

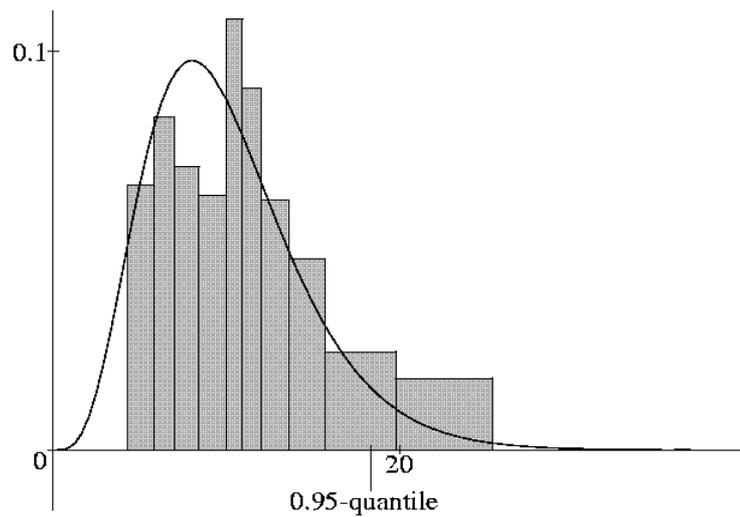


# UNIVERSITÄT POTSDAM

## Institut für Mathematik

### Das Sankt-Petersburg-Paradoxon (Diplomarbeit)

Sabine Siegert



Mathematische Statistik und  
Wahrscheinlichkeitstheorie

**Universität Potsdam – Institut für Mathematik**

Mathematische Statistik und Wahrscheinlichkeitstheorie

Das Sankt-Petersburg-Paradoxon

Sabine Siegert

Institut für Mathematik der Universität Potsdam  
e-mail: [sabine.siegert@gmx.de](mailto:sabine.siegert@gmx.de)

Preprint 2010/05

April 2010

## **Impressum**

**© Institut für Mathematik Potsdam, April 2010**

Herausgeber: Mathematische Statistik und Wahrscheinlichkeitstheorie  
am Institut für Mathematik

Adresse: Universität Potsdam  
PF 60 15 53  
14415 Potsdam

Telefon:

Fax: +49-331-977 1500

E-mail: +49-331-977 1578  
[neisse@math.uni-potsdam.de](mailto:neisse@math.uni-potsdam.de)

ISSN 1613-3307

Universität Potsdam  
Mathematisch–Naturwissenschaftliche Fakultät  
Institut für Mathematik

## Diplomarbeit

# Das Sankt–Petersburg–Paradoxon

vorgelegt von

Sabine Siegert

April 2010

Gutachter

Prof. Dr. Sylvie Roelly

Dr. Pierre Yves Louis

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
1.1	Das Sankt-Petersburg-Spiel . . . . .	2
1.2	Das Sankt-Petersburg-Paradoxon . . . . .	4
1.3	Gliederung der Arbeit . . . . .	7
1.4	Eigenanteil . . . . .	8
<b>2</b>	<b>Historische Lösungsansätze</b>	<b>9</b>
2.1	Niklaus Bernoulli . . . . .	9
2.2	Gabriel Cramer . . . . .	11
2.3	Daniel Bernoulli . . . . .	13
2.4	Leonhard Euler . . . . .	17
2.5	Georges Buffon . . . . .	18
2.6	Jean d’Alembert . . . . .	21
2.7	Marquis de Condorcet . . . . .	23
2.8	Allen Whitworth . . . . .	23
2.9	William Feller . . . . .	24
2.10	Hugo Steinhaus . . . . .	25
2.11	Anders Martin-Löf . . . . .	26
2.12	Empirische Studien . . . . .	26
<b>3</b>	<b>Martingal-Ansatz</b>	<b>29</b>
3.1	Grundlagen . . . . .	29
3.1.1	Zeitdiskrete Martingale . . . . .	29
3.1.2	Spielsysteme (Martingaltransformierte) . . . . .	31
3.1.3	Stoppszeiten und Stoppsätze . . . . .	32
3.2	Die Verdopplungsstrategie . . . . .	35
3.2.1	Die Verdopplungsstrategie als d’Alembert-Martingal . . . . .	36
3.2.2	Verteilung des d’Alembert-Martingals . . . . .	40
3.2.3	Konvergenz des d’Alembert-Martingals . . . . .	41
3.2.4	Ruinwahrscheinlichkeit . . . . .	42
3.3	Das Sankt-Petersburg-Spiel als Borel-Martingal . . . . .	44
<b>4</b>	<b>Markovketten-Ansatz</b>	<b>48</b>
4.1	Fairer Münzwurf im Verdopplungsspiel . . . . .	48
4.2	Unfairer Münzwurf im Verdopplungsspiel . . . . .	52
4.3	Begrenztes Einsatzkapital im Verdopplungsspiel . . . . .	53

<b>5</b>	<b>Asymptotische Interpretationen</b>	<b>56</b>
5.1	Stochastische Konvergenz für das Sankt–Petersburg–Spiel . . . . .	56
5.1.1	Grundlagen . . . . .	56
5.1.1.1	Das schwache GGZ für integrierbare Zufallsvariablen . . . . .	57
5.1.1.2	Das schwache GGZ für Dreiecksanordnungen . . . . .	60
5.1.1.3	Das schwache GGZ für abgeschnittene Zufallsvariablen . . . . .	62
5.1.2	Ein schwaches GGZ für das Sankt–Petersburg–Spiel . . . . .	63
5.2	Fast sichere Konvergenz für modifizierte Sankt–Petersburg–Spiele . . . . .	68
5.2.1	Grundlagen . . . . .	68
5.2.2	Das entgegengesetzte starke GGZ für das Sankt–Petersburg–Spiel . . . . .	68
5.2.3	Das starke GGZ für modifizierte Sankt–Petersburg–Spiele . . . . .	72
5.2.3.1	Eine verallgemeinerte Version des Sankt–Petersburg–Spiels . . . . .	73
5.2.3.2	Einbehaltung von Gewinnen . . . . .	78
5.2.3.3	Gewichtung der Gewinne . . . . .	81
5.2.3.4	Simultane Sankt–Petersburg–Spiele . . . . .	83
5.2.4	Vergleich der modifizierten Sankt–Petersburg–Spiele . . . . .	86
5.3	Konvergenz in Verteilung für das Sankt–Petersburg–Spiel . . . . .	88
5.3.1	Grundlagen . . . . .	88
5.3.2	Ein Grenzwertsatz für das Sankt–Petersburg–Spiel . . . . .	90
<b>6</b>	<b>Bezug zur Praxis</b>	<b>100</b>
6.1	Die Bewertung von Wachstumsaktien . . . . .	100
6.2	Ein Sankt–Petersburg–Angebot im Baseball . . . . .	108
<b>7</b>	<b>Résumé</b>	<b>109</b>
<b>A</b>	<b>Lévy–Prozesse</b>	<b>110</b>
A.1	Charakteristischen Funktionen . . . . .	110
A.2	Faltung . . . . .	111
A.3	Unbegrenzt teilbare Verteilungen . . . . .	112
A.4	Lévy–Prozesse . . . . .	115
A.5	Stabile Verteilungen . . . . .	116
<b>B</b>	<b>Quelltext für Simulationen</b>	<b>118</b>
B.1	Quelltext für Abschnitt 5.2.2 . . . . .	118
B.2	Quelltext für Abschnitt 5.2.4 . . . . .	119
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>121</b>

# Kapitel 1

## Einleitung

Das Sankt–Petersburg–Spiel beschreibt ein Paradoxon in einem Glücksspiel zwischen 2 Parteien, dem Spielanbieter und dem Spieler. Trotz einer unendlich hohen Gewinnerwartung scheint sich kein Spieler finden zu lassen, der auch nur einen endlich hohen Einsatz für eine Teilnahme an diesem Spiel zu zahlen bereit ist.

Das Sankt–Petersburg–Paradoxon widerspricht daher der folgenden Intuition eines fairen Spiels.

Ein Glücksspiel<sup>1</sup> wird intuitiv als *fair* angesehen, falls der erwartete Reingewinn eines jeden Spielers gleich null ist. Keiner der Spieler hat demnach, langfristig gesehen, einen Vor- oder Nachteil.

Äquivalent dazu können wir ein Glücksspiel auch als *fair* interpretieren, falls der Einsatz dem durchschnittlichen Gewinn entspricht. Für eine Zufallsvariable

$$X : \Omega \rightarrow \mathbb{R},$$

die die Gewinne eines Glücksspiels modelliert, entspricht der durchschnittliche Gewinn dem Erwartungswert von  $X$

$$\mathbb{E}(X) = \int_{\mathbb{R}} x dF(x),$$

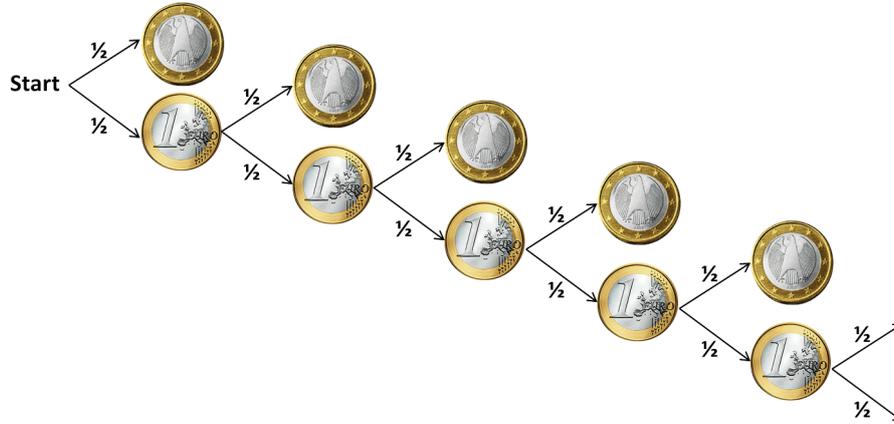
wobei  $F : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$  die Verteilungsfunktion von  $X$  ist.

---

<sup>1</sup>In der vorliegenden Arbeit betrachten wir immer, wenn nicht anders erwähnt, ein Glücksspiel zwischen 2 Parteien. Eine Partei kann dabei eine einzelne Person oder auch ein Objekt, wie etwa ein Kasino, sein.

## 1.1 Das Sankt–Petersburg–Spiel

Peter wirft so lange eine **faire** Münze, bis zum ersten mal Kopf fällt. Er zahlt an Paul  $2^i$  Euro,  $i \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \setminus \{0\}$ , falls dies beim  $i$ -ten Wurf geschieht und das Spiel ist beendet<sup>2</sup>



**Abb. 1.1:** Der faire Münzwurf im Sankt–Petersburg–Spiel

Da genau  $i$  Münzwürfe ( $(i - 1)$ -mal Zahl und 1 mal Kopf) gebraucht werden, um das Spiel zu beenden, gewinnt Paul die  $2^i$  Euro mit Wahrscheinlichkeit  $(\frac{1}{2})^i$  (vgl. Tab. 1.1).

Münzwurf-Folge	Gewinn	Wahrscheinlichkeit
K	2	$\frac{1}{2}$
ZK	4	$\frac{1}{4}$
ZZK	8	$\frac{1}{8}$
ZZZK	16	$\frac{1}{16}$
...	...	...
$\underbrace{Z \dots Z}_{i-1} K$	$2^i$	$(\frac{1}{2})^i$

**Tab. 1.1:** Gewinne beim Sankt–Petersburg–Spiel (faire Münze)

Wir betrachten den Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ , wobei

$$\begin{aligned} \Omega &= \{\omega^i = (\omega_1, \dots, \omega_i) : \omega_1 = \dots = \omega_{i-1} = 0, \omega_i = 1, i \in \mathbb{N}_0\} \\ &= \{\omega^i = (0, \dots, 0, 1) : i \in \mathbb{N}_0\} \subset \{0, 1\}^{\mathbb{N}_0} \end{aligned}$$

<sup>2</sup>Es gibt auch die Version, bei welcher Peter einen Gewinn  $2^{i-1}$  für Kopf erstmalig beim  $i$ -ten Wurf zahlt. Wenn wir es nicht explizit erwähnen, betrachten wir in dieser Arbeit jedoch durchweg die Gewinnauszahlung  $2^i$ . Dabei meinen wir außerdem immer  $2^i$  Euro, falls wir die Einheit nicht extra angeben.

abzählbar unendlich ist und alle möglichen Ausgänge des Sankt–Petersburg–Spiels enthält. Dabei meint

$$\begin{aligned}\{\omega_j = 0\} &= \{\text{Münze zeigt Zahl im } j\text{-ten Wurf}\}, \\ \{\omega_j = 1\} &= \{\text{Münze zeigt Kopf im } j\text{-ten Wurf}\},\end{aligned}$$

und  $\mathcal{P}(\Omega)$  bezeichnet die Potenzmenge von  $\Omega$ .

Die fairen Münzwürfe erfolgen dabei unabhängig voneinander und für alle  $\omega^i \in \Omega$  gilt daher

$$\mathbb{P}(\{\omega^i\}) = \left(\frac{1}{2}\right)^i.$$

Wegen

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(\{\omega^i\}) = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^i = 1$$

ist diese Definition des Wahrscheinlichkeitsmaßes auch gerechtfertigt.

Die Gewinne des Sankt–Petersburg–Spiels werden nun durch die diskrete Zufallsvariable

$$Y : \Omega \rightarrow \mathbb{N} \quad \text{mit} \quad \omega^i \mapsto Y(\omega^i) = 2^i \quad \forall i \in \mathbb{N}_0$$

modelliert. Die Verteilung von  $Y$  ist gegeben durch

$$\mathbb{P}_Y = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^i \cdot \delta_{2^i} \tag{1.1}$$

bzw. durch

$$F_Y(x) = \mathbb{P}(Y \leq x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x < 2 \\ 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{\lfloor \log_2 x \rfloor} & \text{falls } x \geq 2, \end{cases} \tag{1.2}$$

wobei  $\lfloor x \rfloor = \max\{m \in \mathbb{Z} : m \leq x\}$  den größten ganzzahligen Anteil von  $x \in \mathbb{R}$  bezeichnet. Analog meint  $\lceil x \rceil = \min\{m \in \mathbb{Z} : m \geq x\}$  im Folgenden die nächstgrößere ganze Zahl von  $x \in \mathbb{R}$ .

Die Verteilungsfunktion  $F_Y$  der Sankt–Petersburg–Zufallsvariablen  $Y$  hat an den Stellen  $x = 2^i$  Sprünge der Höhe  $\left(\frac{1}{2}\right)^i$ . In Abb. 1.2 ist ersichtlich, dass die Höhen der Treppenstufen exponentiell fallen, während die Längen exponentiell anwachsen. Dies verdeutlicht, dass die Wahrscheinlichkeiten der exponentiell wachsenden Gewinne exponentiell fallen.

Für den erwarteten Gewinn aus einem Sankt–Petersburg–Spiel ergibt sich nun

$$\mathbb{E}(Y) = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^i 2^i = \sum_{i=1}^{\infty} 1 = \infty. \tag{1.3}$$

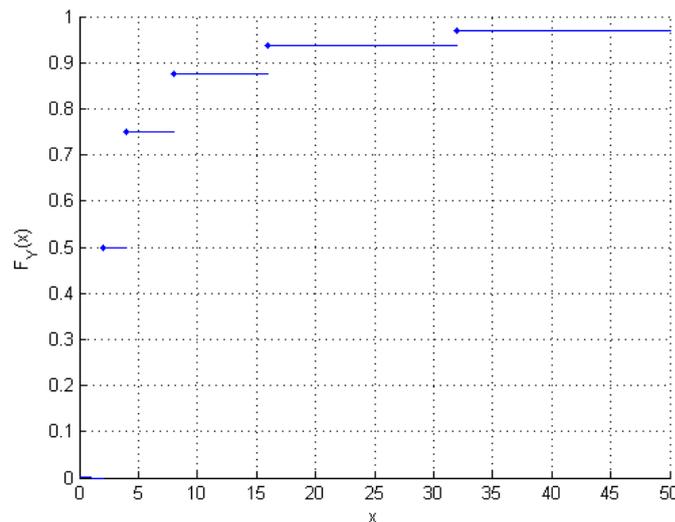


Abb. 1.2: Verteilungsfunktion  $F_Y$  der Sankt–Petersburg–Zufallsvariablen  $Y$

## 1.2 Das Sankt–Petersburg–Paradoxon

Die mathematische Berechnung ist korrekt und unanfechtbar. Peters Verlust (bzw. Pauls Gewinn) hat einen unendlich großen Erwartungswert. Peter könnte demnach einen unendlich hohen Einsatz von Paul verlangen — und das für jedes einzelne Spiel.

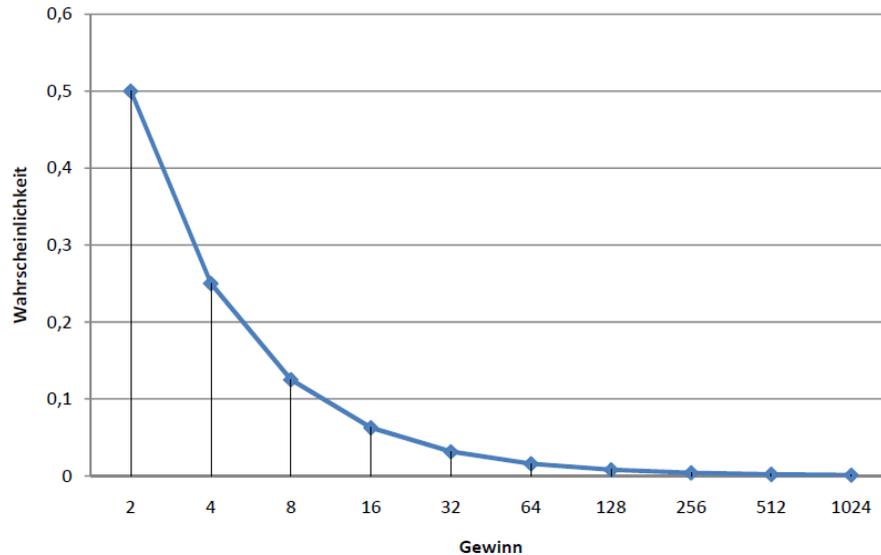
Doch auch die Einstellung eines klugen Spielers, diesen Einsatz nicht zahlen zu wollen bzw. überhaupt zahlen zu können, ist korrekt und nachvollziehbar<sup>3</sup>. Niemand wird nicht nur keinen unendlichen Einsatz, sondern auch keinen besonders hohen endlichen Einsatz zahlen wollen (vgl. Abschnitt 2.12). Nach D. Bernoulli würde jeder vernünftige Paul, das Recht an einem Sankt–Petersburg–Spiel teilzunehmen, mit großem Vergnügen für nur 20 (Dukaten) verkaufen (vgl. [Ber1]).

Als Gründe, weshalb auch hohe endliche Einsätze als unfair angesehen werden, können die Risikoaversion, der abnehmende Grenznutzen von Vermögen bzw. Reichtum (vgl. dazu Abschnitt 2.3) oder die unrealistische Vorstellung von astronomisch hohen Gewinnen zu vernachlässigbaren Wahrscheinlichkeiten genannt werden (vgl. dazu auch Abb. 1.3). So z.B. gilt

$$\mathbb{P}(Y > 16) = 1 - \underbrace{\mathbb{P}(Y = 2)}_{\frac{1}{2}} - \underbrace{\mathbb{P}(Y = 4)}_{\frac{1}{4}} - \underbrace{\mathbb{P}(Y = 8)}_{\frac{1}{8}} - \underbrace{\mathbb{P}(Y = 16)}_{\frac{1}{16}} = \frac{1}{16}$$

$$\mathbb{P}(Y > 32) = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{8} - \frac{1}{16} - \frac{1}{32} = \frac{1}{32}.$$

<sup>3</sup>Wenn wir davon ausgehen, dass jemand unendlich viel Geld besitzt, würde er vielleicht bereit sein, einen solchen Einsatz zu zahlen. Es stellt sich dann aber vielmehr die Frage, warum man überhaupt noch ein Glücksspiel spielen sollte.



**Abb. 1.3:** Die Wahrscheinlichkeiten der Gewinne im Sankt–Petersburg–Spiel fallen exponentiell.

Für Peter bedeutet dies, dass er beispielsweise mit Wahrscheinlichkeit

$$\mathbb{P}(Y \leq 32) = \frac{31}{32}$$

einen Gewinn kleiner gleich 32 auszahlen muss. Analog zahlt er mit Wahrscheinlichkeit

$$\mathbb{P}(Y \leq 1024) = \frac{1023}{1024}$$

einen Gewinn kleiner gleich 1024 aus. Aus Peters Sicht dürfte dies für nur ein Spiel recht sicher erscheinen, so dass der Begriff des Erwartungswertes an Bedeutung verliert, wenn er Paul nur ein Spiel bzw. nur wenige Spiele anbietet (vgl. [BIHoSa]). Werden jedoch mehrere Spiele durchgeführt, so kann die Tatsache, dass der Erwartungswert nicht existiert, nicht weiter ignoriert werden und Peter sollte sich gegen das Risiko, hohe Gewinne auszahlen zu müssen, absichern.

Wir wollen den Zeitpunkt des ersten Kopf–Wurfes durch die Zufallsvariable

$$T : \Omega \rightarrow \mathbb{N} \quad \text{mit} \quad \omega^i \mapsto T(\omega^i) = i \quad \forall i \in \mathbb{N}_0$$

beschreiben. Aus

$$\mathbb{P}(T = i) = \mathbb{P}(\{\omega^i\}) = \left(\frac{1}{2}\right)^i = \left(\frac{1}{2}\right)^{i-1} \frac{1}{2} \quad \forall i \in \mathbb{N}_0$$

folgt, dass  $T$  eine geometrisch verteilte Zufallsvariable zum Parameter  $\frac{1}{2}$  ist.

Es gilt

$$\mathbb{P}(T < \infty) = \mathbb{P}\left(\bigsqcup_{i=1}^{\infty}\{T = i\}\right) = {}^4 \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(T = i) = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^i = 1, \quad (1.4)$$

d.h. mit Wahrscheinlichkeit 1 fällt Kopf nach endlich vielen Würfeln und Paul gewinnt daher fast sicher einen endlichen Betrag. Die erwartete Spieldauer beträgt zudem lediglich<sup>5</sup>

$$\mathbb{E}(T) = \sum_{i=1}^{\infty} i \left(\frac{1}{2}\right)^i = \frac{\frac{1}{2}}{\left(1 - \frac{1}{2}\right)^2} = 2 \quad (1.5)$$

Runden bzw. Münzwürfe. Dies rechtfertigt Pauls Verhalten, keinen hohen Einsatz für das Sankt–Petersburg–Spiel zahlen zu wollen bzw. den unendlichen Einsatz als unfair anzusehen.

### Unfairer Münzwurf

Die Paradoxie verschwindet, falls die Wahrscheinlichkeit für Kopf nur geringfügig größer wird. Um dies zu sehen, beschreibe  $\tilde{Y}$  die Gewinne eines Sankt–Petersburg–Spiels, bei welchem eine nicht a priori faire Münze geworfen wird, d.h.

$$\mathbb{P}_{\tilde{Y}} = \sum_{i=1}^{\infty} (1-p)^{i-1} p \cdot \delta_{2^i},$$

wobei  $p \in [0, 1]$  die Wahrscheinlichkeit für Kopf (und entsprechend  $1-p$  für Zahl) bezeichnet.

Münzwurf-Folge	Gewinn	Wahrscheinlichkeit
K	2	$p$
ZK	4	$(1-p)p$
ZZK	8	$(1-p)^2 p$
ZZZK	16	$(1-p)^3 p$
...	...	...
$\underbrace{Z \dots Z}_{i-1} K$	$2^i$	$(1-p)^{i-1} p$

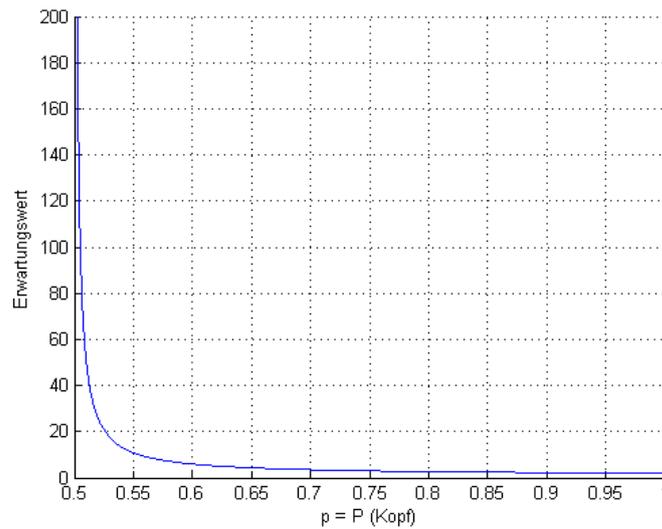
**Tab. 1.2:** Gewinne beim Sankt–Petersburg–Spiel, wobei die Münze nicht a priori fair ist

Dann ist

$$\mathbb{E}(\tilde{Y}) = \sum_{i=1}^{\infty} (1-p)^{i-1} p 2^i = 2p \sum_{i=0}^{\infty} (2(1-p))^i = \begin{cases} \infty & \text{falls } p \in [0, \frac{1}{2}] \\ \frac{2p}{1-2(1-p)} < \infty & \text{falls } p \in (\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

<sup>4</sup> $\bigsqcup_{i=1}^{\infty}$  meint die disjunkte Vereinigung

<sup>5</sup>Man benutzt die erste Ableitung der geometrischen Reihe.



**Abb. 1.4:** Erwartungswert in Abhängigkeit von der Wahrscheinlichkeit für Kopf

Wird also die Münze so manipuliert, dass die Wahrscheinlichkeit für Kopf echt größer  $\frac{1}{2}$  ist, so entspricht ein fairer Einsatz gerade (vgl. auch Abb. 1.4)

$$1 + \frac{1}{2p - 1} < \infty.$$

### 1.3 Gliederung der Arbeit

Wir haben in Kapitel 1 bereits gesehen, dass der Erwartungswert für den Gewinn aus einem Sankt–Petersburg–Spiel nicht existiert und daher keinen vernünftigen (d.h. in der Praxis umsetzbaren) Wert für einen fairen Einsatz liefert. Es stellt sich die Frage, ob und wie das Spiel für beide Spieler fair gemacht werden kann. Ziel dieser Arbeit ist es, einen umfassenden Überblick über die bisherigen Lösungsansätze zu geben, diese kritisch zu bewerten und an entsprechenden Stellen eigene Überlegungen miteinfließen zu lassen. Zunächst werden wir zeigen, dass die Paradoxie seit dem 18. Jahrhundert mehrere Mathematiker, Ökonomen und Psychologen beschäftigt hat. In Kapitel 2 diskutieren wir dazu einige der vielen Lösungsansätze.

Anschließend soll das Sankt–Petersburg–Spiel im Kontext der Martingaltheorie (Kapitel 3) erörtert werden. Als das umgedrehte Analogon betrachten wir hier außerdem die Verdopplungsstrategie und vertiefen diesen Ansatz in Verbindung der Markovketten (Kapitel 4).

In Kapitel 5 interpretieren wir das Spiel asymptotisch, d.h. unter der Voraussetzung, dass viele Spiele durchgeführt werden. Dies ist besonders im Falle eines Kasinos (ein Peter bietet das Spiel mehreren Pauls an) interessant. In Abschnitt 5.2.3 untersuchen wir außerdem geeignete Modifikationen des Sankt–Petersburg–Spiels. Wir werden sehen, dass viele Lösungen oft nur Pauls Sicht berücksichtigen. Das eigentliche Risiko liegt aber

für einen endlichen Einsatz letztendlich bei Peter. Während Pauls maximaler Verlust vor dem Spiel bekannt ist (Verlust = Einsatz), kennt Peter ihn erst nach dem Spielende. Wir werden in Abschnitt 5.3 näher auf einen Ansatz eingehen, der eine Absicherung gegen das Risiko, die Gewinne nicht auszahlen zu können, berücksichtigt.

Abschließend zeigen wir dann in Kapitel 6, wie die Überlegungen aus dem Sankt–Petersburg–Paradoxon auf die Praxis übertragen werden können und diskutieren dabei kritisch die Anwendung auf die Bewertung von Wachstumsaktien.

## 1.4 Eigenanteil

Kapitel 2 widmet sich zunächst den historischen Lösungsansätzen, die wir bewerten und miteinander vergleichen, sowie an einigen Stellen durch Parallelen zu aktuelleren Resultaten ergänzen.

Während die Idee, das Sankt–Petersburg–Spiel als Martingal zu modellieren, auf Émile Borel zurückgeht, haben wir seine Überlegungen in Abschnitt 3.3 in die heutige Sprache der Martingalthorie übersetzt und etwas ausführlicher als in den angegebenen Quellen dargestellt. Zudem diskutieren wir die Paradoxie des Verdopplungsspiels in Abschnitt 3.2 im Zusammenhang des d’Alembert–Martingals und untersuchen dieses auf Konvergenzeigenschaften hin (Lemma 3.2.3 und 3.2.5). Da das Verdopplungsspiel (bzw. das Sankt–Petersburg–Spiel) unserer Recherche nach noch nicht als Markovkette modelliert worden ist, holen wir dies in Kapitel 4 nach.

Im Zuge der asymptotischen Betrachtungen wenden wir das schwache GGZ auf das klassische und das von Condorcet vorgeschlagene modifizierte Sankt–Petersburg–Spiel an und zeigen dann in Abschnitt 5.1.2, dass die Äquivalenz in Wahrscheinlichkeit  $S_n \simeq b_n$  nicht nur für die von Feller vorgeschlagene Folge  $b_n = n \log_2 n$ , sondern auch für die Steinhaus–Sequenz gilt, sofern  $n = 2^m$ ,  $m \in \mathbb{N}$  (Lemma 5.1.6).

Im Paragraphen 5.2.2 beweisen wir, dass das Sankt–Petersburg–Spiel aber nicht die Voraussetzungen des starken GGZ erfüllt und untersuchen in Abschnitt 5.2.3 daher geeignete Modifikationen bzgl. der fast sicheren Konvergenz. Diese Modifikationen betrachten wir für ein verallgemeinertes Sankt–Petersburg–Spiel, für welches wir zunächst untersuchen, unter welchen Voraussetzungen die stochastische und fast sichere Konvergenz gewährleistet wird (Folgerung 5.2.4, Satz 5.2.5 und Folgerung 5.2.6). Wir vergleichen die modifizierten Spiele mit dem klassischen und verallgemeinern außerdem in Abschnitt 5.2.3.4 die Idee der simultanen Sankt–Petersburg–Spiele. Wir beenden Kapitel 5 mit der Präsentation von Ergebnissen eigener, mit Matlab durchgeführter Simulationen.

An einigen Stellen der Arbeit haben wir die Beweise ausführlicher als in den genannten Referenzen dargestellt, insbesondere in Abschnitt 5.3.2. Hier erläutern wir außerdem den praktischen Nutzen von Martin–Löfs Überlegungen hinsichtlich der Konvergenz in Verteilung. Auch in Kapitel 6 diskutieren wir Parallelen zwischen dem Petersburg–Paradoxon und der Praxis, insbesondere der Bewertung von Wachstumsaktien.

Sämtliche Abbildungen sind, sofern nicht explizit vermerkt, selbst mit Matlab erstellt worden.

# Kapitel 2

## Historische Lösungsansätze

Der Ursprung des Paradoxons liegt im Jahre 1713. Während Niklaus Bernoulli anfangs noch einen fairen Würfelwurf betrachtete, vereinfachte Gabriel Cramer das Problem zum fairen Münzwurf, bevor es dann 1738 durch Daniel Bernoulli veröffentlicht und als das Sankt-Petersburg-Paradoxon bekannt wurde. Seitdem haben sich viele Mathematiker, aber auch Ökonomen, daran versucht, das Paradoxon aufzuklären und vernünftige Einsätze zu bestimmen. In diesem Kapitel wollen wir die bedeutendsten der vorgeschlagenen Ansätze, die wir grob in 3 Gruppen teilen können, näher diskutieren.

- (1) Die dem Spiel zu Grunde liegenden unrealistischen Annahmen (unbegrenzte Zeit, unbegrenztes Vermögen) sind für die Paradoxie verantwortlich. Das Spiel muss dementsprechend abgeändert und die Anzahl der Münzwürfe beschränkt werden (z.B. Condorcet, Fontaine). Die ursprüngliche Reihe konvergiert und man erhält einen endlichen Einsatz.
- (2) Kleine Wahrscheinlichkeiten dürfen vernachlässigt (z.B. N. Bernoulli, Buffon) bzw. die Gewinne durch ihren entsprechenden Nutzen, den sie stiften, substituiert werden (z.B. G. Cramer, D. Bernoulli). Die ursprüngliche Reihe konvergiert und man erhält einen endlichen Einsatz.
- (3) Lösungsansätze des 20. Jahrhunderts (z.B. Feller, Martin-Löf) zeigen, dass man faire (variable) Einsätze, die von der zuvor festgelegten Anzahl durchzuführender Spiele abhängen, bestimmen kann.

Während man bei Menger ([Men]) und Shafer ([Sha]) kurze Zusammenfassungen des historischen Aufrisses findet, kann man die Entwicklung der Lösungsansätze bei Dutka ([Dut]), Jorland ([Jor]), Samuelson ([Sam]) oder Todhunter ([Tod]) ausführlicher nachschlagen.

### 2.1 Niklaus Bernoulli

Der Urheber des Sankt-Petersburg-Problems ist Niklaus Bernoulli (1687-1759). Er vertrat wie viele seiner Zeitgenossen die Sichtweise der klassischen Theorie der Glücksspiele<sup>1</sup>, welche auf der Annahme basiert, dass der Erwartungswert (damals: *mathematische*

---

<sup>1</sup>Um 1650 wurde die Frage nach der Bewertung eines Glücksspiels erstmals von den französischen Mathematikern Blaise Pascal (1623-1662) und Pierre de Fermat (1607-1665) behandelt (vgl. dazu auch die

*Hoffnung*) eines Spiels seinem fairen Preis entspricht (vgl. [Sha]). In einem Brief vom 9. September 1713 an Pierre Rémond de Montmort (1678-1719) schildert N. Bernoulli die erste Version des Sankt-Petersburg-Problems (vgl. [Ber2] oder [Spi]).

**Viertes Problem.** A verspricht an B eine Münze zu zahlen, falls er mit einem ordentlichen Würfel eine 6 im ersten Wurf erzielt, 2 Münzen falls im zweiten Wurf, 3 Münzen falls im dritten Wurf, 4 Münzen falls im vierten Wurf usw. Welchen Gewinn kann B erwarten?

**Fünftes Problem.** Welchen Gewinn kann B erwarten, wenn A verspricht statt 1, 2, 3, 4, 5 usw. einige Münzen in der Folge 1, 2, 4, 8, 16 usw. oder 1, 3, 9, 27 usw. oder 1, 4, 9, 16, 25 usw. oder 1, 8, 27, 64 usw. auszuzahlen?

Während sich für das vierte Problem sowie für die Sequenzen 1, 4, 9, 16, 25, ... und 1, 8, 27, 64, ... des fünften Problems endliche Erwartungswerte ergeben, erhält man für die Gewinnauszahlungen 2, 4, 8, 16, ... und 1, 3, 9, 27, ... unendliche Erwartungswerte.

Für  $X_1$  mit  $\mathbb{P}_{X_1} = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^{i-1} \frac{1}{6} \cdot \delta_i$  ist

$$\mathbb{E}(X_1) = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^{i-1} \frac{1}{6} i = \frac{1}{6} \left(\frac{5}{6}\right)^{-1} \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^i i = \frac{1}{5} \frac{\frac{5}{6}}{\left(1 - \frac{5}{6}\right)^2} = 6.$$

Für  $X_2$  und  $X_3$  mit  $\mathbb{P}_{X_2} = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^{i-1} \frac{1}{6} \cdot \delta_{i^2}$  und  $\mathbb{P}_{X_3} = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^{i-1} \frac{1}{6} \cdot \delta_{i^3}$  ergibt sich analog<sup>2</sup>

$$\mathbb{E}(X_2) = 66 \quad \text{und} \quad \mathbb{E}(X_3) = 1086.$$

Für  $X_4$  und  $X_5$  mit  $\mathbb{P}_{X_4} = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^{i-1} \frac{1}{6} \cdot \delta_{2^i}$  und  $\mathbb{P}_{X_5} = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^{i-1} \frac{1}{6} \cdot \delta_{3^{i-1}}$  folgt aber

$$\mathbb{E}(X_4) = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^{i-1} \frac{1}{6} 2^i = \frac{2}{6} \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{10}{6}\right)^i = \infty$$

$$\mathbb{E}(X_5) = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^{i-1} \frac{1}{6} 3^{i-1} = \frac{1}{6} \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{15}{6}\right)^i = \infty.$$

N. Bernoulli schlussfolgert nun, dass der erwartete Gewinn nicht immer dem gewichteten Mittel der möglichen Gewinne entspricht. Um die Diskrepanz zwischen dem subjektiv erwarteten Gewinn und dem mathematischen Erwartungswert<sup>3</sup> zu beseitigen, fordert er, die kleinen Wahrscheinlichkeiten der großen Gewinne zu vernachlässigen, d.h. gleich null

---

*Pascal-Fermat correspondence*). Inspiriert von deren Überlegungen führte der niederländische Astronom, Mathematiker und Physiker Christiann Huygens (1629-1695) dann in *Van Rekeningh in Seplen van Geluck (Über Schlussfolgerungen im Würfelspiel, 1657)* den Begriff *Wert der Hoffnung* bei einem Glücksspiel (*the worth of the chance*) als das gewichtete Mittel aller möglichen Gewinne ein. Diese Idee der *mathematischen Hoffnung* fand in den folgenden Jahren auch in Bereichen wie Versicherungswesen breite Anwendung.

<sup>2</sup>Man benutzt die ersten Ableitungen der geometrische Reihe.

<sup>3</sup>N. Bernoulli spricht in diesem Zusammenhang auch von der Diskrepanz zwischen der mathematischen und moralischen Hoffnung (vgl. [Ber2]).

zu setzen (vgl. [Ber2]). Diese Überlegungen rechtfertigt N. Bernoulli dadurch, dass es moralisch sicher sei, dass die Gewinne  $2^i$  bzw.  $3^i$  für große  $i \in \mathbb{N}_0$  nicht auftreten.

Allgemein sollten nach N. Bernoulli Ereignisse mit extrem kleinen Wahrscheinlichkeiten als moralisch unmöglich betrachtet werden, weil sie so selten eintreten, dass sie vom menschlichen Gemüt nicht wahrgenommen werden. Im Sankt–Petersburg–Spiel etwa treten lange Sequenzen von Zahl so selten auf, dass man diese (und daher auch die damit verbundenen hohen Gewinne) als moralisch unmöglich erachten sollte. Die Schwierigkeit besteht nach N. Bernoulli nun darin, jene Grenzen zu finden, ab denen die Wahrscheinlichkeiten gleich null gesetzt werden können. Diese sind jedoch keineswegs eindeutig, sondern haben eher einen gewissen Spielraum, den es zu bestimmen gilt.

N. Bernoulli behauptet nun weiter, dass kein vernünftiger Spieler für das Sankt–Petersburg–Spiel<sup>4</sup> 20 (Münzen) zahlen würde, weil die Wahrscheinlichkeit eines positiven Reingewinnes (Gewinn größer als Einsatz) sehr klein und der Verlust daher moralisch sicher ist.

Nach dieser Argumentation ist ein Gewinn von 20 (Münzen) also moralisch unmöglich für den Spieler. Somit sind dann aber auch die (höheren) Gewinne 32, 64, 128, 256 usw., deren kumulierte Wahrscheinlichkeit

$$\frac{1}{64} + \frac{1}{128} + \frac{1}{256} + \dots = \frac{1}{32}$$

beträgt, moralisch unmöglich. Daraus folgt nun, dass alle Wahrscheinlichkeiten, die  $\frac{1}{32}$  nicht überschreiten, als vernachlässigbar, bzw. die Wahrscheinlichkeit  $\frac{31}{32}$  als totale Gewissheit betrachtet werden können (vgl. [Ber2]). Für das Sankt–Petersburg–Spiel mit der Gewinnauszahlung  $2^{i-1}$  für Kopf erstmalig im  $i$ -ten Wurf ergibt sich nach dieser Argumentation eine mathematische Hoffnung von

$$\sum_{i=1}^4 \left(\frac{1}{2}\right)^i 2^{i-1} = 2.$$

Da N. Bernoulli mit seiner eigenen Lösung, der Vernachlässigung kleiner Wahrscheinlichkeiten, nicht zufrieden war (vgl. [Sha]), konsultierte er andere Mathematiker, so auch Montmort (1713) und seinen jüngeren Cousin Daniel Bernoulli<sup>5</sup> (1728), die ihn ebenfalls von keiner Lösung überzeugen konnten. Montmort selbst war ratlos und zeigte nur wenig Interesse (dreijähriger Briefwechsel von 1713–1716). Nach Spiess hat er „an das Problem keinen andern Beitrag geleistet, als dass er es publiziert hat“<sup>6</sup> ([Spi] S. 560).

## 2.2 Gabriel Cramer

Der Schweizer Mathematiker Gabriel Cramer (1704–1752), Student von N. Bernoullis Onkel Johann Bernoulli (1667–1748), sendete N. Bernoulli **1728** seine Lösung. Er vereinfachte das Würfelproblem auch zum fairen Münzwurfproblem, wie in der Einleitung

<sup>4</sup>N. Bernoulli betrachtet die Gewinnauszahlung  $2^{i-1}$  für Kopf erstmalig im  $i$ -ten Wurf.

<sup>5</sup>Die Briefwechsel zwischen N. Bernoulli und Montmort bzw. D. Bernoulli sind in [Ber2] nachzulesen.

<sup>6</sup>Montmort publizierte das Paradoxon bereits 1713 in seinem *Essay d'analyse sur les jeux de hazard*. Wirklich bekannt wurde es aber erst 25 Jahre später durch D. Bernoulli.

beschrieben.

Nach Cramer liegt die Diskrepanz zwischen der mathematischen und moralischen Hoffnung darin begründet, dass die Mathematiker (in der Theorie) Geld nach seiner Menge, vernünftige Menschen (in der Praxis) aber nach dem Nutzen, den sie daraus ziehen, bewerten (vgl. [Ber2]). Um einen fairen Preis zu bestimmen, muss der Gewinn demnach in Abhängigkeit des Nutzens und nicht monetär bewertet werden. Der empfundene Nutzen wächst dabei nicht notwendigerweise linear mit dem Gewinn.

In seinem Brief vom 3. Juli 1728 schlägt Cramer folgende zwei Lösungen vor:

- (1) Es existiert ein Punkt, ab dem höhere Gewinne keinen zusätzlichen Nutzen mehr bringen. Bringt z.B. ein Gewinn größer als  $2^{24} = 16.777.216$  nicht mehr Freude als der Gewinn  $2^{24}$  selbst, so reduziert sich der erwartete Gewinn moralisch gesehen auf

$$\sum_{i=1}^{24} \left(\frac{1}{2}\right)^i 2^i + \sum_{i=25}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^i 2^{24} = 25.$$

- (2) Der empfundene Nutzen von großen Geldmengen kann durchaus auch unendlich groß sein, ist aber nur proportional zur Quadratwurzel des monetären Wertes. Die Bewertungsfunktion

$$u_C(x) := \sqrt{x}$$

beschreibt, dass ein 4-mal so hoher Gewinn nur doppelt so hoch, ein 9-mal so hoher Gewinn nur 3-mal so hoch usw. eingeschätzt wird.

Cramer hat mit diesem Ansatz erstmals versucht, „in die mathematische Schätzung eines Vermögenswertes ein subjektives, psychologisches Moment einzuführen, indem dem objektiven Zahlenwert einer Geldsumme dessen Quadratwurzel als 'moralischer Wert' (Valeur morale) entgegengestellt wird“ ([Spi] S. 560). Er spricht in diesem Zusammenhang auch vom moralischen Erwartungswert (*Espérance morale*), der für das Sankt-Petersburg-Spiel

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^i \sqrt{2^i} = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^i = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}} = \sqrt{2} + 1$$

beträgt. Ein fairer Einsatz entspricht nun dem dazugehörigen monetären Wert, also

$$\left(\sqrt{2} + 1\right)^2 \approx 5,83.$$

Cramer betrachtet in seinem Brief an N. Bernoulli die Gewinnauszahlung  $2^{i-1}$  für Kopf erstmalig im  $i$ -ten Wurf. Er erhält als faire Einsätze demnach 13 (für (1)) und 2,9 (für (2)), wobei er 2,9 als den geeigneteren Wert ansieht (vgl. [Ber2]).

N. Bernoulli stimmt der Theorie von Cramer jedoch nicht zu und konsultiert im Oktober 1728 daraufhin seinen jüngeren Cousin Daniel Bernoulli. Bevor wir näher auf dessen Lösung eingehen, wollen wir noch N. Bernoullis Ansatz mit dem von Cramer vergleichen.

Nach der klassischen Theorie beträgt die mathematische Hoffnung eines Glücksspiels mit den Ausgängen  $(G_i)_{i \in I}$  und den dazugehörigen Wahrscheinlichkeiten  $(p_i)_{i \in I} \in [0, 1]$  mit  $\sum_{i \in I} p_i = 1$  gerade

$$\sum_{i \in I} p_i G_i.$$

Sowohl N. Bernoulli als auch Cramer rechtfertigen nun, warum die Sequenzen  $(G_i)_{i \in I}$  und  $(p_i)_{i \in I}$  durch  $(\hat{G}_i)_{i \in I}$  und  $(\hat{p}_i)_{i \in I}$  so ersetzt werden können, dass die Reihe konvergiert. Während sich Cramer den zweiten Faktor  $G_i$  vornimmt, setzt N. Bernoulli „dem moralischen Gewinn [...] eine 'moralische Wahrscheinlichkeit' entgegen“ ([Spi] S. 560). An beiden Ansätzen sind die willkürlich gewählten Sequenzen  $(\hat{G}_i)_{i \in I}$  und  $(\hat{p}_i)_{i \in I}$  zu kritisieren, denn

- ab wann kann man von vernachlässigbaren Wahrscheinlichkeiten sprechen?
- ab welchem Punkt haben höhere Gewinne keinen zusätzlichen Wert mehr?  
Und warum beschreibt  $\sqrt{x}$  den individuellen Nutzen aus dem Gewinn  $x$ ?

## 2.3 Daniel Bernoulli

**1731** schlägt Daniel Bernoulli (1700-1782) in einem Brief an N. Bernoulli vor, die Gewinne als Vermögenszuwächse nicht absolut, sondern in Abhängigkeit von Pauls aktuellem Vermögen zu bewerten. Ähnlich wie Cramer nimmt er sich damit den Faktor  $G_i$  der mathematischen Hoffnung vor und entwickelt erste Ideen der späteren Nutzentheorie<sup>7</sup>. D. Bernoulli löste das Problem damit zwar unabhängig von Cramer, aber dennoch ähnlich.

In **1738** veröffentlicht er seinen Ansatz in der Abhandlung *Specimen theoriae novae de mensura sortis* der Petersburger *Commentarii Academiae Scientiae Imperialis Petropolitanae* (vgl. *Exposition of a new theory on the measurement of risk*, [Ber1]). Mit der Veröffentlichung bekam das Paradoxon auch seinen Namen und seither haben sich nahezu alle Wahrscheinlichkeitstheoretiker mit diesem Problem beschäftigt.

Daniel Bernoullis Ansatz baut auf folgenden Annahmen auf (vgl. [Ber1]):

- (i) Zusätzliches Vermögen  $\Delta w$  führt zu zusätzlichem Nutzen  $\Delta u(w)$ .
- (ii) Der Grenznutzen  $\Delta u(w)$  ist indirekt proportional zum aktuellen Vermögen  $w$ .

Daraus folgt

$$\Delta u \propto \frac{\Delta w}{w} \quad \text{bzw.} \quad du = k \frac{1}{w} dw,$$

<sup>7</sup>D. Bernoullis Idee des abnehmenden Nutzens wird als Ursprung der (Grenz-)Nutzentheorie in den Wirtschaftswissenschaften angesehen (vgl. [Jor]). Die Erwartungswert-Nutzentheorie beschäftigt sich mit der Wahl zwischen Alternativen, deren unmittelbare Konsequenzen dem Entscheidungsträger nicht sicher bekannt sind. Die Grundidee ist, dass der Homo oeconomicus statt des erwarteten monetären Wertes (Erwartungswerttheorie) den erwarteten Nutzen betrachtet. Der Entscheidungsträger wird sich daher für die Alternative mit dem größten erwarteten Nutzen entscheiden (vgl. [SchWa]).

wobei  $k > 0$  von den individuellen Charakteristika der bewertenden Person abhängt. Wir können die lineare Differentialgleichung

$$du = k \frac{1}{w} dw \quad \text{mit der Anfangswertbedingung } u(A) = 0,$$

wobei  $A > 0$  das Vermögen vor dem Beginn des Spiels bezeichnet, leicht durch die Separationsmethode lösen.

$$\begin{aligned} \int_0^{u(x)} d\eta &= k \int_A^x \frac{1}{w} dw \\ \Rightarrow u(x) &= k \ln \left( \frac{x}{A} \right) \end{aligned}$$

Der Nutzen, den man durch den monetären Wert  $x$  erfährt, kann nach D. Bernoulli also durch die *Nutzenfunktion*

$$u_B(x) := k \ln \left( \frac{x}{A} \right) \quad \text{mit } k, A > 0$$

beschrieben werden<sup>8</sup>. Die Idee des abnehmenden Grenznutzens spiegelt sich dabei in der Konkavität der Logarithmusfunktion wider.

Statt des erwarteten monetären Gewinns aus dem Sankt-Petersburg-Spiel, beschrieben durch die Zufallsvariable  $Y$  mit (1.1), betrachtet D. Bernoulli den erwarteten Nutzen, abhängig vom Vermögen  $A > 0$ :

$$\mathbb{E}(u_B(A + Y)) = \sum_{i=1}^{\infty} \left( \frac{1}{2} \right)^i k \ln \left( \frac{A + 2^i}{A} \right).$$

Der moralische Wert  $D > 0$  des Sankt-Petersburg-Spiels erfüllt nun

$$\mathbb{E}(u_B(A + Y)) = u_B(A + D),$$

das heißt

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left( \frac{1}{2} \right)^i k \ln(A + 2^i) - k \ln(A) = k \ln(A + D) - k \ln(A),$$

und es folgt

$$D = \exp \left( \sum_{i=1}^{\infty} \left( \frac{1}{2} \right)^i \ln(A + 2^i) \right) - A. \quad (2.1)$$

Aus Tab. 2.1 ist ersichtlich, dass  $D$  logarithmisch in  $A$  wächst. Trotz größerem Vermögen nimmt die Risikofreudigkeit nur langsam zu und der Spieler ist selbst bei einem Vermögen von 1 Million nicht bereit, vielmehr als 20 als Einsatz zu zahlen.

---

<sup>8</sup>D. Bernoulli erhält die Nutzenfunktion  $u_B$  durch geometrische Überlegungen (vgl. [Ber1]).

Vermögen $A$	1	10	100	1.000	10.000	100.000	1.000.000
Wert des Spiels $D$	4,28	5,47	7,89	10,97	14,24	17,55	20,87

**Tab. 2.1:** Moralischer Wert  $D$  des Sankt–Petersburg–Spiels nach D. Bernoulli in Abhängigkeit des Vermögens  $A > 0$  vor Beginn des Spiels

Sowohl Cramers als auch D. Bernoullis konkave Nutzenfunktionen

$$u_C(x) = \sqrt{x} \quad \text{und} \quad u_B(x) = k \ln\left(\frac{x}{A}\right)$$

sind sehr speziell gewählt. Obwohl D. Bernoulli seinen Ansatz besser begründete als Cramer, ist dieser dennoch reichlich ad hoc.

Einige Mathematiker, darunter auch Pierre–Simon Laplace (1749-1827), übernahmen D. Bernoullis Lösung ohne Einwendungen (vgl. [Sha]). Erst 200 Jahre später wurde die Lösung berechtigterweise durch Karl Menger (1902-1985) wie folgt kritisiert.

Während die subjektive Hoffnung (der erwartete Nutzen) beim Sankt–Petersburg–Spiel zwar endlich ist, kann durch eine Abänderung der Gewinnauszahlung

$$\exp(2^i) \text{ für Kopf erstmalig im } i\text{-ten Wurf}$$

ein ähnliches Spiel<sup>9</sup> konstruiert werden, bei dem sowohl die mathematische Hoffnung

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^i \exp(2^i) = \infty,$$

als auch die subjektive Hoffnung (bewertet mit logarithmischer Nutzenfunktion)

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^i \ln\left(\frac{A + \exp(2^i)}{A}\right) > \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^i \ln(\exp(2^i)) - \ln(A) = \infty$$

unendlich sind.

Allgemeiner heißt das:

**Lemma 2.3.1.** ([Men] S. 468) *Für jede durch eine unbeschränkte Funktion  $f(w)$  erfolgende Bewertung von Vermögenszuwächsen gibt es ein dem Petersburger Spiel verwandtes Glücksspiel, bei welchem die subjektive Hoffnung des Spielnehmers unter Zugrundelegung der subjektiven Bewertungsfunktion  $f(w)$  unendlich ist.*

*Beweis.* Für eine gegebene unbeschränkte Funktion  $f$  wähle dazu die Gewinnauszahlung

$$G_i \text{ für Kopf erstmalig im } i\text{-ten Wurf}$$

<sup>9</sup>P.A. Samuelson (1915-2009) spricht in diesem Zusammenhang vom Super–Sankt–Petersburg–Paradoxon (vgl. [Sam]).

mit

$$f(G_i) \geq 2^i.$$

□

Eine endliche subjektive Hoffnung wird also durch eine beschränkte Nutzenfunktion gesichert. Für Cramers Bewertungsfunktion

$$u_{\widehat{C}}(x) := x \cdot \mathbb{1}_{\{x \leq \widehat{C}\}} + \widehat{C} \cdot \mathbb{1}_{\{x > \widehat{C}\}},$$

wobei  $\widehat{C}$  der Betrag ist, ab dem zusätzliches Vermögen keinen zusätzlichen Nutzen mehr stiftet, kann demnach kein Super-Sankt-Petersburg-Spiel konstruiert werden. Die praktische Anwendbarkeit dieser speziellen Nutzenfunktion (linearer Anstieg bis  $\widehat{C}$ , dann plötzlicher Knick und konstant  $\widehat{C}$ ) wird jedoch von Menger zu Recht in Frage gestellt (vgl. [Men]).

Wir schließen uns seiner Meinung an, dass auch beschränkte Nutzenfunktionen allein nicht ausreichend sind, um das Verhalten bei Glücksspielen zu erklären. So dürfte der Grund, weshalb sich Paul weigert, hohe Einsätze zu zahlen, wohl eher in den geringen Wahrscheinlichkeiten großer Gewinne und nicht im abnehmenden Grenznutzen liegen. In [Men] schlägt Menger vor, neben den Einflussgrößen Anfangsvermögen und Vermögenszuwachs auch die individuellen Charaktereigenschaften des Spielers (wie z.B. die Unterschätzung kleiner Wahrscheinlichkeiten) zu betrachten. Das explizite Aufstellen einer einheitlichen Bewertungsformel lehnt Menger auf Grund der Fülle individueller Parameter jedoch ab.

P.A. Samuelson diskutiert in [Sam] weitere konkave Nutzenfunktionen, die zudem die Risikofreudigkeit eines Spielers berücksichtigen. Er betrachtet außerdem den Fall, dass beide, Peter und Paul, nur über endliches Vermögen verfügen. In diesem Zusammenhang stellt Samuelson auch berechtigterweise die Frage, warum es nicht durchaus Menschen geben sollte, deren Nutzen aus Vermögenswerten sich nicht beschränken lässt und kritisiert damit Mengers Ansatz (vgl. [Sam]). Auch T. Cowen und J. High betonen in [CoHi], dass keine überzeugende Begründung existiert, weshalb der Nutzen notwendigerweise beschränkt ist.

Wir wollen an dieser Stelle auf Alternativen zur Erwartungswert-Nutzentheorie verweisen und

- (a) das *Konzept der Risikoaversion* sowie
- (b) die *Cumulative Prospect Theory* (CPT)

als weit verbreitete Ansätze nennen, wenn es darum geht, Irrationalitäten des menschlichen Urteils bei wirtschaftlichen Entscheidungen zu erklären. Camerer ([Cam]) und Samuelson ([Sam]) diskutieren das Sankt-Petersburg-Paradoxon bezüglich der Risikoaversion, Blavatsky ([Bla]) sowie Rieger und Wang ([RiWa]) im Kontext der CPT.

## 2.4 Leonhard Euler

Um nachzuvollziehen, wie Leonhard Euler (1707-1783) an das Sankt-Petersburg-Problem heranging, stützen wir uns auf den erst 79 Jahre nach Eulers Tod veröffentlichten Artikel *Vera estimatio sortis in ludis* (*On the true valuation of the risk in games*, [E811]). Diese Arbeit spiegelt Eulers Ansichten über die Vorteilhaftigkeit von Glücksspielen wider. Ohne jedoch seine Überlegungen explizit auf das Paradoxon angewendet zu haben, endet Eulers Schrift abrupt und Ed Sandifer spekuliert in [San] über mögliche Gründe. Zunächst datiert er den Artikel auf die Zeit **1730-1731** zurück und mutmaßt dann, dass Euler ihn nicht zum Ende brachte, da der zur gleichen Zeit in Petersburg lebende und arbeitende Daniel Bernoulli seine Lösung zum Paradoxon zuerst fertig stellte und herausgab.

Statt dem Münzwurf betrachtet Euler den fairen Würfelwurf als äquivalentes Spiel, welches endet, sobald eine ungerade Zahl fällt (vgl. [E811]). Ähnlich wie D. Bernoulli ist er der Meinung, dass eine Person einen bestimmten Geldbetrag in Abhängigkeit seines aktuellen Vermögens individuell bewertet und stellt damit ebenso den Nutzen in den Vordergrund. Je größer das aktuelle Vermögen eines Spielers ist, desto geringer wird der zusätzliche Geldbetrag bewertet.

Im Mittelpunkt von Eulers Konzept stehen somit analog zu D. Bernoulli die Idee des Status und des abnehmenden Grenznutzens. Für die Berechnung des *moralischen Erwartungswertes* verwendet Euler aber statt des arithmetischen das geometrische Mittel<sup>10</sup>.

**Definition 2.4.1.** *Es sei ein Glücksspiel gegeben, bei dem man mit Wahrscheinlichkeit  $p_i \in [0, 1]$  einen Betrag  $G_i \geq 0$  gewinnt, wobei  $i \in I$  und  $\sum_{i \in I} p_i = 1$ . Bezeichnet  $A > 0$  das Vermögen vor dem Beginn des Spiels, so beträgt der Wert des Spiels nach Euler*

$$\prod_{i=1}^{\infty} (A + G_i)^{p_i}.$$

Wir wollen nun den Wert eines Sankt-Petersburg-Spiels in Abhängigkeit des Vermögens  $A > 0$  nach Eulers Methode ermitteln und stellen eine Äquivalenz zu D. Bernoullis Ansatz fest. Für beide Mathematiker entspricht der Wert eines Sankt-Petersburg-Spiels (vgl. dazu Gleichung (2.1))

$$D = \prod_{i=1}^{\infty} (A + 2^i)^{\left(\frac{1}{2}\right)^i} - A = \exp\left(\sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^i \ln(A + 2^i)\right) - A,$$

und wir verweisen daher auf Tab. 2.1.

**Bemerkung 2.4.2.** *Statt des arithmetischen das geometrische Mittel zu betrachten, macht insofern Sinn, als dass es unabhängiger von Ausreißern ist. Die seltenen hohen*

<sup>10</sup>Euler war mit Huygens Definition der mathematischen Hoffnung eines Glücksspiels (siehe S. 9) unzufrieden und wies darauf hin, dass ein Spieler einen Verlust von  $G > 0$  stärker gewichtet als einen Gewinn von  $G$  (vgl. [Dut]). Ein Spiel, bei dem man mit gleicher Wahrscheinlichkeit entweder  $G$  gewinnen oder verlieren kann, ist demnach nicht lohnenswert für den Spieler (vgl. [E811]).

Gewinne, wie sie beim Sankt-Petersburg-Spiel auftreten, fallen daher bei diesem Mittelwert nicht so sehr ins Gewicht (vgl. Tab. 2.2). Generell liefert das geometrische Mittel bei schiefen Verteilungen<sup>11</sup> häufig einen plausibleren Wert als das arithmetische Mittel. Da das geometrische Mittel stets kleiner gleich dem arithmetischen Mittel ist, ist der erwartete Wert eines Spiels nach Euler stets kleiner gleich dem von Huygens.

i	G <sub>i</sub>	p <sub>i</sub>	arithmetisches Mittel		geometrisches Mittel	
			$2^i \frac{1}{2^i}$	$\sum_{j=1}^i 2^j \frac{1}{2^j}$	$(2^i)^{\frac{1}{2^i}}$	$\prod_{j=1}^i (2^j)^{\frac{1}{2^j}}$
1	2	$\frac{1}{2}$	1	1	1,41	1,41
2	4	$\frac{1}{4}$	1	2	1,41	2,00
3	8	$\frac{1}{8}$	1	3	1,30	2,59
4	16	$\frac{1}{16}$	1	4	1,19	3,08
5	32	$\frac{1}{32}$	1	5	1,11	3,44
6	64	$\frac{1}{64}$	1	6	1,07	3,67
7	128	$\frac{1}{128}$	1	7	1,04	3,81
8	256	$\frac{1}{256}$	1	8	1,02	3,89
9	512	$\frac{1}{512}$	1	9	1,01	3,94
10	1024	$\frac{1}{1024}$	1	10	1,01	3,97
				$\xrightarrow{i \rightarrow \infty} \infty$		$\xrightarrow{i \rightarrow \infty} 4$

Tab. 2.2: Vergleich des gewichteten arithmetischen und des gewichteten geometrischen Mittels

## 2.5 Georges Buffon

Der Naturalist Georges-Louis Leclerc, Comte de Buffon (1707-1788) betrachtet das Paradoxon aus mehreren Blickwinkeln und schlägt verschiedene Lösungsansätze vor, die aber ähnliche Ergebnisse liefern<sup>12</sup>.

- (1) Analog zu N. Bernoulli schlägt Buffon z.B. vor, kleine Wahrscheinlichkeiten zu vernachlässigen und argumentiert wie folgt:

Ein 56 Jahre alter Mensch, der glaubt gesund zu sein, würde die Wahrscheinlichkeit innerhalb der nächsten 24 Stunden zu sterben, ignorieren. Tatsächlich beträgt diese Wahrscheinlichkeit gemäß Sterblichkeitstabellen (um 1750) aber gerade  $\frac{1}{10189}$  (vgl. [Dut]).

<sup>11</sup>Mit schiefen Verteilungen meinen wir alle Verteilungen, die nicht symmetrisch sind. Die Verteilung der Sankt-Petersburg-Zufallsvariablen ist rechtsschief.

<sup>12</sup>Buffon betrachtet die Gewinnauszahlung  $2^{i-1}$  für Kopf erstmalig im  $i$ -ten Wurf und erhält daher den jeweils halben Einsatz, d.h. 6,5 für (1), 4,5 für (2),  $\frac{5}{2}2^s$  für (3), 4,91 für (4).

Alle Wahrscheinlichkeiten kleiner gleich  $\frac{1}{10.000}$  können nach dieser Argumentation daher gleich null gesetzt werden. Wegen

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{13} < \frac{1}{10.000} < \left(\frac{1}{2}\right)^{14}$$

beträgt die moralische Hoffnung aus dem Sankt–Petersburg–Spiel für Buffon

$$\sum_{i=1}^{13} \left(\frac{1}{2}\right)^i 2^i = 13.$$

Wir weisen an dieser Stelle darauf hin, dass neben N. Bernoulli (vgl. Abschnitt 2.1) und Buffon u.a. auch D. Bernoulli und Borel Befürworter der Vernachlässigung kleiner Wahrscheinlichkeiten waren. Sie schlugen aber die Grenzen  $\frac{1}{100.000}$  bzw.  $\frac{1}{1.000.000}$  vor (vgl. [Dut]). Die Unterschiede in der Wahl der Grenzen, ab der Wahrscheinlichkeiten vernachlässigbar sind, zeigen den Ad–hoc–Charakter dieses Lösungsansatzes.

- (2) Ähnlich willkürlich erscheint uns Buffons Idee, dass die Gewinne  $2^i$  einen Nutzen von  $\left(\frac{9}{5}\right)^i$ ,  $i \in \mathbb{N}_0$ , stiften, wonach die moralische Hoffnung gegeben ist durch

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^i \left(\frac{9}{5}\right)^i = 9.$$

Anders als D. Bernoulli und Cramer bestimmt er diese Bewertungsfunktion aber dadurch, dass er die moralische Hoffnung vorgibt (vgl. [Jor]).

- (3) Buffon entwickelte außerdem einen Ansatz, bei dem der Einsatz von der Anzahl der durchgeführten Spiele abhängt. Angenommen Peter und Paul vereinbaren  $2^s$ ,  $s \in \mathbb{N}_0$ , Spiele zu spielen. Ausgehend von den A–priori–Wahrscheinlichkeiten

$$\mathbb{P}(Y = 2^i) = \left(\frac{1}{2}\right)^i, \quad i \in \mathbb{N}_0,$$

vermutet man, dass von den  $2^s$  Spielen

- $2^{s-1}$  nach dem ersten Münzwurf,
- $2^{s-2}$  nach dem zweiten Münzwurf,
- ...
- $2^{s-s}$  nach dem s–ten Münzwurf enden.

Für diese

$$\sum_{i=1}^s 2^{s-i} = 2^s - 1$$

Spiele erwartet man also einen Gesamtgewinn von

$$\sum_{i=1}^s \underbrace{2^{s-i}}_{\text{Anzahl}} \cdot \underbrace{2^i}_{\text{Gewinn}} = s2^s,$$

während man zudem intuitiv annimmt, dass eines der  $2^s$  Spiele länger als  $s$  Münzwürfe andauert und einen Gewinn größer gleich  $2^{s+1}$  für Paul bedeutet. Nach Buffon hat dieses eine Spiel aber keinen wesentlichen Anteil am Gesamtgewinn und kann daher vernachlässigt werden (vgl. [Dut]). Ein fairer Einsatz für die  $2^s$  Spiele wäre für ihn daher gerade  $s2^s$  oder  $s$  pro Spiel.

Buffons eigensinniger Meinung, seltene hohe Gewinne (bzw. kleine Wahrscheinlichkeiten siehe (1)) zu ignorieren, stimmen wir nicht zu und verweisen auf Robert William Vivian (vgl. [Viv]), der Buffons Ansatz wie folgt weiter ausführt.

Wir wissen, dass sich die Wahrscheinlichkeit, dass das Sankt–Petersburg–Spiel weiter andauert, mit jedem Münzwurf halbiert. Damit beträgt die Wahrscheinlichkeit, dass alle  $2^s$  Spiele nach je

- $s+1$  Münzwürfen enden:  $\frac{1}{2}$ ,
- $s+2$  Münzwürfen enden:  $\frac{3}{4}$ ,
- ...
- $s+k$  Münzwürfen enden:  $\frac{2^k-1}{2^k}$ .

R.W. Vivian schlägt nun einen Einsatz  $s + \lambda$  pro Spiel vor, wobei  $\lambda > 0$  als eine Art Risikoaufschlag gesehen werden kann<sup>13</sup>. Möchte Peter mit einer Wahrscheinlichkeit von

$$\sum_{i=1}^m \left(\frac{1}{2}\right)^i = \frac{2^m - 1}{2^m}, \quad m \in \mathbb{N}_0$$

in der Lage sein, die Gewinne aus den  $2^s$  Spielen auszahlen zu können, so würde er von Paul einen Einsatz von

$$s + m$$

pro Spiel verlangen (vgl. [Viv]). Der Einsatz hängt daher sowohl von der Anzahl der Spiele als auch vom gewünschten Sicherheitsniveau von Peter ab. Während Vivian diese Lösung nur für  $2^s$ ,  $s \in \mathbb{N}_0$ , Spiele diskutiert, betrachtet Ludger Hinners–Tobrägel in [Hin] eine beliebige Anzahl von Spielen und zeigt, dass die Idee problemlos übertragen werden kann.

- (4) Buffon überprüfte seine theoretischen Argumente in der Praxis und ließ ein Kind  $2^{11} = 2048$  Sankt–Petersburg–Spiele durchführen (vgl. Abb. 2.1). Gemäß [Pia] versuchte er somit erstmals, einen empirischen Mittelwert der Gewinne des Sankt–Petersburg–Spiels zu ermitteln.

<sup>13</sup>Vivian betrachtet statt der Auszahlung  $2^i$  die Auszahlung  $2^{i-1}$  für Kopf erstmalig im  $i$ -ten Wurf und erhält daher  $\frac{s}{2} + \lambda$ .

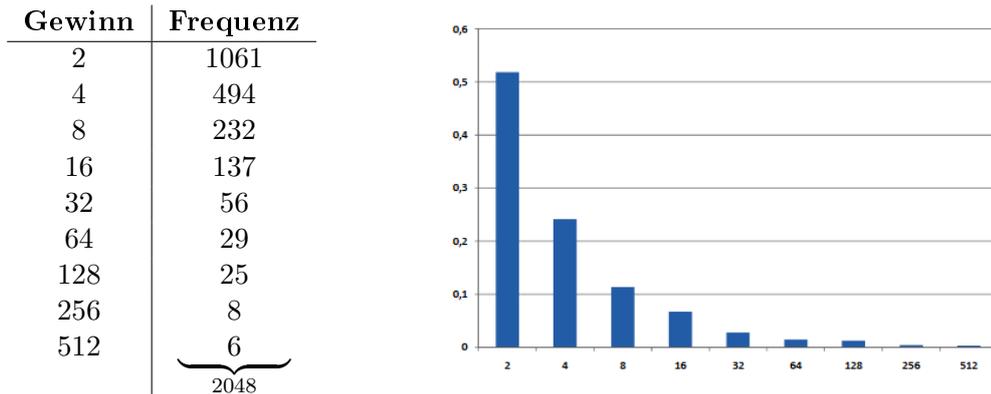


Abb. 2.1: Ergebnisse von Buffons Experiment

Mit obiger Argumentation der A-priori-Wahrscheinlichkeiten (vgl. (3)) kann man einen Gesamtgewinn von  $11 \cdot 2^{11} = 22528$  erwarten und ein fairer Einsatz wäre daher

$$11 \text{ pro Spiel.}$$

Buffon betrachtet nun den sich aus dem Experiment ergebenden durchschnittlichen Gewinn von rund

$$9,82 \text{ pro Spiel}$$

als einen Nachweis seiner Überlegungen (vgl. [Dut]). Er räumt zwar zugleich ein, dass mehr Spiele zu einem höheren durchschnittlichen Gewinn geführt hätten, argumentiert dann aber, dass ein Paul und ein Peter nicht mehr als 2000 Spiele spielen würden.

1838 wiederholt Augustus De Morgan (1806-1871) Buffons Experiment und erhält bei je 2048 Spielen durchschnittliche Gewinnauszahlungen von beispielsweise 52 oder 11,24 (vgl. [Dut]<sup>14</sup>). Dies zeigt, dass auch bei nur 2048 Spielen enorme Unterschiede der durchschnittlichen Gewinne auftreten und der empirische Mittelwert von nur einer Simulation keinen zuverlässigen Wert liefert.

Weitere Ergebnisse von Simulationen des Sankt-Petersburg-Spiels findet man z.B. in [Pia], [Cea] oder Tab. 5.5 in Abschnitt 5.2.4. Zudem besteht die Möglichkeit, im Internet selbst Sankt-Petersburg-Spiele zu spielen (vgl. [Web1] oder [Web2]).

## 2.6 Jean d’Alembert

Der französische Mathematiker und Philosoph Jean-Baptiste le Rond d’Alembert (1717-1783) nutzt in [Ale] das Sankt-Petersburg-Paradoxon, um seine Zweifel an der Wahrscheinlichkeitsrechnung und insbesondere der Theorie der Fairness bei Glücksspielen kundzutun. So fordert er, dass bei der Bestimmung eines fairen Einsatzes nicht allein die

<sup>14</sup>Augustus De Morgan betrachtet ebenso wie Buffon die Auszahlung  $2^{i-1}$  für Kopf erstmalig im  $i$ -ten Wurf und erhält daher 26 bzw. 5,62.

mathematischen Berechnungen, sondern auch andere Faktoren (psychologisch, persönlich) miteinbezogen werden müssen. Er beharrt beispielsweise darauf, dass man zwischen physisch möglichen und metaphysisch<sup>15</sup> möglichen Ereignissen unterscheiden muss. Ähnlich wie N. Bernoulli und Buffon plädiert auch er für die Vernachlässigung kleiner Wahrscheinlichkeiten und setzt seine untere Grenze bei  $(\frac{1}{2})^{13}$  (vgl. [Sam]). Paul kann demnach einen Gewinn von 13 aus dem Sankt–Petersburg–Spiel erwarten.

Statt eine eindeutige Lösung vorzuschlagen, greift Jean d’Alembert in [Ale] verschiedene Überlegungen auf, wobei ihm einige Irrtümer<sup>16</sup> unterlaufen (vgl. [Han] oder [Sam]). So ist er z.B. davon überzeugt, dass die Wahrscheinlichkeit für Kopf zunimmt, je öfter Zahl hintereinander fällt. Wir wollen an dieser Stelle bemerken, dass seine eigensinnigen Betrachtungsweisen trotz einiger Fehlschlüsse keinesfalls wertlos sind. So haben sie Anstoß zu neuen Überlegungen gegeben und sind auch heute noch aktuell.

Erst kürzlich hat z.B. der Ökonom Kim Kaivanto in [Kai1] und [Kai2] begründet, weshalb die Intuition, dass man bei einer langen Sequenz von Zahl im nächsten Wurf eher Kopf erwartet, bei der Berechnung des moralischen Erwartungswertes durchaus berücksichtigt werden sollte und macht in diesem Kontext auch auf den sogenannten *Spielertrugschluss*<sup>17</sup> aufmerksam. Er stützt sich dabei auf die Ergebnisse aus empirischen Studien, die subjektive Autokorrelationen bei (eigentlich voneinander unabhängigen) Münzwürfen bestätigen. So belegen die meisten Studien (vgl. [Kai1])

$$\mathbb{P}(Kopf | Zahl) = 0,6 \quad \text{bzw.} \quad \mathbb{P}(Zahl | Zahl) = 0,4.$$

Bezeichnen wir mit  $p_i$  die Wahrscheinlichkeit für Kopf erstmalig im  $i$ -ten Wurf, so erhalten wir wegen

$$p_i = \begin{cases} \mathbb{P}(Kopf) = \frac{1}{2} & \text{falls } i = 1 \\ \frac{1}{2}\mathbb{P}(Kopf | Zahl)\mathbb{P}(Zahl | Zahl)^{i-2} = 0,3 \cdot 0,4^{i-2} & \text{falls } i \geq 2 \end{cases}$$

einen moralischen Erwartungswert von

$$\sum_{i=1}^{\infty} p_i 2^i = 1 + \sum_{i=2}^{\infty} 0,3 \cdot 0,4^{i-2} \cdot 2^i = 1 + 4 \cdot 0,3 \sum_{i=0}^{\infty} (0,4 \cdot 2)^i = 1 + 1,2 \frac{1}{1 - 0,8} = 7.$$

In [Kai1] und [Kai2] diskutiert der Autor weitere empirisch ermittelte Werte für die bedingten Wahrscheinlichkeiten und die sich daraus ergebenden moralischen Erwartungswerte. Wir wollen an dieser Stelle festhalten, dass diese Werte (7 oder 5,44 siehe [Kai2]) durchaus denen entsprechen, die man für das Sankt–Petersburg–Spiel bereit ist zu zahlen (vgl. Abschnitt 2.12).

<sup>15</sup> physisch unmöglich, wie etwa 100 mal Kopf in Folge

<sup>16</sup> D’Alembert beharrt z.B. darauf, dass beim Roulette-Spiel funktionierende Gewinnstrategien existieren (vgl. dazu auch die Verdopplungsstrategie in Abschnitt 3.2).

<sup>17</sup> Mit dem Spielertrugschluss ist ein weitverbreiteter logischer Fehlschluss gemeint, der der folgenden falschen Intuition folgt: *Ein zufälliges Ereignis wird umso wahrscheinlicher, je länger es nicht eingetreten ist.*

## 2.7 Marquis de Condorcet

Der französische Mathematiker, Philosoph und Politiker Marquis de Condorcet (1743-1794) war wie Buffon der Meinung, dass kleine Wahrscheinlichkeiten vernachlässigt werden dürfen (vgl. [Sam]). Er wies zudem auf die Endlichkeit der Ressourcen *Zeit* und *Vermögen* hin (vgl. [Sha]). Eine Begrenzung der verfügbaren Zeit oder des Vermögens<sup>18</sup> führt zu einer maximalen Anzahl der Münzwürfe, die wir mit  $N \in \mathbb{N}_0$  bezeichnen. Vereinbaren Peter und Paul nun eine Gewinnauszahlung von  $2^N$ , falls Kopf auch bis zum  $N$ -ten Wurf noch nicht gefallen ist, so ergibt sich eine mathematische Hoffnung<sup>19</sup> von

$$\sum_{i=1}^N \left(\frac{1}{2}\right)^i 2^i + \sum_{i=N+1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^i 2^N = N + 1,$$

und die erwartete Spieldauer reduziert sich auf

$$\sum_{i=1}^N \left(\frac{1}{2}\right)^i i = 2 - \frac{N+2}{2^N} \in \left[\frac{1}{2}, 2\right).$$

Da der Erwartungswert für dieses modifizierte Spiel linear in  $N$  wächst, hat Peter für große  $N$  auch hohe Einsätze zu zahlen (Kritik von d'Alembert, vgl. [Dut]). Condorcet betont aber, dass der mathematische Erwartungswert in einem fairen Spiel ungefähr dem arithmetischen Mittel der Gewinne von vielen Spielwiederholungen entspricht. Er weist somit darauf hin, dass auch diese hohen Einsätze langfristig gesehen, d.h. bei vielen Spielwiederholungen, fair für beide Spieler sind und entgegenet damit Alemberts Kritik.

## 2.8 Allen Whitworth

Der englische Mathematiker Allen Whitworth (1840-1905) fordert **1870** in [Whi], dass der Einsatz eines Glücksspiels vom aktuellen Vermögen  $A > 0$  abhängen und einen bestimmten Bruchteil von diesem ausmachen sollte. Er argumentiert, dass ein vorsichtiger Spieler in einer Sequenz von Spielen in jedem neuen Spiel statt eines fixen Betrages wohl eher einen fixen Anteil seines noch verfügbaren Vermögens setzt. Bezeichnen wir mit

- $A > 0$  das aktuelle Vermögen vor Beginn des Spiels,
- $(G_i)_{i \in I}$  die möglichen Gewinne,
- $(p_i)_{i \in I} \in [0, 1]$ ,  $\sum_{i \in I} p_i = 1$ , die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten,

<sup>18</sup>Auch Alexis Fontaine (1704-1771) und Siméon Denis Poisson (1781-1840) forderten, dass Peters begrenzte Fähigkeit, die Gewinne auszuzahlen, zu beachten ist (vgl. [Sha] oder [Jor]).

<sup>19</sup>Condorcet betrachtet statt der Auszahlung  $2^i$  die Auszahlung  $2^{i-1}$  für Kopf erstmalig im  $i$ -ten Wurf und erhält für den Erwartungswert  $\frac{N}{2} + 1$ , wobei  $N$  die maximale Anzahl der Münzwürfe ist.

so beträgt der Anteil, mit dem ein Spieler langfristig gesehen weder einen Gewinn noch einen Verlust einfahren wird, nach Whitworth (vgl. [Whi])

$$\frac{\prod_{i \in I} \left(1 + \frac{G_i}{A}\right)^{p_i} - 1}{\sum_{i \in I} \frac{p_i}{A+G_i}}.$$

Für das Sankt–Petersburg–Spiel ergibt sich

$$\frac{\prod_{i=1}^{\infty} \left(1 + \frac{2^i}{A}\right)^{\left(\frac{1}{2}\right)^i} - 1}{\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i(A+2^i)}}. \tag{2.2}$$

Betrachten wir den Zähler

$$\prod_{i=1}^{\infty} \left(1 + \frac{2^i}{A}\right)^{\left(\frac{1}{2}\right)^i} - 1 = \exp\left(\sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^i \ln\left(1 + \frac{2^i}{A}\right)\right) - 1,$$

so erkennen wir Ähnlichkeiten zu D. Bernoullis bzw. Eulers Lösung. Whitworths Wert des Sankt–Petersburg–Spiels in (2.2) differiert von D. Bernoullis in (2.1) nur geringfügig und nähert sich für wachsendes  $A$  immer mehr an (vgl. Tab. 2.3 und Tab. 2.1).

<b>Vermögen <math>A</math></b>	10	100	1.000	10.000	100.000	1.000.000
<b>Wert des Spiels</b>	7,82	8,41	11,07	14,26	17,56	20,88

**Tab. 2.3:** Moralischer Wert des Sankt–Petersburg–Spiels nach Whitworth in Abhängigkeit des Vermögens  $A > 0$

## 2.9 William Feller

Nach William Feller (1906-1970) ist die Frage nach einem fairen Einsatz für ein Glücksspiel nur in Verbindung mit dem Gesetz der großen Zahlen (GGZ) sinnvoll. In [Fel13] klärt er, wann der Erwartungswert zur Bestimmung eines fairen Einsatzes hinzugezogen werden kann und fordert schließlich endliche Varianzen. Für das Sankt–Petersburg–Spiel bemerkt er **1945**, dass es möglich ist, variable Einsätze so zu bestimmen, dass das Spiel im Sinne des schwachen GGZ gerecht wird. Die fairen Einsätze

$$\log_2 n \quad \text{pro Spiel}$$

(bzw.  $b_n = n \log_2 n$  für  $n$  Spiele) hängen dabei von der Anzahl  $n$  ( $n$  groß) der Spiele ab, die vor Spielbeginn festgelegt werden muss. Da Paul für jeden fixen, aber endlichen Einsatz langfristig gesehen (d.h. bei vielen Wiederholungen des Spiels) einen klaren Vorteil gegenüber Peter hat, ist die Idee der variablen Einsätze gerechtfertigt. Wir gehen in Abschnitt 5.1.2 näher auf diesen Ansatz ein und zeigen

$n$	10	100	1.000	10.000	100.000	1.000.000
$\log_2 n$	3,32	6,64	9,97	13,29	16,61	19,93

**Tab. 2.4:** Fairer Einsatz pro Spiel nach W. Feller in Abhängigkeit der Anzahl der Spiele

## 2.10 Hugo Steinhaus

Hugo Steinhaus (1887-1972) schlägt **1949** ähnlich wie Feller variierende (d.h. von der Anzahl  $n$  der Spiele abhängige) Einsätze  $(d_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  vor, die er wie folgt konstruiert (vgl. [CsSi1]):

Betrachte eine Folge von 2 und packe in jede 2. Lücke eine  $2^2 = 4$ . Im nächsten Schritt packe dann in jede noch verbleibende 2. Lücke eine  $2^3 = 8$ , im darauffolgenden Schritt in jede noch verbleibende 2. Lücke ein  $2^4 = 16$  usw.

Man erhält auf diese Weise die Steinhaus-Sequenz

$$2 \ 4 \ 2 \ 8 \ 2 \ 4 \ 2 \ 16 \ 2 \ 4 \ 2 \ 8 \ 2 \ 4 \ 2 \ 32 \ 2 \ \dots$$

Offensichtlich treten alle Werte  $2^i$ ,  $i \in \mathbb{N}_0$ , mit je einer Wahrscheinlichkeit  $(\frac{1}{2})^i$  auf. Den seltenen hohen Gewinnen stehen somit seltene hohe Einsätze gegenüber.

Der Satz von Glivenko–Cantelli rechtfertigt zudem, dass die so konstruierte Sequenz  $(d_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  der zu zahlenden Einsätze mit Wahrscheinlichkeit 1 die gleiche Verteilung hat wie die Gewinne, die durch die Sankt–Petersburg–Zufallsvariable  $Y$  mit (1.1) beschrieben werden (vgl. [CsSi1]).

In Tab. 2.5 ist dargestellt, wie oft der Einsatz  $2^i$ ,  $i \in \mathbb{N}_0$ , in einer Sequenz von  $2^m$ ,  $m \in \mathbb{N}$ , Spielen gezahlt wird.

Anzahl d. Spiele	Einsatz						
	2	4	8	16	...	$2^m$	$2^{m+1}$
1	1						
2	1	1					
4	2	1	1				
8	4	2	1	1			
...	...	...	...	...	...		
$2^m$	$2^{m-1}$	$2^{m-2}$	$2^{m-3}$	$2^{m-4}$	...	1	1

**Tab. 2.5:** Absolute Häufigkeit der Einsätze gemäß der Steinhaus-Sequenz

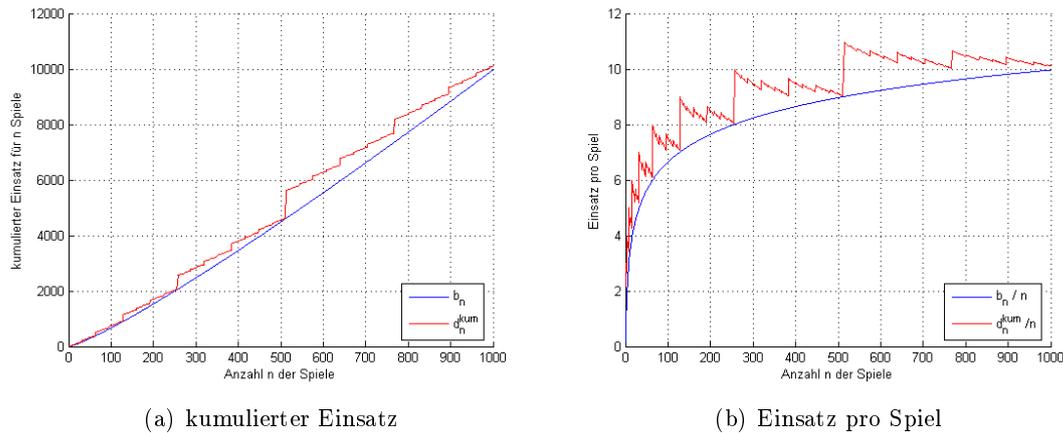
Der kumulierte Einsatz für die ersten  $2^m$  Spiele beträgt

$$d_{2^m}^{kum} = \sum_{i=1}^{2^m} d_i = \sum_{i=1}^m \underbrace{2^{m-i}}_{\text{Anzahl}} \underbrace{2^i}_{\text{Einsatz}} + \underbrace{2^{m+1}}_{\text{Einsatz}} = m2^m + 2^{m+1} = 2^m(m+2).$$

Ein Vergleich mit Fellers kumulierten Einsätzen  $b_{2^m}$  für  $2^m$  Spiele liefert offenbar  $\forall m \in \mathbb{N}$

$$d_{2^m}^{kum} = 2^m(m+2) > 2^m m = 2^m \log_2 2^m = b_{2^m}. \quad (2.3)$$

Abb. 2.2 kann man entnehmen, dass Fellers Einsätze für Paul wohl attraktiver erscheinen dürften.



**Abb. 2.2:** Während die kumulierten Einsätze (a) als auch die Einsätze pro Spiel (b) nach Feller (blau) und Steinhaus (rot) für  $n = 2^m$ ,  $m \in \mathbb{N}$ , Spiele nahe beieinander liegen, gehen sie für eine wachsende Anzahl  $n \neq 2^m$  von Spielen z.T. weit auseinander. Generell liegen Fellers Einsätze unter denen von Steinhaus.

## 2.11 Anders Martin–Löf

Anders Martin–Löf (\*1940) knüpft **1985** an Fellers Lösung an und beweist ein Grenzwerttheorem für den kumulativen Gewinn einer Sequenz von Petersburg–Spielen. Er erhöht den Einsatz auf

$$2^m + \log_2 n \quad \text{pro Spiel,}$$

wobei  $n$  die Anzahl der Spiele und  $2^m$  (genügend groß) eine Art Risikoaufschlag bezeichnen. Er zeigt, dass Peter mit diesen Einsätzen mit Wahrscheinlichkeit von nur  $1,8 \cdot 2^{-m}$  nicht in der Lage sein wird, den auszuzahlenden Gewinn zu zahlen. Wir vertiefen diesen Ansatz in Abschnitt 5.3.

## 2.12 Empirische Studien

Wir wollen abschließend Ergebnisse von empirischen Studien präsentieren, in denen Versuchspersonen direkt mit der Teilnahme an einem oder mehreren (modifizierten) Sankt–Petersburg–Spiel(en) konfrontiert und hinsichtlich ihrer Zahlungsbereitschaft untersucht worden sind. Bei den hier diskutierten Experimenten wurden jeweils die Gewinnauszahlung  $2^{i-1}$  Euro (bzw. Dollar) für Kopf erstmalig im  $i$ -ten Wurf betrachtet.

Levy und Sarnat berichten in [LeSa] von einer Studie mit einer Gruppe von Studenten, wobei die Anzahl der Teilnehmer nicht genannt wird. Während der höchste Angebotspreis für ein Sankt–Petersburg–Spiel 8 Dollar betrug, waren die meisten bereit, **2 – 3** Dollar zu zahlen.

Cox, Sadiraj und Vogt ([CoSaVo]) bieten ihren 30 Studenten Sankt–Petersburg–Spiele an, bei denen die Anzahl der Münzwürfe durch  $N \in \{1, 2, \dots, 8, 9\}$  begrenzt wird. Fällt Kopf nicht bis zum  $N$ -ten Wurf, so wird kein Gewinn ausgezahlt.

Wir wollen diese 9 Sankt–Petersburg–Spiele mit  $(\tilde{Y}_N)_{N=1, \dots, 9}$  bezeichnen, wobei das  $N$ -te Spiel  $\tilde{Y}_N$  maximal  $N$  Münzwürfe erlaubt. Der erwartete Gewinn aus dem  $N$ -ten Spiel beträgt

$$\mathbb{E}(\tilde{Y}_N) = \sum_{i=1}^N \left(\frac{1}{2}\right)^i 2^i = N \text{ Euro.}$$

Als Einsatz für das  $N$ -te Spiel verlangen Cox, Sadiraj und Vogt bewusst einen kleineren Betrag von

$$N - 0,25 \text{ Euro.}$$

Obwohl alle angebotenen Spiele gemäß der Erwartungswert–Theorie vorteilhaft für den Spieler sind, werden von den 270 ( $= 30 \cdot 9$ ) Spielen dennoch 127 (47%) abgelehnt. Dieses Ergebnis zeigt, dass die Zahlungsbereitschaft auch für modifizierte Petersburg–Spiele mit endlichem Erwartungswert nicht konsistent mit der Erwartungswert–Theorie ist.

In einer weiteren Studie bieten Hayden und Platt ihren 220 Teilnehmern jeweils an,

- ein Sankt–Petersburg–Spiel mit maximal  $N$  Münzwürfen, wobei  $N = 3, 5, 8, 10, 15$ ,
- $n$  klassische Sankt–Petersburg–Spiele, wobei  $n = 1, 10, 100, 1000$

zu spielen und fragen nach dem maximalen Einsatz, den diese für die jeweiligen Angebote zu zahlen bereit sind. Die Autoren notieren in [HaPl] folgende Ergebnisse:

- Für das klassische Sankt–Petersburg–Spiel werden Einsätze zwischen 0 und 50 Dollar angeboten. Die meisten Angebotspreise liegen aber bei **1 – 2** Dollar.
- Die Anzahl  $N$  der maximal zulässigen Münzwürfe beeinflusst die Angebotspreise nur wenig — diese liegen nun durchschnittlich bei **1,5 – 2** Dollar.
- Mit wachsender Anzahl  $n$  der Spielwiederholungen steigen auch die Angebotspreise pro Spiel. So z.B. werden bei 100 Spielen durchschnittlich 7 Dollar pro Spiel, bei 1000 Spielen durchschnittlich 10 Dollar pro Spiel angeboten.

Die in [HaPl] notierten, durchschnittlichen Angebotspreise von **1 – 2** Dollar für ein Sankt–Petersburg–Spiel mit der Gewinnauszahlung  $2^{i-1}$  für Kopf erstmalig im  $i$ -ten Wurf decken sich auch mit der von Schmeidler und Wakker beobachteten Zahlungsbereitschaft von **2 – 4** Dollar für ein Sankt–Petersburg–Spiel mit der Gewinnauszahlung  $2^i$  für Kopf erstmalig im  $i$ -ten Wurf (vgl. [SchWa]).

Dass zwei der genannten Studien erst vor kurzer Zeit durchgeführt wurden beweist, dass das Sankt–Petersburg–Paradoxon trotz seines langjährigen Bestehens auch heute noch nicht an Aktualität und Interesse verloren hat. Auch Allan Guts<sup>20</sup> Vortrag (*The Weak*

<sup>20</sup>Allan Gut, Uppsala University, Department of Mathematics, Uppsala

*Law Of Large Numbers And The St.Petersburg Game*) auf der letzten Stochastik–Tagung *GOCPs 2010* in Leipzig über das Problem, faire Einsätze für das Sankt–Petersburg–Spiel zu bestimmen, bestätigt die bestehende Präsenz.

# Kapitel 3

## Martingale-Ansatz

Das Sankt-Petersburg-Spiel soll im folgenden Kapitel im Kontext der Martingalthorie näher untersucht werden. Martingale, mit deren Hilfe sich unter anderem faire Spiele modellieren lassen, finden insbesondere wegen ihrer Eigenschaft, bereits unter schwachen Voraussetzungen zu konvergieren, eine breite Anwendung.

### 3.1 Grundlagen

#### 3.1.1 Zeitdiskrete Martingale

Im Folgenden bezeichne  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  den zu Grunde liegenden Wahrscheinlichkeitsraum. Dabei seien  $\Omega$  der Grundraum,  $\mathcal{F} \subset \text{Pot}(\Omega)$  die  $\sigma$ -Algebra und  $\mathbb{P}$  das Wahrscheinlichkeitsmaß. Für die Formulierung von Messbarkeitsaussagen betrachten wir zudem eine Filtrierung  $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  auf  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ , d.h. eine aufsteigende Folge von Sub- $\sigma$ -Algebren

$$\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2 \subset \dots \subset \mathcal{F}.$$

Analog zu der bedingten Erwartung, welche eine Vorhersage mit dem Wissenstand der  $\sigma$ -Algebra macht, kann die Filtration als zeitlicher Verlauf des Informationsgewinnes betrachtet werden. Die  $\mathcal{F}_n$  können so interpretiert werden, als dass sie alle bis zum Zeitpunkt  $n$  verfügbaren Informationen enthalten. Die Eigenschaft der aufsteigenden Folge verdeutlicht, dass mit voranschreitender Zeit mehr Informationen vorliegen.

Auf dem filtrierten Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}, \mathbb{P})$  bezeichne die Familie von Zufallsvariablen  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $X_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , einen reellwertigen, stochastischen Prozess, wobei die Indizes  $n$  als Zeitpunkte auf der diskreten Zeitachse interpretiert werden können. Die  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sollen nun den zeitlichen Verlauf der beobachteten und in der Filtrierung enthaltenden Informationen darstellen.

**Definition 3.1.1.** (*adaptierter Prozess, Definition 11.2 in [MeiSch]*) Ein stochastischer Prozess  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  auf  $\Omega$  heißt adaptiert bzgl. der Filtration  $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , falls gilt

$$X_n \text{ ist } \mathcal{F}_n\text{-messbar } \forall n \in \mathbb{N}.$$

Ist  $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  definiert durch  $\mathcal{F}_n = \sigma(X_0, X_1, \dots, X_n)$ , so ist der Prozess  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  offensichtlich adaptiert. In diesem Fall heißt  $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  die kanonische (bzw. natürliche) Filtration von  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

Zeitdiskrete Martingale, welche ein wichtiges Instrument der modernen Wahrscheinlichkeitstheorie darstellen, eignen sich für die Formalisierung fairer Spiele. Wir werden sehen, dass sich das Sankt-Petersburg-Spiel mit einer geeigneten Wahl der Einsätze als Martingal (vgl. Abschnitt 3.3) modellieren lässt. Allgemein kann ein Spiel zwischen 2 Parteien als fair bezeichnet werden, wenn weder Spieler  $A$  noch Spieler  $B$  einen Vorteil aus diesem Spiel ziehen können. In der Sprache der Wahrscheinlichkeitstheorie bedeutet dies, dass der erwartete Zugewinn beider Spieler jeweils 0 ist.

**Definition 3.1.2.** (Martingal, Definition 11.4 in [MeiSch]) Sei  $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}, \mathbb{P})$  ein filtrierter Wahrscheinlichkeitsraum. Ein stochastischer Prozess  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  auf  $\Omega$  heißt Martingal bzgl. der Filtration  $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  : $\Leftrightarrow$

- (i)  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ist  $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ -adaptiert
- (ii)  $\forall n \in \mathbb{N}$  gilt:  $\mathbb{E}(|X_n|) < \infty$
- (iii)  $\forall n \in \mathbb{N}$  gilt:  $\mathbb{E}(X_{n+1} | \mathcal{F}_n) = X_n$

Aus der Definition lassen sich nun leicht folgende Eigenschaften für Martingale ableiten:

1.  $\forall n \in \mathbb{N}$  gilt:  $\mathbb{E}(X_{n+1} - X_n | \mathcal{F}_n) = 0$  ( $\Leftrightarrow$  (iii))  
Bezeichnet der Prozess  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ein Spiel und  $X_n$  jeweils den Ausgang der  $n$ -ten Runde, so entspricht dies gerade der Forderung, dass der erwartete Zugewinn zwischen der  $n$ -ten und der  $(n + 1)$ -ten Runde gleich null sein soll.
2.  $\forall k, n \in \mathbb{N}$  gilt:  $\mathbb{E}(X_{n+k} | \mathcal{F}_n) = X_n$
3. Martingale haben einen konstanten Erwartungswert,  
d.h.  $\forall n \in \mathbb{N}$  gilt:  $\mathbb{E}(X_n) = \mathbb{E}(X_0)$

Die Beweise können u.a. in [Pra] S. 160f. oder [MeiSch] S. 303f. nachgeschlagen werden.

Analog zur Modellierung fairer Spiele lassen sich die für den Spieler günstigen bzw. ungünstigen Spiele durch Sub- bzw. Supermartingale beschreiben.

**Definition 3.1.3.** (Sub- und Supermartingal, Definition 11.4 in [MeiSch]) Sei  $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}, \mathbb{P})$  ein filtrierter Wahrscheinlichkeitsraum. Ein stochastischer Prozess  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  auf  $\Omega$  heißt Sub- bzw. Supermartingal bzgl. der Filtration  $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ :  $\Leftrightarrow$  es gelten (i), (ii) und

- (iii')  $\forall n \in \mathbb{N}$  gilt:  $\mathbb{E}(X_{n+1} | \mathcal{F}_n) \geq X_n$  bzw.
- (iii'')  $\forall n \in \mathbb{N}$  gilt:  $\mathbb{E}(X_{n+1} | \mathcal{F}_n) \leq X_n$

Offenbar erfüllen Sub- bzw. Supermartingale nun die folgenden Ungleichungen (vgl. [MeiSch] S. 303ff.):

$$\mathbb{E}(X_{n+1}) \geq \mathbb{E}(X_n) \text{ und } \mathbb{E}(X_{n+1} - X_n | \mathcal{F}_n) \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \text{ bzw.}$$

$$\mathbb{E}(X_{n+1}) \leq \mathbb{E}(X_n) \text{ und } \mathbb{E}(X_{n+1} - X_n | \mathcal{F}_n) \leq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Während das Martingal also im Mittel konstant ist, ist das Submartingal steigend, das Supermartingal fallend.

### 3.1.2 Spielsysteme (Martingaltransformierte)

Im Folgenden sei  $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ein vorhersehbarer (previsibler) stochastischer Prozess, welcher den Einsatz des Spielers in der  $n$ -ten Runde eines Spiels beschreibt.

**Definition 3.1.4.** (vorhersagbar, Definition 11.10 in [MeiSch]) Ein stochastischer Prozess  $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$  auf  $\Omega$  heißt vorhersehbar bzgl. der Filtration  $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , falls gilt

$$V_n \text{ ist } \mathcal{F}_{n-1}\text{-messbar } \forall n \in \mathbb{N}.$$

Die Zufallsvariablen  $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sind somit durch das, was vor der Zeit  $n$  passiert, bestimmt. Geben wir im Nachstehenden die Filtration nicht explizit an, so wird stillschweigend von der natürlichen Filtration  $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eines fairen Spiels (Martingals)  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ausgegangen.  $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ist dann vorhersehbar, falls  $\forall n \in \mathbb{N}_0$  eine Funktion  $\phi_n$  mit  $V_n = \phi_n(X_0, \dots, X_{n-1})$  existiert. Der Einsatz  $V_n$  lässt sich als Funktion der Vergangenheit darstellen und hängt somit allein von den Ausgängen der Runden  $1, \dots, n-1$  ab. Ein zulässiges Spielsystem kann nun durch ein zeitdiskretes stochastisches Integral, auch Martingaltransformierte genannt, beschrieben werden.

**Definition 3.1.5.** (Martingaltransformierte, Definition 11.11 in [MeiSch]) Es seien  $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}, \mathbb{P})$  ein filtrierter Wahrscheinlichkeitsraum,  $X = (X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ein Martingal und  $V = (V_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ein vorhersehbarer Prozess, so dass  $V_n(X_n - X_{n-1}) \in L^1 \forall n \in \mathbb{N}_0$ . Der stochastische Prozess  $((V.X)_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit

$$(V.X)_0 := 0 \text{ und } (V.X)_n := \sum_{i=1}^n V_i(X_i - X_{i-1}) \forall n \in \mathbb{N}_0$$

heißt Martingaltransformierte von  $X$  bzgl.  $V$ .

Ist es einem Spieler möglich, durch geschicktes Variieren der Einsätze Vorteile aus einem fairen Spiel zu ziehen? Die Frage nach einer solch geeigneten Strategie kann verneint werden.

**Satz 3.1.6.** (Satz 11.12 in [MeiSch]) Seien  $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}, \mathbb{P})$  ein filtrierter Wahrscheinlichkeitsraum,  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ein Martingal,  $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ein vorhersehbarer Prozess und  $\forall n \in \mathbb{N}_0$  ist  $V_n(X_n - X_{n-1})$  integrierbar. Dann ist auch  $((V.X)_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ein Martingal.

*Beweis.* Wir prüfen die Martingaleigenschaften (i) – (iii) aus Def. 3.1.2 nach.

(i) (Induktion)

Für  $n = 0$  ist nichts zu zeigen, da  $(V.X)_0 := 0$  deterministisch ist.

Sei nun  $n \in \mathbb{N}_0$ . Dann sind  $\forall i \leq n$  die  $V_i$  und die  $X_{i-1}$   $\mathcal{F}_{i-1}$ -messbar, und wegen  $\mathcal{F}_{i-1} \subset \mathcal{F}_i$  auch  $\mathcal{F}_i$ -messbar. Jeder Summand  $V_i(X_i - X_{i-1})$  ist daher  $\mathcal{F}_i$ -messbar, und wegen  $\mathcal{F}_i \subset \mathcal{F}_n$  auch  $\mathcal{F}_n$ -messbar.

(ii)  $\mathbb{E}(|(V.X)_n|) = \mathbb{E}(|\sum_{i=1}^n V_i(X_i - X_{i-1})|) \leq \sum_{i=1}^n \mathbb{E}(|V_i(X_i - X_{i-1})|) < \infty \forall n \in \mathbb{N}$

(iii) Für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt mit Eigenschaft (1)

$$\begin{aligned} \mathbb{E}((V.X)_{n+1} - (V.X)_n | \mathcal{F}_n) &= \mathbb{E}(V_{n+1}(X_{n+1} - X_n) | \mathcal{F}_n) \\ &= V_{n+1} \underbrace{\mathbb{E}(X_{n+1} - X_n | \mathcal{F}_n)}_{=0} = 0. \end{aligned}$$

□

In [MeiSch] S. 307 wird der Satz unter der zusätzlichen Forderung der Nichtnegativität von  $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$  auch für Sub- und Supermartingale bewiesen.

### 3.1.3 Stoppzeiten und Stoppsätze

Vergleichbar der Nichtexistenz einer geschickten Einsatz-Strategie lässt sich auch keine Methode finden, durch geschicktes Stoppen Vorteile aus einem fairen Spiel zu ziehen. Geschicktes Stoppen meint dabei, nur die bis zum Zeitpunkt  $n$  verfügbaren Informationen zu nutzen, um das Spiel dann zu einem festgelegten, aber vom Zufall abhängigen Zeitpunkt zu beenden. Zunächst sollen nun die Stoppzeiten eingeführt werden.

**Definition 3.1.7.** (*Stoppzeit, Definition 11.25 in [MeiSch]*) Es seien  $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}, \mathbb{P})$  ein filtrierter Wahrscheinlichkeitsraum und  $T : \Omega \rightarrow \mathbb{N} \cup \{\infty\}$  eine Zufallsvariable.  $T$  heißt Stoppzeit, falls gilt

$$\{T = n\} \in \mathcal{F}_n \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Wegen  $\{T = k\} \in \mathcal{F}_k \subset \mathcal{F}_n \quad \forall k \leq n$  und  $\{T \leq n\} = \bigcup_{k=0}^n \{T = k\}$ , kann in Def. 3.1.7 auch äquivalent

$$\{T \leq n\} \in \mathcal{F}_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

gefordert werden ([MeiSch] S. 314).

Offenbar sind Konstanten Stoppzeiten und es gilt daher folgende Implikation:

**Lemma 3.1.8.** (*Lemma 9.18 in [Kle]*) Sei  $T$  eine Stoppzeit. Dann ist  $\forall n \in \mathbb{N}$  auch die Abbildung  $T \wedge n$  eine Stoppzeit.

Ein gestopptes Spiel kann nun als ein Prozess angesehen werden, welcher sich bis zum Zeitpunkt  $T$  analog dem ursprünglichen Prozess verhält und ab dem Zeitpunkt  $T$  im Zustand  $X_{T(\omega)}(\omega)$  stagniert. Das Stagnieren spiegelt dann das Verlassen des Spiels wider.

**Definition 3.1.9.** ([MeiSch] S. 315) Es seien  $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}, \mathbb{P})$  ein filtrierter Wahrscheinlichkeitsraum,  $T < \infty$  f.s. eine Stoppzeit und  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ein adaptierter Prozess bzgl.  $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . Dann definieren wir die Abbildung  $X_T : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  durch

$$\omega \mapsto \begin{cases} X_{T(\omega)}(\omega) & \text{falls } T(\omega) < \infty \\ 0 & \text{falls } T(\omega) = \infty. \end{cases}$$

**Definition 3.1.10.** (*gestopptes Martingal, Definition 11.29 in [MeiSch]*) Es seien  $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}, \mathbb{P})$  ein filtrierter Wahrscheinlichkeitsraum,  $T < \infty$  f.s. eine Stoppzeit und  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ein Martingal bzgl.  $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . Das gestoppte Martingal  $(X_{T \wedge n})_{n \in \mathbb{N}}$  ist definiert durch

$$X_{T \wedge n} := \begin{cases} X_T & \text{falls } n \geq T \\ X_n & \text{falls } n < T. \end{cases}$$

Doobs Optional Stopping Theorem belegt nun die Nichtexistenz einer geschickten Stoppstrategie: Jedes gestoppte Martingal bleibt ein Martingal.

**Satz 3.1.11.** (*Optional Stopping Theorem (Doob), Theorem 11.30 in [MeiSch]*) Es seien  $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}, \mathbb{P})$  ein filtrierter Wahrscheinlichkeitsraum,  $T < \infty$  f.s. eine Stoppzeit und  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ein Martingal bzgl.  $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . Dann ist der gestoppte Prozess  $(X_{T \wedge n})_{n \in \mathbb{N}}$  ein Martingal und es gilt

$$\mathbb{E}(X_{T \wedge n}) = \mathbb{E}(X_{T \wedge 0}) = \mathbb{E}(X_0).$$

*Beweis.* Wir prüfen die Martingaleigenschaften (i) – (iii) aus Def. 3.1.2 nach.

(i) Für alle  $n \in \mathbb{N}$  ist

$$X_{T \wedge n} = \sum_{i=0}^n X_i \mathbb{1}_{\{T=i\}} + X_n \mathbb{1}_{\{T>n\}}$$

als Summe von  $\mathcal{F}_n$ -messbaren Summanden wieder  $\mathcal{F}_n$ -messbar.

(ii) Für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt

$$\mathbb{E}(|X_{T \wedge n}|) = \mathbb{E}\left(\left|\sum_{i=0}^n X_i \mathbb{1}_{\{T=i\}} + X_n \mathbb{1}_{\{T>n\}}\right|\right) \leq \sum_{i=0}^n \mathbb{E}(|X_i|) + \mathbb{E}(X_n) < \infty.$$

(iii) Wegen

$$X_{T \wedge (n+1)} - X_{T \wedge n} = 0 \cdot \mathbb{1}_{\{T \leq n\}} + (X_{n+1} - X_n) \cdot \mathbb{1}_{\{T > n\}}$$

gilt  $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X_{T \wedge (n+1)} - X_{T \wedge n} | \mathcal{F}_n) &= \mathbb{E}((X_{n+1} - X_n) \cdot \mathbb{1}_{\{T > n\}} | \mathcal{F}_n) \\ &= \mathbb{1}_{\{T > n\}} \cdot \underbrace{\mathbb{E}((X_{n+1} - X_n) | \mathcal{F}_n)}_{=0} = 0. \end{aligned}$$

□

Der Satz gilt in analoger Weise auch für Sub- und Supermartingale (vgl. [MeiSch] S. 317).

Bezüglich der Bezeichnung und konkreten Formulierung der einzelnen Stoppsätze herrscht Uneinigkeit in der Literatur. Die Hauptaussage ist jedoch in allen die gleiche:

Für eine beschränkte bzw. fast sicher endliche Stoppzeit  $T$  und ein Martingal  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  gilt unter gewissen Voraussetzungen

$$\mathbb{E}(X_T) = \mathbb{E}(X_0) \quad \text{sowie} \quad \mathbb{E}(X_{T \wedge n}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(X_T).$$

Das zeigt, dass ein Spieler seine Gewinnchancen nicht dadurch verbessern kann, indem er eine Strategie wählt, zu einem bestimmten Zeitpunkt (der durch die Stoppzeit  $T$  bestimmt wird) das Spiel zu beenden. Wir werden uns im Folgenden auf die nachstehenden Stoppsatz-Versionen beziehen.

**Satz 3.1.12.** (Stoppsatz 1) *Es seien  $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}, \mathbb{P})$  ein filtrierter Wahrscheinlichkeitsraum,  $T$  eine beschränkte Stoppzeit und  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ein Martingal bzgl.  $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . Dann gilt*

$$\mathbb{E}(X_T) = \mathbb{E}(X_0).$$

*Beweis.*  $\exists c \geq 0$  so dass  $T \leq c$  f.s., d.h.  $T \in \{0, 1, \dots, c\}$  und daher gilt

$$X_T = \sum_{i=0}^c X_i \mathbf{1}_{\{T=i\}}.$$

Dabei meint  $X_i = \mathbb{E}(X_c | \mathcal{F}_i)$  die Projektion von  $X_c$  auf  $\mathcal{F}_i$ . Für den Erwartungswert von  $X_T$  ergibt sich nun

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X_T) &= \sum_{i=0}^c \mathbb{E}(X_i \mathbf{1}_{\{T=i\}}) = \sum_{i=0}^c \mathbb{E}(\mathbb{E}(X_c | \mathcal{F}_i) \mathbf{1}_{\{T=i\}}) = \sum_{i=0}^c \mathbb{E}(\mathbb{E}(\mathbf{1}_{\{T=i\}} X_c | \mathcal{F}_i)) \\ &= \sum_{i=0}^c \mathbb{E}(\mathbf{1}_{\{T=i\}} X_c) = \mathbb{E} \left( X_c \underbrace{\sum_{i=0}^c \mathbf{1}_{\{T=i\}}}_{=1} \right) = \mathbb{E}(X_c) = \mathbb{E}(X_0). \end{aligned}$$

□

Die Forderung nach einer beschränkten Stoppzeit ist sehr stark. Unter zusätzlichen Voraussetzungen kann dies auf  $\mathbb{P}(T < \infty) = 1$  reduziert werden.

**Satz 3.1.13.** (Stoppsatz 2) *Es seien  $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}, \mathbb{P})$  ein filtrierter Wahrscheinlichkeitsraum,  $T < \infty$  f.s. eine Stoppzeit und  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ein beschränktes Martingal bzgl.  $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , d.h.  $\exists c \geq 0$  so dass  $|X_n| \leq c$  f.s.  $\forall n \in \mathbb{N}$ . Dann gilt*

$$\mathbb{E}(X_T) = \mathbb{E}(X_0).$$

*Beweis.* Für das gestoppte Martingal  $(X_{T \wedge n})_{n \in \mathbb{N}}$  gilt  $\mathbb{E}(X_{T \wedge n}) = \mathbb{E}(X_0) \forall n \in \mathbb{N}$ . Da  $\mathbb{P}(T < \infty) = 1$  ist, konvergiert  $X_{T \wedge n}$  fast sicher gegen  $X_T$  für  $n \rightarrow \infty$ .

Wegen  $|X_{T \wedge n}| \leq c$  f.s.  $\forall n \in \mathbb{N}$  und  $c \in L^1$  kann der Satz der dominierten Konvergenz angewendet werden und es folgt

$$\mathbb{E}(X_T) = \mathbb{E}(\lim_{n \rightarrow \infty} X_{T \wedge n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(X_{T \wedge n}) = \mathbb{E}(X_0).$$

□

**Satz 3.1.14.** (Stopp Satz 3) *Es seien  $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}, \mathbb{P})$  ein filtrierter Wahrscheinlichkeitsraum,  $T$  eine Stoppzeit und  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ein Martingal bzgl.  $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . Ist außerdem  $\mathbb{E}(T) < \infty$  und  $\exists c \geq 0$ , so dass  $\forall n \in \mathbb{N}_0 : |X_n - X_{n-1}| \leq c$  f.s., dann gilt*

$$\mathbb{E}(X_T) = \mathbb{E}(X_0).$$

*Beweis.* Für das gestoppte Martingal  $(X_{T \wedge n})_{n \in \mathbb{N}}$  gilt  $\mathbb{E}(X_{T \wedge n}) = \mathbb{E}(X_0) \forall n \in \mathbb{N}$ . Da  $\mathbb{P}(T < \infty) = 1$  ist, konvergiert  $X_{T \wedge n}$  fast sicher gegen  $X_T$  für  $n \rightarrow \infty$ . Wegen  $(T \wedge n) \leq T$  f.s. und  $|X_n - X_{n-1}| \leq c$  f.s. gilt  $\forall n \in \mathbb{N}$

$$|X_{T \wedge n}| = \left| \sum_{i=1}^{T \wedge n} (X_i - X_{i-1}) + X_0 \right| \leq Tc + |X_0| \in L^1 \text{ f.s.}$$

Der Satz der dominierten Konvergenz liefert

$$\mathbb{E}(X_T) = \mathbb{E}\left(\lim_{n \rightarrow \infty} X_{T \wedge n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(X_{T \wedge n}) = \mathbb{E}(X_0).$$

□

Wir haben nun alle technischen Voraussetzungen besprochen, um das Sankt-Petersburg-Spiel und das umgedrehte Analogon, das Verdopplungsspiel, als Martingal zu modellieren und auf Konvergenzeigenschaften hin zu untersuchen.

### 3.2 Die Verdopplungsstrategie

Seit dem 18. Jahrhundert wird der Begriff *Martingale* oder auch *Martingalespiel* als Synonym für eine Strategie im Glücksspiel gebraucht. Bei dieser Strategie spielt der Spieler so lange, bis er gewinnt und erhöht seinen Einsatz nach jeder verlorenen Runde. Die weit verbreitetste Variante ist die Verdopplungsstrategie, die z.T. als sichere Gewinnstrategie angesehen wird, wie auch folgendes Beispiel zeigt.

*ZEIT-Magazin-Redakteurin Heike Faller wollte es wissen. Sie ging ins Kasino und spielte — nach einem System, das sie für absolut unschlagbar hielt. Assistent von einem der weltbesten Mathematiker der ausgerechnet hatte: Sie werden gewinnen. Wahrscheinlich. ([Fal] S. 25)*

So lautet die Überschrift eines kürzlich veröffentlichten Artikels, der die Aktualität des Sankt-Petersburg-Problems und damit des gegen die mathematische Theorie paradoxen Verhaltens der Menschen beweist.

Heike Faller hatte bereits öfter mit Hilfe der Verdopplungsmethode kleinere Gewinne einfahren können. Sie wusste, dass das nicht ewig gut gehen würde und wollte dennoch einen Versuch wagen, einmal um einen größeren Betrag zu spielen. Die Redakteurin wandte sich an den französischen deutschstämmigen Wendelin Werner (\*1968), Gewinner der Fields-Medaille (2006) und bat ihn, sie in das berühmte Kasino in Baden-Baden zu begleiten. Der Mathematiker willigte ein und berechnete vor dem Kasino-Besuch die Wahrscheinlichkeit beim Roulette-Spiel (schwarz oder rot) alles zu verlieren. Da Heike Faller

7500 Euro in der Tasche hatte und mit einem Einsatz in Höhe von 500 Euro beginnen wollte, war das gerade die Wahrscheinlichkeit, 4–mal in Folge zu verlieren. Unter Beachtung der grünen Null, die nur den halben Einsatz auszahlt, beträgt die Bankrott–wahrscheinlichkeit circa 6,6%. Die Frage, ob es nicht besser sei, lieber 2–mal um 250 Euro zu spielen, verneinte Wendelin Werner sofort. „*Sie müssen versuchen, Ihren Gewinn mit so wenig Zügen wie möglich zu erreichen, weil Sie bei jedem Spiel im Durchschnitt etwas an die Bank abgeben. Je länger Sie spielen, desto mehr wirkt sich diese Ungerechtigkeit gegen sie aus.*“ ([Fal] S. 27) Trotz der eindeutigen Antwort schien es die Redakteurin zu bevorzugen „*zweimal um 200 Euro zu spielen und dann, je nachdem, wie es lief, noch mal um die 50*“ ([Fal] S. 27) — ein Verhalten, dass gegen die mathematische Theorie spricht.

### 3.2.1 Die Verdopplungsstrategie als d’Alembert–Martingal

Im folgenden Abschnitt soll die Verdopplungsstrategie, das umgedrehte Analogon zum Sankt–Petersburg–Paradoxon, als Martingal modelliert werden. Wir betrachten dazu das folgende faire Spiel zwischen Peter und Paul.

In jeder Runde, d.h. zu jedem Zeitpunkt  $n \in \mathbb{N}_0$ , wirft Peter eine faire Münze. Paul, der vor jedem Münzwurf einen Einsatz zahlen muss, verliert diesen bei Zahl und bekommt ihn bei Kopf von Peter doppelt ausgezahlt. Paul beginnt mit einem Einsatz von  $a$  Euro,  $a > 0$ , und spielt so lange, bis er zum ersten Mal gewinnt. Bei jeder verlorenen Runde setzt er in der nächsten den doppelten Einsatz — d.h.  $V_1 = a, V_2 = 2a, \dots, V_n = 2^{n-1}a$ . Sobald er gewonnen hat, hört er auf zu spielen. Sein Reingewinn gleicht dann seinem Anfangseinsatz von  $a$  Euro.

Die Verdopplungsstrategie entspricht somit für  $a = 1$  gerade dem umgekehrten Sankt–Petersburg–Problem.

#### Sankt–Petersburg–Spiel

- Peter benötigt  $\infty$  viel Kapital (für Gewinne)
- hohe Gewinne sehr unwahrscheinlich
- der erwartete Gewinn ist unendlich

#### Verdopplungsspiel

- Paul benötigt  $\infty$  viel Kapital (für Einsätze)
- hohe Einsätze sehr unwahrscheinlich
- der erwartete Einsatz ist unendlich

Die Verdopplungsstrategie lässt sich durch das *d’Alembert–Martingal* modellieren<sup>1</sup>. Dazu seien  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  i.i.d. Zufallsvariablen mit

$$\mathbb{P}_{X_1} = \frac{1}{2}(\delta_{+1} + \delta_{-1}), \quad (3.1)$$

die die voneinander unabhängigen fairen Münzwürfe darstellen. Die Ereignisse Kopf bzw. Zahl im  $j$ -ten Wurf werden jeweils durch  $\{X_j = +1\}$  bzw.  $\{X_j = -1\}$  beschrieben.  $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  bezeichnet die natürliche Filtration von  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ , d.h.  $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$  und

<sup>1</sup>Der Name geht auf den französischen Mathematiker und Philosophen Jean d’Alembert zurück, der dieses Spielsystem als sichere Gewinnstrategie ansah.

$\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \dots, X_n) \forall n \in \mathbb{N}_0$ . Offensichtlich ist dann die symmetrische Irrfahrt  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit

$$S_0 = 0 \text{ und } S_n = \sum_{i=1}^n X_i \forall n \in \mathbb{N}_0$$

ein Martingal bzgl.  $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  (vgl. Bsp. 11.6 in [MeiSch]).

Weiterhin bezeichnen die  $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$  die laufenden (nichtnegativen) Einsätze der jeweils  $n$ -ten Runde, d.h.

$$V_0 = 0 \text{ und } V_n = 2^{n-1}a.$$

Da die möglichen Einsätze der  $n$ -ten Runde deterministisch sind, ist  $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ein vorhersehbarer Prozess. Die Martingaltransformierte  $((V.S)_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit

$$(V.S)_0 = 0 \text{ und } (V.S)_n = \sum_{i=1}^n V_i(S_i - S_{i-1}) \forall n \in \mathbb{N}_0$$

beschreibt Pauls Reingewinn bzw. Reinverlust nach  $n$  Runden und ist nach Satz 3.1.6 wieder ein Martingal und somit ein faires Spiel. Dementsprechend gilt (vgl. Eigenschaft (3) in Abschnitt 3.1.1)

$$\mathbb{E}((V.S)_n) = \mathbb{E}((V.S)_0) = 0.$$

Der kumulierte Einsatz bis einschließlich zur  $n$ -ten Runde beträgt

$$V_n^{kum} = \sum_{i=1}^n V_i = \sum_{i=1}^n 2^{i-1}a = a \sum_{i=0}^{n-1} 2^i = a \frac{2^n - 1}{2 - 1} = (2^n - 1)a. \quad (3.2)$$

**Bemerkung 3.2.1.** Für *i.i.d.* Zufallsvariablen  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit

$$\mathbb{P}_{X_1} = (1-p) \cdot \delta_{+1} + p \cdot \delta_{-1}, \text{ wobei } p \in (0, 1),$$

beschreibt  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$  für  $p > \frac{1}{2}$  ein Submartingal (d.h. ein für Paul günstiges Spiel) und für  $p < \frac{1}{2}$  ein Supermartingal (d.h. ein für Paul ungünstiges Spiel). Entsprechend charakterisieren in diesen beiden Fällen auch  $((V.S)_n)_{n \in \mathbb{N}}$  jeweils Sub- bzw. Supermartingal.

**Bemerkung 3.2.2.** Man kann die (nichtnegativen) Einsätze der jeweils  $n$ -ten Runde auch wie folgt definieren

$$\widetilde{V}_0 = 0 \text{ und } \widetilde{V}_n = \begin{cases} 2^{n-1}a & \text{falls } X_1 = \dots = X_{n-1} = -1 \\ 0 & \text{falls } X_i = 1 \text{ für ein } 1 \leq i < n. \end{cases}$$

Dieses Modell enthält bereits Pauls Verhalten, das Spiel nach dem ersten Kopf-Wurf zu beenden. Im Folgenden wird dies aber explizit durch eine Stoppzeit ausgedrückt.

Es bezeichne

$$T_1 = \min\{i \geq 1 : X_i = 1\} \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$$

den Zeitpunkt des ersten Kopf-Wurfes, d.h.

$$\{T_1 = n\} = \bigcap_{i=1}^{n-1} \{X_i = -1\} \cap \{X_n = 1\}.$$

$T_1$  ist Stoppzeit bzgl.  $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und entspricht der Anzahl der Münzwürfe, die Paul braucht, um einen positiven Reingewinn zu erreichen. Während er bis zum Zeitpunkt  $T_1 - 1$  durchgehend Verluste in Höhe der kumulierten Einsätze

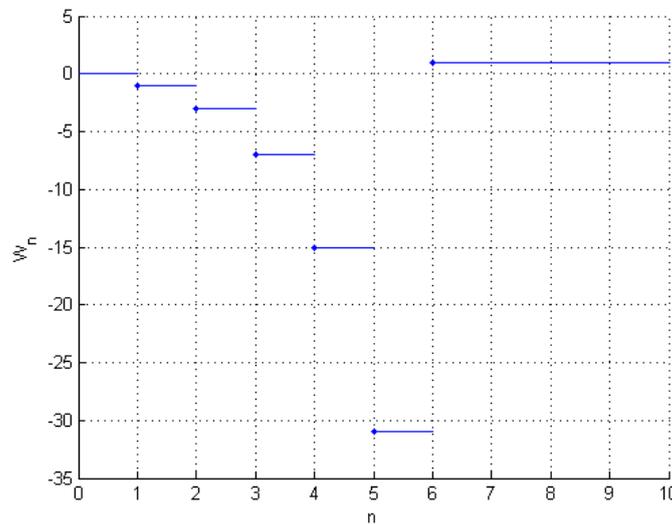
$$V_n^{kum} = (2^n - 1)a \quad \forall n \leq T_1 - 1$$

erleidet, gleicht sein Netto-Erlös nach dem ersten Kopf-Wurf, also zum Zeitpunkt  $T_1 \geq 1$ , seinem Start-Einsatz  $a$ , denn

$$\underbrace{-V_{T_1}^{kum}}_{\text{kum. Einsatz}} + \underbrace{2 \cdot V_{T_1}}_{\text{Gewinn}} = -(2^{T_1} - 1)a + 2 \cdot 2^{T_1-1}a = a.$$

Pauls Kapitalstand zum Zeitpunkt  $n \in \mathbb{N}$  lässt sich nun durch die gestoppte, gewichtete Irrfahrt  $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$  wir folgt modellieren:

$$\begin{aligned} W_n = (V \cdot S)_{T_1 \wedge n} &= \sum_{i=1}^{T_1 \wedge n} V_i (S_i - S_{i-1}) = \sum_{i=1}^{T_1 \wedge n} V_i \cdot X_i = \begin{cases} 0 & \text{falls } n = 0 \\ -a(2^n - 1) & \text{falls } 1 \leq n < T_1 \\ a & \text{falls } T_1 \leq n \end{cases} \\ &= a \cdot \mathbf{1}_{\{\exists 1 \leq k \leq n: X_k = 1\}} - a(2^n - 1) \cdot \mathbf{1}_{\{X_1 = \dots = X_n = -1\}} \end{aligned}$$



**Abb. 3.1:** Beispiel eines Pfades ( $a = 1$  und  $T_1 = 6$ )

Für die Rechtfertigung der Definition von  $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$  bleibt noch  $\mathbb{P}(T_1 < \infty) = 1$  zu zeigen. Aus

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(T_1 = k) &= \mathbb{P}(X_1 = \dots = X_{k-1} = -1, X_k = 1) \\ &=^{iid} (\mathbb{P}(X_1 = -1))^{k-1} P(X_k = 1) = \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \frac{1}{2} \text{ für } k = 1, 2, \dots, \end{aligned}$$

folgt, dass  $T_1$   $Geom(\frac{1}{2})$ -verteilt ist und Gleichung (1.4) beweist

$$\mathbb{P}(T_1 < \infty) = 1.$$

Nach Satz 3.1.11 ist das gestoppte Martingal  $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$  wieder ein Martingal (das *d'Alembert-Martingal*) und daher ein faires Spiel, d.h.

$$\mathbb{E}(W_{n+1} - W_n | \mathcal{F}_n) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Es gilt außerdem

$$\mathbb{E}(W_n) = \mathbb{E}(W_0) = \mathbb{E}(0) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (3.3)$$

Wegen  $W_{T_1} = a$  f.s. ist aber auch

$$\mathbb{E}(W_{T_1}) = a.$$

$(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$  beschreibt also offensichtlich trotzdem eine für Paul vorteilhafte Spielstrategie, die verspricht, in jedem Fall  $a$  Euro zu gewinnen. Da  $T_1$  fast sicher endlich ist, tritt dies nach endlich vielen Runden ein. Wir haben bereits gezeigt, dass die durchschnittliche Spieldauer sogar nur 2 Runden beträgt (vgl. (1.5)). Zudem fällt die Wahrscheinlichkeit, nach  $k$  Runden noch immer nicht gewonnen zu haben, exponentiell ab:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(T_1 > k) &= \sum_{i=k+1}^{\infty} \mathbb{P}(T_1 = i) = \sum_{i=k+1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^i \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} \underbrace{\sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^i}_{=2} = \left(\frac{1}{2}\right)^k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Wir haben also mit der Verdopplungsstrategie eine Strategie gefunden, die intuitiv verspricht, zu einem sicheren Gewinn von  $a$  Euro zu führen — und das nach endlich vielen Runden, im Mittel sogar alle 2 Runden. Doch die Intuition, die ein vorteilhaftes Spiel verspricht, trügt.

1. Auch wenn die Wahrscheinlichkeit eines späten ersten Kopf-Wurfes sehr gering ist, ist es durchaus möglich, sehr lange auf diesen warten zu müssen. Die Eigenschaft der Gedächtnislosigkeit einer geometrisch-verteilten Zufallsvariablen bekräftigt diese Aussage. Es gilt

$$\mathbb{P}(T_1 \geq k + i | T_1 \geq k) = \mathbb{P}(T_1 \geq i) \quad \forall i, k \in \mathbb{N}.$$

2. Paul benötigt unendlich viel Kapital, um die Verdopplungsstrategie verfolgen zu können, denn

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(V_{T_1}^{kum}\right) &= \sum_{i=1}^{\infty} V_i^{kum} \mathbb{P}(T_1 = i) \stackrel{(3.2)}{=} \sum_{i=1}^{\infty} ((2^i - 1)a) \left(\frac{1}{2}\right)^i \\ &= a \sum_{i=1}^{\infty} 2^i \left(\frac{1}{2}\right)^i - a \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^i = \infty.\end{aligned}$$

3. Offensichtlich gilt für jeden Starteinsatz  $a > 0$

$$\mathbb{E}(W_{T_1}) = \mathbb{E}(a) = a \neq 0 = \mathbb{E}(W_0).$$

Somit findet in diesem Beispiel keiner der drei Stoppsätze aus Abschnitt 3.1.3 Anwendung. Das liegt daran, dass weder  $T_1$  noch  $(V_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  bzw. die Zuwächse  $(V_n - V_{n-1})_{n \in \mathbb{N}}$  beschränkt sind.

- (i)  $\forall c \geq 0 : \mathbb{P}(T_1 \leq c) = \mathbb{P}(T_1 \leq \lfloor c \rfloor) = 1 - \mathbb{P}(T_1 > \lfloor c \rfloor) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{\lfloor c \rfloor} < 1$   
 $\Rightarrow$  Satz 3.1.12 kann nicht angewandt werden
  - (ii)  $\forall c \geq 0 \exists n \in \mathbb{N}_0 : V_n = 2^{n-1}a > c$   
 $\Rightarrow$  Satz 3.1.13 kann nicht angewandt werden
  - (iii)  $\forall c \geq 0 \exists n \in \mathbb{N}_0 : |V_n - V_{n-1}| = |2^{n-1}a - 2^{n-2}a| = 2^{n-2}a > c$   
 $\Rightarrow$  Satz 3.1.14 kann nicht angewandt werden
- (i), (ii) und (iii) verdeutlichen, dass hohe Einsätze und späte Gewinne sehr wohl auftreten können, auch wenn die dazugehörigen Wahrscheinlichkeiten exponentiell gegen null gehen. Eine gewisse Risikofreudigkeit sollte Paul daher schon mitbringen, wenn er die Verdopplungsstrategie verfolgt.

### 3.2.2 Verteilung des d'Alembert-Martingals

Die Verteilung des Prozesses  $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ist gegeben durch

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(W_n = -a(2^n - 1)) &= \mathbb{P}(X_1 = \dots = X_n = -1) \stackrel{iid}{=} (\mathbb{P}(X_1 = -1))^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \\ \mathbb{P}(W_n = a) &= \mathbb{P}(\exists 1 \leq k \leq n : X_k = 1) = 1 - \mathbb{P}(X_1 = \dots = X_n = -1) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n.\end{aligned}$$

Während wir für die Erwartungswerte bereits

$$\mathbb{E}(W_n) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

gezeigt haben (vgl. Gleichung (3.3)), folgt für die Varianzen, dass diese exponentiell in  $n$  wachsen, denn

$$\begin{aligned} \text{Var}(W_n) &= \mathbb{E}(W_n^2) - \underbrace{(\mathbb{E}(W_n))^2}_{=0} = a^2(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n) + a^2(2^n - 1)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^n \\ &= a^2 - a^2 \left(\frac{1}{2}\right)^n + a^2 2^{2n} \left(\frac{1}{2}\right)^n - a^2 2^{n+1} \left(\frac{1}{2}\right)^n + a^2 \left(\frac{1}{2}\right)^n \\ &= a^2 + a^2 2^n - 2a^2 = a^2(2^n - 1) \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Auch für die Zuwächse ergibt sich ein exponentielles Wachstum in  $n$

$$\begin{aligned} |W_n - W_{n-1}| &= \begin{cases} |-a(2^n - 1) + a(2^{n-1} - 1)| & \text{falls } n < T_1 \\ |a + a(2^{n-1} - 1)| & \text{falls } n = T_1 \\ |a - a| & \text{falls } n > T_1 \end{cases} \\ &\leq a2^{n-1}. \end{aligned}$$

### 3.2.3 Konvergenz des d'Alembert-Martingals

Wie am Anfang dieses Kapitels bemerkt, konvergieren Martingale schon unter schwachen Voraussetzungen. Wir wollen prüfen, inwiefern dies auf das d'Alembert-Martingal zutrifft.

**Lemma 3.2.3.**  $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergiert in Wahrscheinlichkeit und fast sicher gegen  $a \in L^1$ .

*Beweis.* Offensichtlich gilt für das gestoppte Martingal  $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$  die Teilmengenrelation

$$\{\omega : W_n(\omega) = a\} \subset \{\omega : W_{n+1}(\omega) = a\} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Zusammen mit der Monotonie des Wahrscheinlichkeitsmaßes folgt daher

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \{\omega : W_n(\omega) = a\}\right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(\{\omega : W_n(\omega) = a\}) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(\{\omega : T_1(\omega) \leq n\}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) = 1. \end{aligned}$$

Daher gilt  $W_n \xrightarrow[f.s.]{n \rightarrow \infty} a \in L^1$  und schließlich auch  $W_n \xrightarrow[\mathbb{P}]{n \rightarrow \infty} a \in L^1$ . □

Für den Nachweis der fast sicheren Konvergenz hätte man alternativ auch den folgenden Martingal-Konvergenz-Satz heranziehen können.

**Satz 3.2.4.** (Theorem 11.34 in [MeiSch]) Sei  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ein Submartingal mit

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{E}(X_n^+) < \infty.$$

Dann konvergiert  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  fast sicher gegen  $X_\infty \in L^1$ .

Es ist leicht einzusehen, dass die Voraussetzungen erfüllt sind, denn jedes Martingal ist auch ein Submartingal und es gilt zudem

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{E}(W_n^+) = \sup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{E}(a) = a < \infty.$$

Statt der einzelnen Realisationen betrachten wir nun die Erwartungswerte und stellen fest

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(W_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(W_0) = 0 \neq a = \mathbb{E}(\lim_{n \rightarrow \infty} W_n)$$

Dies rechtfertigt das folgende Lemma.

**Lemma 3.2.5.**  $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergiert für kein  $p \geq 1$  in  $L^p$ .

Weiterhin wissen wir nun, dass  $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$  kein gleichgradig integrierbares (kurz: GGI) Martingal ist, denn Satz 11.36 in [MeiSch] beweist die Äquivalenz der beiden Aussagen  $L^1$ -Konvergenz und GGI. Doch zunächst einmal zur Definition der GGI:

**Definition 3.2.6.** (gleichgradig integrierbar, Definition 11.13 in [MeiSch]) Sei  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge von Zufallsvariablen.  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  heißt gleichgradig integrierbar  $:\Leftrightarrow$

$$\lim_{c \rightarrow +\infty} \sup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{E}(|X_n| \mathbf{1}_{\{|X_n| \geq c\}}) = 0.$$

Die sukzessive Prognose-Eigenschaft, die GGI-Martingale haben, können wir somit nicht auf  $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$  übertragen. Das verdeutlicht einmal mehr, dass man keine Aussage machen kann, wann man beim Verdopplungsspiel gewinnt.

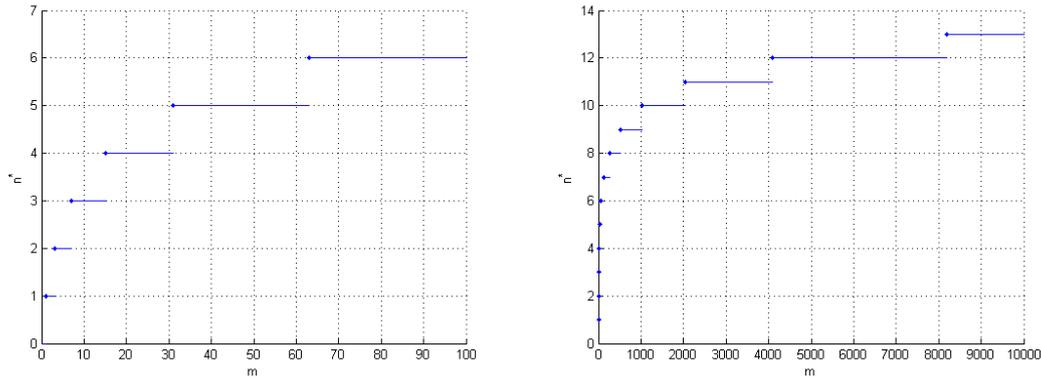
### 3.2.4 Ruinwahrscheinlichkeit

Unter der Voraussetzung, dass Paul nur über ein begrenztes Vermögen  $A \in (0, \infty)$  verfügt, wollen wir nun seine Ruinwahrscheinlichkeit bestimmen.

Damit er überhaupt erst anfangen kann zu spielen, muss für den Einsatz  $a \in (0, \infty)$  der ersten Runde offensichtlich  $a \leq A$  gelten. Will Paul mehrere Runden spielen können, so darf der Einsatz  $a$  der ersten Runde nur ein Bruchteil des begrenzten Gesamtkapitals  $A$  ausmachen. Je kleiner  $a$  im Verhältnis zu  $A$  ist, desto mehr Runden kann Paul spielen und desto kleiner ist auch die Wahrscheinlichkeit, ruiniert zu werden. Allerdings sinkt mit kleiner werdendem  $a$  auch der Reingewinn in Höhe von  $a$ . Paul muss sich also entscheiden, ob er das Risiko ruiniert zu werden für die Möglichkeit, hohe Beträge gewinnen zu können, in Kauf nimmt.

Sind  $a$  und  $A$  gegeben, so ist auch die maximale Anzahl  $n^*$  der möglichen Spielrunden eindeutig bestimmt. Wegen  $V_n^{kum} = (2^n - 1)a$  (vgl. (3.2)) gilt

$$n^* = \max\{n \in \mathbb{N} : (2^n - 1)a \leq A\} = \max\{n \in \mathbb{N} : n \leq \log_2 \left( \frac{A}{a} + 1 \right)\}.$$



**Abb. 3.2:** Die Treppenfunktion  $n^* = \lfloor \log_2(m + 1) \rfloor$ , wobei  $m = \frac{A}{a}$ , verdeutlicht, dass Paul sehr viel Startkapital braucht, um den Einsatz mehrmals verdoppeln zu können.

Tab. 3.1 verdeutlicht, dass die Ruinwahrscheinlichkeiten

$$\mathbb{P}(|W_n^*| \geq A) = \mathbb{P}(T_1 > n^*) \stackrel{(3.4)}{=} \left(\frac{1}{2}\right)^{n^*}$$

bei steigendem Kapital  $A$  (bzw. fallendem Einsatz  $a$ ) exponentiell abnehmen.

$A$	$n^*$	$\mathbb{P}( W_n^*  \geq A)$
1	1	0,50000
10	3	0,12500
50	5	0,03100
100	6	0,01560
1000	9	0,00195
2000	10	0,00100

**Tab. 3.1:** Bankrottwahrscheinlichkeiten

### Résumé

Wir haben gesehen, dass die Verdopplungsstrategie theoretisch zwar absolut sicher, in der Praxis aber so nicht umsetzbar ist. Paul bräuchte unbegrenztes Vermögen, um den Einsatz immer wieder verdoppeln zu können. Dies ist aber praktisch nie der Fall.

Auch wenn Paul über genügend viel (endliches) Vermögen verfügt, sollte er abwägen, ob die hohen Wahrscheinlichkeiten, kleine Beträge zu gewinnen, die kleine Wahrscheinlichkeit, alles zu verlieren, ausgleichen.

Im Falle eines Kasinos (an der Stelle von Peter) sollte sich Paul zudem bewusst sein, dass die Einsätze meist beschränkt sind und er so nicht beliebig oft verdoppeln kann.

### 3.3 Das Sankt-Petersburg-Spiel als Borel-Martingal

Wir werden in diesem Abschnitt ein Martingal (und somit ein faires Spiel) konstruieren, in welchem man wie beim Sankt-Petersburg-Spiel  $2^n$  Euro mit Wahrscheinlichkeit  $(\frac{1}{2})^n$  gewinnen kann. Die Idee, das Sankt-Petersburg-Spiel als Martingal zu modellieren geht auf Émile Borel (1871-1956) zurück (vgl. [BrBrCh]). Neben Doob und Lévy zählt auch er zu den Begründern der Martingalthorie.

**Definition 3.3.1.** (Borel-Martingal, [BrBrCh] S. 27) Seien  $(X_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$  i.i.d. Zufallsvariablen mit

$$\mathbb{P}_{X_1} = \frac{1}{2}(\delta_{+1} + \delta_{-1})$$

und  $(\nu_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$  eine Folge nichtnegativer reeller Zahlen. Der stochastische Prozess  $(B_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  mit

$$B_n = \sum_{k=1}^n \nu_k X_k$$

heißt Borel-Martingal<sup>2</sup>.

Um die Bezeichnung *Martingal* zu rechtfertigen, prüfen wir die Martingaleigenschaften (i)-(iii) aus Def. 3.1.2 bzgl. der natürlichen Filtration nach. Es gilt  $\forall n \in \mathbb{N}_0$

- (i)  $B_n$  ist als Linearkombination der  $X_1, \dots, X_n$   $\mathcal{F}_n$ -messbar
- (ii)  $\mathbb{E}(|B_n|) \leq \sum_{k=1}^n \nu_k \mathbb{E}(|X_k|) < \infty$
- (iii)  $\mathbb{E}(B_{n+1} | \mathcal{F}_n) = \mathbb{E}(\nu_{n+1} X_{n+1} + B_n | \mathcal{F}_n) = \nu_{n+1} \underbrace{\mathbb{E}(X_{n+1} | \mathcal{F}_n)}_{\mathbb{E}(X_{n+1})=0} + \mathbb{E}(B_n | \mathcal{F}_n) = B_n$

Mit dem Optional Stopping Theorem (Satz 3.1.11) wissen wir, dass auch der gestoppte Prozess  $(B_{T \wedge n})_{n \in \mathbb{N}_0}$  für jede fast sicher endliche Stoppzeit  $T$  ein Martingal ist. Wir können das Sankt-Petersburg-Spiel daher nun wie folgt als gestopptes Borel-Martingal modellieren:

$$Y_{T_1 \wedge n} = \sum_{k=1}^{T_1 \wedge n} (k+1) 2^{k-1} X_k,$$

wobei die Stoppzeit  $T_1 = \min\{i \geq 1 : X_i = 1\} \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$  wieder den Zeitpunkt des ersten Kopf-Wurfes bezeichnet<sup>3</sup>.

#### Interpretation

Peter wirft so lange eine faire Münze, bis zum ersten Mal Kopf fällt. Die  $(X_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$  aus Def. 3.3.1 beschreiben dazu die voneinander unabhängigen fairen Münzwürfe. Vor jeder Runde, d.h. vor jedem Münzwurf, zahlt Paul einen Einsatz, den er bei Zahl verliert und

<sup>2</sup>Das d'Alembert-Martingal kann als Spezialfall der Borel-Martingale angesehen werden.

<sup>3</sup>Wir haben bereits in Abschnitt 3.2.1 bemerkt, dass für die Stoppzeit  $T_1 = \min\{i \geq 1 : X_i = 1\}$  gilt:  $\mathbb{P}(T_1 = n) = (\frac{1}{2})^n$  und  $\mathbb{E}(T_1) = 2$ .

bei Kopf doppelt ausgezahlt bekommt, womit das Spiel endet. Die Folge  $(\nu_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$  mit  $\nu_k = (k+1)2^{k-1}$  beschreibt die Einsätze der jeweils  $k$ -ten Runde. Der kumulierte Einsatz bis einschließlich zur  $n$ -ten Runde beträgt

$$\begin{aligned} \nu_n^{kum} &= \sum_{k=1}^n \nu_k = \sum_{k=1}^n (k+1)2^{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} (k+2)2^k \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} k2^k + 2 \sum_{k=0}^{n-1} 2^k = \frac{(n-1)2^{n+1} - n2^n + 2}{(2-1)^2} + 2 \frac{2^n - 1}{2-1} \\ &= n2^{n+1} - 2^{n+1} - n2^n + 2 + 2^{n+1} - 2 = n2^n \end{aligned} \quad (3.5)$$

und stellt einen Verlust für Paul dar. Fällt Kopf erstmalig in der  $n$ -ten Runde, so bekommt Paul den doppelten Einsatz

$$2\nu_n = 2(n+1)2^{n-1}$$

ausgezahlt und sein Reingewinn beträgt dann genau wie im klassischen Petersburg-Spiel

$$2\nu_n - \nu_n^{kum} = 2(n+1)2^{n-1} - n2^n = 2^n.$$

In Tab. 3.2 haben wir die Einsätze  $\nu_n$ , die kumulierten Einsätze  $\nu_n^{kum}$  sowie die ausgezahlten Gewinne  $2\nu_n$  und tatsächlichen Nettogewinne  $2^n$  für einige Werte von  $n$  berechnet.

Runde	Einsatz	kum. Einsatz	ausgezahlter Gewinn	Rein- gewinn
$n$	$\nu_n$	$\nu_n^{kum}$	$2\nu_n$ (für $T_1 = n$ )	
1	2	2	4	2
2	6	8	12	4
3	16	24	32	8
4	40	64	80	16
5	96	160	192	32
6	224	384	448	64
7	512	896	1024	128
8	1152	2048	2304	256
...	...	...	...	...
$n$	$(n+1)2^{n-1}$	$n2^n$	$2(n+1)2^{n-1}$	$2^n$

**Tab. 3.2:** Das Sankt-Petersburg-Martingal

Während Paul also für alle Zeitpunkte  $n < T_1$  einen Verlust der Höhe  $n2^n$  erleidet, beträgt der Reingewinn ab  $T_1$  gerade  $2^{T_1}$ . Es ist

$$\begin{aligned} Y_{T_1 \wedge n} &= \sum_{k=1}^{T_1 \wedge n} (k+1)2^{k-1} X_k \\ &= \begin{cases} -n2^n & \text{falls } n < T_1 \text{ (d.h. falls } \forall k \in \{1, \dots, n\} : X_k = -1) \\ 2^{T_1} & \text{falls } n \geq T_1 \text{ (d.h. falls } T_1 \in \{1, \dots, n\} : X_{T_1} = 1). \end{cases} \end{aligned}$$

Für alle  $n \in \mathbb{N}_0$  ist

$$Y_{T_1 \wedge n} \in \{-n2^n, 2^1, 2^2, \dots, 2^n\}$$

und es gilt (vgl. (3.4))

$$\mathbb{P}(Y_{T_1 \wedge n} = -n2^n) = \mathbb{P}(T_1 > n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

sowie  $\forall k = 1, \dots, n$

$$\mathbb{P}(Y_{T_1 \wedge n} = 2^k) = \mathbb{P}(T_1 = k) = \left(\frac{1}{2}\right)^k.$$

Für den Erwartungswert ergibt sich daher durch explizites Nachrechnen

$$\mathbb{E}(Y_{T_1 \wedge n}) = -n2^n \left(\frac{1}{2}\right)^n + \sum_{k=1}^n 2^k \left(\frac{1}{2}\right)^k = -n + n = 0$$

oder aus Satz 3.1.11

$$\mathbb{E}(Y_{T_1 \wedge n}) = \mathbb{E}(Y_{T_1 \wedge 0}) = \mathbb{E}(0) = 0.$$

$(Y_{T_1 \wedge n})_{n \in \mathbb{N}_0}$  ist ein zentriertes Martingal und somit ein faires Spiel. Die Ergebnisse der bereits gespielten Runden verraten zudem nichts über den Ausgang der nächsten Runde. Dennoch scheint das Spiel unendlich vorteilhaft für Paul zu sein, denn

$$\mathbb{P}(Y_{T_1} = 2^{T_1}) = 1$$

und

$$\mathbb{E}(Y_{T_1}) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \nu_n - \sum_{k=1}^{n-1} \nu_k \right) \left(\frac{1}{2}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \left(\frac{1}{2}\right)^n = \infty.$$

Allerdings braucht Paul auch unendlich viel Einsatzkapital, um diese Strategie verfolgen zu können, denn die kumulierten Einsätze  $n2^n$  wachsen exponentiell. Während das (faire) Spiel einerseits fast sicher vorteilhaft für Paul ist, bedeutet es andererseits aber auch den Bankrott, falls dieser nicht vorsichtig ist.

### Résumé<sup>4</sup>

Wird die Anzahl der Münzwürfe vor Spielbeginn durch ein beliebiges, aber fest gewähltes  $n \in \mathbb{N}_0$  (und Pauls Reingewinn somit durch  $2^n$ ) beschränkt, so ist das durch  $Y_{T_1 \wedge n}$

<sup>4</sup>Wie bereits erwähnt, löste schon Émile Borel das Paradoxon im Kontext der Martingaltheorie (vgl. [BrBrCh]). Die in Abschnitt 3.1.3 genannten Stoppsätze waren zu der Zeit, in welcher sich Borel mit dem Sankt-Petersburg-Problem beschäftigte, noch nicht bekannt. Dennoch bemerkte er, dass man  $\mathbb{E}(Y_{T_1}) = \infty$  dadurch beheben kann, indem man die Anzahl der Münzwürfe vor Spielbeginn durch ein beliebiges, aber festes  $n \in \mathbb{N}_0$  beschränkt und  $T_1 \wedge n$  betrachtet. Ohne es explizit zu erwähnen, ersetzte er somit eine unbeschränkte durch eine beschränkte Stoppzeit, für die  $\mathbb{E}(Y_{T_1 \wedge n}) = 0$  gilt. Borels mathematische Lösung ist daher ein Spezialfall von Satz 3.1.11.

In [BrBrCh], [Chu] und [Loc] ist detaillierter nachzulesen, welche Beiträge Borel, Ville, Doob und Lévy im Einzelnen zur Entwicklung der Martingaltheorie und somit zu einem weiteren Lösungsansatz des Sankt-Petersburg-Paradoxons lieferten.

beschriebene Spiel für beide Parteien fair.

Paul gewinnt wie im klassischen Sankt-Petersburg-Spiel  $2^k$  mit Wahrscheinlichkeit  $(\frac{1}{2})^k$ , falls Kopf im  $k$ -ten Münzwurf fällt, wobei  $k \leq n$ . Fällt allerdings  $n$ -mal Zahl, so verliert Paul (bzw. gewinnt Peter)  $n2^n$ , da er vor jedem Münzwurf einen gewissen Betrag, der durch die Folge  $\nu_k = (k + 1)2^{k-1}$  beschrieben wird, als fairen Einsatz zahlt.

Abschließend betrachten wir noch die Verteilung von  $Y_{T_1 \wedge n}$  für die Werte  $n = 1, \dots, 10$ . Die Wahrscheinlichkeit hoher Gewinne (vgl. Spalte 4 bis 13 in Tab. 3.3) nimmt ebenso exponentiell ab wie die Wahrscheinlichkeit einen noch größeren Verlust zu erleiden (vgl. Spalte 2 und 3 in Tab. 3.3). Die großen Varianzen des gestoppten Martingals bergen Risiken für beide Spieler — ohne eine gewisse Risikofreudigkeit sollte man daher nicht in dieses Spiel einwilligen.

$n$	Verlust		Gewinn									
	$-n2^n$	$\mathbb{P}(Y_{T_1 \wedge n} = -n2^n)$	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024
1	-2	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$									
2	-8	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$								
3	-24	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$							
4	-64	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$						
5	-160	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{32}$					
6	-384	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{64}$				
7	-896	$\frac{1}{128}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{128}$			
8	-2048	$\frac{1}{256}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{128}$	$\frac{1}{256}$		
9	-4608	$\frac{1}{512}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{128}$	$\frac{1}{256}$	$\frac{1}{512}$	
10	-10240	$\frac{1}{1024}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{128}$	$\frac{1}{256}$	$\frac{1}{512}$	$\frac{1}{1024}$

Tab. 3.3: Verteilung von  $Y_{T_1 \wedge n}$

# Kapitel 4

## Markovketten–Ansatz

Neben den Martingalen bilden die Markovketten ein weiteres fundamentales Konzept zur Beschreibung von abhängigen Zufallsvariablen. Ganz allgemein kann eine Markovkette als ein stochastischer Prozess bezeichnet werden, dessen zukünftige Entwicklung allein vom aktuellen Zustand abhängt und die Vergangenheit unberücksichtigt lässt.

Da beim Verdopplungsspiel der zukünftige Spielverlauf allein von Pauls aktuellem Kapitalstand abhängt, bietet sich eine Modellierung als Markovkette an. Wir werden daher nun die Verdopplungsstrategie, die wir schon im Kapitel 3 diskutiert haben, näher untersuchen. Wir beginnen mit der Betrachtung des fairen Münzwurfes und verallgemeinern die Theorie dann auf eine nicht a priori faire Münze. Abschließend berücksichtigen wir zudem den Fall, dass Paul nur über ein begrenztes Vermögen verfügt.

### 4.1 Fairer Münzwurf im Verdopplungsspiel

Wir nutzen die Notation wie im Abschnitt 3.2, d.h. der Prozess  $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit

$$W_n = a \cdot \mathbb{1}_{\{\exists 1 \leq l \leq n: X_l = 1\}} - a(2^n - 1) \cdot \mathbb{1}_{\{X_1 = \dots = X_n = -1\}}$$

bezeichnet Pauls Kapital zum Zeitpunkt  $n$ , wobei die  $(X_l)_{l \in \mathbb{N}_0}$  i.i.d. sind mit

$$\mathbb{P}_{X_1} = \frac{1}{2} (\delta_{+1} + \delta_{-1})$$

und

$$\begin{aligned} \{X_j = +1\} & \text{ Kopf im } j\text{-ten Wurf,} \\ \{X_j = -1\} & \text{ Zahl im } j\text{-ten Wurf} \end{aligned}$$

meint. Der Zustandsraum

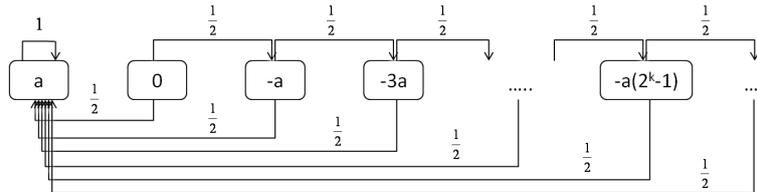
$$E = \{a\} \cup \{-a(2^k - 1) : k \in \mathbb{N}\}$$

ist abzählbar unendlich. Sobald der stochastische Prozess den Zustand  $a$  erreicht, stagniert er. Ist der Zustand  $a$  noch nicht erreicht, so meint ein Übergang von einem in den nächsten Zustand:

- (1) Paul zahlt den Einsatz,

- (2) eine faire Münze wird geworfen,
- (3.1) bei Kopf wird der Gewinn ausgezahlt (und somit Zustand  $a$  erreicht) und das Spiel endet.
- (3.2) bei Zahl geht man vom Zustand  $-a(2^k - 1)$  in den Zustand  $-a(2^{k+1} - 1)$  über und das Spiel wird fortgesetzt.

$(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$  springt also entweder in den rechten Nachbarzustand oder aber zum Zustand  $a$  und bleibt dort. Der folgende Graph veranschaulicht das Verhalten des stochastischen Prozesses.



**Abb. 4.1:** Überganggraph des Verdopplungsspiels im Fall einer fairen Münze

Die Übergangswahrscheinlichkeiten sollen nun durch eine Übergangsmatrix dargestellt werden.

**Definition 4.1.1.** (*Übergangsmatrix, Definition 9.1 in [MeiSch]*) Es sei  $E$  der Zustandsraum. Eine Abbildung

$$Q : E \times E \rightarrow [0, 1] \text{ mit } \sum_{j \in E} Q(i, j) = 1 \quad \forall i \in E$$

heißt *Übergangsmatrix oder stochastische Matrix*.

Im Falle des Verdopplungsspiels ist

$$\tilde{Q} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \dots & 0 & \dots \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \dots & 0 & \dots \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots \\ \dots & \dots \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{1}{2} & \dots \\ \dots & \dots \end{pmatrix}.$$

Um  $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eindeutig als Markovkette zu charakterisieren, brauchen wir noch eine Startverteilung  $\mu \in \mathbb{R}^{|E|}$  (Verteilung von  $W_0$ ). Wir wählen dazu das Dirac-Maß in 0, d.h.

$$\mathbb{P}(W_0 = i) = \delta_0(i) \quad \forall i \in E.$$

$W_n$  bezeichnet dann den Nettogewinn (falls  $W_n > 0$ ) bzw. den Nettoverlust (falls  $W_n < 0$ ) nach  $n \geq 1$  Münzwürfen.

Die Verdopplungsstrategie  $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$  kann nun als  $(\delta_0, \tilde{Q})$ -Markovkette aufgefasst werden.

**Definition 4.1.2.** ( $(\mu, Q)$ -Markovkette, Definition 9.2 in [MeiSch]) Es seien  $E$  ein Zustandsraum,  $\mu$  eine Verteilung auf  $E$  (d.h.  $\sum_{i \in E} \mu(i) = 1$ ) und  $Q$  eine Übergangsmatrix. Ein stochastischer Prozess  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit Werten in  $E$  heißt  $(\mu, Q)$ -Markovkette, falls gilt

$$(i) \quad \mathbb{P}(X_0 = i) = \mu(i) \quad \forall i \in E$$

$$(ii) \quad \forall n \in \mathbb{N}, j \in E \text{ und für alle } (n+1)\text{-Tupel } (i_0, \dots, i_n) \in E^{n+1} \text{ mit} \\ \mathbb{P}(X_0 = i_0, \dots, X_n = i_n) > 0 \text{ gilt}$$

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = j \mid X_0 = i_0, \dots, X_n = i_n) = \mathbb{P}(X_{n+1} = j \mid X_n = i_n) = Q(i_n, j).$$

Die Eigenschaft (ii) in Def. 4.1.2 verdeutlicht, dass die Übergangswahrscheinlichkeiten unabhängig vom Zeitpunkt  $n$  sind.

Für die Berechnung der Mehrschritt-Übergangswahrscheinlichkeiten wollen wir die für Markovketten geltende *Chapman-Kolmogoroff-Gleichung* verwenden.

**Satz 4.1.3.** (*Chapman-Kolmogoroff-Gleichung, Theorem 9.8 in [MeiSch]*) Sei  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine  $(\mu, Q)$ -Markovkette mit Werten in  $E$ . Dann gilt  $\forall (i, j) \in E^2$

$$Q^{n+m}(i, j) = \sum_{k \in E} Q^n(i, k) Q^m(k, j) \text{ mit } n, m \in \mathbb{N}_0.$$

Den Beweis kann man u.a. in [MeiSch] S. 234 nachschlagen.

Satz 9.10 in [MeiSch] zeigt nun, wie wir die Verteilung von  $W_n$  bestimmen können und wir erhalten (analog zu Abschnitt 3.2.2)

$$W_n = {}^d \delta_0 \cdot \tilde{Q}^n = (0, 1, 0, \dots, 0, \dots) \cdot \tilde{Q}^n = \sum_{l=1}^n \left(\frac{1}{2}\right)^l \delta_a + \left(\frac{1}{2}\right)^n \delta_{-a(2^n-1)}.$$

Die Wahrscheinlichkeit nach  $n$  Runden bereits gewonnen zu haben, ist gegeben durch

$$\tilde{Q}^n(0, a) = \sum_{l=1}^n \left(\frac{1}{2}\right)^l,$$

und die Wahrscheinlichkeit, dass auch nach  $n$  Runden noch kein Kopf gefallen ist, beträgt

$$\tilde{Q}^n(0, -a(2^n - 1)) = \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Die Zeitinvarianz der (Einschritt- und Mehrschritt-) Übergangswahrscheinlichkeiten sowie die Markov-Eigenschaft verdeutlichen, dass auch nach  $n$ -maligem Zahl-Wurf die

Wahrscheinlichkeit für einen (baldigen) Kopf–Wurf nicht zunimmt.

Die Markov–Eigenschaft sagt dabei aus, dass die Zukunft  $(W_{l+n})_{n \in \mathbb{N}}$  und die Vergangenheit  $(W_0, \dots, W_{l-1})$  der Markovkette  $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$  unabhängig voneinander sind, wenn die Gegenwart  $W_l = x$  bekannt ist. Der stochastische Prozess hat also kein Gedächtnis und die Verteilung von  $(W_{l+n})_{n \in \mathbb{N}}$  ist die gleiche wie von  $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , nur gestartet in  $W_l = x$  (vgl. [MeiSch] S. 236f.).

Wir wollen uns nun die einzelnen Zustände näher anschauen und charakterisieren.

**Definition 4.1.4.** (*irreduzibel*) Eine  $(\mu, Q)$ –Markovkette  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit Werten in  $E$  heißt irreduzibel, falls gilt

$$\forall (i, j) \in E^2 \exists n(i, j) \text{ mit } Q^{n(i, j)}(i, j) > 0.$$

$(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ist nicht irreduzibel, da abgesehen von der ersten Spalte und oberen Nebendiagonalen nur 0 in der Übergangsmatrix stehen. Man kann weiterhin erkennen, dass keine zwei Zustände miteinander kommunizieren, d.h. es existiert kein Paar  $(i, j) \in E^2$ , das der Bedingung

$$\exists n(i, j) : Q^{n(i, j)}(i, j) > 0 \text{ und } \exists m(i, j) : Q^{m(i, j)}(j, i) > 0$$

genügt. Somit existieren unendlich viele Kommunikationsklassen (vgl. [MeiSch] S. 241f.). Die Zustände sollen nun weiter hinsichtlich der Rückkehrzeiten in rekurrent oder transient unterschieden werden.

**Definition 4.1.5.** (*Eintrittszeit, Rückkehrzeit*) Die Stoppzeit  $T_x : \Omega \rightarrow \mathbb{N}$  mit

$$T_x(\omega) = \inf\{n \geq 0 : X_n(\omega) = x\}$$

bezeichnet die Eintrittszeit in den Zustand  $x \in E$ .

Für  $X_0 = x$  bezeichnet die Stoppzeit  $\tilde{T}_x(\omega) = \inf\{n \geq 1 : X_n(\omega) = x\}$  die erste Rückkehrzeit nach  $x$ .

Wir vereinbaren dabei  $\inf \emptyset = \infty$ .

**Definition 4.1.6.** (*rekurrent, transient, Definition 9.23 in [MeiSch]*) Sei  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine  $(\mu, Q)$ –Markovkette mit Werten in  $E$ .

(i)  $x \in E$  heißt rekurrent, falls  $\mathbb{P}(\tilde{T}_x < \infty \mid X_0 = x) = 1$ .

(ii)  $x \in E$  heißt transient, falls  $\mathbb{P}(\tilde{T}_x = \infty \mid X_0 = x) > 0$ .

Wir zeigen nun, dass im Falle des Verdopplungsspiels die Zustände  $-a(2^k - 1) \forall k \in \mathbb{N}$  transient sind und der Zustand  $a$  rekurrent ist. Dazu bezeichne

$$N_i = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{1}_{\{W_n=i\}}$$

die Anzahl der Besuche im Zustand  $i \in E$ .  $\forall i \in \{-a(2^k - 1) : k \in \mathbb{N}\}$  ist

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(N_i | W_0 = i) &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(W_n = i | W_0 = i) = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{Q}^n(i, i) \\ &= \tilde{Q}^0(i, i) + 0 = 1 < \infty. \end{aligned}$$

Da also jeder Zustand  $i \in \{-a(2^k - 1) : k \in \mathbb{N}\}$  nur endlich oft besucht wird, können wir mit Satz 9.24 aus [MeiSch] die Transienz schließen. Der Zustand  $a$  hingegen ist absorbierend, denn  $\tilde{Q}(a, a) = 1$ . Damit ist auch die Rekurrenz gezeigt (vgl. [MeiSch] S. 243).

Abschließend soll nun unter der Voraussetzung im Zustand 0 gestartet zu sein, die Absorptionswahrscheinlichkeit für  $a$  berechnet werden.

**Definition 4.1.7.** (*Absorptionswahrscheinlichkeit*) Für einen absorbierenden Zustand  $j$  bezeichnet

$$h_j(i) = \mathbb{P}(\exists n \leq 1 : X_n = j | X_0 = i)$$

die Wahrscheinlichkeit, bei einem Start in  $i$  in  $j$  absorbiert zu werden.

Für den Zustand  $a$  gilt demnach

$$\begin{aligned} h_a(0) &= \mathbb{P}(\exists n \geq 1 : W_n = a | W_0 = 0) = \mathbb{P}\left(\bigsqcup_{n=1}^{\infty} \{T_a = n\} | W_0 = 0\right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(T_a = n | W_0 = 0) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 1. \end{aligned}$$

Die Markovkette wird also mit Wahrscheinlichkeit 1 im Zustand  $a$  absorbiert. Und das entspricht gerade dem Gedanken, dass man (vorausgesetzt man hat genug Einsatzkapital) irgendwann gewinnt.

## 4.2 Unfairer Münzwurf im Verdopplungsspiel

Wir wollen nun den Fall einer nicht a priori fairen Münze betrachten. Die einzelnen Münzwürfe seien durch die i.i.d.  $(\hat{X}_l)_{l \in \mathbb{N}_0}$  mit

$$\mathbb{P}_{\hat{X}_1} = p \cdot \delta_{+1} + q \cdot \delta_{-1}$$

gegeben, wobei  $p, q = 1 - p \in [0, 1]$  und

$$\begin{aligned} \{\hat{X}_j = +1\} &\text{ Kopf im } j\text{-ten Wurf,} \\ \{\hat{X}_j = -1\} &\text{ Zahl im } j\text{-ten Wurf} \end{aligned}$$

meint. Während der Zustandsraum  $E = \{a\} \cup \{-a(2^k - 1) : k \in \mathbb{N}\}$  unverändert bleibt, sind der Übergangsgraph und die Übergangsmatrix des stochastischen Prozesses

$$\widehat{W}_n = a \cdot \mathbb{1}_{\{\exists 1 \leq l \leq n : \hat{X}_l = 1\}} - a(2^n - 1) \cdot \mathbb{1}_{\{\hat{X}_1 = \dots = \hat{X}_n = -1\}}$$

gegeben durch

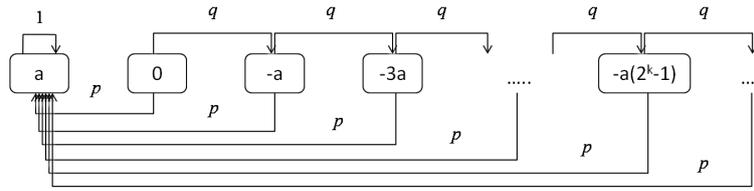


Abb. 4.2: Überganggraph des Verdopplungsspiels im Fall einer nicht a priori fairen Münze

$$\hat{Q} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots \\ p & 0 & q & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots \\ p & 0 & 0 & q & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots \\ p & 0 & 0 & 0 & q & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots \\ p & 0 & 0 & 0 & 0 & q & 0 & \dots & 0 & \dots \\ p & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & q & \dots & 0 & \dots \\ p & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots \\ \dots & \dots \\ p & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & q & \dots \\ \dots & \dots \end{pmatrix}$$

Analog zum Fall der fairen Münze sind die Zustände  $-a(2^k - 1) \forall k \in \mathbb{N}$  transient und der Zustand  $a$  absorbierend. Die Wahrscheinlichkeit, bei einem Start in  $0$  in  $a$  absorbiert zu werden, beträgt auch hier (vorausgesetzt  $p \neq 0$ )

$$h_a(0) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(T_a = n | \hat{W}_0 = 0) = \sum_{n=1}^{\infty} pq^{n-1} = p \frac{1}{1-q} = 1.$$

Selbst wenn die Münze unfair und die Wahrscheinlichkeit eines Kopf-Wurfes sehr klein ist, wird man dennoch mit Wahrscheinlichkeit 1 irgendwann gewinnen. Der Zeitpunkt des ersten Kopf-Wurfes wird durch die zufällige Eintrittszeit  $T_a \sim Geom(p)$  beschrieben. Für kleine  $p$  ist  $T_a$  mit hoher Wahrscheinlichkeit sehr groß, denn

$$\mathbb{P}(T_a = l) = pq^{l-1} \quad \forall l \in \mathbb{N}_0,$$

d.h. dass man wahrscheinlich sehr lange auf den Gewinn warten muss und daher sehr viel Einsatzkapital benötigt.

### 4.3 Begrenztes Einsatzkapital im Verdopplungsspiel

Abschließend wollen wir noch den Fall betrachten, dass Paul nur über endlich viel Kapital  $A > 0$  verfügt und gehen dabei von einer nicht a priori fairen Münze aus.

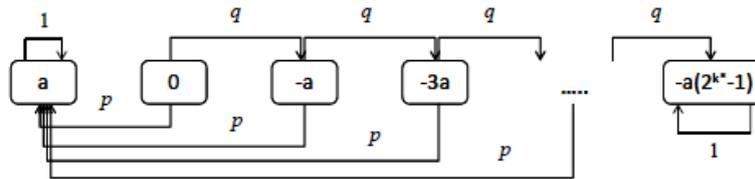
Wir haben bereits in Abschnitt 3.2.4 gezeigt, dass die maximale Anzahl der Münzwürfe dann

$$k^* = \max\{k \in \mathbb{N} : a(2^k - 1) \leq A\}$$

beträgt. Mit einem Kapital von  $A > 0$  Euro und einem Starteinsatz von  $a > 0$  Euro kann Paul also höchstens  $k^*$ -mal einen Einsatz gemäß seiner Verdopplungsstrategie zahlen. Sein Nettogewinn bzw. Nettoverlust nach dem  $n$ -ten Münzwurf beträgt

$$\begin{aligned} \bar{W}_n = & a \cdot \mathbb{1}_{\{\exists 1 \leq l \leq n \leq k^* : \hat{X}_l = 1\}} - a(2^n - 1) \cdot \mathbb{1}_{\{\hat{X}_1 = \dots = \hat{X}_n = -1, n \leq k^*\}} \\ & - a(2^{k^*} - 1) \cdot \mathbb{1}_{\{\hat{X}_1 = \dots = \hat{X}_{k^*} = -1, n > k^*\}}. \end{aligned}$$

Der Zustandsraum  $\bar{E} = \{a\} \cup \{-a(2^k - 1) : 0 \leq k \leq k^*\}$  ist in diesem Fall endlich, wobei die Zustände  $a$  und  $-a(2^{k^*} - 1)$  absorbierend und die restlichen  $j \in \bar{E}$  transient sind.



**Abb. 4.3:** Übergangsgraph des Verdopplungsspiels im Fall einer nicht a priori fairen Münze mit absorbierenden Rändern

Die Übergangsmatrix ist in diesem Fall durch die endliche Matrix  $\bar{Q}$  gegeben:

$$\bar{Q} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ p & 0 & q & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ p & 0 & 0 & q & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ p & 0 & 0 & 0 & q & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ p & 0 & 0 & 0 & 0 & q & 0 & \dots & 0 & 0 \\ p & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & q & \dots & 0 & 0 \\ p & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots \\ p & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & q \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Uns interessieren nun die Absorptionswahrscheinlichkeiten der Zustände  $a$  und  $-a(2^{k^*} - 1)$ . Es ist

$$h_a(0) = \sum_{n=1}^{k^*} \mathbb{P}(T_a = n \mid \bar{W}_0 = 0) = \sum_{n=1}^{k^*} pq^{n-1} = p \frac{1 - q^{k^*}}{1 - q} = 1 - q^{k^*}$$

und

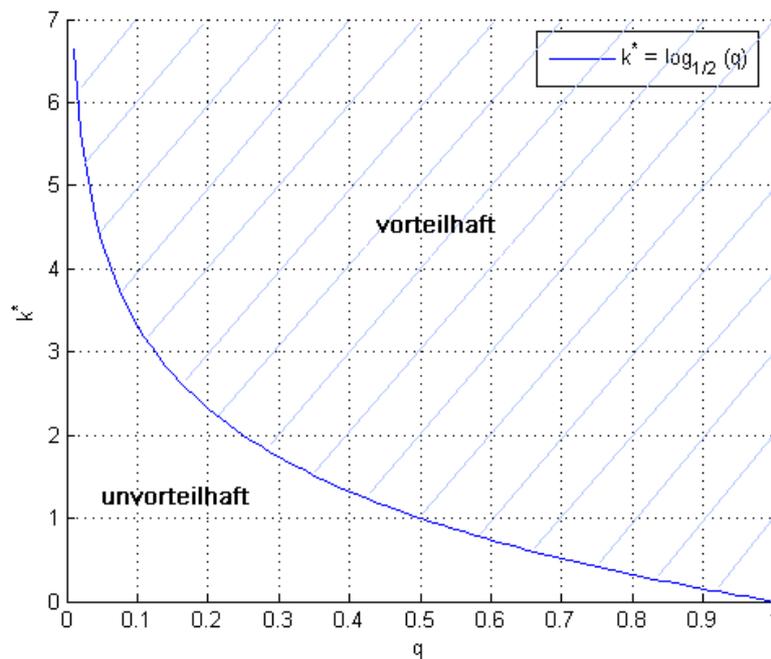
$$\begin{aligned} h_{-a(2^{k^*}-1)}(0) &= \sum_{n=1}^{k^*} \mathbb{P}(T_{-a(2^{k^*}-1)} = n \mid \bar{W}_0 = 0) \\ &= \mathbb{P}(T_{-a(2^{k^*}-1)} = k^* \mid \bar{W}_0 = 0) = q^{k^*}. \end{aligned}$$

Je kleiner also  $q$ , desto größer ist die Wahrscheinlichkeit, bei einem Start in 0 im Zustand  $a$  absorbiert zu werden. Ein Vergleich der Absorptionswahrscheinlichkeiten

$$\begin{aligned} h_a(0) &\geq h_{-a(2^{k^*}-1)}(0) \\ \Leftrightarrow 1 - q^{k^*} &\geq q^{k^*} \\ \Leftrightarrow k^* &\geq \log_{\frac{1}{2}} q. \end{aligned}$$

liefert folgende Entscheidungshilfe für Paul (vgl. auch Abb. 4.4):

- (i) Ist  $k^* > \log_{\frac{1}{2}} q$  für gegebenes  $q$ , so wird Paul wahrscheinlich gewinnen.
- (ii) Ist  $k^* = \log_{\frac{1}{2}} q$  für gegebenes  $q$ , so wird Paul mit gleicher Wahrscheinlichkeit gewinnen bzw. bankrott gehen.
- (iii) Ist  $k^* < \log_{\frac{1}{2}} q$  für gegebenes  $q$ , so wird Paul wahrscheinlich bankrott gehen.



**Abb. 4.4:** Entscheidungshilfe für Paul: Liegt der Punkt  $(q, k^*)$  für ein gegebenes  $q$  im schraffierten Bereich ( $k^* > \log_{\frac{1}{2}} q$ ), so wird Paul wahrscheinlich gewinnen.

# Kapitel 5

## Asymptotische Interpretationen

### Notation

Wenn nicht anders erwähnt, beschreibt die Folge der i.i.d. Zufallsvariablen  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  in diesem Kapitel die einzelnen Gewinne unabhängiger Wiederholungen eines Glücksspiels. Weiterhin bezeichnen  $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$  den kumulierten Gewinn aus  $n$  Spielen und  $R_n$  den kumulierten Einsatz für  $n$  Spiele.

In [Fel1] betrachtet William Feller unendlich viele Wiederholungen eines Spiels und studiert das Langzeitverhalten der durchschnittlichen Gewinne. Den Begriff eines fairen Spiels interpretiert der Autor in diesem Zusammenhang asymptotisch und im Kontext mit dem Gesetz der großen Zahlen (GGZ). Für den Fall eines unendlichen Erwartungswertes wie im Sankt–Petersburg–Spiel existiert nach Feller keine endliche Konstante  $c > 0$ , für die das gesamte Spiel (bestehend aus  $n$  Teilspielen) für den kumulierten Einsatz  $R_n = cn$  gerecht wird ([Fel3] S. 252). In Abschnitt 5.1 zeigen wir, dass die Paradoxie verschwindet, wenn der Einsatz von der zuvor festgelegten Anzahl  $n$  der Spiele abhängt. Aus der Gültigkeit des schwachen GGZ kann für den kumulierten Gewinn  $S_n$  aus  $n$  Sankt–Petersburg–Spielen schließlich die Äquivalenz in Wahrscheinlichkeit von  $S_n \simeq n \log_2 n$  gefolgert werden.

In Abschnitt 5.2 beweisen wir dann, dass das schwache GGZ im Fall des klassischen Sankt–Petersburg–Spiels jedoch nicht zum starken GGZ verbessert werden kann, während geeignete Modifikationen des Spiels hingegen auch die fast sichere Konvergenz gewährleisten.

Im letzten Abschnitt 5.3 diskutieren wir, wie Martin–Löf Fellers Lösung durch ein dem Zentralen Grenzwertsatz (ZGWS) ähnlichen Theorem verfeinerte.

## 5.1 Stochastische Konvergenz für das Sankt–Petersburg–Spiel

### 5.1.1 Grundlagen

#### Exkurs: Die klassische Theorie der fairen Spiele

Die klassische Theorie der fairen Spiele (18. Jahrhundert) nimmt das schwache GGZ als Ausgangspunkt um Fairness zu definieren. Man sagt, dass das schwache GGZ für  $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$  erfüllt ist, falls die Konvergenz von  $\frac{S_n}{n}$  stochastisch stattfindet, d.h. falls

$\forall \epsilon > 0$  gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left( \left| \frac{S_n}{n} - \mathbb{E}(X_1) \right| \geq \epsilon \right) = 0.$$

In diesem Fall ist die Differenz  $|S_n - n\mathbb{E}(X_1)|$  für genügend große  $n$  wahrscheinlich klein im Vergleich zu  $n$ . Ist der Einsatz  $R_1$  pro Spiel kleiner (größer) dem Erwartungswert  $\mathbb{E}(X_1)$ , so wird der Spieler bei einer großen Anzahl von Spielwiederholungen wahrscheinlich einen positiven (negativen) Nettogewinn der Größenordnung  $n(\mathbb{E}(X_1) - R_1)$  haben. Ein Einsatz kleiner (größer) dem Erwartungswert ist daher vorteilhaft (unvorteilhaft) für den Spieler ([Fel3] S. 249).

### 5.1.1.1 Das schwache GGZ für integrierbare Zufallsvariablen

Bevor wir das schwache GGZ auf ein modifiziertes Sankt–Petersburg–Spiel anwenden, wollen wir kurz 2 Versionen vorstellen.

**Satz 5.1.1.** (Satz 1.5.2 in [Durr]) Sei  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  eine Folge von paarweise unkorrelierten Zufallsvariablen in  $L^2$  mit  $\mathbb{E}(X_i) = \mu$  und  $\text{Var}(X_i) \leq c < \infty \forall i \in \mathbb{N}_0$ . Dann gilt für die Summe  $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$

$$\frac{S_n}{n} = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n} \xrightarrow[\mathbb{P}, L^2]{n \rightarrow \infty} \mu.$$

*Beweis.* Aus

$$\mathbb{E} \left( \frac{S_n}{n} \right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{E}(X_i) = \mu$$

und der paarweisen Unkorreliertheit ergibt sich

$$E \left( \left( \frac{S_n}{n} - \mu \right)^2 \right) = \text{Var} \left( \frac{S_n}{n} \right) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \text{Var}(X_i) \leq \frac{nc}{n^2} = \frac{c}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

und daher

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow[L^2]{n \rightarrow \infty} \mu.$$

Mit der Tschebycheff–Ungleichung folgt nun  $\forall \epsilon > 0$

$$\mathbb{P} \left( \left| \frac{S_n - \mathbb{E}(S_n)}{n} \right| \geq \epsilon \right) \leq \frac{\text{Var}(S_n)}{n^2 \epsilon^2} = \frac{\sum_{i=1}^n \text{Var}(X_i)}{n^2 \epsilon^2} \leq \frac{nc}{n^2 \epsilon^2} = \frac{c}{n \epsilon^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

und schließlich

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow[\mathbb{P}]{n \rightarrow \infty} \mu.$$

□

Die folgende (erstmal durch A.J. Khintchine (1894–1959) bewiesene) Version verlangt nicht die Existenz endlicher Varianzen.

**Satz 5.1.2.** (Korollar 1.5.8 in [Durr]) Sei  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  eine Folge von i.i.d. Zufallsvariablen mit  $\mathbb{E}(X_1) = \mu$ . Dann gilt für die Summe  $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$

$$\frac{S_n}{n} = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbb{P}} \mu.$$

Einen Beweis dieser schärferen Version, der die Methode des Abschneidens gebraucht, findet man u.a. in [Durr] S. 43 oder [Fel3] S. 246ff..

### Anwendung auf Condorcets modifiziertes Sankt–Petersburg–Spiel

Auf das ursprüngliche Sankt–Petersburg–Spiel, welches durch die Zufallsvariable  $Y$  mit (1.1) modelliert wird, kann wegen  $\mathbb{E}(Y) = \infty$  weder Satz 5.1.1 noch Satz 5.1.2 angewandt werden.

Lassen wir jedoch nur maximal  $N \in \mathbb{N}_0$  Münzwürfe zu und vereinbaren eine Auszahlung von  $2^N$ , falls auch nach  $N$  Münzwürfen noch kein Kopf gefallen ist, so sind die Voraussetzungen von Satz 5.1.1 erfüllt<sup>1</sup>. Dieses modifizierte Spiel wird durch  $\tilde{Y}$  mit

$$\mathbb{P}_{\tilde{Y}} = \sum_{i=1}^{N-1} \left(\frac{1}{2}\right)^i \cdot \delta_{2^i} + \left(\sum_{i=N}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^i\right) \cdot \delta_{2^N} = \sum_{i=1}^{N-1} \left(\frac{1}{2}\right)^i \cdot \delta_{2^i} + \left(\frac{1}{2}\right)^{N-1} \cdot \delta_{2^N} \quad (5.1)$$

beschrieben. Für jedes beliebige, aber fest gewählte  $N \in \mathbb{N}_0$  ergibt sich der Erwartungswert

$$\mathbb{E}(\tilde{Y}) = \sum_{i=1}^{N-1} \left(\frac{1}{2}\right)^i 2^i + \sum_{i=N}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^i 2^N = N - 1 + \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^i = N + 1 < \infty \quad (5.2)$$

und wegen

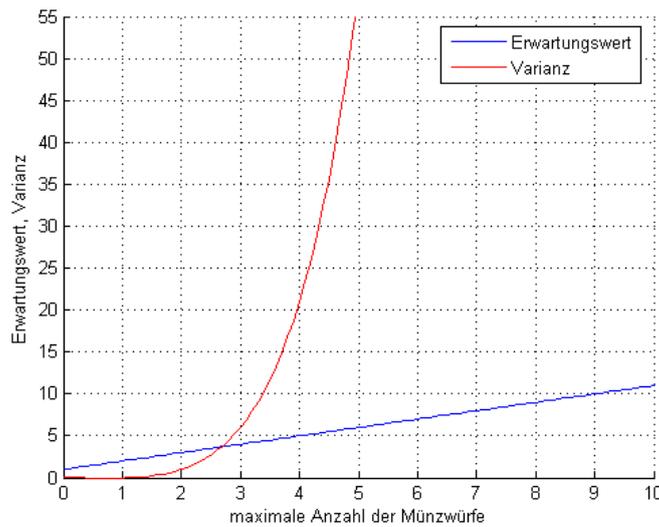
$$\mathbb{E}(\tilde{Y}^2) = \sum_{i=1}^{N-1} \left(\frac{1}{2}\right)^i (2^i)^2 + \sum_{i=N}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^i (2^N)^2 = 2 \frac{2^{N-1} - 1}{2 - 1} + 2^N \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^i = 3 \cdot 2^N - 2 < \infty$$

die Varianz

$$\text{Var}(\tilde{Y}) = \mathbb{E}(\tilde{Y}^2) - (\mathbb{E}(\tilde{Y}))^2 = 3 \cdot 2^N - 2 - (N + 1)^2 < \infty. \quad (5.3)$$

Durch die Festlegung, maximal  $N$ -mal die Münze zu werfen, minimieren sich die erwartete Spieldauer sowie die erwartete Gewinnauszahlung. Während der Erwartungswert linear mit der maximalen Anzahl der Münzwürfe anwächst, steigt die Varianz exponentiell (vgl. auch Abb. 5.1). Dies verdeutlicht die Ungenauigkeit der Beschreibung der modifizierten Sankt–Petersburg–Zufallsvariablen durch ihren Erwartungswert für wachsendes  $N$ .

<sup>1</sup>Diese Art der Begrenzung des Sankt–Petersburg–Spiels wurde schon von Condorcet vorgeschlagen (vgl. Abschnitt 2.7).



**Abb. 5.1:**  $\mathbb{E}(\tilde{Y}), \text{Var}(\tilde{Y})$  in Abhängigkeit der Anzahl  $N$  der maximal zulässigen Münzwürfe

Für die i.i.d. Zufallsvariablen  $(\tilde{Y}_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  mit  $\tilde{Y}_1 =^d \tilde{Y}$ , die die voneinander unabhängigen modifizierten Sankt–Petersburg–Spiele modellieren, gilt nun mit Satz 5.1.1 und Gleichung (5.2)

$$\frac{\sum_{i=1}^n \tilde{Y}_i}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbb{P}, L^2} N + 1.$$

Gemäß dem schwachen GGZ ist bei einer großen Anzahl von Spielwiederholungen daher jeder Einsatz  $R_1 < N + 1$  vorteilhaft für den Spieler (und entsprechend unvorteilhaft für  $R_1 > N + 1$ ).

### Fellers Kritik

Die klassische Theorie schlussfolgert nun, dass ein Spiel als fair angesehen werden kann, falls der Einsatz dem Erwartungswert entspricht ([Dut] S. 24). Im obigen Fall würde dies bedeuten, dass das Spiel gerade für den Einsatz  $R_1 = N + 1$  für beide Parteien fair ist. Der Spieler fängt an zu gewinnen, sobald Kopf erstmalig im  $n$ -ten Wurf fällt, wobei  $2^n > N + 1$  ([Dut] S. 32). Während für  $2^n = N + 1$  weder Gewinn noch Verlust vorliegen, verliert der Spieler für  $2^n < N + 1$  mit Wahrscheinlichkeit

$$\sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{2}\right)^i = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Der Mathematiker William Feller kritisiert gerade diese Schlussfolgerungen der eben genannten Sichtweise der klassischen Theorie ([Fel3] S. 249) und betont, dass das schwache GGZ für den Fall  $R_1 = \mathbb{E}(X_1)$  nichts über die Vorteilhaftigkeit bzw. Unvorteilhaftigkeit aussagt. Der Autor räumt ein, dass die Sichtweise, nach welcher ein Spiel fair (also weder vorteilhaft, noch unvorteilhaft) ist, falls der Einsatz  $R_1$  dem Erwartungswert  $\mathbb{E}(X_1)$

entspricht, für den Fall endlicher Varianzen durchaus gilt. Doch existieren die Varianzen nicht, so ist diese Definition der Fairness nicht korrekt, da die Nettogewinne/–verluste  $|S_n - nR_1|$  für große  $n$  nicht notwendigerweise um 0 oszillieren müssen. Feller schlägt daher variable Einsätze vor, welche von der zuvor festgelegten Anzahl der durchzuführenden Spiele abhängen.

Um Fellers Gedanken nachzuvollziehen, betrachten wir zunächst ein Spiel  $X$  mit endlichem Erwartungswert  $\mathbb{E}(X) = \mu > 0$  und bezeichnen mit  $n$  die Anzahl der Spiele. Das gesamte Spiel (mit  $n$  Teilspielen  $X_1, \dots, X_n$  und  $X_i \stackrel{d}{=} X \forall i \in \mathbb{N}_0$ ) kann der klassischen Theorie zu Folge als gerecht angesehen werden, wenn der Quotient der kumulierten Gewinne  $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$  und der kumulierten Einsätze  $R_n$  für wachsendes  $n$  gegen 1 strebt ([Fel3] S. 252), d.h. wenn  $\forall \epsilon > 0$  gilt

$$\mathbb{P} \left( \left| \frac{S_n}{R_n} - 1 \right| \geq \epsilon \right) \rightarrow 0 \text{ für } n \rightarrow \infty.$$

Diese Aussage ist äquivalent zu

$$\mathbb{P} (|S_n - R_n| \geq \epsilon R_n) \rightarrow 0 \text{ für } n \rightarrow \infty,$$

d.h. die Differenz  $|S_n - R_n|$  ist für große Werte von  $n$  von kleinerer Größenordnung als  $R_n$ . Für die Wahl  $R_n = n\mu$  bzw. einem Einsatz von  $\mathbb{E}(X_i) = \mu$  pro Spiel ist dies nach Satz 5.1.1 erfüllt.

In [Fel1] weist Feller nun aber auf einen Fehler dieser Sichtweise hin und beweist, dass ein Spiel, dessen Einsatz dem erwarteten endlichen Gewinn  $\mathbb{E}(X) = \mu > 0$  entspricht, extrem unvorteilhaft für den Spieler sein kann. Ein im Sinne des schwachen GGZ faires Spiel muss nicht notwendigerweise fair sein (siehe [Fel1] S. 301). Der Autor konstruiert dazu ein solches *fares* Spiel, bei welchem der Spieler einen konstanten Einsatz von  $\mathbb{E}(X) = M$  zahlt. Feller beweist, dass die Wahrscheinlichkeit, dass der Spieler nach  $n$  Spielen einen Verlust  $L_n = nM - S_n$  der Größenordnung  $n(\log n)^{-n}$  mit beliebig kleinem  $\epsilon > 0$  erleidet, gegen 1 geht, d.h.

$$\forall \epsilon > 0 : \mathbb{P} (nM - S_n > (1 - \epsilon)n(\log n)^{-n}) \rightarrow 1 \text{ für } n \rightarrow \infty.$$

### 5.1.1.2 Das schwache GGZ für Dreiecksanordnungen

Um der Forderung nach variablen Einsätzen, die von der zuvor festgelegten Anzahl  $n$  der durchzuführenden Spiele abhängen, nachzukommen, wollen wir nun eine Dreiecksanordnung einer Folge von Zufallsvariablen  $(X_{n,i})_{\substack{n \in \mathbb{N}_0 \\ 1 \leq i \leq n}}$  betrachten

$$\begin{array}{ccccccc} X_{1,1} & & & & & & \\ X_{2,1} & X_{2,2} & & & & & \\ X_{3,1} & X_{3,2} & X_{3,3} & & & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & & & \\ X_{n,1} & X_{n,2} & X_{n,3} & \dots & X_{n,n} & & \end{array}$$

Offensichtlich hängen die Summanden der Summe  $S_n = \sum_{i=1}^n X_{n,i}$  für alle  $n \in \mathbb{N}_0$  vom Index  $n$  ab. Wenn nicht anders erwähnt, bezeichnet dieser Index  $n$  für den Rest des Kapitels die zuvor festgelegte Anzahl der durchzuführenden Spiele.

Auf die obige Zerlegung soll nun eine Modifikation des schwachen GGZ angewandt werden.

**Satz 5.1.3.** (Theorem 1.5.4 in [Durr]) Für  $S_n = \sum_{i=1}^n X_{n,i}$  seien  $\tilde{\mu}_n = \mathbb{E}(S_n)$  und  $\tilde{\sigma}_n^2 = \text{Var}(S_n)$ . Weiterhin sei  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  eine Folge strikt positiver Zahlen mit  $\frac{\tilde{\sigma}_n}{b_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ . Dann gilt

$$\frac{S_n - \tilde{\mu}_n}{b_n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbb{P}, L^2} 0.$$

*Beweis.* Aus

$$\mathbb{E} \left( \left( \frac{S_n - \tilde{\mu}_n}{b_n} \right)^2 \right) = \frac{1}{b_n^2} \mathbb{E} \left( (S_n - \tilde{\mu}_n)^2 \right) = \frac{\tilde{\sigma}_n^2}{b_n^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

folgt unmittelbar

$$\frac{S_n - \tilde{\mu}_n}{b_n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{L^2} 0 \quad \text{und mit Tschebyscheff} \quad \frac{S_n - \tilde{\mu}_n}{b_n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbb{P}} 0.$$

□

Trotz des trivialen Beweises ist Satz 5.1.3 keinesfalls wertlos, denn wir mussten keinerlei Aussagen über die  $(X_{n,i})_{\substack{n \in \mathbb{N}_0 \\ 1 \leq i \leq n}}$  machen.

### Anwendung auf Condorcets modifiziertes Sankt–Petersburg–Spiel

Da die Varianzen des modifizierten Sankt–Petersburg–Spiels  $\tilde{Y}$  endlich sind (vgl. Gleichung (5.3)), können wir das Spiel gemäß der klassischen und Fellers Sichtweise für einen Einsatz von  $\mathbb{E}(\tilde{Y}) = N + 1$  als fair interpretieren. Wir wollen kurz zeigen, dass Satz 5.1.3 das gleiche Ergebnis liefert.

Wir setzen  $\tilde{Y}_{n,i} = \tilde{Y}_i = {}^d \tilde{Y}$  für alle  $i, n \in \mathbb{N}_0$ . Die Summe  $S_n^{\tilde{Y}} = \sum_{i=1}^n \tilde{Y}_{n,i} = \sum_{i=1}^n \tilde{Y}_i$  hat

- den Erwartungswert  $\mathbb{E}(S_n^{\tilde{Y}}) = n(N + 1)$  und
- die Varianz  $\text{Var}(S_n^{\tilde{Y}}) = {}^{iid} n(3 \cdot 2^N - 2 - (N + 1)^2)$ .

Setzen wir  $b_n = n(N + 1) > 0$ , so gilt

$$\frac{\sqrt{\text{Var}(S_n^{\tilde{Y}})}}{b_n} = \frac{\sqrt{n(3 \cdot 2^N - 2 - (N + 1)^2)}}{n(N + 1)} = \frac{\sqrt{3 \cdot 2^N - 2 - (N + 1)^2}}{\sqrt{n}(N + 1)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

und daher nach Satz 5.1.3

$$\Rightarrow \frac{S_n^{\tilde{Y}} - n(N + 1)}{n(N + 1)} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbb{P}} 0$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \frac{S_n^{\tilde{Y}}}{n(N+1)} - 1 \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbb{P}} 0 \\ &\Rightarrow \frac{S_n^{\tilde{Y}}}{n(N+1)} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbb{P}} 1 \\ &\Rightarrow \frac{S_n^{\tilde{Y}}}{n} \simeq N + 1 \text{ (Äquivalenz in Wahrscheinlichkeit)}. \end{aligned}$$

### 5.1.1.3 Das schwache GGZ für abgeschnittene Zufallsvariablen

In [Fel1] untersucht Feller das klassische Sankt–Petersburg–Spiel genauer und zeigt, dass auch in dem Fall eines nicht existierenden Erwartungswertes ein fairer und von  $n$  abhängiger Einsatz ermittelt werden kann. Für ein fest gewähltes  $n$ , welches wieder die zuvor festgelegte Anzahl der durchzuführenden Spiele bezeichnet, beträgt der Einsatz pro Spiel gerade  $\log_2 n$ . Wir werden nun zeigen, dass diese Wahl der variablen Einsätze durchaus gerechtfertigt ist und sich aus der Anwendung eines Spezialfalles des schwachen Gesetzes der großen Zahl ergibt.

Um das schwache GGZ auch auf Zufallsvariablen ohne zweite Momente (wie beim Sankt–Petersburg–Spiel) anzuwenden, behelfen wir uns der Technik des Abschneidens, um dann wie im Beweis von Satz 5.1.3 die Tschebyscheff–Ungleichung anwenden zu können. Statt einer Zufallsvariablen  $X$  betrachten wir für eine beliebige reelle Zahl  $M > 0$  nun  $\bar{X} = X \cdot \mathbf{1}_{\{|X| \leq M\}} \in L^2$ .

**Satz 5.1.4.** (Satz 1.5.5 in [Durr]) *Es seien  $(X_{n,i})_{\substack{n \in \mathbb{N}_0 \\ 1 \leq i \leq n}}$  eine Folge von Zufallsvariablen, wobei die  $(X_{n,1}, \dots, X_{n,n})$  für alle  $n \in \mathbb{N}_0$  unabhängig sind, und  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  eine Folge strikt positiver Zahlen mit  $b_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \infty$ . Wir setzen*

$$\begin{aligned} \bar{X}_{n,i} &= X_{n,i} \cdot \mathbf{1}_{\{|X_{n,i}| \leq b_n\}} \\ \bar{S}_n &= \sum_{i=1}^n \bar{X}_{n,i} \quad \text{und} \\ a_n &= \mathbb{E}(\bar{S}_n). \end{aligned}$$

Gelten außerdem für  $n \rightarrow \infty$

$$(i) \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(|X_{n,i}| > b_n) \rightarrow 0 \text{ und}$$

$$(ii) \frac{1}{b_n^2} \sum_{i=1}^n \mathbb{E}(\bar{X}_{n,i}^2) \rightarrow 0,$$

so folgt

$$\frac{S_n - a_n}{b_n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbb{P}} 0.$$

(i) und (ii) können als Randbedingungen für die geeignete Wahl einer Folge  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  interpretiert werden. Während die erste Bedingung garantiert, dass nicht zu viel abgeschnitten wird und  $a_n$  somit nicht zu sehr von  $\mathbb{E}(S_n)$  abweicht, stellt (ii) sicher, dass  $b_n$  schneller anwächst als die Varianz von  $\bar{S}_n$ .

*Beweis.* Es gilt die Teilmengenrelation

$$A_n := \left\{ \left| \frac{S_n - a_n}{b_n} \right| \geq \epsilon \right\} \subset \left( \{S_n \neq \bar{S}_n\} \cup \left\{ \left| \frac{\bar{S}_n - a_n}{b_n} \right| \geq \epsilon \right\} \right) =: B_n \cup C_n,$$

denn das Ereignis  $A_n$  tritt nur dann ein, wenn wenigstens eines der Ereignisse  $B_n$  oder  $C_n$  eintritt.

Wegen

$$B_n \subset \left( \bigcup_{i=1}^n \{X_{n,i} \neq \bar{X}_{n,i}\} \right)$$

ist

$$\mathbb{P}(B_n) \leq \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(X_{n,i} \neq \bar{X}_{n,i}) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(|X_{n,i}| > b_n) \xrightarrow[(i)]{n \rightarrow \infty} 0.$$

Für  $C_n$  gilt mit der Tschebyscheff-Ungleichung (da  $\bar{S}_n \in L^2$ )

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(C_n) &= \mathbb{P}\left( \left| \frac{\bar{S}_n - a_n}{b_n} \right| \geq \epsilon \right) \leq \frac{1}{\epsilon^2} \frac{1}{b_n^2} \text{Var}(\bar{S}_n) \\ &= \frac{1}{\epsilon^2} \frac{1}{b_n^2} \sum_{i=1}^n \text{Var}(\bar{X}_{n,i}) \leq \frac{1}{\epsilon^2} \frac{1}{b_n^2} \sum_{i=1}^n \mathbb{E}(\bar{X}_{n,i}^2) \xrightarrow[(ii)]{n \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

□

Für eine Folge von Zufallsvariablen  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  können wir aus dem vorangegangenen Theorem nun einen weiteren Satz schließen.

**Satz 5.1.5.** (Kolmogoroff-Feller schwaches GGZ, Satz 1.5.6 in [Durr]) Seien  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  i.i.d. mit  $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ ,  $\mu_n = \mathbb{E}(X_1 \cdot \mathbb{1}_{\{|X_1| \leq n\}})$  und

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \mathbb{P}(|X_1| > x) = 0.$$

Dann gilt

$$\frac{S_n}{n} - \mu_n \xrightarrow[\mathbb{P}]{n \rightarrow \infty} 0.$$

Dieser Satz lässt sich mit Beweis in [Durr] S. 41f. nachschlagen.

### 5.1.2 Ein schwaches GGZ für das Sankt-Petersburg-Spiel

Wir werden nun Satz 5.1.4 auf das Sankt-Petersburg-Problem anwenden und damit die Gültigkeit des schwachen GGZ beweisen. Dazu seien  $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  i.i.d. mit

$$\mathbb{P}_{Y_1} = \sum_{i=1}^{\infty} \left( \frac{1}{2} \right)^i \cdot \delta_{2^i}, \tag{5.4}$$

d.h. jedes  $Y_i$  beschreibt ein Sankt-Petersburg-Spiel. Wir setzen  $Y_{n,i} = Y_i$  für alle  $i, n \in \mathbb{N}_0$  und offenbar sind die  $(Y_{n,1}, \dots, Y_{n,n}) = (Y_1, \dots, Y_n)$  für alle  $n \in \mathbb{N}_0$  unabhängig. Wir zeigen nun, wie die von Feller vorgeschlagene Folge echt positiver Zahlen

$$b_n = n \log_2 n \quad \text{mit} \quad b_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty \quad (5.5)$$

aus den Bedingungen (i) und (ii) aus Satz 5.1.4 gewonnen werden kann. In Anlehnung an [Durr] (S. 43f.) werden wir dazu zunächst untersuchen, welche Einschränkungen sich aus der Bedingung (i) aus Satz 5.1.4 für  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  ergeben. Es gilt

$$\sum_{i=1}^n \mathbb{P}(|Y_{n,i}| > b_n) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(|Y_i| > b_n) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(Y_i > b_n) = n \mathbb{P}(Y_1 > b_n).$$

Mit der Wahl von  $b_n = 2^{m(n)}$ , wobei  $m : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}$ , ergibt sich

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Y_1 > b_n) &= \mathbb{P}(Y_1 > 2^{m(n)}) = \sum_{i: 2^i > 2^{m(n)}} \left(\frac{1}{2}\right)^i = \sum_{i > m(n)} \left(\frac{1}{2}\right)^i \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^{m(n)} \sum_{i > 0} \left(\frac{1}{2}\right)^i = \frac{2-1}{2^{m(n)}} = \frac{1}{b_n}. \end{aligned}$$

Wir müssen nun  $b_n$  so wählen, dass die Summe

$$\sum_{i=1}^n \mathbb{P}(|Y_{n,i}| > b_n) = \frac{n}{b_n}$$

gegen 0 konvergiert. Dazu formen wir die rechte Seite um

$$\frac{n}{b_n} = \frac{n}{2^{m(n)}} = \frac{\exp(\ln n)}{\exp(m(n) \cdot \ln 2)} = \exp(\ln n - m(n) \cdot \ln 2)$$

und setzen  $m(n) = \log_2 n + l(n)$ , wobei  $l : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{R}$  so, dass  $m(n) \in \mathbb{N}$ . Es ergibt sich

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(|Y_{n,i}| > b_n) &\rightarrow 0 \\ \Leftrightarrow \ln n - m(n) \cdot \ln 2 &\rightarrow -\infty \\ \Leftrightarrow \ln n - (\log_2 n + l(n)) \cdot \ln 2 &\rightarrow -\infty \\ \Leftrightarrow \ln n - \left(\frac{\ln n}{\ln 2} + l(n)\right) \cdot \ln 2 &\rightarrow -\infty \\ \Leftrightarrow \ln n - \ln n - l(n) \cdot \ln 2 &\rightarrow -\infty \\ \Leftrightarrow -l(n) \cdot \ln 2 &\rightarrow -\infty. \end{aligned}$$

Offenbar ist dies für  $l(n) \rightarrow +\infty$  erfüllt.

Nun betrachten wir die Bedingung (ii) aus Satz 5.1.4 genauer und garantieren, dass  $b_n$

schnell genug anwächst. Es ist

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\bar{Y}_{n,i}^2) &= \mathbb{E}(\bar{Y}_i^2) = \mathbb{E}(\bar{Y}_1^2) = \mathbb{E}(Y_1^2 \cdot \mathbf{1}_{\{|Y_1| \leq b_n\}}) \\ &= \sum_{i: 2^i \leq 2^{m(n)}} \left(\frac{1}{2}\right)^i (2^i)^2 = \sum_{i=1}^{m(n)} 2^i = 2 \cdot \frac{2^{m(n)} - 1}{2 - 1} \\ &= 2 \cdot (2^{m(n)} - 1) \leq 2^{m(n)+1} = 2b_n.\end{aligned}$$

Somit gilt

$$\frac{1}{b_n^2} \sum_{i=1}^n \mathbb{E}(\bar{Y}_{n,i}^2) \leq \frac{n}{b_n^2} 2b_n = 2 \frac{n}{b_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad (\text{analog zu (i)}).$$

Zusammengefasst ergibt sich für die Wahl von  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$

$$b_n = 2^{m(n)} = 2^{\log_2 n + l(n)} = n 2^{l(n)} > 0,$$

wobei  $l : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{R}$  so, dass  $m(n) \in \mathbb{N}$  und  $l(n) \rightarrow +\infty$ . Nach Satz 5.1.4 gilt nun

$$\frac{S_n - a_n}{b_n} = \frac{S_n - a_n}{n 2^{l(n)}} \xrightarrow[n]{\mathbb{P}} 0.$$

Dabei ist

$$a_n = \mathbb{E}(\bar{S}_n) = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}(\bar{Y}_i) = n \mathbb{E}(Y_1 \cdot \mathbf{1}_{\{|Y_1| \leq b_n\}}) = n \sum_{j=1}^{m(n)} \left(\frac{1}{2}\right)^j 2^j = n \cdot m(n).$$

Nehmen wir an, dass  $l : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion ist, so dass die Voraussetzungen  $m(n) \in \mathbb{N}$ ,  $l(n) \rightarrow +\infty$  und  $l(n) \leq \log_2 \log_2 n$  erfüllt sind. Dann gilt wegen

$$\frac{S_n - a_n}{b_n} = \frac{S_n - a_n}{n 2^{l(n)}} \geq \frac{S_n - a_n}{n 2^{\log_2 \log_2 n}}$$

und

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n - a_n}{b_n}\right| \geq \epsilon\right) \geq \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n - a_n}{n \log_2 n}\right| \geq \epsilon\right)$$

auch

$$\frac{S_n - a_n}{n \log_2 n} \xrightarrow[n]{\mathbb{P}} 0. \tag{5.6}$$

Aus

$$a_n = n(\log_2 n + l(n)) \quad \text{und} \quad \frac{l(n)}{\log_2 n} \leq \frac{\log_2 \log_2 n}{\log_2 n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

folgt aber

$$\frac{a_n}{n \log_2 n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$$

und schließlich

$$\frac{S_n}{n \log_2 n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1.$$

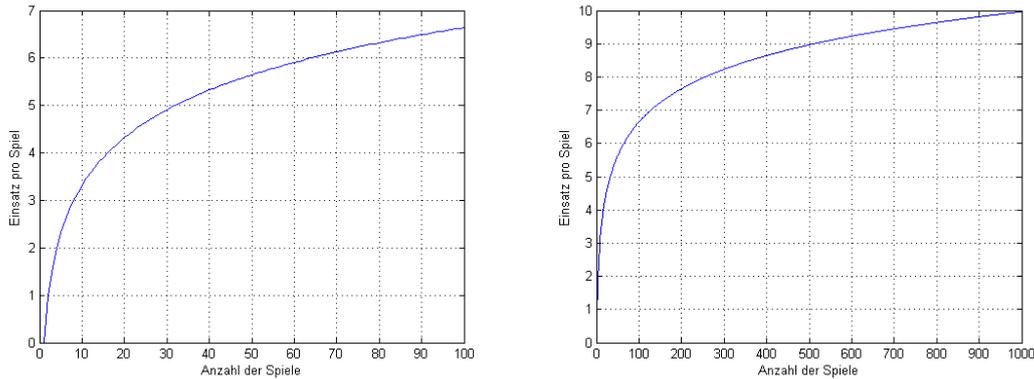
Für große  $n$  gilt daher

$$S_n \simeq n \log_2 n, \quad (5.7)$$

woraus sich, unter der Voraussetzung, dass  $n$  Spiele gespielt werden, ein durchschnittlicher Gewinn von

$$\log_2 n \text{ pro Spiel}$$

ergibt<sup>2</sup>. Für  $n = 2^{10}$  Spiele ergibt sich so beispielsweise ein fairer Einsatz von 10 Euro pro Spiel (vgl. Abb. 5.2).



**Abb. 5.2:** Der Graph  $f(n) = \log_2 n$  beschreibt den durchschnittlichen Gewinn (bzw. fairen Einsatz) pro Spiel in Abhängigkeit der Gesamtanzahl  $n \geq 1$  der Spiele. Das logarithmische Anwachsen der durchschnittlichen Gewinne verdeutlicht, dass man im Schnitt sehr lange auf einen großen Gewinn warten muss.

### Résumé

William Feller selbst weist auf die zu Grunde liegenden unrealistischen Annahmen des eben dargestellten Lösungsansatzes hin (vgl. [Fel3] S. 248). Zum einen wird davon ausgegangen, dass die Spieler über unbegrenzte Ressourcen (Zeit, Vermögen) verfügen und daher unendlich viele Spielwiederholungen durchführen können. Zum anderen wird angenommen, dass unabhängig von den einzelnen Spielergebnissen die vorher festgelegte Anzahl  $n$  von Spielen ausgeführt wird. Diese Annahmen beachten weder das Problem der Ruinwahrscheinlichkeit noch die Tatsache, dass ein kluger Spieler seine Spielstrategie vom Spielverlauf abhängig macht.

Hinzu kommt, dass das GGZ erst für große  $n$  in Kraft tritt und an Bedeutung verliert, wenn nur wenige Spielwiederholungen durchgeführt werden. Es stellt sich die Frage, ob Peter und Paul überhaupt so oft spielen, dass das GGZ angewendet werden kann. Betrachten wir an Peters Stelle jedoch ein Kasino, welches Sankt–Petersburg–Spiele anbietet, so macht die asymptotische Betrachtung der Gewinne schon mehr Sinn. Allerdings

<sup>2</sup>Alternative Beweise für die Gültigkeit des schwachen GGZ lassen sich u.a. in [Fel3] S. 252f. oder [Gut] S. 778f. nachschlagen. Anders als im obigen Beweis zeigen die Autoren hier aber ausgehend von der Folge  $b_n = n \log_2 n$ , dass die Anwendung des schwachen GGZ gerechtfertigt ist. Allan Gut stützt sich in [Gut] bei seinem Beweis auf eine Verallgemeinerung des Kolmogoroff–Feller schwachen GGZ.

steigen die Einsätze mit wachsender Anzahl der Spiele, weshalb diese für jeden einzelnen Kasinobesucher wohl eher weniger attraktiv erscheinen.

**Exkurs: Die Steinhaus-Sequenz und das schwache GGZ**

Wie in Abschnitt 2.10 erwähnt, hat auch Hugo Steinhaus ein Folge variierender Einsätze

$$2 \ 4 \ 2 \ 8 \ 2 \ 4 \ 2 \ 16 \ 2 \ 4 \ 2 \ 8 \ 2 \ 4 \ 2 \ 32 \ 2 \ \dots$$

vorgeschlagen.

**Lemma 5.1.6.** *Für die i.i.d. Sankt-Petersburg-Zufallsvariablen  $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  mit (5.4) und die Steinhaus-Sequenz  $(d_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  gilt*

$$S_{2^m} \simeq 2^m(m+2) = d_{2^m}^{kum},$$

wobei  $d_{2^m}^{kum} = \sum_{i=1}^{2^m} d_i$ .

*Beweis.* Wir benutzen die selbe Notation wie zu Anfang des Abschnittes und erinnern an (vgl. (5.6))

$$\frac{S_n - a_n}{b_n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbb{P}} 0.$$

Zusammen mit Ungleichung (2.3) gilt nun für alle  $n = 2^m$ ,  $m \in \mathbb{N}$ ,

$$\begin{aligned} \frac{S_n - a_n}{d_n^{kum}} &< \frac{S_n - a_n}{b_n} \\ \Rightarrow \left\{ \frac{S_n - a_n}{d_n^{kum}} \geq \epsilon \right\} &\subset \left\{ \frac{S_n - a_n}{b_n} \geq \epsilon \right\} \quad \forall \epsilon > 0 \\ \Rightarrow \frac{S_n - a_n}{d_n^{kum}} &\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbb{P}} 0. \end{aligned}$$

Aus

$$\frac{l(2^m)}{m} \leq \frac{\log_2 \log_2 2^m}{m} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$$

folgt

$$\frac{a_{2^m}}{d_{2^m}^{kum}} = \frac{2^m(\log_2 2^m + l(2^m))}{2^m(m+2)} = \frac{m + l(2^m)}{m+2} \xrightarrow[m \rightarrow \infty]{} 1$$

und schließlich

$$\frac{S_{2^m}}{2^m(m+2)} \xrightarrow[m \rightarrow \infty]{} 1.$$

□

Vereinbart man also vor Spielbeginn,  $2^m$  Spiele zu spielen, so ist ein kumulierter Einsatz von  $2^m(m+2)$  fair im Sinne des schwachen GGZ. Wir haben in Abschnitt 2.10 aber bereits gezeigt, dass die Einsätze gemäß der Steinhaus-Sequenz weniger attraktiv für Paul sind, weshalb sich dieser wohl eher für die Fellers Einsätze entscheiden würde.

## 5.2 Fast sichere Konvergenz für modifizierte Sankt–Petersburg–Spiele

### 5.2.1 Grundlagen

Im folgenden Abschnitt soll geprüft werden, ob die Konvergenz in Wahrscheinlichkeit zur fast sicheren Konvergenz verfeinert werden kann. Bevor wir darauf eingehen, wollen wir zunächst kurz beschreiben, welche Verbesserung uns das starke GGZ bringen würde.

Das schwache GGZ sagt, dass die Differenz  $|S_n - n\mathbb{E}(X_1)|$  für genügend große  $n$  wahrscheinlich klein ist im Vergleich zu  $n$ . Diese Aussage impliziert aber nicht, dass  $|S_n - n\mathbb{E}(X_1)|$  auch klein bleibt für alle  $n$ . Auch wenn wir mit dem schwachen GGZ wissen, dass große Werte von  $|S_n - n\mathbb{E}(X_1)|$  nicht in regelmäßigen Abständen auftreten, ist es durchaus möglich, dass diese Differenz zwischen endlichen bzw. unendlichen Grenzen oszilliert (vgl. als Beispiele die eindimensionale symmetrische Irrfahrt ([Fel4] S. 237) oder Abschnitt 5.2.2).

Das starke GGZ hingegen besagt, dass die Differenz  $|S_n - n\mathbb{E}(X_1)|$  mit großer Wahrscheinlichkeit klein wird und klein bleibt für große  $n$ , d.h.

$$\mathbb{P}\left(\limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{n} S_n - \mathbb{E}(X_1) \right| = 0\right) = 1.$$

**Satz 5.2.1.** (Starke GGZ, [Fel3] S. 260) Seien  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  i.i.d. mit  $\mathbb{E}(X_1) = \mu < \infty$ . Dann gilt für die Summe  $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$

$$\frac{S_n}{n} = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{f.s.} \mu.$$

Ähnlich wie beim schwachen GGZ, existieren auch beim starken GGZ verschiedene Versionen, die sich in den Voraussetzungen unterscheiden. Der Satz von N. Etemadi (1981) nimmt an, dass die Zufallsvariablen  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  paarweise i.i.d. mit  $\mathbb{E}(X_1) = \mu < \infty$  sind. Einen Beweis findet man z.B. in [Durr] S. 55ff.

### 5.2.2 Das entgegengesetzte starke GGZ für das Sankt–Petersburg–Spiel

Wir zeigen nun, dass die in Abschnitt 5.1.2 bewiesene stochastische Konvergenz nicht zur fast sicheren Konvergenz verbessert werden kann.

Offenbar gilt für  $Y_1$  mit (5.4) zunächst  $\forall y \geq 1$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Y_1 > y) &= 1 - \mathbb{P}(Y_1 \leq y) = 1 - \sum_{k=1}^{\lfloor \log_2 y \rfloor} \left(\frac{1}{2}\right)^k \\ &\geq 1 - \frac{1}{2} \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{\log_2 y}}{1 - \frac{1}{2}} = 1 - \left(1 - \frac{1}{2^{\log_2 y}}\right) = \frac{1}{y} \end{aligned}$$

und daher für alle reellen Konstanten  $c > 1$  und alle natürlichen Zahlen  $n \geq 2$

$$\mathbb{P}(Y_1 > cn \log_2 n) \geq \frac{1}{cn \log_2 n}.$$

Daraus folgt aber

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P} \left( \frac{Y_1}{n \log_2 n} > c \right) \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{cn \log_2 n} = \infty$$

und, da die Ereignisse  $\left( \left\{ \frac{Y_1}{n \log_2 n} > c \right\} \right)_{n \in \mathbb{N}_0}$  unabhängig sind, nach dem Borel–Cantelli–Lemma

$$\mathbb{P} \left( \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{Y_1}{n \log_2 n} = \infty \right) = 1.$$

Schließlich gilt

$$\mathbb{P} \left( \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n \log_2 n} = \infty \right) = 1$$

bzw.

$$\mathbb{P} \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n \log_2 n} = 1 \right) = 0.$$

Während also das schwache GGZ unter gewissen Voraussetzungen durchaus auch für Zufallsvariablen gilt, die nicht integrierbar sind, trifft dies nicht auf das starke GGZ zu. Dass das letztgenannte ausschließlich für integrierbare Zufallsvariablen gilt, zeigt Fellers *entgegengesetzte starke Gesetz der großen Zahl*. Es besagt, dass die Folge  $\left( \frac{S_n}{n} \right)_{n \in \mathbb{N}_0}$  mit Wahrscheinlichkeit 1 unbeschränkt ist, sofern kein endlicher Erwartungswert existiert.

**Satz 5.2.2.** (*Theorem 7.9.4 in [Fel4]*) Seien  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  i.i.d. mit  $\mathbb{E}(|X_1|) = \infty$ . Dann gilt für die Summe  $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$  und eine beliebige numerische Folge  $(c_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$

$$\limsup_{n \in \mathbb{N}_0} \left| \frac{S_n}{n} - c_n \right| = \infty.$$

Einen Beweis, der sich auf das Lemma von Borel–Cantelli stützt, findet man ebenfalls in [Fel4] S. 241.

Mit Satz 5.2.2 wissen wir nun, dass das Sankt–Petersburg–Spiel auch für die Steinhaus–Sequenz (vgl. Abschnitt 2.10) nicht fair im Sinne des starken GGZ gemacht werden kann.

**Bemerkung 5.2.3.** (*Hong–Park–Theorem*) Wie in Abschnitt 5.2.1 erwähnt, setzt Etemadi für die Gültigkeit des starken GGZ lediglich paarweise i.i.d. Zufallsvariablen  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  voraus. Als Gegenstück beweisen D. H. Hong und J. M. Park (1993) in [HoPa], dass auch für paarweise i.i.d. Zufallsvariablen  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $\mathbb{E}(|X_1|) = \infty$  und für jede deterministische Folge  $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$  gilt:

$$\mathbb{P} \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{c_n} = 1 \right) = 0.$$

### Résumé

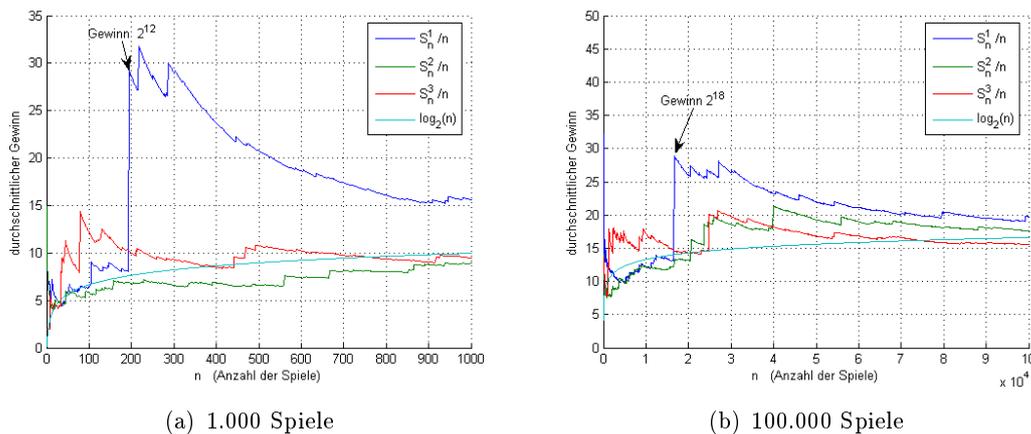
Wir haben gezeigt, dass es durchaus möglich ist, das klassische Sankt–Petersburg–Spiel im Sinne des schwachen GGZ fair zu machen. Mit hoher Wahrscheinlichkeit entsprechen

die kumulierten Gewinne  $S_n$  für große  $n$  den kumulierten Einsätzen  $n \log_2 n$ . Wegen Satz 5.2.2 ist diese Lösung jedoch nicht befriedigend. Die Voraussetzungen des starken GGZ sind beim klassischen Sankt–Petersburg–Spiel nicht erfüllt. Daher ist es durchaus möglich, dass extreme Abweichungen der durchschnittlichen Gewinne  $\frac{S_n}{n}$  und der nach dem schwachen GGZ ermittelten fairen Einsätze  $\log_2 n$  pro Spiel in unregelmäßigen Abständen auftreten können (vgl. auch Abb. 5.3).

Vereinbaren Peter und Paul also  $n$  Runden zu spielen, so zahlt Paul an Peter einen Gesamteinsatz von  $n \log_2 n$  und Peter an Paul einen Gesamtgewinn von  $S_n$ . Obwohl es wahrscheinlich ist, dass beide ihre Ausgaben durch die Einnahmen decken können, besteht die Gefahr, dass einer der beiden einen erheblichen Verlust erleiden wird. Das Risiko, einen erheblichen Nachteil aus diesem Spiel zu ziehen, bleibt daher erhalten — gerechter Weise aber für beide Spieler, Peter und Paul.

### Exkurs: Pooling–Strategien für Sankt–Petersburg–Spieler

Aus Abschnitt 5.1.2 wissen wir, dass der durchschnittliche Gewinn  $\frac{S_n}{n}$  aus  $n$  Sankt–Petersburg–Spiele logarithmisch in der Anzahl der Spiele wächst (vgl. dazu auch die Simulationsergebnisse<sup>3</sup> in Abb. 5.3).



**Abb. 5.3:** Wir haben je drei Durchläufe von (a) 1.000 und (b) 100.000 Spielen simuliert. Der durchschnittliche Gewinn aus  $n$  Sankt–Petersburg–Spiele wächst etwa logarithmisch in  $n$ . Die Zacken entsprechen den seltenen hohen Gewinnen und lassen den durchschnittlichen Gewinn (langsam) ansteigen. Für eine merkbare Verbesserung des durchschnittlichen Gewinns muss Paul daher sehr viel Spiele spielen. Zum Vergleich haben wir außerdem den von Feller vorgeschlagenen Einsatz  $\log_2 n$  pro Spiel graphisch dargestellt.

Spielt Paul also mehrere Spiele, so darf er einen höheren durchschnittlichen Gewinn erwarten. Diese Aussage lässt nun vermuten, dass attraktive Pooling–Strategien<sup>4</sup> für Sankt–Petersburg–Spieler existieren.

<sup>3</sup>Den Quelltext der Simulationen findet man im Anhang B.1.

<sup>4</sup>Bei einer Pooling–Strategie vereinbaren die Spieler zu Beginn, wie die einzelnen Gewinne nach Spielende umverteilt werden.

In [CsSi4] und [CsSi5] diskutieren Csörgő und Simons diese Fragestellung und zeigen, dass eine Umverteilung der ursprünglichen Gewinne tatsächlich einen höheren Gewinn für jeden der Spieler verspricht. Dazu nehmen die Autoren zunächst an, dass ein Peter mit jedem der  $n \geq 2$  Pauls

$$\text{Paul}_1, \text{Paul}_2, \dots, \text{Paul}_n$$

genau ein Sankt-Petersburg-Spiel spielt. Die einzelnen Gewinne werden durch die i.i.d. Sankt-Petersburg-Zufallsvariablen  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$  mit

$$\mathbb{P}_{Y_1} = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^i \cdot \delta_{2^i}$$

und der kumulative Gewinn (bzw. der kumulative Verlust für Peter) durch

$$S_n = \sum_{i=1}^n Y_i$$

beschrieben. Eine mögliche Pooling-Strategie wird durch

$$\mathbf{p}_n = (p_{1,n}, p_{2,n}, \dots, p_{n,n}) \quad \text{mit} \quad \sum_{i=1}^n p_{i,n} = 1 \quad \text{und} \quad p_{i,n} \in [0, 1] \quad \forall i = 1, \dots, n$$

bezeichnet. Dabei meint die Strategie  $\mathbf{p}_n$ , dass

- Paul<sub>1</sub> den Gewinn  $p_{1,n}Y_1 + p_{2,n}Y_2 + \dots + p_{n,n}Y_n$
- Paul<sub>2</sub> den Gewinn  $p_{n,n}Y_1 + p_{1,n}Y_2 + \dots + p_{n-1,n}Y_n$
- ...
- Paul<sub>n</sub> den Gewinn  $p_{2,n}Y_1 + p_{3,n}Y_2 + \dots + p_{1,n}Y_n$

ausgezahlt bekommt. Csörgő und Simons zeigen, dass für alle  $n \geq 2$  Strategien existieren, die jedem der  $n$  Pauls durchschnittlich einen zusätzlichen endlichen Betrag  $H_n$  versprechen (vgl. Tabelle 5.1). Von allen Strategien wird dann die attraktivste  $\mathbf{p}_n^*$  (d.h. die, die den durchschnittlich größten zusätzlichen Gewinn für jeden Paul verspricht) bestimmt und Theorem 2 in [CsSi5] beweist die Eindeutigkeit dieser Strategie.

Prop. 3.1. in [CsSi4] beweist, dass die Mittelungsstrategie

$$\mathbf{p}_n^* = \left(\frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}\right)$$

für alle  $n = 2^k$ ,  $k \in \mathbb{N}_0$ , am attraktivsten und für jeden der  $2^k$  Pauls im Durchschnitt  $\log_2 n = k$  Euro mehr wert ist als die individuelle Strategie (d.h. jeder spielt für sich allein).

n	Pooling-Strategie $\mathbf{p}_n^*$	zusätzlicher Gewinn $H_n$
2	$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$	1
3	$(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$	$1\frac{1}{2}$
4	$(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$	2
5	$(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8})$	$2\frac{1}{4}$
6	$(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8})$	$2\frac{2}{4}$
7	$(\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8})$	$2\frac{3}{4}$
8	$(\frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8})$	3
9	$(\frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{16})$	$3\frac{1}{8}$
10	$(\frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{16}, \frac{1}{16}, \frac{1}{16})$	$3\frac{2}{8}$
11	$(\frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{16}, \frac{1}{16}, \frac{1}{16}, \frac{1}{16}, \frac{1}{16})$	$3\frac{3}{8}$

**Tab. 5.1:** Pooling-Strategien für Sankt-Petersburg-Spieler (vgl. [CsSi5] S. 979)

Zahlen also alle  $n$  Pauls den Einsatz  $\log_2 n$ , so ist das gesamte Spiel nach Feller fair für Peter (vgl. Abschnitt 5.1.2). Da die Pooling-Strategie  $\mathbf{p}_n^*$  nun aber jedem einzelnen Paul einen Vorteil verspricht, stellt sich die Frage, ob die nach Feller ermittelten Einsätze vielleicht doch einen Nachteil für Peter bedeuten. In [CsSi4] und [CsSi5] weisen Csörgő und Simons ausdrücklich darauf hin, dass das schwache GGZ allein keine befriedigende Lösung zur Bestimmung fairer Einsätze hervorbringt und kritisieren damit Fellers Ansatz. Um einen fairen Ausgleich zu schaffen, könnte man daher entweder die Einsätze oder aber die Wahrscheinlichkeit für Kopf erhöhen.

### 5.2.3 Das starke GGZ für modifizierte Sankt-Petersburg-Spiele

Es stellt sich die Frage, wie stark das Sankt-Petersburg-Spiel modifiziert werden muss, um die fast sichere Konvergenz der kumulierten Gewinne gegen die kumulierten Einsätze zu garantieren. Wir erinnern an Condorcets vorgeschlagene Modifikation (siehe Abschnitte 2.7 und 5.1.1), die offensichtlich die Voraussetzungen des starken GGZ erfüllt, denn für die i.i.d.  $(\tilde{Y}_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  gilt  $\mathbb{E}(\tilde{Y}_1) = N + 1 < \infty$ . Jedoch liegt bei diesem Spiel auch nicht wirklich ein Paradoxon vor.

Im folgenden Abschnitt wollen wir nun weitere Modifikationen und deren jüngste Ergebnisse vorstellen. Es wird sich zeigen, dass die Einbehaltung von Gewinnen (Abschnitt 5.2.3.2), die Gewichtung von Gewinnen (Abschnitt 5.2.3.3) sowie die Vereinbarung, den minimalen Gewinn aus je 2 simultanen Sankt–Petersburg–Spielen auszuzahlen (Abschnitt 5.2.3.4), zur fast sicheren Konvergenz führen. Allen Variationen ist gemein, dass die Lukrativität des Spiels aus Pauls Sicht zugunsten der stärkeren Konvergenzaussage weichen muss.

Statt des klassischen Sankt–Petersburg–Spiels mit den Gewinnen  $2, 4, 8, 16, \dots$  betrachten wir die eben genannten Modifikationen außerdem für die folgende verallgemeinerte Version (vgl. dazu z.B. [CsSi3]).

### 5.2.3.1 Eine verallgemeinerte Version des Sankt–Petersburg–Spiels

Diese Version des Sankt–Petersburg–Spiels setzt nicht voraus, dass die Münze a priori fair ist. Die Parameter

$$p = \mathbb{P}(\text{Zahl}) \quad \text{und} \quad q = \mathbb{P}(\text{Kopf}) \quad \text{mit} \quad p, q = 1 - p \in (0, 1)$$

sowie

$$\alpha \in (0, 2)$$

seien beliebige, aber fest gewählte Konstanten. Die Gewinne werden beschrieben durch die i.i.d. Zufallsvariablen<sup>5</sup>

$$(Z_n)_{n \in \mathbb{N}_0} \quad \text{mit} \quad \mathbb{P}\left(Z_1 = q^{-\frac{k}{\alpha}}\right) = q^{k-1}p \quad \text{und} \quad k = 1, 2, \dots \quad (5.8)$$

Die verallgemeinerte Sankt–Petersburg–Zufallsvariable  $Z_1$  nimmt also die Werte aus

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt[\alpha]{q}}, \frac{1}{\sqrt[\alpha]{q^2}}, \frac{1}{\sqrt[\alpha]{q^3}}, \dots \right\}$$

an und hat den Erwartungswert

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Z_1) &= \sum_{k=1}^{\infty} q^{-\frac{k}{\alpha}} q^{k-1} p = \frac{p}{q} \sum_{k=1}^{\infty} q^{k(1-\frac{1}{\alpha})} = \frac{p}{q} \sum_{k=1}^{\infty} \left(q^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}\right)^k \\ &= \begin{cases} \infty & \text{für } \alpha \in (0, 1] \text{ und } \forall p \in (0, 1) \\ \frac{p}{q^{\frac{1}{\alpha}-q}} & \text{für } \alpha \in (1, 2) \text{ und } \forall p \in (0, 1), \end{cases} \end{aligned}$$

denn für

$$(i) \quad \alpha \in (0, 1] \text{ ist } \frac{\alpha-1}{\alpha} \leq 0 \text{ und } q^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} \geq 1 \Rightarrow \text{Divergenz der Reihe}$$

<sup>5</sup>Für  $p = q = \frac{1}{2}$  und  $\alpha = 1$  sind das gerade die klassischen Sankt–Petersburg–Zufallsvariablen.

(ii)  $\alpha \in (1, 2)$  ist  $0 < \frac{\alpha-1}{\alpha} < \frac{1}{2}$  und  $q^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} < 1 \Rightarrow$  Konvergenz der Reihe mit

$$\mathbb{E}(Z_1) = \frac{p}{q} \left( \frac{1}{1 - q^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}} - 1 \right) = \frac{p}{q} \frac{q^{1-\frac{1}{\alpha}}}{1 - q^{1-\frac{1}{\alpha}}} = \frac{p}{q^{\frac{1}{\alpha}} - q} < \infty.$$

Sind die Gewinne also durch  $q^{-\frac{k}{\alpha}} < q^{-k}$  für  $\alpha \in (1, 2)$  gegeben, so erfüllen die i.i.d. Zufallsvariablen  $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  die Voraussetzungen des starken GGZ (Satz 5.2.1).

**Folgerung 5.2.4.** Für  $S_n^Z = \sum_{i=1}^n Z_i$  und  $\alpha \in (1, 2)$  gilt

$$\frac{S_n^Z}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{f.s., \mathbb{P}} \frac{p}{q^{\frac{1}{\alpha}} - q}.$$

Während das starke GGZ nun für  $\alpha \in (1, 2)$  gilt, haben wir für  $\alpha \in (0, 1]$  wieder einen unendlich hohen Erwartungswert vorliegen und wissen mit Satz 5.2.2, dass die fast sichere Konvergenz nicht erreicht werden kann. Wir wollen daher nun die Gültigkeit des schwachen GGZ für  $\alpha \in (0, 1]$  untersuchen.

**Satz 5.2.5.** Für  $\alpha = 1$  gilt

$$\frac{S_n^Z}{n \log_{\frac{1}{q}} n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbb{P}} \frac{p}{q}.$$

*Beweis.* Wir betrachten die Dreiecksanordnung  $(Z_{n,i})_{\substack{n \in \mathbb{N}_0 \\ 1 \leq i \leq n}}$ , wobei die  $(Z_{n,1}, \dots, Z_{n,n})$  i.i.d. sind mit  $Z_{n,i} \stackrel{d}{=} Z_1$ . Bevor wir die Voraussetzungen von Satz 5.1.4 prüfen, setzen wir

$$\bar{Z}_{n,i} = Z_{n,i} \cdot \mathbf{1}_{\{|Z_{n,i}| \leq n \log_{\frac{1}{q}} n\}}$$

und bemerken

$$(a) \quad n \log_{\frac{1}{q}} n = q^{-\log_{\frac{1}{q}}(n \log_{\frac{1}{q}} n)} = \left(q^{-\frac{1}{\alpha}}\right)^{\log_{\frac{1}{q}}(n \log_{\frac{1}{q}} n)^\alpha}$$

$$(b) \quad \mathbb{P}\left(Z_1 \geq q^{-\frac{j}{\alpha}}\right) = \sum_{k=j}^{\infty} q^{k-1} p = pq^{j-1} \sum_{k=0}^{\infty} q^k = pq^{j-1} \frac{1}{1-q} = q^{j-1}$$

$$\begin{aligned} (c) \quad \mathbb{E}\left(Z_1^2 \cdot \mathbf{1}_{\{|Z_1| \leq n \log_{\frac{1}{q}} n\}}\right) & \stackrel{(a)}{=} \sum_{k=1}^{\lfloor \log_{\frac{1}{q}}(n \log_{\frac{1}{q}} n)^\alpha \rfloor} \left(q^{-\frac{k}{\alpha}}\right)^2 q^{k-1} p \\ & = \frac{p}{q} q^{1-\frac{2}{\alpha}} \sum_{k=0}^{\lfloor \log_{\frac{1}{q}}(n \log_{\frac{1}{q}} n)^\alpha \rfloor - 1} q^{(1-\frac{2}{\alpha})k} \\ & \leq pq^{-\frac{2}{\alpha}} \frac{1 - \left(q^{1-\frac{2}{\alpha}}\right)^{\log_{\frac{1}{q}}(n \log_{\frac{1}{q}} n)^\alpha}}{1 - q^{1-\frac{2}{\alpha}}} \\ & = \frac{p}{q^{\frac{2}{\alpha}} - q} \left(1 - \left(n \log_{\frac{1}{q}} n\right)^{2-\alpha}\right) \end{aligned}$$

Wir setzen  $b_n = n \log_{\frac{1}{q}} n$  und prüfen die Bedingung (i) aus Satz 5.1.4

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^n \mathbb{P} \left( |Z_{n,i}| \geq n \log_{\frac{1}{q}} n \right) &=^{iid} n \mathbb{P} \left( Z_1 \geq n \log_{\frac{1}{q}} n \right) \\
 &=^{(a)} n \mathbb{P} \left( Z_1 \geq \left( q^{-\frac{1}{\alpha}} \right)^{\log_{\frac{1}{q}} \left( n \log_{\frac{1}{q}} n \right) \alpha} \right) \\
 &=^{(b)} n q^{\log_{\frac{1}{q}} \left( n \log_{\frac{1}{q}} n \right) \alpha - 1} \\
 &= n \frac{1}{q} \left( q^{-\log_{\frac{1}{q}} \left( n \log_{\frac{1}{q}} n \right)} \right)^{-\alpha} \\
 &= n \frac{1}{q} \left( n \log_{\frac{1}{q}} n \right)^{-\alpha} \\
 &= \frac{1}{q} n^{1-\alpha} \left( \log_{\frac{1}{q}} n \right)^{-\alpha} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \text{für } \alpha \geq 1
 \end{aligned}$$

und die Bedingung (ii) aus Satz 5.1.4

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\left( n \log_{\frac{1}{q}} n \right)^2} \sum_{i=1}^n \mathbb{E} \left( \bar{Z}_{n,i}^2 \right) &=^{iid} \frac{n}{\left( n \log_{\frac{1}{q}} n \right)^2} \mathbb{E} \left( Z_1^2 \cdot \mathbf{1}_{\{|Z_1| \leq n \log_{\frac{1}{q}} n\}} \right) \\
 &\leq^{(c)} \frac{n}{\left( n \log_{\frac{1}{q}} n \right)^2} \frac{p}{q^{\frac{2}{\alpha}} - q} \left( 1 - \left( n \log_{\frac{1}{q}} n \right)^{2-\alpha} \right) \\
 &= \frac{p}{q^{\frac{2}{\alpha}} - q} \left( \frac{1}{n \left( \log_{\frac{1}{q}} n \right)^2} - \frac{n}{\left( n \log_{\frac{1}{q}} n \right)^{\alpha}} \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \text{für } \alpha \geq 1.
 \end{aligned}$$

Während wir für  $\alpha \in (1, 2)$  schon die fast sichere Konvergenz gezeigt haben, erhalten wir nun zusätzlich für den kritischen Fall  $\alpha = 1$  die stochastische Konvergenz

$$\frac{S_n^Z - \mathbb{E} \left( \bar{S}_n^Z \right)}{n \log_{\frac{1}{q}} n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbb{P}} 0.$$

Im letzten Schritt zeigen wir noch für  $\alpha = 1$

$$\frac{S_n^Z}{n \log_{\frac{1}{q}} n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbb{P}} \frac{p}{q}.$$

Wir berechnen dazu

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left(\overline{S}_n^Z\right) &= \sum_{i=1}^n \mathbb{E}\left(\overline{Z}_{n,i}\right) \stackrel{iid}{=} n \mathbb{E}\left(Z_1 \mathbb{1}_{\{|Z_1| \leq n \log_{\frac{1}{q}} n\}}\right) \\ &\stackrel{(a)}{=} n \sum_{k=1}^{\lfloor \log_{\frac{1}{q}}(n \log_{\frac{1}{q}} n) \rfloor} q^{-\frac{k}{q}} q^{k-1} p = n \frac{p}{q} \lfloor \log_{\frac{1}{q}}(n \log_{\frac{1}{q}} n) \rfloor. \end{aligned}$$

Es gilt

$$\frac{n \frac{p}{q} \log_{\frac{1}{q}}(n \log_{\frac{1}{q}} n)}{n \log_{\frac{1}{q}} n} = \frac{p}{q} \underbrace{\frac{\log_{\frac{1}{q}} n + \log_{\frac{1}{q}} \log_{\frac{1}{q}} n}{\log_{\frac{1}{q}} n}}_{\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{p}{q}$$

und analog

$$\frac{n \frac{p}{q} \left(\log_{\frac{1}{q}}(n \log_{\frac{1}{q}} n) - 1\right)}{n \log_{\frac{1}{q}} n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{p}{q},$$

woraus die Behauptung zusammen mit

$$\log_{\frac{1}{q}}(n \log_{\frac{1}{q}} n) - 1 \leq \lfloor \log_{\frac{1}{q}}(n \log_{\frac{1}{q}} n) \rfloor \leq \log_{\frac{1}{q}}(n \log_{\frac{1}{q}} n)$$

unmittelbar folgt.  $\square$

Für  $\alpha = \mathbf{1}$  und große  $n$  gilt also  $\frac{S_n}{n} \simeq \frac{p}{q} \log_{\frac{1}{q}} n$ , woraus sich, unter der Voraussetzung, dass  $n$  Spiele gespielt werden, ein fairer Einsatz von

$$\frac{p}{q} \log_{\frac{1}{q}} n \quad \text{pro Spiel} \tag{5.9}$$

ergibt. Wir weisen darauf hin, dass dieser Einsatz aber nur im Sinne des schwachen GGZ fair ist, denn aus Satz 5.2.2 und Satz 5.2.5 können wir schließen:

**Folgerung 5.2.6.** *Für die verallgemeinerten Sankt-Petersburg-Zufallsvariablen  $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  gilt für  $\alpha = 1$  und  $p \in (0, 1)$*

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n^Z}{n \log_{\frac{1}{q}} n} = \frac{p}{q} \quad \text{und} \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n^Z}{n \log_{\frac{1}{q}} n} = \infty.$$

Für  $\alpha > \mathbf{1}$  haben wir bereits die fast sichere Konvergenz nachgewiesen und für große  $n$  gilt daher  $\frac{S_n}{n} \simeq \frac{p}{q}$ . Es ergibt sich ein (von der Anzahl  $n$  unabhängiger) Einsatz von

$$\frac{p}{q} \quad \text{pro Spiel.}$$

Offensichtlich zahlt man also für  $\alpha > 1$  kleinere Einsätze. Allerdings schrumpfen auch die möglichen Gewinne  $q^{-\frac{k}{\alpha}}$ ,  $k = 1, 2, 3, \dots$  mit größer werdendem  $\alpha$ . Für Paul dürfte die

vorgestellte, verallgemeinerte Sankt–Petersburg–Version daher für ein möglichst kleines  $\alpha > 1$  am attraktivsten erscheinen.

**Vergleich mit dem klassischen Sankt–Petersburg–Spiel**

Abschließend wollen wir die Gewinne des klassischen Sankt–Petersburg–Spiels mit denen eines verallgemeinerten Spiels vergleichen. Um bei beiden Spielen die gleiche Wahrscheinlichkeit  $\left(\frac{1}{2}\right)^k$  für Kopf erstmalig im  $k$ -ten Wurf zu haben, setzen wir  $q = p = \frac{1}{2}$ . Außerdem wählen wir  $\alpha = \frac{3}{2}$  und betrachten für das verallgemeinerte Spiel die Gewinnauszahlung

$$Z_1 = \left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{2k}{3}} = 2^{\frac{2k}{3}} \text{ für Kopf erstmalig im } k\text{-ten Wurf.}$$

Aus Tab. 5.2 kann man die Gewinne  $Z_1$  (gerundet) des verallgemeinerten sowie die Gewinne  $Y_1$  des klassischen Sankt–Petersburg–Spiels für  $k = 1, \dots, 10$  entnehmen und einen enormen Unterschied erkennen. So steigen die Gewinne des klassischen Spiels exponentiell in  $k$ , die Gewinne des verallgemeinerten hingegen nur linear in  $k$ .

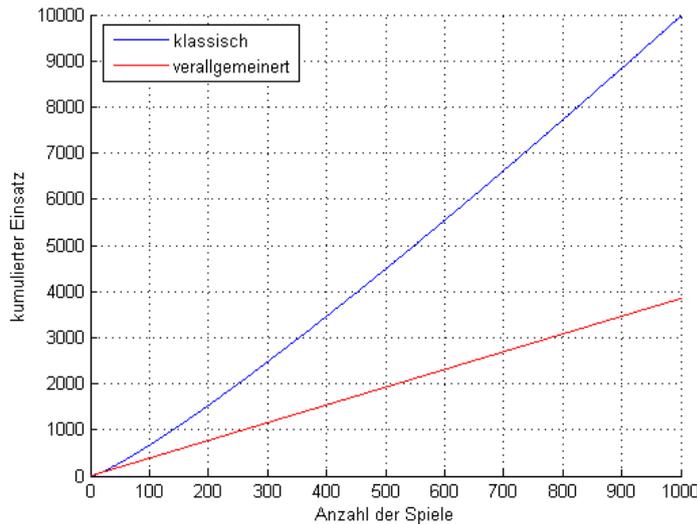
Kopf im im $k$ -ten Wurf	Gewinn		Wkt.
	$Z_1 = 2^{\frac{2k}{3}}$	$Y_1 = 2^k$	
1	1,59	2	$\frac{1}{2}$
2	2,52	4	$\frac{1}{4}$
3	4,00	8	$\frac{1}{8}$
4	6,35	16	$\frac{1}{16}$
5	10,08	32	$\frac{1}{32}$
6	16,00	64	$\frac{1}{64}$
7	25,40	128	$\frac{1}{128}$
8	40,32	256	$\frac{1}{256}$
9	64,00	512	$\frac{1}{512}$
10	101,59	1024	$\frac{1}{1024}$

**Tab. 5.2:** Vergleich der Gewinne bei einem verallgemeinerten und dem klassischen Spiel

Während Paul für  $n$  Spiele bei der klassischen Version einen kumulierten Einsatz von  $b_n = n \log_2 n$  zahlt, beträgt er bei der verallgemeinerten Version nur

$$\frac{n2^{-1}}{2^{-\frac{2}{3}} - 2^{-1}} \approx 3,8473 n$$

bzw. rund 3,85 pro Spiel. Abb. 5.4 verdeutlicht, wie sehr sich die Einsätze in Abhängigkeit von der Anzahl der Spiele unterscheiden.



**Abb. 5.4:** Vergleich der kumulierten Einsätze des klassischen und eines verallgemeinerten Sankt–Petersburg–Spiels mit  $\alpha = \frac{3}{2}$ ,  $p = q = \frac{1}{2}$

Den niedrigeren Gewinnen stehen bei der verallgemeinerten Version somit auch niedrigere Einsätze gegenüber. Zu beachten ist außerdem, dass bei der klassischen Version (erfüllt lediglich schwaches GGZ) wieder die Gefahr besteht, einen erheblichen Verlust zu erleiden. Ein risikoscheuer Spieler würde es daher wohl bevorzugen, die verallgemeinerte Version zu spielen.

Die in den nächsten drei Abschnitten vorgestellten Modifikationen schlagen jeweils Lösungen für den Fall  $\alpha = 1$  vor. Dabei sollen, wenn nicht explizit anders erwähnt,  $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  die i.i.d. klassischen und  $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  die i.i.d. verallgemeinerten (wobei  $\alpha = 1$ ) Sankt–Petersburg–Spiele bezeichnen.

### 5.2.3.2 Einbehaltung von Gewinnen

Sándor Csörgő und Gordon Simons ändern das verallgemeinerte Sankt–Petersburg–Spiel in [CsSi3] insofern ab, als dass eine feste Anzahl  $m \leq n$  der größten Gewinne in einer Sequenz von  $n$  Spielen einbehalten wird. Für die Untersuchung, inwiefern sich das Entfernen

der größten Summanden (Gewinne) auf die Gültigkeit des starken GGZ auswirkt, werden dazu statt der Zufallsvariablen  $Z_1, \dots, Z_n$  und  $S_n^Z = \sum_{i=1}^n Z_n$  die geordneten Werte

$$Z_{n,1} \leq \dots \leq Z_{n,m} \leq \dots \leq Z_{n,n}$$

sowie der kumulierte tatsächlich ausgezahlte Gewinn

$$S_n^Z(m) = \sum_{i=1}^{n-m} Z_{n,i}$$

mit  $m = 0, 1, 2, \dots, n$  betrachtet.

Wir werden nun sehen, dass das schwache GGZ für nur  $m = 1$  zum starken GGZ verbessert werden kann. Wenn also in einer Sequenz von  $n$  Spielen nur mindestens der größte Gewinn nicht ausgezahlt wird, ist die fast sichere Konvergenz gesichert.

**Satz 5.2.7.** (Anwendung des Theorems aus [CsSi3])  $Z_1, \dots, Z_n$  beschreibe die Sequenz von  $n$  verallgemeinerten Sankt-Petersburg-Spielen und  $S_n^Z$  deren kumulativen Gewinn. Für  $\alpha = 1$  gilt

$$\frac{S_n^Z(m)}{n \log_{\frac{1}{q}} n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{f.s.} 1 \quad \text{für alle } m \geq 1.$$

*Beweis.* Wir betrachten  $S_n^Z = \sum_{i=1}^n Z_n = \sum_{i=1}^{n-1} Z_{n,i} + Z_{n,n}$  wobei  $Z_{n,1} \leq \dots \leq Z_{n,n}$  geordnet sind. Mit der Folgerung 5.2.6 wissen wir, dass  $\forall p \in (0, 1)$

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n^Z}{n \log_{\frac{1}{q}} n} = \frac{p}{q} \quad \text{und} \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n^Z}{n \log_{\frac{1}{q}} n} = \infty.$$

Das Ziel ist es nun zu zeigen, dass diese Gleichungen aus dem unberechenbaren Verhalten des größten Gewinnes  $Z_{n,n}$  resultieren.

Es gilt

$$\sum_{i=1}^n Z_n > Z_{n,n} \geq Z_n$$

sowie für alle reellen Konstanten  $z > 0$  und natürlichen Zahlen  $n \geq 2$  (vgl. dazu die Berechnungen in Abschnitt 5.2.2)

$$\mathbb{P} \left( Z_n > zn \log_{\frac{1}{q}} n \right) \geq \frac{1}{zn \log_{\frac{1}{q}} n}.$$

Aus

$$\sum_{n=2}^{\infty} \mathbb{P} \left( Z_{n,n} > zn \log_{\frac{1}{q}} n \right) \geq \sum_{n=2}^{\infty} \mathbb{P} \left( Z_n > zn \log_{\frac{1}{q}} n \right) \geq \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{zn \log_{\frac{1}{q}} n} = \infty$$

folgt mit dem Borel-Cantelli-Lemma

$$\mathbb{P} \left( \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{Z_{n,n}}{n \log_{\frac{1}{q}} n} = \infty \right) = 1,$$

also

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{Z_{n,n}}{n \log_{\frac{1}{q}} n} = \infty \text{ fast sicher.}$$

Andererseits gilt aber auch

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{Z_{n,n}}{n \log_{\frac{1}{q}} n} = 0.$$

Um dies zu zeigen, betrachten wir die Verteilungsfunktion von  $Z_1$

$$F_{Z_1}(x) = \mathbb{P}(Z_1 \leq x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x < \frac{1}{q} \\ 1 - q^{\lfloor \log_{\frac{1}{q}} x \rfloor} & \text{falls } x \geq \frac{1}{q} \end{cases}$$

sowie die Quantiltransformation

$$Q_{Z_1}(u) = (F_{Z_1})^{-1}(u) = \inf \{x \in \mathbb{R} : F_{Z_1}(x) \geq u\} = q^{-\lceil \log_{\frac{1}{q}} \frac{1}{1-u} \rceil} \text{ für } u \in (0, 1).$$

Wir wählen nun von  $n$  i.i.d. geordneten Zufallsvariablen  $(U_{n,i})_{i=1,\dots,n}$  mit  $U_{n,1} \sim \mathcal{U}(0, 1)$  die größte  $U_{n,n}$  und betrachten die Zufallsvariable  $Q_{Z_1}(U_{n,n})$ . Es gilt (vgl. [CsSi3])

$$0 < \frac{Q_{Z_1}(U_{n,n})}{n \log_{\frac{1}{q}} n} < d_n, \text{ wobei } \liminf_{n \rightarrow \infty} d_n = 0,$$

und daher

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{Z_{n,n}}{n \log_{\frac{1}{q}} n} = 0.$$

□

**Bemerkung 5.2.8.** In [CsSi2] findet man für  $\alpha = 1$  und  $p = q = \frac{1}{2}$  zudem einen Vergleich der Konvergenzgeschwindigkeiten

$$p_n(\epsilon) = \mathbb{P}(S_n^Z > (1 + \epsilon)n \log_2 n) \quad \text{und} \quad p_n(m, \epsilon) = \mathbb{P}(S_n^Z(m) > (1 + \epsilon)n \log_2 n).$$

Csörgő und Simons stellen rekursive Methoden vor, mit denen die Verteilung von  $S_n^Z(m)$  und somit die Wahrscheinlichkeit  $p_n(m, \epsilon)$  für konkrete Werte von  $\epsilon$  und  $n$  berechnet werden kann. Schließlich wird eine hohe Konvergenzgeschwindigkeit für große Werte von  $\epsilon$  ( $\epsilon > 1$ ) bestätigt und nachgewiesen, dass  $p_n(m, \epsilon)$  für  $m = 1$  und für wachsendes  $n$  schneller gegen 0 konvergiert als  $p_n(\epsilon)$ .

### Résumé

Wir haben gezeigt, dass die fast sichere Konvergenz unter der Voraussetzung, dass der größte Gewinn aus  $n$  (beliebig aber fest gewählt) Spielen einbehalten wird, gesichert ist. Jedoch macht diese Vereinbarung die Sequenz der  $n$  Spiele für Paul erheblich unattraktiver und es bleibt fraglich, ob dieser in ein solches Glücksspiel einwilligen würde.

### 5.2.3.3 Gewichtung der Gewinne

Für die i.i.d. verallgemeinerten Sankt–Petersburg–Zufallsvariablen  $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  kann man statt der kumulierten Gewinne  $S_n^Z = \sum_{k=1}^n Z_k$  die gewichteten kumulierten Gewinne

$$S_n^{Z,\beta} = \sum_{k=1}^n k^\beta Z_k \quad \text{mit } \beta \in \mathbb{R}$$

betrachten. Offenbar setzt die fast sichere Konvergenz von  $S_n^{Z,\beta}$  den Fall  $\beta < 0$  voraus, da  $\forall \beta \geq 0$  zunächst gilt

$$k^\beta \geq 1 \quad \forall k \in \mathbb{N}_0$$

und daher

$$S_n^{Z,\beta} \geq S_n^Z \quad \forall n \in \mathbb{N}_0.$$

Zusammen mit Folgerung 5.2.6 ergibt sich

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n^{Z,\beta}}{n \log_2 n} \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n^Z}{n \log_2 n} = \infty.$$

Mit kleiner werdendem  $\beta < 0$  bekommen aber die Gewinne der letzten Spiele  $Z_{n-2}, Z_{n-1}, Z_n$  viel weniger Gewichtung als die der ersten Spiele  $Z_1, Z_2, Z_3$ . Das Ziel ist es daher, ein möglichst großes  $\beta < 0$  zu finden, so dass  $S_n^{Z,\beta}$  fast sicher konvergiert.

In [Adl1] untersucht André Adler Sequenzen von unbeschränkten, asymmetrischen, i.i.d. Zufallsvariablen  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  und das fast sichere Grenzverhalten von gewichteten Summen

$$S_n^{X,\beta} = \sum_{k=1}^n k^\beta X_k \quad \text{mit } \beta \in \mathbb{R}.$$

Es kann gezeigt werden, dass unter gewissen Voraussetzungen für  $\beta < -1$  stets die fast sichere Konvergenz von  $S_n^{X,\beta}$  folgt.

**Satz 5.2.9.** (Theorem 1 in [Adl1]) Seien  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  i.i.d. mit  $\mathbb{E}(|X_1|^l) < \infty$  für alle  $l < 1$ . Ist dann  $\beta < -1$ , so konvergiert  $S_n^{X,\beta} = \sum_{k=1}^n k^\beta X_k$  fast sicher.

Die Voraussetzung  $\mathbb{E}(|X_1|^l) < \infty$  für alle  $l < 1$  und das Borel–Cantelli–Lemma sichern, dass  $\sum_{k=1}^\infty k^\beta X_k$  von oben durch eine endliche Konstante abgeschätzt werden kann (vgl. Beweis zu Theorem 1 in [Adl1]).

Die verallgemeinerte Sankt–Petersburg–Zufallsvariable  $Z_1$  erfüllt die Voraussetzung

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(|Z_1|^l) &= \sum_{i=1}^{\infty} (q^{-i})^l q^{i-1} p = \sum_{i=1}^{\infty} q^{-il+i-1} p = \frac{p}{q} \sum_{i=1}^{\infty} q^{(1-l)i} \\ &= \frac{p}{q} q^{1-l} \frac{1}{1 - q^{1-l}} = \frac{p}{q^l - q} < \infty \end{aligned}$$

für alle  $l < 1$ . Daher konvergiert  $S_n^{Z,\beta}$  fast sicher und es gilt für jede monoton wachsende Folge  $\gamma_n$

$$\frac{S_n^{Z,\beta}}{\gamma_n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{f.s.} 0 \quad \text{für } \beta < -1.$$

Die Frage, ob die fast sichere Konvergenz schon für ein  $\beta \in [-1, 0)$  gilt, kann bejaht werden. So kann man allgemein zeigen, dass für i.i.d.  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  mit  $\mathbb{E}(|X_1|) = \infty$  unter gewissen Voraussetzungen geeignete deterministische Sequenzen  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  und  $(c_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  existieren, die der Gleichung

$$\mathbb{P} \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n a_k X_k}{c_n} = 1 \right) = 1$$

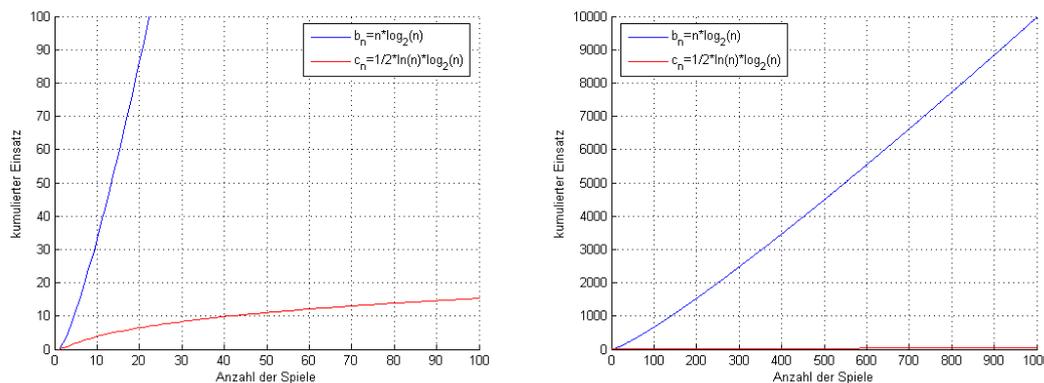
genügen (vgl. Theorem 1 in [Adl2]). Für die verallgemeinerten Sankt–Petersburg–Spiele  $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  beweist Adler (vgl. Beispiel 3 in [Adl2]), dass für die Gewichte  $a_k = \frac{1}{k}$  und die Normierungsfaktoren  $c_n = p \left( 2q \ln \frac{1}{q} \right)^{-1} (\ln n)^2$  gilt<sup>6</sup>

$$\frac{\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} Z_k}{p \left( 2q \ln \frac{1}{q} \right)^{-1} (\ln n)^2} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{f.s.} 1.$$

Für große  $n$  erhalten wir im Fall  $\beta = -1$  demnach

$$S_n^{Z, \beta} \sim p \left( 2q \ln \frac{1}{q} \right)^{-1} (\ln n)^2 = \frac{1}{2} \frac{p}{q} \ln n \log_{\frac{1}{q}} n.$$

Abb. 5.5 verdeutlicht, dass die kumulierten Einsätze  $c_n$  signifikant langsamer in  $n$  wachsen als Fellers  $b_n$  und somit die niedrigeren, gewichteten Gesamtgewinne ausgleichen.



**Abb. 5.5:** Vergleich der Einsätze  $b_n$  und  $c_n$

Während also die gewichtete Summe  $S_n^{Z, \beta}$  für  $\beta \leq -1$  fast sicher konvergiert, findet das starke GGZ für  $\beta \in (-1, 0)$  jedoch keine Anwendung.

<sup>6</sup>Einige Jahre später verallgemeinert Adler dieses Ergebnis zu den Gewichten  $a_k = \frac{(\ln k)^b - 2}{k}$  und den Normierungsfaktoren  $c_n = p \left( bq \ln \frac{1}{q} \right)^{-1} (\ln n)^b$ , wobei  $b > 0$  beliebig ist (Bsp. 7 in [Adl3]). Der Autor spricht in diesem Zusammenhang von dem sogenannten *exakten starken GGZ*, wobei diese Bezeichnung nach [Adl3] von B.A. Rogozin kommt und sich auf die Gültigkeit des starken GGZ für gewichtete Summen bezieht.

**Satz 5.2.10.** (Beispiel 4 in [Adl1]) Für die verallgemeinerten Sankt-Petersburg-Zufallsvariablen  $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  und die gewichteten kumulierten Gewinne  $S_n^{Z,\beta} = \sum_{k=1}^n k^\beta Z_k$  gilt für  $\beta > -1$

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n^{Z,\beta}}{n^{\beta+1} \log_{\frac{1}{q}} n} = \frac{p}{q(\beta+1)} \text{ f.s.} \quad \text{und} \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n^{Z,\beta}}{n^{\beta+1} \log_{\frac{1}{q}} n} = \infty \text{ f.s.}$$

### Résumé

Eine Vereinbarung, die Gewinne mit voranschreitendem Spielverlauf weniger zu gewichten, führt zur Gültigkeit des starken GGZ. Die Gewichte der Gewinne müssen jedoch mindestens von Ordnung  $\frac{1}{k}$  sein, um einen Ausgleich zum unendlichen Erwartungswert zu schaffen (und die Voraussetzungen des starken GGZ zu erfüllen). Gleichzeitig wachsen aber auch die Einsätze (vgl.  $c_n = p \left(2q \ln \frac{1}{q}\right)^{-1} (\ln n)^2$ ) nur langsam in  $n$ .

#### 5.2.3.4 Simultane Sankt-Petersburg-Spiele

In [Adl4] wird eine weitere interessante Modifikation des Sankt-Petersburg-Spiels untersucht. Statt einem werden jeweils zwei simultane Spiele durchgeführt und das Minimum bzw. das Maximum der Gewinne betrachtet. Das heißt, statt der verallgemeinerten i.i.d. Sankt-Petersburg-Zufallsvariablen

$$(Z_n^j)_{j=1,2} \text{ mit } \mathbb{P}(Z_1^1 = q^{-k}) = q^{k-1}p, \quad \text{wobei } p, q = 1 - p \in (0, 1) \text{ und } k = 1, 2, \dots$$

betrachten wir nun die i.i.d. Zufallsvariablen  $(Z_{2,n}^-)_{n \in \mathbb{N}_0}$  und  $(Z_{2,n}^+)_{n \in \mathbb{N}_0}$  mit

$$\begin{aligned} Z_{2,1}^- &= Z_1^1 \wedge Z_1^2 \text{ (Minimum)} \\ Z_{2,1}^+ &= Z_1^1 \vee Z_1^2 \text{ (Maximum)}. \end{aligned}$$

Mit kurzen elementaren Berechnungen kann gezeigt werden, dass  $\forall k \in \mathbb{N}_0$  gilt (vgl. [Adl4] S. 383)

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Z_{2,1}^- = q^{-k}) &= pq^{2(k-1)}(p+2q) \\ \mathbb{P}(Z_{2,1}^+ = q^{-k}) &= pq^{k-1}(2 - (2-p)q^{k-1}). \end{aligned}$$

Während für das Maximum  $Z_{2,1}^+$  wegen  $Z_1^1 \leq Z_{2,1}^+$  ebenfalls  $\mathbb{E}(Z_{2,1}^+) = \infty$  gilt, ergibt sich für das Minimum  $Z_{2,1}^-$  ein endlicher Erwartungswert:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Z_{2,1}^-) &= \sum_{k=1}^{\infty} q^{-k} (pq^{2(k-1)}(p+2q)) = \sum_{k=1}^{\infty} pq^{k-2}(p+2q) \\ &= \frac{p}{q}(p+2q) \sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{p}{q} \underbrace{(p+2q)}_{1+q} \frac{1}{1-q} = \frac{1+q}{1}. \end{aligned}$$

Die i.i.d. Zufallsvariablen  $(Z_{2,n}^-)_{n \in \mathbb{N}_0}$  erfüllen demnach die Voraussetzungen des starken GGZ (Satz 5.2.1) und man erhält (vgl. auch Theorem 1 in [Adl4])

$$\frac{\sum_{i=1}^n Z_{2,i}^-}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{f.s.} \frac{1+q}{q}.$$

Mit der Vereinbarung, je zwei simultane Sankt–Petersburg–Spiele durchzuführen und dann das Minimum der Gewinne auszuzahlen, kann das gesamte Spiel für beide Parteien im Sinne des starken GGZ fair gemacht werden. Der Einsatz für ein Spiel beträgt dann gerade  $\mathbb{E}(Z_{2,1}^-) = \frac{1+q}{q}$ , im klassischen Fall also 3.

Wir wollen die Idee der simultanen Sankt–Petersburg–Spiele nun verallgemeinern und betrachten für  $m \geq 2$  simultane Spiele die Zufallsvariable

$$Z_{m,1}^- = Z_1^1 \wedge Z_1^2 \wedge \dots \wedge Z_1^m$$

mit der Verteilung

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Z_{m,1}^- = q^{-k}) &= \sum_{j=1}^m \binom{m}{j} \left( \mathbb{P}(Z_1^1 = q^{-k}) \right)^j \left( \mathbb{P}(Z_1^1 > q^{-k}) \right)^{m-j} \\ &= \sum_{j=1}^m \binom{m}{j} (q^{k-1}p)^j \left( 1 - \mathbb{P}(Z_1^1 \leq q^{-k}) \right)^{m-j} \\ &= \sum_{j=1}^m \binom{m}{j} (q^{k-1}p)^j \left( 1 - \sum_{i=1}^k q^{i-1}p \right)^{m-j} \\ &= \sum_{j=1}^m \binom{m}{j} (q^{k-1}p)^j \left( 1 - p \frac{1-q^k}{1-q} \right)^{m-j} \\ &= \sum_{j=1}^m \binom{m}{j} (q^{k-1}p)^j (q^k)^{m-j} \\ &= \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} (q^{k-1}p)^j (q^k)^{m-j} - \binom{m}{0} (q^{k-1}p)^0 (q^k)^m \\ &= (q^{k-1}p + q^k)^m - q^{km} \\ &= q^{km} (q^{-1}p + 1)^m - q^{km} \\ &= q^{km} (q^{-m} - 1). \end{aligned}$$

Für den Erwartungswert folgt

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}(Z_{m,1}^-) &= \sum_{k=1}^{\infty} q^{-k} q^{km} (q^{-m} - 1) \\
 &= \sum_{k=1}^{\infty} q^{k(m-1)} (q^{-m} - 1) \\
 &= (q^{-m} - 1) \sum_{k=0}^{\infty} (q^{m-1})^{k+1} \\
 &= (q^{-m} - 1) q^{m-1} \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\left( q^{m-1} \right)}_{<1}^k \\
 &= (q^{-1} - q^{m-1}) \frac{1}{1 - q^{m-1}} \\
 &= (1 - q^m) \frac{1}{q} \frac{1}{1 - q^{m-1}} \\
 &= \frac{1 - q^m}{q - q^m} < \infty \quad \text{für alle } m \geq 2
 \end{aligned}$$

und daher genügen die i.i.d. Zufallsvariablen  $(Z_{m,n}^-)_{n \in \mathbb{N}_0}$  den Voraussetzungen des starken GGZ (Satz 5.2.1), d.h.

$$\frac{\sum_{i=1}^n Z_{m,i}^-}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{f.s.} \frac{1 - q^m}{q - q^m} \quad \text{für alle } m \geq 2.$$

Für  $p = q = \frac{1}{2}$  haben wir die Wahrscheinlichkeiten und die Erwartungswerte, d.h.

$$\mathbb{P}\left(Z_{m,1}^- = 2^k\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^k m(2^m - 1) \quad \text{und} \quad \mathbb{E}(Z_{m,1}^-) = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^m}{\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^m}$$

für einige Werte von  $m$  berechnet (vgl. Tab. 5.3 und 5.4). Offenbar konvergiert  $\mathbb{E}(Z_{m,1}^-)$  für  $m \rightarrow \infty$  gegen 2.

$m$	1	2	3	4	5	10
$\mathbb{E}(Z_{m,1}^-)$	$\infty$	3	$\frac{7}{3}$	$\frac{15}{7}$	$\frac{31}{15}$	$\frac{1023}{511}$

**Tab. 5.3:** Erwartungswert von  $Z_{m,1}^-$  in Abhängigkeit der Anzahl  $m$  simultaner Spiele

Kopf im im $k$ -ten Wurf	Anzahl simultaner Spiele				
	1	2	3	4	5
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2^2}$	$\frac{7}{2^3}$	$\frac{15}{2^4}$	$\frac{31}{2^5}$
2	$\frac{1}{2^2}$	$\frac{3}{2^4}$	$\frac{7}{2^6}$	$\frac{15}{2^8}$	$\frac{15}{2^{10}}$
3	$\frac{1}{2^3}$	$\frac{3}{2^6}$	$\frac{7}{2^9}$	$\frac{15}{2^{12}}$	$\frac{15}{2^{15}}$
4	$\frac{1}{2^4}$	$\frac{3}{2^8}$	$\frac{7}{2^{12}}$	$\frac{15}{2^{16}}$	$\frac{15}{2^{20}}$
5	$\frac{1}{2^5}$	$\frac{3}{2^{10}}$	$\frac{7}{2^{15}}$	$\frac{15}{2^{20}}$	$\frac{15}{2^{25}}$

**Tab. 5.4:**  $\mathbb{P}(Z_{m,1}^- = 2^k)$  für  $k, m = 1, \dots, 5$

### Résumé

Wir haben gezeigt, dass die Vereinbarung, das Minimum aus  $m \geq 2$  Spielen als Gewinn auszuzahlen, zur fast sicheren Konvergenz führt. Allerdings wollen wir an dieser Stelle auch betonen, dass das modifizierte Spiel für wachsendes  $m \geq 2$  offensichtlich immer unattraktiver für Paul wird, da die Wahrscheinlichkeiten

$$\mathbb{P}(Z_{m,1}^- = q^{-k}) = q^{km} (q^{-m} - 1)$$

für alle  $k \in \mathbb{N}_0$  monoton in  $m$  fallen.

Weiterhin gilt:

**Bemerkung 5.2.11.** Für die Folgen  $(Z_{m,n}^+)_{n \in \mathbb{N}_0}$ ,  $m \geq 2$ , gilt das starke GGZ a priori nicht. Es können aber geeignete deterministische Sequenzen gewählt werden, so dass die gewichtete Summe fast sicher konvergiert (vgl. Theorem 3 in [Adl4]).

### 5.2.4 Vergleich der modifizierten Sankt–Petersburg–Spiele

Wir haben gesehen, dass die Gültigkeit des starken GGZ durch geeignete Modifikationen durchaus gewährleistet wird. Die Frage, ob Paul bereit ist, die genannten Einsätze für diese veränderten Sankt–Petersburg–Spiele zu zahlen, bleibt allerdings offen.

Wir wollen nun abschließend die Ergebnisse unserer Simulationen<sup>7</sup> des klassischen Sankt–Petersburg–Spiels und der vorgestellten Modifikationen aus den Abschnitten 5.2.3.2, 5.2.3.3 und 5.2.3.4 präsentieren, wobei wir  $p = q = \frac{1}{2}$  gewählt haben. Wir haben je 5 Durchläufe von  $n = 100, 1.000, 10.000, 100.000$  Spielen simuliert und die Ergebnisse in Tab. 5.5 notiert. Neben den kumulierten Gewinnen für  $n$  Spiele haben wir auch die in den einzelnen Abschnitten ermittelten (kumulierten) Einsätze, sowie

$$\hat{k} = \max\{k \in \mathbb{N}_0 : \text{Kopf fällt erstmalig im } k\text{-ten Wurf}\}$$

<sup>7</sup>Den Quelltext der Simulationen findet man im Anhang B.2

festgehalten.

GGZ	schwach	stark			
Spiel	klassisch	Einbehaltung max. Gewinn	Gewichte $k^{-1}$	Min. von 2 Spielen	
kum. Einsatz	$n \log_2 n$	$n \log_2 n$	$\frac{1}{2} \log_2 n \ln n$	$3n$	$\hat{k}$
$n = 100$					
Einsatz	664,39	664,39	15,30	300,00	
kum. Gewinn 1	1.704,00	1.192,00	112,40	340,00	9
kum. Gewinn 2	1.644,00	1.132,00	70,84	308,00	9
kum. Gewinn 3	560,00	496,00	24,06	300,00	6
kum. Gewinn 4	752,00	624,00	53,90	440,00	7
kum. Gewinn 5	620,00	556,00	23,95	258,00	6
$n = 1.000$					
Einsatz	9.965,78	9.965,78	34,42	3.000,00	
kum. Gewinn 1	11.492,00	9.440,00	87,08	2.880,00	11
kum. Gewinn 2	9.174,00	8.662,00	58,40	3.004,00	9
kum. Gewinn 3	76.766,00	11.230,00	248,30	2.904,00	16
kum. Gewinn 4	14.644,00	12.596,00	145,85	2.952,00	11
kum. Gewinn 5	10.554,00	9.530,00	108,53	2.794,00	10
$n = 10.000$					
Einsatz	132.877,12	132.877,12	61,19	30.000,00	
kum. Gewinn 1	156.680,00	140.296,00	137,71	29.744,00	14
kum. Gewinn 2	395.052,00	132.908,00	114,92	29.904,00	18
kum. Gewinn 3	133.942,00	125.750,00	104,01	30.236,00	13
kum. Gewinn 4	153.526,00	120.758,00	110,94	29.810,00	15
kum. Gewinn 5	154.868,00	138.484,00	131,41	30.246,00	14
$n = 100.000$					
Einsatz	1.660.964,05	1.660.964,05	95,61	300.000,00	
kum. Gewinn 1	1.850.414,00	1.719.342,00	155,40	300.048,00	17
kum. Gewinn 2	1.792.038,00	1.660.966,00	144,08	301.586,00	17
kum. Gewinn 3	6.114.332,00	1.920.028,00	383,35	299.102,00	22
kum. Gewinn 4	10.350.136,00	1.961.528,00	246,62	298.370,00	23
kum. Gewinn 5	2.178.348,00	1.916.204,00	150,15	297.898,00	18

Tab. 5.5: Simulationsergebnisse

Es fällt auf, dass der gewichtete Gewinn (Spalte 4) für alle Durchläufe größer ist als der jeweilige Einsatz. Dies deutet auf eine schlechte Konvergenzrate hin und wir raten Peter daher, sich nur für eine sehr große Anzahl von Spielen auf diese Modifikation einzulassen. Während Paul auch bei der klassischen Version (Spalte 2) für *kleine* (kleiner als unendlich)  $n$  einen Vorteil zu haben scheint (kumulierter Gewinn meist größer als kumulierter

Einsatz), kann die Einbehaltung des größten Gewinns (Spalte 3) einen fairen Ausgleich schaffen. Trotzdem liegen die Gewinne und Einsätze z.T. weit auseinander.

Bei der letzten Modifikation, das Minimum aus 2 Spielen (Spalte 5), liegen die Gewinne und Einsätze hingegen für fast alle Simulationen nah beieinander, weshalb wir diese Variante als die fairste favorisieren.

Wir weisen abschließend noch darauf hin, dass bei allen Spielen nur Pauls Risiko durch den Verlust des endlichen (kumulierten) Einsatzes begrenzt ist. Bei Peter hingegen bleibt das Risiko, (unendlich) hohe Summen zu verlieren, bestehen.

Der folgende Abschnitt geht auf die Frage nach der Absicherung gegen das Risiko aus der Sicht von Peter näher ein.

### 5.3 Konvergenz in Verteilung für das Sankt–Petersburg–Spiel

Wir wollen nun an Abschnitt 5.1.2 anknüpfen und das Sankt–Petersburg–Spiel auf die Frage hin untersuchen, inwieweit der kumulierte Gewinn  $S_n$  für ein festes  $n$  vom kumulierten Einsatz  $b_n = n \log_2 n$  abweicht. Bevor wir aber die typischen Fluktuationen um den Mittelwert  $b_n$  näher betrachten, stellen wir die Hauptaussage des ZGWS kurz vor.

#### 5.3.1 Grundlagen

Existieren für i.i.d. Zufallsvariablen  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  der Erwartungswert  $\mu$  und die Varianz  $\sigma^2$ , so wird das GGZ durch den ZGWS ergänzt. Als eine Verfeinerung ermöglicht er eine Schätzung für die Wahrscheinlichkeit

$$\mathbb{P} \left( \left| \frac{S_n}{n} - \mu \right| > \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right) = \mathbb{P} \left( \left| \frac{X_1 + \dots + X_n}{n} - \mu \right| > \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right).$$

Allgemein besagt der ZGWS, dass der langfristige Nettogewinn  $S_n - n\mu$  in einem fairen Spiel mit großer Wahrscheinlichkeit von der Größenordnung  $\sqrt{n}$  ist. Die Chancen, dass  $S_n - n\mu$  positiv oder negativ ist, sind für große  $n$  annähernd gleich groß, was der Vorstellung eines fairen Spiels entspricht. Ähnlich wie beim GGZ ist zu beachten, dass der ZGWS das asymptotische Verhalten beschreibt und somit keine Aussagen für kleine  $n$  macht (vgl. [Fel3] S. 250).

**Satz 5.3.1.** (ZGWS für i.i.d. Zufallsvariablen, Theorem 2.4.1 in [Durr]) Seien  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  i.i.d. mit  $\mathbb{E}(X_1) = \mu \in \mathbb{R}$  und  $\text{Var}(X_1) = \sigma^2 \in (0, \infty)$  sowie  $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ . Dann konvergieren die standardisierten Summen in Verteilung gegen eine standardnormalverteilte Zufallsvariable, d.h.  $\forall x \in \mathbb{R}$  gilt

$$\mathbb{P} \left( \frac{S_n - \mathbb{E}(S_n)}{\sqrt{\text{Var}(S_n)}} \leq x \right) = \mathbb{P} \left( \frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leq x \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp \left( -\frac{y^2}{2} \right) dy.$$

Wir wollen an dieser Stelle darauf hinweisen, dass es auch eine verallgemeinerte Version des ZGWS für unabhängige, nicht identisch verteilte Zufallsvariablen gibt (vgl. Lindeberg–Feller–Theorem (Theorem 8.4.3) in [Fel4]).

Offensichtlich setzt der ZGWS die  $L^1$ -Integrierbarkeit von Zufallsvariablen voraus und ist daher so nicht auf das Sankt–Petersburg–Spiel anwendbar. Wir werden im Folgenden aber zeigen, dass ein dem ZGWS ähnliches Theorem existiert, welches die schwache Konvergenz der standardisierten Summe gegen eine Grenzverteilung sichert.

Doch zunächst geben wir noch einmal eine kurze Definition der schwachen Konvergenz, die von der Konvergenz in Wahrscheinlichkeit (und daher auch von der  $L^p$ - und fast sicheren Konvergenz) impliziert wird (vgl. [MeiSch] S. 175).

**Definition 5.3.2.** (schwache Konvergenz, Verteilungskonvergenz, Def. 7.1 in [MeiSch]) Sei  $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf  $\mathbb{R}$ . Dann konvergiert  $\mu_n$  schwach gegen ein Wahrscheinlichkeitsmaß  $\mu$  auf  $\mathbb{R}$ , falls für alle beschränkten und stetigen Funktionen  $f$  auf  $\mathbb{R}$  gilt

$$\int f d\mu_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int f d\mu, \quad \text{in Zeichen: } \mu_n \Rightarrow \mu.$$

Analog konvergiert eine Folge von reellen Zufallsvariablen  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  auf  $(\Omega_n, \mathcal{F}_n, \mathbb{P}_n)$  in Verteilung gegen eine reelle Zufallsvariable  $X$  auf  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ , falls für alle beschränkten und stetigen Funktionen  $f$  auf  $\mathbb{R}$  gilt

$$\mathbb{E}(f(X_n)) = \int f d\mathbb{P}_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int f d\mathbb{P} = \mathbb{E}(f(X)), \quad \text{in Zeichen: } X_n \xrightarrow{d} X.$$

### Notation

Für die Untersuchung des klassischen Sankt–Petersburg–Spiels betrachten wir für den Rest des Kapitels die i.i.d.  $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  mit

$$\mathbb{P}_{Y_1} = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^i \cdot \delta_{2^i}$$

und der Verteilungsfunktion

$$F_{Y_1}(x) = \mathbb{P}(Y_1 \leq x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x < 2 \\ 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{\lfloor \log_2 x \rfloor} & \text{falls } x \geq 2. \end{cases}$$

$S_n = \sum_{i=1}^n Y_i$  beschreibt wieder den kumulierten Gewinn und  $b_n = n \log_2 n$  den kumulierten Einsatz für  $n$  Spiele, wobei die Anzahl  $n$  vor Spielbeginn festgelegt wird.

### 5.3.2 Ein Grenzwertsatz für das Sankt–Petersburg–Spiel

Fellers Ergebnis, welches nach Martin–Löfs Meinung die bis dato einzig ernst zu nehmende Lösung des unmodifizierten Spiels ist (vgl. [Mar1] S. 635), wird durch selbigen in [Mar1] ergänzt. Wir wollen nun illustrieren, wie dieser im Rahmen seiner Analyse ein zum ZGWS analoges Grenzwert–Theorem für die kumulierten Gewinne  $S_N$ , wobei  $N = 2^n$ , erhält und somit Fellers Resultat präzisiert. Dazu zeigt man zunächst, dass  $\frac{S_N - N \log_2 N}{N}$  für  $N = 2^n$  und  $n \rightarrow \infty$  eine unbegrenzt teilbare Grenzverteilung mit Verteilungsfunktion  $G(x)$  hat, welche für die Werte  $N = 2^n$  zudem explizit geschrieben werden kann. Im nächsten Schritt überprüfen wir das asymptotische Verhalten und zeigen für den Tail<sup>8</sup>

$$1 - G(2^m) \sim 1,8 \cdot \frac{1}{2^m} \quad \text{für } m \rightarrow \infty.$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Einsatz von  $2^m + n$  pro Spiel den auszuzahlenden kumulierten Gewinn  $S_N$  mit  $N = 2^n$  nicht decken kann, beträgt also gerade  $1,8 \cdot \frac{1}{2^m}$ . Wir werden sehen, dass diese numerische Approximation der Grenzverteilung ziemlich genau ist und sie es daher ermöglicht, Einsätze zu bestimmen, die aus Peters Sicht sicher sind. Sicher heißt in diesem Zusammenhang, dass die Wahrscheinlichkeit, die Auszahlung  $S_N$  durch die Einsätze decken zu können und somit nicht bankrott zu gehen, nahe 1 ist. In Abhängigkeit des gewünschten Sicherheitsgrades können (im Sinne des schwachen GGZ) faire Einsätze bestimmt werden.

Die in diesem Abschnitt verwendeten Sätze über Lévy–Prozesse, unbegrenzt teilbare sowie stabile Verteilungen können im Anhang A nachgeschlagen werden.

Wir beginnen mit dem Nachweis der Existenz und der unbegrenzten Teilbarkeit der Grenzverteilung von  $\frac{S_N - N \log_2 N}{N}$  für  $N = 2^n$ .

**Satz 5.3.3.** (Theorem 1 (Teil 1) in [Mar1]) Sei  $N = 2^n$  und  $n \rightarrow \infty$ . Dann hat

$$\frac{S_N - N \log_2 N}{N} = \frac{S_N}{N} - n$$

die Grenzverteilungsfunktion  $G(x)$  mit charakteristischer Funktion

$$\mathbb{E}(\exp(iuS)) = \exp(g(u)), \quad (5.10)$$

wobei

$$g(u) = \sum_{k=-\infty}^0 \left( \exp(iu2^k) - 1 - iu2^k \right) \frac{1}{2^k} + \sum_{k=1}^{\infty} \left( \exp(iu2^k) - 1 \right) \frac{1}{2^k}. \quad (5.11)$$

Die Verteilung des Grenzprozesses  $S$  ist zudem unbegrenzt teilbar.

<sup>8</sup>Für eine Verteilungsfunktion  $F$  auf  $[0, \infty)$  heißt  $\bar{F}(x) := 1 - F(x)$ , wobei  $x \geq 0$ , der *Schwanz* oder der *Tail* von  $F$ .

*Beweis.* Man betrachte die charakteristische Funktion einer Sankt-Petersburg-Zufallsvariablen  $Y_1$

$$\phi_{Y_1}(u) = \mathbb{E}(\exp(iuY_1)) = \sum_{k=1}^{\infty} \exp(iu2^k) \frac{1}{2^k}.$$

Es gilt

$$\begin{aligned} \phi_{Y_1}\left(\frac{u}{N}\right) - 1 &= \sum_{k=1}^{\infty} \exp\left(i\frac{u}{N}2^k\right) \frac{1}{2^k} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\exp(iu2^{k-n}) - 1\right) \frac{1}{2^k} \\ &= \frac{1}{2^n} \sum_{k=-n+1}^{\infty} \left(\exp(iu2^k) - 1\right) \frac{1}{2^k} \\ &= \frac{1}{N} \left( \sum_{k=-n+1}^0 \left(\exp(iu2^k) - 1\right) \frac{1}{2^k} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\exp(iu2^k) - 1\right) \frac{1}{2^k} \right) \\ &= \frac{1}{N} \left( \sum_{k=-n+1}^0 \left(\exp(iu2^k) - 1 - iu2^k\right) \frac{1}{2^k} + iun + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\exp(iu2^k) - 1\right) \frac{1}{2^k} \right) \\ &\sim \frac{1}{N} (g(u) + iun + o(1)) \quad \text{für } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Für  $\frac{S_N}{N} - n$  ergibt sich

$$\begin{aligned} \phi_{\frac{S_N}{N} - n}(u) &= \phi_{S_N}\left(\frac{u}{N}\right) \exp(-iun) \\ &= \left(\phi_{Y_1}\left(\frac{u}{N}\right)\right)^N \exp(-iun) \\ &\sim \left(1 + \frac{g(u) + iun + o(1)}{N}\right)^N \exp(-iun) \\ &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \exp(g(u) + iun) \exp(-iun) = \exp(g(u)). \end{aligned}$$

Somit gilt  $\forall u \in \mathbb{R}$

$$\phi_{\frac{S_N}{N} - n}(u) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \exp(g(u)) = \phi_S(u),$$

wobei  $\exp(g(u))$  an der Stelle  $u = 0$  stetig ist. Mit Hilfe des Lévy'schen Stetigkeitssatzes (E3 in A.1) können wir aus der Konvergenz der charakteristischen Funktionen die schwache Konvergenz der Verteilungen schlussfolgern, d.h.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left(\frac{S_N}{N} - n \leq x\right) = G(x) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Der Grenzprozess  $S$  hat nach dem Lévy-Khinchin-Theorem (Satz A.3.2) eine unbegrenzt teilbare Verteilung mit charakteristischem Exponenten  $g(u)$ , der eindeutig durch das

charakteristische Tripel  $(0, 0, \nu)$  bestimmt ist, wobei das Lévy-Maß  $\nu$  die Punkte  $2^k$ ,  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  mit jeweils  $2^{-k}$  gewichtet<sup>9</sup>.  $\square$

Wir können das Ergebnis aus Satz 5.3.3 etwas verallgemeinern.

**Satz 5.3.4.** (Theorem 1 (Teil 2) in [Mar1]) Gilt  $\frac{M}{N} \rightarrow t$ , so hat der Prozess  $\frac{S_M - M \log_2 M}{N}$  die Grenzverteilungsfunktion  $G_t(x)$  mit charakteristischer Funktion

$$\mathbb{E}(\exp(iuS_t)) = \exp(tg(u) - iut \log_2 t), \quad (5.12)$$

wobei  $g(u)$  wie in (5.11) definiert ist<sup>10</sup>.

*Beweis.* Der Beweis läuft ähnlich wie im Satz 5.3.3. Wir weisen die Konvergenz der Verteilungen durch die Konvergenz der charakteristischen Funktionen und der Zuhilfenahme des Lévy'schen Stetigkeitssatzes nach.

$$\begin{aligned} \phi_{\frac{S_M - M \log_2 M}{N}}(u) &= \phi_{S_M}\left(\frac{u}{N}\right) \exp\left(-iu \frac{M \log_2 M}{N}\right) \\ &= \left(\phi_{Y_1}\left(\frac{u}{N}\right)\right)^M \exp\left(-iu \frac{M \log_2 M}{N}\right) \\ &= \left(\phi_{Y_1}\left(\frac{u}{N}\right)\right)^{N \frac{M}{N}} \exp\left(-iu \frac{M}{N} \left(\log_2 N + \log_2 \frac{M}{N}\right)\right) \\ &= \left(\left(\phi_{Y_1}\left(\frac{u}{N}\right)\right)^N \exp(-iun)\right)^{\frac{M}{N}} \exp\left(-iu \frac{M}{N} \log_2 \frac{M}{N}\right) \\ &\rightarrow (\exp(g(u)))^t \exp(-iut \log_2 t) \text{ für } n \rightarrow \infty \text{ und } \frac{M}{N} \rightarrow t \\ &= \exp(tg(u) - iut \log_2 t) \end{aligned}$$

Der Lévy'sche Stetigkeitssatz (E3 in A.1) beweist schließlich die schwache Konvergenz

$$\frac{S_M - M \log_2 M}{N} \xrightarrow{d} S_t.$$

$\square$

$S_t$  ist nach Satz A.3.2 und Abschnitt A.4 ein Lévy-Prozess, wobei  $t \log_2 t$  zur Zentrierung subtrahiert wird und der Gauß-Koeffizient wieder gleich null ist. Als Lévy-Prozess hat  $S_t$  unabhängige, stationäre Zuwächse und für alle  $t > 0$  gilt die Zerlegung

$$S_t = S_{\frac{t}{n}} + \left(S_{\frac{2t}{n}} - S_{\frac{t}{n}}\right) + \dots + \left(S_{\frac{nt}{n}} - S_{\frac{(n-1)t}{n}}\right) \quad \forall n \in \mathbb{N}_0.$$

$S_t$  ist daher nach Def. A.3.1 unbegrenzt teilbar.

Im nächsten Schritt beweisen wir, dass  $g(u)$  dem Skalierungsgesetz für Potenzen von 2 genügt.

<sup>9</sup>Martin-Löf nennt die Punkte  $2^k$ ,  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  Atome. Atome sind Punkte, die eine positive Masse tragen.

<sup>10</sup>Für  $M = N$ , also  $t = 1$  erhalten wir gerade Satz 5.3.3

**Satz 5.3.5.** (Theorem 2 in [Mar1])

(i) Die Funktion  $g(u)$  wie in (5.11) definiert, erfüllt für alle  $m \in \mathbb{Z}$  die Gleichung

$$g(2^m u) = 2^m (g(u) - ium). \quad (5.13)$$

(ii) Für den Grenzprozess  $S_t$  gilt

$$S_{2^m t} \stackrel{d}{=} 2^m S_t.$$

*Beweis.* (i) Sei  $m \in \mathbb{Z}$  beliebig, dann gilt

$$\begin{aligned} g(2^m u) &= \sum_{k=-\infty}^0 \left( \exp(iu2^{k+m}) - 1 - iu2^{k+m} \right) \frac{1}{2^k} + \sum_{k=1}^{\infty} \left( \exp(iu2^{k+m}) - 1 \right) \frac{1}{2^k} \\ &= \sum_{k=-\infty}^m \left( \exp(iu2^k) - 1 - iu2^k \right) \frac{1}{2^{k-m}} + \sum_{k=m+1}^{\infty} \left( \exp(iu2^k) - 1 \right) \frac{1}{2^{k-m}} \\ &= 2^m \left( \sum_{k=-\infty}^m \left( \exp(iu2^k) - 1 - iu2^k \right) \frac{1}{2^k} + \sum_{k=m+1}^{\infty} \left( \exp(iu2^k) - 1 \right) \frac{1}{2^k} \right) \\ &= 2^m \left( \sum_{k=-\infty}^0 \left( \exp(iu2^k) - 1 - iu2^k \right) \frac{1}{2^k} + \sum_{k=1}^m \left( \exp(iu2^k) - 1 \right) \frac{1}{2^k} - ium \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k=m+1}^{\infty} \left( \exp(iu2^k) - 1 \right) \frac{1}{2^k} \right) \\ &= 2^m (g(u) - ium). \end{aligned}$$

(ii) Es gilt

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\exp(iuS_{2^m t})) &\stackrel{(5.12)}{=} \exp(2^m t g(u) - iu2^m t \log_2(2^m t)) \\ &\stackrel{(5.13)}{=} \exp((g(2^m u) + ium2^m) t - iu2^m t (\log_2 2^m + \log_2 t)) \\ &= \exp(g(2^m u) t + ium2^m t - ium2^m t - iu2^m t \log_2 t) \\ &= \exp(g(2^m u) t - iu2^m t \log_2 t) \\ &\stackrel{(5.12)}{=} \mathbb{E}(\exp(iu2^m S_t)) \end{aligned}$$

Da die Verteilung einer Zufallsvariablen eindeutig durch die charakteristische Funktion festgelegt wird (E3 in A.1), folgt die Behauptung (ii).  $\square$

Für die charakteristische Funktion von  $S$  gilt nun

$$(\phi_S(u))^{2^m} = \exp(2^m g(u)) = \exp(g(2^m u)) \exp(iu2^m m)$$

und nach Def. A.5.1 ist  $S$  semistabil mit Stabilitätsindex 1. (Wähle dazu in Def. A.5.1  $b_{2^m} = 2^m$  und  $c_{2^m} = 2^m m$ .) Analog ist auch  $S_t$  nach Lemma A.5.3 ein semistabiler

Lévy-Prozess mit Stabilitätsindex 1.

Die Semistabilität macht sich auch in der Konvergenz der standardisierten Summe bemerkbar.

**Bemerkung 5.3.6.** *Die Konvergenz*

$$\frac{S_N - N \log_2 N}{N} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} S$$

in Satz 5.3.3 konnte nicht für alle  $N$ , sondern ebenfalls nur für die Teilfolge  $N = 2^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , bewiesen werden.

Um den Grenzprozess  $S$  expliziter zu beschreiben, wollen wir seine Verteilungsfunktion  $G(x)$  näher untersuchen. Wir zeigen, dass sich der Tail von  $G(x)$  asymptotisch ähnlich verhält wie der Tail der Verteilungsfunktion  $F_{Y_1}(x)$  eines einzelnen Sankt-Petersburg-Spiels.

**Satz 5.3.7.** (Theorem 3 in [Mar1]) *Es gilt für alle  $x > 0$*

$$2^m \mathbb{P} \left( \frac{1}{2^m} (S - m) > x \right) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 1 - F_{Y_1}(x) = \left( \frac{1}{2} \right)^{\lfloor \log_2 x \rfloor}.$$

*Beweis.* Wir betrachten zunächst die charakteristische Funktion von  $\frac{1}{2^m} (S - m)$

$$\begin{aligned} \phi_{\frac{1}{2^m}(S-m)}(u) &= \mathbb{E} \left( \exp \left( iu \frac{1}{2^m} (S - m) \right) \right) \\ &= \mathbb{E} \left( \exp \left( iu \frac{1}{2^m} S - iu \frac{1}{2^m} m \right) \right) \\ &\stackrel{(5.10)}{=} \exp \left( g \left( u \frac{1}{2^m} \right) - iu \frac{1}{2^m} m \right) \\ &\stackrel{(5.13)}{=} \exp \left( \frac{1}{2^m} g(u) \right) \sim 1 + \frac{1}{2^m} g(u) \quad \text{für genügend große } m. \end{aligned}$$

Somit folgt

$$2^m \left( \phi_{\frac{1}{2^m}(S-m)}(u) - 1 \right) \sim 2^m \left( 1 + \frac{1}{2^m} g(u) - 1 \right)$$

für genügend große  $m$  und schließlich

$$2^m \left( \phi_{\frac{1}{2^m}(S-m)}(u) - 1 \right) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} g(u).$$

Dies ist aber nach Satz A.3.5 äquivalent zu

$$\lim_{2^m \rightarrow \infty} \left( \phi_{\frac{1}{2^m}(S-m)}(u) \right)^{2^m} = \exp(g(u)),$$

wobei die stetige Grenzfunktion  $\exp(g(u))$  eine unbegrenzt teilbare, charakteristische Funktion ist (vgl. Kor. A.3.6). Für die Verteilungsfunktionen  $F_{\frac{1}{2^m}(S-m)}$  folgt daher

$$2^m \left(1 - F_{\frac{1}{2^m}(S-m)}(x)\right) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \Lambda^+(x),$$

wobei  $\Lambda^+(x)$  der positive Anteil des Lévy-Maßes der unbegrenzt teilbaren Grenzverteilung mit charakteristischer Funktion  $\exp(g(u))$  ist (vgl. [Fel4] S. 574f.). Da das Lévy-Maß  $\Lambda$  gerade die Atome  $2^k$ ,  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ , mit  $\frac{1}{2^k}$  gewichtet (vgl. Satz 5.3.3), entspricht  $\Lambda^+$  dem Maß, das die Atome  $2^k$ ,  $k = +1, +2, \dots$ , mit  $\frac{1}{2^k}$  gewichtet, also der Verteilung eines Sankt-Petersburg-Spiels.

Schließlich erhalten wir  $\forall x > 0$

$$\begin{aligned} 2^m \mathbb{P}\left(\frac{1}{2^m}(S-m) > x\right) &= 2^m \left(1 - \mathbb{P}\left(\frac{1}{2^m}(S-m) \leq x\right)\right) \\ &= 2^m \left(1 - F_{\frac{1}{2^m}(S-m)}(x)\right) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 1 - \Lambda^+(x) = 1 - F_{Y_1}(x). \end{aligned}$$

□

Aus dem vorangegangenen Satz können wir nun schließen, dass für große  $m$  gilt

$$1 - G(x2^m + m) = \mathbb{P}(S > x2^m + m) \sim 2^{-m} 2^{-\lfloor \log_2 x \rfloor} = 2^{-\log_2 2^m - \lfloor \log_2 x \rfloor} = 2^{-\lfloor \log_2 x 2^m \rfloor}.$$

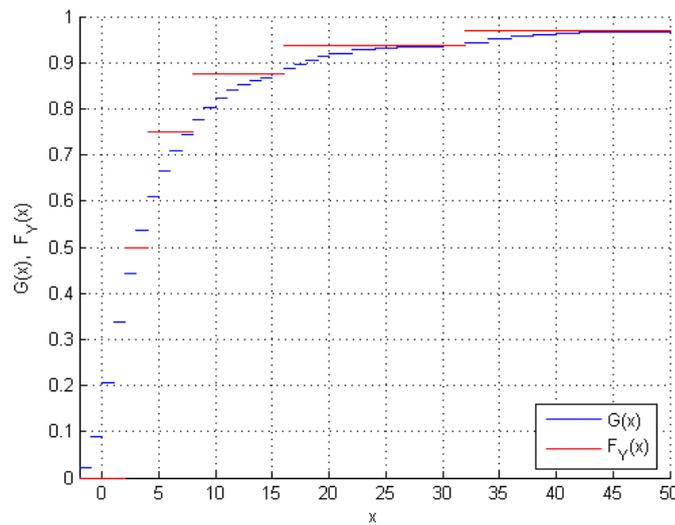
In [Mar1] wird dieses Ergebnis noch weiter verfeinert. Martin-Löf beweist, dass der Graph von  $\log_2 \mathbb{P}(S > x)$  einer Treppenfunktion ähnelt, wobei die einzelnen Stufen gleich hoch, aber für  $x \rightarrow \infty$  geometrisch wachsende Längen haben. Theorem 4 aus [Mar1] liefert

$$1 - G(x + 2^m) = \mathbb{P}(S > x + 2^m) \sim 2^{-m} (2 - G(x)) \quad \text{für } m \rightarrow \infty. \quad (5.14)$$

Durch diese Approximation sind wir in der Lage, die Funktionswerte  $G(x)$  der Grenzverteilungsfunktion leicht für große Werte von  $x$  zu berechnen, wenn wir  $G(x)$  für kleine  $x$  kennen. In Abb. 5.6 sind die Werte von  $\mathbb{P}(S > x)$  für  $x = -3, -2, \dots, 64$  aufgelistet und in Abb. 5.7 graphisch veranschaulicht.

Values of the limit distribution							
$x$	$1 - G(x)$	$x$	$1 - G(x)$	$x$	$1 - G(x)$	$x$	$1 - G(x)$
-3	0.9985	9	0.1966	20	0.0814	44	0.0341
-2	0.9774	10	0.1758	22	0.0714	46	0.0335
-1	0.9107	11	0.1600	24	0.0694	48	0.0329
0	0.7925	12	0.1482	26	0.0662	50	0.0323
1	0.6635	13	0.1395	28	0.0644	52	0.0319
2	0.5563	14	0.1322	30	0.0626	54	0.0317
3	0.4648	15	0.1234	32	0.0560	56	0.0315
4	0.3905	16	0.1130	34	0.0480	58	0.0314
5	0.3338	17	0.1028	36	0.0423	60	0.0314
6	0.2910	18	0.0941	38	0.0389	62	0.0309
7	0.2573	19	0.0870	40	0.0366	64	0.0280
8	0.2234			42	0.0350		

**Abb. 5.6:** Die Grenzverteilung  $G(x)$  kann mittels numerischer Fourier-Umkehrung von  $\phi_S$  bestimmt werden. (Quelle: [Mar1] S. 642)



**Abb. 5.7:**  $G(x)$  und  $F_Y(x)$  liegen für große Werte von  $x$  nahe beieinander.

In [Mar1] findet man zudem einen konkreten Vergleich der Werte von  $2^m(1 - G(x + 2^m))$  und  $(2 - G(x))$  für  $m \in \{5, 6, 7, 8, 9\}$  sowie  $x \in \{-2, 0, 2, \dots, 20\}$ . Während die Werte für  $x = 0$  für alle  $m$  um weniger als 2% abweichen, kann der maximale Fehler (bei  $m = 5$ ) durch 6% beschränkt werden. Martin-Löf bestätigt somit numerisch die Genauigkeit der Approximation (5.14) auch für kleinere Werte von  $m$ .

Wir können nun die Wahrscheinlichkeit, dass der kumulierte Gewinn aus  $N = 2^n$  Sankt-Petersburg-Spielen den Wert  $x + 2^m$  überschreiten wird, gut approximieren. Satz 5.3.7 und (5.14) liefern für genügend große  $n$  und  $m \geq 5$

$$\mathbb{P}\left(\frac{S_N}{N} - n > x + 2^m\right) \sim \frac{1}{2^m}(2 - G(x)).$$

Verlangt Peter also für  $N = 2^n$  Spiele einen Einsatz in Höhe von

$$x + 2^m + n \quad \text{pro Spiel,}$$

so wird er mit Wahrscheinlichkeit  $2^{-m}(2 - G(x))$  nicht in der Lage sein, den auszahlenden kumulierten Gewinn durch den gesamten Einsatz decken zu können. Peter ist es nun mit Hilfe dieser Approximation möglich, einen von seinem individuell gewünschten Sicherheitsniveau und der Anzahl der Spiele abhängigen Einsatz zu bestimmen.

**Beispiel 5.3.8.** Für eine 99,9%ige Wahrscheinlichkeit, den Gewinn auszahlen zu können, würde Peter für  $N = 1024 = 2^{10}$  Spiele einen Einsatz von 2058 pro Spiel verlangen.

*Nachweis* Wir wählen  $x = 0$ . Dann beträgt die Bankrottwahrscheinlichkeit

$$\mathbb{P}\left(\frac{S_N}{N} > 2^m + n\right) \sim 2^{-m}(2 - G(0)) = 1,7925 \cdot 2^{-m} \approx 1,8 \cdot 2^{-m}.$$

*Wir überlegen uns, dass  $10^{-3} \approx 2^{-10}$  und  $1,8 \cdot 2^{-m}$  annähernd gleich sind, wenn wir  $m = 11$  wählen. Demnach ergibt sich der Einsatz  $2^m + n = 2^{11} + 10$ .*

In Tab. 5.6 haben wir die Einsätze pro Spiel für  $x = 0$  und  $m = 5, \dots, 15$  angegeben.

m	Bankrottwt. $\approx 1,8 \cdot 2^{-m}$	Einsatz pro Spiel $2^m + n$
5	0,05625	32+n
6	0,02813	64+n
7	0,01406	128+n
8	0,00703	256+n
9	0,00352	512+n
10	0,00176	1024+n
11	0,00088	2048+n
12	0,00044	4096+n
13	0,00022	8192+n
14	0,00011	16384+n
15	0,00005	32768+n

**Tab. 5.6:** Einsätze in Abhängigkeit des gewünschten Sicherheitsniveaus und der Anzahl der Spiele

Analog zu Fellers Lösung hängen die Einsätze von der zuvor festgelegten Anzahl  $N = 2^n$  der Spiele ab. Im Vergleich zum gewünschten Sicherheitsniveau und dem daraus resultierenden  $m$  hat  $N$  jedoch einen eher vernachlässigbaren Anteil am Einsatz. Zwar wird der Term  $x + 2^m + n$  für große Werte von  $n$  durch  $n$  dominiert, doch führen diese auch zu einer extrem großen Anzahl  $N = 2^n$  von durchzuführenden Spielen. Schon für Werte wie  $n = 50$  oder  $n = 100$  erhalten wir  $2^{50} \approx 1,1 \cdot 10^{15}$  bzw.  $2^{100} \approx 1,3 \cdot 10^{30}$ . Setzen wir jedoch beispielsweise  $N \leq 2^{10}$ , also  $n \leq 10$ , voraus, so sind  $n$  und  $x$  im Vergleich zu  $2^m$  vernachlässigbar und wir können den Einsatz auf  $2^m$  beschränken.

Es fällt auf, dass die so ermittelten Einsätze ziemlich hoch sind. So unterscheiden sich Fellers und Martin-Löfs Lösung beispielsweise bei  $N = 2^{10}$  Spielen und einem Sicherheitsniveau von  $0.999 = 1 - 10^{-3}$  um 2048 Euro pro Spiel. Es ist fraglich, ob sich für diese hohen Einsätze Interessenten für das Sankt-Petersburg-Spiel finden lassen. Martin-Löf selbst betitelt das Sankt-Petersburg-Spiel als ein schönes Beispiel, das zeigt, dass eine Theorem mathematisch richtig sein kann, aber dennoch total irrelevant für die praktische Anwendung ([Mar1] S. 643).

Der Autor macht dann aber weiter darauf aufmerksam, dass sich die in [Mar1] vorgestellten Überlegungen durchaus auf die Praxis übertragen lassen und nennt die Bestimmung von Prämien für die Absicherung gegen mögliche Schäden mit unendlich hohen Kosten als Anwendungsbeispiel.

Möchte man zum Beispiel die Risikoprämien in der Brandversicherung beschreiben, so

bieten sich durchaus Verteilungen mit unendlich hohen Erwartungswerten, und im Speziellen die Pareto-Verteilung, an. Diese Verteilung ist eine gute Approximation der Tails von Schadensverteilungen jenseits festgelegter Schwellenwerte und spielt daher insbesondere in der Rückversicherungsbranche bei der Ermittlung von Risikoprämien eine Rolle. Die Pareto-Verteilung (benannt nach dem italienischen Ingenieur, Soziologe und Ökonom Vilfredo Pareto (1848-1923)) gewichtet einige wenige Elemente des Zustandsraumes sehr stark und die restlichen, die aber den überwiegenden Teil ausmachen, nur geringfügig. Daher lassen sich mit ihr Situationen beschreiben, in denen wenige Elemente einer Grundmenge einen großen Anteil am Gesamtwert haben und der übrige, überwiegende Teil der Grundmenge nur wenig zum Gesamtwert beiträgt. Weitere Beispiele, bei denen die Pareto-Verteilung Anwendung findet, sind die Einkommensverteilung in der Bevölkerung oder die Größe von Städten.

**Definition 5.3.9.** Eine stetige Zufallsvariable  $X$  heißt Pareto-verteilt zu den Parametern  $a > 0$  (Lageparameter) und  $b > 0$  (Skalenparameter), falls sie die Wahrscheinlichkeitsdichte

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x \leq a \\ \frac{b}{a} \left(\frac{a}{x}\right)^{b+1} & \text{falls } x > a \end{cases}$$

besitzt.

Man schreibt  $X \sim \text{Par}(a, b)$ . Die Verteilungsfunktion ist gegeben durch

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x \leq a \\ 1 - \left(\frac{a}{x}\right)^b & \text{falls } x > a. \end{cases}$$

Als Potenzgesetz-Verteilung ist die Pareto-Verteilung skaleninvariant und eine sogenannte *heavy-tailed-distribution*, d.h. dass die Verteilung sehr langsam abnimmt.

Wir erkennen, dass die Verteilungsfunktion  $F_Y$  einer Zufallsvariablen  $Y$ , die das Sankt-Petersburg-Spiel modelliert (vgl. Abb. 1.2 auf S. 4), für die Werte  $x = 2^m$ ,  $m \in \mathbb{N}_0$ , einer Verteilungsfunktion  $F_X$  einer Pareto(1,1)-verteilten Zufallsvariablen  $X$  gleicht. Es ist für  $m \in \mathbb{N}_0$

$$F_Y(2^m) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{\lfloor \log_2 2^m \rfloor} = 1 - \frac{1}{2^m}.$$

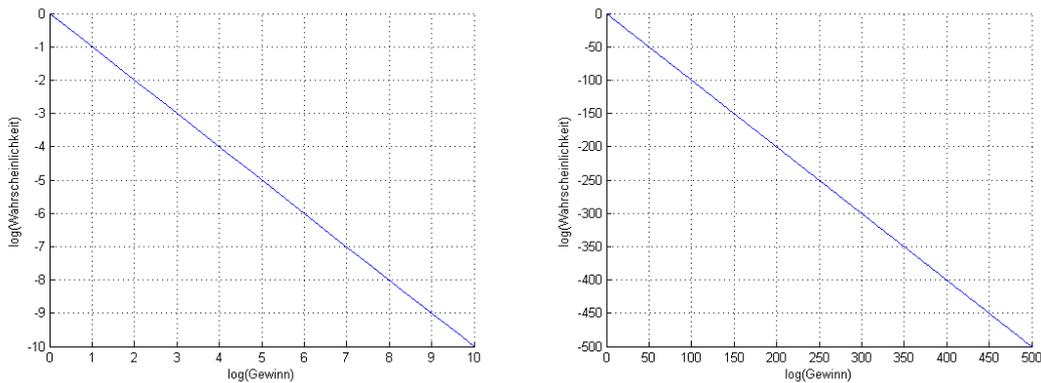
Die Verteilung der Sankt-Petersburg-Zufallsvariablen  $Y$  ist skaleninvariant (selbstähnlich), denn für alle  $c = 2^m$ ,  $m \in \mathbb{N}_0$ , und  $i \in \mathbb{N}_0$  gilt

$$\frac{\mathbb{P}(Y = c2^i)}{\mathbb{P}(Y = 2^i)} = \frac{\mathbb{P}(Y = 2^m 2^i)}{\mathbb{P}(Y = 2^i)} = \frac{\frac{1}{2^m} \frac{1}{2^i}}{\frac{1}{2^i}} = \frac{1}{2^m}.$$

Die relativen Häufigkeiten sind also unabhängig vom Maßstab, bzw. das Verhältnis zweier Wahrscheinlichkeiten  $\mathbb{P}(Y = 2^m 2^i)$  und  $\mathbb{P}(Y = 2^i)$  unabhängig vom Index  $i \in \mathbb{N}_0$ .

Abb. 5.8 verdeutlicht die fraktale<sup>11</sup> Struktur.

<sup>11</sup>Ein Fraktal ist ein geometrisches Objekt, dessen Struktur selbstähnlich ist.



**Abb. 5.8:** Beim reinen Anblick kann man nicht erkennen, in welcher Dimension man gerade auf den Graphen schaut.

Zusammenfassend können wir festhalten, dass die in [Mar1] vorgestellten Überlegungen durchaus praktischen Nutzen haben und sich gut auf Pareto-verteilte Ereignisse (wie etwa die Modellierung von Großschäden bei Industrie- und Rückversicherungen) übertragen lassen.

### Ausblick

- (1) Martin-Löf hat mit der Funktion  $G(x)$  erstmals eine Grenzverteilung für den kumulierten Gewinn aus  $n$  Sankt-Petersburg-Spielen gefunden, allerdings nur für die Teilsequenz  $(S_{2^k})_{k \in \mathbb{N}}$ . In [CsDo] verallgemeinern Csörgő und Dodunekova dieses Ergebnis und bestimmen alle möglichen Sequenzen  $(n_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ , für die

$$\frac{S_{n_k} - \log_2 n_k}{n_k} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{d} \tilde{S}$$

gilt und ermitteln gleichzeitig alle Grenzverteilungen  $\mathbb{P}_{\tilde{S}}$ .

- (2) In [Mar2] diskutiert Martin-Löf das in Abschnitt 3.2 vorgestellte Verdopplungsspiel und betrachtet dabei:
  - (a) Paul verfügt über begrenztes Vermögen und kann daher irgendwann keinen doppelten Einsatz mehr zahlen.
  - (b) Paul leiht sich das gesamte benötigte Kapital, muss aber zusätzlich Zinsen dafür zahlen.

In beiden Fällen können Grenzwerttheoreme hergeleitet werden, die eine Beurteilung der Vorteilhaftigkeit des Spiels ermöglichen.

# Kapitel 6

## Bezug zur Praxis

In diesem Kapitel werden wir eine interessante, wenn auch vielleicht auf den ersten Blick nicht ganz offensichtliche Anwendung des Paradoxons diskutieren — die Bewertung von Wachstumsaktien. Ähnlich wie beim Sankt-Petersburg-Spiel stellt sich die Frage, wie viel man für eine kleine Wahrscheinlichkeit (dass ein Unternehmen seinen Zahlungsstrom um einen erheblichen Anteil steigern kann) zahlen würde.

Im Anschluss wollen wir dann noch auf ein Sankt-Petersburg-Angebot im Bereich des Leistungssports aufmerksam machen, welches in [SzRi1] genannt wird.

### 6.1 Die Bewertung von Wachstumsaktien

Wir beziehen uns hier hauptsächlich auf Durand ([Dura]) sowie Székely und Richards ([SzRi1], [SzRi2]), die sich ebenfalls auf Durands Theorie stützen. In Anlehnung an [SzRi1] bezeichnen wir mit *Wachstumsunternehmen* solche Unternehmen, dessen Erträge und Gewinne signifikant schneller wachsen als die der Gesamtwirtschaft. Aktien oder Anteile dieser Unternehmen werden *Wachstumsaktien* genannt.

In [Dura] deutet David Durand (1913-1996) Schwierigkeiten bei der Bewertung von Wachstumsaktien an. Zum einen gibt es das praktische Problem der Prognose von Werten wie Verkaufszahlen, Einnahmen, Dividenden und Laufzeit. Zum anderen stellt sich die Frage nach einer geeigneten Methode für die Bewertung dieser Schätzungen. Durand kritisiert ähnlich wie Clendenin und Van Cleave (vgl. [CIVC] S. 368f.) die Anwendung der weitverbreiteten *Present-Value-Methode*<sup>1</sup>, welche die prognostizierte Reihe von anhaltenden Zahlungsströmen mit einem uniformen Diskontfaktor auf die Gegenwart abzinst ([Dura] S. 348f.). Durand warnt vor der Gefahr der Überbewertung und mahnt den klugen Investor, sich zu fragen, ob solch hohen Preise trotz des vorausgesagten Wachstums gerechtfertigt sind. Er untermauert seine Zweifel an der Bewertungsmethode schließlich durch das Aufzeigen einer Analogie zum Sankt-Petersburg-Paradoxon. Durch eine geeignete Modifikation des Spiels rechtfertigt er auch niedrigere Preise als fair für eine Wachstumsaktie, die (unendlich andauernde) hohe Dividendenzahlungen verspricht.

Wir werden nun Durands modifiziertes Sankt-Petersburg-Spiel vorstellen und anschließend Parallelen zur Present-Value-Bewertung von Aktien aufzeigen.

---

<sup>1</sup>Die Present-Value-Methode ermittelt den inneren Wert einer Aktie. Wir gehen auf Seite 102 näher darauf ein.

**Durands modifiziertes Sankt–Petersburg–Spiel**

Peter wirft so lange eine Münze, bis zum ersten Mal Kopf fällt. Dabei gilt

$$\mathbb{P}(Kopf) = \frac{i}{1+i} \quad \text{und} \quad \mathbb{P}(Zahl) = \frac{1}{1+i} \quad \text{mit } i > 0,$$

d.h. die Münze ist a priori nicht fair (fair für  $i = 1$ ).

Statt einer einmaligen Auszahlung beim ersten Kopf–Wurf, erhält Paul nun mit jedem Zahl–Wurf einen kontinuierlich wachsenden Betrag. So zahlt Peter

- $D > 0$ , falls beim ersten Wurf Zahl fällt,
- weitere  $(1 + g)D$  für den zweiten Zahl–Wurf,
- weitere  $D(1 + g)^2$  für den dritten Zahl–Wurf usw., wobei  $g > 0$ .

Münzwurf–Folge	Wahrscheinlichkeit	kumulierter Gewinn (= $Y_D$ )
K	$\frac{i}{1+i}$	0
ZK	$\frac{1}{1+i} \frac{i}{1+i}$	$D$
ZZK	$\left(\frac{1}{1+i}\right)^2 \frac{i}{1+i}$	$D + D(1 + g)$
...	...	...
$\underbrace{Z\dots Z}_n K$	$\left(\frac{1}{1+i}\right)^n \frac{i}{1+i}$	$\sum_{k=1}^n D(1 + g)^{k-1}$

**Tab. 6.1:** Gewinne bei Durands modifiziertem Sankt–Petersburg–Spiel

Sobald Kopf in der  $(n + 1)$ -ten Runde fällt, endet das Spiel. Mit Wahrscheinlichkeit  $\frac{i}{1+i} \left(\frac{1}{1+i}\right)^n$  gewinnt Paul demnach

$$\sum_{k=1}^n D(1 + g)^{k-1} = D \sum_{k=0}^{n-1} (1 + g)^k = D \frac{(1 + g)^n - 1}{(1 + g) - 1} = D \frac{(1 + g)^n - 1}{g}. \quad (6.1)$$

Wir wollen nun einen *fairen* Einsatz für dieses Spiel berechnen:

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}(Y_D) &= {}^{(6.1)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i}{1+i} \left( \frac{1}{1+i} \right)^n D \frac{(1+g)^n - 1}{g} \\
 &= \frac{D}{g} \frac{i}{1+i} \left( \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{1+g}{1+i} \right)^n - \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{1}{1+i} \right)^n \right) \\
 &= {}^{i>g} \frac{D}{g} \frac{i}{1+i} \left( \frac{1}{1 - \frac{1+g}{1+i}} - \frac{1}{1 - \frac{1}{1+i}} \right) \\
 &= \frac{D}{g} \left( \frac{i}{1+i} \frac{1+i}{i-g} - \frac{i}{1+i} \frac{1+i}{i} \right) \\
 &= \frac{D}{g} \left( \frac{i}{i-g} - 1 \right) = \frac{D}{i-g}
 \end{aligned}$$

d.h.

$$\mathbb{E}(Y_D) = \begin{cases} \frac{D}{i-g} & \text{falls } i > g \\ \infty & \text{falls } i \leq g. \end{cases}$$

Während Peter für  $i > g$  gerade  $\frac{D}{i-g}$  von Paul verlangen kann, stehen wir für  $i \leq g$  wie im klassischen Sankt–Petersburg–Spiel vor der Frage eines fairen Einsatzes.

### Aktienbewertung mittels Present–Value–Methode

Um nun den Zusammenhang zur Aktienbewertung herzustellen, sei Peter ein Wachstumsunternehmen und Paul ein Käufer von dessen Aktien. Welchen Betrag kann das Unternehmen pro Aktie verlangen?

Für die Bestimmung eines fairen Preises einer Aktie wollen wir das von Durand kritisierte *Present–Value–Konzept*<sup>2</sup> der Fundamentalanalyse<sup>3</sup> verwenden (vgl. [PeSt] S. 223f.), d.h. wir berechnen den Gegenwartswert (Barwert) der zukünftig erwarteten Dividenden, die das Unternehmen am Ende eines jeden Jahres an den Aktien–Inhaber auszahlt. Vereinfachend wird angenommen, dass es sich dabei um jährlich konstant wachsende Dividenden handelt. Im ersten Jahr beträgt die **Dividendenzahlung** demnach  $\mathbf{D} > \mathbf{0}$ , im zweiten Jahr  $D(1+g)$ , im dritten Jahr  $D(1+g)^2$  usw. Da die Dividenden gewöhnlich proportional mit den Erträgen wachsen, wollen wir mit der Rate  $\mathbf{g} > \mathbf{0}$  die langjährige innere (konstante) **Wachstumsrate** der Unternehmenserträge bezeichnen. Um die Dividenden mit der Gegenwart vergleichbar zu machen, müssen sie mit einem geeigneten Kapitalisierungszinsfuß (KZF) auf die heutige Sicht hin abgezinst werden.  $\mathbf{i} > \mathbf{0}$  bezeichne dafür

<sup>2</sup>Die Present–Value–Methode ist eine zentrale Aktienbewertungsmethode der Fundamentalanalyse. „Sie besagt, dass der Kurs einer Aktie im Sinne des inneren Wertes bestimmt wird durch den Wert, der sich ergibt, wenn man die Summe aller je noch auf diese Aktie entfallenden Dividenden und sonstigen geldwerten (zahlungswirksamen) Vorteile auf den heutigen Tag abzinst. Als entscheidendes Problem erweist sich die Prognose dieser Größen.“ ([PeSt], S. 219f.)

<sup>3</sup>„Die Fundamentalanalyse ist die älteste Methode zur Prognose von Aktienkursen. Sie geht von dem naheliegenden Grundgedanken aus, dass der Kurs einer Aktie durch interne und externe Unternehmensdaten und damit durch den inneren Wert des Unternehmens bestimmt wird, das sie repräsentiert.“ ([PeSt] S. 219)

die **Abzinsungsrate** bzw.  $\frac{1}{1+i}$  den Abzinsungsfaktor<sup>4</sup>.

Für einen unendlichen Beobachtungszeitraum entspricht der innere Wert (Gegenwartswert) einer Aktie dann gerade

$$\begin{aligned} \frac{D}{(1+i)} + \frac{D(1+g)}{(1+i)^2} + \frac{D(1+g)^2}{(1+i)^3} + \dots &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{D(1+g)^{k-1}}{(1+i)^k} = \frac{D}{1+i} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1+g}{1+i}\right)^k \\ &= \begin{cases} \frac{D}{1+i} \frac{1}{1-\frac{1+g}{1+i}} = \frac{D}{1+i} \frac{1+i}{1-g} = \frac{D}{i-g} & \text{falls } i > g \\ \infty & \text{falls } i \leq g. \end{cases} \end{aligned}$$

Wir erkennen die Äquivalenz der obigen Reihe zum Erwartungswert des modifizierten Spiels.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Y_D) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i}{1+i} \left(\frac{1}{1+i}\right)^n D \frac{(1+g)^n - 1}{g} \\ &\stackrel{(6.1)}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i}{1+i} \left(\frac{1}{1+i}\right)^n \left(\sum_{k=1}^n D(1+g)^{k-1}\right) \\ &= D \frac{i}{i+1} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{1+i}\right)^n (1+g)^k \\ &= D \frac{i}{i+1} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=k+1}^{\infty} \left(\frac{1}{1+i}\right)^n (1+g)^k \\ &= D \frac{i}{i+1} \sum_{k=0}^{\infty} (1+g)^k \left(\frac{1}{1+i}\right)^{k+1} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{1+i}\right)^n \\ &= D \frac{i}{i+1} \sum_{k=0}^{\infty} (1+g)^k \left(\frac{1}{1+i}\right)^{k+1} \frac{i+1}{i} \\ &= \frac{D}{1+i} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1+g}{1+i}\right)^k \end{aligned}$$

Ist der Kapitalisierungszinsfuß kleiner gleich der Wachstumsrate (d.h.  $i \leq g$ ), so ist die Wachstumsaktie nach der Present-Value-Methode unendlich viel wert. Die Abzinsung bis in die Ewigkeit (bzw. die Annahme eines andauernden Wachstums) führt demnach zu einem Paradoxon. Doch auch wenn man beachtet, dass das Wachstum endet und nur einen endlichen Beobachtungszeitraum betrachtet, ergeben sich für den Fall  $i \leq g$  zum

<sup>4</sup>Unter Verwendung des Abzinsungsfaktors  $\frac{1}{1+i}$  entspricht der Wert von 1 Euro in  $n$  Jahren heute gerade  $\left(\frac{1}{1+i}\right)^n$  Euro. In der Praxis orientiert sich  $i$  an den aktuellen Marktgegebenheiten und setzt sich aus einer Zinskomponente und einer Risikoprämie zusammen. Die Zinskomponente wiederum wird durch Leitzins der Notenbank bestimmt, der dem Zinssatz entspricht, zu dem Geschäftsbanken sogenanntes Zentralbankengeld beschaffen können. Die Risikoprämie ist ähnlich variabel. Sie hängt vom Ausfallrisiko des jeweiligen Unternehmens und der Branche ab.

Teil überdurchschnittlich hohe Werte. Für ein auf  $m$  Jahre begrenztes Wachstum ergibt sich wegen

$$\frac{D}{1+i} \sum_{n=0}^m \left(\frac{1+g}{1+i}\right)^n \geq \frac{D}{1+i} \sum_{n=0}^m 1$$

ein Mindestpreis von

$$m \frac{D}{1+i}.$$

In Tabelle 6.2 haben wir einige Werte  $\frac{1}{1+i} \sum_{n=0}^m \left(\frac{1+g}{1+i}\right)^n$  in Abhängigkeit von  $i$  (erste Spalte) und  $g$  (erste Zeile) für  $m = 10$  berechnet. Man erkennt, dass diese Werte exponentiell in  $g$  wachsen.

$i \setminus g$	5	10	15	20	30	40	50	60	70	80	90	100
2	13	16	21	28	48	83	143	242	404	661	1.064	1.680
3	12	15	20	26	44	76	131	221	368	602	966	1.524
5	10	13	17	22	37	65	110	185	307	500	800	1.259
8	9	11	14	18	30	51	86	143	235	381	608	954
10	8	10	13	16	26	44	73	121	199	320	509	796

**Tab. 6.2:** gerundete Werte von  $\frac{1}{1+i} \sum_{n=0}^{10} \left(\frac{1+g}{1+i}\right)^n$  in Abhängigkeit von  $i$  und  $g$

**Beispiel: Die Dot-Com-Blase**

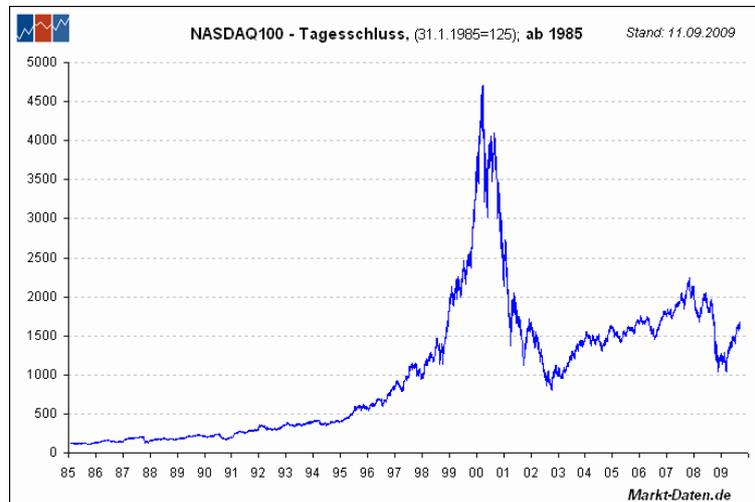
Als Beispiel einer solchen Überbewertung von Aktien nennen Székely und Richards in [SzRi1] den Börsenkrach in 2000, circa 40 Jahre nach der Veröffentlichung von Durands Artikel. Sie sehen das Sankt-Petersburg-Problem als einen Beweis, die Unvernunft zahlreicher Spekulanten zu zeigen und zu bewerten. Wir wollen diesen Ansatz nun diskutieren.

Ende 1990 schien jedermann ein Interesse an Wachstumsaktien zu haben. Insbesondere die Aktien der Technologieunternehmen, für die die Wall-Street-Berater hohe andauernde Wachstumsraten prognostizierten, waren gefragt. Im Zuge der neuen technologischen Entwicklungen gab es viele Neugründungen von Unternehmen und in Deutschland entstand im März 1997 nach amerikanischen Vorbild der NASDAQ (Technologiebörse) der *Neue Markt* als neues Börsensegment eigens für die Technologiewerte. Viele der erst kürzlich gegründeten Internetfirmen nutzten die Möglichkeit, sich über den Börsengang zu finanzieren und so weiter zu expandieren.

Die Aktien wurden zu anhaltend steigenden Preisen verkauft. Es wurde viel darüber debattiert, ob es klug sei, die überbewerteten Aktien zu kaufen, oder dumm, sie nicht zu kaufen, bevor die Kurse noch weiter steigen. Trotz der Warnung vor der Überbewertung durch einige Analysten, die die Euphorie bremsen wollten, entschieden sich die meisten Spekulanten für das Kaufen. Auch ein großer Teil der offenen Investmentfonds<sup>5</sup> hatte umfangreiche Kontingente an Aktien, insbesondere High-Tech-Aktien, gekauft. Jeder schien

<sup>5</sup>Kleinanleger haben über die von Investmentgesellschaften angebotenen Investmentfonds die Möglichkeit, in verschiedene Vermögensgegenstände und Märkte zu investieren, ohne dabei über spezielles Fachwissen verfügen zu müssen. Die Investmentgesellschaften entscheiden in einem gewissen, vorher

etwas vom Neuen Markt und von den prognostizierten Gewinnen haben zu wollen. Nach [SzRi1] berichtete das *Wall Street Journal* am 19. November 1999, dass 59 Investmentfonds seit dem 1. Januar 1999 um mehr als 100% gestiegen seien. Székely und Richards nennen als Beispiel den Nicholas–Applegate Global Technology–Fund, welcher sogar um 325% stieg, was einem Wachstum von über 1% pro Tag entspricht (vgl. [SzRi1] S. 229). Während in den Jahren 1997–2000 ein rasantes Wachstum verzeichnet werden konnte, entpuppte sich im Frühjahr 2000 der sogenannte Dot–Com–Boom jedoch als Dot–Com–Blase. Die Gewinnerwartungen der hochbewerteten Unternehmen wurden nach und nach als nicht erfüllbar eingestuft und die Kurse begannen durch vermehrte Verkäufe zu sinken. Es kam schließlich zu einem Börsencrash, worauf ein anhaltender Rückgang der Aktienkurse folgte. Während die Anleger, darunter auch viele Kleinaktionäre und Investmentfonds große Verluste einfuhren, mussten viele der Wachstumsunternehmen Insolvenz anmelden. Seitdem gelten die Geldanlagen am Aktienmarkt und insbesondere die Aktien von Wachstumsunternehmen als stark risikobehaftet. Der Neue Markt wurde nach nur 6 Jahren im Juni 2003 wieder geschlossen.



**Abb. 6.1:** NASDAQ 1985–2009 (Quelle: [Web5])

Gemäß Székely und Richards kann das Sankt–Petersburg–Paradoxon den starken Preisanstieg und darauffolgenden Preisabfall erklären. Ende 1990 senkte die US–Notenbank zeitgleich mit dem beginnenden Interesse an Wachstumsaktien den Leitzins. Die Folge war:  $i < g$  (für Technologie–Unternehmen teilweise sogar  $\frac{i}{g} \simeq 0$ , vgl. [SzRi1] S. 230).

Der Present–Value–Ansatz erklärt nun den rasanten Anstieg der Aktienkurse. Székely und Richards schlussfolgern, dass die Anleger Durands Warnungen (bzgl. des Problems

---

festgelegten Rahmen über die Auswahl der Anlagebereiche (z.B. Aktien, festverzinsliche Wertpapiere, Immobilien) und nutzen das kumulierte Kapital der Kleinaktionäre, um günstigere Konditionen am Markt aushandeln zu können.

Ein offener Wertpapier–Investmentfond ist ein Fond, dessen Anteile zu jeder Zeit gekauft und verkauft werden können. Offene Investmentfonds sind nicht beschränkt und dürfen daher beliebig viel Anlagekapital entgegennehmen.

der andauernden Zahlungen) komplett ignoriert haben und sind der Meinung, dass man den fatalen Rückgang der Aktienkurse mit dem Wissen aus dem Paradoxon hätte vorausagen können. Sie behaupten schließlich, dass der starke Anstieg und der darauffolgende Rückgang der Aktienpreise und somit der Börsencrash von 2000 hätten verhindert werden können (siehe [SzRi1] S. 225).

Székely und Richards schätzen die Signifikanz von Durands modifiziertem Spiel und verteidigen diese auch vor Angriffen<sup>6</sup>. Sie weisen ausdrücklich auf den Zusammenhang zum Sankt-Petersburg-Paradoxon hin, mit dessen Hilfe die Bewertung der Wachstumsaktien besser nachvollzogen und verstanden werden kann.

*Even today, Durands brilliant article continues to provide its readers with a cogent procedure for quantifying the extent of irrational exuberance among the speculative public. ([SzRi2] S. 6)*

Die Dot-Com-Blase nun aber wie Székely und Richards komplett mit dem Ansatz des Paradoxon zu erklären, ist etwas fragwürdig. Der Börsencrash ist vielmehr ein Resultat einer Reihe von Faktoren, nicht zuletzt auch ein Ergebnis von Betrugsfällen.

Für die Aktienbewertungen gibt es an den Börsen keine festen Vorschriften. Prinzipiell handelt es sich dabei immer um Marktbewertungen, die aus Angebot und Nachfrage entstehen. Um das Sankt-Petersburg-Paradoxon auf das Bewertungsproblem der Aktien anwenden zu können, müsste man schon zu Beginn gewisse Annahmen treffen. So z.B.

- (1) Alle Anleger schauen nur auf den Erwartungswert.  
(Nutzentheorie und Risikoaversion werden nicht betrachtet.)
- (2) Der KZF ist überall gleich und wird durch den Leitzins der Notenbank bestimmt.

Diese Annahmen sind aber sehr restriktiv.

- (zu 1) Moderne Standard-Bewertungsmodelle schließen neben der Erwartungswertnutzentheorie auch die Risikoaversion mit ein. Das Paradoxon als solches verschwindet somit bei der Bewertung der Aktien. Die *Behavioral Finance*<sup>7</sup>, eine interdisziplinäre Wissenschaft, die sowohl wirtschaftliche als auch psychologische Aspekte berücksichtigt, zeigt aber, dass sich die Anleger entgegen der modernen Theorie nicht immer rational entscheiden. Vielmehr werden hier die Beeinflussung des Verhaltens durch (bewusste und unbewusste) Emotionen sowie die Entstehung von Fehlern beim Erkennen, Bewerten und Entscheiden von ökonomischen Sachverhalten aufgedeckt. In den Euphoriephasen kurz vor einem Crash dürften somit Faktoren wie

- Gier,
- Selbstüberschätzung (*overconfidence*),
- Ansteckung bzw. Herdenantrieb,

<sup>6</sup>siehe z.B. die Verteidigung gegen die Kritik, die Parameter der Wachstumsaktienbewertung entsprechen nicht denen des Sankt-Petersburg-Spiels in [SzRi2]

<sup>7</sup>In [SchVa] kann man die Erkenntnisse der Behavioral Finance genauer nachschlagen.

- überdurchschnittliches Vertrauen in die Märkte oder
- Probleme der (subjektiven) Risikowahrnehmung und –messung

zu einer stark sinkenden Risikoaversion und einer nur mäßigen Beachtung des eigentlichen Nutzens führen. Die Behavioral Finance kann erklären, warum es Risikoaversion und rationale Nutzenfunktionen temporär nicht gibt. In den Zeiten eines Booms würde das dann den alleinigen Blick auf den Erwartungswert rechtfertigen und für Székelys und Richards Theorie sprechen.

- (zu 2) In der Realität wird der KZF nicht allein durch den Leitzins der Notenbank bestimmt. Der KZF als Summe einer Zinskomponente und einer Risikoprämie drückt vielmehr die Renditeerwartung der Investoren aus und ist auf Grund der Subjektivität sehr unterschiedlich. Gerade bei jungen Wachstumsunternehmen macht der Risikoaufschlag im Vergleich zum risikolosen Zins den erheblicheren Anteil des KZF aus. Allgemein kann allerdings zu Székelys und Richards Verteidigung gesagt werden, dass der KZF bei sinkenden Leitzinsen tendenziell auch kleiner wird, da die Renditeerwartung ebenfalls sinkt.

In [Dura] können die auftretenden Schwierigkeiten bei der Bewertung von (Wachstums–) Aktien etwas ausführlicher nachgeschlagen werden. So diskutiert Durand u.a. die Probleme der stetig ansteigenden Dividenden sowie der weit entfernten Dividendenzahlungen (und deren Abzinsung), des angenommenen unendlichen Wachstums und des uniformen Abzinsungsfaktors.

Dass das Sankt–Petersburg–Problem auch in weiteren Wirtschaftszweigen auftritt, zeigt ein Artikel des Immobilienberaters Michael S. Young. So beschreibt der Autor in [You], beunruhigt von einem extremen und andauernden Anstieg der Immobilienpreise in den 70ern, ähnlich wie Székely und Richards eine Analogie zum Paradoxon. Er schildert die Probleme bei der *fairen* Bewertung von Immobilien und fordert einen Rückzug von den traditionellen Bewertungsmethoden (vgl. [You] S. 85).

Abschließen wollen wir bemerken, dass die Mathematik derzeit nicht mehr aus dem modernen Finanzgeschäft wegzudenken ist. Man denke zum Beispiel auch an die Anfang der 70er Jahre von Fischer Sheffey Black (1938-1995), Myron Samuel Scholes (\*1941) und Robert Carhart Merton (\*1944) entwickelte Black–Scholes–Formel zur Bewertung von Aktienoptionen (Nobelpreis für Wirtschaftswissenschaften, 1997). Viele der ursprünglichen Modelle sind heute aber bereits veraltet, was die Gefahr einer erhöhten Instabilität der Finanzmärkte birgt. Die Forderung nach neuen, an die aktuellen Gegebenheiten angepassten Formeln und Bewertungsmethoden ist daher unerlässlich.

### Résumé

Zusammenfassend können wir festhalten, dass das Paradoxon einen wie oben genannten Börsencrash nicht allein erklärt, wohl aber einen neuen interessanten Blickwinkel liefert. Eine der wesentlichen Herausforderungen ist und bleibt die Erfassung und Bewertung hoher Gewinne zu kleinen Wahrscheinlichkeiten.

## 6.2 Ein Sankt–Petersburg–Angebot im Baseball

Ken Harrelson spielte 1969-1971 in der obersten Spielklasse im Baseball<sup>8</sup> für die Cleveland Indians. 1970 bot er dem Manager des Clubs, Gabe Paul, einen Deal an. Statt eines fixen Gehalts wollte Harrelson einen leistungsabhängigen Lohn — abhängig von der Anzahl der geschlagenen Home–Runs<sup>9</sup>:

1 Home–Run : 50 Cent

2 Home–Runs:  $2 \cdot 50$  Cent

3 Home–Runs:  $2^2 \cdot 50$  Cent

...

n Home–Runs:  $2^n \cdot 50$  Cent

Wir wollen den von Harrelson erwarteten Lohn, der exponentiell mit der Anzahl der geschlagenen Home–Runs wächst, ermitteln. Dabei gehen wir davon aus, dass man in einer Saison rund 500 mal am Schlag ist (*At Bats*) und Harrelsons persönliche Trefferquote für einen Home–Run bei  $\frac{131}{2941} \approx 0,045$  liegt (vgl. [Web4]).

Der leistungsabhängige Lohn lässt sich dann durch die Zufallsvariable

$$L \sim \text{Bin}(500; 0,045)$$

modellieren und es ergibt sich

$$\mathbb{E}(L) = \sum_{i=1}^{500} \binom{500}{i} 0,045^i 0,955^{500-i} 2^{i-2} = 903.830.000 \text{ (Dollar)}.$$

Klugerweise lehnte Gabe Paul diesen Vorschlag ab — Harrelson hatte in der folgenden Saison 30 Home–Runs geschlagen. Bei einer Zustimmung des Deals hätte Harrelson daher zwar nicht den erwarteten Lohn, aber dennoch stolze

$$2^{29} \cdot 50 \text{ Cent} = 2^{28} \text{ Dollar} = 268.435.456 \text{ Dollar}$$

kassiert.

<sup>8</sup>„Baseball wird gespielt von zwei Mannschaften zu je neun Spielern. Die Teams übernehmen abwechselnd die Rolle der angreifenden Schlagmannschaft und der verteidigenden Feldmannschaft“ ([Web3]), wobei nur in der angreifenden Position gepunktet werden kann.

Nähere Informationen zum Baseball und die genauen Baseball–Regeln findet man u.a. in [Web3].

<sup>9</sup>Unter einem *Home–Run* versteht man eine für die angreifende Mannschaft vorteilhafte Spielsituation, die mindestens einen Punkt bringt.

# Kapitel 7

## Résumé

Während der historische Aufriss zeigt, dass sich seit dem Ursprung des Paradoxons zahlreiche Ideen zur Lösung entwickelt haben, demonstrieren Kapitel 3 – 5, dass auch der Martingal- und Markovketten-Ansatz sowie die asymptotischen Interpretationen neue interessante Blickwinkel zulassen. Zudem haben wir an vielen Stellen auf die bestehende Aktualität der Sankt-Petersburg-Problematik hingewiesen und damit gesehen, dass sich auch derzeit noch immer sowohl Mathematiker als auch Ökonomen und Psychologen mit dem Paradoxon beschäftigen.

Welchen Ansatz man nun von den vorgestellten bevorzugt, hängt sicher vom individuellen Kontext ab. Soll etwa das Sankt-Petersburg-Spiel nur einmal gespielt werden, so eignen sich die asymptotischen Interpretationen wohl weniger. Diese Ansätze sind aber durchaus sinnvoll, wenn wir ein Kasino betrachten, welches seinen Kunden Sankt-Petersburg-Spiele anbietet.

Insgesamt schließen wir uns der Meinung des britischen Ökonomen, Politikers und Mathematikers John Maynard Keynes (1883-1946) an:

*We are unwilling to be Paul, partly because we do not believe Peter will pay us if we have good fortune in the tossing, partly because we do not know what we should do with so much money [...] if we won it, partly because we do not believe we ever should win it, and partly because we do not think it would be a rational act to risk an infinite sum or even a very large finite sum for an infinitely larger one, whose attainment is infinitely unlikely. ([Key] S. 318f.)*

# Anhang A

## Lévy–Prozesse

Dieser Abschnitt gibt eine Einführung in die Theorie der eindimensionalen Lévy–Prozesse und dient dazu, die nötigen technischen Voraussetzungen für die Überlegungen in Abschnitt 5.3.2 zu schaffen. Es werden Begriffe wie unbegrenzte Teilbarkeit, Lévy–Prozesse und stabile Verteilungen erläutert und deren Zusammenhänge geklärt. Zunächst beginnen wir jedoch mit einem Exkurs über die charakteristischen Funktionen und meinen mit

- $\mathcal{B}(\mathbb{R})$  die Menge aller Borel–Mengen auf  $\mathbb{R}$ ,
- $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$  die Menge aller Borel–Wahrscheinlichkeitsmaße auf  $\mathbb{R}$ .

### A.1 Charakteristischen Funktionen

**Definition A.1.1.** (*charakteristische Funktion, Def. 2.1. in [Sat]*) Für ein Wahrscheinlichkeitsmaß  $\mu \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$  heißt

$$\phi_\mu : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, t \mapsto \phi_\mu(t) = \int_{\mathbb{R}} \exp(itx) \mu(dx)$$

*charakteristische Funktion von  $\mu$ .*

*Analog wird für eine reelle Zufallsvariable  $X$  mit Verteilung  $\mathbb{P}_X$  durch*

$$\phi_X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, t \mapsto \phi_X(t) = \mathbb{E}(\exp(itX)) = \int_{\mathbb{R}} \exp(itx) \mathbb{P}_X(dx)$$

*die charakteristische Funktion von  $X$  definiert.*

Mit Hilfe der charakteristischen Funktionen lassen sich Aussagen über die Verteilung von Summen von i.i.d. Zufallsvariablen herleiten oder zentrale Grenzwertsätze beweisen. Die drei ersten der folgenden Eigenschaften sind dabei fundamental.

(E1) (Satz 7.9 in [MeiSch]) Seien  $(X_i)_{i=1,\dots,n}$  i.i.d. reelle Zufallsvariablen und  $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ . Dann gilt

$$\phi_{S_n} = \phi_{X_1} \cdot \dots \cdot \phi_{X_n}.$$

(E2) (Stetigkeitssatz von Lévy, Theorem 7.12 in [MeiSch]) Es seien  $\mu, (\mu_n)_{n \in \mathbb{N}_0} \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$  und  $\phi, (\phi_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  die zugehörigen charakteristischen Funktionen. Dann gilt

$$\mu_n \Rightarrow \mu \text{ genau dann wenn } \phi_n(t) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \phi(t) \forall t \in \mathbb{R} \text{ und } \phi \text{ ist stetig in } t = 0.$$

Während (E2) die punktweise Konvergenz der charakteristischen Funktionen mit der schwachen Konvergenz von Wahrscheinlichkeitsmaßen verknüpft, besagt die folgende Eigenschaft (E3), dass die Verteilung eindeutig durch ihre charakteristische Funktion festgelegt wird.

(E3) (Eindeutigkeitssatz, Satz 7.13 in [MeiSch]) Seien  $\mu, \nu \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$  mit charakteristischen Funktionen  $\phi_\mu$  und  $\phi_\nu$ . Aus  $\phi_\mu = \phi_\nu$  folgt  $\mu = \nu$ .

Kennt man also die charakteristische Funktion, so auch ihr Wahrscheinlichkeitsmaß  $\mu$  auf  $\mathbb{R}$  und es gilt die Umkehrformel.

(E4) (Umkehrformel 3.2 und Theorem 3.3 in [Durr]) Sei  $\phi_\mu(t) = \int_{\mathbb{R}} \exp(itx)\mu(dx)$ , wobei  $\mu \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ . Für  $a < b$  gilt

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^T \frac{\exp(-ita) - \exp(-itb)}{it} \phi_\mu(t) dt = \mu(a, b) + \frac{1}{2} \mu(\{a, b\}).$$

Ist  $\phi_\mu$  zudem integrierbar, d.h.  $\int_{\mathbb{R}} |\phi_\mu(t)| dt < \infty$ , so hat  $\mu$  die beschränkte stetige Dichte

$$f(y) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \exp(-ity) \phi(t) dt.$$

Für eine reellwertige Zufallsvariable  $X$  mit charakteristischer Funktion  $\phi_X$  gelten nach Satz 7.8 in [MeiSch] außerdem

(E5)  $|\phi_X(t)| \leq \phi_X(0) = 1$  für alle  $t \in \mathbb{R}$

(E6)  $\phi_{-X}(t) = \phi_X(-t)$  für alle  $t \in \mathbb{R}$

(E7) Für  $a, b \in \mathbb{R}$  gilt:  $\phi_{aX+b}(t) = \phi_X(at) \exp(itb)$  für alle  $t \in \mathbb{R}$ .

(E8)  $\phi_X$  ist gleichmäßig stetig.

## A.2 Faltung

**Definition A.2.1.** (Faltung, [App] S. 20 und S. 23) Die Faltung zweier Wahrscheinlichkeitsmaße  $\mu_1, \mu_2 \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$  wird definiert durch

$$(\mu_1 * \mu_2)(A) = \int_{\mathbb{R}} \mu_1(A - x) \mu_2(dx), \text{ wobei } A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

Analog wird für  $n \in \mathbb{N}$  die  $n$ -te Faltung von  $\mu \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$  definiert durch

$$\mu^{*n} = \mu * \dots * \mu \text{ und } \mu^{*0} = \delta_0 \text{ das Dirac-Maß in } 0.$$

Man sagt,  $\mu$  hat eine  $n$ -te Faltungswurzel, falls ein Wahrscheinlichkeitsmaß  $\mu^{\frac{1}{n}} \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$  existiert mit

$$\left(\mu^{\frac{1}{n}}\right)^{*n} = \mu.$$

Die Faltung zweier Verteilungsfunktionen  $F_1, F_2$  wird analog definiert. Sind  $F_1, F_2$  sogar absolut stetig mit den Dichten  $f_1, f_2$ , so ist die Faltung der Dichten  $f_1, f_2$

$$(f_1 * f_2)(x) = \int_{\mathbb{R}} f_1(x-y)f_2(y)dy$$

die Dichte von  $F_1 * F_2$ .

In [App] kann man u.a. noch die folgenden Eigenschaften von Faltungen nachschlagen.

- (E1) Die Faltung ist ein binärer Operator auf  $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$  (vgl. Prop. 1.2.1 in [App]), d.h.  $*$  :  $\mathcal{M}_1(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_1(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ . Sie ist zudem kommutativ und assoziativ (vgl. Prop. 1.2.2 in [App]) und das neutrale Element ist das Dirac-Maß  $\delta_0$ .  $(\mathcal{M}_1(\mathbb{R}), *)$  ist daher abelsche Halbgruppe.
- (E2) Für i.i.d. Zufallsvariablen  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit Verteilungsfunktion  $F$  hat die Summe  $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$  die Verteilungsfunktion  $F^{*n}(x) = \mathbb{P}(\sum_{i=1}^n X \leq x)$  (vgl. Kor. 1.2.3 in [App]).

### A.3 Unbegrenzt teilbare Verteilungen

**Definition A.3.1.** (unbegrenzte Teilbarkeit, Def. 16.1 in [Kle]) Ein Maß  $\mu \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$  heißt unbegrenzt teilbar, falls gilt

$$\forall n \in \mathbb{N}_0 \exists \mu_n \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R}) \text{ mit } \mu = (\mu_n)^{*n}.$$

Analog heißt

- (i) eine Zufallsvariable  $X$  in  $\mathbb{R}$  unbegrenzt teilbar, falls  $\forall n \in \mathbb{N}_0$  eine Sequenz i.i.d. Zufallsvariablen  $(X_{n,i})_{i=1, \dots, n}$  existiert mit

$$X \stackrel{d}{=} X_{n,1} + \dots + X_{n,n}.$$

- (ii) eine charakteristische Funktion  $\phi$  unbegrenzt teilbar, falls  $\forall n \in \mathbb{N}_0$  ein  $\phi_n$  existiert mit

$$\phi = \phi_n^n.$$

Die folgenden Verteilungen sind unbegrenzt teilbar (vgl. Bsp. 7.2 in [Sat]):

- (1) Normalverteilung  $\mathcal{N}_{(m, \sigma^2)} = \mathcal{N}_{(\frac{m}{n}, \frac{\sigma^2}{n})}^{*n}$
- (2) Cauchyverteilung  $\mathcal{C}_a = \mathcal{C}_{\frac{a}{n}}^{*n}$
- (3) Poissonverteilung  $\mathcal{Poi}_\lambda = \mathcal{Poi}_{\frac{\lambda}{n}}^{*n}$

Man kann nun die Klasse der Wahrscheinlichkeitsmaße, die auf  $\mathbb{R}$  unbegrenzt teilbar sind, eindeutig durch die Lévy-Khinchin-Formel (Paul Lévy, A.Ya. Khintchine, 1930er) beschreiben. Es gibt keine anderen unbegrenzt teilbaren Wahrscheinlichkeitsmaße  $\mu \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$  als solche mit einer charakteristischen Funktion  $\phi$  der nachfolgenden Bauart.

**Satz A.3.2.** (*Lévy-Khinchin-Theorem, Theorem 8.1 in [Sat]*) Ein Wahrscheinlichkeitsmaß  $\mu \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$  ist genau dann unbegrenzt teilbar, falls

- (i)  $b \in \mathbb{R}$  (Driftkoeffizient, Shiftanteil)
- (ii)  $\sigma^2 \in \mathbb{R}_+$  (Gaußsche Anteil, Gauß-Koeffizient)
- (iii)  $\Lambda \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$  mit  $\Lambda(\{0\}) = 0$  und

$$\int_{\mathbb{R} \setminus \{0\}} (|x^2| \wedge 1) \Lambda(dx) = \int_{\mathbb{R} \setminus \{0\}} \min\{|x^2|, 1\} \Lambda(dx) < \infty \quad (\text{A.1})$$

so existieren, dass für seine charakteristische Funktion  $\phi$  gilt

$$\phi(t) = \exp\left(ibt - \frac{\sigma^2 t^2}{2} + \int_{\mathbb{R}} (\exp(itx) - 1 - itx \mathbb{1}_D(x)) \Lambda(dx)\right),$$

wobei  $D = \{x : |x| = 1\}$  die geschlossene Einheitskugel ist.

Einen Beweis findet man ebenfalls in [Sat] S. 37ff. oder auch in [App] S. 28f..

Das Maß  $\Lambda \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$  mit (A.1) heißt Lévy-Maß (Def. 8.2 in [Sat]) bzw. kanonisches Maß (Def. 16.16 in [Kle]) zur unbegrenzt teilbaren Verteilung  $\mu$  mit charakteristischer Funktion  $\phi$  und erfüllt:

- (i) Ist  $\Lambda$  ein Lévy-Maß, so auch  $\frac{\Lambda}{n}$  für alle  $n \geq 1$ .
- (ii) Jedes sigma-endliche Maß  $\Lambda$  auf  $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \mathcal{B}(\mathbb{R} \setminus \{0\}))$  ist ein Lévy-Maß.

Eine unbegrenzt teilbare Verteilung ist eindeutig durch das Tripel  $(b, \sigma^2, \Lambda)$  bestimmt, auch erzeugendes Tripel oder charakteristisches Tripel (Def. 8.2 in [Sat]) bzw. kanonisches Tripel (Def. 16.16 in [Kle]) genannt. Aus der  $n$ -fachen Teilbarkeit folgt daher auch die Eindeutigkeit der  $n$ -ten Faltungswurzel  $\mu_n = \mu^{*\frac{1}{n}}$  bzw.  $\phi_n = \phi^{\frac{1}{n}}$ .

Die Funktion  $h(x) = x \cdot \mathbb{1}_D(x)$  in Satz A.3.2 bezeichnet eine Abschneidefunktion.

**Definition A.3.3.** (*Abschneidefunktion, [App] S.116*) Man nennt  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine Abschneidefunktion auf  $\mathbb{R}$ , falls gilt

- (i)  $h$  ist beschränkt
- (ii)  $h(x) = x$  in einer Umgebung von  $x$
- (iii)  $h(x) = 0$  außerhalb einer kompakten Menge.

Für die Wahl der Abschneidefunktion existieren mehrere Möglichkeiten, so z.B.

- (1)  $h_1(x) = x \cdot \mathbb{1}_{\{|x| < 1\}}(x)$  (Satz 16.14 in [Kle]),  
Abschneidefunktion für das Sankt-Petersburg-Spiel

(2)  $h_2(x) = x \cdot 1_{\{|x| \leq \epsilon\}}(x)$  mit  $\epsilon > 0$  (Bem. 8.4 in [Sat])

(3)  $h_3(x) = \frac{x}{1+x^2}$  (Bem. 8.4 in [Sat])

Während sich bei einem Wechsel der Abschneidefunktion  $h(x)$  zu  $h'(x)$  sowohl das Lévy-Maß als auch der Gauß-Koeffizient nicht ändern, wird der Shiftanteil  $b$  zu

$$b' = b + \int_{\mathbb{R}} (h(x) - h'(x)) \Lambda(dx) \quad (\text{vgl. [Kle] S. 340}).$$

Aus Satz A.3.2 ist ersichtlich, dass die unbegrenzt teilbaren Wahrscheinlichkeitsmaße und Zufallsvariablen eindeutig durch die Form des charakteristischen Exponenten beschrieben werden.

**Definition A.3.4.** (*Lévy-Symbol, [App] S. 30*) Für eine unbegrenzt teilbare reelle Zufallsvariable  $X$  mit Verteilung  $\mathbb{P}_X$  und charakteristischer Funktion

$$\phi_X(u) = \mathbb{E}(\exp(iuX)) = \exp(\psi(u)) \quad \forall u \in \mathbb{R}$$

heißt die eindeutige stetige Funktion

$$\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$$

das Lévy-Symbol, der Lévy-Exponent oder der charakteristische Exponent von  $X$ .

Die charakteristische Funktion  $\phi_X$  einer unbegrenzt teilbaren Zufallsvariablen  $X$  hat keine Nullstelle (vgl. Lem. 7.5 in [Sat]) und daher ist der charakteristische Exponent durch

$$\psi(u) = \ln(\phi_X(u)) = \ln(\mathbb{E}(\exp(iuX)))$$

wohldefiniert.

**Satz A.3.5.** (*Theorem 17.1.1 in [Fel4]*) Sei  $(\phi_m)_{m \in \mathbb{N}}$  eine Folge von charakteristischen Funktionen. Dann sind äquivalent:

(i) Für alle  $u \in \mathbb{R}$  gilt:  $\lim_{m \rightarrow \infty} m(\phi_m(u) - 1) = \psi(u)$  und  $\psi$  ist stetig.

(ii) Für alle  $u \in \mathbb{R}$  gilt:  $\lim_{m \rightarrow \infty} \phi_m^m(u) = \phi(u)$  und  $\phi$  ist stetig.

Gilt (i) oder (ii), so ist  $\phi(u) = \exp(\psi(u))$  charakteristische Funktion mit Lévy-Exponenten  $\psi$ .

**Korollar A.3.6.** (*Kor. 16.8 in [Kle]*) Eine in 0 stetige Funktion  $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  ist genau dann eine unbegrenzt teilbare charakteristische Funktion, wenn es eine Folge  $(\phi_m)_{m \in \mathbb{N}}$  von charakteristischen Funktionen gibt mit

$$\phi_m^m(u) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \phi(u) \quad \text{für jedes } u \in \mathbb{R}.$$

## A.4 Lévy-Prozesse

**Definition A.4.1.** (Lévy-Prozess, Def. 1.6 in [Sat]) Ein stochastischer Prozess  $(X_t)_{t \geq 0}$  auf  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  mit Werten in  $\mathbb{R}$  heißt Lévy-Prozess, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

(i)  $\forall n \in \mathbb{N}_0$  und  $0 \leq t_0 < \dots < t_n$  sind die Zufallsvariablen

$$X_{t_0}, X_{t_1} - X_{t_0}, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$$

unabhängig. (Eigenschaft der unabhängigen Zuwächse)

(ii)  $X_0 = 0$   $\mathbb{P}$ -fast sicher.

(iii) Die Verteilung von  $X_{s+t} - X_s$  hängt nicht von  $s$  ab.  
(Eigenschaft der zeitlichen Homogenität oder der stationäre Zuwächse)

(iv)  $(X_t)_{t \geq 0}$  ist stochastisch stetig, d.h.  $\forall t \geq 0$  und  $\epsilon > 0$  gilt

$$\lim_{s \rightarrow t} \mathbb{P}(|X_s - X_t| > \epsilon) = 0.$$

(v)  $\exists \Omega_0 \in \mathcal{F}$  mit  $\mathbb{P}(\Omega_0) = 1$ , so dass  $\forall \omega \in \Omega_0$  gilt

$X_t(\omega)$  ist rechtsstetig in  $t \geq 0$  und hat linksseitige Grenzwerte in  $t > 0$ .

**Satz A.4.2.** (Theorem 1.3.3 in [App]) Sei  $(X_t)_{t \geq 0}$  ein Lévy-Prozess mit Werten in  $\mathbb{R}$ . Dann gilt für die charakteristische Funktion

$$\phi_{X_t}(u) = \exp(t\psi(u)) \quad \text{für alle } t \geq 0 \text{ und } u \in \mathbb{R},$$

wobei  $\psi(u)$  das Lévy-Symbol von  $X_1$  ist.

Wir können nun den Zusammenhang zwischen den Lévy-Prozessen und der unbegrenzten Teilbarkeit formulieren:

- (i) Sei  $(X_t)_{t \geq 0}$  ein Lévy-Prozess mit Werten in  $\mathbb{R}$ . Dann ist für alle  $t \geq 0$  die Verteilung von  $X_t$  unbegrenzt teilbar (Prop. 1.3.1 in [App]).
- (ii) Sei  $\mu$  eine unbegrenzt teilbare Verteilung auf  $\mathbb{R}$ . Dann existiert ein Lévy-Prozess  $(X_t)_{t \geq 0}$  mit Werten in  $\mathbb{R}$ , so dass  $\mathbb{P}_{X_1} = \mu$ .  $(X_t)_{t \geq 0}$  ist eindeutig bis auf Gleichheit in Verteilung (Kor. 11.6 in [Sat]).

Abschließend wollen wir aufzeigen, wie der Lévy-Prozess einer unbegrenzt teilbaren Verteilung auf  $\mathbb{R}$  aussieht (vgl. Kor. 1.4.6 in [App]).

Für eine unbegrenzt teilbare Verteilung  $\mu$  auf  $\mathbb{R}$  mit charakteristischem Exponenten  $\psi$  definiert man  $\forall t \geq 0$  durch  $\exp(t\phi(u))$  die charakteristische Funktion der unbegrenzt teilbaren Verteilung  $\mu_t$  auf  $\mathbb{R}$ . Der zugehörige Lévy-Prozess  $(X_t)_{t \geq 0}$  wird durch das Lévy-Maß charakterisiert und ist definiert durch

$$\phi_{X_t}(u) = \phi_{\mu_t}(u) = \exp(t\psi(u)).$$

## A.5 Stabile Verteilungen

Die stabilen Verteilungen bilden eine wichtige Unterklasse der unbegrenzt teilbaren Verteilungen und zeichnen sich dadurch aus, dass sie gewissen Skalierungseigenschaften im Exponenten ihrer charakteristischen Funktionen genügen.

**Definition A.5.1.** (*stabile Verteilungen, Def. 13.1 in [Sat]*) Eine unbegrenzt teilbare Verteilung  $\mu \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$  heißt stabil, falls  $\forall n \in \mathbb{N}_0$  reelle Zahlen  $b_n > 0$  und  $c_n$  existieren, so dass

$$\phi_\mu^n(t) = \phi_\mu(b_n t) \exp(ic_n t) \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Eine unbegrenzt teilbare Verteilung  $\mu \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$  heißt semistabil, falls für einige  $n \in \mathbb{N}_0$ ,  $n \neq 1$  reelle Zahlen  $b_n > 0$  und  $c_n$  existieren, so dass

$$\phi_\mu^n(t) = \phi_\mu(b_n t) \exp(ic_n t) \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Ist  $c_n = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$ , so heißt  $\mu$  strikt stabil bzw. strikt semistabil.

Nach Feller können die Normierungskonstanten nur von der Form  $b_n = n^{\frac{1}{\alpha}}$  mit  $\alpha \in (0, 2]$  sein (vgl. [Fel4] S. 170). Man bezeichnet  $\alpha$  als Stabilitätsindex.

Analog nennen wir i.i.d. Zufallsvariablen  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  stabil mit Index  $\alpha \in (0, 2]$ , falls reelle Zahlen  $(c_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  existieren, so dass  $\forall n \in \mathbb{N}_0$  gilt

$$X_1 + \dots + X_n \stackrel{d}{=} n^{\frac{1}{\alpha}} X_1 + c_n \quad (\text{vgl. Def. 16.20 in [Kle]}).$$

Die folgenden Verteilungen sind stabil:

- (1) Normalverteilung  $\mathcal{N}_{(m, \sigma^2)}$  mit  $\alpha = 2$  (Theorem 14.1 in [Sat])
- (2) Cauchyverteilung  $\mathcal{C}_a$  mit  $\alpha = 1$  (Bsp. 14.17 in [Sat])

**Definition A.5.2.** (*stabiler Lévy-Prozess, Bsp. 1.3.14 in [App]*) Ein stabiler Lévy-Prozess ist ein Lévy-Prozess  $(X_t)_{t \geq 0}$ , für den jedes  $X_t$  eine stabile Zufallsvariable ist.

**Lemma A.5.3.**  $\forall \alpha \in (0, 2]$  ist ein Lévy-Prozess  $(X_t)_{t \geq 0}$  mit charakteristischer Funktion

$$\phi_{X_t}(u) = \exp(t\psi(u))$$

und charakteristischem Exponenten  $\psi$  ein  $\alpha$ -stabiler ( $\alpha$ -semistabiler) Lévy-Prozess, genau dann wenn gilt

$$k \cdot \psi(u) = \psi\left(k^{\frac{1}{\alpha}} u\right) \quad \text{für alle (für einige) } k > 0 \text{ und } u \in \mathbb{R}.$$

*Beweis.* Ein Lévy-Prozess ist genau dann  $\alpha$ -stabil, wenn er der Skalierungseigenschaft

$$(X_{kt})_{t \geq 0} \stackrel{d}{=} (k^{\frac{1}{\alpha}} X_t)_{t \geq 0}$$

genügt. Dies ist aber genau der Fall wenn

$$\begin{aligned} \forall u \in \mathbb{R} : \phi_{X_{kt}}(u) &= \phi_{k^{\frac{1}{\alpha}} X_t}(u) \\ \Leftrightarrow \forall u \in \mathbb{R} : \exp(tk\psi(u)) &= \exp\left(t\psi\left(k^{\frac{1}{\alpha}}u\right)\right) \\ \Leftrightarrow \forall u \in \mathbb{R} : k\psi(u) &= \psi\left(k^{\frac{1}{\alpha}}u\right). \end{aligned}$$

□

Für i.i.d. Zufallsvariablen  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $\mathbb{E}(X_1) = 0$  und  $Var(X_1) = 1$  wissen wir mit dem ZGWS, dass für  $\alpha = 2$  die normierte Summe  $\frac{S_n}{\sqrt{n}}$  gegen die Standard-Normalverteilung konvergiert. Existieren die Varianzen nicht, können durch die geeignete Wahl der Normierungskonstanten ähnliche Grenzwerttheoreme formuliert werden. Festzuhalten ist, dass nur stabile Verteilungen als Grenzwertverteilungen auftreten können (vgl. [Fel4] S. 172).

# Anhang B

## Quelltext für Simulationen

Wir haben das klassische Sankt–Petersburg–Spiel sowie die in Abschnitt 5.2.3 vorgeschlagenen Modifikationen mit Matlab simuliert.

In den Quelltexten ist der Parameter  $p = \mathbb{P}(\text{Kopf}) \in [0, 1]$  noch frei wählbar. Für unsere Simulationen in den Abschnitten 5.2.2 und 5.2.4 haben wir eine faire Münze (d.h.  $p = \frac{1}{2}$ ) gewählt.

### B.1 Quelltext für Abschnitt 5.2.2

#### Durchschnittlicher Gewinn bei $n$ Sankt–Petersburg–Spielen

```
function[] = PetersburgSpiel(n,p)
% n = Anzahl der Spiele
% p = Wahrscheinlichkeit für Kopf

% Erzeugung von n zum Parameter p geometrisch–verteilten Zufallsvariablen
% 1. Durchlauf
for i=1:n;
T1(i)=geornd(p);
end;
T1=T1+1; % da in Matlab verschobene geometrische Verteilung

% 2. Durchlauf
for i=1:n; T2(i)=geornd(p); end; T2=T2+1;
% 3. Durchlauf
for i=1:n; T3(i)=geornd(p); end; T3=T3+1;

% die jeweils größten Gewinne
k1=max(T1); K1=2^(k1)
k2=max(T2); K2=2^(k2)
k3=max(T3); K3=2^(k3)

% durchschnittliche Gewinne im 1. Durchlauf
y1=2.^T1;
s1=cumsum(y1);
```

```

for i=1:n;
s1(i)=s1(i)/i;
end;

% 2. Durchlauf
y2=2.^T2; s2=cumsum(y2);
for i=1:n; s2(i)=s2(i)/i; end;
% 3. Durchlauf
y3=2.^T3; s3=cumsum(y3);
for i=1:n; s3(i)=s3(i)/i; end;

% Einsätze nach Feller
for i=1:n;
F(i)=log(i)/log(2);
end;

% Plot
figure;
j=[1:1:n];
plot(j,[s1;s2;s3;F])
xlabel('n (Anzahl der Spiele)')
ylabel('durchschnittlicher Gewinn')
legend('S_n^1/n','S_n^2/n','S_n^3/n','log_2(n)','Location','NE')

```

## B.2 Quelltext für Abschnitt 5.2.4

### Vergleich der modifizierten Sankt–Petersburg–Spiele

```

function[ ] = vergleich(n,p)
% n = Anzahl der Spiele
% p = Wahrscheinlichkeit für Kopf

% Erzeugung von n zum Paramater p geometrisch–verteilten Zufallsvariablen
% 1. Durchlauf
for i=1:n;
T1(i)=geornd(p);
end;
T1=T1+1; % da in Matlab verschobene geometrische Verteilung

% Erzeugung von n zum Paramater p geometrisch–verteilten Zufallsvariablen
% 2. Durchlauf
for i=1:n;

```

```
T2(i)=geornd(p);
end;
T2=T2+1; % da in Matlab verschobene geometrische Verteilung

% größter Gewinn im 1. Durchlauf
k=max(T1),
K=2^k;

% kum. Gewinn aus klassischem Sankt-Petersburg-Spiel
y1=2.^T1;
Gewinn1=sum(y1)

% kum. Gewinn, wenn größter Gewinn einbehalten wird
Gewinn2=Gewinn1-K

% kum. Gewinn, wenn Gewinne gewichtet werden
for i=1:n;
w(i)=1/i;
end;
y3=y1.*w;
Gewinn3=sum(y3)

% kum. Gewinn, wenn das Minimum aus 2 Spielen betrachtet wird
m=min(T1,T2);
y4=2.^m;
Gewinn4=sum(y4)
```

# Literaturverzeichnis

- [Adl1] A. ADLER: Generalized One-Sided Laws of the Iterated Logarithm for Random Variables Barely with or without Finite Mean, *Journal of Theoretical Probability* **3-4** (1990), 587-597
- [Adl2] A. ADLER: A Note on the „Fair“ Games Problem, *Sankhya — The Indian Journal of Statistics* **56-A1** (1994), 164-173
- [Adl3] A. ADLER: Exact strong laws, *Bulletin of the Institute of Mathematics, Academia Sinica* **28-3** (2000), 141-166
- [Adl4] A. ADLER: Exact strong laws for simultaneous St. Petersburg Games, *Bulletin of the Institute of Mathematics, Academia Sinica (New Series)* **3-3** (2008), 381-390
- [Ale] J. D'ALEMBERT: Réflexions sur le calcul des probabilités, *Opuscules Mathématiques, Tenth Memoir* **2** (1761), 1-25, englische Übersetzung von R. Pulskamp: Reflections on the calculus of Probabilities
- [App] D. APPLEBAUM: *Lévy Processes and Stochastic Calculus*, Cambridge [u.a.]: Cambridge University Press (2004)
- [Azu] K. AZUMA: Weighted Sums of Certain Dependent Random Variables, *Tôhoku Mathematical Journal* **19** (1967), 357-367
- [Ber1] D. BERNOULLI: Specimen theoriae novae de mensura sortis, *Commentarii Academiae Scientiae Imperialis Petropolitanae* **V** (1738), 175-192, englische Übersetzung von L. SOMMER: Exposition of a new theory of the measurement of risk, *Econometrica* **22-1** (1954), 23-36
- [Ber2] N. BERNOULLI: Correspondence of Nicolas Bernoulli concerning the St. Petersburg Game, englische Übersetzung von R. Pulskamp (1999), verfügbar unter <http://cerebro.xu.edu/math/Sources>
- [Bla] P.R. BLAVATSKY: Back to the St. Petersburg paradox?, *Management Science* **51-4** (2005), 677-678
- [BlHoSa] G. BLOM, L. HOLST, D. SANDELL: Petersburg paradox, *Problems and Snapshots from the World of Probability*, New York [u.a.]: Springer (1994), 49-50

- [BrBrCh] B. BRU, M.F. BRU, K.L. CHUNG: Borel and the St. Petersburg Martingale, aus dem Französischen übersetzt von M. DANSEREAU, *The Electronic Journal for History of Probability and Statistics* **5-1** (2009)
- [Cam] C. CAMERER: Three Cheers — Psychological, Theoretical, Empirical — for Loss Aversion, *Journal of Marketing Research* **42-2** (2005), 129-133
- [Cea] A.J. CEASAR: A Monte Carlo Simulation Related To The St. Petersburg Paradox, *College Mathematics Journal* **15-4** (1984), 339-342
- [Chu] K.L. CHUNG: Probability and Doob, *American Mathematical Monthly* **19** (1998), 28-35
- [CIVC] J.C. CLENDENIN, M. VAN CLEAVE: Growth and Common Stock Values, *The Journal of Finance* **9** (1954), 365-376
- [CoHi] T. COWEN, J. HIGH: Time, bounded utility, and the St. Petersburg paradox, *Theory and decision* **3** (1988), 219-223
- [CoSaVo] J.C. COX, V. SADIRAJ, B. VOGT: On the Empirical Relevance of St. Petersburg Lotteries, *Economics Bulletin* **29-1** (2009), 214-220
- [CsDo] S. CSÖRGŐ, R. DODUNEKOVA: Limit theorems for the Petersburg game, *Sums, Trimmed Sums and Extremes*, hrsg. von M.G. Hahn, D.M. Mason and D.C. Weiner, Boston [u.a]: Birkhäuser (1991), 285-315
- [CsSi1] S. CSÖRGŐ, G. SIMONS: On Steinhaus' Resolution of the St. Petersburg Paradox, *Probability and Mathematical Statistics* **14-2** (1993), 157-172
- [CsSi2] S. CSÖRGŐ, G. SIMONS: Precision Calculation of Distributions for Trimmed Sums, *The Annals of Applied Probability* **5-3** (1995), 854-873
- [CsSi3] S. CSÖRGŐ, G. SIMONS: A strong law of large numbers for trimmed sums, with applications to generalized St. Petersburg games, *Statistics and Probability Letters* **26** (1996), 65-73
- [CsSi4] S. CSÖRGŐ, G. SIMONS: The two-Paul paradox and the comparison of infinite expectations, *Limit Theorems in Probability and Statistics, vol. I*, hrsg. von I. Berkes, E. Csáki, M. Csörgő, Budapest [u.a.]: János Bolyai Mathematical Society (2002), 427-455,
- [CsSi5] S. CSÖRGŐ, G. SIMONS: Pooling strategies for St. Petersburg gamblers, *Bernoulli* **12-6** (2006), 971-1002
- [Dura] D. DURAND: Growth stocks and the Petersburg paradox, *The Journal of Finance* **12-3** (1957), 348-363
- [Durr] R. DURRETT: *Probability — theory and examples*, Belmont [u.a.] : Thomson Brooks/Cole, 3. Auflage (2005)

- [Dut] J. DUTKA: On the St. Petersburg Paradox, *Archives for History of Exact Sciences* **39** (1988), 13-39
- [E811] L. EULER: Vera aestimatio sortis in ludis, *Opera posthuma* **1** (1862), 315-318, englische Übersetzung von R. PULSKAMP: The true valuation of the risk in games, verfügbar unter <http://www.cs.xu.edu/math/Sources/Euler>
- [Fal] H. FALLER: Die Spielerin, *ZEIT-Magazin* **26** (2009), 24-27
- [Fel1] W. FELLER: Note on the Law of Large Numbers and „Fair“ Games, *Annals of Mathematical Statistics* **16-3** (1945), 301-304
- [Fel2] W. FELLER: A Limit Theorem For Random Variables With Infinite Moments, *American Journal of Mathematics* **68-2** (1946), 257-262
- [Fel3] W. FELLER: *An Introduction to Probability Theory and its Applications, Vol. 1*, New York [u.a.]: Wiley, 3. Auflage (1968)
- [Fel4] W. FELLER: *An Introduction to Probability Theory and its Applications, Vol. 2*, New York [u.a.]: Wiley, 2. Auflage (1971)
- [Gut] A. GUT: An Extension of the Kolmogorov–Feller Weak Law of Large Numbers with An Application to the St. Petersburg Game, *Journal of Theoretical Probability* **17-3** (2004)
- [Han] T.L. HANKINS: *Jean d’Alembert — science and the enlightenment*, Oxford [u.a.]: Clarendon (1970)
- [HaPl] B.Y. HAYDEN, M.L. PLATT: The mean, the median, and the St. Petersburg paradox, *Society for Judgment and Decision Making* **4-4** (2009), 256-272, verfügbar unter <http://www.sas.upenn.edu/~baron/journal/>
- [Hin] L. HINNERS–TOBRÄGEL: The St. Petersburg Paradox, Paper presented at the *EFITA 2003 Conference*, Debrecen, Hungary, verfügbar unter <http://www.efita.net/>
- [HoPa] D.H. HONG, J.M. PARK: Exact sequences for sums of pairwise I.I.D. random variables, *Bulletin of the Korean Mathematical Society* **30-2** (1993), 167-170
- [Jor] G. JORLAND: The Saint Petersburg paradox 1713-1937, *The Probabilistic Revolution, Vol. 1 - Ideas in History*, hrsg. von L. Krüger, L.D. Daston, M. Heidelberger, Cambridge [u.a.]: MIT Press (1987), 157-190
- [Kai1] K. KAIVANTO: Local Representativeness and the St. Petersburg Paradox (2006), verfügbar unter <http://papers.ssrn.com>
- [Kai2] K. KAIVANTO: Alternation Bias and the Parameterization of Cumulative Prospect Theory, *Advances in Decision Making Under Risk and Uncertainty, Vol. 42*, hrsg. von M. Abdellaoui, J.D. Hey, Berlin [u.a.]: Springer (2008), 91-107, verfügbar unter <http://papers.ssrn.com>

- [Key] J.M. KEYNES: *A Treatise on Probability*, New York [u.a.]: Macmillan (1921), 318-319
- [Kle] A. KLENKE : *Wahrscheinlichkeitstheorie*, Berlin [u.a.]: Springer (2008), 2. Auflage
- [Kol] A.N. KOLMOGOROFF: *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung*, Berlin [u.a.]: Springer (1933), 22f.
- [Les] E. LESIGNE: Heads Or Tails — An Introduction To Limit Theorems in Probability, *American Mathematical Society, Student Mathematical Library* **28** (2005), 59-75
- [LeSa] H. LEVY, M. SARNAT: *Portfolio and Investment Selection — Theory and Practice*, London [u.a.]: Prentice-Hall (1984), 108-110
- [Loc] B. LOCKER: Doob at Lyon, aus dem Französischen übersetzt von R. Sverdlöve, *The Electronic Journal for History of Probability and Statistics* **5-1** (2009)
- [Mar1] A. MARTIN-LÖF: A limit theorem which clarifies the „Petersburg paradox“, *Journal of Applied Probability* **22** (1985), 634-643
- [Mar2] A. MARTIN-LÖF: An analysis of two modifications of the Petersburg game, *Stochastics An International Journal of Probability and Stochastic Processes* **80-2** (2008), 175-179
- [Maz] L. MAZLIAK: Borel, Probability and La Revue du Mois, *The Electronic Journal for History of Probability and Statistics* **3-1** (2007)
- [MeiSch] D. MEINTRUP, ST. SCHÄFFLER: *Stochastik — Theorie und Anwendungen*, Berlin [u.a.]: Springer (2005)
- [Men] K. MENGER: Das Unsicherheitsmoment in der Wertlehre, *Zeitschrift für Nationalökonomie* **5** (1934), 459-485
- [PeSt] L. PERRIDON, M. STEINER: *Finanzwirtschaft der Unternehmung*, München [u.a.]: Vahlen (2002), 11. Auflage, 218-259
- [Pia] P. PIANCA: The St. Petersburg Paradox — Historical Exposition, an Application to Growth Stocks and Some Simulation Approaches, *Quaderni di Didattica* **24** (2007)
- [Pra] N.U. PRABHU: *Stochastic Processes — Basic Theory and Its Application*, Singapore [u.a.]: World Scientific (2007)
- [RiWa] M.O. RIEGER, M. WANG: Cumulative Prospect Theory and the St. Petersburg Paradox, *Economic Theory* **28-3** (2006), 665-679
- [Sam] P.A. SAMUELSON: St. Petersburg Paradoxes — Defanged, Dissected and Historically Described, *Journal of Economic Literature* **15-1** (1977), 24-55

- [San] E. SANDIFER: How Euler Did It — The St. Petersburg Paradox, *Mathematical Association of America* (2007), verfügbar unter <http://www.maa.org/news/howeulerdidit.html>
- [Sat] K.I. SATO: *Lévy Processes and Infinitely Divisible Distributions*, Cambridge [u.a.], Cambridge University Press (1999)
- [SchVa] S.U. SCHÄFER, H. VATER: Behavioral Finance — eine Einführung, *Finanz-Betrieb Düsseldorf — Handelsblatt* **4-12** (2002), 739-748
- [SchWa] D. SCHMEIDLER, P. WAKKER: Expected Utility and Mathematical Expectation, *The new Palgrave — a dictionary of economics, vol. 2: E to J*, hrsg. von J. Eatwell, M. Milgate, P. Newman, R. Palgrave, London [u.a.]: Macmillan (1991), 865-870
- [Sha] G. SHAFER: The St. Petersburg Paradox, *Encyclopedia of Statistical Sciences*, hrsg. von S. Kotz, New York [u.a.] : Wiley (1988)
- [Spi] O. SPIESS: (K9) Zur Vorgeschichte des Petersburg Problems, *Die Werke von Jakob Bernoulli, Bd. 3*, Basel [u.a.]: Birkhäuser (1975), 557-567
- [Sze] G.J. SZÉKELY: *Paradoxa — klassische und neue Überraschungen aus Wahrscheinlichkeitsrechnung und mathematischer Statistik*, aus dem Ungarischen übersetzt und bearbeitet von E. Vas, U. Leitner, Thun [u.a.] : Deutsch (1990)
- [SzRi1] G.J. SZÉKELY, D.ST.P. RICHARDS : The St. Petersburg Paradox and the Crash of High-Tech Stocks in 2000, *The American Statistician* **58-3** (2004), 225-231
- [SzRi2] G.J. SZÉKELY, D.ST.P. RICHARDS : Steadfast with the St. Petersburg Paradox to Quantify Irrational Exuberance, *The American Statistician* **59-3** (2005), 235-239
- [Tod] I. TODHUNTER: *A History of the Mathematical Theory of Probability*, New York [u.a.]: Chelsea (1965)
- [Viv] R.V. VIVIAN: Solving Daniel Bernoulli's St. Petersburg paradox : The Paradox which Is Not and Never Was, *South African journal of economic and management sciences* **6-2** (2003), 331-345
- [Whi] W.A. WHITWORTH: *Choice And Chance*, London [u.a.]: Cambridge (1870)
- [You] M.S. YOUNG: Inflation, Valuation, and the Petersburg Paradox, *Appraisal journal* **48-1** (1990), 85-94

**Internetquellen**

- [Web1] <http://www.mathematik.com/Petersburg/Petersburg.html>, 15.03.2010
- [Web2] <http://www.phillex.de/petersbg.htm>, 15.03.2010
- [Web3] <http://www.baseball-fan.de>, 22.01.2010
- [Web4] <http://www.baseball-reference.com/players/h/harreke01.shtml>, 22.01.2010
- [Web5] <http://www.Markt-Daten.de>, 22.01.2010

# Eidesstattliche Erklärung

Ich versichere hiermit, die Diplomarbeit selbstständig und lediglich unter Benutzung der angegebenen Quellen und Hilfsmittel verfasst zu haben.

Weiterhin versichere ich, dass die vorliegende Arbeit noch keiner anderen Fakultät oder Universität zur Prüfung vorgelegt worden ist.

Potsdam, der 12.04.2010

# Danksagung

Die vorliegende Arbeit entstand am Lehrstuhl für Wahrscheinlichkeitstheorie des Institutes für Mathematik an der Universität Potsdam unter der Leitung von Prof. Dr. Roelly. Ich möchte mich an dieser Stelle recht herzlich bei allen Personen bedanken, die mich bei der Erstellung meiner Diplomarbeit unterstützt haben.

Besonderer Dank gilt Frau Prof. Dr. Roelly, die mir die Möglichkeit gab, die Diplomarbeit in ihrer Arbeitsgruppe anzufertigen. Die freundliche Atmosphäre, die umfangreiche Betreuung und Unterstützung sowie die zahlreichen Ideen und Ratschläge haben entscheidende Impulse gegeben.

Bei Nick Dimler möchte ich mich für die fachlichen Diskussionen und hilfreichen Anmerkungen aus wirtschaftswissenschaftlicher Sicht bedanken.

Für die zügige grammatikalische und syntaktische Durchsicht bedanke ich mich bei Imke Driemel.

Nicht zuletzt möchte ich meiner Familie danken, die mich während meines Studiums unterstützt und mir den Rücken gestärkt hat.