

UNIVERSITÄT POTSDAM

Wirtschafts- und Sozialwissenschaftliche Fakultät

**STATISTISCHE DISKUSSIONSBEITRÄGE**

**Nr. 50**

Andreas Nastansky

Hans Gerhard Strohe

**Konsumausgaben und Aktienmarktentwicklung  
in Deutschland: Ein kointegriertes  
vektorautoregressives Modell**



Potsdam 2011

ISSN 0949-068X



# STATISTISCHE DISKUSSIONSBEITRÄGE

Nr. 50

Andreas Nastansky

Hans Gerhard Strohe

## **Konsumausgaben und Aktienmarktentwicklung in Deutschland: Ein kointegriertes vektorautoregressives Modell**

Herausgeber: Prof. Dr. Hans Gerhard Strohe, ehemals Lehrstuhl für Statistik und  
Ökonometrie, Wirtschafts- und Sozialwissenschaftliche Fakultät der  
Universität Potsdam  
August-Bebel-Str. 89, D-14482 Potsdam  
Tel. +49 (0) 331 977-3225  
Fax. +49 (0) 331 977-3210  
Email : [strohe@uni-potsdam.de](mailto:strohe@uni-potsdam.de)  
2011, ISSN 0949-068X



## **Kurzfassung**

Vektorfehlerkorrekturmodelle (VECM) erlauben es, Abhängigkeiten zwischen den Veränderungen mehrerer potenziell endogener Variablen simultan zu modellieren. Die Idee, ein langfristiges Gleichgewicht gleichzeitig mit kurzfristigen Veränderungen zu modellieren, lässt sich vom Eingleichungsansatz des Fehlerkorrekturmodells (ECM) zu einem Mehrgleichungsansatz für Variablenvektoren (VECM) verallgemeinern. Die Anzahl der kointegrierenden Beziehungen und die Koeffizientenmatrizen werden mit dem Johansen-Verfahren geschätzt. An einer einfachen Verallgemeinerung einer Konsumfunktion wird die Schätzung und Wirkungsweise eines VECM für Verbrauch, Einkommen und Aktienkurse in Deutschland gezeigt. Die Anwendung der Beveridge-Nelson-(BN)-Dekomposition auf vektorautoregressive Prozesse ermöglicht zudem, Abhängigkeiten zwischen den aus den kointegrierten Zeitreihen extrahierten zyklischen Komponenten zu schätzen.

JEL-Codes: C32, C51, E21

Schlagworte: Beveridge-Nelson-Dekomposition, Johansen-Verfahren, Kointegration, Vektorfehlerkorrekturmodell, Vermögenseffekt

## **Abstract**

Vector error correction models (VECM) allow to simultaneously model dependencies between the changes of several potentially endogenous variables. The idea is the modelling of a long-run equilibrium together with the short-run dynamics. Therefore a single equation approach (ECM) can be generalised to a multi equation approach (VECM) for variable vectors. The number of cointegration relations and the coefficient matrices are estimated with the Johansen procedure. The estimation of a VECM for income, consumption and stock prices for Germany is demonstrated by using a generalised consumption function. The Beveridge-Nelson-(BN)-Decomposition procedure for vectorautoregressive processes allows extracting cyclical components of cointegrated time series and estimating the degree of co-movement between these transitory components.

Key words: Beveridge-Nelson-Decomposition, Johansen Procedure, Cointegration, Vector Error Correction Model, Wealth Effect

## 1 Einleitung

Das auf Engle und Granger (1987) zurückgehende Konzept der Kointegration verbindet statistisch-zeitreihenanalytische Verfahren mit dem ökonomischen Gleichgewichtsgedanken. Kointegration ist eine Gemeinsamkeit von zwei oder mehreren Zeitreihen, die sich darin zeigt, dass in der langfristigen Entwicklung eine lineare Beziehung zwischen ihnen besteht, die sich bis in die kurzfristigen Schwankungen auswirkt. In der Sprache der Ökonometrie wird das Einhalten dieser Beziehung als Gleichgewicht interpretiert. Abweichungen von diesem Gleichgewicht zwischen den Variablen treten auf, aber sie haben die Tendenz, sich immer wieder zurückzubilden.

Diese Eigenschaft gemeinsam integrierter Zeitreihen ermöglicht es mithilfe von Fehlerkorrekturmodellen (ECM) die Abhängigkeitsbeziehungen besser zu modellieren. Ein Fehlerkorrekturmodell ist eine spezielle Form des linearen ökonometrischen Eingleichungsmodells, das in erster Linie die Zusammenhänge zwischen den kurzfristigen Veränderungen der einbezogenen Variablen unter der Voraussetzung der Kointegration betrachtet.

Das Testen auf Kointegration und Schätzen des Fehlerkorrekturmodells kann mittels verschiedener Verfahren erfolgen: zum einen über die Schätzung einer Einzelgleichung mit dem Zweistufigen Verfahren von Engle und Granger. Anwendung findet dieses, wenn die nichtstationären Variablen den Integrationsgrad Eins aufweisen und zwischen ihnen genau eine Kointegrationsbeziehung besteht, in die alle Variablen einbezogen werden. Das Verfahren setzt im Prinzip die vorherige Festlegung einer eindeutigen Kausalstruktur des Fehlerkorrekturmodells voraus. Es ist also a priori festzulegen, welche Variable als abhängige und welche als unabhängige in das Modell eingeht.

Alternativ dazu ist der Test auf Kointegration mit dem von Stock und Watson (1993) entwickelten dynamischen OLS-Ansatz (DOLS) zu nennen. Der DOLS-Ansatz hat gegenüber dem EG2-Verfahren den Vorteil, dass der OLS-Schätzer einer „effizienten Korrektur“ unterzogen wird – mit dem Ziel, Unkorreliertheit von Regressoren und Residuen und damit die asymptotische Normalität zu gewährleisten.

Die Kointegrationsanalyse ist jedoch einerseits nicht auf das Vorliegen nur einer, zugleich eindeutigen Kointegrationsbeziehung beschränkt. Denn in einer Regressionsfunktion mit mehr als einer unabhängigen Variablen können mehr als eine Kointegrationsbeziehung existieren. Der Einzelgleichungsansatz ist dann nicht mehr eindeutig.

Andererseits sind auch Modelle denkbar, in denen alle Variablen potenziell kausal für alle anderen Variablen sein dürfen. Der Test auf Kointegration kann nämlich insbesondere bei mehr als zwei  $I(1)$ -Variablen auf der Grundlage eines vektorautoregressiven (VAR) Modells durchgeführt werden. VAR-Modelle ermöglichen, die dynamischen Zusammenhänge zwischen ökonomischen Größen zu analysieren, ohne explizit Annahmen über die Richtung der Abhängigkeitsbeziehungen zu treffen. Alle Variablen werden als gemeinsam endogen („abhängig“) betrachtet, allerdings mit Verzögerung. Folglich wird die Beziehung zwischen den Variablen nicht ausschließlich durch eine statische Regressionsbeziehung dargestellt, in der  $y$  reagierend auf  $x$  und weiterer erklärender Größen abgebildet ist, sondern findet Ausdruck in einer Gleichgewichtsbeziehung zwischen mehreren formell gleichberechtigten Variablen.

Das Vektorfehlerkorrekturmodell (VECM) ermöglicht eine adäquate statistische Beschreibung der linearen Beziehungen integrierter Variablen und fasst die langfristigen Gleichgewichtsbeziehungen sowie die kurzfristige Dynamik in einem System zusammen. Die Bestimmung der Anzahl der linear unabhängigen Kointegrationsbeziehungen und die anschließende Schätzung der Parameter ist u.a. mit dem von Johansen (1988) entwickelten Verfahren möglich.

Die Darstellung mit gemeinsamen Trends (CT-Form) zerlegt die kointegrierten Prozesse in transitorische (zyklische) und permanente Komponenten und eröffnet die Analyse des Beziehungsgeflechts in den zyklischen Bewegungen. Die multivariate Beveridge-Nelson-(BN)-Dekomposition ermöglicht dabei, aus den kointegrierten Zeitreihen zyklische Komponenten zu extrahieren und Abhängigkeiten zwischen den Größen der gesamtwirtschaftlichen Konsumfunktion im Zyklus zu schätzen.

Der Abschnitt 2 behandelt zunächst die Beziehung zwischen Kointegration und gemeinsamen Trends. In Abschnitt 3 wird das vektorautoregressive Modell kurz skizziert und anschließend reparametrisiert als Vektorfehlerkorrekturmodell formuliert. Dem folgt in Abschnitt 4 die Darstellung des Johansen-Verfahrens und der notwendigen statistischen Tests. Der Abschnitt 5 beschreibt die multivariate Beveridge-Nelson-Dekomposition. In Abschnitt 6 werden die Zeitreihen von Einkommen, Konsum und Aktienpreis in ihrer wechselseitigen Abhängigkeit über eine einfache Konsumfunktion hinaus analysiert. Sie werden auf Kointegration geprüft, ein Vektorfehlerkorrekturmodell wird für sie geschätzt und die Zusammenhänge in den zyklischen Komponenten werden quantifiziert.

## 2 Kointegration und gemeinsame Trends

Mit dem Kointegrationsansatz ist es möglich, die sogenannten kurz- und langfristigen Zusammenhänge zwischen integrierten Zeitreihen gemeinsam zu modellieren. Während unter dem kurzfristigen Zusammenhang die Schwankungen der Wachstumsraten um einen von Null verschiedenen Erwartungswert verstanden wird, bezieht sich der langfristige Zusammenhang auf die in den Niveaus sichtbare gemeinsame Variabilität im Trendverlauf. Zur Erläuterung wird der Vektor  $\mathbf{x}_t = [x_{1t}, x_{2t}]$  auf zwei Variablen beschränkt. Engle und Granger (1987) verdeutlichen, dass es lineare Kombinationen zwischen integrierten Variablen  $x_{1t}$  und  $x_{2t}$  geben kann, die eine stationäre Zeitreihe  $z_t$  erzeugen:

$$(1) \quad x_{1t} - bx_{2t} = z_t$$

Gibt es einen Parameter  $b$ , so dass  $z_t$  stationär ist, sind  $x_{1t}$  und  $x_{2t}$  kointegriert. Der Koeffizientenvektor  $\boldsymbol{\beta} = [1, -b]'$  heißt kointegrierender Vektor. Da die Beziehung (1), die Kointegrationsbeziehung, bei Multiplikation aller Glieder mit einem beliebigen Faktor  $g \neq 0$  gültig bleibt, sind auch alle Vielfache  $g\boldsymbol{\beta}$  kointegrierende Vektoren. Wegen der linearen Abhängigkeit werden sie als zueinander äquivalent betrachtet. Der stationäre Prozess  $z_t$  beinhaltet die Abweichungen von der Kointegrationsbeziehung. Folgen zwei Zeitreihen, die jeweils integriert erster Ordnung, also I(1) sind, einem gemeinsamen stochastischen Trend, kann ihr Zusammenhang nicht als Scheinkorrelation abgetan werden und die Zeitreihen werden als kointegriert bezeichnet. Wie Stock und Watson (1988) gezeigt haben, wird ihre langfristige Entwicklung von einem gemeinsamen Trend bestimmt. Im Folgenden wird dieser gemeinsame Trend als Random-Walk  $w_t$  modelliert:<sup>1</sup>

$$(2) \quad w_t = w_{t-1} + \varepsilon_t$$

Der Störterm  $\varepsilon_t$  soll einen reinen Zufallsprozess weißen Rauschens abbilden. Die beiden kointegrierten I(1)-Variablen können dementsprechend z.B. in folgender Form dargestellt werden:

$$(3) \quad \begin{aligned} x_{1t} &= bw_t + \tilde{x}_{1t} & \text{mit } \tilde{x}_{1t} &\sim I(0) \\ x_{2t} &= w_t + \tilde{x}_{2t} & \text{mit } \tilde{x}_{2t} &\sim I(0) \end{aligned}$$

---

<sup>1</sup> In Anlehnung an Kirchgässner / Wolters (2006), S. 185.

Umgekehrt lässt sich zeigen, dass wenn die beiden Prozesse in dieser Weise einem gemeinsamen stochastischen Trend  $w_t$  folgen und ihre Störterme voneinander unabhängige Prozesse weißen Rauschens sind, Kointegration vorliegt: Denn es gilt, dass

$$(4) \quad x_{1t} - bx_{2t} = (bw_t + \tilde{x}_{1t}) - b(w_t + \tilde{x}_{2t}) = \tilde{x}_{1t} - b\tilde{x}_{2t} = z_t$$

als Linearkombination zweier stationärer Prozesse einen stationären Prozess  $z_t$  erzeugt. Folglich bildet (4) und damit auch (1) tatsächlich eine kointegrierende Beziehung ab – mit dem Vektor  $[1, -b]$ . Das System aus zwei I(1)-Variablen enthält demnach eine Kointegrationsbeziehung und einen gemeinsamen stochastischen Trend. Bei mehr als zwei Variablen ist diese Einteilung hingegen deutlich komplizierter. Ein Vektor von  $n$  I(1)-Variablen ist mit dem Rang  $r$  kointegriert, wenn genau  $r$  linear unabhängige Kointegrationsvektoren  $\beta_i$  existieren. Dabei gilt:  $0 < r < n$ . Diese Vektoren können zu einer Kointegrationsmatrix  $\mathbf{B}$  zusammengefasst werden:<sup>2</sup>

$$(5) \quad \mathbf{B} = [\beta_1, \dots, \beta_r],$$

und multipliziert mit dem Vektor der nichtstationären Variablen  $\mathbf{x}_t$  resultieren die  $r$  Komponenten des Vektors  $\mathbf{z}_t$ , die wieder als Abweichung („Fehler“) vom Gleichgewicht interpretiert werden:

$$(6) \quad \mathbf{B}' \mathbf{x}_t = \mathbf{z}_t \quad \text{mit} \quad \mathbf{z}' = [z_1, \dots, z_r]$$

Das System enthält dann  $n - r$  gemeinsame stochastische Trends. Der Kointegrationsrang  $r$  muss stets kleiner als die Anzahl der I(1)-Variablen  $n$  sein, da sonst die Matrix  $\mathbf{B}$  invertierbar wäre. Damit wären die Elemente von  $\mathbf{x}_t$  stationär, da diese sich als Linearkombination  $\mathbf{x}_t = \mathbf{B}'^{-1} \mathbf{z}_t$  aus den stationären Gleichgewichtsfehlern ergeben, was zu einem Widerspruch führt.

Wird der Fall für zwei I(1)-Variablen in (3) auf einen Vektor  $\mathbf{x}_t$  mit  $n$  Variablen übertragen, ergibt sich:

$$(7) \quad \mathbf{x}_t = \mathbf{H} \mathbf{w}_t + \mathbf{z}_t$$

mit einer  $(n \times (n - r))$ -Matrix  $\mathbf{H}$  und  $\mathbf{w}_t$  als einem  $(n - r)$ -dimensionalen Random-Walk:

$$(8) \quad \mathbf{w}_t = \mathbf{w}_{t-1} + \boldsymbol{\varepsilon}_t$$

---

<sup>2</sup> Vgl. Kirchgässner / Wolters (2006), S. 188.

wobei  $\boldsymbol{\varepsilon}_t$  ein Vektor aus reinen Zufallsprozessen ist. In Gleichung (7) wird der Prozess  $\mathbf{x}_t$  in die gemeinsamen stochastischen Trends  $\mathbf{w}_t$  und einen stationären Teil  $\mathbf{z}_t$  zerlegt. Diese Darstellung wird in Bezug auf Stock und Watson (1988) auch als gemeinsame Trends (Common-Trends-Form) bezeichnet, kurz CT.

### 3 Vektorfehlerkorrekturmodell

Schon das vektorautoregressive (VAR) Modell war eine nützliche Alternative zu den konventionellen strukturmodellierenden Verfahren. Die VAR-Analyse behandelt alle Größen als potenziell endogene Variable. Daher ist es nicht erforderlich, a-priori-Entscheidungen über Endogenität und Exogenität, also über die Richtung der Abhängigkeit, zu treffen. Die Variablen sind hinsichtlich der Kausalität potenziell gleichberechtigt. Bei einem VAR mit der Ordnung  $p$  hängt jede Variable linear von ihren eigenen bis zu  $p$  Perioden verzögerten Werten sowie auch von den bis zu  $p$  Perioden verzögerten Werten der anderen gemeinsam abhängigen Variablen ab.

Jetzt ist es das Ziel, die gegenseitigen Abhängigkeiten von Veränderungen oder Wachstumsraten mehrerer nichtstationärer ökonomischer Variablen von den vorhergehenden Veränderungen aller dieser Variablen bei gleichzeitiger Beachtung der langfristigen linearen Beziehungen zwischen diesen Variablen simultan zu analysieren. Die Basis solch einer Vektorfehlerkorrektur-Darstellung bildet die Modellierung der linearen Beziehungen der  $n$  integrierten Variablen als vektorautoregressiver (VAR) Prozess  $\mathbf{x}_t$  endlicher Ordnung  $p$ .<sup>3</sup>

$$(9) \quad \mathbf{x}_t = \boldsymbol{\mu} + \sum_{i=1}^p \boldsymbol{\Phi}_i \mathbf{x}_{t-i} + \mathbf{u}_t,$$

wobei  $\mathbf{x}$  ein  $(n \times 1)$ -Vektor stochastischer Variablen,  $\boldsymbol{\mu}$  ein  $(n \times 1)$ -Vektor der Konstanten;  $\boldsymbol{\Phi}_i$   $(n \times n)$ -Matrizen der Autoregressionsparameter,  $\mathbf{u}$  ein  $(n \times 1)$ -Vektor normalverteilter reiner Zufallsvariablen (Weißes Rauschen),  $n$  die Anzahl der Variablen und  $t = 1, 2, \dots$  die Zeit ist. Im einfachsten Fall lässt sich (9) als VAR(1)-Modell formulieren:

$$(10) \quad \mathbf{x}_t = \boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\Phi} \mathbf{x}_{t-1} + \mathbf{u}_t$$

---

<sup>3</sup> Vgl. Kirchgässner / Wolters (2006), S. 197.

Durch Subtraktion des um eine Periode verzögerten Vektors der gemeinsam abhängigen Variablen  $\mathbf{x}_{t-1}$  auf beiden Seiten erhalten wir folgende Beziehung:

$$(11) \quad \begin{aligned} \mathbf{x}_t - \mathbf{x}_{t-1} &= \boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\Phi}\mathbf{x}_{t-1} - \mathbf{x}_{t-1} + \mathbf{u}_t \\ \text{oder} \\ \Delta\mathbf{x}_t &= \boldsymbol{\mu} + (\boldsymbol{\Phi} - \mathbf{I})\mathbf{x}_{t-1} + \mathbf{u}_t \end{aligned}$$

mit der  $(n \times n)$ -Einheitsmatrix  $\mathbf{I}$ . Im Fall der Kointegration ist der Term  $(\boldsymbol{\Phi} - \mathbf{I})\mathbf{x}_{t-1}$  stationär und es existieren  $r$  kointegrierende Beziehungen. Im einfachsten Fall, also einem VAR(1), treten keine verzögerten Differenzen in der rechten Seite der Gleichung (11) auf.

Verallgemeinert für einen VAR( $p$ )-Prozess ist in Gleichung (12) der vektorautoregressive Prozess der Ordnung  $p$  (9) reparametrisiert als Vektorfehlerkorrekturmodell, VECM( $p-1$ ), dargestellt:<sup>4</sup>

$$(12) \quad \begin{aligned} \Delta\mathbf{x}_t &= \boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\Pi}\mathbf{x}_{t-1} + \sum_{i=1}^{p-1} \boldsymbol{\Gamma}_i \Delta\mathbf{x}_{t-i} + \mathbf{u}_t \\ \text{mit den Reparametrisierungsbeziehungen :} \\ \boldsymbol{\Pi} &= -\mathbf{I} + \sum_{i=1}^p \boldsymbol{\Phi}_i \quad \boldsymbol{\Gamma}_i = -\sum_{i=j+1}^p \boldsymbol{\Phi}_i \end{aligned}$$

Diese Differenzendarstellung ist äquivalent zum vektorautoregressiven Modell der Ordnung  $p$  für den Vektor  $\mathbf{x}_t$  der Niveauvariablen in (9). Im Vektor  $\mathbf{x}_{t-1}$  sind die um eine Periode verzögerten, nichtstationären Variablen enthalten. In den Matrizen  $\boldsymbol{\Gamma}_i$  kommt die kurzfristige Dynamik zum Ausdruck; während in der Matrix  $\boldsymbol{\Pi}$  implizit die langfristigen Beziehungen und ihre Gewichtung im Modell erfasst sind. Die günstigste maximale Zeitverschiebung, d.h. die Ordnung des VECMs, kann zum Beispiel mit dem Schwarz-Bayes- (SBC) oder dem Akaikekriterium (AIC) gefunden werden.<sup>5</sup>

Da die im Vektor  $\mathbf{x}_t$  enthaltenen Variablen nichtstationär (integriert) sind, ist  $\boldsymbol{\Pi}\mathbf{x}_{t-1}$  nur dann stationär, wenn die integrierten Variablen auch kointegriert sind. In diesem Fall enthält das VECM nur stationäre Größen. Im VAR( $p$ )-Prozess sind Einheitswurzeln vorhanden. Das folgende System

$$(13) \quad \det(\mathbf{I}_n - \boldsymbol{\Phi}_1 z - \boldsymbol{\Phi}_2 z^2 - \dots - \boldsymbol{\Phi}_p z^p) = 0$$

<sup>4</sup> Vgl. Hansen / Johansen (1998), S. 21.

<sup>5</sup> Vgl. Pesaran / Pesaran (2009), S. 430f.

hat komplexwertige Lösungen  $z$  mit  $|z| = 1$ , d.h. alle Nullstellen liegen auf dem Einheitskreis.<sup>6</sup> Demgegenüber ist ein VAR( $p$ )-Prozess stabil, wenn alle Variablen in  $\mathbf{x}_t$  schwach stationär sind, d.h. wenn die Nullstellen des Systems außerhalb des Einheitskreises liegen ( $|z| > 1$ ).

Für die Kointegrationsanalyse ist die Matrix  $\mathbf{\Pi}$  von zentraler Bedeutung. Auf der Basis der Gleichung (12) entwickelte Johansen einen Kointegrationstest mit dem Ziel, die Anzahl der Kointegrationsvektoren (= Anzahl der Kointegrationsbeziehungen)  $r$  zwischen den  $n$  in  $\mathbf{x}_{t-1}$  enthaltenen I(1)-Variablen zu bestimmen. Die Anzahl  $r$  der Kointegrationsvektoren stimmt mit dem Rang der Matrix  $\mathbf{\Pi}$  überein. Je mehr kointegrierende Vektoren existieren, desto wahrscheinlicher ist es, dass die beteiligten Variablen des vektorautoregressiven Modells wenigstens einer gemeinsamen, stabilen, langfristigen Entwicklung folgen.

In einem VEC-Modell mit  $n$  Variablen, kann es bis zu  $n - 1$  linear unabhängige, kointegrierende Vektoren geben. Folgende Fälle können unterschieden werden:<sup>7</sup>

1. Rang  $\mathbf{\Pi} = 0$ : Es gibt keine linear unabhängigen Kointegrationsvektoren. Damit gibt es keine Kointegration zwischen den Variablen in  $\mathbf{x}$  und  $\mathbf{\Pi}$  ist die Nullmatrix. Das Matrixprodukt  $\mathbf{\Pi}\mathbf{x}_{t-1}$  fällt aus der Gleichung (12) heraus. Das VECM( $p-1$ ) ist ein VAR( $p$ ) der ersten Differenzen von  $\mathbf{x}$ .
2. Rang  $\mathbf{\Pi} = r$ : Es existieren  $r$  linear unabhängige Kointegrationsvektoren, denen mit  $0 < r < n$  ebenso viele Kointegrationsbeziehungen entsprechen. Dann ist Gleichung (12) mit einer Rang-reduzierten Matrix  $\mathbf{\Pi}$  zu schätzen, die  $r$  Kointegrationsbeziehungen hervorbringt.
3. Rang  $\mathbf{\Pi} = n$ : Die Matrix  $\mathbf{\Pi}$  hat den vollen Rang und  $\mathbf{\Pi}^{-1}$  existiert. Nach  $\mathbf{x}_{t-1}$  aufgelöst, würde sich dieser nichtstationäre Vektor als Linearkombination aus stationären Größen ergeben, was ein Widerspruch ist. Die Gleichung (12) ist nur dann erfüllt, wenn in  $\mathbf{x}$  bereits stationäre Niveaugrößen vorliegen. Dann kann ein VAR-Modell in den Niveaus mit OLS geschätzt werden.

<sup>6</sup> Vgl. Hansen / Johansen (1998), S. 6, 21.

<sup>7</sup> Vgl. Kirchgässner / Wolters (2006), S. 197f.

Einen Spezialfall stellt die Variante Rang  $\mathbf{\Pi} = 1$  dar, d.h. es existiert nur eine kointegrierende Beziehung im System von  $n$  Variablen. In diesem Fall ist zwar der kointegrierende Vektor eindeutig; das Modell ist aber lediglich in eine Richtung stabil und kann sich mit  $(n - 1)$  stochastischen Trends entwickeln. Demzufolge wächst die Stabilität des Systems mit der Anzahl  $r$  seiner kointegrierenden Vektoren.<sup>8</sup> Hat die Matrix  $\mathbf{\Pi}$  den vollen Rang, ( $n \times n$ )-Matrix, wäre diese invertierbar und die unter 3. beschriebene Problematik würde eintreten. Ist der Rang einer quadratischen Matrix  $\mathbf{\Pi}$  kleiner als  $n$ , ist diese nicht invertierbar. Unter der Annahme, dass die Variablen in  $\mathbf{x}_{t-1}$  I(1) sind und  $\Delta \mathbf{x}_t$  stationär ist, bilden die Variablen von  $\mathbf{x}_{t-1}$  wegen des reduzierten Ranges von  $\mathbf{\Pi}$  Linearkombinationen, die stationär sind.

#### 4 Johansen-Verfahren

Zur Bestimmung der Anzahl der kointegrierenden Beziehungen findet u.a. das von Johansen (1988) entwickelte, auf der Maximum-Likelihood-Methode basierende gleichnamige Verfahren Anwendung. Das Vorgehen von Johansen lässt sich als multivariate Verallgemeinerung des Augmented Dickey-Fuller-Tests charakterisieren.<sup>9</sup> Aufgrund der großen Komplexität des Verfahrens wird in diesem Abschnitt nur eine Schematische Beschreibung gegeben. Das Verfahren von Johansen überprüft die Hypothese mittels des Ranges  $r$  der Matrix  $\mathbf{\Pi}$  und eines damit verbundenen Eigenwertproblems. Ist  $r < n$ , gibt es folgende Zerlegung:<sup>10</sup>

$$(14) \quad \mathbf{\Pi} = \mathbf{A}\mathbf{B}'$$

mit der  $(n \times r)$ -Ladungsmatrix  $\mathbf{A}$ , deren Elemente Ladungsparameter genannt werden und der  $(r \times n)$ -Kointegrationsmatrix  $\mathbf{B}$ , denn diese beinhaltet die  $r$  Kointegrationsvektoren (linear unabhängigen Spaltenvektoren). Mit (14) lässt sich (12) in die Fehlerkorrekturdarstellung überführen:

$$(15) \quad \Delta \mathbf{x}_t = \boldsymbol{\mu} + \mathbf{A}\mathbf{B}'\mathbf{x}_{t-1} + \sum_{i=1}^{p-1} \boldsymbol{\Gamma}_i \Delta \mathbf{x}_{t-i} + \mathbf{u}_t$$

<sup>8</sup> Vgl. Assenmacher (2002), S. 294.

<sup>9</sup> Vgl. Rinne (2004), S. 274.

<sup>10</sup> Vgl. Hansen / Johansen (1998), S. 21.

Damit liefert  $\mathbf{B}'\mathbf{x}_{t-1}$  die  $r$  stationären Linearkombinationen der Kointegrationsbeziehungen aus der Vorperiode oder anders interpretiert: die Fehler bezüglich der Gleichgewichtsbeziehungen. Die Matrix  $\mathbf{A}$  gewichtet diese „Fehler“ und kann daher als die Anpassungsleistung an die Gleichgewichte der  $r$  kointegrierenden Beziehungen in den einzelnen Gleichungen im Vektorfehlerkorrekturmodell interpretiert werden. Haben die Koeffizienten der Ladungsmatrix die „korrekten“ Vorzeichen, führt ein Fehler (Abweichung vom Gleichgewicht) in der Vorperiode zu einer Anpassung von  $\Delta\mathbf{x}_t$ .

Für ein VECM der Ordnung 1 kann Gleichung (15) noch einigermaßen übersichtlich in der ausgeschriebenen Schreibweise des Vektor-Matrix-Kalküls formuliert werden:

$$(16) \quad \begin{pmatrix} \Delta x_{1t} \\ \Delta x_{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} (\beta_1, \beta_2) \begin{pmatrix} x_{1t-1} \\ x_{2t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x_{1t-1} \\ \Delta x_{2t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_{1t} \\ u_{2t} \end{pmatrix}$$

Alternativ zum Konstantenvektor  $\boldsymbol{\mu}$  im Gesamtmodell, können auch Konstante in den kointegrierenden Beziehungen zugelassen werden, also letztlich in der Matrix  $\mathbf{B}$ . Ebenso wie der Konstantenvektor  $\boldsymbol{\mu}$  kann in das Modell auch ein Vektor  $\boldsymbol{\delta}t$  von individuellen linearen deterministischen Zeittrends eingebaut werden:

$$(17) \quad \Delta\mathbf{x}_t = \boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\delta}t + \mathbf{A}\mathbf{B}'\mathbf{x}_{t-1} + \sum_{i=1}^{p-1} \boldsymbol{\Gamma}_i \Delta\mathbf{x}_{t-i} + \mathbf{u}_t$$

mit einem Vektor  $\boldsymbol{\delta}$  von individuellen Anstiegskoeffizienten  $\delta_i$  für  $i=1, \dots, n$ . Hiermit ist die allgemeinste Form des Vektorfehlerkorrekturmodells erreicht. Die Vielzahl der darin enthaltenen Koeffizientenmatrizen und -Vektoren ruft der Eindruck einer höheren Komplexität hervor, als in den meisten Anwendungen tatsächlich besteht. In der Praxis werden viele der Koeffizienten gleich Null gesetzt, wie das empirische Beispiel zeigen wird.

In der Realität ist die Matrix  $\boldsymbol{\Pi}$  nicht gegeben. Die Matrizen  $\mathbf{A}$  und  $\mathbf{B}$  sind unbekannt und müssen aus den zugrundeliegenden Zeitreihen geschätzt werden. Als Folge der nicht eindeutigen Zerlegung der Gleichung (14) tritt das aus den Strukturgleichungsmodellen bekannte Identifikationsproblem für strukturelle Gleichungssysteme auf.<sup>11</sup> Die Kointegrationsvektoren können nur bei auferlegten ökonomisch sinnvollen Restriktionen der Koeffizienten der kointegrierenden Beziehungen (Vektoren von  $\mathbf{B}$ ) geschätzt werden.

<sup>11</sup> Vgl. Kirchgässner / Wolters (2006), S. 199.

Die Zahl der kointegrierenden Vektoren, also der linear unabhängigen Spaltenvektoren in  $\mathbf{B}$ , ist der Rang  $r$  der Matrix  $\mathbf{B}$ . Da sie in der Gleichung (12) nicht isoliert, sondern nur innerhalb der Produktmatrix  $\mathbf{\Pi} = \mathbf{A}\mathbf{B}'$  auftritt, wird dieser Rang über die Matrix  $\mathbf{\Pi}$  bestimmt. Dazu dient das Repräsentationstheorem von Granger.<sup>12</sup> Es besagt u.a., dass wenn eine Beziehung (12) mit einem stationären  $n \times 1$ -Vektor  $\Delta \mathbf{x}_t$  und einer Koeffizientenmatrix  $\mathbf{\Pi}$  vom Rang  $r < n$  existiert, sich dieses  $\mathbf{\Pi}$  darstellen lässt als Produkt  $\mathbf{A}\mathbf{B}'$  zweier  $n \times r$ -Matrizen  $\mathbf{B}$  und  $\mathbf{A}$ , die ebenfalls den Rang  $r$  haben.<sup>13</sup> Daher kann prinzipiell der Rang  $r$  von  $\mathbf{\Pi}$  als die Zahl der kointegrierenden Vektoren genommen werden.

Das Dilemma ist, dass  $r$  bekannt sein muss, bevor die Matrix  $\mathbf{\Pi}$  geschätzt werden kann, und umgekehrt die Matrix bekannt sein müsste, um ihren Rang zu bestimmen. Es wurden aber verschiedene iterative Testverfahren entwickelt, mit deren Hilfe man Hypothesen über den Wert von  $r$  prüfen kann. Zur Bestimmung des Ranges und der Schätzung der Koeffizienten des Systems erfolgt auf der ersten Stufe eine Maximum-Likelihood-(ML)-Schätzung der Gleichung (12) unter Berücksichtigung der Restriktion (14). Im Anschluss daran wird mit Likelihood-Ratio-Tests die Anzahl der signifikant von Null verschiedenen Eigenwerte, d.h. der Kointegrationsvektoren, getestet.<sup>14</sup> Die Schätzung und die Tests setzen voraus, dass die Störvariablen des Modells unabhängig normalverteilt sind.

Im Folgenden wird der ML-Schätzer von Johansen kurz vorgestellt.<sup>15</sup> Zur Erläuterung des Verfahrens wird die nachstehende vereinfachte Notation verwendet:

$$(18) \quad \begin{aligned} \Delta \mathbf{x} &= [\Delta \mathbf{x}_1, \dots, \Delta \mathbf{x}_T]_p & \mathbf{x}_{-1} &= [\mathbf{x}_0, \dots, \mathbf{x}_{T-1}]_p & \mathbf{u} &= [\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_T] \\ \mathbf{\Gamma} &= [\mathbf{\Gamma}_1, \dots, \mathbf{\Gamma}_{p-1}]_p & \mathbf{Z} &= [\mathbf{Z}_0, \dots, \mathbf{Z}_{T-1}] & \text{mit } \Delta \mathbf{Z} &= \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{x}_{t-1} \\ \vdots \\ \Delta \mathbf{x}_{t-p+1} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

<sup>12</sup> Vgl. Engle / Granger (1987).

<sup>13</sup> Vgl. Hackl (2005), S. 373.

<sup>14</sup> Vgl. Hansen / Johansen (1998), S. 71-85.

<sup>15</sup> In Anlehnung an Lütkepohl (2006), S. 286, 294-296.

Unter Verwendung dieser Notation ergibt sich das VECM in Gleichung (17) ohne Deterministik für  $t = 1, \dots, T$  zu:

$$(19) \quad \Delta \mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{B}'\mathbf{x}_{-1} + \Gamma\Delta\mathbf{Z} + \mathbf{u}$$

Unter der Annahme, dass die Matrizen  $\mathbf{A}$  und  $\mathbf{B}$  bekannt wären, ist die Maximum-Likelihood-Schätzung durch die Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate gegeben und der Schätzer für  $\Gamma$  ist:

$$(20) \quad \hat{\Gamma} = (\Delta \mathbf{x} - \mathbf{A}\mathbf{B}'\mathbf{x}_{-1})\Delta\mathbf{Z}'(\Delta\mathbf{Z}\Delta\mathbf{Z}')^{-1}$$

Und setzen wir  $\mathbf{M} = \mathbf{I} - \Delta\mathbf{Z}'(\Delta\mathbf{Z}\Delta\mathbf{Z}')^{-1}\Delta\mathbf{Z}$ , wird der Schätzer (20) in Gleichung (19) eingesetzt und anschließend nach  $\Delta\mathbf{x}\mathbf{M}$  aufgelöst, ergibt sich das folgende Regressionsmodell:

$$(21) \quad \Delta\mathbf{x}\mathbf{M} = \mathbf{A}\mathbf{B}'\mathbf{x}_{-1}\mathbf{M} + \hat{\mathbf{u}}$$

Unter Berücksichtigung der Rangrestriktion  $\text{Rg}(\mathbf{A}\mathbf{B}') = r$ , können die Koeffizientenmatrizen  $\mathbf{A}$  und  $\mathbf{B}$  mittels einer „reduced rank regression“ nach Johansen<sup>16</sup> oder alternativ mit einer kanonischen Korrelationsanalyse bestimmt werden.<sup>17</sup>

### *Bestimmung des Rangs von $\Pi$*

Das Johansen-Verfahren, so wie es in der Software Microfit angewendet wird, bestimmt den für die Modellschätzung benötigten Rang von  $\Pi$  über die Anzahl der signifikant von Null verschiedenen Eigenwerte  $\lambda_i$  eines im Rahmen der Maximierung der Likelihoodfunktion für die Modellschätzung auftretenden Eigenvektorproblems.

Der Einfachheit halber soll dieser Zusammenhang hier nur im Fall des einfachsten VECM ohne Konstante, Trend und verzögerte Differenzen skizziert werden.<sup>18</sup>

$$\Delta \mathbf{x}_t = \Pi \mathbf{x}_{t-1} + \mathbf{u}_t \text{ oder gleichbedeutend}$$

$$(22) \quad \Delta \mathbf{x}_t = \mathbf{A}\mathbf{B}'\mathbf{x}_{t-1} + \mathbf{u}_t$$

<sup>16</sup> Eine kompakte Darstellung der „reduced rank regression“ ist in Johansen (1988) zu finden. Hansen / Johansen (1998) geben eine ausführliche Beschreibung dieses Verfahrens (vgl. Hansen / Johansen (1998), S. 71-85).

<sup>17</sup> Vgl. Lütkepohl (2006), S. 295.

<sup>18</sup> Die Details für die erweiterten Modelle können bei Pesaran / Pesaran (2009, S. 499-502) nachgelesen werden.

Johansen (1995) zeigt, dass die konzentrierte Likelihoodfunktion

$$(23) \quad l(\mathbf{B}) = -\frac{Tn}{2} \ln(2\pi) - \frac{Tn}{2} - \frac{T}{2} \ln \det(\mathbf{S}_{00} - \mathbf{S}_{01} \mathbf{B} (\mathbf{B}' \mathbf{S}_{11} \mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}' \mathbf{S}_{10})$$

für die Vektoren von  $\mathbf{B}$  bei gegebenem  $\mathbf{A}$  als Eigenvektoren des Problems

$$(24) \quad \det(\lambda \mathbf{S}_{11} - \mathbf{S}_{10} \mathbf{S}_{00}^{-1} \mathbf{S}_{01}) = 0$$

gefunden werden können. Dabei sind die  $\mathbf{S}_{ij}$  die Momentenmatrizen für die Regression des Differenzvektors  $\Delta \mathbf{x}$  bezüglich den verzögerten Variablen  $\mathbf{x}_{t-1}$ , nämlich

$$(25) \quad \begin{aligned} \mathbf{S}_{00} &= \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \Delta \mathbf{x}_t \Delta \mathbf{x}_t' & \mathbf{S}_{01} &= \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \Delta \mathbf{x}_t \mathbf{x}_{t-1}' \\ \mathbf{S}_{10} &= \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \mathbf{x}_{t-1} \Delta \mathbf{x}_t' & \mathbf{S}_{11} &= \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \mathbf{x}_{t-1} \mathbf{x}_{t-1}' \end{aligned}$$

wobei geeignete Startvektoren  $\mathbf{x}_0$  festgelegt werden müssen.<sup>19</sup>

Die Lösung des Problems (24) ergeben sich dann rechnerisch einfacher als die  $n$  Eigenwerte der Matrix

$$(26) \quad \mathbf{S} = \mathbf{S}_{00}^{-1} \mathbf{S}_{01} \mathbf{S}_{11}^{-1} \mathbf{S}_{10}.$$

Johansen nutzt den Fakt, dass  $r = \text{Rg}(\hat{\mathbf{\Pi}})$  mit der Anzahl der von Null verschiedenen Eigenwerte von  $\mathbf{S}$  übereinstimmt. Für die Praxis gilt folglich, dass als Anzahl der Kointegrationsvektoren  $r$  die Zahl der von Null verschiedenen geschätzten Eigenwerte  $\hat{\lambda}_i$  der Matrix  $\mathbf{S}$  genommen wird. Die  $n$  geschätzten Eigenwerte werden der Größe nach geordnet:  $\hat{\lambda}_1 \geq \hat{\lambda}_2 \geq \dots \geq \hat{\lambda}_n$ . Anschließend wird getestet, wie viele Eigenwerte signifikant größer Null sind. Die im Folgenden skizzierten Kointegrationstests nutzen die ermittelten Eigenwerte. Wie beschrieben, liegt Kointegration vor, wenn der Rang  $r$  von  $\hat{\mathbf{\Pi}}$  größer als Null, aber kleiner als  $n$  ist.

Zur Bestimmung von  $r$  stehen zwei verschiedene Likelihood-Quotienten-Testverfahren mit sequentieller Testprozedur zur Auswahl, die sich im Wesentlichen in der Formulierung der Alternativhypothese unterscheiden:

<sup>19</sup> Vgl. Neusser (2009), S. 227.

## (i) Der Trace-Test

Die Null- bzw. Alternativhypothese sind in diesem Test:

$H_0$  : Es gibt höchstens  $r$  positive Eigenwerte.

$H_1$  : Es gibt mehr als  $r$  positive Eigenwerte.

Die Teststatistik ist gegeben durch

$$(27) \quad \text{Trace}(r) = -T \sum_{i=r+1}^n \ln(1 - \hat{\lambda}_i)$$

mit  $T$  Beobachtungen,  $n$  als Anzahl der Variablen im System und  $\hat{\lambda}_i$  als die geschätzten Eigenwerte von  $\mathbf{S}$  in (26). Die Eigenwerte  $\lambda_{r+1}, \dots, \lambda_n$  sind unter der Nullhypothese gleich Null, wodurch die Teststatistik ebenfalls nahe bei Null liegen müsste.

## (ii) Der Maximale-Eigenwert-Test

Die Hypothesen lauten hier:

$H_0$  : Es gibt genau  $r$  positive Eigenwerte.

$H_1$  : Es gibt genau  $r + 1$  positive Eigenwerte.

Die Teststatistik ist gegeben durch

$$(28) \quad \lambda_{\max}(r, r+1) = -T \ln(1 - \hat{\lambda}_{r+1}).$$

Die Testfolge beginnt mit  $r = 0$  und wird so lange fortgesetzt, bis die Nullhypothese zu einem gegebenen Signifikanzniveau zum ersten Mal nicht abgelehnt werden kann. Damit gibt es  $(n - r)$  nichtstationäre Relationen (stochastische Trends) im System. Der Maximale-Eigenwert-Test weist gegenüber dem Trace-Test den Vorteil der schärfer formulierten Gegenhypothese auf und findet in diesem Beitrag Anwendung. Ebenso wie Integrationstests sind Kointegrationstests sensitiv gegenüber der Einbeziehung von deterministischen Termen. Die Teststatistiken folgen keiner bekannten Standardverteilung und hängen von der im  $\text{VAR}(p)$  enthaltenen Deterministik und der gewählten Spezifikation der deterministischen Terme (Konstante und/oder Trend im Modell oder speziell in der langfristigen Gleichgewichtsbeziehung) des zugehörigen Vektorfehlerkorrekturmodells ab. Die kritischen Werte beider Tests sind u.a. bei Juselius (2006) tabelliert.

Ist der Rang von  $\hat{\Pi}$  gefunden, können unter Anwendung einer Normalisierung die dazugehörigen normierten Eigenvektoren  $\hat{\mathbf{b}}_i$  des Problems (24), die zu den geschätzten  $r$  größten Eigenwerten  $\hat{\lambda}_1, \dots, \hat{\lambda}_r > 0$  gehören, berechnet werden:

$$(29) \quad \hat{\mathbf{B}} = [\hat{\mathbf{b}}_1, \dots, \hat{\mathbf{b}}_r]$$

Diese sind ML-Schätzer für die Spalten der Matrix  $\mathbf{B}$ . In einem Kointegrationsraum mit  $n$  I(1)-Variablen und dem Kointegrationsrang  $r$  sind asymptotisch nur  $r$  Eigenwerte positiv und die restlichen  $n - r$  Eigenwerte Null.<sup>20</sup> Für  $r = 1$  führt die Normalisierung zu einer Restriktion des ersten Koeffizienten von  $\hat{\mathbf{B}}$  auf den Wert 1. Im Weiteren lässt sich aus  $\hat{\mathbf{B}}$  wie folgt die Ladungsmatrix  $\hat{\mathbf{A}}$  schätzen, die bisher einfach als gegeben betrachtet wurde:

$$(30) \quad \hat{\mathbf{A}} = \Delta \mathbf{x} \mathbf{M} \mathbf{x}'_{-1} \hat{\mathbf{B}} (\hat{\mathbf{B}}' \mathbf{x}_{-1} \mathbf{M} \mathbf{x}'_{-1} \hat{\mathbf{B}})^{-1}$$

Mithilfe der Matrizen  $\hat{\mathbf{A}}$  und  $\hat{\mathbf{B}}$  können anschließend aus (20) die Matrizen der Kurzfristdynamik geschätzt werden:

$$(31) \quad \hat{\Gamma} = (\Delta \mathbf{x} - \hat{\mathbf{A}} \hat{\mathbf{B}}' \mathbf{x}_{-1}) \Delta \mathbf{Z}' (\Delta \mathbf{Z} \Delta \mathbf{Z}')^{-1}$$

Der entsprechende Schätzer von  $\Pi$  ist  $\hat{\Pi} = \hat{\mathbf{A}} \hat{\mathbf{B}}'$ .

Die geschätzten Vektoren von  $\hat{\mathbf{B}}$  sind multivariat normalverteilt und konvergieren mit der Rate  $T$  superkonsistent gegen ihre „wahren“, aber unbekanntenen Werte.<sup>21</sup> Daher können unter Verwendung einer angepassten Kovarianzmatrix t-Werte berechnet werden. Im Gegensatz dazu strebt der Schätzer von  $\hat{\mathbf{A}}$  mit  $\sqrt{T}(\hat{\mathbf{A}} - \mathbf{A})$  gegen  $\mathbf{A}$ . Die Schätzer der Koeffizienten der Kurzfristdynamik  $\hat{\Gamma}$  sind ebenfalls konsistent und konvergieren mit  $\sqrt{T}$  gegen ihre „wahren“ Werte, sodass die übliche t-Statistik genutzt werden kann. Die asymptotischen Eigenschaften der  $\Gamma_i$ -Koeffizientenmatrizen sind unabhängig davon, ob die Rangrestriktion für  $\mathbf{A}\mathbf{B}$  berücksichtigt wird. Durch die Berücksichtigung der Kointegrationsrestriktionen lassen sich die asymptotischen Eigenschaften der Schätzer des vektorautoregressiven (VAR)-Modells (9) im Allgemeinen (speziell in großen Stichproben) nicht verbessern.<sup>22</sup>

<sup>20</sup> Vgl. Kirchgässner / Wolters (2006), S. 200.

<sup>21</sup> Vgl. Lütkepohl (2006), S. 288, 296.

<sup>22</sup> Vgl. Sims / Stock / Watson (1990).

Unter ziemlich allgemeinen Bedingungen können also die Koeffizientenmatrizen  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  und schließlich auch  $\mathbf{\Gamma}_i$  mit der Kleinst-Quadrat-Methode (LS) bzw. mit Maximum Likelihood (ML) geschätzt werden.<sup>23</sup> Im folgenden Kapitel dieses Beitrags wird die ML-Methode verwendet, die als Johansen-Verfahren hier skizziert wurde und zum Beispiel in dem Programmpaket MICROFIT angeboten wird. Die Einzelheiten dieser Methode und ihre zahlreichen Varianten sind u.a. im Handbuch von MICROFIT umfassend und praxisnah dargestellt.<sup>24</sup>

Die Darstellung mit gemeinsamen Trends (CT-Form) kann über ein zweistufiges Vorgehen aus der VAR- oder VECM-Form abgeleitet werden.<sup>25</sup> Im ersten Schritt müssen die Koeffizienten des Vektorfehlerkorrekturmodells geschätzt werden. Im zweiten Schritt werden aus den Schätzern die Parameter der CT-Form berechnet.

Das Vektorfehlerkorrekturmodell in (19) kann durch verschiedene Annahmen über Absolutglieder und deterministische Trends ergänzt werden, die bei der Schätzung in (20) berücksichtigt werden. So kann wie in (15) ein Vektor von individuellen Konstanten  $\boldsymbol{\mu}$  in das VECM aufgenommen werden. Unterliegt dieser Konstantenvektor keinen Restriktionen, entsprechen sie linearen deterministischen Trends in den Niveauvariablen. Können derartige Trends für die den Zeitreihen zugrundeliegenden ökonomischen Größen ausgeschlossen werden, besteht – wie in (32) dargestellt – die Möglichkeit, die Absolutglieder auf die kointegrierende Beziehung zu beschränken:

$$\Delta \mathbf{x}_t = \mathbf{A} \mathbf{B}^* \mathbf{x}_{t-1}^* + \sum_{i=1}^{p-1} \mathbf{\Gamma}_i \Delta \mathbf{x}_{t-i} + \mathbf{u}_t \quad (32)$$

$$\text{mit } \mathbf{B}^* = \begin{bmatrix} \beta_{11} & \cdots & \beta_{r1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_{1n} & \cdots & \beta_{rn} \\ \mu_1 & \cdots & \mu_r \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{x}_{t-1}^* = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{t-1} \\ 1 \end{bmatrix}$$

Alternativ könnten neben oder anstelle der Konstanten lineare Trends in  $\mathbf{B}^*$  aufgenommen werden. Grundsätzlich können Konstante und Trend entweder innerhalb der Kointegrationsbeziehung (restringiert) oder außerhalb der Kointegrationsbeziehung (unrestringiert) in das Vektorfehlerkorrekturmodell aufgenommen werden.

<sup>23</sup> Vgl. Lütkepohl (2006), S. 269-323.

<sup>24</sup> Vgl. Pesaran / Pesaran (2009), S. 496-510.

<sup>25</sup> Vgl. Neusser (2009), S. 222-225.

In Abhängigkeit der Spezifikation der deterministischen Terme werden zum Beispiel in MICROFIT die folgenden fünf Fälle unterschieden:<sup>26</sup>

1. Keine Konstante und kein Trend im VAR, und keine Konstante und kein Trend in der Kointegrationsbeziehung.
2. Keine Konstante und kein Trend im VAR, und Konstante aber kein Trend in der Kointegrationsbeziehung.
3. Konstante und kein Trend im VAR, und keine Konstante und kein Trend in der Kointegrationsbeziehung.
4. Konstante und kein Trend im VAR, und keine Konstante aber ein Trend in der Kointegrationsbeziehung.
5. Konstante und Trend im VAR, und keine Konstante und kein Trend in der Kointegrationsbeziehung.

Für Zeitreihen, die in den Niveaus keinen deterministischen Trend aufweisen, sind die Fälle 1 und 2 von Bedeutung, wobei das Modell mit Konstante in der Kointegrationsbeziehung von praktischer Relevanz ist. In den Fällen 3 und 4 enthalten die Zeitreihen in den Niveaus deterministische Trends, wobei das Modell mit Trend in der Kointegrationsbeziehung für die trendbehafteten Daten von praktischer Bedeutung ist. Im Fall 5 enthalten die Zeitreihen in ihren Niveaus quadratische Trends. Eine für die Mehrzahl der volkswirtschaftlichen Daten wenig realistische Annahme.

Von dem Variablenvektor  $\mathbf{x}_t$  muss gefordert werden, dass er vektorintegriert der Ordnung 1 (I(1)) ist, d.h., dass der Vektor der Veränderungen  $\Delta\mathbf{x}_t$  vektorstationär ist, was eine multivariate Verschärfung der einfachen Stationarität ist.<sup>27</sup> Für den Zweck dieses Beitrags soll es aber im empirischen Teil ausreichen, nachzuweisen, dass jede einzelne Variable für sich genommen integriert ist. Dafür wird der erweiterte Dickey-Fuller-Test (ADF) genutzt.

---

<sup>26</sup> Vgl. Pesaran / Pesaran (2009), S. 129.

<sup>27</sup> Vgl. Lütkepohl (2006), S. 25f.

## 5 Beveridge-Nelson-Dekomposition

Die VAR-Darstellung eines integrierten multivariaten Prozesses bietet eine weitere interessante Zerlegung an, nämlich die in eine nichtstationäre (permanente) Komponente, die selbst wieder aus dem deterministischen und dem stochastischen Trend besteht, und eine transitorische Komponente, die stationär ist und leicht als zyklische Komponente zu interpretieren ist.

Beveridge und Nelson (1981) zeigten, dass ein ARIMA-Prozess  $x_t$  mit stationären 1. Differenzen, die sich entsprechend dem Woldschen Zerlegungssatz als unendlicher MA-Prozess darstellen lässt<sup>28</sup>,

$$(33) \quad \Delta x_t = \mu + \varepsilon_t + \varphi_1 \varepsilon_{t-1} + \varphi_2 \varepsilon_{t-2} + \dots, \quad \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i < \infty,$$

mit  $\mu$  als langfristigem mittlerem Zuwachs und weißem Rauschen  $\varepsilon_t$ , zerlegt werden kann in der Form

$$(34) \quad x_t = x_t^P + x_t^Z,$$

wobei  $x_t^P$  ein Random Walk, also ein stochastischer Trend mit einem Drift  $\mu$  ist:

$$(35) \quad x_t^P = \mu + x_{t-1}^P + \left( \sum_{i=0}^{\infty} \varphi_i \right) \varepsilon_t.$$

Beveridge und Nelson beweisen<sup>29</sup>, dass die Differenz zwischen dem Prozess  $x_t$  und seiner nichtstationären Komponente  $x_t^P$

$$(36) \quad x_t^Z = x_t - x_t^P = \left( \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i \right) \varepsilon_t + \left( \sum_{i=2}^{\infty} \varphi_i \right) \varepsilon_{t-1} + \left( \sum_{i=3}^{\infty} \varphi_i \right) \varepsilon_{t-2} + \dots$$

stationär ist. Sie wird auch als zyklische Komponente bezeichnet. Es lässt sich leicht zeigen, dass eine ähnliche Zerlegung auch unter Hinzufügung eines deterministischen Trends möglich ist. Dieser wird dann ebenfalls der permanenten Komponente zugerechnet.

<sup>28</sup> Vgl. Beveridge / Nelson (1981), S. 155f.

<sup>29</sup> Vgl. Beveridge / Nelson (1981), S. 156.

Die Beveridge-Nelson-Zerlegung lässt sich auf VAR-Prozesse verallgemeinern und insbesondere in die Analyse von Vektorfehlerkorrekturmodellen integrieren. Im empirischen Teil dieses Beitrags wird die Modifikation verwendet, die Pesaran und Pesaran (2009) entwickelt haben. Da sich hier die Resultate, bezogen auf die einzelnen I(1)-Variablen  $x_{it}$  eines Vektorprozesses  $\mathbf{x}_t$  ganz analog zu der Zerlegung (34) interpretieren lassen, soll auf die komplexe Herleitung des multivariaten Schätzverfahrens an dieser Stelle verzichtet und auf die Literatur verwiesen werden.<sup>30</sup>

Die Bestimmung der multivariaten zyklischen Komponente erfordert zunächst eine adäquate Spezifikation des Vektorfehlerkorrekturmodells, insbesondere seiner Restriktionen bezüglich des Vorhandenseins von Konstanten oder linearer Trends im Fehlerkorrekturmodell oder den kointegrierenden Beziehungen, wofür das Johansen-Verfahren geeignet ist.

Zwischen den extrahierten zyklischen Komponenten der integrierten Einzelvariablen  $x_{it}$  eines Vektorprozesses  $\mathbf{x}_t$  können Zusammenhänge z.B. in Form einer Korrelationsanalyse oder einer linearer Regressionsbeziehung analysiert werden. Dadurch entsteht ein dritter Aspekt des Zusammenhangs zwischen kointegrierten Variablen: Wenn die kointegrierenden Beziehungen oder die kointegrierenden Vektoren in  $\mathbf{B}$  für die langfristigen Zusammenhänge und die Koeffizienten der verzögerten Differenzen in  $\mathbf{\Gamma}$  für die kurzfristigen Zusammenhänge im Fehlerkorrekturmodell sprechen, können die Regressionskoeffizienten zwischen den zyklischen Komponenten als mittelfristige Zusammenhänge interpretiert werden. Unter Verwendung von Begriffen der Spektralanalyse kann gesagt werden, dass sie einen Blick durch ein mittleres Frequenzfenster auf das komplexe Zusammenhängegefüge zwischen den Einzelvariablen erlauben, während die permanente Komponente Resultat eines Niederfrequenzfensters sind und die Zusammenhänge zwischen den ersten Differenzen dem Hochfrequenzfenster entsprechen können.

---

<sup>30</sup> Vgl. Pesaran / Pesaran (2009), S. 518-521.

## 6 Empirie Konsum und Aktienmarkt

Im Zentrum dieser Untersuchung steht der Variablenvektor  $\mathbf{x}_t = \begin{bmatrix} \ln C_t \\ \ln E_t \\ \ln DAX_t \end{bmatrix}$  für

Deutschland vom 1. Quartal 1991 bis zum 4. Quartal 2008.

Darin sind

$E$  - verfügbares Einkommen, preis-, kalender- und saisonbereinigt, in Mrd. Euro

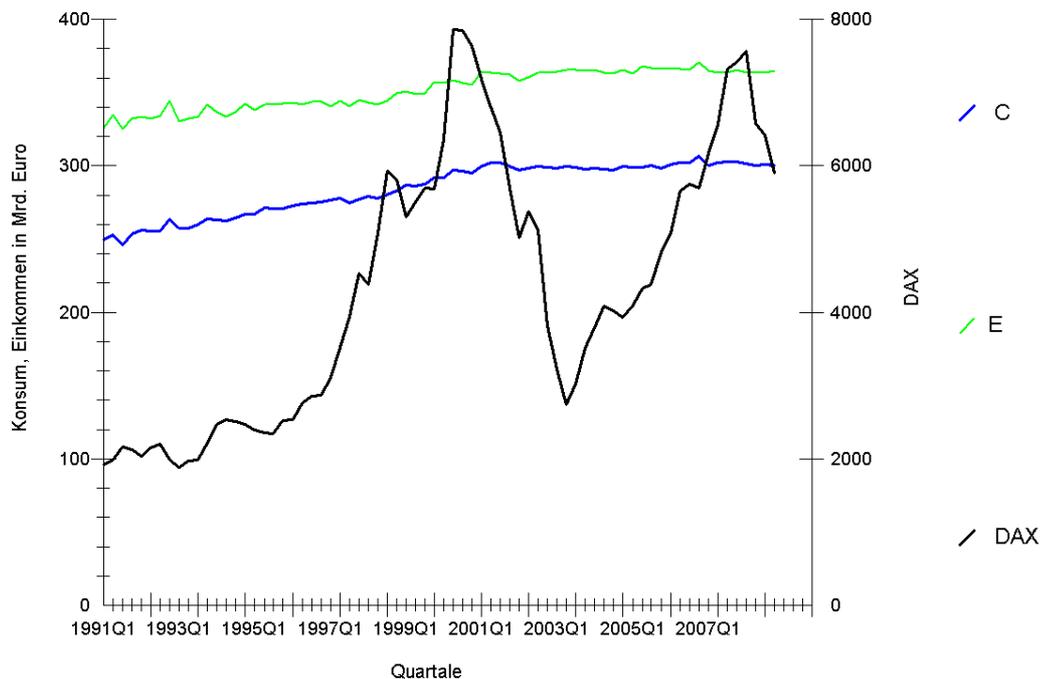
$C$  - Konsumausgaben der privaten Haushalte, preis-, kalender- und saisonbereinigt, in Mrd. Euro

$DAX$  - Deutscher Aktienindex, preisbereinigte gemittelte Monatsendstände, wird hier stark verallgemeinernd als Vermögensindikator betrachtet.

Ausgangspunkt der empirischen Analyse bildet die folgende gesamtwirtschaftliche Konsumfunktion

$$(37) \quad \ln C_t = \beta_1 + \beta_2 \ln E_t + \beta_3 \ln DAX_t,$$

für die Logarithmen des Verbrauchs.



**Abb. 1:** Zeitreihen von Konsum  $C$  und verfügbarem Einkommen  $E$  in Deutschland sowie des Deutschen Aktienindex  $DAX$ .

In Form eines Vektorfehlerkorrekturmodells (VECM) kann die obige Konsumfunktion verallgemeinert werden. Es ist geeignet, die wechselseitige Beziehung zwischen dem Einkommen, dem Konsum und dem DAX in ein ökonometrisches Mehrgleichungsmodell zu fassen. In diesem wird nicht nur das Konsumverhalten – theoretisch gespalten in eine langfristig Konsumfunktion und die kurzfristige Konsumdynamik, die vor dem Hintergrund des langfristigen Gleichgewichts ständig korrigiert wird – erklärt; sondern darüber hinaus werden mögliche Feedback-Effekte wie der Einfluss des Konsums auf die Entwicklung der Aktienkurse sowie die Auswirkungen des Konsums und des DAX der Vorperiode auf das Einkommenswachstum als Indikator der konjunkturellen Entwicklung erfasst.

Über die Budgetrestriktion der Haushalte sind Konsum und Einkommen miteinander verknüpft. Entsprechend der Lebenszyklus-Hypothese von Modigliani und der permanenten Einkommenshypothese von Friedman hängen die Konsumausgaben der Wirtschaftssubjekte nicht nur vom laufenden Einkommen ab – wie bei Keynes –, sondern vielmehr vom langfristig erwarteten Einkommensstrom sowie vom Vermögen.<sup>31</sup> Da die zukünftigen Einkommensströme mit Unsicherheit behaftet sind, bilden die Haushalte Erwartungen. Die Aktienkurse fungieren als Frühindikator der gesamtwirtschaftlichen Entwicklung. In den Kursbewegungen spiegeln sich die Erwartungen der Marktteilnehmer bezüglich der Gewinnentwicklung der Unternehmen wider. Diese, übertragen auf die Gesamtwirtschaft, wirken sich auf das Verbrauchervertrauen und die Einschätzung der Wirtschaftssubjekte bezüglich der Unsicherheit der künftigen wirtschaftlichen Bedingungen aus. Dementsprechend stellt die Entwicklung der Börsenkurse einen Indikator dar, der die zukünftige Veränderung der Einkommen der Haushalte und damit der Konsummöglichkeiten anzeigt. Trotzdem wird der Verbrauch natürlich auf lange Frist maßgeblich vom Einkommen determiniert.

Unter Vernachlässigung der Deterministik resultiert in Anlehnung an Gleichung (16) folgende allgemeine Fehlerkorrektur-Darstellung:

(38)

$$\begin{pmatrix} \Delta c_t \\ \Delta e_t \\ \Delta dax_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} \cdot (\beta_1 \ \beta_2 \ \beta_3) \cdot \begin{pmatrix} c_{t-1} \\ e_{t-1} \\ dax_{t-1} \end{pmatrix} + \sum_{i=1}^{p-1} \Gamma_i \begin{pmatrix} \Delta c_{t-i} \\ \Delta e_{t-i} \\ \Delta dax_{t-i} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_{1t} \\ u_{2t} \\ u_{3t} \end{pmatrix}$$

<sup>31</sup> Vgl. Nastansky (2008), S. 86-96.

Kleine Buchstaben bezeichnen der Übersichtlichkeit halber den natürlichen Logarithmus der jeweiligen Variablen. Der Zeilenvektor  $\mathbf{B}' = [\beta_1 \ \beta_2 \ \beta_3]$  beinhaltet die Koeffizienten der langfristigen Gleichgewichtsbeziehung zwischen DAX, Einkommen und Konsum, wobei hier angenommen wird, dass  $r = 1$  ist. Der Koeffizient  $\beta_2$  misst die Einkommenselastizität des Konsums. Der Parameter  $\beta_3$  bildet den DAX- oder Vermögenseffekt (DAX/Vermögenselastizität bei logarithmierten Größen) im Konsum ab.

Bevor das VECM mit dem Johansen-Verfahren geschätzt wird, muss unter anderem getestet werden, ob alle Variablen integriert der Ordnung Eins,  $I(1)$ , sind. Der Nachweis des Integrationsgrades kann durch Integrationstests wie dem Dickey-Fuller-Test (DF-Test) bzw. bei autokorrelierten Störtermen mit dem Augmented Dickey-Fuller-Test (ADF-Test) erbracht werden.

**Tabelle 1: Ergebnisse des Augmented Dickey-Fuller-Tests**

Variable	Regression	Lags	Test-Statistik	95% Kritischer Wert	
$\ln C$	K,T	2	-0.5930	-3.4749	ns
$\ln E$	K,T	3	-0.5246	-3.4759	ns
$\ln DAX$	K,T	1	-1.9685	-3.4739	ns
$\Delta \ln C$	K	1	-8.9525	-2.9035	s
$\Delta \ln E$	K	2	-8.4378	-2.9042	s
$\Delta \ln DAX$	K	0	-5.1228	-2.9029	s

Bemerkung: Schwarz-Bayes-Kriterium zur Festlegung der Ordnung des ADF-Tests.  
Die Dickey-Fuller-Regression beinhaltet eine Konstante (K) und /oder einen linearen Trend (T). ns – nichtstationär, s - stationär

Die nichtstationären Logarithmen der Variablen im oberen Teil der Tabelle 1 konnten durch Bildung der ersten Differenzen in stationäre Prozesse überführt werden. Daher können die Variablen der Tabelle 1 aufgrund der Testdaten als integriert der Ordnung Eins,  $I(1)$ , betrachtet werden. Da die ersten Differenzen von natürlichen Logarithmen eine Approximation der Wachstumsraten sind, haben somit alle drei Variablen stationäre Wachstumsraten. Im nächsten Abschnitt wird überprüft, ob die Zeitreihen auch kointegriert (gemeinsam integriert) sind, d.h. zu einem stabilen langfristigen Gleichgewicht tendieren.

Die Wahl der Lagordnung des Vektorfehlerkorrekturmodells gründet auf dem Vergleich der ausgewiesenen Effizienz der Schätzung variierender VAR-Modelle anhand von Informationskriterien. Für  $p = 3$  wird der höchste Wert des Schwarz-Bayes-Kriteriums (Likelihood-Version) gefunden. Zusätzlich wird ein Trend aber keine Konstante in die kointegrierende Beziehung aufgenommen (Fall 4). Die Aufnahme eines linearen Trends soll das deterministische Trendverhalten der betrachteten makroökonomischen Größen auffangen (vgl. Abb. 1). Da das Modell mehr als zwei  $I(1)$ -Variablen enthält, muss zuerst die Anzahl der kointegrierenden Beziehungen, der Kointegrationsrang  $r$ , bestimmt werden. Der Maximale-Eigenwert-Test und der Trace-Test dienen als Entscheidungsgrundlage.

**Tabelle 2: Ergebnisse des Johansen-Kointegrationstests**

$H_0$	Max.-Eigenwert-Test	Kritischer Wert (95%)	Trace-Test	Kritischer Wert (95%)
$r = 0$	32.81	25.24	49.51	42.34
<b><math>r \# 1</math></b>	12.32	19.22	16.70	25.77
$r \# 2$	4.38	12.39	4.38	12.39

Bemerkung:  $r$  ist die Anzahl der kointegrierenden Beziehungen.

Die Tests zeigen auf dem 5%-Niveau, dass zwischen den Logarithmen der drei Variablen Konsum, Einkommen und Deutscher Aktienindex genau eine signifikante kointegrierende Beziehung existiert (Tabelle 2). Im nächsten Schritt wird mit dem Johansen-Verfahren der eine kointegrierende Vektor geschätzt. Es handelt sich dabei um ein Maximum-Likelihood-Schätzung, die mit der Software MICROFIT ausgeführt wurde.<sup>32</sup> Eine mögliche Darstellung aus der Menge aller seiner äquivalenten Vielfachen

$$\text{ist } \hat{\beta} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1.45 \\ 0.05 \\ 0.001 \end{bmatrix}. \text{ Die Normierung von } \beta_1 \text{ auf } -1 \text{ erscheint willkürlich, ermöglicht es aber,}$$

die kointegrierende Beziehung doch wieder als Konsumfunktion (37) zu interpretieren. Dann würde der Schätzwert 1,45 für  $\beta_2$  die Einkommenselastizität des Konsums messen. Aber nach der zulässigen Division des Vektors durch -1,45 könnte formal ebenso eine Einkommensgleichung resultieren und analog eine DAX-Gleichung, da alle

<sup>32</sup> Vgl. Pesaran / Pesaran (2009), S. 500.

Vielfachen äquivalent sind, sofern sich die geschätzte stationäre Linearkombination durch Signifikanz in der jeweiligen Fehlerkorrekturgleichung auszeichnet. Aus der ML-Schätzung der Matrix **B**, d.h. hier des Vektors **β**, kann folgende langfristige Konsumgleichung (Kointegrationsbeziehung) abgelesen werden:

$$(39) \quad \hat{c}_t = 1.45 e_t + 0.05 dax_t - 0.001t$$

(0.23)
(0.01)
(0.0004)

In den Klammern sind die geschätzten Standardfehler der Koeffizienten angegeben. Kleine Buchstaben bezeichnen den natürlichen Logarithmus der jeweiligen Variablen. Für die Zeit nach der Deutschen Einheit im Jahr 1990 wurden in Deutschland signifikant (5%) positive, aber schwache Vermögenseffekte aus der Entwicklung am Aktienmarkt nachgewiesen.<sup>33</sup> Die Zunahme des DAX um 10% zieht im Mittel einen Anstieg der realen Konsumausgaben um 0,5% nach sich. Wie zu erwarten war, ist das laufende verfügbare Einkommen der maßgebliche Faktor zur Erklärung des Konsums. Die geschätzte Einkommenselastizität beträgt 1,45. Bei konstantem DAX erhöhen die privaten Haushalte ihre Konsumausgaben durchschnittlich um 1,45%, wenn das verfügbare Einkommen um 1% zunimmt.

Die empirische Analyse hat also gezeigt, dass die Größen der gesamtwirtschaftlichen Konsumfunktion einem gemeinsamen stochastischen Trend folgen, d.h. kointegriert sind. Abgesehen von vorübergehenden Schwankungen, bewegen sich die Variablen nicht dauerhaft voneinander weg. Abweichungen des Konsums vom langfristigen Gleichgewicht, z.B. hervorgerufen durch temporäre Schocks, sind nur von kurzer Natur und unterliegen in den Folgeperioden einer systemimmanenten Rückbildung, so dass der Konsum über die Zeit zum langfristigen Gleichgewicht zurückkehrt. Die Matrix **A**

wird in diesem Modell zu einem Spaltenvektor  $\alpha = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix}$  und beschreibt, wie die

einzelnen Variablen im Vektor  $\Delta x_t$  auf Abweichungen von der durch **B** (hier nur **β**) gebildeten Gleichgewichtsbeziehung in der Vorperiode reagieren. Dieser Prozess kann als Fehlerkorrekturmechanismus modelliert werden.

---

<sup>33</sup> Vgl. Nastansky / Strohe (2010), S. 8.

Für das geschätzte Vektorfehlerkorrekturmodell ergeben sich – unter Vernachlässigung der auf dem 5%-Niveau nichtsignifikanten Variablen (in der  $i$ -ten Gleichung der Übersichtlichkeit halber zusammengefasst als Lagged Differences  $LD_i$ ) – folgende Fehlerkorrekturgleichungen:<sup>34</sup>

$$\begin{aligned}
 \Delta \hat{c}_t &= -0.95 - 0.41 \Delta c_{t-1} - 0.45 \Delta c_{t-2} + LD_1 + 0.29 ecm_{t-1} \\
 &\quad (0.25) \quad (0.18) \quad (0.18) \quad (0.08) \\
 \Delta \hat{e}_t &= -0.44 \Delta e_{t-1} + LD_2 + 0.13 ecm_{t-1} \\
 &\quad (0.21) \quad (0.09) \\
 \Delta \hat{dax}_t &= 5.58 + 0.51 \Delta dax_{t-1} + LD_3 - 1.71 ecm_{t-1} \\
 &\quad (2.48) \quad (0.12) \quad (0.76)
 \end{aligned}
 \tag{40}$$

mit  $ecm_t = -1c_t + 1.45e_t + 0.05dax_t - 0.001t$

Die entscheidende Variable  $ecm_t$  (von „error correction model“) beinhaltet die geschätzten Werte der stationären Linearkombination  $\beta'x_{t-1}$  und ist die Abweichung von der Gleichgewichtsbeziehung (39). Allgemein gesehen entspricht sie dem Vektor  $z_t$  in Gleichung (6). In den Koeffizienten dieser Abweichungen (Fehler)  $ecm_{t-1}$  aus dem Vorquartal erkennen wir die Schätzwerte des Vektors  $\alpha$  bzw. allgemeiner der Matrix  $A$ :

$$\hat{\alpha} = \begin{bmatrix} 0,29 \\ 0,13 \\ -1,71 \end{bmatrix}$$

Mithilfe des t-Tests kann dann die Signifikanz der einzelnen Variablen

geprüft werden. Der geschätzte Koeffizient  $\hat{\alpha}_1 = 0,29$  des Fehlerkorrekturterms ( $ecm$ ) in der Konsumwachstumsgleichung hat das erwartete Vorzeichen (positiv, da  $\beta_1 = -1$ ) und ist signifikant (5%) von Null verschieden – was auf eine tendenzielle Verringerung des Konsumwachstums nach einem Konsumüberschuss im Vorquartal (bezogen auf die Gleichgewichtsbeziehung) hindeutet. Durchschnittlich werden theoretisch 29% des „Fehlers“ bezüglich des Nullwertes der Gleichgewichtsbeziehung, also des „Ungleichgewichts“ in der Vorperiode, pro Quartal abgebaut. Die Zahl ist nicht buchstäblich zu interpretieren. Sie ist eine theoretische statistische Maßzahl, ein Mittelwert, für die Dynamik des Korrekturprozesses. Im praktischen Einzelfall ist dieser lange Korrekturverlauf nicht nachzuvollziehen, weil er oft schon im nächsten Quartal durch einen neuen Fehler mit einer eigenen Korrektur überlagert wird.

Die im Prinzip etwas willkürliche Interpretation der kointegrierenden Beziehung als Konsumfunktion wird nachfolgend durch Vorzeichen und die Signifikanz des Korrekturterms in der Fehlerkorrekturgleichung für den Konsum gerechtfertigt. Auch die Entwicklung des Deutschen Aktienindex leistet einen Beitrag zur Korrektur des

<sup>34</sup> In den Klammern unter den Koeffizienten wurden ihre geschätzten Standardfehler angegeben.

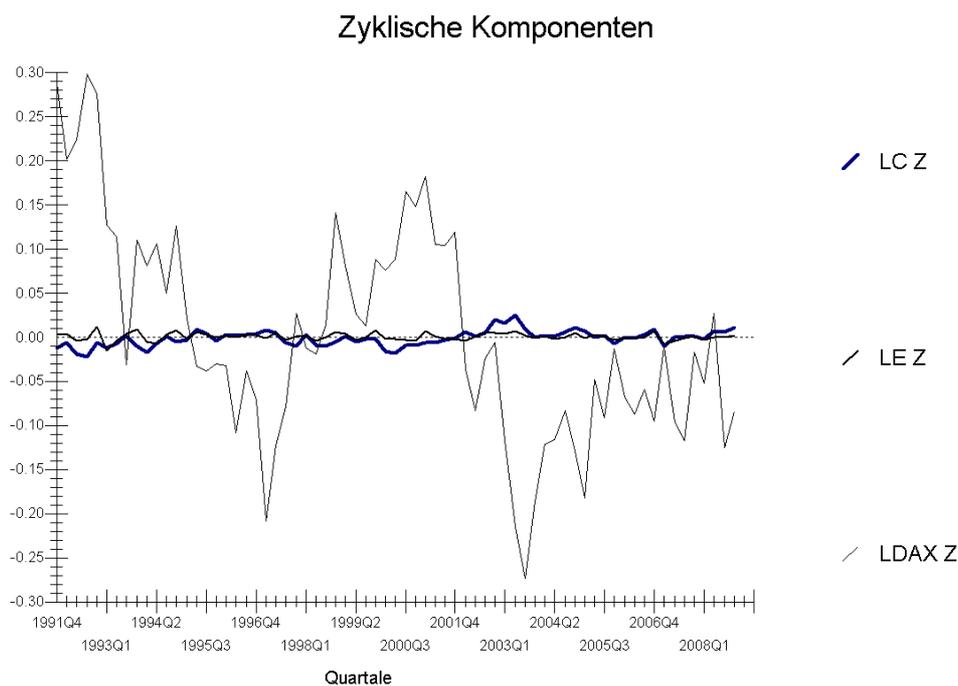
Gleichgewichtsfehlers, da der geschätzte Ladungsparameter von  $\alpha_3$  mit -1,71 ein negatives Vorzeichen hat. Nach Kursschwankungen am Aktienmarkt kehrt der DAX schnell wieder auf ein mittleres Niveau zurück. Der Koeffizient vor dem Fehlerkorrekturterm ( $\alpha_2$ ) in der zweiten Gleichung (Einkommen) ist nicht signifikant von Null verschieden. Mit seinem positiven Vorzeichen bei ebenfalls positiv gewichtetem Einkommen in der Gleichgewichtsbeziehung, würde er ohnehin nicht zur Korrektur eines Gleichgewichtsfehlers in der Vorperiode beitragen. Die Koeffizienten des Vektorfehlerkorrekturmodells zeigten, dass a-posteriori die Interpretation der Gleichgewichtsbeziehung im Sinne einer Konsumfunktion nicht nur theoretisch, sondern auch empirisch plausibler ist als im Sinne einer Einkommensfunktion.

Die t-Tests für weitere Koeffizienten der ersten Gleichung zeigen, dass – abgesehen vom Fehlerkorrekturterm – der Konsum lediglich langfristig (im logarithmiertem Niveau) vom Vermögenspreis DAX stimuliert wird. Kurzfristige Vermögenseffekte (Zusammenhänge zwischen den Wachstumsraten) konnten für Deutschland nach der Wiedervereinigung und bis zu Beginn der Weltfinanzkrise nicht ermittelt werden. Das Konsumwachstum wird von der um ein und zwei Quartale zurückliegenden Dynamik dämpfend beeinflusst. Das Einkommenswachstum hängt von der Wachstumsrate im Vorquartal negativ und die DAX-Rendite positiv von der eigenen Entwicklung in der Vorperiode ab.

Der Allgemeingültigkeit halber muss darauf hingewiesen werden, dass bei einem etwas anderen Verlauf der Variablen durchaus mehrere (hier 2) kointegrierende Beziehungen auftreten können, wodurch die Vektoren  $\alpha$  und  $\beta$  zu echten Matrizen  $\mathbf{A}$  und  $\mathbf{B}$  werden. In diesen Fällen kommen zum Beispiel in jeder der Gleichungen (40) mehrere Fehlerkorrekturglieder ( $ecm_{1t-1}$ ,  $ecm_{2t-1}$ , ...) vor.

Auf der Grundlage des geschätzten Vektorfehlerkorrekturmodells werden mittels der multivariaten Beveridge-Nelson-Dekomposition die zyklischen Komponenten der Größen der makroökonomischen Konsumfunktion extrahiert. Dem folgt eine Kleinst-Quadrat-Schätzung zur Quantifizierung der Abhängigkeit des transitorischen Konsums von den entsprechenden Reihen des verfügbaren Einkommens und des DAX. Ziel ist es, den Einfluss des Aktienmarktes auf die Konsumausgaben jenseits des gemeinsamen Trendverhaltens, d.h. im Zyklus, im Konjunkturverlauf, zu erklären.

Unter Berücksichtigung der langfristigen Gleichgewichtsbeziehungen werden bei der multivariaten BN-Dekomposition die drei gemeinsam integrierten Zeitreihen jeweils in einen stationären und einen nichtstationären Bestandteil (34) zerlegt. Der nichtstationäre permanente Teil kann entsprechend der Gleichung (35) in eine deterministische und eine stochastische Komponente unterteilt werden. Der stationäre Teil (36) ist hier von besonderem Interesse und wird auch als transitorische oder zyklische Komponente bezeichnet. Für die drei Zeitreihen sind Letztere in Abbildung 2 dargestellt.



**Abb. 2:** Transitorische (zyklische) Komponenten Konsum, verfügbarem Einkommen und DAX

Während die stationären Komponenten des Konsums und des verfügbare Einkommens im Beobachtungszeitraum 4. Quartal 1991 bis 4. Quartal 2008 nur geringe zyklische Schwankungen zeigen, ist der Verlauf der DAX-Komponente durch starke zyklische Bewegungen gekennzeichnet. Insbesondere in der Zeit nach der Wiedervereinigung, der Phase vor und nach dem Platzen der Technologieblase um das Jahr 2000 und im Krisenjahr 2003 war der Deutsche Aktienindex und im Weiteren der transitorische Bestandteil starken Schwankungen unterworfen. Abbildung 2 verdeutlicht, dass während der ersten beiden Phasen positive Werte für den DAX mit negativen Werten der zyklischen Komponenten des Konsums einhergingen.

Um die Abhängigkeiten im Zyklus zwischen den Größen der Konsumfunktion zu bestimmen, wird als Nächstes eine Regressionsbeziehung zwischen den mit OLS geschätzten stationären Komponenten vorgenommen.<sup>35</sup>

$$(41) \quad \hat{c}_t^Z = \underset{(0.15)}{0.76} e_t^Z - \underset{(0.005)}{0.05} dax_t^Z$$

Die transitorische Komponente des Konsums ( $c_t^Z$ ) ist im Beobachtungszeitraum signifikant (5%) negativ von der transitorischen Komponente des DAX abhängig. Die Reaktion der Konsumenten in Deutschland auf Schwankungen des Deutschen Aktienindex ist demnach bei spektralanalytischer Betrachtung vom Frequenzfenster abhängig. Eine Divergenz in der Beziehung zwischen den logarithmierten Niveaus, den Wachstumsraten und den zyklischen Komponenten wird sichtbar. Während die Konsumausgaben der privaten Haushalte in Deutschland seit der Wiedervereinigung langfristig, d.h. im Niedrigfrequenzfenster, positiv vom DAX beeinflusst werden, zeigt sich in den zyklischen Bewegungen, dem Mittelfrequenzfenster, eine schwache negative Abhängigkeit. Demnach scheinen Vermögenspreiseffekte im Konsum nur langfristig zum Tragen zu kommen. Auch zwischen Wachstumsraten in der Fehlerkorrekturgleichung, dem Hochfrequenzfenster, des Konsums konnten keine kurzfristigen Vermögenspreiseffekte gefunden werden. In den zyklischen Bewegungen reagieren die Konsumenten auf einen steigenden DAX nicht mit einer Expansion des Verbrauchs. Unter Umständen können stark schwankende Aktienmärkte die Wirtschaftssubjekte verunsichern und das Konsumverhalten beeinträchtigen: In Anbetracht der starken Volatilität des Aktienmarktes kein unerwartetes Resultat.

Im Gegensatz dazu ist der Einfluss des verfügbaren Einkommens auf die Konsumausgaben der privaten Haushalte sowohl langfristig (niedrigfrequent) als auch in den zyklischen (mittelfrequent) Komponenten stark stimulierend: Die transitorische Komponente des Konsums hängt signifikant positiv von der transitorischen Komponente des Einkommens ab. In Abbildung 2 war bereits die weitgehend gleichläufige Entwicklung der stationären Komponenten beider Variablen zu erkennen.

---

<sup>35</sup> In den Klammern sind die geschätzten Standardfehler der Koeffizienten angegeben.

## 7 Fazit

Das Konzept der Kointegration ist nicht nur auf Eingleichungsmodelle, sondern, wie gezeigt wurde, auch auf vektorautoregressive Prozesse anwendbar. In der vorliegenden Untersuchung werden die Variablen Konsum, verfügbares Einkommen und Deutscher Aktienindex in Deutschland nicht wie in einer Konsumfunktion üblich in einer einseitigen Abhängigkeit betrachtet, sondern a-priori als gleichberechtigt, indem unterstellt wird, dass neben der üblichen Einkommens-Verbrauch-DAX-Kausalität, auch die simultane Wirkung von Konsumveränderungen auf die künftigen Einkommen und Aktienkurse prinzipiell zulässig sind. Die Gleichungen dreier Wirkungsrichtungen werden korrigiert durch die in der jüngsten Vergangenheit aufgetretenen Fehler bezüglich eines festgestellten langfristigen Gleichgewichts zwischen Einkommen, Deutschen Aktienindex und Verbrauch.

Die empirischen Resultate verdeutlichen, dass seit der Wiedervereinigung vom deutschen Aktienmarkt quantitativ beschränkte Effekte auf den Konsum ausgegangen sind. Langfristig ist das verfügbare Einkommen der maßgebliche Faktor zur Erklärung des Konsums. Hingegen wirken die kurzfristigen Veränderungen des Einkommens höchstens auf das spätere Einkommenswachstum, aber überraschenderweise nicht signifikant auf das künftige Konsumwachstum. Die geschätzten Fehlerkorrekturgleichungen zeigen, dass Abweichungen von der langfristigen Gleichgewichtsbeziehung neben dem Konsum größtenteils vom Aktienmarkt getragen werden, indem dieser mittelfristig wieder auf ein mittleres Niveau zurückkehrt.

Die Reaktion des Konsums auf Schocks am Aktienmarkt ist vom Frequenzfenster abhängig. Eine Divergenz in der Beziehung zwischen den Niveaus, den Wachstumsraten und den zyklischen Komponenten wurde deutlich. Während die Konsumausgaben langfristig positiv vom Deutschen Aktienindex beeinflusst werden, zeigt sich in den zyklischen Bewegungen eine negative Abhängigkeit. Demnach scheinen Vermögenspreiseffekte im Konsum nur langfristig zum Tragen zu kommen. In den zyklischen Bewegungen reagieren die Konsumenten auf einen steigenden DAX nicht mit einer Expansion des Verbrauchs. In Anbetracht der starken Volatilität des Aktienmarktes kein überraschendes Ergebnis. Demgegenüber konnte auch in den zyklischen Schwankungen eine stabile Beziehung zwischen Konsum und Einkommen nachgewiesen werden.

Vektorfehlerkorrekturmodelle erlauben, die Abhängigkeiten zwischen den Veränderungen mehrerer potenziell endogener stationärer Variablen simultan zu modellieren. Wenn die Variablen miteinander kointegriert sind, werden in den Modellgleichungen zurückliegende Abweichungen von einem oder mehreren durch kointegrierende Beziehungen definierten Gleichgewichtszuständen korrigierend berücksichtigt. Die Zerlegung der kointegrierten Zeitreihen in transitorische und permanente Komponenten unter Berücksichtigung der Gleichgewichtsfehler mittels der multivariaten Beveridge-Nelson-Dekomposition offenbart das Beziehungsgeflecht in den zyklischen Bewegungen. Die Vektorfehlerkorrektur-Darstellung eröffnet über die Transformation in ein vektorautoregressives Modell hinaus zudem die Möglichkeit, Impuls-Antwort-Funktionen zu berechnen, Prognosefehler durch Zerlegung vertiefend zu analysieren und lineare Restriktionen in den  $r$  Kointegrationsvektoren zu testen.

## Literatur

- Assenmacher, W. (2002): *Einführung in die Ökonometrie*, München.
- Beveridge, S. / Nelson, C.R. (1981): *A New Approach to the Decomposition of Economic Time Series into Permanent and Transitory Components with Particular Attention to Measurement of the Business Cycle*, in: *Journal of Monetary Economics*, Vol. 7, S. 151-174.
- Engle, R.F. / Granger, C.W.J. (1987): *Co-Integration and Error Correction: Representation, Estimation, and Testing*, in: *Econometrica*, Vol. 55, S. 251-276.
- Hackl, P. (2005): *Einführung in die Ökonometrie*, München.
- Hansen, P. / Johansen, S. (1998): *Workbook on Cointegration*, Oxford.
- Johansen, S. (1988): *Statistical Analysis of Cointegration Vectors*, in: *Journal of Economic Dynamics and Control*, Vol. 12, S. 231-254.
- Johansen, S. (1995): *Likelihood-Based Inference in Cointegrated Vector Autoregressive Models*, Oxford.
- Juselius, K. (2006): *Cointegrated VAR Model: Methodology and Applications*, Oxford.
- Kirchgässner, G. / Wolters, J. (2006): *Einführung in die moderne Zeitreihenanalyse*, München.
- Lütkepohl, H. (2006): *New Introduction to Multiple Time Series Analysis*, Berlin.
- Nastansky, A. (2008): *Realwirtschaftliche Folgen von Vermögenspreisschwankungen - Eine Kointegrationsanalyse für die Bundesrepublik Deutschland*, Köln.
- Nastansky, A. (2011): *Orthogonale und verallgemeinerte Impuls-Antwort-Funktionen in Vektor-Fehlerkorrekturmodellen*, in: *Statistische Diskussionsbeiträge der Wirtschafts- und Sozialwissenschaftlichen Fakultät der Universität Potsdam*, Nr. 45.
- Nastansky, A. / Strohe, H.G. (2010): *The Impact of Changes in Asset Prices on Real Economic Activity: A Cointegration Analysis for Germany*, in: *Statistische Diskussionsbeiträge der Wirtschafts- und Sozialwissenschaftlichen Fakultät der Universität Potsdam*, Nr. 38.
- Neusser, K. (2009): *Zeitreihenanalyse in den Wirtschaftswissenschaften*, Wiesbaden.
- Pesaran, B. / Pesaran, H.M. (2009): *Time Series Econometrics. Using Microfit 5.0*, Oxford.
- Rinne, H. (2004): *Ökonometrie. Grundlagen der Makroökonomie*, München.
- Sims, C. / Stock, J.H. / Watson, M.W. (1990): *Inference in linear time series with some unit roots*, in: *Econometrica*, Vol. 58 (1), S. 113-144.

- Stock, J.H. / Watson, M.W. (1988): *Testing for Common Trends*, in: Journal of the American Statistical Society, Vol. 83, S. 1097-1107.
- Stock, J.H. / Watson, M.W. (1993): *A Simple Estimator of Cointegrating Vectors in Higher Order Integrated Systems*, in: Econometrica, Vol. 61 (4), S. 783-820.
- Stock, J.H. / Watson, M.W. (2007): *Introduction to Econometrics*, Boston.
- Strohe, H.G. / Nastansky, A. (2010): *Kointegration und Fehlerkorrekturmodelle*, in: Das Wirtschaftsstudium, Nr. 11, S. 1528-1535.
- Strohe, H.G. / Nastansky, A. (2011): *Vektorfehlerkorrekturmodelle*, in: Das Wirtschaftsstudium, (erscheint 2011).
- Strohe, H.G. (2004): *Time Series Analysis - Textbook for Students of Economics and Business Administration*, Potsdam.

# UNIVERSITÄT POTSDAM

## Wirtschafts- und Sozialwissenschaftliche Fakultät

### STATISTISCHE DISKUSSIONSBEITRÄGE

- Nr. 1 1995 Strohe, Hans Gerhard: Dynamic Latent Variables Path Models  
- An Alternative PLS Estimation -
- Nr. 2 1996 Kempe, Wolfram. Das Arbeitsangebot verheirateter Frauen in den neuen und  
alten Bundesländern - Eine semiparametrische Regressionsanalyse
- Nr. 3 1996 Strohe, Hans Gerhard: Statistik im DDR-Wirtschaftsstudium zwischen  
Ideologie und Wissenschaft
- Nr. 4 1996 Berger, Ursula: Die Landwirtschaft in den drei neuen EU-Mitgliedsstaaten  
Finnland, Schweden und Österreich - Ein statistischer Überblick
- Nr. 5 1996 Betzin, Jörg: Ein korrespondenzanalytischer Ansatz für Pfadmodelle mit  
kategorialen Daten
- Nr. 6 1996 Berger, Ursula: Die Methoden der EU zur Messung der Einkommenssituation in  
der Landwirtschaft - Am Beispiel der Bundesrepublik Deutschland
- Nr. 7 1997 Strohe, Hans Gerhard / Geppert, Frank: Algorithmus und Computerprogramm  
für dynamische Partial Least Squares Modelle
- Nr. 8 1997 Rambert, Laurence / Strohe, Hans Gerhard: Statistische Darstellung transfor-  
mationsbedingter Veränderungen der Wirtschafts- und Beschäftigungs-  
struktur in Ostdeutschland
- Nr. 9 1997 Faber, Cathleen: Die Statistik der Verbraucherpreise in Rußland  
- Am Beispiel der Erhebung für die Stadt St. Petersburg
- Nr. 10 1998 Nosova, Olga: The Attractiveness of Foreign Direct Investment in Russia and  
Ukraine - A Statistical Analysis
- Nr. 11 1999 Gelaschwili, Simon: Anwendung der Spieltheorie bei der Prognose von  
Marktprozessen
- Nr. 12 1999 Strohe, Hans Gerhard / Faber, Cathleen: Statistik der Transformation -  
Transformation der Statistik. Preisstatistik in Ostdeutschland und  
Rußland
- Nr. 13 1999 Müller, Claus: Kleine und mittelgroße Unternehmen in einer hoch konzen-  
trierten Branche am Beispiel der Elektrotechnik. Eine statistische  
Langzeitanalyse der Gewerbezählungen seit 1882
- Nr. 14 1999 Faber, Cathleen: The Measurement and Development of Georgian Consumer  
Prices
- Nr. 15 1999 Geppert, Frank / Hübner, Roland: Korrelation oder Kointegration – Eignung für  
Portfoliostrategien am Beispiel verbriefteter Immobilienanlagen
- Nr. 16 2000 Achsani, Noer Azam / Strohe, Hans Gerhard: Statistischer Überblick über die  
indonesische Wirtschaft
- Nr. 17 2000 Bartels, Knut: Testen der Spezifikation von multinominalen Logit-Modellen
- Nr. 18 2002 Achsani, Noer Azam / Strohe, Hans Gerhard: Dynamische Zusammenhänge  
zwischen den Kapitalmärkten der Region Pazifisches Becken vor und  
nach der Asiatischen Krise 1997
- Nr. 19 2002 Nosova, Olga: Modellierung der ausländischen Investitionstätigkeit in der  
Ukraine
- Nr. 20 2003 Gelaschwili, Simon / Kurtanidse, Zurab: Statistische Analyse des Handels  
zwischen Georgien und Deutschland
- Nr. 21 2004 Nastansky, Andreas: Kurz- und langfristiger statistischer Zusammenhang  
zwischen Geldmengen- und Preisentwicklung: Analyse einer kointe-  
grierenden Beziehung
- Nr. 22 2006 Kauffmann, Albrecht / Nastansky, Andreas: Ein kubischer Spline zur tempo-  
ralen Disaggregation von Stromgrößen und seine Anwendbarkeit auf  
Immobilienindizes
- Nr. 23 2006 Mangelsdorf, Stefan: Empirische Analyse der Investitions- und Exportentwick-  
lung des Verarbeitenden Gewerbes in Berlin und Brandenburg
- Nr. 24 2006 Reilich, Julia: Return to Schooling in Germany
- Nr. 25 2006 Nosova, Olga / Bartels, Knut: Statistical Analysis of the Corporate Governance  
System in the Ukraine: Problems and Development Perspectives
- Nr. 26 2007 Gelaschwili, Simon: Einführung in die statistische Modellierung und Prognose

**STATISTISCHE DISKUSSIONSBEITRÄGE**

Herausgeber: Hans Gerhard Strohe

- |        |      |  |
|--------|------|--|
| Nr. 27 | 2007 | Nastansky, Andreas: Modellierung und Schätzung von Vermögenseffekten im Konsum   |
| Nr. 28 | 2008 | Nastansky, Andreas: Schätzung vermögenspreisinduzierter Investitionseffekte in Deutschland   |
| Nr. 29 | 2008 | Ruge, Marcus / Strohe, Hans Gerhard: Analyse von Erwartungen in der Volkswirtschaft mit Partial-Least-Squares-Modellen   |
| Nr. 30 | 2009 | Newiak, Monique: Prüfungsurteile mit Dollar Unit Sampling – Ein Vergleich von Fehlerschätzmethoden für Zwecke der Wirtschaftsprüfung: Praxis, Theorie, Simulation –            |
| Nr. 31 | 2009 | Ruge, Marcus: Modellierung von Stimmungen und Erwartungen in der deutschen Wirtschaft  |
| Nr. 32 | 2009 | Nosova, Olga: Statistical Analysis of Regional Integration Effects   |
| Nr. 33 | 2009 | Mangelsdorf, Stefan: Persistenz im Exportverhalten – Kann punktuelle Exportförderung langfristige Auswirkungen haben? -  |
| Nr. 34 | 2009 | Kbiladze, David: Einige historische und gesetzgeberische Faktoren der Reformierung der georgischen Statistik   |
| Nr. 35 | 2009 | Nastansky, Andreas / Strohe, Hans Gerhard: Die Ursachen der Finanz- und Bankenkrise im Lichte der Statistik  |
| Nr. 36 | 2009 | Gelaschwili, Simon / Nastansky, Andreas: Development of the Banking Sector in Georgia  |
| Nr. 37 | 2010 | Kunze, Karl-Kuno / Strohe, Hans Gerhard: Time Varying Persistence in the German Stock Market   |
| Nr. 38 | 2010 | Nastansky, Andreas / Strohe, Hans Gerhard: The Impact of Changes in Asset Prices on Real Economic Activity: A Cointegration Analysis for Germany                               |
| Nr. 39 | 2010 | Kunze, Karl-Kuno / Strohe, Hans Gerhard: Antipersistence in German Stock Returns   |
| Nr. 40 | 2010 | Dietrich, Irina / Strohe, Hans Gerhard: Die Vielfalt öffentlicher Unternehmen aus der Sicht der Statistik - Ein Versuch, das Unstrukturierte zu strukturieren                  |
| Nr. 41 | 2010 | Nastansky, Andreas / Lanz, Ramona: Bonuszahlungen in der Kreditwirtschaft: Analyse, Regulierung und Entwicklungstendenzen  |
| Nr. 42 | 2010 | Dietrich, Irina / Strohe, Hans Gerhard: Die Vermögenslage öffentlicher Unternehmen in Deutschland - Statistische Analyse anhand von amtlichen Mikrodaten der Jahresabschlüsse. |
| Nr. 43 | 2010 | Ulbrich, Hannes-Friedrich: Höherdimensionale Kompositionsdaten – Gedanken zur grafischen Darstellung und Analyse -   |
| Nr. 44 | 2011 | Dietrich, Irina / Strohe, Hans Gerhard: Statistik der öffentlichen Unternehmen in Deutschland – Die Datenbasis   |
| Nr. 45 | 2011 | Nastansky, Andreas: Orthogonale und verallgemeinerte Impuls-Antwort-Funktionen in Vektor-Fehlerkorrekturmodellen   |
| Nr. 46 | 2011 | Dietrich, Irina / Strohe, Hans Gerhard: Die Finanzlage öffentlicher Unternehmen in Deutschland - Statistische Analyse amtlicher Mikrodaten der Jahresabschlüsse -              |
| Nr. 47 | 2011 | Teitge, Jonas / Nastansky, Andreas: Interdependenzen in den Renditen DAX-notierter Unternehmen nach Branchen   |
| Nr. 48 | 2011 | Dietrich, Irina: Die Ertragslage öffentlicher Unternehmen in Deutschland - Statistische Analyse amtlicher Mikrodaten der Jahresabschlüsse -                                    |
| Nr. 49 | 2011 | Kauper, Benjamin / Kunze, Karl-Kuno: Modellierung von Aktienkursen im Lichte der Komplexitätsforschung   |
| Nr. 50 | 2011 | Nastansky, Andreas / Strohe, Hans Gerhard: Konsumausgaben und Aktienmarktentwicklung in Deutschland: Ein kointegriertes vektorautoregressives Modell                           |