchen von dem bösen Drachen und dem klugen Bruch

Das Märchen von dem bösen Drachen und dem klugen Bruch

Vor langer, langer Zeit wütete im Land der Bruchzahlen ein fürchterlicher Drachen. Er war aus dem Land der geometrischen Figuren ausgebrochen und versetzte seitdem die Brüche in Angst und Schrecken.

Täglich fraß er zehn von ihnen, wobei er Quadratzahlen im Zähler oder Nenner als besondere Leckerbissen bevorzugte. Flehten die Brüche um Gnade, lachte er hämisch und weidete sich an ihrer Angst.

Eines Tages hatte er sich etwas besonders grausames ausgedacht; er machte ihnen falsche Hoffnungen auf eine Rettung. „Meine lieben Brüche", brüllte er so laut, dass man es in jedem Winkel des Landes hören konnte, „ich gebe euch eine Chance! Ihr könnt mich loswerden! – Ich werde auf der Stelle verschwinden, wenn einer von euch mir eine Aufgabe stellt, die ich nicht lösen kann. Ihr habt genau drei Tage Zeit und dürft höchstens drei Aufgaben stellen."

Der erste Tag verstrich. Die Brüche waren entweder vor Anspannung wie gelähmt oder in tiefes Nachdenken versunken. Am Morgen des zweiten Tages trat 49/81 mutig vor den Drachen. „Nenne mir", sprach er, einen Bruch, der zwischen 71/1000 und 72/1000 liegt!" 49/81 war überzeugt, dass der Drachen diese Aufgabe nicht würde lösen können; denn er selbst hatte die ganze Nacht über vergeblich nach einem Bruch zwischen 71/1000 und 72/1000 gesucht.

Aber, oh Schreck, es kam anders als erwartet: „143/2000", schrie der Drachen. Und noch lauter brüllte er:

„Die erste Chance ist vertan. Bruch gegen Drachen – welch ein Wahn!"

Die Brüche waren entsetzt, aber auch sauer auf 49/81. „Das hättest du doch wissen müssen", warfen sie ihm vor, „dass 71/1000 und 72/1000 durch Erweitern mit 2 in 142/2000 und 144/2000 verwandelt werden können. Und schon passt 143/2000 dazwischen!" 49/81 sah das ein und schlich beschämt von dannen.

Die Zeit verging. Da, endlich, am Abend des zweiten Tages, wagte sich 121/36 hervor, nicht ganz so sicher wie vorher 49/81. „Nenne mir", sprach er zu dem Drachen, „zwei Brüche, für die folgendes gilt: Sie haben gleiche Zähler und verschiedene Nenner und sind trotzdem gleich groß."

Leider überlegte der Drachen auch jetzt nicht lange. „0/11 und 0/12", schrie er. „Beide haben den gleich Platz auf dem Zahlenstrahl, nämlich genau auf der 0." – Er grinste hämisch, holte tief Luft und brüllte: „Die zweite Chance ist vertan. Bruch gegen Drachen – welch ein Wahn!"

Der zweite Tag hatte keine Rettung gebracht. Der dritte Tag begann. Die Zeit schien zu rasen; noch fünf Stunden, noch vier Stunden,... noch zehn Minuten! Da trat ½ vor den Drachen.

„Nenne mir", sprach er, „den Bruch, der größer ist als ich und auf dem Zahlenstrahl mein nächster Nachbar ist."

Diesmal dauerte es länger. Der Drachen schien angestrengt zu überlegen. Mehrmals sah es aus, als wollte er etwas sagen. Die Brüche zitterten jedes Mal vor Aufregung. Doch immer wieder schien der Drache zu merken, das seine geplante Antwort falsch sein würde. Und er schwieg.

½ wurde immer aufgeregter. Er würde gewinnen! Wie sie ihm alle dankbar sein würden! Da wurde er jäh aus seinen Träumen gerissen. Der Drachen gab sich noch nicht geschlagen. „Ich nehme mir einen Tag Bedenkzeit", ließ er die Brüche wissen. „Morgen um die gleiche Zeit komme ich wieder und nenne euch den nächsten rechten Nachbarn von ½!" Sprach's und verschwand.

„Die Bedenkzeit wird ihm nichts nützen", rief ½ fröhlich. „Er kann es nicht schaffen. Wenn ihr wollt", wandte er sich an seine Freunde, „erkläre ich euch, warum ich keinen nächsten rechten Nachbarn habe. Ihr übrigens auch nicht." Natürlich wollten sie; und ½ begann: „Nehmen wir einen Bruch, der größer ist als ich, etwa 13/25. Jetzt bringen wir 13/25 und mich durch Erweitern auf den Hauptnenner 50: 13/25 = 26/50 und ½ = 25/50. Nun sieht es zunächst so aus, als ob es keinen Bruch zwischen 26/50 und 25/50 gäbe. Aber Erweitern mit 2 ergibt die Brüche 52/100 und 50/100. Und dazwischen liegt z.B. 51/100. Aber auch 51/100 ist nicht mein nächster Nachbar; 101/200 steht mir noch näher. Doch auch er ist nicht mein nächster rechter Nachbar. Ich kann mit der vorhin beschriebenen Methode einen näheren finden. Das Verfahren klappt immer. Probiert es einmal für euch und eure Nachbarn aus." Da taten sie; und alle merkten erfreut, dass ½ recht hatte. So sahen sie gelassen dem nächsten Tag entgegen. Aber der Drachen kam nicht. Er kam nie mehr. Er konnte die Aufgabe nicht lösen"

Jahrhunderte später wurde er entdeckt. Er saß auf einem Felsen und murmelte vor sich hin, ohne Pause, immer dasselbe. Wer nahe genug heranging, konnte folgendes hören: „1/2 hat keinen nächsten rechten Nachbarn, kein Bruch hat einen nächsten rechten Nachbarn, es gibt immer einen noch näheren: „ ½ hat keinen nächsten Nachbarn, kein ..." Und wenn der Drachen nicht gestorben ist, dann murmelt er noch heute.

(Paulitsch 1993, S. 37-40)

(Prediger, 2004, S. 5)

III: Stimuli aus Interview 1

Anmerkung: Die Seite 75 enthält persönliche Daten. Sie ist daher nicht Bestandteil der Online-Veröffentlichung.

Beispiellösungen

1

15.1.a)

$\frac{1}{6} \cdot 5 = \frac{5}{30}$; $\frac{5}{30} \cdot 2 = \frac{10}{30}$

$\frac{1}{5} \cdot 6 = \frac{6}{30}$; $\frac{6}{30} \cdot 2 = \frac{12}{30}$

Zwischen $\frac{1}{6}$ und $\frac{1}{5}$ liegt $\frac{11}{30}$.

15.1.b)

$\frac{10}{30} \cdot 2 = \frac{20}{30}$; $\frac{12}{30} \cdot 2 = \frac{24}{30}$

$\longrightarrow$ zwischen $\frac{1}{6}$ und $\frac{1}{5}$ liegen aber auch die Zahlen (bspw.):

$\frac{21}{30} \triangleq \frac{7}{10}$

$\frac{22}{30}$

$\frac{23}{30}$.

2

15.1.a)

$\frac{1}{6} \quad \frac{1}{5} \quad = \frac{5}{30} \quad \frac{6}{30}$

↳ $\frac{6}{31}$ ist zwischen den beiden Zahlen

15.1.b)

$\frac{6}{32} \quad \frac{6}{33}$ .....

3

15.1.a)

$\frac{1}{6} = \frac{5}{30} = \frac{10}{60}$

$\frac{1}{5} = \frac{6}{30} = \frac{12}{60}$

$\frac{11}{60}$ liegt zwischen den beiden Zahlen

15.1.b)

$\frac{22}{120}, \frac{44}{240}$ alle Zahlen, die dieser Äquivalenzklasse angehören liegen dazwischen

4

15.1.b)

Ja es gibt noch viele weitere Zahlen, da man die Brüche immer weiter Erweitern kann und weitere Zahlen bzw. Brüche dazwischen hat.

Da wir „nur" einen bestimmten Bereich zwischen $\frac{1}{6}$ und $\frac{1}{5}$ haben, sind es nicht ausdrücklich unendlich viele, aber es liegen viele viele Zahlen dazwischen.

5

15.2.

Wir haben gelernt, dass $\frac{1}{5}$ größer ist als $\frac{1}{6}$, da die Tortenstücke dort größer wären. Es ist also auch möglich eine Zwischengröße zwischen der Größe der Tortenstücke von $\frac{1}{6}$ und $\frac{1}{5}$ zu finden. Es gibt unendlich viele Möglichkeiten, zwischen den Stückwerten das Messer anders anzusetzen. (St108)

Aussagen zu Aufgabe 15.4.

Die Rationalen Zahlen sind nichtabzählbar unendlich, im Gegensatz zu den natürlichen Zahlen $|\mathbb{R}| > |\mathbb{N}|$. Es kann also keine 1-zu-1 Abbildung stattfinden, denn bei den rationalen Zahlen ist die Kardinalität nicht absolut. Es gibt immer noch eine weitere Zahl zwischen zwei anderen. Bei den natürlichen Zahlen gibt es das nicht. (St008, Pos. 19)

Die Multiplikation und Division sind anders als in $\mathbb{N}$. Wenn ich mit etwas multipliziere bedeutet das in $\mathbb{Q}$ nicht automatisch, dass die Ausgangszahl größer wird, sondern sie kann auch kleiner werden.

Wenn ich mit etwas dividiere bedeutet das auch nicht automatisch, dass die Ausgangszahl kleiner wird, sondern sie kann auch größer werden. (St007, Pos. 19-20)

Dezimalzahlen: zw. 2 Zahlen gibt es unendlich viele andere Zahlen (St076, Pos. 13)

Rationale Brüche kann man beliebig erweitern oder kürzen und es ist die gleiche Dezimalzahl. Z.B. $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{6}{8}$ (St069, Pos. 17)

Zwischen 2 nebeneinanderliegenden Zahlen gibt es eine weitere und es gibt unendlich viele Zahlen dazwischen. (St052, Pos. 12)

Rationale Zahlen können in die negativen Zahlen gehen (St081, Pos. 18)

Bei den № gibt es keine Dezimalzahlen oder -brüche

-> Somit kann bspw bei $\mathbb{N}$: 5 ∧ 6 keine $\mathbb{N}$ dazwischen liegen, aber bei $\mathbb{R}$: $\frac{5}{1} \wedge \frac{6}{1}$ liegt $\frac{11}{1}$

Umfrage zur Nutzungshäufigkeit Name:_________________________

Ich habe mir die Vorlesungsvideos zur Bruchrechnung angesehen:

- ☐ nie
- ☐ selten
- ☐ oft
- ☐ immer

ggf. Kommentar:

Ich habe an den Übungen zum Thema Bruchrechnung teilgenommen:

- ☐ nie
- ☐ selten
- ☐ oft
- ☐ immer

ggf. Kommentar:

Ich habe die Selbsttests zum Thema Bruchrechnung absolviert:

- ☐ nie
- ☐ selten
- ☐ oft
- ☐ immer

ggf. Kommentar:

Ich habe das Hausaufgabentutorium besucht:

- ☐ nie
- ☐ selten
- ☐ oft
- ☐ immer

ggf. Kommentar:

Ich habe die beiden Bruchrechentests (über echo-app.org) absolviert:

ja ☐ nein ☐

ggf. Kommentar:

Hinsichtlich des Erwerbs des Bruchrechenverständnisses hätte ich mir in der Lehrveranstaltung zusätzlich Folgendes gewünscht:

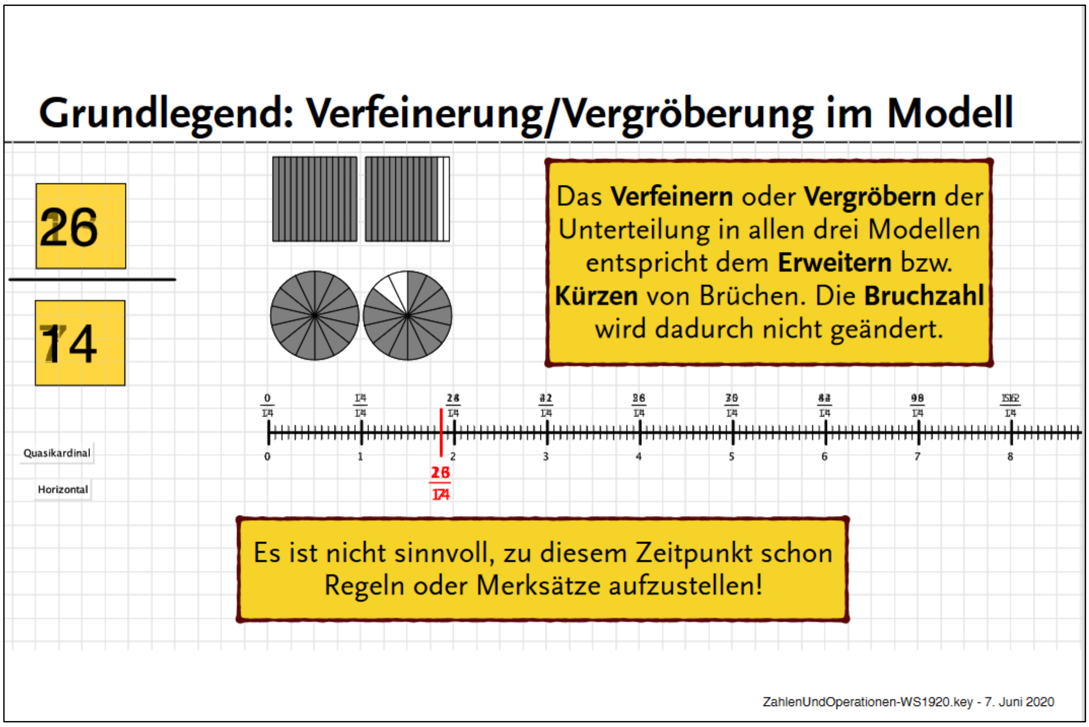
IV: Leitfaden zur Online-Gruppendiskussion am 12.09.2021

Phase	**Thema**	**Leitfrage**	Material
Einführung	Rahmenbedingungen	Dank Datenschutz Aufnahme Anonymität Grundregeln: Respekt und Wertschätzung kein Wissenstest! keine richtigen und falschen Antworten	
Warm-Up	allg. Aspekte des Themas Gesprächsatmosphäre	Vorstellungsrunde: Gemeinsamkeit: Testergebnisse **Du hast einen Nachhilfeschüler der 6. Klasse und sollst ihm Aufgaben aus der Bruchrechnung erklären.** **Welches Gefühl verbindest du mit dem Thema Bruchrechnung?** **Welches Gefühl passt am besten zu dir?**	Emoti-Scape-Fragebogen
Hauptteil	Dichte der Brüche	Moderator erzählt den Beginn des Märchens vom bösen Drachen **Wie könnte es wohl weitergehen? Was kommt dir in den Sinn?**	Das Märchen von dem bösen Drachen

	Zahl zwischen zwei Brüchen	Klausuraufgabe: Finde eine Zahl zwischen 1/6 und 1/5… **Was fällt dir zu dieser Aufgabe spontan ein?** **- Was sagst du zu folgenden Klausurantworten?** **- Könnt Ihr das mal am Zahlenstrahl darstellen?**	Antworten aus Wissenstest ggf. Brüche am Board ordnen lassen
	kindgerechte Erklärung	**Fallen euch zur Erklärung noch andere Vorstellungsbilder als der Zahlenstrahl ein?** **- Was sagst du zu folgender Antwort?** **- Stelle dir 2 Kannen mit Apfelschorle vor...** **- Welches Vorstellungsbild gefällt dir am besten? Begründe.**	Klausur-antworten
	Perspektivwechsel, Metaebene	**Worin liegt die Schwierigkeit bei der Aufgabe?** **- Was könnte für SuS schwierig sein?** **- Was ist für euch schwierig?**	
	Eigenschaften von rationalen Zahlen	zu Aufgabe 15.4.: Eigenschaften von rationalen Zahlen im Vergleich zu den natürlichen Zahlen: **Was meinst du? Sind die folgenden Antworten wahr oder falsch?**	Klausur-antworten Board

		Haben wir etwas vergessen?	
Abschlussteil	Gewichtung der Schwierigkeiten Zusammenfassung	Umfrage über zoom **Könntest du deinem Nachhilfeschüler alles erklären? Oder bestehen bei dir selbst noch Unsicherheiten?** **Rückblick auf Lehrveranstaltung- hat etwas gefehlt?** **Bedeutung für die Schule** **Dank** **Einwilligungserklärung**	Fragebogen Einwilligungserkl.

V: Ausgewählte Folien und Aufgaben der Lehrveranstaltung Arithmetik und ihre Didaktik II



(Kortenkamp, 2021, S02E07, Vorlesungsfolie 35)

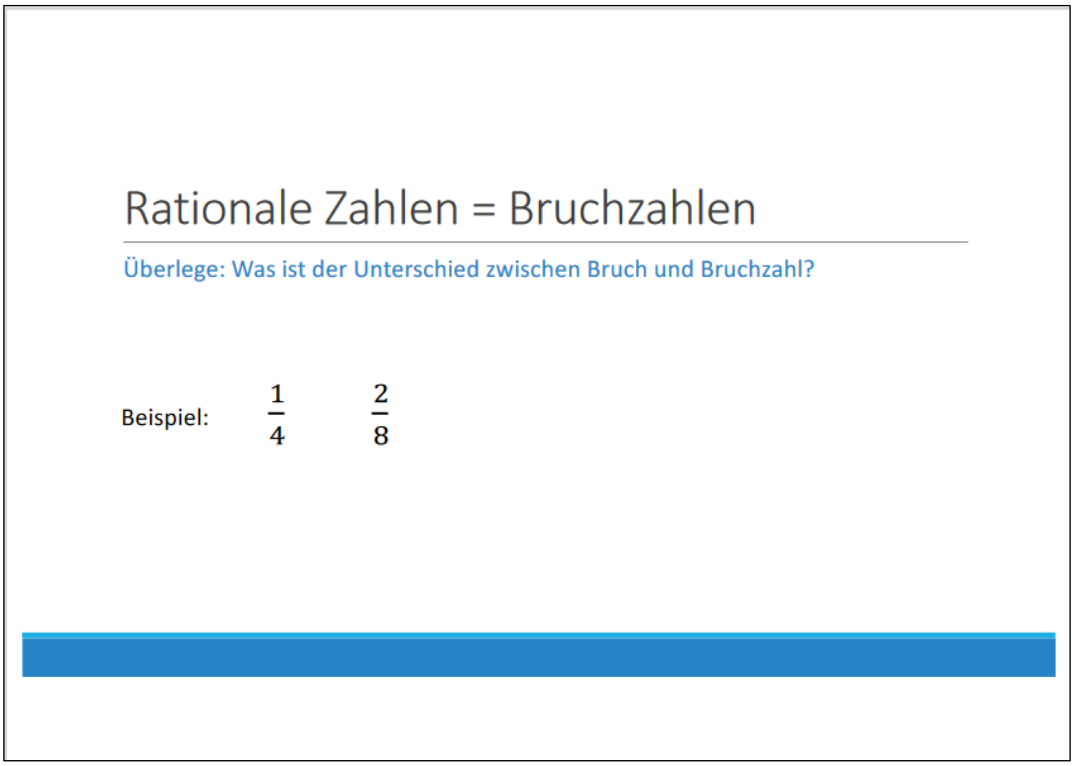
77. Aufgabe (Sichert den Klassenerhalt!)* **5 P.**

a) Ersetzen Sie jedes Kästchen durch eine ganze Zahl, so dass jeweils eine wahre Aussage entsteht:

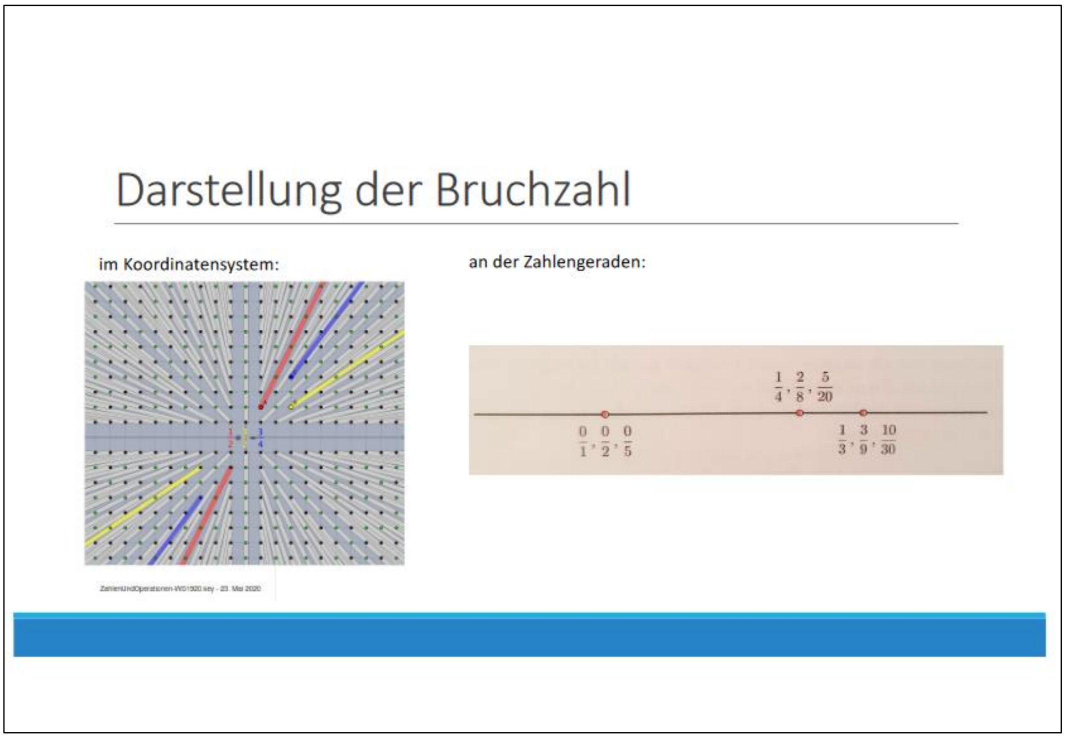
$$\frac{2}{5} \sim \frac{\square}{20} \qquad \frac{2}{5} \sim \frac{12}{\square} \qquad \frac{\square}{5} \sim \frac{6}{30} \qquad \frac{4}{\square} \sim \frac{\square}{30} \qquad \frac{4}{\square} \sim \frac{25}{\square} \qquad \frac{\square}{24} \sim \frac{\square}{26}$$

(Kortenkamp, 2021, S02E05, Hausaufgabe Nr. 77)

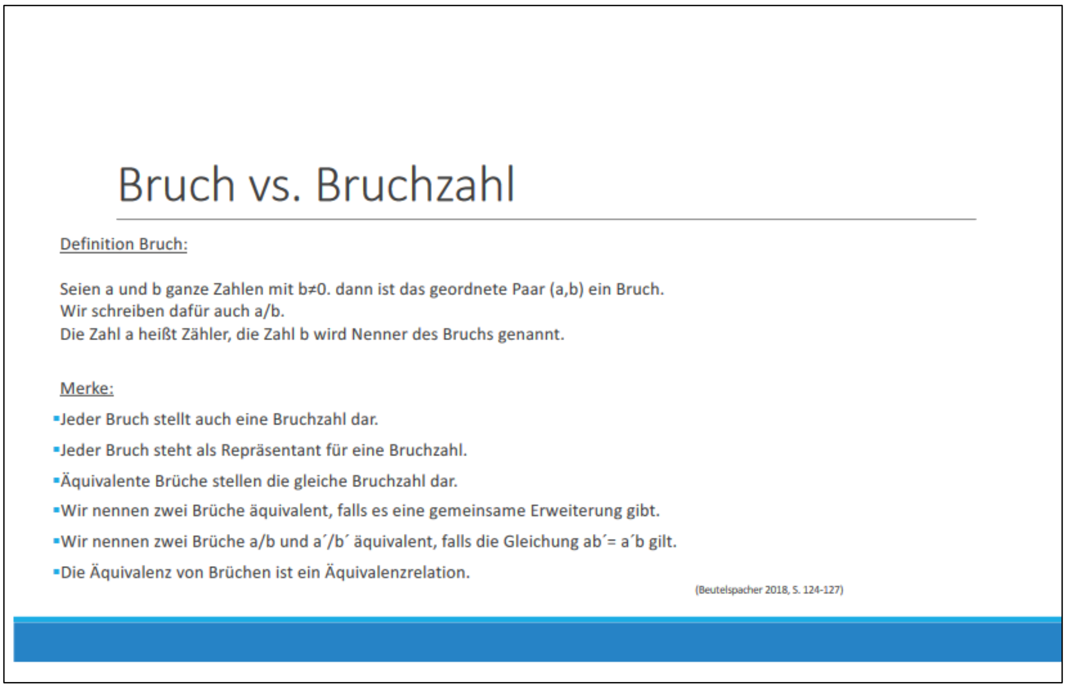
(Kortenkamp, 2021, S02E07, Vorlesungsfolie 14)



(Kortenkamp, 2021, S02E07, Übungsfolie 10)



(Kortenkamp, 2021, S02E07, Übungsfolie 11)



(Kortenkamp, 2021, S02E07, Übungsfolie 12)

Alles wird anders, weil es gleich bleiben soll

Wir haben immer schön darauf geachtet, dass die Zahlenräume ineinander eingebettet sind, damit die **Rechengesetze erhalten** bleiben.

Die Eigenschaften der Zahlen und Operationen werden dadurch aber miteinander verwischt – die Existenz der additiven und multiplikativen **Gegenzahlen** sorgt dafür, dass **entgegengesetzte Operationen** das gleiche bewirken können!

	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Q}^+$	$\mathbb{Q}$
Man kann jede Zahl von jeder anderen subtrahieren	❌	✅	❌	✅
Man kann durch jede Zahl außer 0 dividieren	❌	❌	✅	✅
Es gibt eine kleinste Zahl	✅	❌	✅	❌
Es gibt eine kleinste Zahl >0	✅	✅	❌	❌
Abstand zwischen Zahlen immer ≥ 1	✅	✅	❌	❌
Addition vergrößert	✅	❌	✅	❌
Subtraktion verkleinert	✅	❌	✅	❌
Multiplikation vergrößert	✅	❌	❌	❌
Division verkleinert	✅	❌	❌	❌
Zwischen zwei Zahlen gibt es immer noch eine weitere	❌	❌	✅	✅
Es gibt immer eine nachfolgende Zahl	✅	✅	✅	✅
Es gibt immer eine kleinere Zahl	❌	✅	❌	✅
Es gibt eine nächstgrößere Zahl	✅	✅	❌	❌
Man kann die Zahlen in einer Reihenfolge abzählen	✅	✅	✅	✅
Es gibt Primzahlen	✅	✅	❌	❌
Es gibt das Konzept der Teilbarkeit	✅	✅	❌	❌
Man kann in Restklassen rechnen	✅	✅	❌	❌
Je mehr Ziffern, desto größer	✅	❌	❌	❌
Je größere Ziffern, desto größer ist die Zahl	✅	❌	❌	❌
Die Darstellung ist eindeutig	✅	✅	❌	❌
Jede endliche Teilmenge hat ein kleinstes Element	✅	✅	✅	✅
Jede Teilmenge hat ein kleinstes Element	✅	❌	❌	❌

ZahlenUndOperationen-WS1920.key - 21. Juni 2020

(Kortenkamp, 2021, S02E09, Vorlesungsfolie 14)

Warum und wie vernetzt man nun die Darstellungen

- Der Wechsel zwischen verschiedenen Darstellungen wurde mindestens seit Bruner (1967) als didaktisches Hilfsmittel und Prinzip genutzt.
- Neben dem Wechsel zwischen Kreis/ Rechteck/Streifen/Zahlenstrahl als graphischen Darstellungen **(ikonisch)** wird auch in die **symbolische** Darstellung als Bruchzahl und in die **enaktive** Darstellung in Form von Handlungen an konkreten Gegenständen gewechselt. Hinzu kommt eine **sprachliche** Darstellung und die abstrakte **algebraische** Darstellung.

Prediger, S. & Wessel, L.: Darstellungen vernetzen. Ansatz zur integrierten Entwicklung von Konzepten und Sprachmitteln. Praxis der Mathematik in der Schule (PM) 54 (Heft 45), Juni 2012

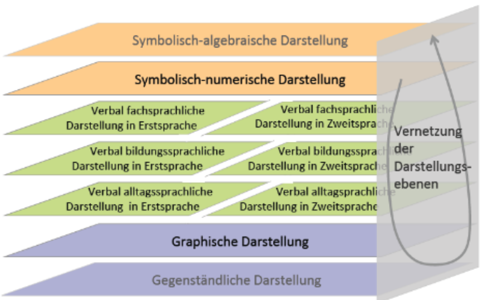
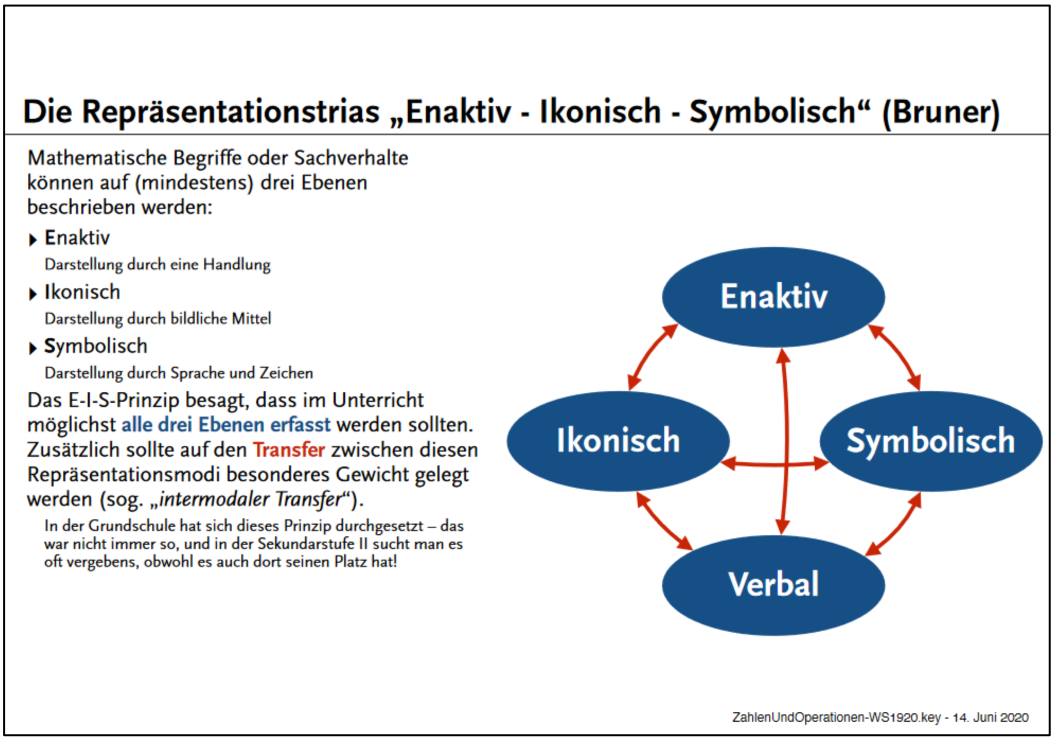
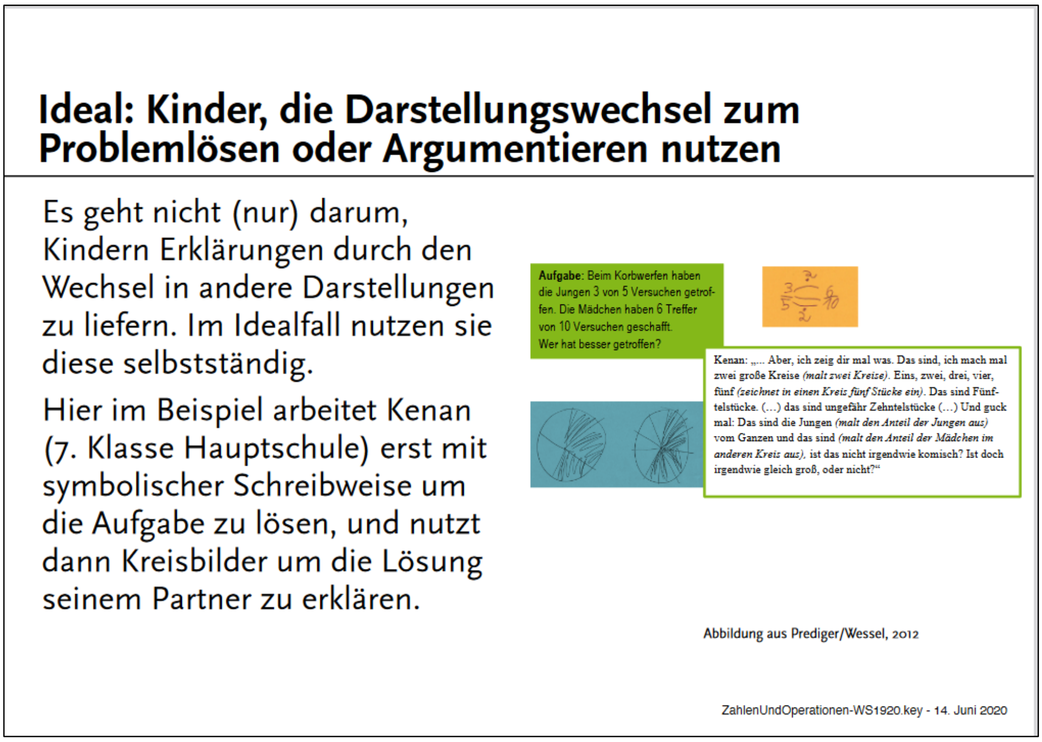


Abbildung aus Prediger/Wessel, 2012

(Kortenkamp, 2021, S02E08, Vorlesungsfolie 18)

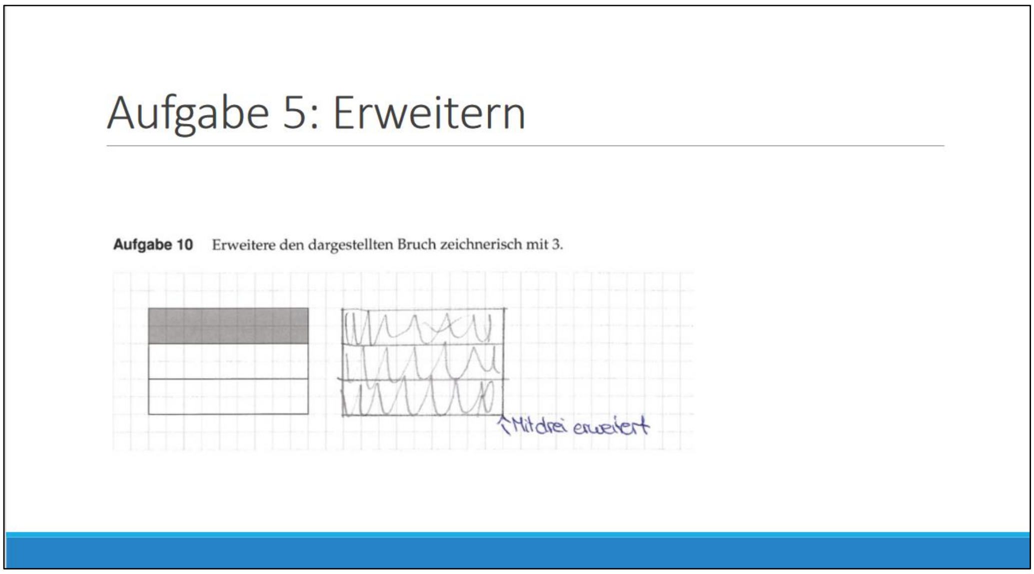


(Kortenkamp, 2021, S02E08, Vorlesungsfolie 20)

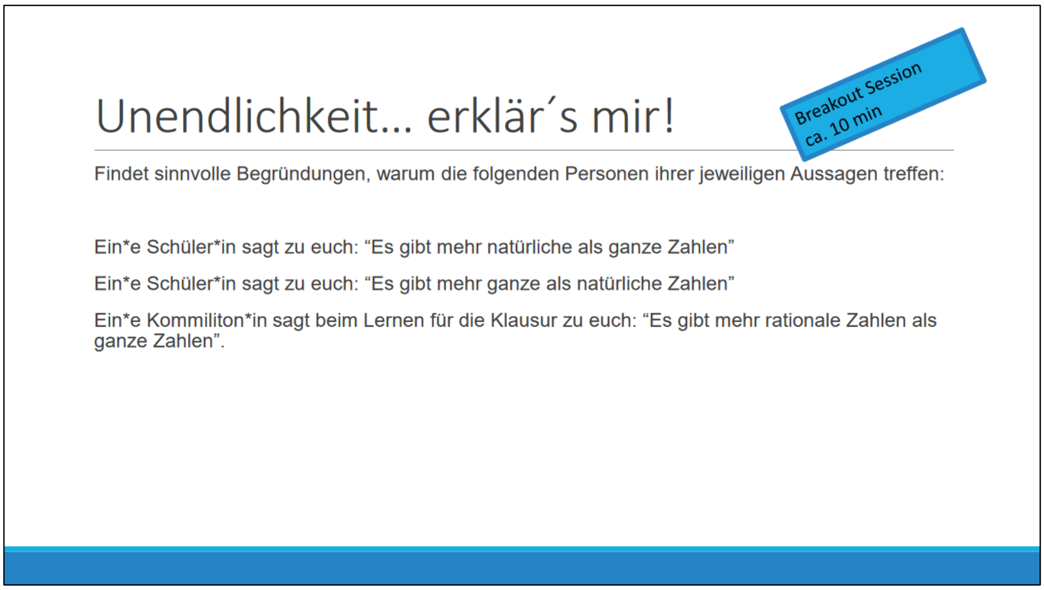


(Kortenkamp, 2021, S02E08, Vorlesungsfolie 25)

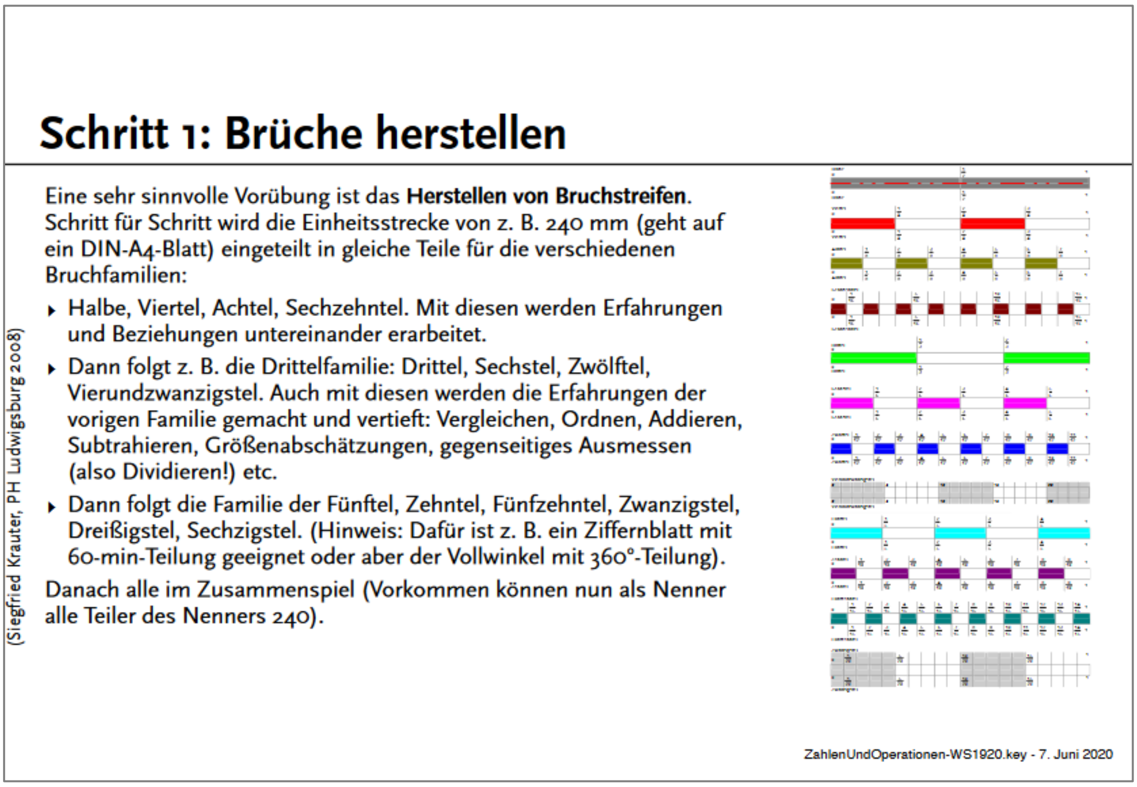
(Kortenkamp, 2021, S02E08, Vorlesungsfolie 3)



(Kortenkamp, 2021, S02E09, Übungsfolie 10)



(Kortenkamp, 2021, S02E06, Übungsfolie 4)



(Kortenkamp, 2021, S02E07, Vorlesungsfolie 27)

Schritt 1: Grunderfahrungen

(Siegfried Krauter, PH Ludwigsburg 2008)

Beim Herstellen der Bruchstreifen sollte schon thematisiert werden, welche **Tätigkeiten** dafür notwendig sind – was muss man machen, um aus Vierteln Achtel zu machen, wie viele Sechstel passen in zwei Drittel, …

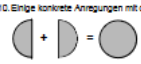
- Diese Beobachtungen werden sowohl mündlich als auch symbolisch notiert!

Es geht hierbei nicht um die Erarbeitung von Regeln, sondern um den **Aufbau einer inhaltlichen Vorstellung** zu Bruchzahlen und Operationen, die mit ihnen durchgeführt werden können.

3. So etwa könnte ich mir den Einsatz vorstellen:

- Zunächst lässt man die Schüler die Streifen für Halbe, Viertel, Achtel [evtl. auch noch Sechzehntel] herstellen. Als Zielvorstellung wird ein fertiges Modell vorab gezeigt (siehe Anhang 1 Hilfsmittel).
- Dann werden dazu Reflexionen und Fragen überlegt und notiert: Was haben wir denn bei der Herstellung z. B. des Halbe-Streifens gemacht?
- Die Einheitsstrecke 1 wurde in zwei gleiche Teile geteilt:
  Wir notieren: $1 : 2 = \frac{1}{2}$. Umgekehrt: $2 * \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$
- Man kann ruhig weitermachen: $3*\frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} = 1 + \frac{1}{2} = 1\frac{1}{2} = 1{,}5$ usf.
- Nun vergleicht man die Halbe-Strecke mit der Einheitsstrecke: Wie oft passt diese rein? Man sieht unmittelbar und überprüft: $1 : \frac{1}{2} = 2$. $2 : \frac{1}{2} = 4$ $3 : \frac{1}{2} = 6$; ....
- Es empfiehlt sich, jede dieser Gleichungen auch inhaltlich in Wortform zu notieren wie z. B. zu $3 : \frac{1}{2} = 6$: „Teilt man 3 E in Stücke von je ½ E auf, so erhält man 6 Stücke" bzw. „misst man 3 E mit ½ E aus, so geht es 6 Mal".
  Besonders empfehlenswert ist dies bei der Verwendung von Maßeinheiten für E wie z. B. h, kg, cm, l, ...

10. Einige konkrete Anregungen mit dem Kreismodell:



$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \qquad = 2 * \frac{1}{2}$

„Ein halbes und ein halbes ist ein Ganzes". „Ein Ganzes ist zwei mal ein Halbes"

Diese Gleichung hat nun zwei Umkehrungen (wie jede Multiplikation sie hat):

$1 : 2 = \frac{1}{2}$ **„Teilt man ein Ganzes in zwei gleiche Teile, so erhält man ein Halbes"**

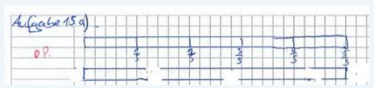
$1 : \frac{1}{2} = 2$ **„Teilt man ein Ganzes in Halbe auf, so erhält man zwei Stück."**

ZahlenUndOperationen-WS1920.key - 7. Juni 2020

(Kortenkamp, 2021, S02E07, Vorlesungsfolie 28)

VIII: Kategorienhandbuch

Liste der Codes	Memo	Häufigkeit
Codesystem		1087
Wissenstest		859
15.1.a) eine Zahl zwischen 1/6 und 1/5		191
Nennung korrekter Zahl	Die Studierenden beantworten die Frage, ob es möglich ist, eine Zahl zwischen 1/6 und 1/5 zu finden, indem sie eine korrekte Bruchzahl nennen. Ankerbeispiel: 1/6 < 2/11 < 1/5 (St006, Pos. 2)	79
Nennung falscher Zahl	Die Studierenden beantworten die Frage, ob es möglich ist, eine Zahl zwischen 1/6 und 1/5 zu finden, indem sie eine falsche Zahl nennen. Ankerbeispiel: 8/10 (St035, Pos. 2)	7
Dezimalzahl im Nenner	Die Studierenden beantworten die Frage, ob es möglich ist, eine Zahl zwischen 1/6 und 1/5 zu finden, indem sie einen Bruch angeben, der im Nenner eine Dezimalzahl enthält. Ankerbeispiel: 1/5,5 (St058, Pos. 2)	1
Ja	Die Studierenden beantworten die Frage, ob es möglich ist, eine Zahl zwischen 1/6 und 1/5 zu finden, mit ´Ja´, ohne eine solche Zahl zu nennen. Ankerbeispiel: Ja, es ist möglich. (St011, Pos. 2)	4
Nein	Die Studierenden beantworten die Frage, ob es möglich ist, eine Zahl zwischen 1/6 und	6

	1/5 zu finden, mit ´Nein´. Ankerbeispiel: Nein, gibt es nicht. (St020, Pos. 1)	
nur unter Verwendung von Dezimalbrüchen	Die Studierenden beantworten die Frage, ob es möglich ist, eine Zahl zwischen 1/6 und 1/5 zu finden, mit ´Nein´ und begründen, dass dies nur unter Verwendung von Dezimalbrüchen möglich sei. Ankerbeispiel: Ohne die Brüche in Dezimalzahlen umzuwandeln, kann man keine Zahl zwischen diesen beiden angegebenen. (St016, Pos. 2)	2
keine Antwort	Die Studierenden haben die Frage, ob es möglich ist, eine Zahl zwischen 1/6 und 1/5 zu finden, nicht bearbeitet. Ankerbeispiel: -- (St053, Pos. 2)	7
Sonstiges	Die Antworten der Studierenden auf die Frage, eine Zahl zwischen 1/6 und 1/5 zu finden, lassen sich keiner Kategorie zuordnen. Ankerbeispiel:  (St021, Pos. 2)	1
Erweitern	Die Studierenden beantworten die Frage, ob es möglich ist, eine Zahl zwischen 1/6 und 1/5 zu finden, indem sie die beiden Brüche erweitern und dann einen Bruch angeben, der zwischen den beiden erweiterten Brüchen liegt, ohne dass sich die Vorgehensweise einer anderen Subkategorie zuordnen lässt. Ankerbeispiel:	56

	1/6 1/5 = 5/30 6/30 ↳ 6/31 ist zwischen den beiden Zahlen (St056, Pos. 2-3)	
mit Fokus auf den Zähler	Die Studierenden beantworten die Frage, ob es möglich ist, eine Zahl zwischen 1/6 und 1/5 zu finden, indem sie die Brüche auf denselben Nenner erweitern und dann einen Bruch angeben, dessen Zähler zwischen den Zählern der beiden erweiterten Brüche liegt. Ankerbeispiel: 1/6 = 5/30 = 10/60 1/5 = 6/30 = 12/60 → Erweitern → 11/60 liegt zwischen 1/6 und 1/5 (St019, Pos. 2-3)	44
unvollständig erweitert	Die Studierenden beantworten die Frage, ob es möglich ist, eine Zahl zwischen 1/6 und 1/5 zu finden, indem sie die Brüche auf denselben Nenner erweitern und anschließend nicht weiter erweitern, so dass sie keine Zahl finden. Ankerbeispiel: 1/6 und 1/5 = 5/30 und 6/30 (St061, Pos. 2)	1
unvollständig erweitert, falsche Fortsetzung der Rechnung	Die Studierenden beantworten die Frage, ob es möglich ist, eine Zahl zwischen 1/6 und 1/5 zu finden, indem sie die Brüche auf denselben Nenner erweitern und anschließend fehlerhaft weiter erweitern, so dass sie eine falsche Zahl angeben. Ankerbeispiel: 1/6 · 5 = 5/30 ; 5/30 · 2 = 10/30 1/5 · 6 = 6/30 ; 6/30 · 2 = 12/30 Zwischen 1/6 und 1/5 liegt 11/30. (St009, Pos. 1-4)	1
mit Fokus auf den Nenner	Die Studierenden beantworten die Frage, ob es möglich ist, eine Zahl zwischen 1/6 und 1/5 zu finden, indem sie die beiden Brüche mit der gleichen Zahl erweitern und dann einen Bruch angeben, dessen Nenner zwischen den Nennern der erweiterten Brüche liegt. Ankerbeispiel:	5

	Eine Zahl zwischen 1/6 und 1/5 ist 2/11. 1/6 · 2/2 = 2/12 1/5 · 2/2 = 2/10 -> dazwischen 2/11 (St005, Pos. 2-3)	
falsche Zahl	Die Studierenden beantworten die Frage, ob es möglich ist, eine Zahl zwischen 1/6 und 1/5 zu finden, indem sie die beiden Brüche mit der gleichen Zahl erweitern und dann einen falschen Bruch angeben, dessen Nenner nicht zwischen den Nennern der erweiterten Brüche liegt. Ankerbeispiel: 1/6 = 10/60 und 1/5 = 10/50 → 2/13 = 10/65 liegt genau dazwischen (St030, Pos. 2)	1
Mittelwertbildung	Die Studierenden beantworten die Frage, ob es möglich ist, eine Zahl zwischen 1/6 und 1/5 zu finden, indem sie den Mittelwert der beiden Brüche korrekt berechnen. Ankerbeispiel: 1/6 + 1/5 = 5/30 + 6/30 = 11/30 11/30 · 1/2 = 11/60 (St041, Pos. 2)	9
falsche Addition	Die Studierenden beantworten die Frage, ob es möglich ist, eine Zahl zwischen 1/6 und 1/5 zu finden, indem sie jeweils die Zähler und Nenner der beiden Brüche addieren. Ankerbeispiel: Ja: mit „falsche Addition" 1+1/6+5 = 2/11 (St007, Pos. 2)	10
Herleitung über Dezimalbruch	Die Studierenden beantworten die Frage, ob es möglich ist, eine Zahl zwischen 1/6 und 1/5 zu finden, indem sie einen Bruch angeben, den sie über die Umwandlung einer dazwischen liegenden Dezimalzahl gefunden haben. Ankerbeispiel: Eine Zahl wäre: 19/100 also 0,19 . (St050, Pos. 3)	4
Angabe von Dezimalbruch	Die Studierenden beantworten die Frage, ob es möglich ist, eine Zahl zwischen 1/6 und 1/5 zu finden, indem sie eine Dezimalzahl angeben, die zwischen diesen beiden Zahlen	7

	liegt. Ankerbeispiel: Angabe nur in Dezimalbruch möglich 0,18 (St026, Pos. 2)	
falsche Umwandlung	Die Studierenden beantworten die Frage, ob es möglich ist, eine Zahl zwischen 1/6 und 1/5 zu finden, indem sie die beiden Brüche falsch in Dezimalzahlen umwandeln und dann eine falsche Dezimalzahl als Zwischenzahl angeben. Ankerbeispiel: Ja! 1/6 = 0,16 – dazwischen z.B.: 0,163 1/5 = 0,2 (St012, Pos. 2-3)	1
15.1.b) alle Zahlen zwischen 1/6 und 1/5		117
Unendlichkeit erwähnt	Die Studierenden beantworten die Frage, ob es möglich ist, mehr als eine Zahl zwischen 1/6 und 1/5 zu finden und alle möglichen Zahlen aufzuschreiben, indem sie darauf verweisen, dass es zwischen zwei Brüchen unendlich viele andere Brüche gibt, ohne eine Erklärung dafür zu liefern. Ankerbeispiel: Es gibt unendlich viele Zahlen dazwischen. (St018, Pos. 4)	34
stärker Erweitern	Die Studierenden beantworten die Frage, ob es möglich ist, mehr als eine Zahl zwischen 1/6 und 1/5 zu finden und alle möglichen Zahlen aufzuschreiben, indem sie die beiden Brüche unendlich oft erweitern und somit immer mehr Zahlen zwischen den beiden Brüchen finden können. Anmerkung: anstelle von ´unendlich´ zählt auch ´immer wieder´ Ankerbeispiel: Ja es gibt noch unendlich viele Zahlen zwischen den beiden Brüchen, da diese immer wieder erweitert werden können. (St017, Pos. 6)	19

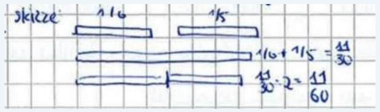
	fortgesetzte Mittelwertbildung	Die Studierenden beantworten die Frage, ob es möglich ist, mehr als eine Zahl zwischen 1/6 und 1/5 zu finden und alle möglichen Zahlen aufzuschreiben, indem sie fortlaufend den Mittelwert der beiden Brüche bilden und danach den Mittelwert mit dem Mittelwert und so weiter berechnen. Ankerbeispiel: Das ist nicht möglich alle Zahlen anzugeben, da es unendlich viele Zahlen gibt, die dazwischen liegen. Z.B. kann immer wieder der Mittelwert gebildet werden. (St057, Pos. 6)	2
	konkrete Nennung	Die Studierenden beantworten die Frage, ob es möglich ist, mehr als eine Zahl zwischen 1/6 und 1/5 zu finden und alle möglichen Zahlen aufzuschreiben, indem sie eine Auswahl an korrekten Zahlen aufschreiben und darauf verweisen, dass es zwischen zwei Brüchen unendlich viele andere Brüche gibt. Ankerbeispiel: Da die rationalen Zahlen unendlich sind, gibt es unendlich viele Zahlen zwischen den beiden Zahlen. Alle Zahlen kann ich nicht angeben, aber ein paar Beispiele: 11/60 ; 16/90 ; 17/90 ; 21/120 ; 22/120 ; 23/120 ; … (St051, Pos. 8-9)	5
	konkrete Nennung mit Andeutung von Unendlichkeit (...)	Die Studierenden beantworten die Frage, ob es möglich ist, mehr als eine Zahl zwischen 1/6 und 1/5 zu finden und alle möglichen Zahlen aufzuschreiben, indem sie eine Auswahl an korrekten Zahlen aufschreiben und die Existenz unendlich vieler Zahlen durch Punkte oder Ähnliches andeuten. Ankerbeispiel: 6/32 6/33 ….. (St056, Pos. 5)	3
	Intervall angegeben	Die Studierenden beantworten die Frage, ob es möglich ist, mehr als eine Zahl zwischen 1/6 und 1/5 zu finden und alle möglichen Zahlen aufzuschreiben, indem sie ein Intervall angeben und darauf verweisen, dass es zwischen den Brüchen unendlich viele andere Brüche gibt.	6

		Ankerbeispiel: Ja, es gibt mehr als eine Zahl, sogar unendlich viele, so dass man diese gar nicht alle angeben kann. (Zahlen: 1/6 < x < 1/5) (St073, Pos. 4-5)	
	Brüche einer Äquivalenzklasse	Die Studierenden beantworten die Frage, ob es möglich ist, mehr als eine Zahl zwischen 1/6 und 1/5 zu finden und alle möglichen Zahlen aufzuschreiben, indem sie konkrete Brüche einer Äquivalenzklasse aufschreiben und auf die Unendlichkeit verweisen. (Anmerkung: anstelle von ´unendlich´ zählt auch ´immer wieder´) Ankerbeispiel: Schließlich kann man immer beliebig erweitern = 11/60 → 22/120 → … (immer gleiche Zahl) (St073, Pos. 6)	1
	Sonstige	Die Studierenden beantworten die Frage, ob es möglich ist, mehr als eine Zahl zwischen 1/6 und 1/5 zu finden und alle möglichen Zahlen aufzuschreiben, indem sie darauf verweisen, dass es zwischen zwei Brüchen unendlich viele Zahlen gibt und fügen eine Begründung hinzu, die sich keiner anderen Kategorie zuordnen lässt. Ankerbeispiel: Ja, es gibt mehr als eine Zahl. Es gibt unendlich viele Zahlen dazwischen, denn die Menge der Reellen Zahlen ist unendlich --> man findet immer noch eine Zahl zwischen 2 gegebenen. (St008, Pos. 7)	1
	Bezug auf Dezimalbrüche	Die Studierenden beantworten die Frage, ob es möglich ist, mehr als eine Zahl zwischen 1/6 und 1/5 zu finden und alle möglichen Zahlen aufzuschreiben, indem sie darauf verweisen, dass es zwischen zwei Brüchen unendlich viele Dezimalbrüche gibt. Ankerbeispiel: (als Dezimalbruch gäbe es unendlich viele Zahlen dazwischen) (St007, Pos. 7)	2

unendlich viele Nachkommastellen	Die Studierenden beantworten die Frage, ob es möglich ist, mehr als eine Zahl zwischen 1/6 und 1/5 zu finden und alle möglichen Zahlen aufzuschreiben, indem sie darauf verweisen, dass unendlich viele Nachkommastellen an Dezimalzahlen angehängt werden können. Ankerbeispiel: Es gibt unendlich viele, da ich unendlich viele Nachkommastellen anhängen kann. (St012, Pos. 5)	4
Unendlichkeit nicht erwähnt		0
Intervall angegeben	Die Studierenden beantworten die Frage, ob es möglich ist, mehr als eine Zahl zwischen 1/6 und 1/5 zu finden und alle möglichen Zahlen aufzuschreiben, indem sie ein Intervall angeben ohne den Begriff der Unendlichkeit direkt zu verwenden. Ankerbeispiel: $1/6 < x < 1/5$ $x \in \mathbb{R} = 1/6 < x < 1/5$ (St013, Pos. 6)	3
endliche Nennung von korrekten Zahlen	Die Studierenden beantworten die Frage, ob es möglich ist, mehr als eine Zahl zwischen 1/6 und 1/5 zu finden und alle möglichen Zahlen aufzuschreiben, indem sie eine endliche Auswahl an Zahlen aufschreiben, die zwischen 1/6 und 1/5 liegen. Ankerbeispiel: = Ja, 21/120 ; 22/120; 23/120 (St033, Pos. 8)	8
endliche Nennung von korrekten Zahlen und Andeutung	Die Studierenden beantworten die Frage, ob es möglich ist, mehr als eine Zahl zwischen 1/6 und 1/5 zu finden und alle möglichen Zahlen aufzuschreiben, indem sie eine endliche Auswahl an Brüchen aufschreiben, die zwischen 1/6 und 1/5 liegen und die Existenz weiterer Brüche andeuten. Ankerbeispiel: 10/60 = 20/120 12/60 = 24/120	1

		Unter anderem liegen 21/120 , 22/120 , 23/120 dazwischen (St047, Pos. 5-6)	
	endliche Nennung von falschen Zahlen	Die Studierenden beantworten die Frage, ob es möglich ist, mehr als eine Zahl zwischen 1/6 und 1/5 zu finden und alle möglichen Zahlen aufzuschreiben, indem sie eine endliche Auswahl an (teilweise) falschen Brüchen aufschreiben. Ankerbeispiel: 1/5,1 ; 1/5,2 ; 1/5,3 ; 1/5,4 ; 1/5,5 ; 1/5,6 ; 1/5,7 ; 1/5,8 ; 1/5,9 (St058, Pos. 4)	2
	Brüche einer Äquivalenzklasse	Die Studierenden beantworten die Frage, ob es möglich ist, mehr als eine Zahl zwischen 1/6 und 1/5 zu finden und alle möglichen Zahlen aufzuschreiben, indem sie auf alle Brüche einer Äquivalenzklasse hinweisen, aber den Begriff der Unendlichkeit nicht direkt erwähnen. Ankerbeispiel: 22/120 , 44/240 alle Zahlen, die dieser Äquivalenzklasse angehören liegen dazwischen (St063, Pos. 6)	2
	mehrere/viele	Die Studierenden beantworten die Frage, ob es möglich ist, mehr als eine Zahl zwischen 1/6 und 1/5 zu finden und alle möglichen Zahlen aufzuschreiben, indem sie darauf verweisen, dass es mehrere oder viele Brüche gibt, die zwischen 1/6 und 1/5 liegen ohne den Begriff der Unendlichkeit konkret zu erwähnen. Ankerbeispiel: Ja es gibt mehr Zahlen die zwischen 1/6 und 1/5 liegen (St026, Pos. 4)	2
	Ja	Die Studierenden beantworten die Frage, ob es möglich ist, mehr als eine Zahl zwischen 1/6 und 1/5 zu finden und alle möglichen Zahlen aufzuschreiben, mit ´Ja´, ohne dies weiter zu erklären. Ankerbeispiel:	1

	Ja gibt es. (St102, Pos. 5)	
Nein	Die Studierenden beantworten die Frage, ob es möglich ist, mehr als eine Zahl zwischen 1/6 und 1/5 zu finden und alle möglichen Zahlen aufzuschreiben, mit ´Nein´. Ankerbeispiel: Nein. (St016, Pos. 4)	2
Nennung von Dezimalbrüchen		0
endliche Nennung von falschen Zahlen	Die Studierenden beantworten die Frage, ob es möglich ist, mehr als eine Zahl zwischen 1/6 und 1/5 zu finden und alle möglichen Zahlen aufzuschreiben, indem sie eine endliche Auswahl von (teilweise) falschen Dezimalbrüchen angeben, die nicht zwischen 1/6 und 1/5 liegen. Ankerbeispiel: 1,17/1,18/1,19 (St020, Pos. 3)	1
mehrere	Die Studierenden beantworten die Frage, ob es möglich ist, mehr als eine Zahl zwischen 1/6 und 1/5 zu finden und alle möglichen Zahlen aufzuschreiben, indem sie darauf verweisen, dass es mehrere Dezimalbrüche gibt, die zwischen 1/6 und 1/5 liegen, ohne den Begriff der Unendlichkeit zu verwenden. Ankerbeispiel: Ja es gibt mehrere Zahlen. Allerdings handelt es sich ebenfalls um Dezimalbrüche. (St065, Pos. 5)	4
keine Antwort	Die Studierenden haben die Frage, ob es möglich ist, mehr als eine Zahl zwischen 1/6 und 1/5 zu finden und alle möglichen Zahlen aufzuschreiben, nicht beantwortet. Ankerbeispiel: -- (St053, Pos. 4)	14

15.2. kindgerechte Erklärung		141
Darstellungswechsel	Die Studierenden erklären einem Schüler/einer Schülerin die Lösung der Aufgabe 15.1., indem sie dafür einen Darstellungswechsel vornehmen.	0
Visualisierung Streifenmodell	Die Studierenden erklären einem Schüler/einer Schülerin die Lösung der Aufgabe 15.1., indem sie dafür als Visualisierung das Streifenmodell verwenden. Ankerbeispiel:  (St073, Pos. 10)	1
Visualisierung Kreismodell	Die Studierenden erklären einem Schüler/einer Schülerin die Lösung der Aufgabe 15.1., indem sie dafür das Kreismodell verwenden. Ankerbeispiel: Zu a) Stellen wir uns einen Kreis vor, der einmal in 5 gleichgroße Stücke geschnitten wird und einmal in 6. Wir nehmen von beiden jeweils 1 Stück raus und legen diese übereinander. Wir sehen, dass von den 5teln ein Stück übersteht, also muss es noch eine Zahl zwischen beiden geben. Wir verfeinern, sodass wir immer kleinere Stücke bekommen und irgendwann eines in den Zwischenraum passt. Hierfür machen wir die Nenner gleichnamig und betrachten die Zähler. Der Zähler der gesuchten Zahl muss nun zwischen beiden Zählern liegen. Zu b) Wenn wir die Stücke jetzt noch kleiner machen und immer kleiner, finden wir ganz viele Zahlen, die zwischen 1/5 und 1/6 liegen. Wir können die Stücke sogar unendlich klein machen, sodass es unendlich viel Zahlen zwischen 1/6 und 1/5 gibt. Wir verfeinern einfach immer weiter. (St082, Pos. 7-10)	2
lückenhaft	Die Studierenden erklären einem Schüler/einer Schülerin die Lösung der Aufgabe 15.1., indem sie dafür als Visualisierung das Kreismodell verwenden, dieses jedoch lückenhaft erklären.	2

	Ankerbeispiel: Um herauszufinden, welche Zahlen zwischen 1/6 und 1/5 liegen, könnte man sich vorstellen, einen Kuchen auf 5 oder 6 Kinder aufzuteilen. Dies kann man dann noch mit verschiedenen Anzahlen von Kuchen und Kindern ausprobieren. (St112, Pos. 7)	
Visualisierung Zahlenstrahl	Die Studierenden erklären einem Schüler/einer Schülerin die Lösung der Aufgabe 15.1., indem sie dafür als Visualisierung den Zahlenstrahl verwenden. Ankerbeispiel: Wenn ich einen Zahlenstrahl habe und trage die Werte dort ein und die Maßeinheit ist 30-stel, dann sieht es so aus, als wäre da nichts dazwischen. Wenn ich aber jetzt die Einheit einmal verfeinere auf 60stel, dann passt schon die 11/60 dazwischen. Wenn ich beliebig oft weiter verfeinere, noch genauer wie mit einem Zoom mir den Ausschnitt immer genauer (größer) ansehe, entdecke ich sehr viele Zahlen (unendlich viele Zahlen) dazwischen. (St087, Pos. 8)	4
Vorstellungsbild/Alltagsbezug	Die Studierenden erklären einem Schüler/einer Schülerin die Lösung der Aufgabe 15.1., indem sie dafür ein Vorstellungsbild mit Alltagsbezug verwenden. Ankerbeispiel: Ihr könnt die falsche Addition verwenden. Statt 1/6 und 1/5 zuerst gleichnamig zu machen, um sie dann zu addieren kannst du einfach beide Zähler addieren und dann beide Nenner: 1+1/6+5 = 2/11 Dies funktioniert, weil… Stell dir vor du hast 2 Tüten Gummibärchen, in der einen ist ein grünes Gummibärchen von insgesamt 6 und in der anderen ist auch ein Grünes, aber von insgesamt 5, weil du schon eins genascht hast. Wenn du die beiden Mengen zusammenfügst hast du ja insgesamt 2 grüne Gummibärchen aus insgesamt 11 und somit liegt 2/11 zwischen 1/6 und 1/5 . (St007, Pos. 11-13)	3
Vorstellungsbild unvollständig	Die Studierenden erklären einem Schüler/einer Schülerin die Lösung der Aufgabe 15.1., indem sie dafür ein Vorstellungsbild mit Alltagsbezug verwenden, dieses jedoch lückenhaft anwenden.	5

	Ankerbeispiel: Wir haben zwei Kuchen, die gleich groß sind. Der eine ist in 5 Stücken aufgeteilt, der andere in 6. Einen dritten Kuchen teilen wir auch in gleichmäßige Stücke. Die Stücke sind jetzt aber ein wenig größer als die vom 6erKuchen und ein wenig kleiner als die vom 5erKuchen. Und die Stücken können wir immer wieder neu aufteilen in den verschiedensten Formen und immer wieder nur ein Krümel größer oder kleiner. (St011, Pos. 6-7)	
Erweitern	Die Studierenden erklären einem Schüler/einer Schülerin die Lösung der Aufgabe 15.1., indem sie dafür die Brüche erweitern, ohne zu erklären, in welcher Form. Sie erklären, dass man Brüche immer weiter verfeinern kann und nehmen Bezug zur Unendlichkeit. Ankerbeispiel: Um zwischen zwei Bruchzahlen eine weitere zu finden, hilft es beide Brüche zu erweitern. Dann ist meist offensichtlich welcher Bruch zwischen ihnen liegt. (St005, Pos. 7)	1
ohne Bezug zur Unendlichkeit	Die Studierenden erklären einem Schüler/einer Schülerin die Lösung der Aufgabe 15.1., indem sie dafür die Brüche erweitern, ohne zu erklären, in welcher Form. Sie erklären nicht, dass man Brüche immer weiter verfeinern kann und nehmen keinen Bezug zur Unendlichkeit. Ankerbeispiel: Durch das Erweitern beider Brüche werden diese größer und weisen größere Lücken auf. (St111, Pos. 10)	4
mit Fokus auf Zähler	Die Studierenden erklären einem Schüler/einer Schülerin die Lösung der Aufgabe 15.1., indem sie dafür die Brüche gleichnamig machen und anschließend dann die Brüche mit der gleichen Zahl erweitern, bis sich Brüche finden, deren Zähler zwischen den Zählern der erweiterten Brüche liegen. Sie erklären, dass immer weiter verfeinert werden kann und nehmen direkt oder indirekt Bezug zur Unendlichkeit. Ankerbeispiel:	45

		Als erstes sollte man die Brüche auf einen gemeinsamen Nenner bringen, indem man sie erweitert. Danach erweitert man immer weiter bis man zwei Brüche hat, zwischen welche man ohne Probleme einen weiteren Bruch findet. b) Den Bruch kann man immer weiter erweitern, wodurch man immer mehr Zahlen findet die dazwischen liegen, dadurch gibt es selbst zwischen 2 Brüchen unendlich viele Zahlen. (St109, Pos. 8-9)	
	ohne Bezug zur Unendlichkeit	Die Studierenden erklären einem Schüler/einer Schülerin die Lösung der Aufgabe 15.1., indem sie dafür die Brüche gleichnamig machen und anschließend dann die Brüche mit der gleichen Zahl erweitern, bis sich Brüche finden, deren Zähler zwischen den Zählern der erweiterten Brüche liegen. Sie erklären nicht, dass immer weiter verfeinert werden kann und nehmen keinen Bezug zur Unendlichkeit. Ankerbeispiel: Um eine Zahl zwischen zwei Zahlen zu finden könnt ihr unter anderem die Brüche gleichnamig machen. Manchmal müsst ihr die Brüche solang erweitern, bis mindestens eine Bruchzahl zwischen diesen beiden liegt. Schaue hierbei auf den Zähler. Dieser sagt dir ob ein oder mehr Brüche dazwischen liegen. Unterscheiden sich diese jeweils nur um eine Zahl, kannst du die Brüche erweitern. (St091, Pos. 6)	9
	mehrere Zahlen ohne Bezug zur Unendlichkeit	Die Studierenden erklären einem Schüler/einer Schülerin die Lösung der Aufgabe 15.1., indem sie dafür die Brüche gleichnamig machen und anschließend dann die Brüche mit der gleichen Zahl erweitern, bis sich Brüche finden, deren Zähler zwischen den Zählern der erweiterten Brüche liegen. Sie geben mehrere Zwischenzahlen an. Sie erklären nicht, dass immer weiter verfeinert werden kann und nehmen keinen Bezug zur Unendlichkeit. Ankerbeispiel: Bei a) müssen wir beachten, dass beide Zahlen einen gleichen Nenner benötigen. Dementsprechend müssen wir nun gleichnamig machen. 6 und 5 können den gleichen Nenner mit 30 abbilden. Somit müssen nur noch die Zähler mit der entsprechenden Zahl	2

		multipliziert werden. 1·5 und 6·5 = 5/30 1·6 und 5·6 = 6/30 → da wir keine Zahl zwischen 5/30 und 6/30 ablesen können, müssen wir nun erweitern. Wir erweitern mit 2, da es die kleinste ganze Zahl ist $\frac{5}{30}^{(\cdot 2} = \frac{10}{60}$ und $\frac{6}{30}^{(\cdot 2} = \frac{12}{60}$. → da können wir nun erkennen, dass die 11 zwischen 10 und 12 liegt. b) da wir nun keine weitere Zahlen ablesen können, müssen wir erneut um 2 erweitern. $\frac{10}{60}^{(\cdot 2} = \frac{30}{120}$ und $\frac{12}{60}^{(\cdot 2} = \frac{24}{120}$ → da können wir nun 3 weitere Zahlen ablesen. 21/120 ; 22/120 ; 23/120 (St033, Pos. 10-18)	
	fehlerhaft erweitert und ohne Bezug zur Unendlichkeit	Die Studierenden erklären einem Schüler/einer Schülerin die Lösung der Aufgabe 15.1., indem sie dafür die Brüche gleichnamig machen und anschließend dann die Brüche mit der gleichen Zahl erweitern, bis sich Brüche finden, deren Zähler zwischen den Zählern der erweiterten Brüche liegen, sind beim Erweitern jedoch fehlerhaft vorgegangen. Sie nehmen keinen Bezug zur Unendlichkeit. Ankerbeispiel: „Durch Erweiterung der Brüche kann man schauen, wenn der Nenner gleich ist, ob zwischen den Zählern eine natürliche Zahl liegt; Bsp.: 10/30 ^ 12/30 passt 11/30 .“ (St009, Pos. 12-13)	1
	Angabe eines Intervalls	Die Studierenden erklären einem Schüler/einer Schülerin die Lösung der Aufgabe 15.1., indem sie dafür die Brüche gleichnamig machen und anschließend dann die Brüche mit	1

		der gleichen Zahl erweitern, bis sich Brüche finden, deren Zähler zwischen den Zählern der erweiterten Brüche liegen. Sie nehmen Bezug zur Unendlichkeit, indem sie ein Intervall angeben. Ankerbeispiel: a) Erweitere die Brüche so, dass sie den gleichen Nenner besitzen. Erweitere erneut, so dass der Abstand zwischen den Zählern größer wird. Achte darauf, dass der Nenner bei beiden Brüchen gleich bleibt. Suche dir nun einen Bruch aus, der zwischen den beiden Brüchen liegt. b) Versuche die obere Aufgabe nun allgemein zu schreiben. (St013, Pos. 8-9)	
	mit Fokus auf Nenner	Die Studierenden erklären einem Schüler/einer Schülerin die Lösung der Aufgabe 15.1., indem sie dafür die Brüche mit der gleichen Zahl erweitern, bis sich ein Bruch findet, dessen Nenner zwischen den Nenner der erweiterten Brüche passt. Ein direkter oder indirekter Bezug zur Unendlichkeit findet statt. Ankerbeispiel: Für Aufgabe a) musst du einfach beide Brüche solange mit der gleichen Zahl erweitern, bis die Nenner mehr als 1 auseinanderliegen und dann kannst du einen Bruch nehmen, der zwischen den Beiden liegt. Für Aufgabe b) kannst du die Brüche mit einer größeren Zahl erweitern und siehst dann, dass immer mehr andere Brüche dazwischen liegen, und es werden immer mehr je größer die Zahl ist mit der du erweiterst bis es irgendwann unendlich viele sind. (St105, Pos. 6-7)	5
	Zähler und Nenner verändert ohne Bezug zur Unendlichkeit	Die Studierenden erklären einem Schüler/einer Schülerin die Lösung der Aufgabe 15.1., indem sie die Brüche mi der gleichen Zahl erweitern und anschließend sowohl Zähler als auch Nenner der erweiterten Brüche verändern, um einen Bruch zu finden, der zwischen den erweiterten Brüchen liegt. Sie nehmen keinen Bezug zur Unendlichkeit. Ankerbeispiel: Man kann die Brüche erweitern, da 1/6 das gleiche wie 10/60 ist und 1/5 das gleiche wie	1

	10/50. Nun kannst du prüfen ob zwischen 10/60 und 10/50 etwas liegt was kleiner als 1/5 und größer als 1/6 ist. Zehn geteilt durch Fünf muss mehr sein als Neun geteilt durch 5. Elf geteilt durch 60 muss mehr sein als zehn geteilt durch 60. (St103, Pos. 8-10)	
Mittelwertbildung	Die Studierenden erklären einem Schüler/einer Schülerin die Lösung der Aufgabe 15.1., indem sie dafür den Mittelwert der beiden Brüche bilden und erklären, dass immer wieder ein neuer Mittelwert gebildet werden kann. Ankerbeispiel: a) Wenn man eine Zahl haben möchte, welche genau zwischen zwei Zahlen liegt, kann man diese immer addieren und dann mit 2 dividieren. Man berechnet so den Durchschnitt der beiden Zahlen, welcher immer zwischen diesen beiden liegt. b) Diesen Vorgang kann man beliebig oft wiederholen. Man nimmt den berechneten Durchschnitt, addiert ihn mit einer der Ursprungszahlen und dividiert ihn wieder durch 2. Diese Zahl liegt dann zwischen dem ersten Durchschnitt und der anderen ausgewählten Zahl usw..... (St041, Pos. 7-8)	4
Unendlichkeit nicht erwähnt	Die Studierenden erklären einem Schüler/einer Schülerin die Lösung der Aufgabe 15.1., indem sie dafür den Mittelwert der beiden Brüche bilden, erklären aber nicht, dass immer wieder ein neuer Mittelwert gebildet werden kann. Ankerbeispiel: Ebenfalls kann man durch berechnen des Mittelwerts min. eine Zahl finden, die zwischen ihnen liegt. (St111, Pos. 10)	8
Zähler + Zähler, Nenner + Nenner	Die Studierenden erklären einem Schüler/einer Schülerin die Lösung der Aufgabe 15.1., indem sie jeweils die Zähler und die Nenner der beiden Ausgangsbrüche addieren. Ankerbeispiel:	8

		a) Um eine rationale Zahl zwischen zwei Brüchen zu finden gibt es einen Trick den man anwenden kann. Dazu zieht man einen großen Bruchstrich und notiert die beiden Zähler als Additionsaufgabe über dem Bruchstrich (Zähler) und die beiden Nenner auch als Additionsaufgabe unter dem Bruchstrich. Das Ergebnis ist eine rationale Zahl zwischen den beiden ursprünglichen Brüchen. (St104, Pos. 7)	
	Angabe eines Intervalls	Die Studierenden erklären einem Schüler/einer Schülerin die Lösung der Aufgabe 15.1. und nehmen Bezug zur Unendlichkeit, indem sie ein Intervall angeben. Ankerbeispiel: Wir haben ja schon gesagt, dass es definitiv eine Zahl gibt. Doch es gibt nicht nur eine Zahl. Es gibt noch unendlich viele weitere Zahlen. Diese können wir gar nicht alle aufschreiben, weshalb wir versuchen eine Aussage zu treffen welche alle Zahlen mit einbezieht. Passend wäre hier zum Beispiel für alle Zahlen n gilt, dass n größer als 1/6 und kleiner als 1/5 ist. So sind alle Zahlen zwischen 1/5 und 1/6 einbegriffen. (St107, Pos. 9)	1
	Bezug zu Dezimalbrüchen	Die Studierenden erklären einem Schüler/einer Schülerin die Lösung der Aufgabe 15.1., indem sie Bezug zu den Dezimalbrüchen nehmen. Ankerbeispiel: Als erstes wäre es gut die Zahl in eine Kommazahl zu verändern. Dann kannst du sehen welche Zahlen dazwischen passen und welche nicht. Aber wie wir wissen kann eine Zahl ganz viele Nachkommastellen haben und somit weiß man gar nicht wie viele es gibt. Somit weiß man dass unendlich Zahlen dazwischen passen. (St106, Pos. 6-7)	14
	Sonstiges	Die Antworten der Studierenden auf die Frage, wie sie die Aufgabe 15.1. einem Schüler/einer Schülerin erklären würden, lässt sich keiner Kategorie zuordnen. Ankerbeispiel: Ich erkläre dem Schüler dass es abgesehen von rationalen Zahlen auch reelle Zahlen gibt, was bedeutet, dass es unendlich viele Zahlen zwischen zwei rationalen Zahlen gibt. (St034, Pos. 6)	3

keine Antwort	Die Studierenden haben die Aufgabe 15.2. nicht bearbeitet. Ankerbeispiel: -- (St102, Pos. 7)	30
15.3. Schülerprobleme		216
Grundvorstellungen		0
Brüche		0
Bruchverständnis	Die Studierenden nennen allgemeine Schwierigkeiten in der Grundvorstellung von Brüchen als ein Problem, welches Schülerinnen und Schüler beim Lösen der Aufgabe haben können. Ankerbeispiel: Zum Problem kann es werden, das Schüler*innen das Vorstellen der Brüche fehlt. (St026, Pos. 8)	10
Größe von Brüchen	Die Studierenden nennen Schwierigkeiten in der Grundvorstellung zur Größe von Brüchen als ein Problem, welches Schülerinnen und Schüler beim Lösen der Aufgabe haben können. Ankerbeispiel: Brüche können nur miteinander verglichen werden, wenn man sie gleichnamig macht. Schaut sich die/der Schüler*in nur den Nenner der Brüche an, so kann es in der Grundvorstellung der natürlichen Zahlen verhaftet sein und sich im Beispiel der oberen beiden Brüche denken: oh, 6 ist größer als 5. Da ich jeweils 1/6 und 1/5 habe liegen 2/5 , 3/5, usw. zwischen 1/5 und 1/6 .” (St091, Pos. 8)	15
Erweitern von Brüchen	Die Studierenden nennen Schwierigkeiten in der Grundvorstellung des Erweiterns von Brüchen als ein Problem, welches Schülerinnen und Schüler beim Lösen der Aufgabe haben können.	20

	Ankerbeispiel: fehlendes Verständnis für das Erweitern von Brüchen, sprich das der erweiterte Bruch das gleiche ist wie der Ursprungsbruch und diese unendlich oft erweitert werden können (St047, Pos. 11)	
erweitern unvollständig	Die Studierenden nennen die unvollständige Erweiterung der Brüche als ein Problem, das Schülerinnen und Schüler beim Lösen der Aufgabe haben können. Ankerbeispiel: Die SuS erweitern auf 5/30 und 6/30 und erkennen dann nicht, dass sie noch weiter erweitern können und kommen dann auf die Lösung, dass es keine Zahl dazwischen gibt. (St099, Pos. 12)	15
Dichte von rationalen Zahlen	Die Studierenden nennen Schwierigkeiten in der Grundvorstellung zur Dichte von rationalen Zahlen als ein Problem, welches Schülerinnen und Schüler beim Lösen der Aufgabe haben können. Ankerbeispiel: SuS könnten sagen, dass es keine Zahl zwischen 5 und 6 gibt also gibt es keinen Bruch der dazwischen liegt. (St024, Pos. 11)	38
Form von Brüchen	Die Studierenden nennen Schwierigkeiten in der Grundvorstellung zur Form von Brüchen als ein Problem, welches Schülerinnen und Schüler beim Lösen der Aufgabe haben können. Ankerbeispiel: Sie wissen nicht, wie Sie die Aufgabe lösen können und schreiben eventuell 1/5,5 als Lösung. (St081, Pos. 15)	10
Äquivalenz von Brüchen	Die Studierenden nennen Schwierigkeiten in der Grundvorstellung zur Äquivalenz von Brüchen als ein Problem, welches Schülerinnen und Schüler beim Lösen der Aufgabe	2

	haben können. Ankerbeispiel: Zudem könnten sie auch den Fehler machen bereits aufgelistete Zahlen in erweiterter Form erneut zu nennen. Zum Beispiel 22/120 = 11/60 . (St043, Pos. 12-13)	
falsche Addition	Die Studierenden nennen Schwierigkeiten in der Grundvorstellung zur falschen Addition als ein Problem, welches Schülerinnen und Schüler beim Lösen der Aufgabe haben können. Ankerbeispiel: Falsche Addition; Kinder lernen, dass sie die Brüche auf den gleichen Nenner bringen müssen beim addieren. Jetzt sollen sie das wieder anders machen? → führt zu Problemen (St088, Pos. 16)	2
Unendlichkeit	Die Studierenden nennen allgemeine Schwierigkeiten in der Grundvorstellung zur Unendlichkeit als ein Problem, welches Schülerinnen und Schüler beim Lösen der Aufgabe haben können. Ankerbeispiel: Probleme der Kinder könnten sein, dass sie Probleme mit dem Wort unendlich haben, da es selbst einem Erwachsenen schwerfällt sich das vorzustellen. (St032, Pos. 8)	14
Mittelwertbildung	Die Studierenden nennen Schwierigkeiten in der Grundvorstellung zur Bildung des Mittelwertes als ein Problem, welches Schülerinnen und Schüler beim Lösen der Aufgabe haben können. Ankerbeispiel: Die Schülerinnen und Schüler könnten das Prinzip des Durchschnitts nicht verstehen, und verstehen deshalb nicht wieso die Zahl dann dazwischen liegt. (St041, Pos. 10)	1

Rechnen mit Brüchen		0
Erweitern und Kürzen	Die Studierenden nennen Schwierigkeiten beim Erweitern und Kürzen von Brüchen als ein Problem, welches Schülerinnen und Schüler beim Lösen der Aufgabe haben können. Ankerbeispiel: Schülerinnen und Schüler könnte es schwer fallen die Brüche zu erweitern bzw. zu kürzen, so dass man auf die Zahlen dazwischen kommt. (St102, Pos. 9)	26
gemeinsamer Nenner	Die Studierenden nennen Schwierigkeiten bei der Bildung des gemeinsamen Nenners als ein Problem, welches Schülerinnen und Schüler beim Lösen der Aufgabe haben können. Ankerbeispiel: SuS können Brüche nicht gleichnamig machen und somit auch nicht weiter verfeinern. (St110, Pos. 13)	7
Division von Brüchen	Die Studierenden nennen Schwierigkeiten in der Division von Brüchen als ein Problem, welches Schülerinnen und Schüler beim Lösen der Aufgabe haben können. Ankerbeispiel: Sie können sich beim schriftlichen Dividieren verrechnen. (St020, Pos. 8)	3
Addition	Die Studierenden nennen Schwierigkeiten in der Addition von Brüchen als ein Problem, welches Schülerinnen und Schüler beim Lösen der Aufgabe haben können. Ankerbeispiel: Kinder vergessen einen gemeinsamen Nenner beim Addieren der Brüche zu finden (St059, Pos. 14)	3
Mittelwertberechnung	Die Studierenden nennen Schwierigkeiten bei der Berechnung des Mittelwertes als ein Problem, welches Schülerinnen und Schüler beim Lösen der Aufgabe haben können.	2

	Ankerbeispiel: Sie könnten die Aufgaben in der falschen Reihenfolge lösen, da in der Aufgabe Additions- und Divisionsanteile enthalten sind. Somit könnten sie vielleicht versuchen zu erst zu dividieren und dann zu addieren (Punkt-vor Strichrechnung). (St104, Pos. 10)	
Grundrechenarten		0
Multiplikation	Die Studierenden nennen allgemeine Schwierigkeiten in der Multiplikation als ein Problem, das Schülerinnen und Schüler beim Lösen der Aufgabe haben können. Ankerbeispiel: Beherrschen die Multiplikation nicht und können nicht erweitern. (St101, Pos. 12)	3
Angabe eines Intervalls	Die Studierenden nennen Schwierigkeiten in der Angabe eines Intervalls als ein Problem, das Schülerinnen und Schüler beim Lösen der Aufgabe haben können. Ankerbeispiel: Aussage formulieren: SuS könnten schnell mit den Zeichen oder auch dem < , > zwischen 1/5 und 1/6 durcheinander kommen (St107, Pos. 12)	1
Aufgabenstellung irreführend	Die Studierenden nennen Schwierigkeiten bezüglich der Fragestellung als ein Problem, das Schülerinnen und Schüler beim Lösen der Aufgabe haben können. Ankerbeispiel: 2. Sie könnten bei b) davon ausgehen, dass es eine begrenzte Anzahl gibt, da die Aufgabe verlangt alle Zahlen anzugeben. Dies könnte beim Lösen für Verwirrungen sorgen. (St094, Pos. 10)	2
Dezimalzahlen		0
Verständnis von Dezimalzahlen	Die Studierenden nennen Schwierigkeiten in der Grundvorstellung von Dezimalzahlen als ein Problem, welches Schülerinnen und Schüler beim Lösen der Aufgabe haben können.	2

	Ankerbeispiel: Kinder verstehen die Zahl 0,166 nicht, wissen also nicht was eine Periode ist und dass sie unendlich lang ist. (St089, Pos. 11)	
Umrechnung Bruch in Dezimalbruch	Die Studierenden nennen Schwierigkeiten bei der Umrechnung von Brüchen in Dezimalbrüche als ein Problem, welches Schülerinnen und Schüler beim Lösen der Aufgabe haben können. Ankerbeispiel: Wissen nicht wie man in Dezimalzahlen umrechnet (St049, Pos. 10)	7
keine Verwendung von Dezimalbrüchen	Die Studierenden nennen die Anweisung, keine Dezimalbrüche zu verwenden, als ein Problem, welches Schülerinnen und Schüler beim Lösen der Aufgabe haben können. Ankerbeispiel: Problem Dezimalzahlen: meistens rechnen die Kinder die Brüche in Dezimalzahlen um. So fällt es ihnen leichter. (St040, Pos. 8)	3
Sonstiges	Die Antwort der Studierenden auf die Frage nach Problemen, die Schülerinnen und Schüler beim Lösen der Aufgabe haben können, lässt sich keiner Kategorie zuordnen. Ankerbeispiel: Sie schreiben nicht alle Zahlen auf (St016, Pos. 9)	13
keine Antwort	Die Studierenden haben die Frage nach Problemen, die Schülerinnen und Schüler beim Lösen der Aufgabe haben können, nicht beantwortet. Ankerbeispiel: -- (St103, Pos. 11)	17

15.4. wesentliche Eigenschaften von rationalen Zahlen		173
Dichte der Brüche		0
kein direkter Vorgänger und Nachfolger	Die Studierenden nennen als wesentliche und für die Lösung der Aufgabe relevante Eigenschaft der rationalen Zahlen im Unterschied zu den natürlichen Zahlen, dass rationale Zahlen keinen direkten Vorgänger oder Nachfolger besitzen. Ankerbeispiel: → kein eindeutiger Vorgänger/Nachfolger (St105, Pos. 15)	7
unendlich viele Zahlen zwischen zwei Zahlen	Die Studierenden nennen als wesentliche und für die Lösung der Aufgabe relevante Eigenschaft der rationalen Zahlen im Unterschied zu den natürlichen Zahlen, dass zwischen zwei rationalen Zahlen unendlich viele rationale Zahlen liegen. Ankerbeispiel: Zwischen zwei rationalen Zahlen liegen unendlich viele weitere. (St041, Pos. 13)	24
unendlich viele Zahlen zwischen zwei natürlichen Zahlen	Die Studierenden nennen als wesentliche und für die Lösung der Aufgabe relevante Eigenschaft der rationalen Zahlen im Unterschied zu den natürlichen Zahlen, dass zwischen zwei natürlichen Zahlen unendlich viele Brüche liegen. Ankerbeispiel: unendlich viele Brüche zwischen zwei natürlichen Zahlen (St025, Pos. 11)	4
unendlich viele Dezimalbrüche zwischen zwei Zahlen	Die Studierenden nennen als wesentliche und für die Lösung der Aufgabe relevante Eigenschaft der rationalen Zahlen im Unterschied zu den natürlichen Zahlen, dass zwischen zwei Zahlen unendlich viele Dezimalbrüche liegen. Ankerbeispiel: Dezimalzahlen: zw. 2 Zahlen gibt es unendlich viele andere Zahlen (St076, Pos. 13)	9

mehr Zahlen zwischen zwei Brüchen	Die Studierenden nennen als wesentliche und für die Lösung der Aufgabe relevante Eigenschaft der rationalen Zahlen im Unterschied zu den natürlichen Zahlen, dass zwischen zwei Zahlen mehrere rationale Zahlen liegen ohne die Unendlichkeit zu erwähnen. Ankerbeispiel: Rationale Zahlen werden als Brüche dargestellt und liegen im Zahlenraum bzw. zwischen dem Zahlenraum der natürlichen Zahlen. Das bedeutet im Zahlenraum der rationalen Zahlen gibt es mehrere Möglichkeiten in Bezug auf die Aufgabe 1/5 und 1/6 . (St072, Pos. 16)	7
Erweitern/Verfeinern	Die Studierenden nennen als wesentliche und für die Lösung der Aufgabe relevante Eigenschaft der rationalen Zahlen im Unterschied zu den natürlichen Zahlen, dass Brüche beliebig oft erweitert werden können. Ankerbeispiel: können unendlich erweitert werden (St071, Pos. 17)	11
äquivalente Brüche/Bruchzahl	Die Studierenden nennen als wesentliche und für die Lösung der Aufgabe relevante Eigenschaft der rationalen Zahlen im Unterschied zu den natürlichen Zahlen, dass eine Bruchzahl durch verschiedene äquivalente Brüche repräsentiert werden kann. Ankerbeispiel: $\mathbb{Q}$ → jede Bruchzahl in $\mathbb{Q}$ hat viele Repräsentanten. Eine natürliche Zahl hat nur einen. (St087, Pos. 14-15)	11
Größenvorstellung		0
großer Nenner- kleine Zahl	Die Studierenden nennen als wesentliche und für die Lösung der Aufgabe relevante Eigenschaft der rationalen Zahlen im Unterschied zu den natürlichen Zahlen den Umbruch in der Größenvorstellung. So wird bei den Stammbrüchen die Zahl kleiner, je größer die Ziffer im Nenner ist.	5

	Ankerbeispiel: Ein anderes Verständnisproblem ist die Vorstellung von Brüchen. Also das 1/6 kleiner als 1/5 ist, obwohl die Zahl 6 in den natürlichen Zahlen größer ist als die 5. (St054, Pos. 20)	
Rechenoperationen	Die Studierenden nennen als wesentliche und für die Lösung der Aufgabe relevante Eigenschaft der rationalen Zahlen im Unterschied zu den natürlichen Zahlen Unterschiede in den Rechenoperationen ohne dies genauer zu beschreiben. Ankerbeispiel: Rechenoperationen sind in anderen Verhältnissen zu den Zahlen. (St066, Pos. 13)	1
Division		0
uneingeschränkt möglich	Die Studierenden nennen als wesentliche und für die Lösung der Aufgabe relevante Eigenschaft der rationalen Zahlen im Unterschied zu den natürlichen Zahlen, dass die Division in der Menge der rationalen Zahlen uneingeschränkt durchführbar ist. Ankerbeispiel: es kann immer dividiert werden (St093, Pos. 13)	5
Grundvorstellung Division	Die Studierenden nennen als wesentliche und für die Lösung der Aufgabe relevante Eigenschaft der rationalen Zahlen im Unterschied zu den natürlichen Zahlen Umbrüche in der Grundvorstellung bei der Division. Ankerbeispiel: Wenn ich mit etwas dividiere bedeutet das auch nicht automatisch, dass die Ausgangszahl kleiner wird, sondern sie kann auch größer werden. (St007, Pos. 20)	1
Grundvorstellung Multiplikation	Die Studierenden nennen als wesentliche und für die Lösung der Aufgabe relevante Eigenschaft der rationalen Zahlen im Unterschied zu den natürlichen Zahlen Umbrüche in der Grundvorstellung bei der Multiplikation.	1

	Ankerbeispiel: Wenn ich mit etwas multipliziere bedeutet das in $\mathbb{Q}$ nicht automatisch, dass die Ausgangszahl größer wird, sondern sie kann auch kleiner werden. (St007, Pos. 19)	
Zahlaspekte	Die Studierenden nennen als wesentliche und für die Lösung der Aufgabe relevante Eigenschaft der rationalen Zahlen im Unterschied zu den natürlichen Zahlen Umbrüche in den Zahlaspekten. Ankerbeispiel: sind Teile von einem Ganzen (St088, Pos. 18)	8
Beschreibung der Zahlbereiche	Die Studierenden beantworten die Frage nach wesentlichen und für die Lösung der Aufgabe relevanten Eigenschaft der rationalen Zahlen im Unterschied zu den natürlichen Zahlen, indem sie allgemeine Aussagen zu den Zahlbereichen treffen. Ankerbeispiel: Alle rationalen Zahlen sind reelle Zahlen, aber nicht alle natürlichen Zahlen sind reelle Zahlen. Rationale Zahlen sind größer als die natürlichen Zahlen, da es keine 1 zu 1 Abbildung gibt. OBJ alle Primzahlen sind natürliche Zahlen alle natürlichen Zahlen sind ganze Zahlen, alle ganzen Zahlen sind rationale Zahlen alle rationalen (& irrational) sind reelle Zahlen Reelle Zahlen sind unabzählbar unendlich (St024, Pos. 16-21)	12
Darstellung als Dezimalbruch	Die Studierenden benennen als wesentliche und für die Lösung der Aufgabe relevante Eigenschaft der rationalen Zahlen im Unterschied zu den natürlichen Zahlen die mögliche Darstellung von Brüchen als Dezimalbrüche. Ankerbeispiel: Rationale Zahlen können ein Komma besitzen, wie z.B. 1,45. Natürliche Zahlen besitzen	9

	dies nicht, z.B. 1,2,3. (St020, Pos. 11)	
beinhalten negative Zahlen	Die Studierenden benennen als wesentliche und für die Lösung der Aufgabe relevante Eigenschaft der rationalen Zahlen im Unterschied zu den natürlichen Zahlen, dass rationale Zahlen auch negative Zahlen enthalten. Ankerbeispiel: rationale Zahlen können auch in den negativen Bereich gehen (St033, Pos. 23)	12
Unendlichkeit		0
unendlich viele Dezimalbrüche	Die Studierenden nennen als wesentliche und für die Lösung der Aufgabe relevante Eigenschaft der rationalen Zahlen im Unterschied zu den natürlichen Zahlen, dass es unendlich viele Dezimalbrüche gibt. Ankerbeispiel: Dezimalzahlen lassen sich unendlich weiterführen und immer kleinteiliger schreiben (St029, Pos. 13)	2
nicht abzählbar	Die Studierenden nennen als wesentliche und für die Lösung der Aufgabe relevante Eigenschaft der rationalen Zahlen im Unterschied zu den natürlichen Zahlen, dass die rationalen Zahlen nicht abzählbar sind. Ankerbeispiel: Rationale Zahlen sind nicht abzählbare Unendlichkeit, die natürlichen Zahlen sind in abzählbaren Unendlichkeit (St097, Pos. 21)	3
Mächtigkeit	Die Studierenden nennen als wesentliche und für die Lösung der Aufgabe relevante Eigenschaft der rationalen Zahlen im Unterschied zu den natürlichen Zahlen, dass die Mächtigkeit der rationalen Zahlen größer sei als die Mächtigkeit der natürlichen Zahlen. Ankerbeispiel:	6

	-haben eine höhere Mächtigkeit (St107, Pos. 14)	
Sonstiges	Die Antwort der Studierenden auf die Frage nach wesentlichen und für die Lösung der Aufgabe relevanten Eigenschaft der rationalen Zahlen im Unterschied zu den natürlichen Zahlen lassen sich keiner Kategorie zuordnen. Ankerbeispiel: es dürfen nur ganze Zahlen in Zähler und Nenner stehen → keine Dezimalzahlen (St027, Pos. 21)	11
keine Antwort	Die Studierenden haben die Frage nach wesentlichen und für die Lösung der Aufgabe relevanten Eigenschaft der rationalen Zahlen im Unterschied zu den natürlichen Zahlen nicht beantwortet. Ankerbeispiel: -- (St112, Pos. 12)	24
Erweitern vs. Multiplizieren	Die Studierenden verwechseln Erweitern und Multiplizieren.	7
R statt Q	Die Studierenden schreiben für die Menge der rationalen Zahlen $\mathbb{R}$ statt $\mathbb{Q}$.	7
Fachsprache	Hier finden sich ausgewählte Beispiele für eine mangelnde oder fehlerhafte Anwendung von Fachbegriffen.	7
Interview 1 und 2		228
15.1.a) eine Zahl zwischen 1/6 und 1/5		23
Nennung korrekter Zahl(en)	Die Studierenden beantworten die Frage, ob es möglich ist, eine Zahl zwischen 1/6 und 1/5 zu finden, indem sie eine korrekte Bruchzahl nennen. Ankerbeispiel: Elf Sechzigstel? (Hedy, Interview 2, Pos. 51)	2

	Nein	Die Studierenden beantworten die Frage, ob es möglich ist, eine Zahl zwischen 1/6 und 1/5 zu finden, mit ´Nein´. Ankerbeispiel: Weil wenn ich jetzt fünf und sechs sehen würde, würde ich erstmal denken, also bei dem Nenner okay, da ist nichts zwischen (Lennox, Interview 1, Pos. 57)	3
	Uhrenmodell	Die Studierenden beantworten die Frage, ob es möglich ist, eine Zahl zwischen 1/6 und 1/5 zu finden, indem sie das Uhrenmodell anwenden. Ankerbeispiel: Ich denke dann immer gleich an die Uhr. Und stelle mir das bildlich vor, weil ein Fünftel zum Beispiel wäre das dann bei zwölf Minuten und ein Sechstel bei zehn Minuten und dazwischen sind halt elf Minuten. Dann müsste ich halt den Bruch finden, der für die elf Minuten passt.(...) (Amina, Interview 1, Pos. 43)	3
	Erweitern mit Fokus auf Zähler	Die Studierenden beantworten die Frage, ob es möglich ist, eine Zahl zwischen 1/6 und 1/5 zu finden, indem sie die Brüche auf denselben Nenner erweitern und so einen Bruch finden, dessen Zähler zwischen den Zählern der beiden erweiterten Brüche liegt. Ankerbeispiel: Also ich habe es immer über die Nenner gemacht. Das weiß ich. Dass ich die immer so gegeneinander erst einmal multipliziert habe und dann guckt man ob man etwas dazwischen findet. (Carla, Interview 2, Pos. 28)	1
	Identifikation Fehler	Die Studierenden erkennen den Fehler einer gegebenen Beispiellösung zu Aufgabe 15.1.a). Ankerbeispiel: Liegt der Fehler daran, dass er nicht nochmal die dreißig mal zwei gerechnet hat? Also dass da eigentlich zehn Sechzigstel stehen müsste und zwölf Sechzigstel? (Hedy, Interview 2, Pos. 38)	7

nicht identifiziert	Die Studierenden erkennen den Fehler einer gegebenen Beispiellösung zu Aufgabe 15.1.a) nicht. Ankerbeispiel: Also, das war mit Sicherheit der Gedanke. Erst den Nenner gleich machen, dann wie du meintest zwischen fünf und sechs ist nichts und deswegen dann noch mal zwei. (Amina, Interview 1, Pos. 85)	7
15.1.b) alle Zahlen zwischen 1/6 und 1/5		34
Unendlichkeit erwähnt		0
Nennung konkreter Zahlen	Die Studierenden beantworten die Frage, ob es möglich ist, mehr als eine Zahl zwischen 1/6 und 1/5 zu finden und alle möglichen Zahlen zu nennen, indem sie eine Auswahl an korrekten Zahlen nennen und darauf verweisen, dass es zwischen zwei Brüchen unendlich viele andere Brüche gibt. Ankerbeispiel: und dann würde dazwischen ja einhundertunddreiundzwanzig Einhundertundzwanzigstel liegen und das wäre eine andere Zahl als die (...) und zweiundzwanzig und dreiundzwanzig (...) Na eigentlich kannst du ja immer so weiter machen. (Amina, Interview 1 , Pos. 163-165)	4
stärker erweitern	Die Studierenden beantworten die Frage, ob es möglich ist, mehr als eine Zahl zwischen 1/6 und 1/5 zu finden und alle möglichen Zahlen zu nennen, indem sie die beiden Brüche unendlich oft erweitern und somit immer mehr Zahlen zwischen den beiden Brüchen finden können. Anmerkung: anstelle von ´unendlich´ zählt auch ´immer wieder´ oder ´immer weiter´... Ankerbeispiel: Also, für b) jetzt. Ich glaube ich würde einfach weiter machen mit den zehn Sechzigstel und zwölf Sechzigstel. Und wenn ich das nochmal mal zwei rechne, komme ich auf zwanzig- also mit zwei erweitert, so- dann komme ich ja auf zwanzig	3

	Einhundertundzwanzigstel und vierundzwanzig Einhundertundzwanzigstel und dann würde dazwischen ja einhundertunddreiundzwanzig- (...) Na eigentlich kannst du ja immer so weiter machen. (Amina, Interview 1, Pos. 163-165)	
Unendlichkeit nicht erwähnt		0
keine Zahl	Die Studierenden antworten auf die Frage, ob es möglich ist, mehr als eine Zahl zwischen 1/6 und 1/5 zu finden und alle möglichen Zahlen zu nennen, dass keine Zahl dazwischen liegt. Ankerbeispiel: Oder es liegt doch nichts dazwischen? (Lennox, Interview 1, Pos. 205)	2
eine Zahl	Die Studierenden geben auf die Frage, ob es möglich ist, mehr als eine Zahl zwischen 1/6 und 1/5 zu finden und alle möglichen Zahlen zu nennen, eine Zahl an. Ankerbeispiel: Man könnte natürlich den Strich jetzt in der Mitte nochmal teilen, dann haben wir unsere Zahl dazwischen (Ida, Interview 1 , Pos. 207)	2
mehrere Zahlen	Die Studierenden antworten auf die Frage, ob es möglich ist, mehr als eine Zahl zwischen 1/6 und 1/5 zu finden und alle möglichen Zahlen zu nennen, dass mehrere Zahlen dazwischen liegen. Ankerbeispiel: Ich würde Zahlen suchen, die dazwischen liegen, aber nicht den gleichen Wert haben. (Amina, Interview 1 , Pos. 158)	1
Identifikation Fehler	Die Studierenden erkennen den Fehler einer gegebenen Beispiellösung zu Aufgabe 15.1.b). Ankerbeispiel:	5

	Wenn du doch mehr, also umso feiner du die Stückchen machst, umso mehr hast du doch eigentlich wieder dazwischen Zahlen. Also auch vom Zähler her, deswegen würde derjenige ja auch wieder nur einen Teil angeben. Weißt du? Also klar, die Aussage ist richtig, aber es kommen auch noch mehr dazu. (Carla, Interview 2 , Pos. 67)	
nicht identifiziert	Die Studierenden erkennen den Fehler einer gegebenen Beispiellösung zu Aufgabe 15.1.b) nicht. Ankerbeispiel: wenn du das immer mit zwei erweiterst, müsste es ja hinhauen (Ida, Interview 1 , Pos. 153)	4
Zahlenstrahl	Die Studierenden übertragen die Aufgabe 15.1. weitestgehend korrekt auf den Zahlenstrahl. Ankerbeispiel: Na mit einem Zahlenstrahl könnte man ja einfach einen Zahlenstrahl machen, der unterschiedliche Einheiten, also eine unterschiedliche Skalierung hat, dass es immer feiner wird. Dadurch könnte man dann sehen, dass der Bereich immer gleich bleibt, aber immer feiner wird.... (Hedy, Interview 2 , Pos. 74)	9
eingeschränkt	Die Studierenden können die Aufgabe 15.1. nur eingeschränkt (oder nicht) auf den Zahlenstrahl übertragen. Ankerbeispiel: Ich wüsste jetzt nicht in welchem Abstand man den Zahlenstrahl einteilen soll. (Lennox, Interview 1 , Pos. 168)	3
Streifenmodell	Die Studierenden übertragen die Aufgabe 15.1. auf das Streifenmodell. Ankerbeispiel: Mit dem Streifen wäre das so gewesen, dass man zum Beispiel so einen dreißiger Strahl	1

	hinlegt, ne? Wo so dreißiger Kästchen sind. Und dann legt man Neunziger hin und dann Einhundertundzwanziger und dann sieht man, dass die alle untereinander dann liegen. (Nina, Interview 2 , Pos. 92)	
15.2. kindgerechte Erklärung		17
curriculare Einordnung	Die Studierenden nehmen Bezug zum Curriculum. Ankerbeispiel: Na in der fünften und sechsten Klasse könnte man ja jetzt ableiten, dass das Kind bestimmt schon Brüche erweitern kann. Würde ich jetzt sagen. Weiß ich jetzt nicht so direkt. Ich würde jetzt davon ausgehen, dass es schon weiß, wie man einen Bruch erweitert. Weil es ja auch schon mit Brüchen rechnen kann. (Ida, Interview 1 , Pos. 231)	1
Darstellungswechsel	Die Studierenden erklären einem Schüler/einer Schülerin die Lösung der Aufgabe 15.1., indem sie dafür einen Darstellungswechsel vornehmen. Ankerbeispiel: Man müsste das denen auf jeden Fall mal irgendwie veranschaulichen. Also es ist ja meistens so, dass man Kindern irgendwie ein Bild zeigen muss, damit sie sich das vorstellen können. (Jana, Interview 1 , Pos. 235)	1
Zahlenstrahl	Die Studierenden würden einem Schüler/einer Schülerin die Lösung der Aufgabe 15.1. erklären, indem sie den Zahlenstrahl verwenden. Ankerbeispiel: Ich glaube das kann man ganz gut mit einem Kreisdiagramm machen oder halt dann auch mit dem Zahlenstrahl danach. (Lennox, Interview 1 , Pos. 236)	3
Tortenmodell/Kreisdiagramm	Die Studierenden übertragen die Aufgabe 15.1. auf das Tortenmodell bzw. Kreisdiagramm. Ankerbeispiel:	3

	Man müsste halt die beiden Torten eigentlich übereinander setzen. Wenn einer sagt, ich teile mir jetzt meinen Kuchen in fünf Stücke und der andere sagt, ich teile mir das jetzt in sechs Stücke, dann müsste man die ja übereinander legen und dann könnte man ja gucken: Wo endet das eine und wo endet das andere? Und das wäre dann der Bereich, der dazwischen ist. (Hedy, Interview 2 , Pos. 111)	
Apfelsaftschorle		0
eingeschränkt	Die Studierenden können die Aufgabe 15.1. nicht oder nur eingeschränkt auf das Modell der Schorle übertragen. Ankerbeispiel: Ich glaube, dann wäre das irgendetwas dazwischen. Ich meine, ich kann es jetzt nicht sagen. (Lennox, Interview 1 , Pos. 249)	3
Grundprinzip Reduktion	Die Studierenden erklären einer Schülerin /einem Schüler die Aufgabe 15.1., indem sie die Aufgabe zunächst vereinfachen. Ankerbeispiel: Ich glaube ich würde anfangen, indem ich erstmal gar nicht zwei unterschiedliche Brüche von den Nennern her wähle, sondern erst einmal zum Beispiel: Welche Zahl liegt zwischen ein Fünftel und vier Fünftel? (Amina, Interview 1 , Pos. 234)	2
keine	Die Studierenden finden keine kindgerechte Erklärung zu Aufgabe 15.1. Ankerbeispiel: Aber ich wüsste halt auch nicht, wie man das kindgerecht macht. Ich hätte da auch meine Probleme bei. Auf die Lösung selber zu kommen, war ja für mich schon schwer genug und dann einem Kind zu erklären ist ja endless. Also- schwierig (Tanja, Interview 1 , Pos. 230)	1
Identifikation Fehler	Die Studierenden erkennen den Fehler einer gegebenen Beispiellösung zu Aufgabe 15.2.	3

	Ankerbeispiel: wenn man die Torten dann übereinander macht und das Stück hat, weiß man ja immer noch nicht, wie groß es ist. (...)(Nina, Interview 2 , Pos. 117)	
15.3. Probleme		11
Aufgabentyp	Die Studierenden nennen als Schwierigkeit der Aufgabe 15.1. den Aufgabentyp. Ankerbeispiel: Ja für mich war es die allgemeine Herangehensweise an die Aufgabe. Wie löse ich es? Da dachte ich echt- ein Rausch im Kopf. Und ich glaube, weil es auch nicht- also wir haben herausgefunden, dass jetzt ganz viele Sachen man irgendwie nennen könnte. Das es halt kein explizites Ergebnis gibt. Okay, dass, ich sag mal drei, ist es tatsächlich nicht- nicht eine Lösung gibt, sondern viele Herangehensweisen. (Tanja, Interview 1 , Pos. 253)	1
Grundvorstellungen Brüche		0
Brüche		0
Größe von Brüchen	Die Studierenden nennen Schwierigkeiten in der Grundvorstellung zur Größe von Brüchen als ein Problem, welches Schülerinnen und Schüler beim Lösen der Aufgabe haben können. Hierunter fällt auch der Vergleich ungleichnamiger Brüche. Ankerbeispiel: Ja und dass das- dass, wenn der Nenner sich ändert, also der wird ja größer, aber eigentlich werden die Stückchen kleiner, wenn man wieder beim Zahlenstrahl oder bei der Torte sind. Ich glaube das ist auch immer noch dieses große Problem, was überhaupt in Bezug auf die Brüche, dass das- dass größer nicht gleich größer bedeutet sozusagen. (Carla, Interview 2 , Pos. 137)	4
Dichte von rationalen Zahlen	Die Studierenden nennen Schwierigkeiten in der Grundvorstellung zur Dichte von rationalen Zahlen als ein Problem, welches Schülerinnen und Schüler beim Lösen der Aufgabe haben können.	2

	Ankerbeispiel: aber dass auch dieser Bereich dazwischen unendlich weiter gehen kann. Das merke ich selbst als Erwachsener. Klar weiß ich das theoretisch, aber dieses- ich finde es nicht so greifbar wie bei den natürlichen Zahlen, dass da immer noch mehr dazwischen passt. (Carla, Interview 2 , Pos. 135)	
Äquivalenz von Brüchen	Die Studierenden nennen Schwierigkeiten in der Grundvorstellung zur Äquivalenz von Brüchen als ein Problem, welches Schülerinnen und Schüler beim Lösen der Aufgabe haben können. Ankerbeispiel: So vom Verständnis her glaube ich ist das super schwierig, dass man sagt: ´Okay. Damit ändert sich aber die Einheit. Es ist zwar immer noch die gleiche Zahl, der gleiche Abstand, wenn ich es erweitere, (Interview 2 , Pos. 136)	2
Unendlichkeit	Die Studierenden nennen allgemeine Schwierigkeiten in der Grundvorstellung zur Unendlichkeit als ein Problem, welches Schülerinnen und Schüler beim Lösen der Aufgabe haben können. Ankerbeispiel: Na die Vorstellung der Unendlichkeit muss ja erstmal da sein. Was das bedeutet. (Carla, Interview 2 , Pos. 135)	2
15.4. wesentliche Eigenschaften von rationalen Zahlen		39
unlösbare Aufgabe	Die Studierenden beantworten die Frage nach einem unlösbaren Rätsel für den bösen Drachen bei den Bruchzahlen. Ankerbeispiel: Man könnte sagen, er soll alle Brüche zwischen denen nennen, dann wäre er ja nicht fertig damit, weil er ja immer weiter erweitern kann und immer mehr Brüche findet, die	3

	dazwischen liegen. Also es wäre dann so eine unendliche Aufgabe. Dann ist er sehr lange damit beschäftigt (Hedy, Interview 2 , Pos. 18)	
Dichte	Die Studierenden treffen Aussagen bezüglich der Dichte von Brüchen als wesentliche und für die Lösung der Aufgabe relevante Eigenschaft der rationalen Zahlen im Unterschied zu den natürlichen Zahlen. Ankerbeispiel: Also dass das der Unterschied ist, dass man bei den natürlichen Zahlen halt eben keine Zwischenzahlen/Zwischenschritte hat. Und eben bei Dezimalzahlen und Brüchen hat man eben genau diese Zwischenschritte zwischen den natürlichen Zahlen. (Nina, Interview 2 , Pos. 153)	3
Bezug zu Dezimalzahlen	Die Studierenden treffen Aussagen bezüglich der Dichte von Dezimalbrüchen als wesentliche und für die Lösung der Aufgabe relevante Eigenschaft der rationalen Zahlen im Unterschied zu den natürlichen Zahlen. Ankerbeispiel: Und dass du einen Zahlenstrahl hast und zwischen eins und zwei nicht unendlich viele Zahlen sind. Theoretisch, wenn du nur von den natürlichen Zahlen ausgehst. Denn wenn du von den Dezimalzahlen ausgehst, hast du halt eins Komma eins eins eins eins eins bis zum Unendlichen sage ich jetzt mal. (Nina, Interview 2 , Pos. 148)	5
Erweitern	Die Studierenden treffen Aussagen zum Erweitern von Brüchen als wesentliche und für die Lösung der Aufgabe relevante Eigenschaft der rationalen Zahlen im Unterschied zu den natürlichen Zahlen. Ankerbeispiel: Und beliebig erweitern kann man ja. (Amina, Interview 1 , Pos. 292)	1
äquivalente Brüche	Die Studierenden treffen Aussagen zu äquivalenten Brüchen bzw. zur Bruchzahl als wesentliche Eigenschaft der rationalen Zahlen im Unterschied zu den natürlichen Zahlen.	3

		Ankerbeispiel: Die gleiche Bruchzahl hätte glaube ich besser gepasst. Und dann ein Halb ist das Gleiche wie zwei Viertel ist das Gleiche wie vier Achtel (Nina, Interview 2 , Pos. 168)	
	Multiplikation und Division	Die Studierenden treffen Aussagen bezüglich der Multiplikation und Division von rationalen Zahlen als wesentliche und für die Lösung der Aufgabe relevante Eigenschaft der rationalen Zahlen im Unterschied zu natürlichen Zahlen. Ankerbeispiel: Aber ich würde trotzdem sagen, dass es eine wahre Aussage ist. (Nina, Interview 2 , Pos. 160)	2
	Beschreibung der Zahlbereiche	Die Studierenden treffen allgemeine Aussagen und Beschreibungen zu den Zahlbereichen der natürlichen und rationalen Zahlen. Ankerbeispiel: Aber natürliche Zahlen beinhalten ja noch? Genau. Die Dezimalzahlen. (Lennox, Interview 1 , Pos. 259)	6
	Mächtigkeit	Die Studierenden treffen Aussagen über die Mächtigkeit von rationalen Zahlen als wesentliche Eigenschaft im Unterschied zu den natürlichen Zahlen. Ankerbeispiel: wir hatten doch in den Übungen- haben wir doch darüber diskutiert, ob die Menge der natürlichen Zahlen größer ist oder die Menge der ganzen Zahlen jetzt. Und rein logisch hätte man ja gedacht, dass die ganzen Zahlen größer sind als die natürlichen Zahlen. Und dann hatten wir das mit dem Hotel und dann hatten wir irgendwie nochmal- den irgendwie so- zwischen fünf und acht und da war meiner Meinung nach, dass es da nicht	1

	unendlich viele gibt. Zwischen zwei bestimmten Zahlen. (Amina, Interview 1 , Pos. 276)	
Identifikation Fehler	Die Studierenden erkennen den Fehler einer gegebenen Beispiellösung zu Aufgabe 15.4.. Ankerbeispiel: Also ein Halb verdoppelt sind Viertel und sechs Achtel hat er halt plus vier gerechnet oben und unten. Also falsche- Er hat halt plus gerechnet und nicht mal. (Nina, Interview 2 , Pos. 165)	8
nicht identifiziert	Die Studierenden erkennen den Fehler einer gegebenen Beispiellösung zu Aufgabe 15.4. nicht. Ankerbeispiel: (´Rationale Brüche kann man beliebig erweitern oder kürzen und es ist die gleiche Dezimalzahl. Z.B. 1/2 = 2/4 = 6/8´) Das stimmt, oder? (Hedy, Interview 2 , Pos. 163-164)	7
Grundvorstellungen		21
Erweitern	Diese Kategorie beinhaltet Grundvorstellungen und korrekte oder auch fehlerhafte Aussagen der Studierenden zum Erweitern von Brüchen. Ankerbeispiel: Es wurde ja nochmal erweitert, ne? Die elf Sechzigstel wurden verdoppelt, dann hat man zweiundzwanzig- beziehungsweise erweitert, kleiner, feiner wurde mein Kuchen gemacht. Ich stelle es mir immer gern mit Kuchen vor (Hedy, Interview 2 , Pos. 65)	5
Bruchzahl	Diese Kategorie beinhaltet Grundvorstellungen und korrekte oder auch fehlerhafte Aussagen der Studierenden zur Bruchzahl. Ankerbeispiel:	3

	Und es ist ja aber, wenn du wieder kürzt, die gleiche Bruchzahl, (Nina, Interview 2 , Pos. 66)	
Division	Diese Kategorie beinhaltet Grundvorstellungen der Studierenden zur Division von Brüchen. Ankerbeispiel: Also warum die Division größer ist danach bei Brüchen. (...) da sind wir wieder bei dem Thema halt Grundvorstellung (...) Wenn er halt sechs Packungen Erdbeeren hat und davon jeweils die Hälfte rausnimmt, also sie teilt, hat man ja am besten- hat man ja am Ende zwölf Packungen Erdbeeren. Oder man hat halt zwölf Schalen dann. Hat dadurch mehr so. Also die Zahl wird halt größer. (...) Es sind zwar weniger Erdbeeren in der Schale, aber ich habe im Endeffekt ja mehr Schalen zum Verkaufen. (Carla, Interview 2 , Pos. 175)	1
Größenvorstellung	Die Studierenden verfügen über adäquate Größenvorstellungen zu rationalen Zahlen. Ankerbeispiel: Weil...elf Dreißigstel- wenn man sich so- wenn ich mir so die Dreißigstel vorstelle: Es passen ja dreißig in eins. Das heißt ein Halb ist in Dreißigstel fünfzehn Dreißigstel und das wäre ja dichter an ein Halb als an null dran. Und deswegen ist es größer als die beiden. (Amina, Interview 1 , Pos. 90)	6
eingeschränkt	Die Studierenden verfügen über eingeschränkte Größenvorstellungen zu rationalen Zahlen. Ankerbeispiel: ich habe keine Ahnung wie man dann auf die sechs Einunddreißigstel kommt, die dazwischen sein sollen (Ida, Interview 1 , Pos. 121)	7
Unendlichkeit	Diese Kategorie beinhaltet Vorstellungen und Aussagen der Studierenden zur Unendlichkeit. Ankerbeispiel:	2

		Also ich tue mich irgendwie damit schwer zu- mir das vorzustellen unendlich viele Möglichkeiten zu haben, wie ich das Messer halte. (Lennox, Interview 1 , Pos. 241)	
Rechenoperationen			23
	Umwandlung Bruch in Dezimalbruch	Die Studierenden wandeln einen Bruch in einen Dezimalbruch bzw. einen Dezimalbruch in einen Bruch um. Bemerkung: Sie führen die Umwandlung korrekt oder fehlerhaft aus. Ankerbeispiel: ein Drittel im Dezimalbruch ist null Komma drei drei drei drei drei und ein Sechstel ist null Komma eins acht drei glaube ich und drei drei drei drei drei. (Amina, Interview 1 , Pos. 313)	3
	Umwandlung natürliche Zahl in Bruch	Die Studierenden wandeln eine natürliche Zahl in einen Bruch oder einen Bruch in eine natürliche Zahl um. Bemerkung: Sie führen die Umwandlung korrekt oder fehlerhaft aus. Ankerbeispiel: Aber es sind ja nicht fünf Fünftel, sondern fünf Eintel, weil es ja fünf Ganze sind. (Ida, Interview 1 , Pos. 81)	2
	Erweitern und Kürzen	Die Studierenden erweitern oder kürzen Brüche korrekt. Ankerbeispiel: Na es wird ja eigentlich sowohl Zähler als auch Nenner mit der fünf multipliziert. Also hätte man das irgendwie sowohl in den Zähler als auch in den Nenner schreiben müssen. So wie fünf mal eins geteilt durch fünf mal sechs. (...) Dann würde ich auch auf fünf Dreißigstel kommen. (Amina, Interview 1 , Pos. 108)	10
	Multiplikation	Die Studierenden multiplizieren zwei Brüche oder Bruch und natürliche Zahl korrekt.	6

	Ankerbeispiel: wenn ich jetzt die Aufgabe ein Sechstel mal fünf lese ohne das, was dahinter steht, würde ich auf fünf Sechstel kommen (Amina, Interview 1 , Pos. 106)	
fehlerhaft	Die Studierenden multiplizieren zwei Brüche oder Bruch und natürliche Zahl fehlerhaft. Ankerbeispiel: wenn ich es so lese, ein Sechstel mal fünf, also ein Sechstel will ich fünf mal haben, dann komme ich auch auf die fünf Dreißigstel. (Lennox. Interview 1 , Pos. 66)	2
Lösungsstrategien		27
Visualiserung	Die Studierenden verwenden zur Lösung einer Fragestellung eine Visualisierung oder ein Vorstellungsbild. Bemerkung: Die Beschreibung ist allgemein und lässt sich keiner anderen Kategorie zuordnen. Ankerbeispiel: Du hast zehn Stück und davon sind drei ausgemalt. Bei ein Drittel hast du drei Stück und da ist nur eins ausgemalt (Lennox, Interview 1 , Pos. 309)	2
Streifenmodell	Die Studierenden verwenden zur Lösung einer Fragestellung als Visualisierung bzw. Vorstellungsbild das Streifenmodell. Ankerbeispiel: dann musst du es ja nur nochmal wieder erweitern und dann kommen die Zahlen dazwischen. So wie mit diesem Streifensystem glaube ich (Nina, Interview 2 , Pos. 27)	2
Kuchen	Die Studierenden verwenden zur Lösung einer Fragestellung als Visualisierung bzw.	1

	Vorstellungsbild das Kuchenmodell. Ankerbeispiel: kleiner, feiner wurde mein Kuchen gemacht. Ich stelle es mir immer gern mit Kuchen vor (Hedy, Interview 2 , Pos. 65)	
Rechteckmodell	Die Studierenden verwenden zur Lösung einer Fragestellung als Visualisierung bzw. Vorstellungsbild das Rechteckmodell. Ankerbeispiel: Elf dreißigstel ...wenn- ich mach das jetzt mal so (zeichnet im Rechteckmodell 2*15 Kästchen an). Das sind jetzt dreißig Dreißigstel. Und das hier sind fünfzehn Dreißigstel, die erste Reihe, und das ist die Hälfte von dreißig Dreißigstel. (Amina, Interview 1 , Pos. 92)	2
Uhr	Die Studierenden verwenden zur Lösung einer Fragestellung als Visualisierung bzw. Vorstellungsbild das Uhrenmodell. Ankerbeispiel: Ich denke dann immer gleich an die Uhr. Und stelle mir das bildlich vor (Amina, Interview 1 , Pos. 43)	1
Zahlenstrahl	Die Studierenden verwenden zur Lösung einer Fragestellung als Visualisierung bzw. Vorstellungsbild den Zahlenstrahl. Ankerbeispiel: der Bruch elf Dreißigstel liegt ja eigentlich nicht zwischen fünf Dreißigstel und sechs Dreißigstel. Das ist ja eigentlich ein Denkfehler. Weil wenn wir uns einen Zahlenstrahl vorstellen und da ist fünf Dreißigstel und sechs Dreißigstel und jetzt soll der Bruch elf Dreißigstel daneben liegen? (Hedy, Interview 2 , Pos. 55)	2
eingeschränkt	Die Studierenden können den Zahlenstrahl als Visualisierung oder Vorstellungsbild zur Lösung einer Fragestellung nicht oder nur eigeschränkt anwenden.	2

	Ankerbeispiel: eigentlich halt so da nach sozusagen 0,5 habe ich direkt an die eins gedacht, weil ich habe noch nie einen Zahlenstrahl gesehen, der halt irgendwie so in die Nachkommastellen reingeht (Jana, Interview 1 , Pos. 38)	
Umwandlung in Dezimalbruch	Um eine Fragestellung zu lösen, wandeln die Studierenden den Bruch in einen Dezimalbruch um. Ankerbeispiel: Man könnte das ja sich in Dezimalzahlen umwandeln und dann wieder zurückwandeln (Lennox, Interview 1 , Pos. 190)	3
Reflexion Lernprozess/ Lösungswege	Die Studierenden reflektieren über Lösungswege oder ihren eigenen Lernprozess. Ankerbeispiel: Lennox: Krass, wenn das so funktioniert ist das eine super Taktik. Jana: Hast du das in der Schule gelernt? Amina: Ne. Das ist irgendwie- ich weiß nicht, das ist so bei mir drin. (Interview 1 , Pos. 57-59)	12
Motivation		21
Märchen		0
nein	Die Studierenden antworten auf die Frage, ob sie das Märchen vom bösen Drachen und dem klugen Bruch kennen, mit nein. Ankerbeispiel: Ne. Sagt mir nichts. (Hedy, Interview 2 , Pos. 12)	2
Gefühl		0

positiv	Die Studierenden antworten auf die Frage, welches Gefühl sie am ehesten mit der Bruchrechnung verbinden, indem sie ein positives Gefühl nennen. Ankerbeispiel: ich wäre auch ein bisschen inspiriert oder angespornt, wenn ich höre: ´Okay, wir haben Bruchrechnen als Thema´ (Nina, Interview 2 , Pos. 9)	10
negativ	Die Studierenden antworten auf die Frage, welches Gefühl sie am ehesten mit der Bruchrechnung verbinden, indem sie ein negatives Gefühl nennen. Ankerbeispiel: Ja, also bei mir wäre es eher so besorgt und beunruhigt im ersten Moment, so- weil ich weiß, dass ich keine guten Grundvorstellungen hatte oder habe (Carla, Interview 2 , Pos. 10)	9
Erweitern vs. Multiplizieren	Die Studierenden verwechseln Erweitern und Multiplizieren.	12
Interview 2		295
Moderator		62
Nina		83
Hedy		76
Carla		74
Interview 1		525
Moderator		73
Lennox		101
Amina		116

Jana	72
Ida	97
Tanja	66