

Astrophysikalisches Institut Potsdam  
Magnetohydrodynamik

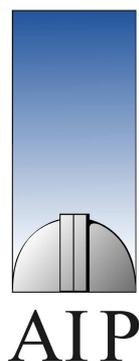
# Box-Simulationen von rotierender Magnetokonvektion im flüssigen Erdkern

Dissertation  
zur Erlangung des akademischen Grades  
Doktor der Naturwissenschaften  
(Dr. rer. nat.)  
in der Wissenschaftsdisziplin Astrophysik

eingereicht an der  
Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät  
der Universität Potsdam



von  
André Giesecke



Potsdam, im Dezember 2006



This work is licensed under a  
Creative Commons Attribution-Noncommercial-No Derivative Works 2.0 Germany  
License.

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Wissenschaftliches Umfeld</b>	<b>1</b>
1.1	Beobachtungen des Erdmagnetfelds	1
1.1.1	Grundlagen	1
1.1.2	Aufbau der Erde	2
1.1.3	Archäo- und paläomagnetische Messungen	5
1.1.4	Satellitenbeobachtungen und direkte Messungen	6
1.2	Eigenschaften des Erdmagnetfelds	7
1.2.1	Dipol-Dominanz	7
1.2.2	Reversals	8
1.2.3	Säkularvariation	10
1.2.4	Toroidale und poloidale Magnetfeldkomponenten	11
1.3	Der Dynamo-Prozess im flüssigen Erdkern	12
1.4	Anisotropie der turbulenten Strömungen im flüssigen Erdkern	15
1.5	Der $\alpha$ -Effekt im Geodynamo	17
1.6	Untersuchungsgegenstand	20
<b>2</b>	<b>Lokale Simulationen von rotierender Magnetokonvektion</b>	<b>21</b>
2.1	Das Box-Modell	21
2.1.1	Geometrie	21
2.1.2	Gleichungen	23
2.1.3	Randbedingungen	25
2.1.4	Anfangszustand	25
2.1.5	Eingabeparameter und Einheiten	27
2.1.6	Bestimmung mittlerer Größen	28
2.2	Energiebilanz und Entropie	30
2.2.1	Heiz- und Kühlrate	30
2.2.2	Dissipationszeit	32
2.2.3	Entropie	34
2.3	Die Struktur rotierender Magnetokonvektion	35
2.3.1	Konvektionszellen und Skalenlängen	35
2.3.2	Korrelationslänge	37
2.3.3	Anisotropie in der Turbulenz-Intensität	40
2.4	Turbulenter Wärmetransport	42
2.4.1	Quasi-lineare Beschreibung des turbulenten Wärmetransports	42
2.4.2	Wärmetransport im schwach stratifizierten Medium	44
2.4.3	Vertikaler Wärmefluss und Turbulenz-Intensität	45
2.4.4	Horizontale Wärmeflüsse und Reynolds-Stresses	48
2.5	Berechnung der $\alpha$ -Koeffizienten	51
2.5.1	Allgemeine Grundlagen des $\alpha$ -Effekts	51

2.5.2	Mittlere Magnetfelder, kinetische Helizität und die $\alpha$ -Koeffizienten	53
2.5.3	Abhängigkeit des $\alpha$ -Effektes von der Rotationsgeschwindigkeit	63
2.5.4	Magnitude des $\alpha$ -Effektes für den Geodynamo	67
<b>3</b>	<b>Axialsymmetrisches <math>\alpha^2</math>-Modell mit irregulären Dipol-Umkehrungen</b>	<b>69</b>
3.1	Mean-Field-Theorie des Geodynamos	69
3.1.1	Gleichungen und Grundbegriffe	69
3.1.2	Mean-Field Modelle des Geodynamos	71
3.1.3	Der Dynamo-Prozess in 3D-MHD Simulationen	72
3.2	Modell eines oszillierenden $\alpha^2$ -Dynamos	73
3.2.1	Feldverhalten während eines Reversals	77
3.2.2	Oszillationsperiode und kritische Dynamo-Zahl	78
3.2.3	Einfluss der Größe des inneren Kerns	80
3.3	Irreguläre Reversals mit fluktuierendem $\alpha$ -Effekt	81
3.4	Nicht-axialsymmetrische Moden	86
<b>4</b>	<b>Schlussfolgerungen</b>	<b>89</b>
<b>A</b>	<b>Der Code NIRVANA</b>	<b>95</b>
<b>B</b>	<b>Einfluss numerischer Parameter</b>	<b>99</b>
B.1	Randbedingungen	99
B.1.1	Magnetfeld	99
B.1.2	Geschwindigkeit	101
B.2	Auflösung	101
<b>C</b>	<b><math>\alpha</math>-Profile</b>	<b>103</b>
C.1	$\alpha_{xx}$ , $\alpha_{yx}$ , $\alpha_{yy}$ und $\alpha_{xy}$ bei $\theta = 0^\circ$	103
C.2	$\alpha_{xx}$ , $\alpha_{yx}$ , $\alpha_{yy}$ und $\alpha_{xy}$ bei $\theta = 45^\circ$	105
C.3	$\alpha_{xz}$ , $\alpha_{zz}$ und $\alpha_{zz}$ bei $\theta = 0^\circ$	106
C.4	$\alpha_{xz}$ , $\alpha_{zz}$ und $\alpha_{zz}$ bei $\theta = 45^\circ$	107
	<b>Danksagung</b>	<b>109</b>
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>111</b>

# Kapitel 1

## Wissenschaftliches Umfeld

### 1.1 Beobachtungen des Erdmagnetfelds

#### 1.1.1 Grundlagen

Schriftliche Quellen aus dem Jahr 600 v.Chr. belegen, dass bereits die Griechen sogenannte *Leitsteine* kannten, die magnetische Eigenschaften aufwiesen<sup>1</sup>. Der Name Magnet basiert auf dem Namen des Fundorts *Magnesia*, einer Gegend im heutigen Kleinasien. Die Chinesen wussten vermutlich schon 3000 v. Chr. von der Existenz eines Erdmagnetfelds. Um das Jahr 1000 n. Chr. verwendeten sie einen schwimmend gelagerten Magneten, der sich in Nord-Süd Richtung ausrichtete und als Hilfe bei der Navigation angewandt wurde. Um etwa 1190 n. Chr. erreichte der daraus entwickelte Kompass über Arabien den europäischen Kontinent. Obwohl es in der damaligen Zeit keine Erklärung für die Nord-Süd-Ausrichtung eines Magneten gab, war der Kompass ein verbreitetes Instrument zur Navigation. Im 15. Jahrhundert – zu Zeiten von Columbus – begnügte man sich mit der Vermutung, dass eine Kompassnadel vom Polarstern angezogen wurde.

Die erste rationale Erklärung für die Funktionsweise eines Kompass findet sich im Jahr 1600 bei William Gilbert in seinem Werk „De Magnete“. Er stellte die These auf, die Erde sei ein magnetisches Objekt (Gilbert, 1600). Die Abweichung einer Magnetnadel von der exakten Nordrichtung (Deklination) erklärte er durch die Anziehungskraft der Kontinente aufgrund der Beobachtung, dass diese Abweichung in Europa in östlicher Richtung erfolgt, während sie nahe des amerikanischen Kontinents westlich gerichtet war. 1635 entdeckte Henry Gellibrand die Zeitabhängigkeit der Deklination, die sogenannte Säkularvariation (Gellibrand, 1635).

Eine systematische Aufzeichnung des Erdmagnetfelds existiert erst seit etwa dem Jahr 1836 als Carl Friedrich Gauss und Wilhelm Weber auf Anregung von Alexander von Humboldt den Göttinger Erdmagnetischen Verein gründeten. Hauptzweck dieses weltweiten Zusammenschluss von Wissenschaftlern, die auf dem Gebiet des Erdmagnetismus arbeiteten, war die Organisation und Durchführung von global verteilten Messungen des

---

<sup>1</sup>Aristoteles berichtet in seiner Schrift “De Anima“, dass Thales von Millet einem Magneten, der Eisen anzieht, eine Seele zuschrieb.

Erdmagnetfelds nach einheitlichen Standards. Hierzu entwickelten Gauss und Weber ein Messinstrument und die zugehörigen Methoden, um Deklination, Inklination und Intensität des Erdmagnetfelds zu bestimmen (siehe z.B. [Gauss 1833](#)). Anhand der gewonnenen Daten konnte Gauss nachweisen, dass das Magnetfeld an der Erdoberfläche im Wesentlichen von Quellen innerhalb der Erde hervorgerufen wird. Unter der Annahme, dass im oberflächennahen Außenraum keine Ströme fließen, kann das Magnetfeld an der Erdoberfläche als Gradient eines skalaren Potentials beschrieben werden:

$$\mathbf{j} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{B} = 0 \iff \mathbf{B} = -\nabla \Psi. \quad (1.1)$$

Das Potential  $\Psi$  lässt sich folgendermaßen zerlegen:

$$\begin{aligned} \Psi = R_E \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=0}^l P_l^m(\cos \theta) & \left[ \left( \frac{R_E}{r} \right)^{l+1} \left( g_l^{m,\text{int}} \cos m\varphi + h_l^{m,\text{int}} \sin m\varphi \right) \right. \\ & \left. + \left( \frac{r}{R_E} \right)^l \left( g_l^{m,\text{ext}} \cos m\varphi + h_l^{m,\text{ext}} \sin m\varphi \right) \right]. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Hierbei bezeichnet  $R_E$  den Radius der Erde,  $r$  den Abstand zur Quelle,  $P_l^m$  die assoziierten Legendre-Polynome<sup>2</sup>,  $\theta$  die Latitude und  $\varphi$  die Longitude. Anhand der Bestimmung der internen und externen Koeffizienten  $g_l^{m,\text{int/ext}}$  und  $h_l^{m,\text{int/ext}}$  (Gauss-Koeffizienten) wies Gauss 1838 nach, dass das Magnetfeld überwiegend im Innern der Erde produziert wird ( $g_l^{m,\text{int}}, h_l^{m,\text{int}} \gg g_l^{m,\text{ext}}, h_l^{m,\text{ext}}$ ). Heute weiß man, dass sich etwa 98-99% der Quellen des an der Erdoberfläche gemessenen Magnetfeldes tief im Erdinnern befinden. Daher bezeichnet man den Anteil des Magnetfeldes, der auf diesen Quellen beruht auch als Hauptfeld.

Die Grundlagen der Theorie des Erdmagnetfelds wurden Anfang des 20. Jahrhunderts von Joseph Larmor geschaffen. Er erklärte die Existenz der Magnetfelder rotierender sphärischer Körper durch einen Dynamo, der durch konvektive Strömungen einer leitenden Flüssigkeit innerhalb des Körpers angetrieben wird ([Larmor, 1919](#)). Nahezu alle modernen Theorien zur Erklärung der Magnetfelder stellarer und planetarer Objekte beruhen auf diesem Ansatz. Es hat sich herausgestellt, dass sowohl turbulente als auch laminare Strömungen eines elektrisch leitenden Mediums prinzipiell in der Lage sind, durch Induktion Magnetfelder zu produzieren.

## 1.1.2 Aufbau der Erde

Die Erde ist ein nahezu sphärischer Körper mit einem mittleren Radius von 6366km. Sie rotiert mit einer Winkelgeschwindigkeit von  $\Omega = 7.27 \cdot 10^{-5} \text{s}^{-1}$ . Die wesentlichen Abweichungen von einer idealen Kugelform werden von der durch die Rotation hervorgerufenen

<sup>2</sup>Die assoziierten Legendre Polynome  $P_l^m(x)$  sind Lösungen der Differentialgleichung  $(1-x^2)y'' - 2xy' + (l(l+1) - m^2(1-x^2)^{-1})y = 0$ . Sie lassen sich aus folgender Rekursionsformel berechnen:  $(l-m)P_l^m(x) = x(2l-1)P_{l-1}^m(x) - (l+m-1)P_{l-2}^m(x)$ . Für die niedrigsten Polynome gilt:  $P_0^0 = 1$ ,  $P_1^0 = x$ ,  $P_1^1 = -(1-x^2)^{1/2}$ ,  $P_2^0 = 1/2(3x^2 - 1)$ , ...

Zentrifugalkraft verursacht. Die genaue Form der Erde ist daher die eines Ellipsoids mit einem äquatorialen Radius von 6399.5km, der um 43km größer als der Radius in Pol-Richtung ist. Diese Abweichung von einer idealen Kugelform führt zu einer Präzession der Rotationsachse mit einer Periode von etwa  $2.6 \times 10^4$  Jahren um eine senkrecht zur Ekliptik orientierten Achse.

Die wesentlichen physikalischen Eigenschaften im Erdinnern ergeben sich vor allem aus seismologischen Untersuchungen der Ausbreitung von Schallwellen durch die Erde. Die Ausbreitungsgeschwindigkeit und Reflexionseigenschaften der Schallwellen an den Diskontinuitäten, die einzelne Schichten innerhalb der Erde voneinander separieren, erlauben Rückschlüsse auf thermodynamische Eigenschaften wie Druck, Dichte oder Temperatur. Der radiale Verlauf dieser Größen wird durch einen thermodynamischen Referenzzustand beschrieben, der im sogenannten *Preliminary Reference Earth Model* (PREM) zusammengefasst ist ([Dziewonski & Anderson, 1981](#)).

Der Aufbau der Erde lässt sich grob durch ein zwiebelähnliches Modell beschreiben. Im Innern besteht die Erde aus einem festen sphärischen Kern (*solid inner core*, SIC), der von drei ineinander verschachtelten Kugelschalen umgeben ist (siehe Abb. 1.1). Der innere Kern wird abgeschlossen von der inneren Kerngrenze (*inner core boundary*, ICB) bei einem Radius von  $R_{ICB} \approx 1221.5\text{km}$  und besteht im Wesentlichen aus Eisen. Umgeben wird der innere Kern von einer flüssigen Kugelschale, dem äußeren Kern (*fluid outer core*, FOC). Neben der Hauptkomponente Eisen mit einem Massenanteil von etwa 90% sind weitere Bestandteile des inneren und äußeren Erdkerns Silizium, Nickel, Sauerstoff und Schwefel ([Poirier, 1994](#)). Verantwortlich für die Produktion des Erdmagnetfelds und Gegenstand der in der vorliegenden Arbeit präsentierten Untersuchungen sind die Strömungen innerhalb des flüssigen Bereiches. Abgeschlossen wird der äußere Erdkern von der Kern-Mantel-Grenze (*core mantle boundary*, CMB) bei  $R_{CMB} \approx 3480\text{km}$ . Diese Grenze bildet den Übergang vom leitenden Kern zu einer nicht bzw. schlecht leitenden Hülle, deren überwiegender Teil vom Mantel gebildet wird. Einen Überblick über die Werte der wichtigsten Kenngrößen am Übergang zum festen inneren Kern und an der Kern-Mantel-Grenze gibt Tabelle 1.1.

Bezeichnung	Symbol	$R_{ICB}$	$R_{CMB}$
Dichte	$\rho$	$12.166 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$	$9.9 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$
Druck	$p$	328.85 GPa	135.75 GPa
Temperatur	$T$	5300 K	4000 K
Schallgeschwindigkeit	$c_S$	$10.356 \times 10^3 \text{ m/s}$	$8.065 \times 10^3 \text{ m/s}$

Tabelle 1.1: Thermodynamische Kenngrößen an der Grenze zum inneren Kern und an der Kern-Mantel-Grenze. Entnommen aus [Roberts & Glatzmaier \(2000\)](#).

Der feste innere Kern der Erde wächst auf sehr langen geologischen Zeitskalen. Durch die spezifischen thermodynamischen Bedingungen im Erdinnern friert Eisen am Übergang zum inneren Kern, obwohl dort die Temperatur höher als an der oberen Begrenzung ist. Ursache ist die Druck-Abhängigkeit des Schmelzpunktes von Eisen. Der Schmelzpunkt

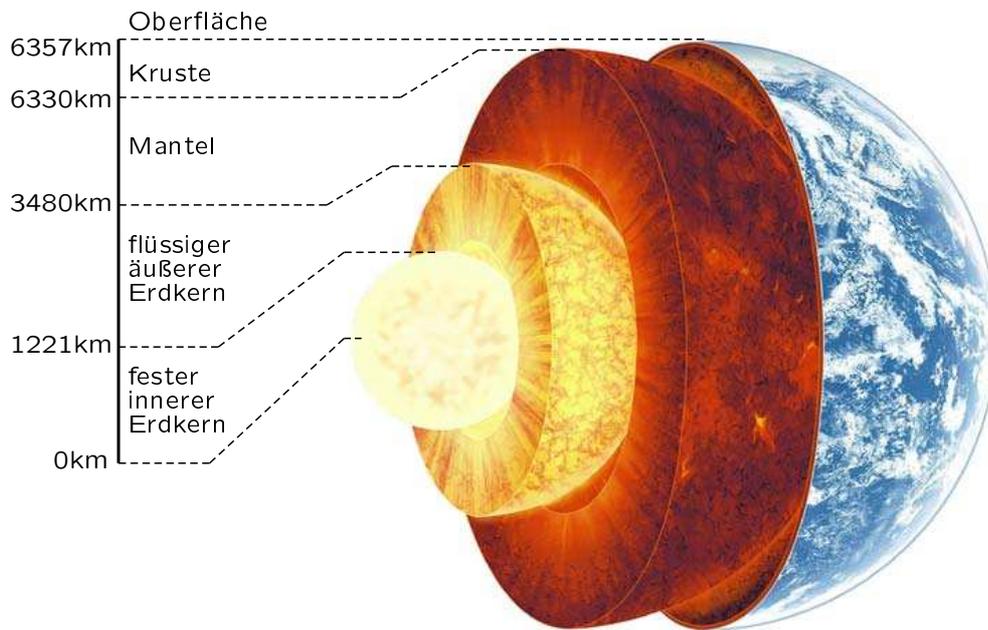


Abbildung 1.1: Schema des inneren Aufbaus der Erde aus festem inneren Kern, flüssigem äußerem Kern, Mantel und Kruste (von innen nach außen).

sinkt mit zunehmenden Druck schneller als die Temperatur zum Mittelpunkt der Erde hin zunimmt. Das Entstehen eines festen Kerns vor einigen Milliarden Jahren hat zu wesentlichen Änderungen der physikalischen Bedingungen und bei den Prozessen geführt, die die Strömung im flüssigen Erdkern dominieren (siehe Abschnitt 1.3).

Der Mantel besteht überwiegend aus schwach leitenden silikatischen Mineralien und wird nach oben begrenzt durch eine dünne Kruste, deren chemische Zusammensetzung mit der des Mantels vergleichbar ist. Die Kruste bildet den Abschluss der Erde nach außen und ist im Mittel etwa 30km dick. Die Unterschiede zwischen Mantel und Kruste liegen in den mechanischen Eigenschaften und der Häufigkeit der einzelnen Elemente. Im Vergleich zur Kruste weist der Mantel einen höheren Anteil an Eisen und Magnesium auf, während Silizium und Aluminium in der Kruste weitaus häufiger auftreten. Unterhalb von etwa 50 bis 100km – diesen Bereich aus Kruste und oberster Mantelschicht nennt man auch Lithosphäre – wird das Mantelgestein aufgrund der Temperatur- und Druckverhältnisse plastisch verformbar. Der Mantel konvektiert auf extrem langen, geologischen Zeitskalen und treibt so die Kontinentaldrift an.

### 1.1.3 Archäo- und paläomagnetische Messungen

Direkte Messungen des Erdmagnetfelds existieren erst seit etwa dem Jahr 1600 n.Chr. Reguläre Messungen aller Komponenten des Magnetfelds (Deklination, Inklination und -intensität) durch Observatorien existieren seit etwa Anfang des 19. Jahrhunderts. Für weiter zurückreichende Daten ist man auf indirekte Beobachtungen angewiesen. Indirekte Daten durch paläomagnetische oder archäomagnetische Untersuchungen beruhen auf der Messung der natürlichen permanenten Magnetisierung von Gestein oder alten archäologischen Objekten.

Beim Abkühlen von flüssiger Magma unter die Curie-Temperatur werden ferromagnetische Stoffe in Richtung des umgebenden Magnetfeldes magnetisiert (thermoremanenter Magnetismus). Remanente Magnetisierung entsteht auch während Sedimentierungsvorgängen am Ozeangrund (Detritus-Remanenz oder Sedimentations-Remanenz). Während des langsamen Absinkens im Ozean werden kleine ferromagnetische Kristalle entsprechend des Erdmagnetfelds ausgerichtet und die Orientierung im Schlamm fixiert.

Archäomagnetische Daten sind verfügbar für einen Zeitraum von etwa  $2 \times 10^4$  Jahren, wobei die Genauigkeit der Datierungen etwa 100 Jahre beträgt. Solch eine exakte Zeitbestimmung ist bei paläomagnetischen Messungen leider nicht erreichbar. Für paläomagnetische Daten gibt es im Wesentlichen zwei unterschiedliche Quellen, vulkanisches Gestein (Lava) und Sedimentablagerungen. Die Bestimmung der Magnetisierung aus vulkanischer Lava ist gut erforscht und relativ einfach durchzuführen. Eine exakte Datierung ist jedoch schwierig, und da einzelne Vulkanausbrüche sehr unregelmäßig erfolgen, gibt es relativ wenige kontinuierliche Datensätze. Selbst in Gebieten, wie zum Beispiel auf Hawaii oder auf Island, wo aufgrund des Vulkanismus viele erstarrte Lavaströme vorzufinden sind, gibt es keine Möglichkeit, die Abstände zwischen den einzelnen Eruptionen genau zu bestimmen. Daher werden paläomagnetische Daten aus vulkanischem Gestein im Wesentlichen dazu benutzt, um statistische Eigenschaften des Erdmagnetfelds zu gewinnen. Abgesehen von den Problemen bei der Datierung liefern die Daten aus vulkanischem Gestein recht genaue Daten über die Feldrichtung und -stärke (Kono et al., 2000).

Kontinuierliche Datensätze lassen sich aus Sedimentablagerungen gewinnen, die anhand von Bohrkernen, zum Beispiel aus dem *Ocean Drilling Programm*<sup>3</sup> gewonnen wurden. Die einzelnen Schichten der Bohrkernkerne können mit unterschiedlichen, voneinander unabhängigen Methoden recht genau datiert werden. Leider ist der Vorgang, durch den Sedimente eine permanente Magnetisierung erfahren, nicht eindeutig. Äußere Einflüsse biologischer, klimatologischer oder chemischer Natur spielen eine wichtige Rolle für die Intensität der Magnetisierung. Eine Veränderung der Magnetisierung des Sedimentgesteins ist daher nicht zwangsläufig mit der Änderung des Erdmagnetfelds verbunden, sondern kann seine Ursache auch in einem Wechsel der äußeren Bedingungen haben (siehe z.B. Tauxe, 1993).

---

<sup>3</sup>Das *Ocean Drilling Program* (ODP) ist eine internationale Kooperation zur Untersuchung der Zusammensetzung und Struktur des Ozeanbodens. Seit 1985 wurden innerhalb von über 100 Expeditionen mehr als 2000 Bohrkernkerne aus allen Ozeanen der Erde gewonnen. Seit 2004 läuft das Projekt unter dem Namen *Integrated Ocean Drilling Program* (IODP).

### 1.1.4 Satellitenbeobachtungen und direkte Messungen

Heutzutage ist es mittels Satelliten möglich, das Magnetfeld an der Erdoberfläche kontinuierlich aufzuzeichnen. 1979 wurde der Satellit MAGSAT gestartet, der allerdings nur für sechs Monate im Einsatz war. Seit 1999 bzw. 2000 sind die Satelliten Ørsted und

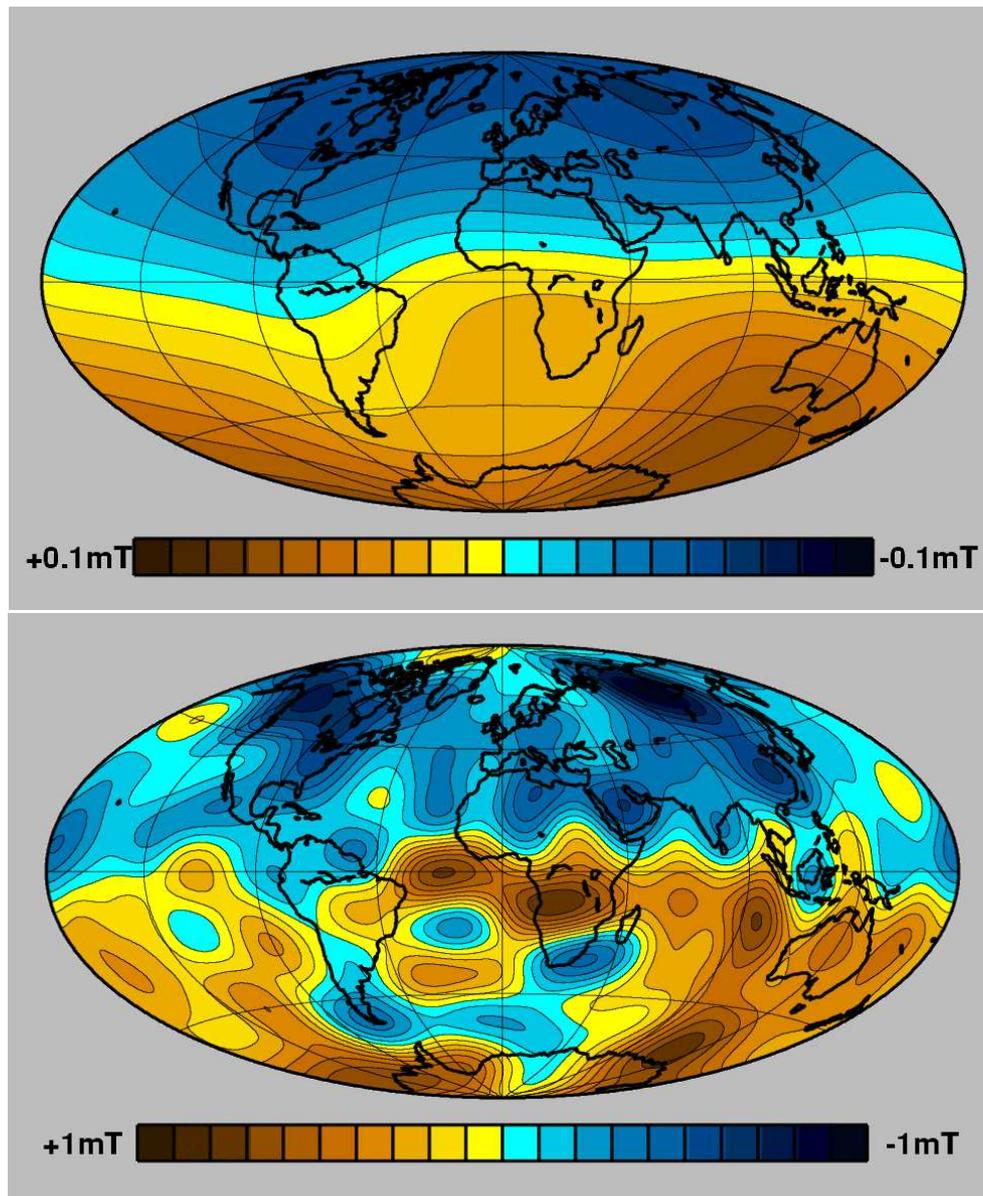


Abbildung 1.2: Oben: Modell des radialen großskaligen Erdmagnetfelds, wie es aus Satellitenbeobachtungen von CHAMP und Ørstedt gewonnen wurde. Unten: Radiale Komponente des Erdmagnetfelds extrapoliert auf die Kern-Mantel-Grenze. Quelle: Geo-Forschungszentrum Potsdam, <http://www.gfz-potsdam.de/pb2/pb23/index.html>

CHAMP im Orbit, auf deren Daten POMME, das *Potsdam Magnetic Model of the Earth*, basiert (siehe z.B. Maus et al. 2006). POMME stellt eine approximiertere Darstellung des

Erdmagnetfelds vom oberen Mantel bis zu einer Höhe von einigen tausend Kilometern über der Erdoberfläche dar. Das interne Hauptfeld wird durch Gauss-Koeffizienten bis zum 15. Grad beschrieben. Abbildung 1.2 zeigt die radiale Komponente des Erdmagnetfelds aus Satellitendaten an der Erdoberfläche (obere Grafik) und die Extrapolation hinunter an die Kern-Mantel-Grenze (untere Grafik) anhand der Zerlegung aus Gleichung (1.2). Das Erdmagnetfeld an der Kern-Mantel-Grenze ist im Vergleich zu dem Feld an der Oberfläche deutlich stärker und weist eine weitaus detailliertere Struktur auf. Da die höheren Moden mit zunehmender Entfernung von der Quelle  $\propto r^{-l-1}$  abnehmen, ist der Anteil des Feldes mit kürzeren Wellenlängen mit zunehmender Entfernung von der Quelle geringer, so dass an der Erdoberfläche der Dipol-Anteil dominiert.

## 1.2 Eigenschaften des Erdmagnetfelds

### 1.2.1 Dipol-Dominanz

Das Magnetfeld, das man an der Erdoberfläche beobachtet, lässt sich in erster Näherung gut durch einen axialen Dipol im Mittelpunkt der Erde beschreiben, der nahezu parallel zur Rotationsachse ausgerichtet ist. Etwa 80-90% der magnetischen Energie rührt von der Dipolkomponente her (Langel & Estes, 1982). Dies zeigt sich in Abb. 1.3, die das mittlere quadratische Magnetfeld in Abhängigkeit der Wellenzahl wiedergibt. Bis zu Wellenlängen von etwa 3000km (entspricht einer Wellenzahl von  $l = 15$ ) nimmt die Energie der einzelnen Moden stark ab, während der Anteil bei kürzeren Wellenlängen nahezu konstant ist. Der langwellige Anteil ist konsistent mit einer Feldquelle an der Kern-Mantel-Grenze in etwa 2900km Tiefe. Das Spektrum der kürzeren Wellenlängen ist eine Überlagerung des im Kern erzeugten Hauptfelds und einem Feld, das durch permanent magnetisiertes Gestein in der Lithosphäre verursacht wird. Dieses Lithosphärenfeld überdeckt die Anteile des Hauptfelds mit  $l > 15$ , so dass die kleinstmöglichen Strukturen des Erdmagnetfelds, die an der Erdoberfläche beobachtet werden können und die ihren Ursprung im flüssigen Teil des Erdkerns haben, auf eine Größe von etwa 3000km beschränkt sind.

Das Erdmagnetfeld existiert seit über  $3 \times 10^9$  Jahre mit nahezu gleicher Stärke. Abgesehen von Zeitintervallen während einer Dipolumkehr variierte das Dipolmoment maximal um einen Faktor 3 (Courillot & Le Mouel 1988 Kono & Tanaka 1995, Merrill et al. 1996). Die deutlichste Abweichung von einem perfekten axialsymmetrischen Dipol ergibt sich aus der Neigung der Dipol-Achse in Bezug auf die Rotationsachse der Erde. Gegenwärtig beträgt diese Abweichung  $\sim 11^\circ$ . Die Lage der Dipolachse und damit die Lage der magnetischen Pole unterliegen irregulären zeitlichen Veränderungen. In den vergangenen 100 Jahren bewegte sich der magnetische Nordpol etwa 1100km von Kanada in Richtung Sibirien. Während der letzten 2000 Jahre gab es mindestens drei solcher schnellen (d.h. innerhalb einer Zeitspanne von weniger als 100 Jahren) Verschiebungen des geomagnetischen Nordpols, die sehr viel größer als vergleichbare Änderungen in den direkten Messungen der vergangenen 400 Jahre sind (Stoner et al., 2005). Die abrupten Verschiebungen der Position des geomagnetischen Nordpols fallen zeitlich recht gut mit den letzten drei archäomagnetisch identifizierten *Jerks* zusammen. *Jerks* sind plötzliche

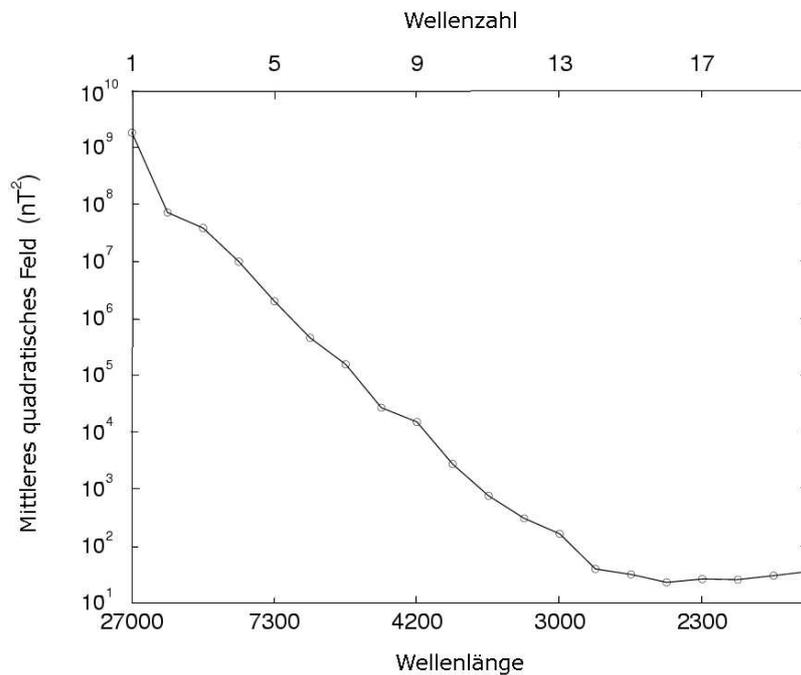


Abbildung 1.3: Mittleres quadratisches Feld an der Erdoberfläche in Abhängigkeit der Wellenlänge. Der langwellige Anteil des Spektrums ist konsistent mit einer Quelle an der CMB (in einer Tiefe von 2900km). Das Spektrum bei kürzeren Wellenlängen ist eine Kombination aus dem Hauptfeld und einem Feld, das durch permanent magnetisiertes Gestein in der Lithosphäre verursacht wird. Quelle: Geoforschungszentrum Potsdam, <http://www.gfz-potsdam.de/pb2/pb23/index.html>

Änderungen in der zweiten Ableitung des Magnetfeldes nach der Zeit, die global vorkommen und auf Zeitskalen von etwa einem Jahr ablaufen (Gallet et al., 2003). Über längere Zeitskalen gemittelt ( $\gtrsim 10^4$  Jahre) fallen die magnetischen Pole mit den geographischen Polen zusammen (McElhinny, 1973; Merrill et al., 1996; Roberts & Glatzmaier, 2000).

## 1.2.2 Reversals

Die wohl herausragendste Eigenschaft des Erdmagnetfelds sind die unregelmäßigen Polaritätswechsel des Dipol-Anteils. Der Zeitraum zwischen zwei solchen *Reversals* beträgt im Mittel  $5 \times 10^5$  Jahre, wobei ein *Reversal* typischerweise 1000 bis 10000 Jahre benötigt (Bogue & Merrill, 1992). Die genaue Bestimmung der *Reversal*-Dauer ist problematisch, da die Daten in Abhängigkeit von der Latitude unterschiedliche Längen des Umkehrvorgangs liefern. So erhält Clement (2004) für die letzten vier Reversals eine Dauer von 2000 Jahren am Äquator und 10000 Jahren bei  $\theta = 5^\circ$ . Ähnliche Ergebnisse präsentieren Merrill & McFadden (1999), die für das letzte *Reversal*, das vor  $7.9 \times 10^5$  Jahren stattfand, eine Dauer von 2000 bis 8000 Jahren angeben.

Der älteste bekannte Umpolvorgang des Erdmagnetfelds wird auf ein Alter von 3.214 Milliarden Jahren datiert (Layer et al., 1996). Auf geologischen Zeitskalen ( $\sim 10^7 - 10^9$  Jahre) ändert sich die mittlere *Reversal-Rate* (Merrill et al., 1996), wobei es auch sehr lange Zeiträume gibt ( $> 2 \times 10^7$  a), in denen kein einziges *Reversal* stattgefunden hat, sogenannte *Superchrons* (siehe Abb. 1.4). Zwei solcher *Superchrons* sind bekannt, das *Cretaceous Normal Superchron* ( $\sim 118 - 81$ Ma vor unserer Zeit) und das *Permo-Carboniferous Revers Superchron* ( $\sim 312 - 262$ Ma vor unserer Zeit). Die Existenz eines

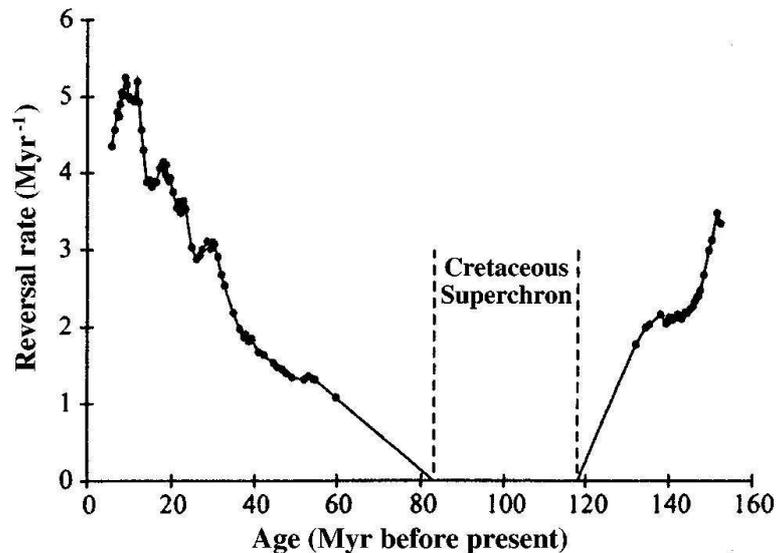


Abbildung 1.4: Mittlere *Reversal-Rate* pro Million Jahre für die vergangenen 160 Millionen Jahre (entnommen aus Merrill et al. 1996).

dritten *Superchrons* in der Zeit von  $\sim 502 - 470$ Ma wird vermutet (Jacobs, 2001). Eine Bestätigung steht allerdings noch aus, da die Datierung von Sedimentablagerungen aufgrund des relativ jungen Alters der verfügbaren Bohrkerns nicht genau genug möglich ist<sup>4</sup>.

Neben sehr langen Zeiträumen ohne *Reversal* existieren auch Polumkehrungen, die unmittelbar hintereinander stattgefunden haben, sogenannte *Cryptochrons*. Diese Ereignisse zeichnen sich dadurch aus, dass die *Reversals* in so kurzer Folge stattfanden, dass zwischen beiden Polaritätszuständen keine Phase mit stabiler Dipolorientierung existiert<sup>5</sup>.

Abbildung 1.5 zeigt die Orientierung des Erdmagnetfelds für die vergangenen 160 Millionen Jahre. Schwarz kennzeichnet eine Dipolausrichtung wie sie heute besteht, Weiß kennzeichnet die entgegengesetzte Ausrichtung. Alle verfügbaren Daten deuten darauf hin, dass sowohl die normale Dipolausrichtung als auch die entgegengesetzte Ausrichtung durch die gleiche Verteilung angepasst werden, so dass die Ausrichtung des Dipols parallel bzw. anti-parallel zur Rotationsachse gleich wahrscheinlich ist (Merrill et al.,

<sup>4</sup>Aufgrund des relativ jungen Alters des Ozeanbodens (jünger als 200 Millionen Jahre) ist die Geschichte der *Reversals* für Zeiträume vor dem Mesozoic (248 Millionen bis 65 Millionen Jahre vor unserer Zeit) nicht besonders gut bekannt. Über länger zurückliegende Zeiträume lassen sich keine zuverlässige Aussagen aus Sedimentablagerungen gewinnen, da der Ozeanboden aus älterer Zeit inzwischen durch

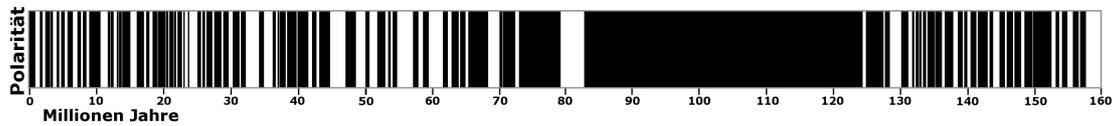


Abbildung 1.5: Reversal-Sequenz der vergangenen 160 Millionen Jahre. Schwarz kennzeichnet die gegenwärtige Dipolausrichtung, Weiß die entgegengesetzte Ausrichtung. Entnommen von [Jacobs \(2001\)](#).

1996). Das Auftreten eines *Reversals* erfolgt chaotisch und ohne erkennbare Periodizität ([Krause & Schmidt, 1988](#)). Die Verteilung der Wahrscheinlichkeit eines *Reversals* innerhalb eines bestimmten Zeitraums wird durch eine Poisson-Verteilung beschrieben, so dass die einzelnen Dipolumkehrungen als voneinander unabhängige Ereignisse betrachtet werden können.

In einem engen Zusammenhang zu den *Reversals* stehen sogenannte Exkursionen, die eine Art abgebrochener *Reversals* darstellen. Bei einem solchen Ereignis scheint ein *Reversal* zu beginnen, aber anstatt eine vollständige Umpolung zu vollziehen, kehrt der Dipol zur ursprünglichen Ausrichtung zurück. Solche Exkursionen finden einige Mal innerhalb eines Zeitraums von  $10^5$  Jahren statt und sind damit etwa 10 mal häufiger als *Reversals* ([McMillan, 2003](#)). Seit der letzten Dipolumkehrung vor etwa  $7.9 \times 10^5$  Jahren hat man 14 solcher Ereignisse registriert ([Lund et al., 1998](#)). Die Identifikation einzelner Ereignisse als eine Exkursion ist oftmals umstritten, da einige Exkursionen kein globales Phänomen darstellen, sondern sich auch als extrem starke Säkularvariation interpretieren lassen.

### 1.2.3 Säkularvariation

Der Vergleich von Magnetfelddaten, die zu unterschiedlichen Zeitpunkten gewonnen wurden, zeigt Unterschiede in den kleinskaligen Strukturen des Feldes an der Kern-Mantel-Grenze. Diese stetige Änderung des Feldes mit der Zeit nennt man Säkularvariationen (*geomagnetic secular variation, GSV*). Insbesondere die Feldflecken in der Nähe des Äquators über dem Atlantik zeigen eine stetige westwärts orientierte Drift. Andere charakteristische Feldflecken sind seit etwa 250 Jahren nahezu stationär ([Bloxham & Jackson, 1989](#)). Dies mag ein Hinweis auf permanente kohärente Strukturen im Erdmagnetfeld sein, doch ist der Zeitraum, den die Beobachtungen überstreichen, mit etwa 400 Jahren sehr gering. Detaillierte Untersuchungen der Säkularvariation finden sich bei [Bloxham et al. \(1989\)](#), [Bloxham & Jackson \(1989\)](#), [Bloxham & Jackson \(1992\)](#), [Jackson et al. \(2000\)](#) und [Jackson et al. \(2003\)](#).

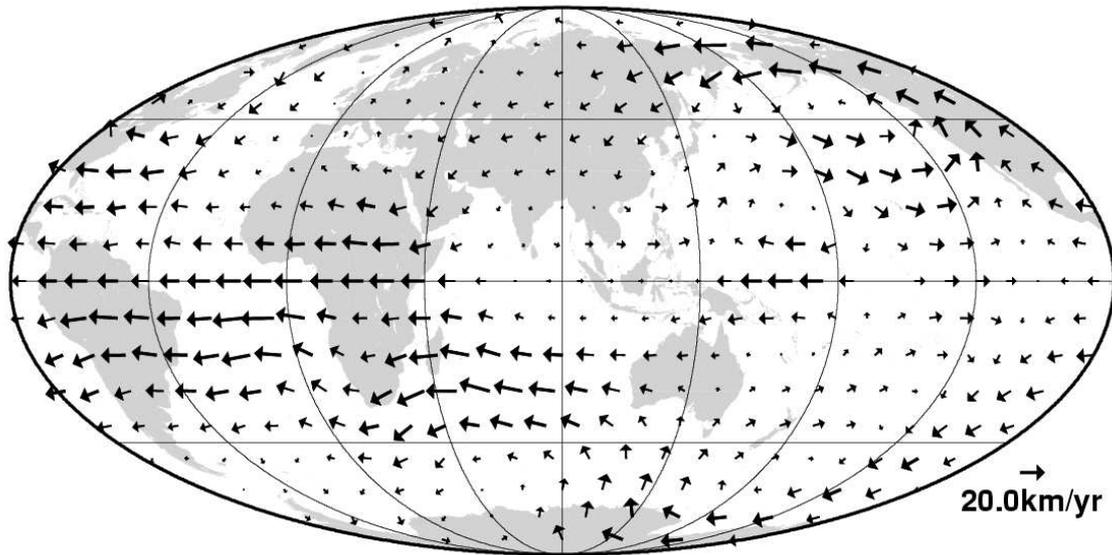
Unter der Voraussetzung, dass das Feld mit der Strömung mitbewegt wird und diffusive Effekte auf Zeitskalen  $\lesssim 100$  Jahren vernachlässigt werden können (*frozen flux assumption*), lassen sich aus den zeitlichen Veränderungen des Magnetfelds Rückschlüsse

---

Subduktion zerstört wurde. Subduktionszonen sind Gebiete, in denen eine Lithosphärenplatte unter eine andere absinkt, z. B. eine ozeanische Platte unter eine Kontinentalplatte.

<sup>5</sup>[Acton et al. \(2006\)](#) bestimmten den Abstand zwischen zwei vor etwa 8.6 Millionen Jahren in kurzer Abfolge auftretenden *Reversals* auf 56000 Jahre.

auf die Struktur der Stömung des flüssigen Eisens an der Kern-Mantel-Grenze ziehen. Hierzu sind allerdings weitere Annahmen nötig. Insbesondere muss vorausgesetzt werden,



*Abbildung 1.6:* Strömung an der Kern-Mantel-Grenze, wie sie aus Änderungen der Magnetfeldstruktur berechnet wurde. Bemerkenswert sind die entgegen dem Uhrzeigersinn orientierten Wirbel unter dem Indischen Ozean und dem nördlichen Pazifik. Eine starke, westwärts orientierte Strömung unter dem Atlantik „verursacht“ eine West-Drift. Andere Gebiete zeigen weitaus schwächere und teilweise auch ostwärts orientierte Strömungen. Quelle: Geoforschungszentrum Potsdam, <http://www.gfz-potsdam.de/pb2/pb23/index.html>

dass es sich um eine großskalige Strömung handelt. Abbildung 1.6 zeigt ein Modell der Strömung an der Kern-Mantel-Grenze, berechnet aus der Säkularvariation des Erdmagnetfeldes aus den Daten des Ørsted-Satellits. Die typische Strömungsgeschwindigkeit beträgt etwa  $20\text{km/a}$  ( $\sim 5 \times 10^{-4}\text{m/s}$ ) und üblicherweise wird angenommen, dass dies auch in etwa der typischen turbulenten Geschwindigkeit der konvektiv getriebenen Strömungen im flüssigen Erdkern entspricht. Inwieweit diese Annahme zutrifft, ist unbekannt.

#### 1.2.4 Toroidale und poloidale Magnetfeldkomponenten

Aus den Beobachtungen lässt sich auf eine poloidale Feldkomponente im Innern des flüssigen Erdkerns von etwa  $B_p \approx 10^{-3}\text{T}$  schließen. Aufgrund der isolierenden Wirkung des Mantels ist eine Beobachtung der toroidalen Feldkomponente nicht möglich, so dass die gesamte Feldstärke im Innern der Erde unbekannt ist. Frühere Abschätzungen der toroidalen Komponente variierten mit  $B_t = 5 \cdot 10^{-4} \dots 10^{-1}\text{T}$  über mehr als zwei Größenordnungen (Busse, 1978). Durch Extrapolation der Messergebnisse von elektrischen Gleichstrom-Potentialen im oberen Mantel haben Levy & Pearce (1991) eine vergleichbare Magnitude von poloidalem und toroidalem Feld an der Kern-Mantel-Grenze bestimmt. Sie schließen allerdings explizit nicht aus, dass die toroidale Komponente innerhalb des

flüssigen Erdkerns deutlich größer ist als die (beobachtbare) poloidale Komponente. Ein dominantes toroidales Feld aufgrund von differentieller Rotation (sog.  $\alpha\Omega$ -Dynamo, siehe Kap. 3.1) wird in der Literatur von der überwiegenden Anzahl der Autoren favorisiert (Fearn, 1998; Roberts & Glatzmaier, 2000; Kono & Roberts, 2002). Allerdings beobachten Christensen & Aubert (2006) in aktuelleren Untersuchungen, die nahezu den vollständigen gegenwärtig erreichbaren Parameterbereich beinhalten, nur geringe differentielle Rotation und vergleichbare Feldstärken von toroidaler und poloidaler Komponente und interpretieren ihre Lösungen daher durchweg als  $\alpha^2$ -Dynamos.

Bezeichnung	Symbol	Wert
radiales Magnetfeld	$B_r$	$10^{-4} \dots 10^{-3} \text{T}$
toroidales Magnetfeld	$B_t$	$5 \times 10^{-4} \dots 10^{-1} \text{T}$
typ. Geschwindigkeit	$u_{\text{rms}}$	$5 \times 10^{-4} \text{m/s}$
Rotationsgeschwindigkeit	$\Omega$	$7.27 \times 10^{-5} \text{s}^{-1}$
Wärmeleitfähigkeit	$\kappa$	$40 - 50 \text{Wm}^{-1}\text{K}^{-1}$
kinematische Viskosität	$\nu$	$3 \times 10^{-6} \text{m}^2/\text{s}$
thermische Diffusivität	$\chi$	$8 \times 10^{-6} \text{m}^2/\text{s}$
magnetische Diffusivität	$\eta$	$2 \text{m}^2/\text{s}$

Tabelle 1.2: Typische Werte für Feldstärke, turbulente Geschwindigkeit und (molekulare) Diffusivitäten. Die Werte der diffusiven Parameter wurden den Arbeiten von Poirier (1988), Secco & Schloessin (1989) und Braginsky & Roberts (1995) entnommen.

Typische Werte der diskutierten Größen und der diffusiven Parameter, die im Rahmen dieser Arbeit von Bedeutung sind, zeigt Tabelle 1.2. Die Unsicherheiten, besonders der diffusiven Parameter sind allerdings groß. Die daraus und aus Tabelle 1.1 abgeleiteten dimensionslosen Kennzahlen, die die Strömung und das Feld im flüssigen Teil des Erdkerns charakterisieren, finden sich in Tabelle 1.3.

### 1.3 Der Dynamo-Prozess im flüssigen Erdkern

Die obere Grenze für die Zeit, in der ein Magnetfeld zerfällt, das nicht durch einen wie auch immer gearteten Prozess aufrecht erhalten wird, ist die Diffusionszeit oder Ohmsche Zerfallszeit  $\tau_{\text{diff}}$ :

$$\tau_{\text{diff}} = \frac{R_{\text{CMB}}^2}{\eta}. \quad (1.3)$$

Unter Annahme typischer Werte für die Erde ( $R_{\text{CMB}} = 3480 \text{km}$ ,  $\eta \approx 2 \text{m}^2/\text{s}$ ) ergibt sich eine Diffusionszeit von  $2 \times 10^5$  Jahren. Aufgrund des über mehr als  $3 \times 10^9$  Jahren vorhandenen Magnetfelds sowie der Existenz von *Reversals* und Säkularvariation kann das Erdmagnetfeld kein fossiles Feld aus der Entstehungszeit der Erde sein. Ein weiteres Argument liefert der Temperaturverlauf innerhalb der Erde. Bereits in geringer Tiefe ist für typische magnetische Mineralien die Curie-Temperatur ( $T_{\text{Curie}}(\text{Fe}) = 1039 \text{K}$ ), oberhalb der kein permanenter Magnetismus bestehen kann, deutlich überschritten, so dass

Bezeichnung	Symbol	Definition	Wert
Rayleigh-Zahl	Ra	$\frac{\rho c_p \mathcal{L}^4 g}{\kappa \nu T} \left( \frac{\partial T}{\partial z} - \frac{g}{c_p} \right)$	$10^{18}$ (?)
mag. Reynolds-Zahl	Rm	$\frac{U \mathcal{L}}{\eta}$	$\sim 500$
Reynolds-Zahl	Re	$\frac{U \mathcal{L}}{\nu}$	$10^8 - 10^9$
Roberts-Zahl	q	$\frac{\chi}{\eta}$	$\sim 10^{-6}$
Rossby-Zahl	Ro	$\frac{U}{2\Omega \mathcal{L}}$	$\sim 10^{-6}$
Prandtl-Zahl	Pr	$\frac{\nu}{\chi}$	$0.1 - 10$
mag. Prandtl-Zahl	Pm	$\frac{\nu}{\eta}$	$\sim 10^{-6}$
Ekman-Zahl	Ek	$\frac{\nu}{2\Omega \mathcal{L}^2}$	$\sim 10^{-15}$
Elsässer-Zahl	$\Lambda$	$\frac{\mathcal{B}^2}{2\mu_0 \Omega \eta \rho}$	$0.1 - 10$

Table 1.3: Dimensionslose Kenngrößen im flüssigen äußeren Erdkern.  $U$ ,  $\mathcal{B}$  und  $\mathcal{L}$  sind typische Werte für Geschwindigkeit, Magnetfeld und Ausdehnung des Systems.

das Erdmagnetfeld durch einen dauerhaft wirksamen Mechanismus stetig neu erzeugt bzw. aufrecht erhalten werden muss.

Es gibt heutzutage kaum Zweifel, dass das Magnetfeld der Erde durch die Induktionswirkung von Strömungen des elektrisch leitenden flüssigen Eisens im äußeren Erdkern produziert wird. Dabei erfolgt ein Transfer von kinetischer in magnetische Energie, wodurch die dissipativen Ohmschen Verluste ausgeglichen werden (siehe z.B. [Fearn 1998](#)). Diesen Prozess nennt man den Geodynamo. Als Antriebsquelle der Strömungen existieren prinzipiell zwei Möglichkeiten. Eine externe Antriebsquelle beruht auf der Präzession der Erdachse im System Sonne-Erde-Mond ([Malkus, 1968](#)), ein Mechanismus, der bisher wenig berücksichtigt wurde und auch innerhalb dieser Arbeit nicht weiter behandelt wird. Nähere Untersuchungen eines durch präzessions-getriebene Strömungen erzeugten Dynamos finden sich z.B. bei [Tilgner \(2005\)](#).

Mögliche interne Antriebsmechanismen einer Strömung im Erdkern sind thermische und chemische Konvektion. In der vorliegenden Arbeit wird ausschliesslich thermisch angetriebene Konvektion untersucht. Diese wird im Wesentlichen durch die Restwärme verursacht, die im Kern seit Entstehung der Erde gespeichert ist. Zur Verdeutlichung der Prozesse im Falle von einfacher thermischer Konvektion betrachte man ein Flüssigkeitspaket innerhalb einer Umgebung, die sich im hydrostatischen Gleichgewicht befindet.

Dieses Paket bewegt sich durch zufällige Fluktuationen ein kleines Stück aufwärts. Die Zeitskalen der beteiligten physikalischen Prozesse verhalten sich dabei so, dass es einerseits zu keiner Entropieänderung durch Wärmeaustausch mit der Umgebung kommt, sich aber andererseits der innere Druck des Flüssigkeitspakets an den äußeren Druck der Umgebung anpassen kann. In der Folge muss die Dichte des Flüssigkeitspakets im Vergleich mit der Dichte in der Umgebung abnehmen. Ist die Differenz zwischen beiden Dichten ausreichend groß, steigt das Flüssigkeitspaket weiter an, und die Flüssigkeit ist konvektiv instabil<sup>6</sup>. Die Voraussetzung für das Einsetzen von Konvektion ist die monotone Zunahme der mittleren Entropie mit zunehmender Tiefe<sup>7</sup> und ein Wärmefluss an der Oberfläche der Flüssigkeitsschicht, der den adiabatischen Wärmefluss übersteigt. Mit anderen Worten, der Temperaturgradient innerhalb der Flüssigkeitsschicht muss größer als der adiabatische Temperaturgradient sein (Schwarzschild-Kriterium)<sup>8</sup>. Berücksichtigt man den Einfluss von Viskosität und Wärmeleitung, so existiert eine endliche kritische Rayleighzahl  $Ra_{crit}$ , die für das Auftreten von marginaler Konvektion überschritten werden muss.

Die Hauptquelle für die Heizung am Übergang zum inneren Kern ist die Freisetzung von latenter Wärme beim Ausfrieren des Eisens. Daneben besteht die Möglichkeit einer volumetrischen Wärmequelle, verursacht durch radioaktiven Zerfall und/oder Ohmsches Heizen. Mit einer im flüssigen Erdkern verteilten Wärmequelle, die Konvektion antreibt, erhielten [Kutzner & Christensen \(2000\)](#) allerdings bevorzugt quadrupolartige Dynamos. Da zudem angezweifelt wird, dass innerhalb des flüssigen Erdkerns ausreichend radioaktives Material vorhanden ist, um eine signifikante Wärmequelle zu ergeben ([Stacey, 1992](#); [Roberts & Glatzmaier, 2000](#)), wird ein solcher Mechanismus in dieser Arbeit nicht berücksichtigt.

Vereinfacht betrachtet lässt sich die Zusammensetzung des flüssigen Erdkerns beschreiben als ein Gemisch aus geschmolzenem Eisen und einer leichteren Komponente. Der Anteil der leichteren Komponente kann als eine kleine Verunreinigung angesehen werden. Aufgrund des Dichtesprungs am Übergang zwischen flüssigen äußerem und festen innerem Kern lässt sich vermuten, dass der innere Kern eine höhere Konzentration von Eisen aufweist. Ursache ist das Ausfrieren des Eisens an der Grenze zum festen Kern. Dabei wird die leichtere Komponente freigesetzt und liefert so eine Auftriebskraft, die analog zum thermischen Auftrieb zu einer Störung der Flüssigkeit führt, der sogenannten chemischen Konvektion ([Braginsky, 1963](#)). Dieser Entmischungs-Prozess führt zu einem langsamen Anwachsen des inneren Kerns, wobei aufgrund der zunehmenden Konzentration des (schwereren) Eisens im Zentrum der Erde Gravitationsenergie freigesetzt wird. Vermutlich beruht der überwiegende Beitrag zum Antrieb der Strömungen im flüssigen Erdkern auf chemischer Konvektion (siehe z.B. [Lister & Buffett 1995](#), die für die Beiträge

---

<sup>6</sup>Diese Betrachtung ignoriert der Einfachheit halber den Einfluss von Viskosität und Wärmeleitung, die einer solchen Bewegung entgegenwirken und daher für eine Stabilisierung der Flüssigkeit sorgen.

<sup>7</sup>Für eine isothermale Flüssigkeit sinkt z.B. die Entropie mit zunehmender Tiefe, so dass ein solches System nicht konvektiert.

<sup>8</sup>In inkompressiblen Simulationen mit Boussinesq-Approximation verschwindet der adiabatische Temperaturgradient und der totale Wärmefluss entspricht dem superadiabatischen Wärmefluss, der die Konvektion antreibt.

von chemischer und thermischer Konvektion zum Antrieb des Geodynamos ein Verhältnis von 80:20 abgeschätzt haben).

Unterschiedliche interne Antriebsmechanismen wurden von [Kutzner & Christensen \(2000\)](#) untersucht. Für den Fall einer am Übergang zwischen festen und flüssigen Kern lokalisierten Quelle der Auftriebskraft erhielten die Autoren nur geringe Unterschiede zwischen thermischer und chemischer Konvektion. Dies ist insofern einleuchtend, da die Gleichung, die die Konzentration einer leichteren Verunreinigung in einem flüssigen Gemisch beschreibt, die gleiche Struktur besitzt, wie die Gleichung zur Beschreibung der Wärmeleitung. Größere Unterschiede bestehen allerdings in den Werten der molekularen Diffusivitäten ([Fearn, 1998](#)). Schieriger zu handhaben und weit weniger gut verstanden sind zudem die Randbedingungen für den Massenanteil der leichteren Komponente. Im Rahmen dieser Arbeit wird daher der Einfachheit halber ein System mit nur einer Komponente betrachtet und lediglich eine thermisch getriebene Konvektion in einem schwach geschichteten kartesischen System untersucht.

## 1.4 Anisotropie der turbulenten Strömungen im flüssigen Erdkern

Die aus Satellitenbeobachtungen bestimmte radiale Komponente des Erdmagnetfeldes an der Kern-Mantel-Grenze (siehe Abschnitt [1.1.4](#), Abb. [1.2](#)) zeigt eine starke Konzentration von magnetischem Fluss in der Nähe der Pole, die im Wesentlichen für den Dipolanteil des Erdmagnetfeldes verantwortlich ist. Feldflecken (*flux patches*) mit einer vergleichbaren Intensität finden sich aber auch in der Nähe des Äquators. Globale Simulationen z.B. von [Glatzmaier et al. \(1999\)](#) und [Harder & Hansen \(2005\)](#) zeigen, dass die kleinskalige Struktur des Magnetfeldes am Kern-Mantel-Übergang stark lokalisierte Magnetfelder aufweist, die in ihrem Muster und dem paarweisen Auftreten an Sonnenflecken erinnern ([Roberts & Glatzmaier, 2000](#); [Jackson, 2003](#)). Die besonderen Eigenschaften eines planetaren Objektes wie der Erde führen allerdings zu physikalischen Bedingungen, die sich teilweise deutlich von denen in der Sonne unterscheiden.

Solche Unterschiede zeigen sich ebenfalls in Beobachtungen schnell rotierender Sterne mittels *Doppler-Imaging*. Schnell rotierende Systeme sind oftmals durch eine Kulmination von (Stern-)Flecken und anderen magnetischen Erscheinungen nahe der Pole charakterisiert ([Strassmeier, 2002, 2006](#)). Im Vergleich mit der Sonne, bei der Flecken vorzugsweise bei niedrigen und mittleren Latituden auftreten, deutet dies auf einen anderen Dynamo-Mechanismus hin, bei dem differentielle Rotation eine geringere Rolle spielt ([Bushby, 2003](#)).

Die physikalischen Prozesse innerhalb des flüssigen Erdkerns werden durch drei charakteristische Eigenschaften geprägt:

- In der Erde ist der Unterschied zwischen der Dichte an der Kern-Mantel-Grenze und dem Übergang zum (nicht-konvektiven) inneren Kern klein ( $\rho_{\text{bot}}/\rho_{\text{top}} \approx 1.2$ ). Durch die Begrenzung der Konvektionsschicht durch den inneren festen Kern bzw.

den äußeren festen Mantel existiert keine stabile Flüssigkeitsschicht und damit erfolgt keine Penetration durch konvektive Strömung in eine solche Schicht<sup>9</sup>. Ein solcher Prozess ist im *Overshoot-Dynamo*-Modell der Sonne verantwortlich für den effektiven Abwärtstransport von poloidalem magnetischen Fluss, aus dem durch Scherströmungen unterhalb der solaren Konvektionszone eine toroidale Feldkomponente reproduziert wird (Ziegler & Rüdiger, 2003). Eine weitere Konsequenz der schwachen Dichte-Stratifizierung ist das annähernd inkompressible Verhalten der Strömung, so dass Veränderungen der Dichte aufgrund von Druckfluktuationen vernachlässigbar sind.

- Die Erde ist ein extrem schnell rotierender Körper. Die Rotationsdauer von 24 Stunden für eine vollständige Umdrehung ist eine sehr kurze Zeit verglichen mit den Zeitskalen, auf denen die übrigen für den Geodynamo bedeutenden Prozesse operieren. Als Konsequenz ergibt sich eine große Coriolis-Zahl  $Co = 2\tau\Omega \approx 10^6$ , die verdeutlicht, dass die Coriolis-Kraft einen wesentlichen Einfluss auf die Strömung im flüssigen Erdkern ausübt, während viskose und Trägheitskräfte vernachlässigbar sind.
- Die zweite dominierende Kraft im Erdkern ist die Lorentz-Kraft, die durch das starke Magnetfeld verursacht wird und sich durch eine signifikante nicht-lineare Rückwirkung des Feldes auf die Strömung äußert<sup>10</sup>. Lorentz- und Coriolis-Kraft sind im flüssigen Erdkern von vergleichbarer Magnitude und die neben der Auftriebskraft dominanten Terme in den MHD-Gleichungen.

In einem solchen schnell rotierenden konvektiv instabilen System wird die turbulente Strömung durch drei ausgezeichnete Richtungen bestimmt, die definiert werden durch die dominante Magnetfeldkomponente, die Rotationsachse und die Richtung der Gravitation. Die daraus folgenden Strukturen der Strömung sind stark anisotrop und werden geprägt durch tellerartige Konvektionszellen, die in Richtung des Magnetfeldes gestreckt und entlang der Rotationsachse ausgerichtet sind (Braginsky & Meytlis, 1990; St. Pierre, 1996; Matsushima et al., 1999). In der Regel werden diese Anisotropien in numerischen Untersuchungen vernachlässigt. Meist wird implizit von einer Large-Eddy-Simulation (LES) ausgegangen, bei der skalare Parameter den turbulenten Werten der Diffusivitäten entsprechen. Neben der Tatsache, dass die Diffusivitäten aus Gründen numerischer Stabilität weit größer als die turbulenten Werte gewählt werden müssen, beschreibt diese vereinfachende Annahme einen isotropen Transport der Flüsse und eine isotrope Dissipation von Energie. Dies ist nur dann korrekt, wenn entweder die Auflösung hoch genug ist, so dass alle dynamisch beitragenden Moden enthalten sind, oder wenn es keine ausgezeichnete Richtung aufgrund externer Kräfte, Randbedingungen oder Dichteschichtung gibt. Beides ist im Allgemeinen nicht der Fall.

<sup>9</sup>Es existieren durchaus Überlegungen in Bezug auf stabile Schichten bzw. Schichten, die zwar thermisch stabil, nicht jedoch stabil gegen chemische Konvektion sind (siehe z.B. Anufriev et al. 2005).

<sup>10</sup>In der Literatur gibt es unterschiedliche Definitionen eines starken Magnetfeldes. So werden entweder  $E_{\text{mag}} > E_{\text{kin}}$ ,  $\Lambda = O(1)$  oder – wie in dieser Arbeit – die Existenz einer nicht-linearen Rückwirkung auf die Strömung zur Charakterisierung eines starken Magnetfeldes verwendet.

Um anisotrope Effekte zu berücksichtigen, lassen sich Turbulenz-Modelle verwenden, die mit Hilfe von tensoriellen Ausdrücken die Richtungsabhängigkeit der Turbulenz einbeziehen und den Einfluss von nicht-aufgelösten Skalen durch aufgelöste großskalige Felder parametrisieren. Ein solches Tensor-Modell zur Beschreibung von viskoser und thermischer Diffusion für ein schnell rotierendes Modell des Erdkerns unter Einfluss eines starken azimuthalen Feldes ist von [Phillips & Ivers \(2001, 2003\)](#) entwickelt worden. Die Autoren verwenden zur Beschreibung von Viskosität und thermischer Diffusivität einen Ansatz der Form  $D_\nu = 2\rho\nu_0\mathbb{1} + \rho\nu_{\varphi\varphi} \sin^2\theta \hat{e}_\varphi \hat{e}_\varphi$  bzw.  $D_\chi = \chi_0\mathbb{1} + \chi_{\varphi\varphi} \sin^2\theta \hat{e}_\varphi \hat{e}_\varphi$  und entwickeln einen Formalismus zur Anwendung dieser Ausdrücke in Pseudospektral-Codes. Die Tensoren  $D_\nu$  und  $D_\chi$  beschreiben eine vergrößerte Viskosität/Diffusivität entlang der Feldlinien eines dominanten azimuthalen Magnetfelds. Nicht-Diagonalelemente der Tensoren werden nicht berücksichtigt, so dass in dem Modell z.B. kein meridionaler turbulenter Transport von Wärme aufgrund der Kopplung von vertikalen und horizontalen Komponenten der Strömung enthalten ist. Die Konsequenzen für Geodynamo-Simulationen sind bisher unbekannt, da die Resultate in keinen numerischen Algorithmus implementiert worden sind.

[Buffett \(2003\)](#) und [Matsushima \(2004, 2005\)](#) haben eine weitere Methode zur Parametrisierung der Effekte von nicht aufgelöster Turbulenz in Geodynamo-Simulationen untersucht. Mit Hilfe eines *Subgrid-Scale*-Modells (SGS), das im Wesentlichen auf der Selbstähnlichkeits-Eigenschaft der Turbulenz beruht, wurde durch den Vergleich von hoch aufgelösten direkten numerischen Simulationen (DNS) mit einer *Large-Eddy-Simulation* mit SGS-Modell demonstriert, dass die Wärme- und Momentum-Flüsse durch das Turbulenz-Modell im Mittel richtig wiedergegeben werden. Eine erweiterte Version des Selbstähnlichkeits-Modells, die zusätzlich Lorentz- und Induktionsterme mit berücksichtigt, wurde von [Matsui & Buffett \(2005\)](#) vorgestellt. Sie untersuchen das so genannte *Non-Linear-Gradient*-Modell, eine Abwandlung des Selbstähnlichkeits-Modells, die auf dem lokalen Charakter der Turbulenz beruht. Beide Modelle sind nicht in der Lage, alle Details des raumzeitlichen Verhaltens wiederzugeben. Zudem treten systematische Abweichungen bei den zeitlich gemittelten kinetischen und magnetischen Energien auf. Die Werte der LES lagen zwischen den Werten der hoch aufgelösten DNS und einer niedrig aufgelösten (bzw. nicht vollständig aufgelösten) DNS.

## 1.5 Der $\alpha$ -Effekt im Geodynamo

Eine nicht-spiegelsymmetrische konvektiv getriebene Turbulenz erzeugt eine mittlere elektromotorische Kraft  $\mathcal{E} = \langle \mathbf{u}' \times \mathbf{B}' \rangle$  mit einer Komponente parallel zum Magnetfeld. Hierbei bezeichnen  $\mathbf{u}'$  und  $\mathbf{B}'$  die fluktuierenden Anteile von Strömung und Magnetfeld, während die Klammer  $\langle \cdot \rangle$  eine Mittelungsprozedur kennzeichnet, die die Erfüllung der Reynolds-Regeln garantiert<sup>11</sup>. Dieser Prozess kann für die Produktion eines großskaligen Magnetfeldes verantwortlich sein und ist unter dem Namen  $\alpha$ -Effekt be-

<sup>11</sup>Zwei fluktuierende Felder  $A, B$  die sich in einen mittleren Anteil  $\langle A \rangle, \langle B \rangle$  (den Erwartungswert von  $A, B$  in einem Ensemble identischer Systeme) und einen fluktuierenden Anteil  $A' = A - \langle A \rangle$  bzw.  $B' = B - \langle B \rangle$  zerlegen lassen, erfüllen die Reynolds-Regeln wenn gilt:

$\langle \langle A \rangle \rangle = \langle A \rangle$ ,  $\langle A' \rangle = 0$ ,  $\langle A + B \rangle = \langle A \rangle + \langle B \rangle$ ,  $\langle \langle A \rangle \langle B \rangle \rangle = \langle A \rangle \langle B \rangle$  und  $\langle \langle A \rangle B' \rangle = 0$ .

kannt (Steenbeck & Krause, 1966). Ungeklärt ist die Frage nach der Bedeutung des  $\alpha$ -Effekts für die Produktion des Erdmagnetfeldes im flüssigen Teil des Erdkerns. Ein solcher Term wird gegenwärtig in globalen 3D-MHD-Simulationen nicht berücksichtigt, da die Annahme besteht, dass Induktion auf kleinen Skalen für die Dynamo-Wirkung nicht bedeutend ist (Roberts & Glatzmaier, 2000) und der kleinskaligen Strömung lediglich ein dissipativer Einfluss zugeschrieben wird (Kono & Roberts, 2002). Stattdessen wird der Dynamo-Prozess in globalen MHD-Simulationen in der Regel mit einer Art großskaligem  $\alpha\Omega$ -Effekt erklärt. Die Grundlagen dieser Modellvorstellung finden sich bei Braginsky (1964a,b,c). Die Magnetfelderzeugung beruht dabei auf Scherströmungen und der Wechselwirkung einer nicht-axialsymmetrischen Strömung mit einem axial-symmetrischen Magnetfeld. Eine Ausnahme stellen die Modelle von Olson et al. (1999) und Christensen & Aubert (2006) dar, bei denen sowohl poloidales als auch toroidales Feld durch die Wechselwirkung der nicht-axialsymmetrischen Geschwindigkeitsanteile mit dem axialsymmetrischen Magnetfeld produziert werden und in denen differentielle Rotation keine Rolle spielt.

Ein wesentliches Problem bei der Erklärung des Geodynamos ist die Unkenntnis der kleinskaligen Turbulenz-Struktur im flüssigen Erdkern. So sind Eigenschaften, wie typische Skalenlängen und Geschwindigkeiten nur unzureichend bekannt, so dass die effektiven (turbulenten) Diffusivitäten nur grob abgeschätzt werden können. Der Wert von  $u \approx 5 \cdot 10^{-4} \text{m/s}$ , der häufig als typische Geschwindigkeit der turbulenten Strömung im Erdinnern angegeben wird, beruht auf der westwärts orientierten Drift der magnetischen Feldflecken, die aus der Säkularvariation unter der Annahme der *frozen-flux* Approximation bestimmt wird. Ob diese Drift die typische Strömungsgeschwindigkeit im flüssigen Erdkern widerspiegelt, ist nicht bekannt. Olson (2002) vermutet, dass die beobachtbaren Strukturen des Magnetfeldes an der Kern-Mantel-Grenze lediglich eine sekundäre Strömung darstellen, die von Heterogenitäten am Übergang zum Mantel verursacht wird. Der Autor schätzt die typischen Skalen der turbulenten Wirbel im inneren des flüssigen Erdkerns auf einige Kilometer. Abschätzungen aus den Ergebnissen globaler Simulationen sind allerdings schwierig, da die Parameter, die in solchen Simulationen erreicht werden können, weit neben den realen (molekularen) Werten gewählt werden müssen. Ursache hierfür sind die bekannten numerischen bzw. technischen Beschränkungen, die den Skalenbereich der Turbulenz, der aufgelöst werden kann, stark begrenzen (siehe z.B. Hollerbach 2003). Abbildung 1.7 zeigt anhand zweier dimensionsloser Kennzahlen, der Rayleigh-Zahl  $Ra$  und der Ekman-Zahl  $Ek = \nu/2\Omega R_{\text{CMB}}^2$ , welcher Parameterbereich in diversen numerischen 3D-MHD-Simulationen des Geodynamos erreicht worden ist. Die Werte der Erde werden durch den Stern in der linken oberen Ecke repräsentiert und beruhen bereits auf (geschätzten) turbulenten Werten für Viskosität und thermische Diffusivität. Deutlich erkennbar ist, dass nahezu alle numerischen Modelle (mit Ausnahme von Glatzmaier & Roberts 1995a und Glatzmaier & Roberts 1995b) nur schwach getriebene Dynamos repräsentieren, bei denen die Rayleigh-Zahl nur wenig über dem kritischen Wert liegt ( $Ra_{\text{crit}}$  wird in Abb. 1.7 durch die gestrichelten Geraden repräsentiert).

Die Abszisse in Abb. 1.7 repräsentiert die Ekman-Zahl, die in den Simulationen weit höher gewählt werden muss als durch die niedrige Viskosität im flüssigen Eisen gegeben. Daher kann man die viskosen Terme in den Simulationen nicht vernachlässigen, wie es

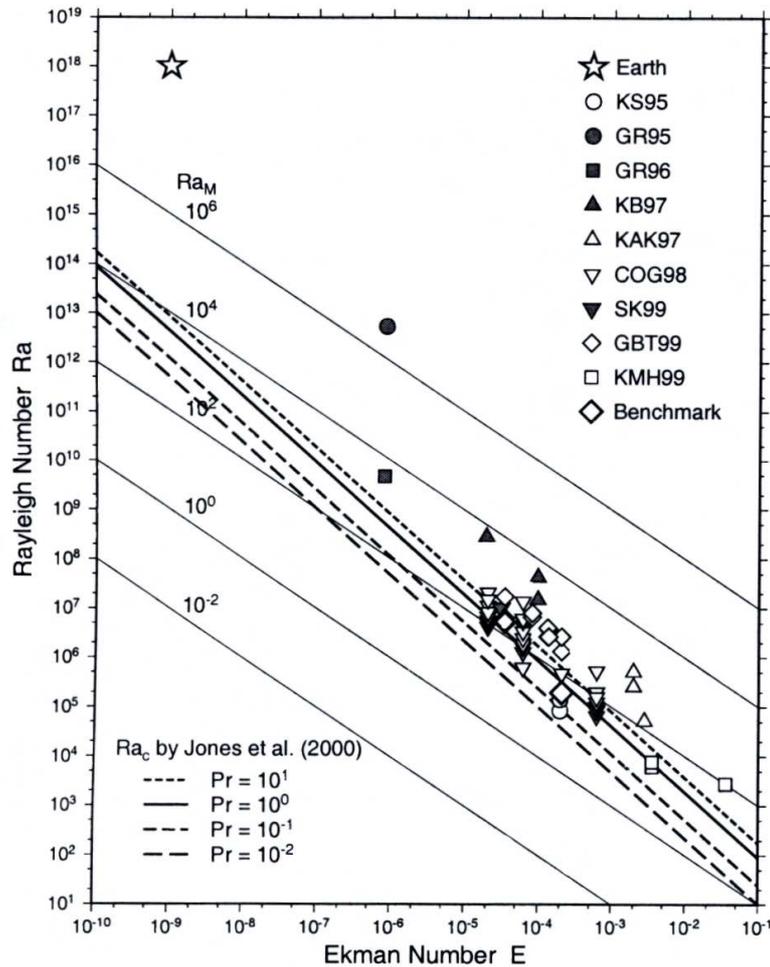


Abbildung 1.7: In globalen Simulationen erreichte Parameter im Vergleich zu den Werten der Erde. Die gestrichelten Linien repräsentieren theoretische Werte der kritischen Rayleigh-Zahl (entnommen aus Jones et al. 2000). Die durchgezogenen Linien zeigen die modifizierte Rayleigh-Zahl  $Ra_m = Ek \cdot Ra$ . Der Wert für die Erde (gekennzeichnet durch den Stern links oben) basiert auf einer turbulenten Eddy-Viskosität von  $\nu_T = 1\text{m}^2\text{s}^{-1}$ . Man beachte die doppelt-logarithmische Skalierung. Entnommen aus Kono & Roberts (2002).

eigentlich erforderlich wäre, um die magnetostrophischen Eigenschaften der Strömung widerzuspiegeln (Fearn & Ogden, 2000).

Die Annahme, dass die Ergebnisse globaler Geodynamo-Simulationen mit dem wirklichen Zustand in der Erde vergleichbar sind, beruht im Wesentlichen auf der Tatsache, dass Magnetfeldstärke und -struktur bei vielen Simulationen in Bereichen liegen, wie sie als charakteristisch für die Erde vermutet werden (Wicht, 2005). Häufig werden solche Vergleiche allerdings anhand einzelner Momentaufnahmen vollzogen und Tatsachen, die mit den Beobachtungen nicht kongruieren, außer Acht gelassen (Dormy et al., 2000).

Nichtsdestotrotz ist die Übereinstimmung der Simulationen mit den Beobachtungen in vielen Bereichen erstaunlich gut.

## 1.6 Untersuchungsgegenstand

Gegenstand der vorliegenden Arbeit ist die numerische Simulation von thermischer Konvektion unter dem Einfluss von Rotation und Magnetfeld. Die physikalischen Bedingungen entsprechen dabei den charakteristischen Eigenschaften im flüssigen Erdkern. Beantwortet werden soll zunächst die Frage nach der Struktur der Konvektionszellen in Abhängigkeit der Magnetfeldstärke. Anhand der korrespondierenden Auswirkungen auf die Turbulenz-Intensität lassen sich Rückschlüsse auf das Verhalten der kleinskaligen Turbulenz im Geodynamo ziehen. Form und Größe der Konvektionszellen bestimmen die typischen Skalenlängen und legen damit die wesentlichen Eigenschaften der Turbulenz fest, die sich im Transport z.B. von Wärme, Drehimpuls oder magnetischem Fluss manifestieren. Neben typischen Größen zur Beschreibung der Anisotropie in der Turbulenz-Intensität wird exemplarisch für das anisotrope Verhalten eines diffusiven Prozesses die turbulente Wärmeleitfähigkeit auf Basis quasi-linearer Theorien untersucht. Der turbulente Transport von Wärme und die sich dadurch ergebenden Einflüsse auf die globale Temperaturverteilung sind ein Beispiel für die Wechselwirkung der kleinskaligen Fluktuationen mit großskaligen Strukturen, die die Dynamik im flüssigen Erdkern wesentlich beeinflussen können.

Eng verbunden mit den Turbulenz-Eigenschaften ist die Frage nach einem  $\alpha$ -Effekt. Nähere Untersuchungen über Magnitude und Eigenschaften eines  $\alpha$ -Effektes für den Geodynamo existieren nicht. Anhand der direkten Berechnung der mittleren elektromotorischen Kraft  $\mathcal{E}$  werden die wesentlichen Elemente des  $\alpha$ -Tensors berechnet. Neben den Nicht-Diagonalelementen, die eine Advektion von magnetischem Fluss beschreiben, werden vor allem die für eine Dynamowirkung verantwortlichen Diagonalelemente untersucht. Im Vordergrund steht dabei die Abhängigkeit von der Magnetfeldstärke. Vervollständigt wird die Analyse durch Untersuchungen mit variierender Rotationsrate und den Vergleich der  $\alpha$ -Tensoren am Pol und bei mittlerer Latitude.

Die Eigenschaften des  $\alpha$ -Effektes dienen als Grundlage eines Mean-Field Modells des Geodynamos, das auf einem einfachen  $\alpha^2$ -Mechanismus beruht und als Basis für Langzeitsimulationen zur Untersuchung der statistischen Eigenschaften verschiedener Modelle des Geodynamos dienen kann. Ein solches Mean-Field Modell ist sinnvoll, um großskalige charakteristische Eigenschaften eines Dynamo-Prozesses und die Zeitskalen, auf denen sich dieses Verhalten gegebenenfalls ändert, zu untersuchen. Im einfachsten Fall ist lediglich die Induktionsgleichung für das mittlere Feld zu lösen. Der vergleichsweise geringe numerische Aufwand erlaubt die detaillierte Untersuchung von Langzeitstatistiken für unterschiedliche Dynamo-Modelle, die in 3D-MHD-Simulationen nahezu unmöglich ist.

## Kapitel 2

# Lokale Simulationen von rotierender Magnetokonvektion

### 2.1 Das Box-Modell

Es wird ein idealisiertes kartesisches System mit einer konvektiv getriebenen Turbulenz in einer leitenden Flüssigkeit unter dem Einfluss von Rotation und Magnetfeld untersucht. Die kartesische Box repräsentiert einen kleinen Ausschnitt aus einer rotierenden sphärischen Kugelschale. Für die solare Konvektionszone wurden solche Untersuchungen ohne Magnetfeld z.B. von [Brummell et al. \(1996, 1998\)](#) sowie mit Magnetfeld z.B. von [Brandenburg et al. \(1990\)](#), [Ossendrijver et al. \(2001\)](#) und [Ziegler \(2002\)](#) durchgeführt. Das hier verwendete Modell ist eine Adaption solcher Simulationen auf die Erde. Ähnliche Box-Simulationen von rotierender Magnetokonvektion und von Dynamo-Wirkung in einer inkompressiblen Flüssigkeit unter Geodynamo-Bedingungen wurden von [Stellmach & Hansen \(2004\)](#) durchgeführt. Simulationen von Turbulenz in kartesischer Geometrie stellen eine bequeme Möglichkeit zur Untersuchung kleinskaliger Strömungen dar, vernachlässigen aber den Einfluss der geometrischen Randbedingungen. Numerische Untersuchungen in einem gekrümmten Kugelsegment sind von [Hurlburt et al. \(1995\)](#) durchgeführt worden. Ein solches Modell erlaubt Rossby-Wellen, die in longitudinaler Richtung propagieren und durch die Wechselwirkung mit der turbulenten Konvektion einen Einfluss auf azimuthale und meridionale Strömungen ausüben, der in den hier durchgeführten Simulationen nicht enthalten ist.

In allen Simulationen wurde ein Magnetfeld vorgegeben. Dies basiert auf der Annahme, dass die Dynamik der Strömung unabhängig davon ist, ob das Magnetfeld extern aufgeprägt wird oder über einen Dynamo-Prozess durch die Strömung selbst erzeugt wird. Teile der in diesem Kapitel präsentierten Ergebnisse finden sich in [Giesecke et al. \(2005b\)](#) und [Giesecke \(2006\)](#).

#### 2.1.1 Geometrie

Abbildung [2.1](#) zeigt eine Skizze des hier verwendeten Ein-Schichten-Modells. Eine quaderförmige Box repräsentiert einen Ausschnitt einer Kugelschale, die mit der Winkelge-

schwindigkeit  $\Omega$  rotiert. Der Winkel  $\theta$  zwischen Rotationsachse der Kugelschale und der  $z$ -Achse des lokalen Box-Koordinatensystems bestimmt die Co-Latitude ( $\theta = 0^\circ$  entspricht dem Nordpol,  $\theta = 90^\circ$  dem Äquator). Das lokale Koordinatensystem in der Box wird so gewählt, dass die Einheitsvektoren  $\hat{x}$ ,  $\hat{y}$ ,  $\hat{z}$  ein rechtshändiges mit-rotierendes System bilden. Übersetzt man die kartesischen Koordinaten in globale sphärische Koor-

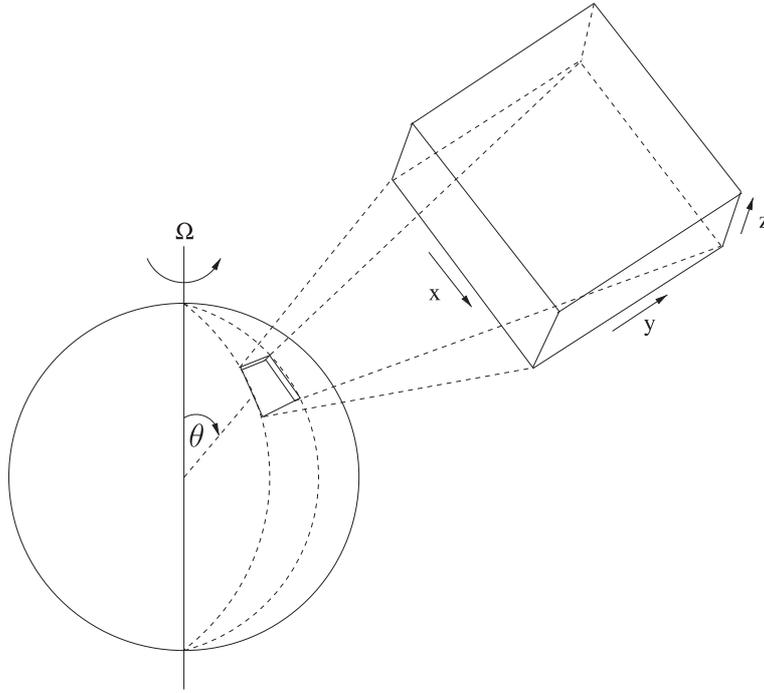


Abbildung 2.1: Lokale Box als Ausschnitt einer rotierenden Sphäre

dinaten, so entspricht  $\hat{z}$  der radialen Richtung  $\hat{r}$ ,  $\hat{y}$  der azimuthalen Richtung  $\hat{\varphi}$  und  $\hat{x}$  der latitudinalen Richtung  $\hat{\theta}$ . Die Winkelgeschwindigkeit  $\Omega$  in dem mitrotierenden Box-System wird dann gegeben durch

$$\Omega = -\Omega_0 \sin \theta \hat{x} + \Omega_0 \cos \theta \hat{z}, \quad (2.1)$$

wobei  $\Omega_0$  die Winkelgeschwindigkeit der rotierenden Sphäre bezeichnet.

Simulationen in einer kartesischen Box mit einem Seitenverhältnis 8 : 8 : 1 wurden an verschiedenen Breitengraden auf der Nordhalbkugel durchgeführt. Ein solches Seitenverhältnis ist notwendig, um eine ausreichend Anzahl an Konvektionszellen innerhalb des Simulationsgebiets zu erhalten, so dass eine sinnvolle horizontale Mittelungsprozedur möglich ist. Der maximale Winkel zwischen Rotationsachse und Dichtegradient (bzw. Richtung der Gravitationskraft) beträgt  $\theta = 75^\circ$ . Es ist nicht sinnvoll, Simulationen näher am Äquator durchzuführen, da die Rechnungen dann inkonsistente bzw. unplausible Ergebnisse liefern. Ursache hierfür ist vermutlich ein allgemeines Problem bei Box-Simulationen von Konvektion unter einem großen Winkel zwischen Rotationsachse und Richtung der Gravitationskraft, über das bereits von mehreren Gruppen, die z.T.

unterschiedliche numerische Verfahren anwenden, berichtet wurde (Käpylä und Egorov, priv. Komm.). Durch die Kombination der starken Neigung der Konvektionszellen bei hoher Co-Latitude in Verbindung mit den periodischen horizontalen Randbedingungen kommt es zur Ausbildung starker mittlerer Strömungen (mit  $|u_y|$  weit über der Schallgeschwindigkeit), die vermutlich in sphärischer Geometrie nicht auftreten.

## 2.1.2 Gleichungen

Die magnetohydrodynamischen Gleichungen, die das Verhalten einer leitenden rotierenden Flüssigkeit in einem Schwerfeld  $\mathbf{g}$  beschreiben, werden inklusive der Effekte von Wärmeleitung, Kompressibilität und viskoser Reibung numerisch mit Hilfe des Codes NIRVANA (Ziegler, 1998, 1999) gelöst. Im Einzelnen sind dies die Kontinuitätsgleichung, die Navier-Stokes-Gleichung zur Beschreibung der Impulse, die Gleichung für die innere (thermische) Energie (inklusive Ohmscher und viskoser Heizung) sowie die Induktionsgleichung (siehe z.B. Priest 1982). Eine kurze Übersicht über das numerische Verfahren findet sich im Anhang A. Die vier Gleichungen haben die folgende Form:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot (\rho \mathbf{u}), \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial(\rho \mathbf{u})}{\partial t} = -\nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \mathbf{u}) - \nabla p + \nabla \cdot \sigma + \rho \mathbf{g} - 2\rho \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u} + \frac{1}{\mu_0} (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}, \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial e}{\partial t} = -\nabla \cdot (e \mathbf{u}) - p \nabla \cdot \mathbf{u} + (\sigma \cdot \nabla) \cdot \mathbf{u} + \frac{\eta}{\mu_0} |\nabla \times \mathbf{B}|^2 + \nabla \cdot (\kappa \nabla T), \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B} - \eta \nabla \times \mathbf{B}). \quad (2.5)$$

Hierbei bezeichnet  $\rho$  die Dichte,  $\mathbf{u}$  die Geschwindigkeit,  $p$  den Druck,  $\mathbf{B}$  die magnetische Flussdichte,  $T$  die Temperatur und  $e$  die thermische Energiedichte. Es wird ein konstantes Gravitationsfeld  $\mathbf{g} = -g\hat{\mathbf{z}}$  innerhalb des Gebiets angenommen. Der viskose Stress-Tensor  $\sigma$  enthält die kinematische Viskosität  $\nu$  und wird gegeben durch  $\sigma_{ij} = \nu \rho (\partial_j u_i + \partial_i u_j - 2/3 \nabla \cdot \mathbf{u} \delta_{ij})$ . Die viskose Heizrate in Gleichung (2.4) lautet ausführlich geschrieben  $(\sigma \cdot \nabla) \cdot \mathbf{u} = \sum_{i,j} \sigma_{ij} \partial u_i / \partial x_j$ .

Weitere diffusive Parameter sind die thermische Leitfähigkeit  $\kappa$  und die magnetische Diffusivität  $\eta$ , die beide – ebenso wie die dynamische Viskosität  $\nu_{\text{dyn}} = \nu \rho$  – innerhalb des Box-Volumens als konstant angenommen werden. Die Permeabilität  $\mu_0$  ist durch den Wert im Vakuum gegeben:  $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{VsA}^{-1}\text{m}^{-1}$ .

Zur vollständigen Beschreibung des Systems ist noch eine Zustandsgleichung nötig, für die hier die ideale Gasgleichung verwendet wird:

$$p = (\gamma - 1)e = \frac{k}{m\bar{\mu}} \rho T. \quad (2.6)$$

Hierbei bezeichnet  $k$  die Boltzmann-Konstante,  $m$  die atomare Masseinheit,  $\bar{\mu}$  das mittlere Molekulargewicht (in allen Simulationen gilt:  $\bar{\mu} = 1$ ) und  $\gamma$  das Verhältnis der spezifischen Wärmen:  $\gamma = c_p/c_V = 5/3$ .

Die Größen  $\mathbf{u}, \rho, e$  (bzw.  $p$  oder  $T$ ) entsprechen nicht – wie in Simulationen mit Boussinesq- oder anelastischer Approximation üblich – den Abweichungen von einem Referenzzustand, sondern beinhalten den kompletten physikalischen Zustand. Ausnahme ist die Zentrifugalkraft,  $\mathbf{F}_Z = -\rho\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \hat{\mathbf{r}})$ , die, obwohl betragsmäßig größer als die Coriolis-Kraft  $\mathbf{F}_C = -2\rho\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u}$ , für die Dynamik der Strömung hier ohne Bedeutung ist. Da sich  $\mathbf{F}_Z$  als Gradient einer skalaren Funktion schreiben lässt:  $\mathbf{F}_Z = -\rho\nabla(1/2(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r})^2)$ , kann ein solcher Term in einem modifizierten Druck  $p$  absorbiert werden.

Bei den hier durchgeführten Simulationen werden die voll kompressiblen MHD-Gleichungen numerisch gelöst. Allerdings ist die Kompressibilität des flüssigen Eisens im äußeren Teil des Erdkerns sehr gering, so dass die meisten Untersuchungen zum Geodynamo in der Boussinesq-Approximation ( $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ ) durchgeführt werden. Details über die Unterschiede zwischen kompressiblen und inkompressiblen Strömungen, eine Beschreibung der Strömungen in anelastischer Approximation und anelastischer *liquid Approximation* sowie eine Diskussion über die Fehler, die durch Nicht-Berücksichtigung der kompressiblen Effekte in der Boussinesq-Approximation entstehen, finden sich in [Anufriev et al. \(2005\)](#).

Um die inkompressiblen Eigenschaften der Strömung so gut wie möglich zu simulieren, wurde die Anfangskonfiguration derart gewählt, dass die adiabatische Schallgeschwindigkeit

$$c_S^2 = \left( \frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_S = \gamma \frac{k}{m\bar{\mu}} T \quad (2.7)$$

deutlich über den Strömungsgeschwindigkeiten liegt, so dass die typischen Mach-Zahlen  $\text{Ma} = u_{\text{rms}}/c_S$  der Strömung wesentlich kleiner als 1 sind. In der Folge sind die Dichteveränderungen, hervorgerufen durch Druckfluktuationen ( $\partial\rho/\partial p$ ), klein, und die Strömung verhält sich annähernd inkompressibel. In der numerischen Behandlung führt dies allerdings zu einem sehr kurzen Zeitschritt, der stets durch die Schallgeschwindigkeit begrenzt wird:  $\delta t \approx C \cdot \delta z/c_S$  (siehe auch Definition des Zeitschritts (A.9) im Anhang A). Mit den hier verwendeten Parameter resultiert eine Strömung mit einer typischen Mach-Zahl in der Größenordnung von  $\text{Ma} \approx 10^{-2}$  (zum Vergleich: in der Erde beträgt die Mach-Zahl etwa  $10^{-7}$ ). Für die Zeitspanne, die für statistisch aussagekräftige Mittelungen notwendig ist ( $\sim 20\tau_{\text{adv}}$ , siehe Abschnitt 2.1.6), sind dann etwa  $2 \cdot 10^5$  Zeitschritte erforderlich, wofür ein moderner PC (3Ghz CPU) bei der verwendeten Standardauflösung ( $100^2 \times 80$ ) etwa 4 Wochen Rechenzeit benötigt. Da der Zeitschritt durch die Schallgeschwindigkeit dominiert wird, ist die Länge eines einzelnen Zeitschritts für alle durchgeführten Simulationen etwa gleich. Da aber  $\tau_{\text{adv}}$  mit steigender Magnetfeldstärke zunimmt, sind für die Simulationen mit starkem Magnetfeldern mehr Zeitschritte erforderlich als im Fall schwacher Magnetfelder.

In allen Rechnungen wurde eine Standardauflösung mit  $100 \times 100 \times 80$  Gitterzellen ( $n_x \times n_y \times n_z$ ) verwendet. Diese Auflösung liegt deutlich unter der Auflösung von  $1000^3$  in Simulationen von künstlich getriebener Turbulenz von [Haugen et al. \(2003\)](#) oder von  $512^2 \times 97$  in den Simulationen von Magnetokonvektion von [Cattaneo et al. \(2003\)](#). Solche Simulationen benötigen jedoch Rechenzeiten und Computerkapazitäten,

die Rechnungen über viele Turnoverzeiten und eine Untersuchung vieler Parameter nicht erlauben. Die hier gewählte Auflösung stellt daher einen Kompromiss zwischen verfügbarer Computerleistung und untersuchten Parameterraum dar und ist ausreichend hoch, um die energetisch bedeutenden Moden der turbulenten Strömung aufzulösen. Eine Testrechnung mit doppelter Auflösung zeigte kleine Abweichungen (siehe Abschnitt B.2), was aufgrund der hohen Anforderungen von höher aufgelösten Simulationen an die Rechenleistung nicht eingehend untersucht werden konnte. Die Verdoppelung der Auflösung in allen drei Richtungen führt zu einer Versechzehnfachung der Rechenzeit, da neben der Anzahl der Gitterzellen, die um einen Faktor  $2^3 = 8$  höher ist, der Zeitschritt halbiert wird (siehe Definition des numerischen Zeitschritts in A.9) und somit in etwa die doppelte Anzahl an Zeitschritten berechnet werden müsste, um die gleiche (absolute) Dauer (in Turnoverzeiten) zu simulieren.

### 2.1.3 Randbedingungen

In horizontaler Richtung gelten für alle Größen periodische Randbedingungen. Dies führt dazu, dass Anteile der Lösungen mit Wellenlängen größer als die Boxausdehnung ausgeschlossen werden. Daher werden eventuell auftretende großskalige Strukturen nicht berücksichtigt.

An der oberen und unteren Grenzfläche werden Dichte  $\rho$  und Temperatur  $T$  auf dem Anfangswert festgehalten. Für die horizontalen Geschwindigkeitskomponenten  $u_x$  und  $u_y$  werden *Stress-Free* Randbedingungen verwendet und die vertikale Geschwindigkeitskomponente  $u_z$  wird an oberer und unterer Grenzfläche auf 0 gesetzt (*closed box*):

$$\frac{\partial u_x}{\partial z} = \frac{\partial u_y}{\partial z} = u_z = 0. \quad (2.8)$$

Für das Magnetfeld werden die Bedingungen für einen idealen Leiter angenommen:

$$\frac{\partial B_x}{\partial z} = \frac{\partial B_y}{\partial z} = B_z = 0. \quad (2.9)$$

Die Randbedingungen des perfekten Leiters erzwingen eine verschwindende vertikale Komponente des Poynting-Flusses  $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{B}$  an der oberen und unteren Grenzfläche, so dass der magnetische Fluss innerhalb der Box erhalten bleibt. Der Einfluss verschiedener Randbedingungen für das Magnetfeld wurde in Testsimulationen untersucht, deren Ergebnisse in Anhang B.1 zusammengefasst sind.

### 2.1.4 Anfangszustand

Der Anfangszustand der Flüssigkeit, d.h. der vertikale Verlauf von Dichte, Druck und Temperatur, wird durch ein hydrostatisches Gleichgewicht mit einer polytropen Temperaturverteilung gegeben. In horizontaler Richtung sind alle Größen konstant, so dass die horizontalen Ableitungen  $\partial/\partial x, \partial/\partial y$  verschwinden. Der Anfangszustand wird dann durch die folgenden Gleichungen definiert:

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g, \quad T = T_0 \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)^\Gamma. \quad (2.10)$$

$\rho_0$  und  $T_0$  repräsentieren die Werte an der oberen Grenzfläche des Systems (bei  $z = d$ ).  $\Gamma$  ist eine polytrophe Konstante, die auch als Grüneisen-Parameter bezeichnet wird. Ohne Wärmeleitungsterm in der Energie-Gleichung ist ein solches System stabil gegen kleine Anfangsstörungen in Energie oder Geschwindigkeit.

Mit der Zustandsgleichung für ein ideales Gas (2.6) ergibt sich

$$p = \frac{k}{m\bar{\mu}} \rho_0 T_0 \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)^{\Gamma+1} \quad (2.11)$$

für die Abhängigkeit des Drucks von der Dichte. Ableiten nach  $z$  und Vergleichen mit der Bedingung für das hydrostatische Gleichgewicht (2.10, links) ergibt als Differentialgleichung zur Beschreibung der Dichteschichtung des Anfangszustands (mit  $p_0 = k(m\bar{\mu})^{-1} \rho_0 T_0$ ):

$$\frac{p_0}{\rho_0^{\Gamma+1}} \frac{\partial}{\partial z} (\rho^{\Gamma+1}) + \rho g = 0. \quad (2.12)$$

Eine analytische Lösung dieser Gleichung ist:

$$\rho = \rho_0 \left( 1 - \frac{\Gamma}{\Gamma+1} \frac{\rho_0}{p_0} g(z-d) \right)^{1/\Gamma}. \quad (2.13)$$

Für die Konstruktion eines Anfangszustands lässt sich (2.13) jedoch nicht unmittelbar verwenden, da bei dem angewandten numerischen Verfahren die hydrostatische Gleichgewichtsbedingung auf den einzelnen Gitterpunkten nicht exakt (im Sinne des numerischen Verfahrens) erfüllt ist. Dies würde in anfänglichen Oszillationen der Dichteverteilung resultieren. Statt dessen wird die Differentialgleichung (2.12) numerisch so gelöst, dass die Bedingung  $\partial_z p = -\rho g$  zu Beginn der Simulationen an jedem Gitterpunkt exakt erfüllt ist. Auf jedem Gitter-Knotenpunkt in einer horizontalen Ebene  $i$  muss dazu

$$\frac{p_0}{\rho_0^{\Gamma+1}} \frac{\rho_i^{\Gamma+1} - \rho_{i\mp 1}^{\Gamma+1}}{\Delta z} + \frac{1}{2} g (\rho_i + \rho_{i\mp 1}) = 0 \quad (2.14)$$

gelten. Diese Gleichung wird iterativ mit dem Newton-Raphson-Verfahren gelöst. Als Anfangswerte werden die analytischen Lösungen nach Gleichung (2.13) eingesetzt. Da diese Werte der benötigten Lösung sehr nahe kommen, können die Nullstellen der Gleichung (2.14) bereits nach wenigen Iterationsschritten auf Maschinengenauigkeit bestimmt werden. Überprüft wurde die Lösung durch Entfernen des Wärmeleitungsterms innerhalb des Codes, wodurch gezeigt werden konnte, dass der Anfangszustand dann bei kleinen Störungen in der Geschwindigkeit stabil bleibt.

Eine Berechnung des Anfangszustands musste lediglich einmal zu Beginn der Simulationen durchgeführt werden, da alle weiteren Simulationen mit unterschiedlichen Rotationsgeschwindigkeiten, Co-Latituden oder Magnetfeldern dann von einem Zustand mit voll entwickelter (nicht-rotierender) Konvektion starteten. Ein solcher Zustand unterscheidet sich teilweise deutlich von dem Anfangszustand (2.13), da durch die Konvektion eine Durchmischung und Umverteilung der Anfangszustands erfolgt (siehe Abschnitt 2.2.3).

### 2.1.5 Eingabeparameter und Einheiten

Vorgegebene Eingabeparameter sind der Stratifizierungsindex  $\xi = \rho_{\text{bot}}/\rho_{\text{top}} = 1.1$ , die Temperatur  $T_0$  und der „globale“ Temperaturgradient  $dT/dz$ , die beide ebenso wie die Dichte  $\rho_0 = \rho_{\text{top}}$  und die Boxhöhe  $d$  auf 1 normiert sind. Durch diese Normierung ergibt sich ein gewisser Freiheitsgrad bei der Reskalierung zu realen physikalischen Größen (in SI-Einheiten), die mittels der folgenden Relationen erhalten werden können:

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{x}} &\rightarrow \mathbf{x} = \hat{\mathbf{x}}d_s, & \hat{\rho} &\rightarrow \rho = \hat{\rho}\rho_s, & \hat{\mathbf{u}} &\rightarrow \mathbf{u} = T_s^{1/2}\hat{\mathbf{u}}, \\ \hat{t} &\rightarrow t = \hat{t}d_sT_s^{-1/2}, & \hat{T} &\rightarrow T = \hat{T}T_s, & \hat{\mathbf{B}} &\rightarrow \mathbf{B} = (\rho_sT_s)^{1/2}\hat{\mathbf{B}}.\end{aligned}$$

Hierbei kennzeichnet  $\hat{\cdot}$  die normierten Größen, wie sie im Code berechnet werden und der Index S die entsprechenden Skalierungsfaktoren.

Viskosität  $\nu$ , Wärmeleitfähigkeit  $\kappa$  und magnetische Diffusivität  $\eta$  werden bestimmt durch die Rayleigh-Zahl

$$\text{Ra} = \frac{\rho c_p d^4}{\kappa \nu T} \left( \frac{\partial T}{\partial z} - \frac{g}{c_p} \right), \quad (2.15)$$

die Prandtl-Zahl

$$\text{Pr} = \frac{\nu \rho c_p}{\kappa} \quad (2.16)$$

und die magnetische Prandtl-Zahl

$$\text{Pm} = \frac{\nu}{\eta}. \quad (2.17)$$

Als Basis-Parameter wurde in allen Simulationen  $\text{Ra} = 10^6$ ,  $\text{Pr} = 0.5$  und  $\text{Pm} = 0.5$  verwendet. Die Diffusivitätsparameter sind skalare Größen, da davon ausgegangen werden kann, dass im lokalen Modell die aufgelösten Skalen den wesentlichen Anteil der Energie enthalten. Anisotroper Transport und die Dissipation werden dann mit genügender Genauigkeit beschrieben und die nicht aufgelösten Moden sind unbedeutend.

Die Rotation wird parametrisiert durch die Taylor-Zahl  $\text{Ta}$

$$\text{Ta} = \frac{4\Omega^2 d^4}{\nu^2}. \quad (2.18)$$

$\text{Ta}$  entspricht dem reziproken Quadrat der im geophysikalischen Kontext oft verwendeten Ekman-Zahl:  $\text{Ta} = \text{Ek}^{-2}$ . Im Rahmen dieser Arbeit wurden Simulationen mit  $\text{Ta} = 10^6$  und  $\text{Ta} = 10^7$  durchgeführt.

Die Magnetfeldstärke wird vorgegeben durch die Elsässer-Zahl

$$\Lambda = \frac{\mathbf{B}^2}{2\Omega\mu_0\rho\eta}. \quad (2.19)$$

$\Lambda$  parametrisiert das Verhältnis von Lorentz- und Coriolis-Kraft. Beide sind innerhalb des flüssigen Erdkerns vermutlich von vergleichbarer Größenordnung, so dass  $\Lambda \approx O(1)$  gilt. Ursprünglich wurde für den Geodynamo ein Wert  $\Lambda \approx O(1)$  favorisiert, da dann die kritische Rayleigh Zahl für das Auftreten marginaler Konvektion ein Minimum aufweist, so

dass in diesem Bereich Konvektion durch ein Magnetfeld begünstigt wird. Zhang & Jones (1994) fanden anhand von Untersuchungen von Konvektion in einer rotierenden Kugelschale keinen Minimalwert. Allerdings konnten die Autoren zeigen, dass die Existenz eines stabilen Magnetfeldes eine Elsässer-Zahl in dem Bereich  $1 \lesssim \Lambda \lesssim 10$  erfordert.

Im Zusammenhang mit der Unterdrückung der Turbulenz durch das Magnetfeld wird die Magnetfeldstärke in Einheiten der Gleichgewichts-Feldstärke (*equipartition field strength*)  $B_{\text{eq}}$  angegeben, die definiert ist durch

$$B_{\text{eq}} = \sqrt{\mu_0 \rho} u_{\text{rms}}. \quad (2.20)$$

Hierbei entspricht  $u_{\text{rms}}$  der *root-mean-square* Geschwindigkeit (siehe Definition in Gleichung (2.21) im Folgenden Abschnitt) für den nicht-rotierenden nicht-magnetischen Fall. Eine Feldstärke von  $B = B_{\text{eq}}$  entspricht bei  $\text{Ta} = 10^7$  ( $\text{Ta} = 10^6$ ) einer Elsässer-Zahl von  $\Lambda = 22$  ( $\Lambda = 75$ ).

Zur Untersuchung des Übergangs von rotierender Konvektion zu rotierender Magnetokonvektion, die durch ein starkes Magnetfeld dominiert wird, wurde die Feldstärke eines extern angelegten Magnetfeldes im Bereich von  $\Lambda = 10^{-2}$  bis  $\Lambda = 100$  variiert (dies entspricht bei  $\text{Ta} = 10^7$  Werten von  $B = 0.02 \dots 2.1 B_{\text{eq}}$ ). Angelegt wurden Magnetfelder in allen drei Raum-Richtungen, wobei die überwiegende Anzahl an Simulationen mit einem in azimuthaler Richtung orientierten Feld durchgeführt wurde, da in den meisten Arbeiten davon ausgegangen wird, dass diese Komponente die dominierende Feldkomponente im Erdkern ist (Fearn, 1998).

## 2.1.6 Bestimmung mittlerer Größen

Aufgrund der schwachen Stratifizierung ist die Abhängigkeit der meisten Größen von der vertikalen Koordinate  $z$  mit Ausnahme nahe der oberen und unteren Grenzflächen relativ gering. Es ist daher gerechtfertigt, solche Größen durch ein Volumen-Mittel zu charakterisieren. Um den Einfluss der Randbedingungen zu reduzieren, wurden bei der Berechnung der Volumen-Mittel der Bereich nahe der oberen und unteren Grenzflächen nicht berücksichtigt, d.h. alle Volumen-Mittel wurden für  $0.2 < z < 0.8$  bestimmt.

Charakteristische Werte turbulenter Größen sind definiert als Volumen-Mittel (hier gekennzeichnet durch  $\langle\langle \cdot \rangle\rangle$ ) der mittleren Abweichung von der horizontal gemittelten Größe (hier gekennzeichnet durch  $\langle \cdot \rangle$ ). Exemplarisch zeigen die folgenden Gleichungen, auf welche Art gemittelte Werte für die *root-mean-square* Geschwindigkeit und die Korrelationen aus Geschwindigkeits- und Temperaturfluktuationen zu einem Zeitpunkt  $t$  berechnet werden:

$$u_{\text{rms}}^2 := \langle\langle \mathbf{u}'^2 \rangle\rangle = \frac{1}{N} \sum_{l,m,n} \sum_i (u_i^{lmn}(t) - \langle u_i(z,t) \rangle)^2 \quad (2.21)$$

$$\langle\langle u'_i T' \rangle\rangle = \frac{1}{N} \sum_{l,m,n} (u_i^{lmn}(t) - \langle u_i(z,t) \rangle) (T^{lmn}(t) - \langle T(z,t) \rangle) \quad (2.22)$$

$N = n_x n_y n_z$  entspricht der Anzahl an Gitterzellen über die gemittelt wird, und  $u_i^{lmn}(t)$  (bzw.  $T^{lmn}$ ) gibt den Wert der Größe  $u_i$  (bzw.  $T$ ) an einer bestimmten Gitterzelle,

gekennzeichnet durch  $(l, m, n)$ , zu einem Zeitpunkt  $t$  an.  $\langle u_i(z, t) \rangle$  bzw.  $\langle T(z, t) \rangle$  bezeichnen die horizontalen Mittel der entsprechenden Größe. Da es immer eindeutig ist, wann es sich um ein Volumen- bzw. ein horizontales Mittel handelt, wird im Weiteren in der Notation nicht zwischen beiden Arten unterschieden. Lediglich Größen, wie die  $\alpha$ -Koeffizienten oder die kinetische Helizität, die eine starke vertikale Abhängigkeit aufweisen (siehe Abschnitt 2.5.2), werden anhand der horizontal gemittelten,  $z$ -abhängigen Daten untersucht.

Alle Simulationen verwenden als Startpunkt einen Zustand aus einer Rechnung von einfacher Konvektion, zu dem zusätzlich die Effekte von Magnetfeld und Rotation „eingeschaltet“ werden. Nach einer Übergangsphase stellt sich dann ein neues quasi-stationäres Gleichgewicht ein, das im weiteren Verlauf der Simulation im statistischen Sinne keine weitere Änderung des Zustands aufweist. Zeitmittelungen werden ausschließlich über solche quasi-stationären Zeiträume durchgeführt. Abbildung 2.2 zeigt anhand des zeitlichen Verhaltens der Energie während einer Simulation exemplarisch einen typischen Zeitraum, über den Mittelungen durchgeführt wurden. Die durchgehende schwarze Kur-

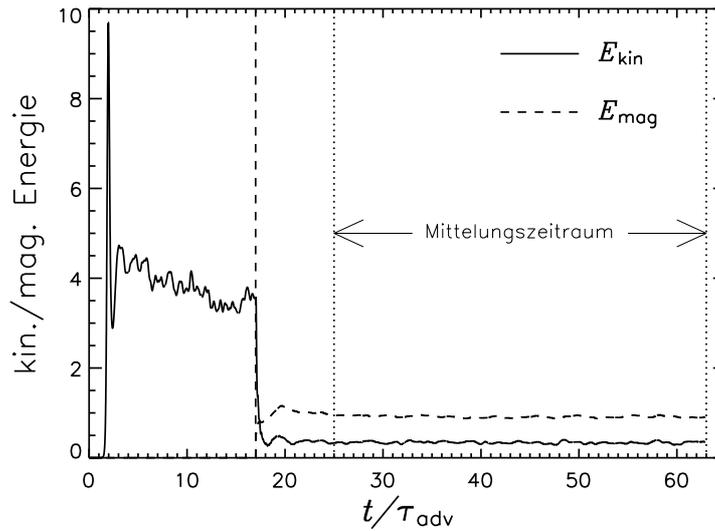


Abbildung 2.2: Kinetische Energie der vertikalen Geschwindigkeitskomponente und Energie der Magnetfeldkomponente in  $y$ -Richtung in Abhängigkeit von der Zeit ( $\Lambda \approx 1$ ,  $\text{Ta} = 10^7$ ,  $\theta = 45^\circ$ ).

ve repräsentiert den zeitlichen Verlauf der kinetischen Energie in vertikaler Richtung  $E_z^{\text{kin}} = 1/2 \int \rho u_z^2 dV$ , die gestrichelte Kurve den Verlauf der Energie des horizontalen Magnetfeldes  $E_y^{\text{mag}} = (2\mu_0)^{-1} \int B_y^2 dV$  ( $\Lambda \approx 1$  und  $\theta = 45^\circ$ ). Die Zeitabhängigkeit ist ausgedrückt in Einheiten der Turnover- oder Advektionszeit, die definiert ist als:

$$\tau_{\text{adv}} = \frac{d}{u_{\text{rms}}}. \quad (2.23)$$

Zur Berechnung von  $\tau_{\text{adv}}$  wird die typische turbulente Geschwindigkeit des quasi-stationären Endzustandes verwendet, die sich durch den Einfluss von Rotation und Magnetfeld von  $u_{\text{rms}}$  des Anfangszustands deutlich unterscheidet.

Zu Beginn handelt es sich um ein rein konvektiv instabiles System. Nach einer kurzen Wachstumsphase stellt sich bei etwa  $t \approx 5\tau_{\text{adv}}$  ein Gleichgewichtszustand ein, ehe bei  $t \approx 17\tau_{\text{adv}}$  simultan Magnetfeld und Rotation „eingeschaltet“ werden – gekennzeichnet durch die linke vertikale, gestrichelte Linie. In der Folge fällt die kinetischen Energie aufgrund der konvektions-unterdrückenden Auswirkungen von Rotation und Magnetfeld stark ab, und es erfolgt ein Übergang zu einem neuen quasistationären Gleichgewicht. Die charakteristischen Größen ergeben sich in dieser Simulation durch zeitliche Mittelung über den Bereich, der durch die vertikalen gepunkteten Linien bei  $t \approx 25\tau_{\text{adv}}$  und  $t \approx 63\tau_{\text{adv}}$  markiert ist. Durch die Untersuchung der Konvergenz der Mittelwerte für zunehmende Mittelungs-Intervalle wurde die notwendige Länge der Zeitreihen für statistisch signifikante Resultate bestimmt. Es hat sich herausgestellt, dass eine Mittelungsperiode von  $t \approx 20\tau_{\text{adv}}$  hinreichend für aussagekräftige Ergebnisse ist<sup>1</sup>.

## 2.2 Energiebilanz und Entropie

Eine detaillierte Kenntnis des Antriebsmechanismus und der hierfür zur Verfügung stehenden Energie ist erforderlich, um die Energiebilanz im Geodynamo im Detail zu verstehen. Die Leistung, die für den Antrieb des Geodynamos durch thermische Konvektion (und auch chemische Konvektion) verfügbar ist, wird durch den Temperaturgradient an der Unterseite des Mantels bestimmt, wodurch auch die Zeitskala der Kühlung des Erdkerns festgelegt wird (Kutzner & Christensen, 2000). Im Rahmen dieser Arbeit sind nur wenige einfache Teilaspekte dieses komplexen Themengebiets untersucht worden, die zur Einordnung des Modells im Kontext von Geodynamo-Simulationen dienen. Ausführlichere Diskussionen finden sich unter anderem bei Fearn (1998), Roberts & Glatzmaier (2000), Buffett & Bloxham (2002) und Anufriev et al. (2005).

### 2.2.1 Heiz- und Kühlrate

Nach dem Lenzschen Gesetz wirkt die Lorentz-Kraft den Strömen, die durch Konvektion verursacht werden, entgegen und würde daher jegliche Strömung im äußeren Erdkern verhindern, falls keine Energiequelle zu deren Aufrechterhaltung vorhanden wäre. Als Minimalanforderung muss daher die konvektiv getriebene Strömung die Ohmschen Verluste<sup>2</sup>

$$Q_{\text{Ohm}} = \int \frac{\eta}{\mu_0} (\nabla \times \mathbf{B})^2 dV \quad (2.24)$$

ausgleichen.

<sup>1</sup>Statistisch aussagekräftig bedeutet in diesem Zusammenhang, dass sich der Mittelwert sowie die mittlere quadratische Schwankung um diesen Mittelwert nicht mehr wesentlich ändern, wenn man die Länge des Intervalls weiter vergrößert.

<sup>2</sup>Diese werden oft auch als Joulesche Verluste bezeichnet.

Sowohl die Ohmschen Verluste (2.24) als auch die Quellterme, die die viskose Heizrate und die kompressible Arbeit beschreiben

$$Q_{\text{vis}} = \int (\sigma \cdot \nabla) \cdot \mathbf{u} dV \quad \text{und} \quad (2.25)$$

$$Q_{\text{comp}} = - \int p \nabla \cdot \mathbf{u} dV \quad (2.26)$$

werden in globalen Simulationen mit Boussinesq-Approximation aus Konsistenzgründen nicht berücksichtigt (Kono & Roberts, 2002).  $Q_{\text{Ohm}}$  und  $Q_{\text{vis}}$  wurden in Simulationen von Glatzmaier & Roberts (1996, anelastische Approximation) sowie von Kageyama et al. (1995) und Kageyama & Sato (1997a; 1997b, voll kompressibel) untersucht. Ein großer Einfluss auf die Lösungen konnte allerdings in keiner der Arbeiten festgestellt werden.

Der letzte Quellterm in Gleichung (2.4) beschreibt die Änderung der thermischen Energie durch molekulare Wärmeleitung in der Box und wird durch

$$Q_{\text{cond}} = \int \nabla \cdot (\chi \nabla T) dV. \quad (2.27)$$

gegeben. Die Werte der Volumenintegrale (2.24) - (2.27) werden in Abb. 2.3 für  $\Lambda \approx 1$  und  $\theta = 45^\circ$  dargestellt. Die Ohmsche Heizrate  $Q_{\text{Ohm}}$  ist lediglich leicht größer als

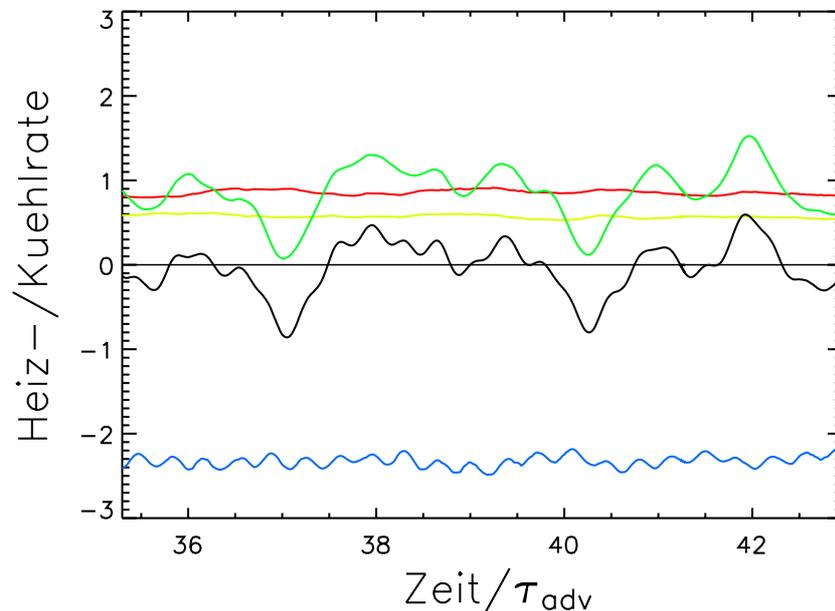


Abbildung 2.3: Heiz- bzw. Kühlraten. Die Kurven repräsentieren die viskose Heizrate (rot), die Ohmsche Heizrate (gelb), die kompressible Kühlrate (blau) und den Beitrag der (molekularen) Wärmeleitung (grün). Die Summe aller Beiträge zeigt die schwarze Kurve.  $\Lambda \approx 1$ ,  $Ta = 10^7$ ,  $\theta = 45^\circ$

die viskose Heizrate. Beide Größen sind zeitlich nahezu konstant und zeigen keinerlei signifikante Fluktuationen auf einer bestimmten Zeitskala. Für realistischere Parameter

( $\nu \ll \eta$ ) wäre zu erwarten, dass die viskose Erwärmung gegenüber allen anderen Termen vollkommen vernachlässigbar wäre (Braginsky & Roberts, 1995; Roberts & Glatzmaier, 2000; Anufriev et al., 2005).  $Q_{\text{cond}}$  (grüne Kurve) zeigt stärkere Schwankungen auf der Zeitskala der Advektionszeit, die auch die Summe aller Terme dominieren (schwarze Kurve). Im zeitlichen Mittel ist  $Q_{\text{cond}}$  von der gleichen Größenordnung wie  $Q_{\text{vis}}$  bzw.  $Q_{\text{Ohm}}$ . Alle drei Terme werden in der Summe durch Kühlung über kompressible Expansion ausbalanciert, so dass im Mittel keine Aufheizung durch Reibung, Ohmsche Verluste oder molekulare Wärmeleitung auftritt. Die kompressible Kühlrate  $Q_{\text{comp}}$  zeigt reguläre Oszillationen auf der Zeitskala von *inertial oscillations* mit einer Periode von:  $P = \pi/(\Omega \cos \theta) \approx 0.3\tau_{\text{adv}}$ . Diese Situation unterscheidet die hier durchgeführten Simulationen von den inkompressiblen Rechnungen, bei denen aufgrund von  $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$  die kompressible Arbeit (2.26) notwendigerweise verschwindet.

## 2.2.2 Dissipationszeit

In der Literatur variieren die Abschätzungen der ohmschen Verluste im Erdinnern über einen großen Bereich ( $Q_{\text{Ohm}} \approx 0.1 \dots 3.5$  TW, siehe Christensen & Tilgner 2004). Diese Verlustleistung muss mindestens durch die Konvektion aufgebracht werden, um das Erdmagnetfeld aufrecht erhalten zu können.

Christensen & Tilgner (2004) haben aus der Analyse einer Vielzahl an Geodynamo-Simulationen eine einfache Beziehung zwischen der Dissipations-Zeit

$$\tau_{\text{diss}} = \frac{E_{\text{mag}}}{Q_{\text{Ohm}}} \quad (2.28)$$

und der Zerfallszeit eines Dipols  $\tau_{\text{dipol}} = R^2/(\pi^2\eta)$  erhalten<sup>3</sup>:

$$\frac{\tau_{\text{diss}}}{\tau_{\text{dipol}}} = 1.74 \cdot \text{Rm}^{-1}. \quad (2.29)$$

Das Gesetz (2.28) zeigt keine Abhängigkeit von der Rotationsgeschwindigkeit bzw. Taylor-Zahl und nur eine geringe Abhängigkeit von  $\text{Pm}$ . Es wird vermutet, dass diese Abhängigkeit für  $\text{Pm} \ll 1$  verschwindet, da dann die turbulente Längenskala der Strömung kleiner sein sollte als die Skala, auf der magnetische Energie durch Diffusion dissipiert wird. Die Zeitskala der Abkühlung setzt dabei sehr enge Randbedingungen für das Alter eines festen inneren Kerns. Da der Geodynamo ohne einen solchen festen Kern anders bzw. gar nicht funktioniert, ist ein alter Kern (älter als  $\sim 3.5$  Milliarden Jahre) deutlich einfacher in Einklang mit den paleomagnetischen Daten zu bringen (siehe Abschnitt 1.2).

Mit Hilfe des Skalierungsgesetzes (2.28) bestimmten Christensen & Tilgner (2004) für die ohmschen Verluste einen Wert von etwa 0.2 – 0.5 TW. Die Autoren schließen daraus, dass keine zusätzliche (volumetrische) Wärmequelle durch radioaktives Heizen im Innern des flüssigen Erdkerns erforderlich ist, um den Geodynamo anzutreiben.

<sup>3</sup> $\tau_{\text{dipol}}$  entspricht hier der Definition von Christensen & Tilgner (2004), die sich von der in dieser Arbeit verwendeten Definition  $\tau_{\text{diff}} = R^2/\eta$  durch den Faktor  $\pi^2$  unterscheidet. Für den Zusammenhang zwischen  $\tau_{\text{diss}}$  und  $u_{\text{rms}}$  bzw.  $\text{Rm}$  ist dies ohne Bedeutung.

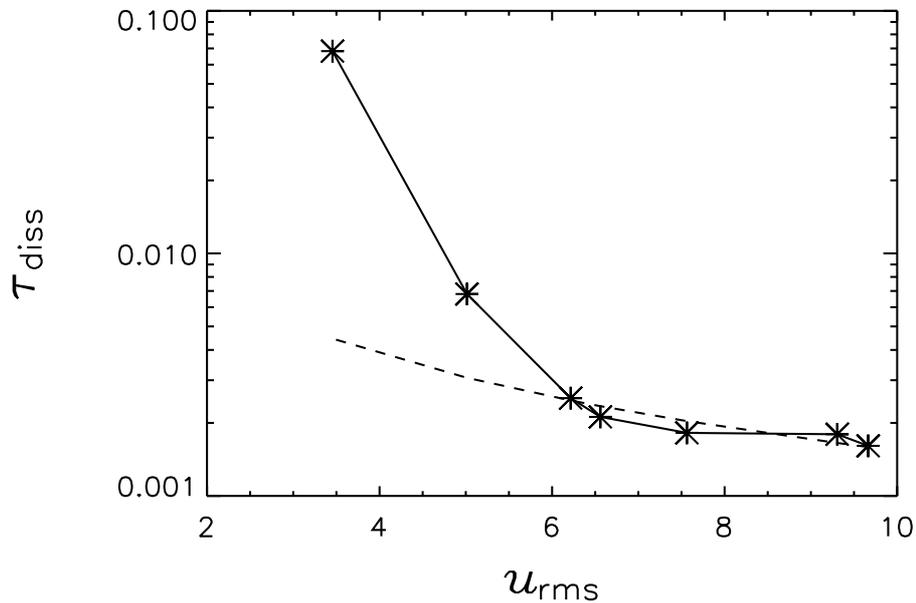


Abbildung 2.4: Dissipationszeit in Abhängigkeit der turbulenten Geschwindigkeit. Die gestrichelte Kurve repräsentiert eine Funktion  $\propto u_{\text{rms}}^{-1}$ .  $\Lambda \approx 1$ ,  $\text{Ta} = 10^7$ ,  $\theta = 45^\circ$ .

Aus ihrer Analyse folgt zudem, dass ein Alter des inneren festen Kerns von mehr als 2.5 Milliarden Jahren möglich ist. Dies steht im Widerspruch zu den Ergebnissen von [Labrosse et al. \(2001\)](#), die ohne zusätzliches radioaktives Heizen ein Alter des inneren Kerns  $\lesssim 2.5$  Milliarden Jahre erhalten (wahrscheinlich eher in der Größenordnung von 1 Milliarden Jahre). Ein junger Erdkern wird ebenfalls vorhergesagt von [Buffett \(2002\)](#) und [Kotelnikova & Starchenko \(2003\)](#).

Obwohl Gleichung (2.29) ein relativ allgemeiner Zusammenhang zu sein scheint ( $\tau_{\text{diss}} \propto 1/u_{\text{rms}}$ ), der auch im Karlsruher Dynamo Experiments erfüllt wurde (solange eine Abhängigkeit von  $\text{Pm}$  nicht berücksichtigt wird), kann er in den im Rahmen dieser Arbeit durchgeführten Rechnungen lediglich für schwache Magnetfelder annähernd bestätigt werden. Abb 2.4 zeigt  $\tau_{\text{diss}}$  in Abhängigkeit von der turbulenten Geschwindigkeit  $u_{\text{rms}}$ . Die verschiedenen Datenpunkte entsprechen den Realisierungen für unterschiedliche  $\Lambda$  und die gestrichelte Kurve zeigt eine Funktion proportional zu  $u_{\text{rms}}^{-1}$ . Für  $u_{\text{rms}} \gtrsim 6$  (entspricht  $\Lambda \lesssim 1$ ) scheint dies eine passende Approximation darzustellen<sup>4</sup>. Für stärkere Felder (entspricht kleinerem  $u_{\text{rms}}$ ) nimmt  $\tau_{\text{diss}}$  allerdings deutlich stärker zu, als es durch ein einfaches  $1/u_{\text{rms}}$ -Gesetz wiedergegeben wird. In diesem Aspekt zeigt sich die begrenzte Vergleichbarkeit der verschiedenen Simulationen, bei denen es sich um zwei unterschiedliche Modell-Konfigurationen handelt. So beruht (2.29) auf den Ergebnissen von MHD-Dynamo-Simulationen in Kugelschalengeometrie, während die in Abb. 2.4 präsentierten Daten aus den Resultaten von lokalen Simulationen von Magnetokonvektion gewonnen wurden. Da hierbei ein Feld künstlich aufgeprägt wird, stellt auch  $E_{\text{mag}}$  eine

<sup>4</sup>Allerdings muss man bei dem logarithmischen Plot die Skalierung der Achsen berücksichtigen, die eventuell für größere  $u_{\text{rms}}$  eine bessere Übereinstimmung suggeriert.

vorgegebene Größe dar. Insbesondere der Bereich der hohen Feldstärken ist in den lokalen Simulationen charakterisiert durch sehr niedrige magnetische Reynolds-Zahlen, die die eigentlichen Verhältnisse im Geodynamo nur unzureichend wiedergeben. Die Abweichungen mögen auch eine Konsequenz des im vorherigen Abschnitts untersuchten Verhaltens der Quellterme in der Gleichung für die thermische Energie sein. In inkompressiblen Simulationen führt das Fehlen des Terms  $\propto p \nabla \cdot \mathbf{u}$ , der Arbeit durch Kompression beschreibt, möglicherweise zu einer anderen Balance in Gleichung (2.4) und so zu einem anderen Verhalten der Dissipationszeit.

### 2.2.3 Entropie

Abbildung 2.5 zeigt die horizontal gemittelte Entropie

$$\langle s \rangle = \ln \langle p \rho^{-\gamma} \rangle \quad (2.30)$$

für den Anfangszustand (schwarze durchgezogene Kurve) sowie die quasi-stationären zeitlich und horizontal gemittelten Endzustände von Konvektion (schwarz gepunktet), rotierender Konvektion (rot), nicht-rotierender Magnetokonvektion (grün) und rotierender Magnetokonvektion (blau). Der quasi-stationäre Endzustand im Fall einer entwickel-

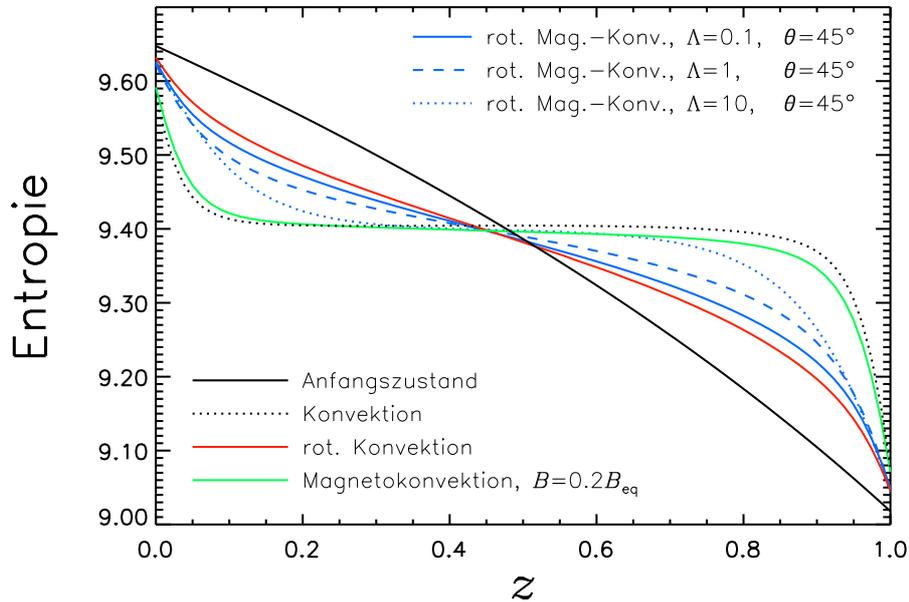


Abbildung 2.5: Horizontal gemittelte Entropie  $\langle s \rangle = \ln \langle p \rho^{-\gamma} \rangle$  für verschiedene Formen von Konvektion.

ten nicht-rotierenden Konvektion (schwarze gepunktete Kurve) zeigt im Innern der Box einen isentropen Verlauf ( $\nabla S = 0$ ), während die steilen Gradienten an den vertikalen Grenzflächen die thermischen Randschichten (*thermal layers*) kennzeichnen. Rotierende Konvektion (rote Kurve) ist charakterisiert durch merkliche Abweichungen von dem isentropen Zustand im Innern und deutlich verbreiterten thermischen Randschichten. Ursache

ist die Coriolis-Kraft  $\mathbf{F}_C = -2\rho\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u}$ , über die durch lineare Kopplung der einzelnen Geschwindigkeitskomponenten effektiv vertikale in horizontale Impulse (und umgekehrt) transferiert werden können. Eine solche Möglichkeit existiert nicht für  $\theta = 0^\circ$  oder nicht-rotierende Magnetokonvektion, wo solche Übergänge nur durch nicht-lineare Effekte stattfinden können. Die Kopplung zwischen horizontalen und vertikalen Komponenten resultiert in einer verstärkten Wechselwirkung zwischen einzelnen Wirbeln, wodurch der turbulente Transport von Wärme reduziert wird. Dies verhindert die Homogenisierung der Entropie im Inneren der Box (Brummell et al., 1996). Aufgrund der durch die Randbedingungen fest vorgegebenen Temperaturen muss der Abtransport von Wärme über einen größeren Gradienten des mittleren Temperaturfeldes erfolgen. Der mittlere Temperaturgradient im Boxinnern ist daher deutlich steiler, was sich im superadiabatischen Verhalten der Entropie widerspiegelt (rote Kurve). Die mittlere Entropie für rotierende Magnetokonvektion (blaue Kurven) liegt dagegen deutlich näher am isentropen Verlauf gewöhnlicher Konvektion. Je stärker das angelegte Feld, desto mehr entspricht das Verhalten der Entropie im Innern der Box dem isentropen, durchmischten Verhalten gewöhnlicher thermischer Konvektion. Ein Magnetfeld ermöglicht es daher einem rotierenden System Wärme effektiver zu transportieren. Der Einfluss der Rotation ist im Vergleich von rotierender Magnetokonvektion und nicht-rotierender Magnetokonvektion (grüne Kurve) an den im ersten Fall deutlich verbreiterten thermischen Randschichten erkennbar. Trotz starker Unterdrückung von Turbulenz-Intensität und Wärmefluss bei nicht-rotierender Magnetokonvektion sind die Abweichungen des Entropieverlaufs (grüne Kurve) im Vergleich zur gewöhnlichen Konvektion (schwarz gepunktet) recht gering. Eine detaillierte Untersuchung über den turbulenten Transport von Wärme in Abhängigkeit der Magnetfeldstärke findet sich in Abschnitt 2.4.

## 2.3 Die Struktur rotierender Magnetokonvektion

### 2.3.1 Konvektionszellen und Skalenlängen

Abbildung 2.6 zeigt vier verschiedene Momentaufnahmen der vertikalen Geschwindigkeitskomponente  $u_z$  zu einem festen Zeitpunkt bei einer Co-Latitude von  $\theta = 45^\circ$ . Die Isoflächen repräsentieren die vertikale Komponente der Geschwindigkeit bei  $u_z = u_{\text{rms}}$  und die transparenten Strukturen zeigen die vertikale Komponente bei  $u_z = 0.5u_{\text{rms}}$ . Ein horizontaler Schnitt der Konturen von  $u_z$  bei  $z = 0.5$  ist auf eine Ebene unterhalb der Box projiziert. Blaue Farbtöne repräsentieren abwärts orientierte Bewegungen (*Downflows*) und gelbe bzw. rote Farbtöne zeigen die aufwärts gerichteten Strömungen (*Upflows*). Die obere Zeile zeigt Ergebnisse mit langsamerer Rotationsgeschwindigkeit ( $\text{Ta} = 10^6$ , links  $\Lambda \approx 1$  bzw.  $B_y \approx 0.1B_{\text{eq}}$ , rechts:  $\Lambda \approx 4$  bzw.  $B_y \approx 0.2B_{\text{eq}}$ ). Die untere Zeile präsentiert die Resultate für  $\text{Ta} = 10^7$  (links  $\Lambda \approx 1$  bzw.  $B_y \approx 0.2B_{\text{eq}}$ , rechts:  $\Lambda \approx 4$  bzw.  $B_y \approx 0.4B_{\text{eq}}$ ).

Die Isoflächen der vertikalen Geschwindigkeitskomponente  $u_z$  in Abb. 2.6 formen zellenartige Objekte und zeigen kohärente großskalige Strukturen, die nahezu die komplette vertikale Ausdehnung der Box überspannen. Diese Konvektionszellen werden kontinuierlich gebildet, verformt und aufgelöst. Es bildet sich ein quasi-stationäres turbu-

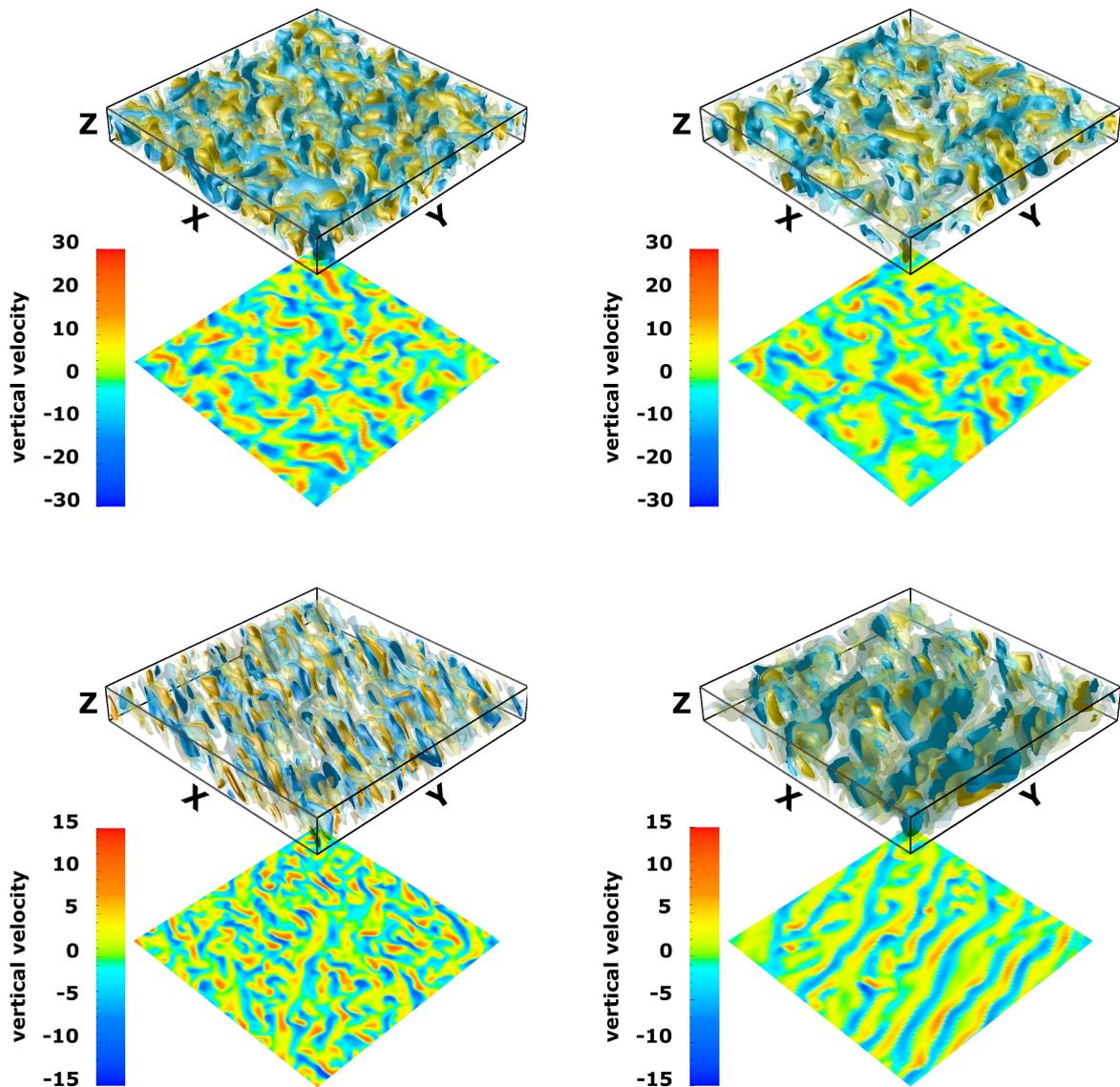


Abbildung 2.6:  $z$ -Komponente der Geschwindigkeit für  $Ta = 10^6$  (obere Zeile) und  $Ta = 10^7$  (untere Zeile). Linke Seite:  $\Lambda \approx 1$ , rechte Seite:  $\Lambda \approx 4$ . Alle Plots zeigen einen Snapshot bei  $\theta = 45^\circ$ .

lentes Muster, das im Innern der Box weitaus irreguläreres Verhalten aufweist, als nahe den vertikalen Grenzflächen<sup>5</sup>. Die mittlere horizontale Ausdehnung der Konvektionszellen hängt stark von der Rotationsrate sowie der anliegenden Magnetfeldstärke und -orientierung ab. Die Zellen sind entlang der Rotationsachse ausgerichtet (deutlich sichtbar in Abb. 2.6 links unten), wie es durch das Taylor-Proudman-Theorem bestimmt ist. Eine höhere Rotationsgeschwindigkeit führt zu kleineren Zellen, während ein horizontales Magnetfeld ab einer gewissen Schwelle entlang der Feldlinien elongierte Zellen ausbildet.

<sup>5</sup>Eine sehr detaillierte Beschreibung der Vorgänge nahe der vertikalen Grenzflächen findet sich bei Brummell et al. (1996).

Bei  $Ta = 10^7$  löst sich das Muster aus vielen schmalen Konvektionssäulen zwischen  $\Lambda \approx 1$  und  $\Lambda \approx 4$  mehr und mehr auf, und die Zellen transformieren zu in Richtung des äußeren Magnetfeldes gestreckten Strukturen. Visuell ist diese Elongation im rechten unteren Teil von Abb. 2.6 (für  $Ta = 10^7$  und  $\Lambda \approx 4$ ) auszumachen. Entlang der Feldlinien existieren dann lediglich geringe Variationen in den aufwärts bzw. abwärts orientierten Strömungen, wobei die *sheet*-artigen Strukturen weiterhin parallel zur Rotationsachse ausgerichtet sind. Die Zweidimensionalität der Strömung ( $\partial u_z / \partial y = 0$ ) ergibt sich aus einer Bedingung ähnlich dem Taylor-Proudman Theorem für rotierende Flüssigkeiten. Unter Vernachlässigung der diffusiven Terme lässt sich die Induktionsgleichung (2.5) umschreiben:

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{B} = (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{u}. \quad (2.31)$$

Einem Zustand ohne Bewegungen wird ein gleichförmiges Magnetfeld  $\mathbf{B}$  überlagert. Das System wird dann leicht gestört, so dass ein vom Ausgangszustand verschiedener, aber stationärer Zustand entsteht, wobei die Abweichungen des gestörten Zustandes vom Ausgangszustand klein sind. Für die Abweichungen  $\mathbf{u}$  vom (unbewegten) Anfangszustand ergibt sich dann aus Gleichung (2.31) unmittelbar die Beziehung:

$$(\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{u} = 0 \quad \text{bzw. in Komponenten:} \quad B_i \frac{\partial u_j}{\partial x_i} = 0. \quad (2.32)$$

Aus (2.32) folgt direkt, dass (stationäre) Strömungen in Gegenwart eines gleichförmigen Magnetfeldes nicht in Richtung dieses Feldes variieren, die Strömung also notwendigerweise zweidimensional ist. In einer Kugel- oder Zylindergeometrie ist dieses Verhalten unter dem Namen *Ferraro's Law of Isorotation* bekannt, das besagt, dass für stationäre axialsymmetrische Strömungen und Felder die Winkelgeschwindigkeit entlang der Feldlinien konstant ist (siehe z.B. Chandrasekhar 1961 oder Priest 1982).

Anders als bei Konvektion mit einem starken Dichtekontrast, bei der die Struktur der Zellen durch isolierte breite und warme *Upflows* und konzentrierte starke *Downflows* geprägt wird, ist im Falle einer schwachen Dichteschichtung die Unterteilung in *Down-* und *Upflows* weniger klar ausgebildet. Stattdessen formen die *Upflows* eine Art von unzusammenhängenden einzelnen Strukturen, die von einem schwach verbundenen Netzwerk – gebildet aus breiteren *Downflows* – umgeben sind. *Up-* und *Downflows* haben annähernd die gleiche Magnitude (die *Downflows* sind geringfügig stärker) und belegen in etwa die gleiche Fläche in einem horizontalem Schnitt durch die Box.

### 2.3.2 Korrelationslänge

Um den visuellen Eindruck aus Abb. 2.6 und die Anisotropie der Turbulenz quantitativ zu charakterisieren, wird die mittlere Ausdehnung der Konvektionszellen in beide horizontale Richtungen ( $x, y$ ) abgeschätzt. Dazu werden die Zwei-Punkt-Korrelationen der turbulenten vertikalen Geschwindigkeitskomponente betrachtet, die für die beiden horizontalen Richtungen wie folgt definiert sind:

$$Q_{zz}(\delta x) = \frac{\langle u'_z(x) u'_z(x + \delta x) \rangle}{\langle u'_z(x)^2 \rangle} \quad \text{bzw.} \quad Q_{zz}(\delta y) = \frac{\langle u'_z(y) u'_z(y + \delta y) \rangle}{\langle u'_z(y)^2 \rangle}. \quad (2.33)$$

$Q_{zz}$  kann als Maß für die mittlere Ausdehnung einer Konvektionszelle verwendet werden. Bewegungen innerhalb der Zelle erfolgen in die gleiche Richtung und weisen daher eine hohe Korrelation auf. Eine geringe bzw. keine Korrelation zwischen den Geschwindigkeiten an zwei Punkten besteht, wenn der Abstand zwischen beiden betrachteten Punkten ( $\delta x$  bzw.  $\delta y$ ) die Ausdehnung der Zelle überschreitet. Die mittlere Zellgröße definiert die Korrelationslänge  $\lambda_{\text{corr}}$  oder Taylor-Mikroskala, die die charakteristische Längenskala von Wirbel-Filamenten in rotierenden Flüssigkeiten darstellt.  $\lambda_{\text{corr}}$  wird berechnet, indem die Funktion

$$f(\delta x) = 1 - \frac{1}{\lambda_{\text{corr}}^2} (\delta x)^2 \quad (2.34)$$

an den abfallenden Teil der Zwei-Punkt-Korrelation  $Q_{zz}$  angepasst wird. Abbildung 2.7 zeigt die Korrelationsfunktion orthogonal (linker Plot) und parallel (rechter Plot) zum Magnetfeld ( $B_y$ ) für  $\Lambda = 0.1, 1, 10, 100$  (durchgezogene Linien) und die entsprechenden angepassten Funktionen (gestrichelte Linien). Die Form der Kurven zeigt die Abnah-

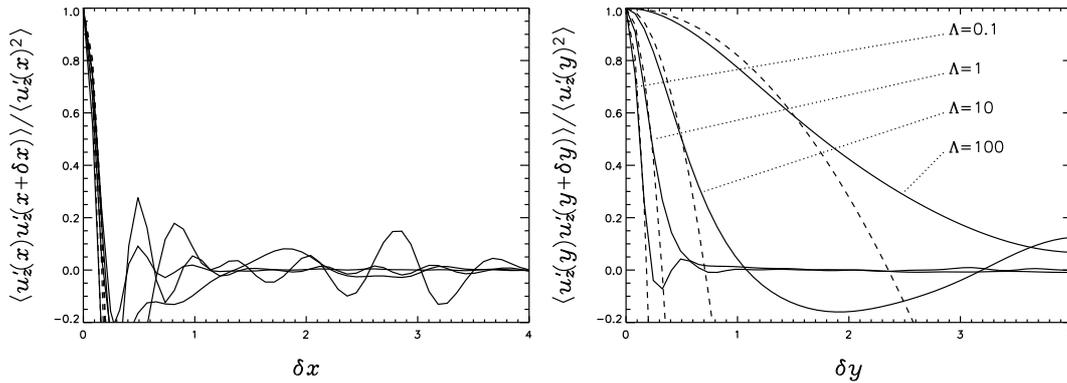


Abbildung 2.7: Zwei-Punkt-Korrelationsfunktionen  $Q_{zz}(\delta x)$  und  $Q_{zz}(\delta y)$ . Die durchgezogenen Linien repräsentieren  $Q_{zz}$ , und die gestrichelten Linien repräsentieren die an den innersten abfallenden Teil von  $Q_{zz}$  angepasste Funktion (2.34).  $Ta = 10^7$ ,  $\theta = 0^\circ$ ,  $\Lambda \approx 0.1, 1, 10, 100$ .

me der Korrelation der turbulenten vertikalen Geschwindigkeitskomponente  $u'_z$  an zwei verschiedenen Koordinaten mit zunehmenden Abstand zwischen diesen beiden Punkten. Die Breite des inneren Peaks von  $Q_{zz}(\delta x)$ , die die Korrelationslänge orthogonal zum angelegten Feld  $B_y$  bestimmt, ist nahezu unabhängig von der angelegten Feldstärke. Die einzelnen Kurven auf der rechten Seite von Abb. 2.7 sind kaum unterscheidbar und daher auch nicht bezeichnet. Der Einfluss des Magnetfeldes ist hingegen deutlich sichtbar anhand der starken Verbreiterung des inneren Peaks von  $Q_{zz}(\delta y)$  (linke Seite von Abb. 2.7).

Abbildung 2.8 zeigt die nach Gleichung (2.34) bestimmten Korrelationslängen  $\lambda_{x,y}^{\text{corr}}$  in Abhängigkeit der angelegten Magnetfeldstärke für zwei verschiedene Rotationsgeschwindigkeiten (rot:  $Ta = 10^6$ , grün:  $Ta = 10^7$ ). Wie bereits in Abb. 2.7 (links) erkennbar, ist für beide Rotationsgeschwindigkeiten die Korrelationslänge  $\lambda_x^{\text{corr}}$  senkrecht zum angelegten Magnetfeld (durchgezogene Kurven) nahezu unabhängig von  $B_y$ . Die mittlere Ausdehnung der Konvektionszellen in  $x$ -Richtung wird lediglich durch die

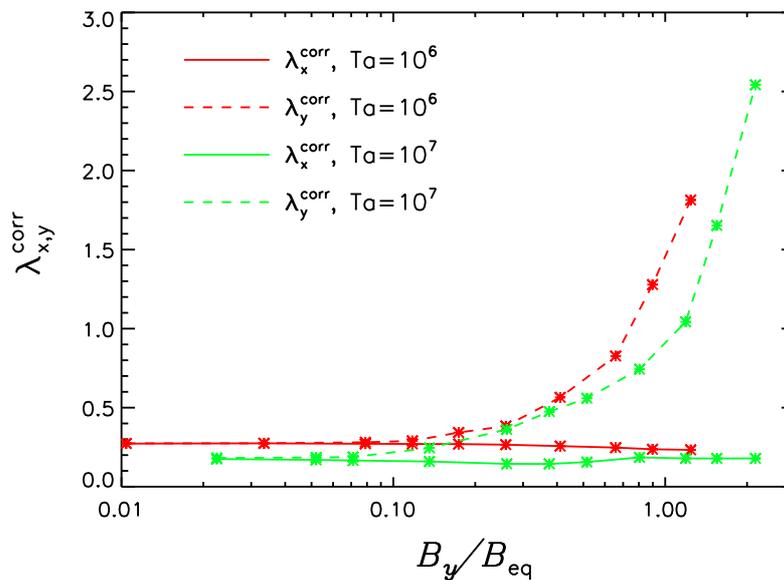


Abbildung 2.8: Korrelationslänge  $\lambda_{x,y}^{\text{corr}}$  in Abhängigkeit von der vorgegebenen Magnetfeldstärke  $B_y/B_{\text{eq}}$ . Die durchgezogene (gestrichelte) Kurve zeigt die Korrelationslänge in  $x$ - bzw.  $y$ -Richtung für  $\text{Ta} = 10^6$  (rot) und für  $\text{Ta} = 10^7$  (grün).

Rotationsrate bestimmt. Nach der linearen Theorie skaliert die bevorzugte horizontale Längenskala für rotierende marginale Konvektion  $\propto \text{Ta}^{-1/6}$  (bei ausreichend schneller Rotation). Skalierungsgesetze für rotierende *finite-amplitude* Konvektion sind detailliert von [Stellmach & Hansen \(2004\)](#) untersucht worden. Die Autoren bestätigen das Skalierungsgesetz für die Ausdehnung einer Konvektionszelle für einen großen Bereich an Rotationsgeschwindigkeiten anhand der bevorzugten Wellenzahl, die aus dem Maximum der spektralen Verteilung der kinetischen Energie berechnet wird. Die hier erhaltenen Ergebnisse für die Ausdehnung der Zellen in  $x$ -Richtung (bzw. für beide horizontalen Richtungen bei verschwindend kleinen Magnetfeldern) zeigen keine Abweichungen von diesem Skalengesetz, da gilt  $\lambda_x^{\text{corr}}(\text{Ta} = 10^6)/\lambda_x^{\text{corr}}(\text{Ta} = 10^7) \approx 1.5 \approx (10^6/10^7)^{-1/6}$ . Mit lediglich zwei verschiedenen Rotationsgeschwindigkeiten ist der hier überspannte Parameterbereich allerdings zu beschränkt, um robuste Aussagen zu treffen.

Die Korrelationslänge parallel zu dem angelegten Magnetfeld spiegelt die Elongation der Zellen mit wachsendem Einfluss des Magnetfeldes wieder. Die Magnetfeldstärke, ab der sich eine Anisotropie in der Struktur der Zelle quantifizieren lässt, hängt kaum von der Rotationsgeschwindigkeit ab. Für  $\text{Ta} = 10^7$  ist dieser Übergang für ein minimal kleineres Magnetfeld als bei  $\text{Ta} = 10^6$  sichtbar.

Die Änderung der typischen Skalenlängen der Strömung ist wesentlich im Hinblick auf die Frage nach dem nicht-linearen Einfluss des Magnetfeldes auf die das Feld erzeugende Strömung. Im Allgemeinen wird angenommen, dass im flüssigen äußeren Erdkern die Strömung stark von dem durch den Dynamo-Prozess erzeugten Magnetfeld beeinflusst wird ([Jones 2000](#)). Viele der globalen Simulationen zeigen allerdings lediglich eine sehr schwache Rückwirkung, so dass es sich hierbei vom Prinzip eher um kinematische Dy-

namos handelt. [Stellmach & Hansen \(2004\)](#) konnten anhand von Dynamo-Simulationen in einer kartesischen Box zeigen, dass erst bei sehr kleinen Ekman-Zahlen die nicht-lineare Rückwirkung des Magnetfeldes auf die Strömung deutlich erkennbar wird. Anhand der Veränderungen in der spektralen Energie-Verteilung der kinetischen Energie demonstrierten sie, dass die Skalenunterschiede zwischen nicht-magnetischer (rotierender) Konvektion und einem selbst-konsistenten konvektiv getriebenen Dynamo stark mit steigender Rotationsgeschwindigkeit zunehmen. Eine Analyse des zeitlichen Verhaltens der Strömung in ihren Dynamo-Simulationen mit höchster Rotationsgeschwindigkeit ergab, dass dieser Skalenübergang instabil ist. In Phasen mit starkem Magnetfeld bestimmt eine großskalige Struktur die Strömung, die allerdings nicht in der Lage ist, das Magnetfeld aufrecht zu erhalten. Es kommt dann zu einem (langsamen) Zerfall des Feldes, und die Strömung geht bei schwächeren Feldstärken wieder zu Strukturen mit wesentlich kleinerer Ausdehnung über. Auf längeren Zeitskalen weist die Konvektion daher ein stark zeitabhängiges Verhalten auf. Wiederholte Übergänge zwischen großskaligen und kleinskaligen Strukturen korrespondieren mit Phasen von starkem und schwachem Magnetfeld. Basierend auf Untersuchungen von Magnetokonvektion in Kugelgeometrie wurde ein solcher Mechanismus bereits von [Zhang & Gubbins \(2000\)](#) vorhergesagt.

### 2.3.3 Anisotropie in der Turbulenz-Intensität

Der anisotrope Charakter der Turbulenz, der anhand der Form der Konvektionszellen im vorherigen Abschnitt deutlich wurde, zeigt sich ebenfalls im Verhalten der Turbulenz-Intensitäten  $\langle u_i'^2 \rangle$ . Für eine quantitative Untersuchung werden die folgenden Funktionen eingeführt:

$$A_H = \frac{\langle u_y'^2 \rangle - \langle u_x'^2 \rangle}{u_{\text{rms}}^2} \quad (2.35)$$

$$A_V = \frac{\langle u_x'^2 \rangle + \langle u_y'^2 \rangle - 2\langle u_z'^2 \rangle}{u_{\text{rms}}^2} \quad (2.36)$$

(siehe auch [Brandenburg et al. 1990](#)). Die Anisotropie der Turbulenz-Intensitäten wird durch  $A_H$  und  $A_V$  auf folgende Art und Weise beschrieben:

$$A_H \begin{cases} < 0 & \text{dominiert durch Turbulenz } \perp B_y \\ = 0 & \text{isotrop (horizontal)} \\ > 0 & \text{dominiert durch Turbulenz } \parallel B_y, \end{cases}$$

$$A_V \begin{cases} < 0 & \text{dominiert durch vertikale Turbulenz} \\ = 0 & \text{isotrop (vertikal zu horizontal)} \\ > 0 & \text{dominiert durch horizontale Turbulenz.} \end{cases}$$

Den Verlauf von  $A_H$  zeigt [Abb. 2.9](#), anhand der der Übergang von einer horizontal isotropen Turbulenz für kein bzw. ein schwaches Magnetfeld in eine stark anisotrope, in diesem Fall durch die  $y$ -Komponente dominierte Turbulenz, ersichtlich ist. Die Unter-

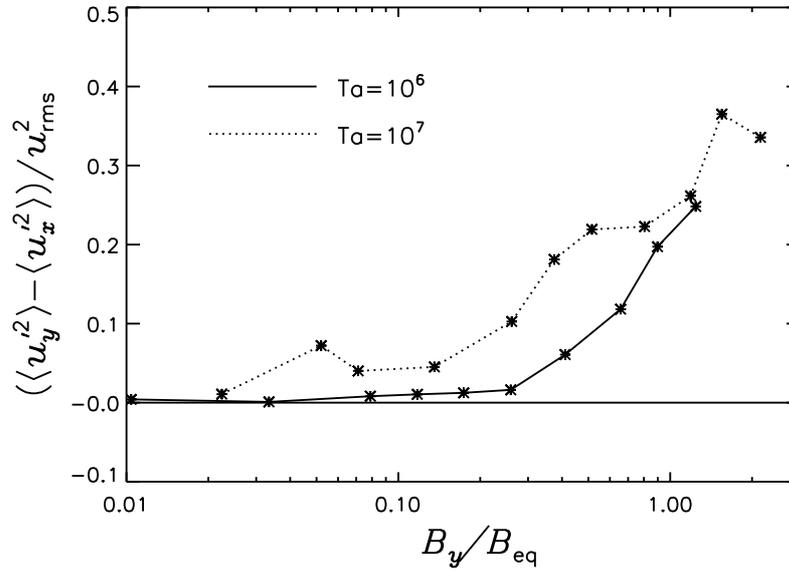


Abbildung 2.9: Horizontale Anisotropie von rotierender Magnetokonvektion für  $Ta = 10^6$  (durchgezogene Kurve) und  $Ta = 10^7$  (gepunktete Kurve),  $\theta = 0^\circ$ .

drückung der Fluktuationen orthogonal zum angelegten Magnetfeld ist stärker als parallel zum angelegten Feld, was aufgrund der Eigenschaften der Lorentz-Kraft erwartet wird. Dieser Übergang hängt geringfügig von der Rotationsgeschwindigkeit ab. Für  $Ta = 10^6$  ergibt sich ein annähernd (horizontal) isotropes Verhalten bis zu einer Magnetfeldstärke von  $B_y \approx 0.3B_{eq}$  (entspricht  $\Lambda \approx 6.5$ ). Für schnellere Rotation ( $Ta = 10^7$ ) gilt mit Ausnahme von sehr kleinen  $B_y$  stets  $A_H > 0$ .

Abbildung 2.10 zeigt die vertikale Anisotropie  $A_V$  bei  $\theta = 0^\circ$ . Für kein bzw. ein nur sehr schwaches Magnetfeld führt eine erhöhte Rotationsgeschwindigkeit zu einer Isotropisierung auf kleinen Skalen – erkennbar an dem Verhalten von  $A_V$  für schwache Magnetfelder. Brummell et al. (1996) haben in Simulationen von rotierender Konvektion gezeigt, dass Rotation auf mittleren/großen Skalen zu einer anisotropen kohärenten Struktur der Strömung führt, während auf kleinen Skalen die Richtungsabhängigkeit der Turbulenz reduziert wird. Bereits kleine Magnetfeldstärken heben diese Isotropisierung wieder auf, und die Turbulenz wird von der vertikalen Komponente dominiert. Diese Dominanz ist für  $Ta = 10^7$  besonders ausgeprägt im Bereich  $B_y \approx 0.3B_{eq}$  (entspricht für  $Ta = 10^7$  etwa  $\Lambda \approx 2$ ). Die Lage der Minima (korrespondierend zu einem Maximum der Dominanz der vertikalen Turbulenz-Intensität) für die beiden unterschiedlichen Rotationsraten deutet darauf hin, dass diese Eigenschaft nur von der absoluten Magnetfeldstärke und nicht von der Rotationsgeschwindigkeit abhängt.

Eine negativer Wert für  $A_V$  ergab sich ebenfalls in den Untersuchungen von Brandenburg et al. (1990) (allerdings für ein extern angelegtes  $B_z$ ). Lediglich nahe der Randgebiete – die in den hier präsentierten Ergebnissen nicht berücksichtigt sind – wird  $A_V$  positiv. Dies lässt sich durch die Randbedingungen an den oberen und unteren Grenzflächen erklären, die dort  $u_z^{\prime 2} = 0$  erzwingen.

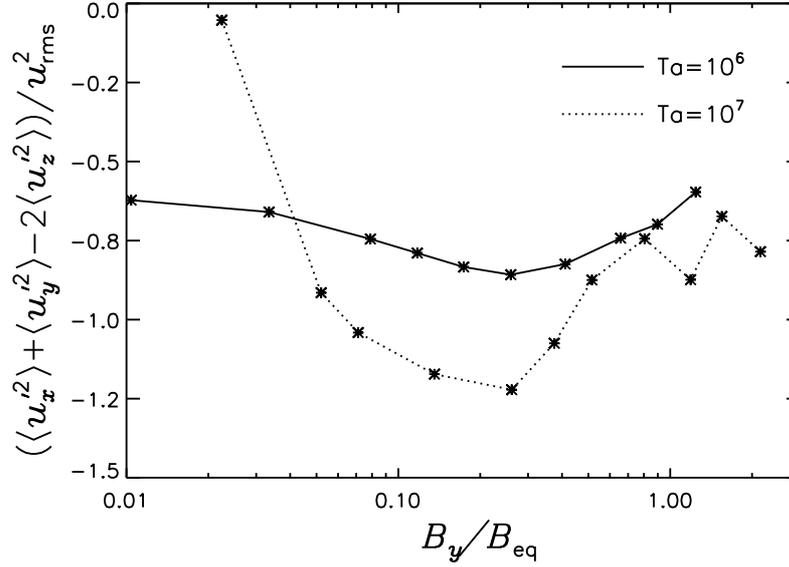


Abbildung 2.10: Vertikale Anisotropie von rotierender Magnetokonvektion für  $Ta = 10^6$  (durchgezogene Kurve) und  $Ta = 10^7$  (gepunktete Kurve),  $\theta = 0^\circ$ .

## 2.4 Turbulenter Wärmetransport

### 2.4.1 Quasi-lineare Beschreibung des turbulenten Wärmetransports

Auch wenn hier lediglich moderat turbulente Systeme untersucht werden können, so sind die turbulenten Werte der Transportkoeffizienten größer als die entsprechenden molekularen Werte. Der Transport von Wärme durch die turbulenten Bewegungen ist daher effektiver als durch die molekulare Wärmeleitung. Der turbulente Wärmefluss eines statistisch stationären konvektiven Systems ist gegeben durch:

$$F_i^{\text{conv}} = \rho c_p \langle u_i' T' \rangle = -\kappa_{ij} \left( \frac{\partial T}{\partial x_j} - \frac{g_j}{c_p} \right) \quad (2.37)$$

(siehe z.B. Rüdiger, 1989).  $\kappa_{ij}$  ist die tensorielle Wärmeleitfähigkeit, die über  $\kappa = \rho c_p \chi$  in Bezug zur thermischen Diffusivität  $\chi$  steht.  $\partial T / \partial x_j$  bezeichnet den globalen Temperaturgradienten in Richtung  $x_j$ . Globaler Temperaturgradient und Gravitationsfeld sind parallel zur  $z$ -Achse ausgerichtet, so dass lediglich die Koeffizienten  $\kappa_{xz}$ ,  $\kappa_{yz}$  und  $\kappa_{zz}$  diskutiert werden können. Da die Dichte  $\rho$  annähernd konstant ist, ergibt sich die einfache Beziehung  $\kappa_{iz} \propto \langle u_i' T' \rangle$ .  $\kappa_{iz}$  lässt sich so im Prinzip unmittelbar aus den Korrelationen von  $u_i'$  und  $T'$  bestimmen. Es ist daher praktisch, unter Verwendung von  $\chi = \kappa / (\rho c_p)$  einen normierten Wärmefluss

$$\widehat{F}_i^{\text{conv}} = \frac{F_i^{\text{conv}}}{\rho c_p} = \langle u_i' T' \rangle = -\chi_{iz} \left( \frac{\partial T}{\partial z} - \frac{g_z}{c_p} \right) \quad (2.38)$$

zu definieren, welcher im Folgenden in Zusammenhang mit dem turbulenten Transport von Wärme betrachtet wird.

Aus der quasi-linearen Theorie folgt eine einfache Beziehung zwischen der thermischen Diffusivität  $\chi$  und dem Korrelationstensor  $Q_{ij} = \langle u'_i(\mathbf{x}, t) u'_j(\mathbf{x}, t) \rangle$ :

$$\chi_{ij} = \frac{1}{2} \tau_{\text{corr}} Q_{ij}, \quad (2.39)$$

wobei  $\tau_{\text{corr}}$  die Korrelationszeit der Turbulenz definiert. Diese Abschätzung beruht auf der Annahme, dass die Temperaturfluktuationen proportional zur fluktuierenden Geschwindigkeit  $u'$  sind. Die Korrelationen  $Q_{r\phi}$  und  $Q_{\phi\phi}$  spielen gleichfalls eine wichtige Rolle beim Transport von Drehimpuls, der messbare Auswirkungen auf die Variation der Länge eines Tages hat (Bloxham, 1998).

Für eine magnetisch dominierte Turbulenz ohne weitere Vorzugsrichtung wird der Tensor  $\chi_{ij}$  gegeben durch

$$\chi_{ij} = \chi_T \delta_{ij} + \chi_z \frac{\langle B_i \rangle \langle B_j \rangle}{\langle \mathbf{B} \rangle^2} \quad (2.40)$$

(Kitchatinov et al., 1994). Gleichung (2.40) gilt für eine anfänglich isotrope Turbulenz und die Koeffizienten  $\chi_T$  und  $\chi_z$  hängen wiederum vom Magnetfeld ab (Rüdiger & Hollerbach, 2004, Kap. 7.5, nehmen ein Quenching-Verhalten  $\propto (1 + a^2 B^2)^{-1}$  an). Qualitativ lässt sich aus Gleichung (2.40) direkt folgern, dass für ein rein vertikal oder rein horizontal orientiertes Magnetfeld ohne Rotation keinerlei horizontale Wärmeflüsse möglich sind. Allerdings können durch eine Kombination zweier unterschiedlich orientierter Magnetfeldkomponenten prinzipiell horizontal orientierte Wärmeflüsse auftreten (z.B.  $B_y$  und  $B_z$  erlauben ein nichtverschwindendes  $\chi_{yz}$ ).

Für rotierende – ursprünglich isotrope – Turbulenz lässt sich  $\chi$  schreiben als

$$\chi_{ij} = \chi_T \delta_{ij} + \chi_{\parallel} \frac{\Omega_i \Omega_j}{\Omega^2} + \tilde{\chi} \epsilon_{ipj} \Omega_p. \quad (2.41)$$

(siehe z.B. Kitchatinov et al. 1994). Damit ergibt sich als Winkelabhängigkeit für die Elemente  $\chi_{iz}$ :

$$\chi_{xz} = -\chi_{\parallel} \sin \theta \cos \theta \quad (2.42)$$

$$\chi_{yz} = -\tilde{\chi} \Omega \sin \theta \quad (2.43)$$

$$\chi_{zz} = \chi_T + \chi_{\parallel} \cos^2 \theta \quad (2.44)$$

Diese Ausdrücke ignorieren den Einfluss des Magnetfeldes und sind daher lediglich für kleine Magnetfeldstärken anwendbar. Die Berechnungen von Kitchatinov et al. (1994) zeigen, dass  $\chi_T$  und  $\chi_{\parallel}$  positiv sind. Für schnelle Rotation verschwindet  $\chi_T$  mit  $O(\Omega^{-1})$  bzw.  $\chi_{\parallel}$  mit  $O(\Omega^{-3})$ .

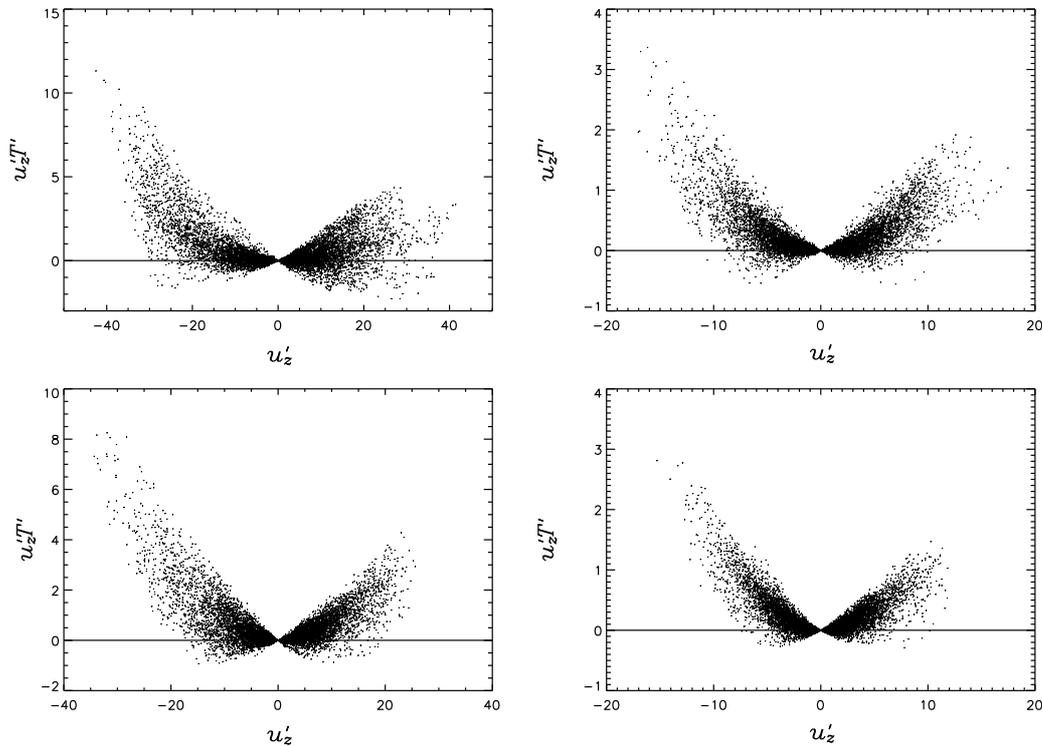


Abbildung 2.11: Scatter-Plots des vertikalen Wärmeflusses in Abhängigkeit der turbulenten  $Up$ - und  $Downflows$  bei  $z = 0.5$ . Oben links: Konvektion, oben rechts: rotierende Konvektion ( $Ta = 10^7$ ,  $\theta = 45^\circ$ ), unten links: Magnetokonvektion ( $B_z \approx 0.2B_{eq}$ ), unten rechts: rotierende Magnetokonvektion ( $\Lambda \approx 1$ , entspricht  $B \approx 0.2B_{eq}$ ,  $Ta = 10^7$  und  $\theta = 45^\circ$ ). Man beachte die unterschiedlichen Werte von Wärmefluss (vertikale Achse) und turbulenter Geschwindigkeit (horizontale Achse).

## 2.4.2 Wärmetransport im schwach stratifizierten Medium

Der vertikale turbulente Wärmefluss wird verursacht durch (turbulente)  $Upflows$  von warmer Flüssigkeit und den  $Downflows$  von kälterer Flüssigkeit. In Abb. 2.11 repräsentiert jeder Punkt den vertikalen Wärmefluss  $u'_z T'$  in Abhängigkeit der lokalen fluktuierenden Geschwindigkeitskomponente  $u'_z$  an einer bestimmten Gitterzelle in einer vertikalen Ebene bei  $z = 0.5$ . Die Summe aller dieser Werte dividiert durch die Anzahl der Datenpunkte ergibt folglich das horizontale Mittel von  $u'_z T'$  bei  $z = 0.5$ . Die vier einzelnen Plots zeigen die Ergebnisse einer Simulation von Konvektion (oben links), rotierender Konvektion (oben rechts), Magnetokonvektion (unten links) und rotierender Magnetokonvektion (unten rechts). Qualitativ ist das Verhalten für alle vier unterschiedlichen Systeme ähnlich. Unterschiede offenbaren sich lediglich in der Magnitude von Wärmefluss und Geschwindigkeit. Die wesentlichen Beiträge zu dem Wärmefluss rühren von den schnelleren Strömungen her, wobei sich in allen Fällen eine leichte Dominanz der  $Downflows$  ( $u'_z < 0$ ) zeigt. Dies weicht deutlich von den Resultaten von Ziegler (2002) ab, der bemerkenswerte Unterschiede, sowohl qualitativer als auch quantitativer Art, zwischen nicht-rotierender und rotierender Magnetokonvektion in einem stark stratifizierten Mehrschichten Modell beschreibt. Die in Ziegler (2002) präsentierten Resultate zeigen in den

nicht-rotierenden Fällen ein deutliches Übergewicht der Beiträge durch die *Downflows*, das in (ausreichend schnell) rotierender Magnetokonvektion nicht beobachtbar ist.

Der Vergleich der Simulationen von Konvektion (Abb. 2.11 links oben) mit nicht-rotierender Magnetokonvektion (Abb. 2.11 links unten) zeigt das der Parameter  $\chi_z$  aus Gleichung 2.40 negativ ist. Ein nähere Untersuchung der Winkelabhängigkeit des Wärmefflusses findet sich in den folgenden Abschnitten.

### 2.4.3 Vertikaler Wärmeffluss und Turbulenz-Intensität

#### Horizontales Magnetfeld

In Abb. 2.12 wird das Verhalten der volumen- und zeitgemittelten Turbulenz-Intensität  $\langle u_z'^2 \rangle$  mit dem turbulenten vertikalen Wärmeffluss  $\langle u_z' T' \rangle$  verglichen. Die obere Zeile

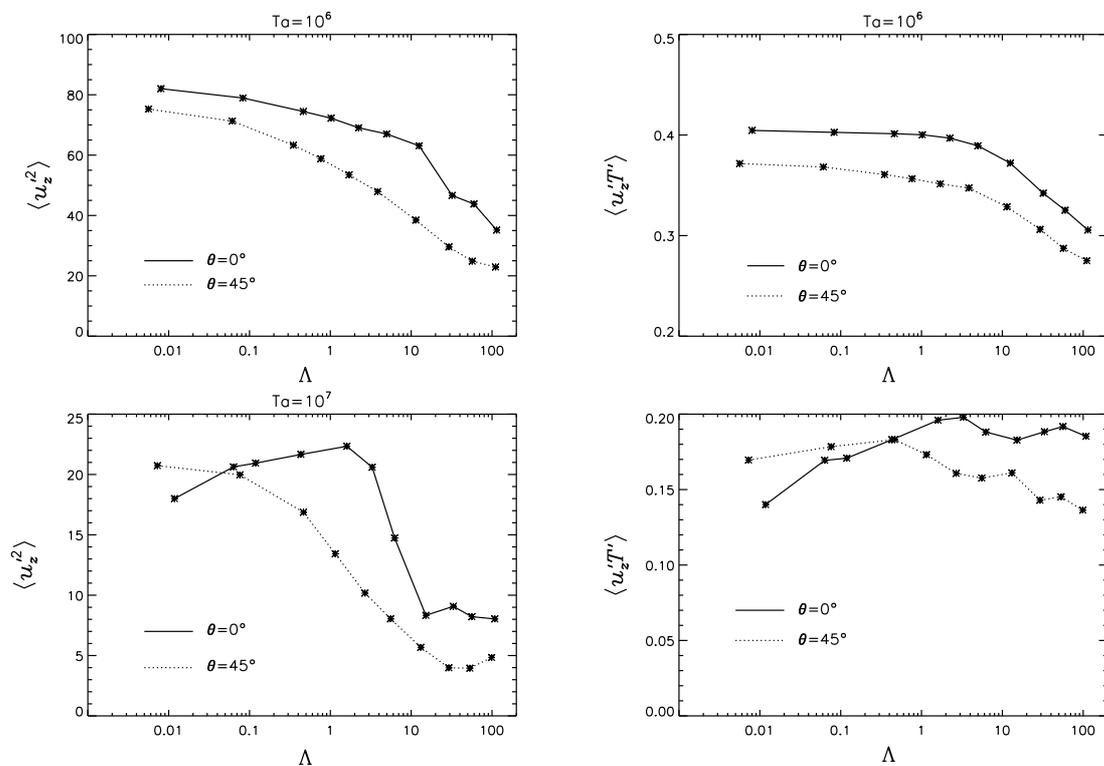


Abbildung 2.12: Turbulenz-Intensität und Wärmeffluss in Abhängigkeit des angelegten Magnetfeldes. Die linke Seite zeigt die vertikale Turbulenz-Intensität  $\langle u_z'^2 \rangle$  und die rechte Seite zeigt den turbulenten Wärmeffluss  $\langle u_z' T' \rangle$ . Obere Zeile:  $Ta = 10^6$ ; untere Zeile:  $Ta = 10^7$ .

zeigt den Fall  $Ta = 10^6$  und die untere Zeile zeigt  $Ta = 10^7$ . In allen Plots werden die Ergebnisse für Rechnungen am Nordpol und bei  $\theta = 45^\circ$  präsentiert. Es ist offensichtlich, dass sowohl  $\langle u_z'^2 \rangle$  als auch  $\langle u_z' T' \rangle$  mit zunehmender Rotationsrate deutlich reduziert sind. Durch den linearen Kopplungsmechanismus zwischen vertikalen und horizontalen Impulsen (siehe Abschnitt 2.2.3) werden turbulente Strömungen in vertikaler Richtung unterdrückt. In der Folge nimmt die kritische Rayleigh-Zahl  $Ra_{\text{crit}}$ , bei der marginale Konvektion auftritt, mit zunehmender Rotationsgeschwindigkeit zu. Die Simulationen

mit verschiedenen  $Ta$  sind daher unterschiedlich „überkritisch“, was sich in der reduzierten Turbulenz-Intensität bei schnellerer Rotation äußert.

Mit zunehmendem Magnetfeld nehmen für  $Ta = 10^6$  sowohl Turbulenz-Intensität als auch Wärmefluss deutlich ab. Beide Größen zeigen dabei ein qualitativ ähnliches Verhalten. Allerdings ist die Reduktion des Wärmeflusses weniger drastisch. Innerhalb der Zunahme von  $\Lambda$  von  $10^{-2}$  auf  $10^2$  (entspricht einer Erhöhung der Magnetfeldstärke um den Faktor 100), wird  $\langle u_z'^2 \rangle$  um den Faktor 4 reduziert, während  $\langle u_z' T' \rangle$  um lediglich etwa 25% verringert wird. Das Verhalten ließe sich im Prinzip durch eine typische Quenching-Funktion der Form  $u'^2 \propto (1 + aB^q)^{-1}$  beschreiben. Da der langsamer rotierende Fall in Zusammenhang mit dem Geodynamo von geringerem Interesse ist, wird diese Frage hier nicht weiter diskutiert.

Unabhängig von  $\Lambda$  sind für  $Ta = 10^6$  sowohl  $\langle u_z'^2 \rangle$  als auch  $\langle u_z' T' \rangle$  am Pol größer als bei  $\theta = 45^\circ$ . Für schnellere Rotation, mit  $Ta = 10^7$ , gilt dies nur für ein hinreichend starkes Magnetfeld (für  $\Lambda \gtrsim 0.1 \dots 0.5$ ). Zusätzlich ändert sich die Abhängigkeit beider Größen vom Magnetfeld deutlich für höheres  $Ta$  und das Verhalten ist nicht mehr ohne weiteres durch einfache Funktionen, wie durch die oben angegebene Quenching-Funktion, zu beschreiben. So nimmt am Nordpol die vertikale Turbulenz-Intensität  $\langle u_z'^2 \rangle$  mit der Magnetfeldstärke zu und zeigt ein Maximum bei  $\Lambda \approx 1$ . Diese Eigenschaft existiert nicht bei  $\theta = 45^\circ$ , wo das Quenching der Turbulenz qualitativ ähnlich dem Fall  $Ta = 10^6$  erfolgt. Eine stärkere Turbulenz bei gleicher Magnitude von Coriolis- und Lorentz-Kraft ergibt sich bereits aus der linearen Stabilitätsanalyse von [Chandrasekhar \(1961\)](#). Die kritische Rayleigh-Zahl für marginale Konvektion ist minimal, wenn die beiden dominierenden Kräfte (Coriolis- und Lorentz-Kraft) von gleicher Größenordnung sind. In den linearisierten Gleichungen, die marginale Konvektion beschreiben, kann dann der Coriolis-Term gegen den Lorentz-Term ausgeglichen werden. Die Balance-Mechanismen, die die Strömung im Falle von rotierender Konvektion bzw. nicht-rotierender Magnetokonvektion auf kleine Skalenlängen zwingen, sind dann nicht notwendig. Die Konvektion kann auf größeren Skalen ablaufen<sup>6</sup>, so dass  $Ra_{\text{crit}}$  reduziert wird (siehe auch Kap. 2 in [Rüdiger & Hollerbach 2004](#)). Betrachtet man ein solches Szenario für den Fall einer festen überkritisch vorgegebenen Rayleigh-Zahl, so führt eine Reduktion von  $Ra_{\text{crit}}$  zu einer mehr überkritischen Konvektion, was in einer stärker getriebenen Strömung und damit in einer erhöhten Turbulenz resultiert. Obwohl die Betrachtungen von [Chandrasekhar \(1961\)](#) für ein vertikal orientiertes Magnetfeld durchgeführt wurden, existiert der Effekt auch im Falle eines horizontalen Feldes oder in gekrümmten Geometrien ([Eltayeb, 1972](#)). Die Reduktion von  $Ra_{\text{crit}}$  im entsprechenden Parameterregime nimmt mit steigender Taylor-Zahl zu, so dass dieser Effekt für höhere Rotationsgeschwindigkeiten stärker ausgeprägt ist. Dies wurde durch Simulationen von [Stellmach & Hansen \(2004\)](#) bestätigt. Allerdings erhalten die Autoren auch Hinweise, dass dieser anhand einer linearen Stabilitätsanalyse berechnete Effekt für stärker getriebene Strömungen, bei denen die nicht-linearen Effekte mehr Einfluss haben, verschwindet.

<sup>6</sup>Dieses Szenario entspricht dem großskaligen Verhalten in den Simulationen von [Stellmach & Hansen \(2004\)](#), das in Abschnitt 2.3.2 beschrieben wurde.

Im Gegensatz zu  $\langle u_z'^2 \rangle$  zeigt der vertikale Wärmefluss am Pol kein ausgeprägtes Maximum. Analog zu dem Verhalten der vertikalen Turbulenz-Intensität für  $\Lambda \lesssim 1$  nimmt  $\langle u_z' T' \rangle$  mit der Magnetfeldstärke zu. Anders als  $\langle u_z'^2 \rangle$  bleibt der Wärmefluss allerdings auch für sehr starke Magnetfelder auf einem höheren Niveau. Obwohl die Fluktuationen in der Strömungsgeschwindigkeit durch ein starkes Magnetfeld deutlich reduziert werden, gilt dies offensichtlich nicht für die Temperaturfluktuationen, so dass die Korrelationen dieser beiden Größen mit steigender Feldstärke nicht unterdrückt werden. Wiederum lässt sich dieses Verhalten nicht bei  $\theta = 45^\circ$  beobachten. Aber auch hier gibt es Unterschiede im Vergleich mit  $\langle u_z'^2 \rangle$ , denn der Wärmefluss weist hier ein deutliches Maximum bei  $\Lambda \approx 0.5$  auf. In beiden Fällen gilt, dass ein ausreichend starkes horizontales Magnetfeld die Effizienz erhöht, mit der Wärme in vertikaler Richtung nach außen transportiert wird. Dies spiegelt sich bereits im Verlauf der Entropie wieder (siehe Abb. 2.5 auf Seite 34).

### Winkelabhängigkeit

Abb. 2.13 zeigt die Winkelabhängigkeit von  $\langle u_z'^2 \rangle$  und  $\langle u_z' T' \rangle$  für  $\Lambda = 0.1, 1, 10$  (entsprechend  $B/B_{\text{eq}} = 0.06, 0.20, 0.65$ ). Der vertikale Wärmefluss ist stets positiv, d.h. Wärme wird immer nach außen transportiert. Für  $\Lambda \lesssim 1$  zeigt der vertikale Wärmefluss ein Minimum bei etwa  $\theta = 30^\circ$  und wird maximal zum Äquator hin. Dies widerspricht dem erwarteten Verhalten, da sowohl die Resultate von [Kitchatinov et al. \(1994\)](#) als auch die Ergebnisse der hier durchgeführten Simulationen für den latitudinalen Wärmefluss  $\chi_{\parallel} > 0$  ergeben (siehe Abschnitt 2.4.4). Nach Gleichung (2.44) erwartet man daher einen maximalen vertikalen/radialen Wärmefluss am Pol. Diese Erwartung ist insofern

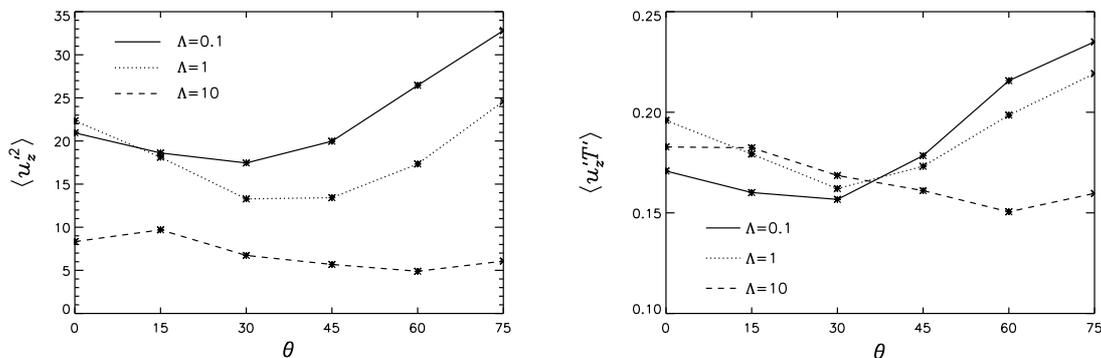


Abbildung 2.13: Linke Seite: Turbulenz-Intensität  $Q_{zz} = \langle u_z'^2 \rangle$ . Rechte Seite: vertikaler Wärmefluss  $\langle u_z' T' \rangle$ . Die durchgezogene (gestrichelte, gepunktete) Kurve zeigen unterschiedliche Feldstärken  $\Lambda = 0.1(1, 10)$ .  $Ta = 10^7$ .

plausibel, da bei  $\theta = 0^\circ$  gilt:  $(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u}) = \Omega_0(-u_y, u_x, 0)$ . Es existiert keine Kopplung zwischen vertikaler ( $z$ ) und horizontalen Komponenten ( $x, y$ ). Daher erfolgt kein Transfer von vertikalen Impuls in horizontale Richtungen, wie dies für größere Co-Latituden der Fall ist. Es wäre daher anzunehmen, dass die Größen, die turbulenten Transport in vertikaler Richtung beschreiben, am Nordpol maximal sind. Dieses etwas überraschende Verhalten mit dem Maximum von  $\langle u_z'^2 \rangle$  bzw. von  $\langle u_z' T' \rangle$  in der Nähe des Äquators bestätigt allerdings die numerischen Resultate von [Rüdiger et al. \(2005\)](#) und [Käpylä et al.](#)

(2004), die ebenfalls eine Zunahme des vertikalen Wärmeflusses zum Äquator erhalten haben. Erst bei starken Feldern ( $\Lambda \approx 10$ ) wird der Wärmefluss am Äquator geringer als am Pol. Analoge Betrachtungen gelten für die Turbulenz-Intensität  $\langle u_z'^2 \rangle$ .

### Vertikales Magnetfeld

Um den Effekt der Orientierung des Magnetfeldes zu untersuchen, wurden Simulationen mit einem vertikal ausgerichteten Magnetfeld ( $B_z$ ) durchgeführt<sup>7</sup>. Die Ergebnisse in Abhängigkeit der angelegten Magnetfeldstärke zeigt Abb. 2.14. Am Pol tritt ebenfalls ein Maximum von  $\langle u_z'^2 \rangle$  und von  $\langle u_z' T' \rangle$  auf. Dieses ist allerdings sehr viel schwächer ausgeprägt als im Falle des horizontalen Magnetfeldes. Für höhere Feldstärken (ab  $\Lambda \gtrsim 2$ )

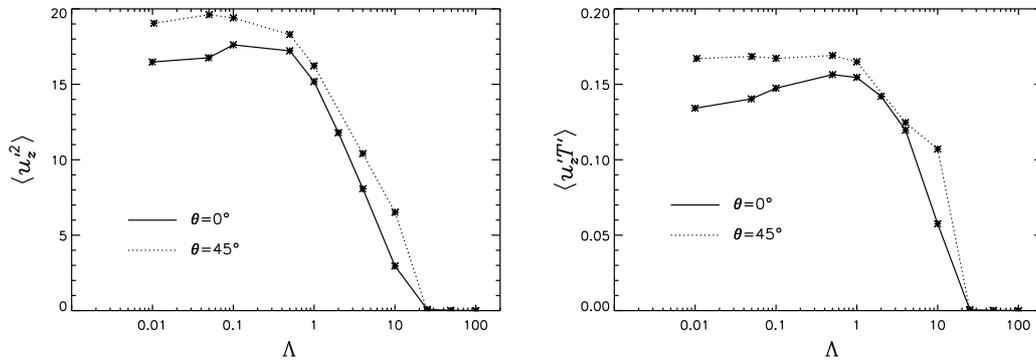


Abbildung 2.14: Turbulenz-Intensität  $\langle u_z'^2 \rangle$  und vertikaler Wärmefluss  $\langle u_z' T' \rangle$  für ein vertikales Magnetfeld ( $B_z$ ),  $Ta = 10^7$ .

fallen Turbulenz-Intensität und Wärmefluss extrem stark ab, so dass für  $\Lambda \gtrsim 20$  praktisch kein vertikaler Transport von Wärme durch turbulente Bewegungen stattfindet. Ein solch starkes  $B_z$  unterbindet jegliche Konvektion, da vermutlich die kritische Rayleigh-Zahl in diesem Bereich deutlich höher ist, als der in den Simulationen angewandte Wert für  $Ra$ . Beide untersuchten Größen sind im Unterschied zu dem Fall mit horizontalen Feld unabhängig von  $\Lambda$  bei  $\theta = 45^\circ$  geringfügig größer als am Pol und weisen eine vergleichbare Abhängigkeit von der Feldstärke auf. Dies deutet darauf hin, dass in diesem Fall die Korrelationszeit, wie sie nach Gleichung (2.39) definiert wurde, eine sinnvolle und konsistent zu berechnende Größe darstellt, die nahezu unabhängig von Magnetfeld selbst ist. Für Feldstärken mit  $\Lambda \lesssim 10$  ergibt sich aus den Daten, die Abb. 2.14 zu Grunde liegen, eine Korrelationszeit im Bereich von  $\tau_{\text{corr}} \approx 0.2 \dots 0.4 \tau_{\text{adv}}$ .

#### 2.4.4 Horizontale Wärmeflüsse und Reynolds-Stresses

Die horizontalen Wärmeflüsse  $\langle u_x' T' \rangle$  und  $\langle u_y' T' \rangle$  und die nach Gleichung (2.39) zugehörigen Reynolds-Stresses  $Q_{xz}$  und  $Q_{yz}$  verschwinden am Pol aufgrund der nach Gleichung (2.42) bzw. (2.43) gegebenen Abhängigkeit  $\propto \sin \theta$ . Dieses erwartete Verhalten

<sup>7</sup>Zu beachten ist, dass im Falle eines vertikalen Magnetfeldes die Randbedingungen aus Konsistenzgründen geändert werden müssen:  $B_x = B_y = 0$  und  $\partial_z B_z = 0$ .

spiegelt sich ebenfalls in den numerischen Simulationen wieder. Die Abhängigkeit dieser Größen von der Feldstärke wird im Folgenden lediglich für eine Co-Latitude von  $\theta = 45^\circ$  diskutiert. Abbildung 2.15 zeigt die Reynolds-Stresses  $Q_{xz}$  und  $Q_{yz}$  (linke Seite) und die entsprechenden horizontalen Komponenten des turbulenten Wärmeflusses  $\langle u'_x T' \rangle$  und  $\langle u'_y T' \rangle$  (rechte Seite).

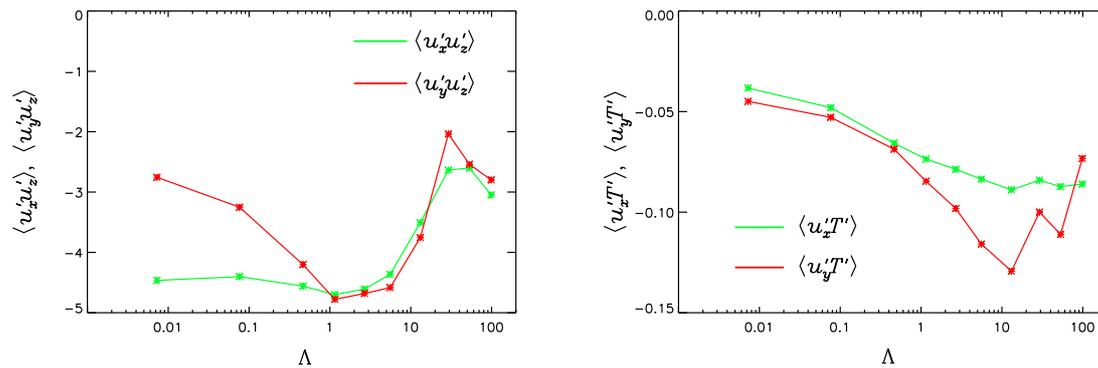


Abbildung 2.15: Horizontale Reynolds-Stresses  $\langle u'_{x,y} u'_z \rangle$  (linke Seite) und Wärmeflüsse  $\langle u'_{x,y} T' \rangle$  (rechte Seite).  $\text{Ta} = 10^7$  und  $\theta = 45^\circ$ .

In allen Fällen sind Stresses und Wärmeflüsse negativ. Daraus folgt, dass der latitudinale Wärmefluss  $\langle u'_x T' \rangle$  einen Transport von Wärme in Richtung des Pols beschreibt. Der Absolutbetrag von  $\langle u'_x T' \rangle$  nimmt mit zunehmender Feldstärke zu. Diesem Verhalten entgegengesetzt nimmt  $|Q_{xz}|$  mit zunehmender Feldstärke ab, bleibt aber ebenfalls stets negativ. Eine einfache Beziehung zwischen  $Q_{xz}$  und  $\langle u'_x T' \rangle$ , wie sie durch (2.39) gegeben wird, kann in diesem Fall nicht bestätigt werden.

Die  $y$ -Komponente des Wärmeflusses entspricht einem azimuthalen Transport von Wärme.  $\langle u'_y T' \rangle$  ist ebenfalls negativ und beschreibt daher einen westwärts (entgegen der Rotationsrichtung) orientierten Transport von Wärme. Der Absolutbetrag  $|\langle u'_y T' \rangle|$  zeigt bei  $\Lambda \approx 10$  ein ausgeprägtes Maximum. Das Verhalten des azimuthalen Wärmeflusses wird in etwa durch den entsprechenden Reynolds-Stress wiedergegeben, allerdings existiert ein kleiner Offset des Minimums von  $Q_{yz}$  in Richtung schwächerer Feldstärken. Aufgrund der relativ guten Übereinstimmung mit Gleichung (2.43) ist eine konsistente Berechnung der Korrelationszeit möglich, die  $\tau_{\text{corr}} \approx 0.4\tau_{\text{adv}}$  ergibt. Dies steht in guter Übereinstimmung mit der Korrelationszeit, wie sie im vorherigen Abschnitt aus dem Verhalten von Turbulenz-Intensität und vertikalen Wärmefluss unter Einfluss eines vertikalen Magnetfeldes bestimmt wurde.

Die Winkelabhängigkeit der horizontalen Komponenten des turbulenten Wärmeflusses werden in Abb. 2.16 zusammen mit dem zugehörigen Reynolds-Stress präsentiert. In allen Fällen ist die latitudinale Komponente negativ.  $|\langle u'_x T' \rangle|$  weist ein Maximum um  $\theta = 45^\circ$  auf und lässt sich durchaus durch eine Funktion  $\propto \sin \theta \cos \theta$  (mit  $\chi_{\parallel} > 0$ ), wie es aus Gleichung (2.42) folgt, parametrisieren.

Der azimuthale Wärmefluss  $\langle u'_y T' \rangle$  ist ebenfalls stets negativ, wobei der Absolutbetrag zum Äquator hin monoton ansteigt. Die Tendenz dieses Verhaltens mit verschwin-

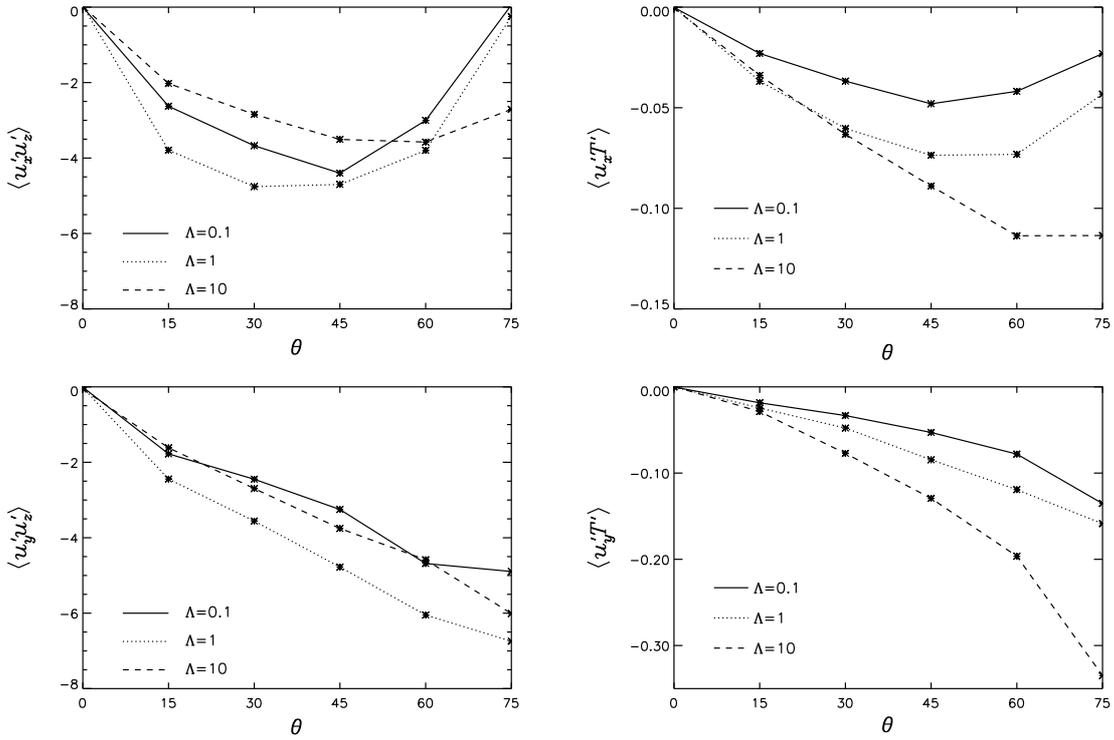


Abbildung 2.16: Linke Seite: Reynolds-Stresses  $Q_{xz}$  und  $Q_{yz}$ . Rechte Seite: horizontale Wärmeflüsse  $\langle u'_x T' \rangle$  und  $\langle u'_y T' \rangle$ . Die durchgezogene (gestrichelte, gepunktete) Kurve zeigt die Feldstärken  $\Lambda = 0.1(1, 10)$ .  $Ta = 10^7$  und  $\theta = 45^\circ$ .

dendem Wärmefluss am Pol und Maximum am Äquator wird durch eine Beziehung der Form  $\sim \sin \theta$  (siehe 2.43) richtig wiedergegeben.

Käpylä et al. (2004) hat den vertikalen und meridionalen Wärmefluss für rotierende Konvektion in einer stark stratifizierten Schicht – passend für die Sonne – für eine Vielzahl von Rotationsgeschwindigkeiten berechnet. In allen Fällen erhalten die Autoren ein Maximum des radialen Wärmeflusses am Äquator und eine Tendenz für ein Minimum bei einer Co-Latitude von etwa  $30^\circ \dots 45^\circ$ . Diese Ergebnisse werden durch die hier präsentierten Resultate bis zu  $\Lambda \approx 1$  bestätigt. Allerdings sind die Ergebnisse von Käpylä et al. (2004) etwas inkohärent, da sie je nach angewandten Parametern eine Vielzahl an sich jeder Klassifizierung entziehenden Resultate ergeben. So nahm  $\langle u'_x T' \rangle$  in der Umgebung des Äquators und für langsamere Rotationsraten einen positiven Wert an. Alle hier präsentierten Rechnungen haben stets negative horizontale Wärmeflüsse ergeben<sup>8</sup>.

Quantitativ ergibt sich für den Bereich  $\Lambda \approx 1$  bei mittleren Latituden ( $\theta = 45^\circ$ ) folgende Abschätzung für die untersuchten Komponenten der thermischen Diffusivität  $\chi_{iz}$ :

$$\chi_{zz} \approx 3\chi > |\chi_{yz}| \approx 1.5\chi > |\chi_{xz}| \approx 1.2\chi. \quad (2.45)$$

<sup>8</sup>Zu beachten ist das aufgrund der numerischen Probleme unbekanntes Verhalten nahe des Äquators.

Die turbulente thermische Diffusivität liegt also lediglich leicht über den Werten der molekularen Diffusivität  $\chi$ . Bevorzugte Richtungen sind allerdings eindeutig gegeben durch den turbulenten Transport nach außen, zu den Polen und in westliche Richtung (entgegen der Orientierung der Rotation).

## 2.5 Berechnung der $\alpha$ -Koeffizienten

### 2.5.1 Allgemeine Grundlagen des $\alpha$ -Effekts

Betrachtet man eine leitende rotierende Flüssigkeit in einer Atmosphäre mit Dichtegradienten, so produziert eine konvektiv getriebene Turbulenz eine elektromotorische Kraft (EMF, *electromotive force*) mit einer Komponente parallel zum mittleren Magnetfeld, die für einen Dynamo-Prozess verantwortlich sein kann (Krause & Rädler, 1980).

In der Induktionsgleichung

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B} - \eta \nabla \times \mathbf{B}), \quad (2.46)$$

lassen sich Magnetfeld  $\mathbf{B}$  und Geschwindigkeit  $\mathbf{u}$  in einen mittleren Anteil  $\langle \mathbf{B} \rangle$ ,  $\langle \mathbf{u} \rangle$  und eine fluktuierende Komponente  $\mathbf{B}'$ ,  $\mathbf{u}'$  aufspalten:  $\mathbf{u} = \langle \mathbf{u} \rangle + \mathbf{u}'$  und  $\mathbf{B} = \langle \mathbf{B} \rangle + \mathbf{B}'$ . Das mittlere Magnetfeld  $\langle \mathbf{B} \rangle$  wird dann durch die Mean-Field Induktionsgleichung bestimmt:

$$\frac{\partial \langle \mathbf{B} \rangle}{\partial t} = \nabla \times (\langle \mathbf{u} \rangle \times \langle \mathbf{B} \rangle + \mathcal{E} - \eta \nabla \times \langle \mathbf{B} \rangle). \quad (2.47)$$

Hier bezeichnet  $\mathcal{E}$  die elektromotorische Kraft  $\mathcal{E} = \langle \mathbf{u}' \times \mathbf{B}' \rangle$ , die aus der Korrelation von fluktuierender Geschwindigkeit und fluktuierendem Magnetfeld resultiert, wobei  $\mathbf{B}'$  ein Ergebnis der Wechselwirkung von  $\mathbf{u}'$  mit dem mittleren Magnetfeld  $\langle \mathbf{B} \rangle$  darstellt. Die EMF lässt sich als lineares Funktional des mittleren Magnetfeldes  $\langle \mathbf{B} \rangle$  auffassen. Dazu wird angenommen, dass das mittlere Magnetfeld  $\langle \mathbf{B} \rangle$  nicht zu stark in der Umgebung eines Raumzeitpunktes  $(\mathbf{r}, t)$  variiert, d.h:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{B} \rangle(\mathbf{r}, t) &\approx \langle \mathbf{B} \rangle(\mathbf{r}, t') \quad \text{für } t - t' < \tau_{\text{corr}} \quad \text{und} \\ \langle \mathbf{B} \rangle(\mathbf{r}, t) &\approx \langle \mathbf{B} \rangle(\mathbf{r}', t) \quad \text{für } |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| < \lambda_{\text{corr}}, \end{aligned}$$

wobei  $\tau_{\text{corr}}$  bzw.  $\lambda_{\text{corr}}$  die Korrelationszeit bzw. -länge bezeichnen.  $\mathcal{E}$  lässt sich im einfachsten Fall eines homogenen und isotropen Geschwindigkeitsfeldes als

$$\mathcal{E} = \alpha \langle \mathbf{B} \rangle - \eta_T \nabla \times \langle \mathbf{B} \rangle \quad (2.48)$$

schreiben.  $\eta_T$  bezeichnet die turbulente magnetische Diffusivität und  $\alpha$  stellt eine skalare Größe mit der Dimension einer Geschwindigkeit dar. Dieser Term ist für die Dynamo-wirkung in einem Mean-Field Modell verantwortlich (Steenbeck & Krause, 1966). Im *High-Conductivity-Limit*, charakterisiert durch  $\tau_{\text{corr}} \ll \lambda_{\text{corr}}^2 / \eta_T$ , ergibt sich für die EMF:

$$\mathcal{E}(t) = \int_0^\infty \mathbf{u}'(t) \times \nabla \times (\mathbf{u}'(t - \tau) \times \langle \mathbf{B} \rangle) d\tau. \quad (2.49)$$

Es ist dann möglich,  $\alpha$  und  $\eta_T$  als

$$\alpha = -\frac{1}{3} \int_0^{\infty} \langle \mathbf{u}'(t) \cdot \nabla \times \mathbf{u}'(t - \tau) \rangle d\tau, \quad (2.50)$$

$$\eta_T = \frac{1}{3} \int_0^{\infty} \langle \mathbf{u}'(t) \mathbf{u}'(t - \tau) \rangle d\tau. \quad (2.51)$$

auszudrücken. Abschätzen der Integration über  $d\tau$  ergibt

$$\alpha = -\frac{1}{3} \tau_{\text{corr}} \langle \mathbf{u}' \cdot \nabla \times \mathbf{u}' \rangle, \quad (2.52)$$

$$\eta_T = \frac{1}{3} \tau_{\text{corr}} \langle \mathbf{u}'^2 \rangle \quad (2.53)$$

(Krause & Rädler 1980). Gleichung (2.52) zeigt den unmittelbaren Bezug zwischen kinetischer Helizität

$$H_{\text{kin}} = \langle \mathbf{u}' \cdot \nabla \times \mathbf{u}' \rangle \quad (2.54)$$

und dem  $\alpha$ -Effekt:

$$\alpha = -\frac{1}{3} \tau_{\text{corr}} H_{\text{kin}}. \quad (2.55)$$

Gleichung (2.55) demonstriert die essentielle Bedeutung einer Händigkeit der (turbulenten) Strömung durch nicht-spiegelsymmetrische Turbulenz für die Existenz eines  $\alpha$ -Effekts. Die Beziehung gilt allerdings nur für schwache Magnetfelder ohne Rückwirkung des Feldes auf die Strömung.

Allgemeiner – für den Fall von anisotroper Turbulenz – lassen sich die Komponenten der EMF schreiben als:

$$\mathcal{E}_i = \alpha_{ij} \langle B_j \rangle + \beta_{ijk} \partial_k \langle B_j \rangle. \quad (2.56)$$

$\alpha_{ij}$  und  $\beta_{ijk}$  sind Pseudo-Tensoren und  $\beta_{ijk}$  hängt im einfachsten Fall mit der turbulenten Diffusivität über

$$\beta_{ijk} = \eta_T \epsilon_{ijk} \quad (2.57)$$

zusammen.

Die allgemeine Struktur des  $\alpha$ -Tensors wird gegeben durch

$$\begin{aligned} \alpha_{ij} = & -\alpha_1 (\mathbf{G}^0 \cdot \boldsymbol{\Omega}^0) \delta_{ij} - \alpha_2 (G_i^0 \Omega_j^0 + G_j^0 \Omega_i^0) + \alpha_3 (G_j^0 \Omega_i^0 - G_i^0 \Omega_j^0) \\ & + \alpha_4 (\mathbf{G}^0 \cdot \boldsymbol{\Omega}^0) \Omega_i^0 \Omega_j^0 - \gamma \epsilon_{ijk} G_k^0 \end{aligned} \quad (2.58)$$

(Rüdiger & Kitchatinov, 1993). Hierbei ist  $\boldsymbol{\Omega}^0$  der Einheitsvektor in Richtung der Rotationsachse und  $\mathbf{G}^0$  entspricht einem (radialen) Einheitsvektor in Richtung des Gradienten der Turbulenz-Intensität. Bei einem rein vertikal orientierten Gradienten der Turbulenz-Intensität  $\mathbf{G}^0 = G^0(0, 0, 1)$  erhält man folgende Struktur des  $\alpha$ -Tensors:

$$\alpha \sim \begin{pmatrix} -(\alpha_1 + \alpha_4 \sin^2 \theta) \cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha_1 \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & -(\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_4 \cos^2 \theta) \cos \theta \end{pmatrix} + \quad (2.59)$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & (\alpha_2 + \alpha_4 \cos^2 \theta) \sin \theta \\ 0 & 0 & 0 \\ (\alpha_2 + \alpha_4 \cos^2 \theta) \sin \theta & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\gamma & -\alpha_3 \sin \theta \\ \gamma & 0 & 0 \\ \alpha_3 \sin \theta & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Der Tensor  $\alpha$  wurde dabei in den Diagonalanteil, der für die Dynamo-Wirkung verantwortlich ist, einen symmetrischen Anteil und einen antisymmetrischen Anteil zerlegt. Der antisymmetrische Anteil beschreibt turbulente Advektion von magnetischen Fluss ( $\gamma$  entspricht einem radialem Transport und  $\alpha_3 \sin \theta$  entspricht einer zusätzlichen differentiellen Rotation). Im Limit schneller Rotationsgeschwindigkeiten ( $\Omega \rightarrow \infty$ ) gilt  $\alpha_1 = -\alpha_4$  und  $\alpha_2 = \alpha_3 = 0$ , so dass sich (2.59) im Fall der Erde weiter vereinfachen lässt. Der  $\alpha$ -Effekt ist dann stark anisotrop und bezüglich der Rotationsachse nur noch zweidimensional (Rüdiger, 1978).

## 2.5.2 Mittlere Magnetfelder, kinetische Helizität und die $\alpha$ -Koeffizienten

### Mittlere Magnetfelder

Abbildung 2.17 zeigt die horizontal gemittelten Komponenten des Magnetfeldes für eine typische Simulation mit  $\Lambda \approx 1$  bei  $\theta = 45^\circ$ . Die obere bzw. untere Reihe zeigen die drei Komponenten  $\langle B_x \rangle, \langle B_y \rangle, \langle B_z \rangle$  im Falle eines angelegten Feldes in  $x$ - bzw. in  $y$ -Richtung in Einheiten des ursprünglich angelegten Feldes. Die hellgrauen Linien repräsentieren Realisierungen des horizontal gemittelten Feldes zu verschiedenen Zeitpunkten und verdeutlichen die zeitlichen Fluktuationen des mittleren Feldes. Das zeitliche Mittel wird durch die schwarze gestrichelte Kurve dargestellt. In allen Fällen entsteht eine wesentliche Komponente des Magnetfeldes senkrecht zum ursprünglich angelegten Feld. Bei einem angelegten  $\langle B_x \rangle$  (Abb. 2.17, obere Zeile) beträgt die zum ursprünglichen Feld orthogonale Komponente  $\langle B_y \rangle$  allerdings weniger als 10% des Anfangsfeldes mit Ausnahme in der Nähe der oberen und unteren Grenzflächen. Dort erreicht  $\langle B_y \rangle$  Werte von bis zu 40% der Anfangfeldstärke. Dieser Effekt ist ausgeprägter in Simulationen mit einem in  $y$ -Richtung orientierten Anfangsfeld. Nahe der Grenzflächen sind hier  $\langle B_x \rangle$  und  $\langle B_y \rangle$  von vergleichbarer Magnitude und im Inneren der Box erreicht  $\langle B_x \rangle$  bis zu 50% der Anfangfeldstärke. Das Auftreten einer starken Magnetfeldkomponente senkrecht zur ursprünglich angelegten Komponente unterscheidet sich deutlich von den Ergebnissen von Ziegler (2002) für sonnenähnliche Magnetokonvektion, der in allen Fällen  $\langle B_x \rangle \ll \langle B_y \rangle$  erhielt. Da dies das Ergebnis von Simulationen mit niedrigerer Taylor-Zahl ist, liegt der Grund vor allem in den niedrigeren Rotationsgeschwindigkeiten (was durch Simulationen bei  $\text{Ta} = 10^6$  bestätigt wird, siehe Abschnitt 2.5.3).

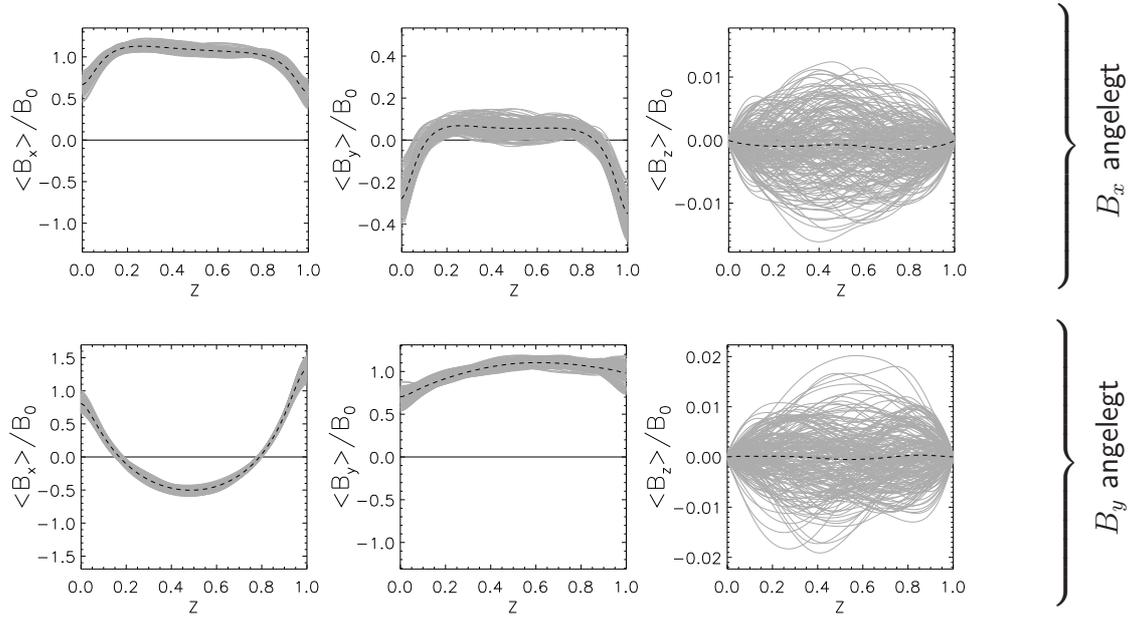


Abbildung 2.17:  $z$ -Abhängigkeit der mittleren Magnetfeldkomponenten in Einheiten der ursprünglich angelegten Feldstärke für  $\Lambda \approx 1$ . Obere Reihe:  $B_x$  angelegt, untere Reihe  $B_y$  angelegt.  $\theta = 45^\circ$ ,  $Ta = 10^7$ .

Aus der Induktionsgleichung (2.47) für die mittleren Felder folgt im Falle eines horizontal orientierten Feldes unmittelbar:

$$\frac{\partial \langle B_z \rangle}{\partial t} = 0, \quad (2.60)$$

so dass keine mittlere Komponente des Feldes in  $z$ -Richtung entstehen kann:  $\langle B_z \rangle = 0$ . Dies spiegelt sich sehr gut in den Ergebnissen der Simulationen wieder (rechte Spalte in Abb. 2.17). Die oben beschriebene Struktur der horizontal gemittelten Feldkomponenten ist ähnlich für alle angelegten Feldstärken, allerdings wird für stärkere Felder der Anteil der zum Anfangsfeld orthogonalen Komponente in Bezug auf diese Anfangskomponente wesentlich kleiner und damit unbedeutender.

### Kinetische Helizität

Abbildung 2.18 zeigt die kinetische Helizität  $H_{\text{kin}} = \langle \mathbf{u}' \cdot \nabla \times \mathbf{u}' \rangle$  bei  $\theta = 45^\circ$  für verschiedene Magnetfeldstärken (von links nach rechts:  $\Lambda = 0.1, 1, 10$ ). Auf der Nordhalbkugel ist  $H_{\text{kin}}$  stets negativ in der oberen Boxhälfte und positiv in der unteren Hälfte der Box. Das Maximum (bzw. Minimum) liegt dabei nahe der vertikalen Grenzflächen und der Vorzeichenwechsel findet exakt in der Mitte der Box statt. An den vertikalen Rändern verschwindet  $H_{\text{kin}}$  aufgrund der Randbedingungen. Der Verlauf der Helizität stimmt qualitativ mit den Ergebnissen anderer Simulationen (Brandenburg et al. 1990, Stellmach & Hansen 2004 und Cattaneo & Hughes 2006) überein. Der Vorzeichen der Helizität wird wesentlich geprägt durch das Verhalten der Strömung nahe den vertikalen

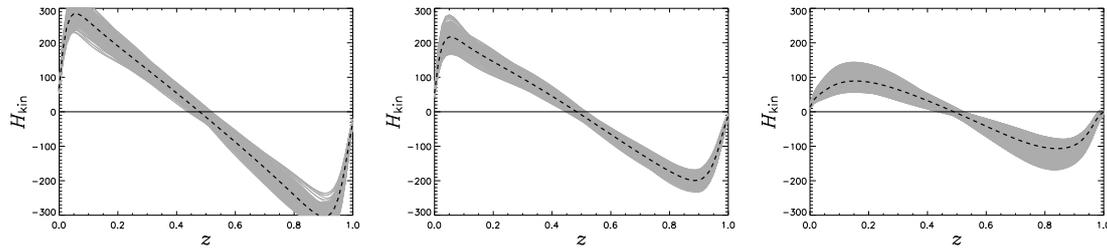


Abbildung 2.18:  $z$ -Abhängigkeit der kinetischen Helizität  $H_{kin} = \langle \mathbf{u}' \cdot \nabla \times \mathbf{u}' \rangle$  bei  $\theta = 45^\circ$  für  $\Lambda = 0.1, 1, 10$  (von links nach rechts).

Grenzflächen. Durch die Randbedingungen verschwindet die vertikale Geschwindigkeitskomponente am oberen und unteren Rand des Gebiets. Die auf- und abwärts-orientierten Strömungen werden daher in horizontale Richtungen umgelenkt. An der oberen Grenzfläche konvergieren die horizontalen Strömungen an den Rändern der Konvektionszellen, von wo aus die abwärts gerichteten Strömungen ausgehen. Durch die Coriolis Kraft entstehen dabei auf der Nordhalbkugel Verwirbelungen, die überwiegend entgegen dem Uhrzeigersinn orientiert sind. Die Helizität, die Korrelation aus Geschwindigkeit und Vortizität, ist daher negativ. Aufgrund der Drehimpulserhaltung führt die Expansion der *Upflows* im Innern der Konvektionszellen ebenfalls zu einer negativen Helizität. An der unteren Grenzfläche sind die Verhältnisse entgegengesetzt, so dass dort die Helizität positiv ist. Im Mittel führt der Einfluss der Coriolis-Kraft zu dem Verlauf mit entgegengesetzten Vorzeichen in oberer und unterer Boxhälfte, wie es in Abb. 2.18 dargestellt wird.

### $\alpha$ -Koeffizienten

Zur Bestimmung des  $\alpha$ -Effekts wird die elektromotorische Kraft  $\mathcal{E} = \langle \mathbf{u}' \times \mathbf{B}' \rangle$  direkt aus den numerischen Lösungen der MHD-Gleichungen (2.2)-(2.5) berechnet. Die Resultate beinhalten neben den anisotropen (nicht-diagonal) Komponenten des  $\alpha$ -Tensors die Abhängigkeit von der vertikalen Koordinate  $z$  und die magnetischen Quenching-Eigenschaften.

Bei der Bestimmung der  $\alpha$ -Koeffizienten stellen die nicht verschwindenden Magnetfeldkomponenten orthogonal zum ursprünglich angelegtem Feld und die Feldgradienten in der Nähe der vertikalen Grenzflächen ein wesentliches Problem dar. Um den Einfluss der zum Anfangsfeld orthogonalen Komponente herausrechnen zu können, wurden zwei separate Simulationen für jede Feldstärke durchgeführt, die sich dadurch unterscheiden, dass das angelegte Magnetfeld einmal in  $x$ -Richtung und das zweite Mal in  $y$ -Richtung ausgerichtet ist. Aus (2.56) und (2.57) ergeben sich explizit für die Komponenten der EMF im Falle eines horizontal angelegten Magnetfeldes ( $x$ - oder  $y$ -Richtung,  $\langle B_z \rangle = 0$ ):

$$\mathcal{E}_x = \alpha_{xx} \langle B_x \rangle + \alpha_{xy} \langle B_y \rangle + \eta_T \frac{\partial \langle B_y \rangle}{\partial z}, \quad (2.61)$$

$$\mathcal{E}_y = \alpha_{yx} \langle B_x \rangle + \alpha_{yy} \langle B_y \rangle - \eta_T \frac{\partial \langle B_x \rangle}{\partial z}. \quad (2.62)$$

Die Ergebnisse einer Simulation mit einem angelegten Feld in  $x$ -Richtung (gekennzeichnet im Folgenden durch den hochgestellten Index 1) werden nun mit den Ergebnissen einer Rechnung mit gleicher Feldstärke kombiniert, bei der das Feld in  $y$ -Richtung orientiert ist (gekennzeichnet durch den hochgestellten Index 2). Die Gleichungen (2.61) und (2.62) können dann in Matrixform geschrieben werden:

$$\begin{pmatrix} \langle B_x^1 \rangle & \langle B_y^1 \rangle & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \langle B_x^1 \rangle & \langle B_y^1 \rangle \\ \langle B_x^2 \rangle & \langle B_y^2 \rangle & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \langle B_x^2 \rangle & \langle B_y^2 \rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_{xx} \\ \alpha_{xy} \\ \alpha_{yx} \\ \alpha_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{E}_x^1 - \eta_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial z} \langle B_y^1 \rangle \\ \mathcal{E}_y^1 + \eta_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial z} \langle B_x^1 \rangle \\ \mathcal{E}_x^2 - \eta_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial z} \langle B_y^2 \rangle \\ \mathcal{E}_y^2 + \eta_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial z} \langle B_x^2 \rangle \end{pmatrix}. \quad (2.63)$$

Voraussetzung für diese Vorgehensweise ist die Annahme, dass die  $\alpha$ -Koeffizienten unabhängig von der Orientierung des angelegten Magnetfeldes sind (was in horizontaler Richtung auch der Fall ist). Man erhält so ein System aus vier Gleichungen mit fünf Unbekannten:  $\alpha_{xx}, \alpha_{xy}, \alpha_{yx}, \alpha_{yy}$  und  $\eta_{\Gamma}$ . Zur Lösung dieses Problems wird daher im Folgenden untersucht, inwieweit der diffusive Term  $\propto \partial_z \langle B \rangle$  vernachlässigbar ist.

Zu diesem Zweck wurde zunächst  $\eta_{\Gamma}$  anhand der Beziehung (2.51) aus den zeitlichen Korrelationen von  $\mathbf{u}'$  abgeschätzt. Ein typisches Beispiel für die dazu benötigte Korrelation  $\langle \mathbf{u}'(t) \mathbf{u}'(t - \tau) \rangle$  zeigt Abb. 2.19. Als obere Grenze für die Berechnung des Integrals

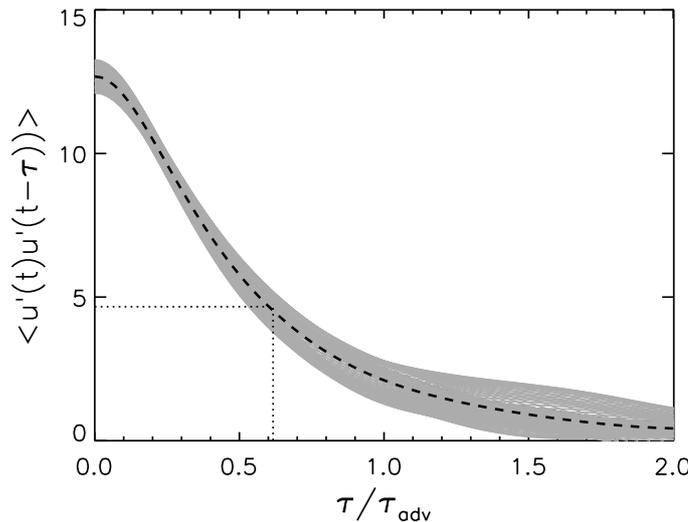


Abbildung 2.19: Zeitliche Korrelationen  $\langle \mathbf{u}'(t) \mathbf{u}'(t - \tau) \rangle$  ( $\Lambda \approx 1, \text{Ta} = 10^7, \theta = 45^\circ$ ). Die gepunkteten Linien zeigen den Abfall auf  $1/e$  des Maximalwertes.

$\eta_{\Gamma} = 1/3 \int_0^\infty \langle \mathbf{u}'(t) \mathbf{u}'(t - \tau) \rangle d\tau$  wurde das dreifache der Korrelationszeit  $\tau_{\text{corr}}$  verwendet. Die Korrelationszeit  $\tau_{\text{corr}}$  ist hier als die Zeit  $\tau$  definiert, nach der  $\langle \mathbf{u}'(t) \mathbf{u}'(t - \tau) \rangle$  auf  $1/e$  des maximalen Wertes (gegeben durch  $\langle \mathbf{u}'^2(t) \rangle$ ) abgefallen ist, was in Abb. 2.19

durch die gepunkteten Linien angedeutet wird. Tabelle 2.1 zeigt die Resultate für  $u_{\text{rms}}^2$ ,  $\eta_{\text{T}}$  in Einheiten der vorgegebenen (molekularen) Diffusivität  $\eta$ , die Korrelationszeit  $\tau_{\text{corr}}$ , die als *Cut-Off* bei der Berechnung des Integrals in (2.51) dient, sowie zum Vergleich die Korrelationszeit wie sie sich aus der Beziehung  $\eta_{\text{T}} = 1/3\tau_{\text{corr}}u_{\text{rms}}^2$  anhand der Werte aus Zeile 2 und Zeile 3 ergibt. Die Korrelationszeiten sind dabei jeweils in Einheiten der Advektionszeit angegeben.

$\Lambda$	0.01	0.03	0.1	0.5	1.0	10	100
$u_{\text{rms}}^2$	9.7	9.3	7.6	6.6	6.2	5.0	3.5
$\eta_{\text{T}}/\eta$	59.0	30.0	14.8	11.8	12.8	25.6	11.3
$\tau_{\text{corr}}/\tau_{\text{adv}}$	0.6	0.5	0.4	0.4	0.6	1.8	0.9
$3\eta_{\text{T}}u_{\text{rms}}^{-2}/\tau_{\text{adv}}$	1.9	1.0	0.6	0.6	0.6	1.6	1.0

Tabelle 2.1: Turbulente Geschwindigkeit, turbulente magnetische Diffusivität  $\eta_{\text{T}}$  und Korrelationszeiten für  $\text{Ta} = 10^7$  und  $\theta = 45^\circ$ .

Für sehr kleine Magnetfelder ist  $\eta_{\text{T}}$  sehr viel größer als die molekulare magnetische Diffusivität  $\eta$ . Die wenigen verfügbaren Daten deuten jedoch auf ein sehr starkes magnetisches Quenching von  $\eta_{\text{T}}$  hin, so dass bereits für  $\Lambda \gtrsim 0.1$  die Abschätzung

$$\frac{\eta_{\text{T}}}{\eta} \approx O(10) \quad (2.64)$$

möglich ist. Die geringe Anzahl an Werten und die – zwar aufwendige – allerdings auf stark idealisierenden Annahmen beruhende Abschätzung, resultieren in einem plausiblen Ergebnis. Eine um einen Faktor 10 vergrößerte (turbulente) magnetischen Diffusivität ergibt unmittelbar Diffusionszeiten von

$$\tau_{\text{diff}} = \frac{R_{\text{CMB}}^2}{\eta_{\text{T}}} \approx 10000 \text{ Jahre.} \quad (2.65)$$

Diese Zeitskala liegt in dem Bereich, den Hoyng et al. (2002) für die Erde aus der Analyse von Autokorrelationsfunktionen aus dem Sint-800 Datensatz<sup>9</sup> bestimmt haben. Eine solche Diffusionszeit entspricht in etwa der Dauer eines *Reversals*, wie es aus paleomagnetischen Beobachtungen abgeschätzt wird. Die Abnahme des Dipol-Moments während eines *Reversals* lässt sich dann als diffusiver Prozess interpretieren und ist so konsistent mit dem Verhalten des (irregulär) oszillierenden Mean-Field-Modells, wie es in Kap. 3.2 präsentiert wird.  $\eta_{\text{T}} \approx 10\eta$  ergab sich ebenfalls in Brandenburg et al. (1990), die die turbulente Diffusivität aus Simulationen mit einem konstanten Strom ( $\partial_z \langle B_y \rangle \neq 0$ ) bestimmten.

Im Folgenden wurde anhand der Abschätzung  $\eta_{\text{T}} = 10\eta$  der Einfluss der turbulenten Diffusivität und der Magnetfeldgradienten auf die  $\alpha$ -Koeffizienten untersucht, indem

<sup>9</sup>Synthetic Intensity record of the past 800ka (Guyodo & Valet 1999)

die Matrix-Gleichung (2.63) sowohl mit als auch ohne den Term  $\propto \partial_z \langle B_{x,y} \rangle$  invertiert wurde. Es stellt sich heraus, dass im Bereich  $z \approx 0.2 \dots 0.8$  der Einfluss vollkommen unbedeutend ist, da in dem betreffenden Intervall die Gradienten des mittleren Feldes zu klein sind und der Ausdruck  $\eta_T \partial_z \langle B_{x,y} \rangle$  ignoriert werden kann. Nahe der vertikalen Randflächen sind die Gradienten des Magnetfeldes zwar groß, allerdings ist der Einfluss der turbulenten Diffusivität mit etwa 10% auf die Lösungen für die  $\alpha$ -Koeffizienten immer noch gering. Daher werden im Folgenden die Terme in Verbindung mit  $\eta_T$  bei der Bestimmung der  $\alpha$ -Koeffizienten ignoriert und die Matrix-Gleichung (2.63) unter der Annahme  $\eta_T \partial_z \langle B_{x,y}^{1,2} \rangle = 0$  invertiert.

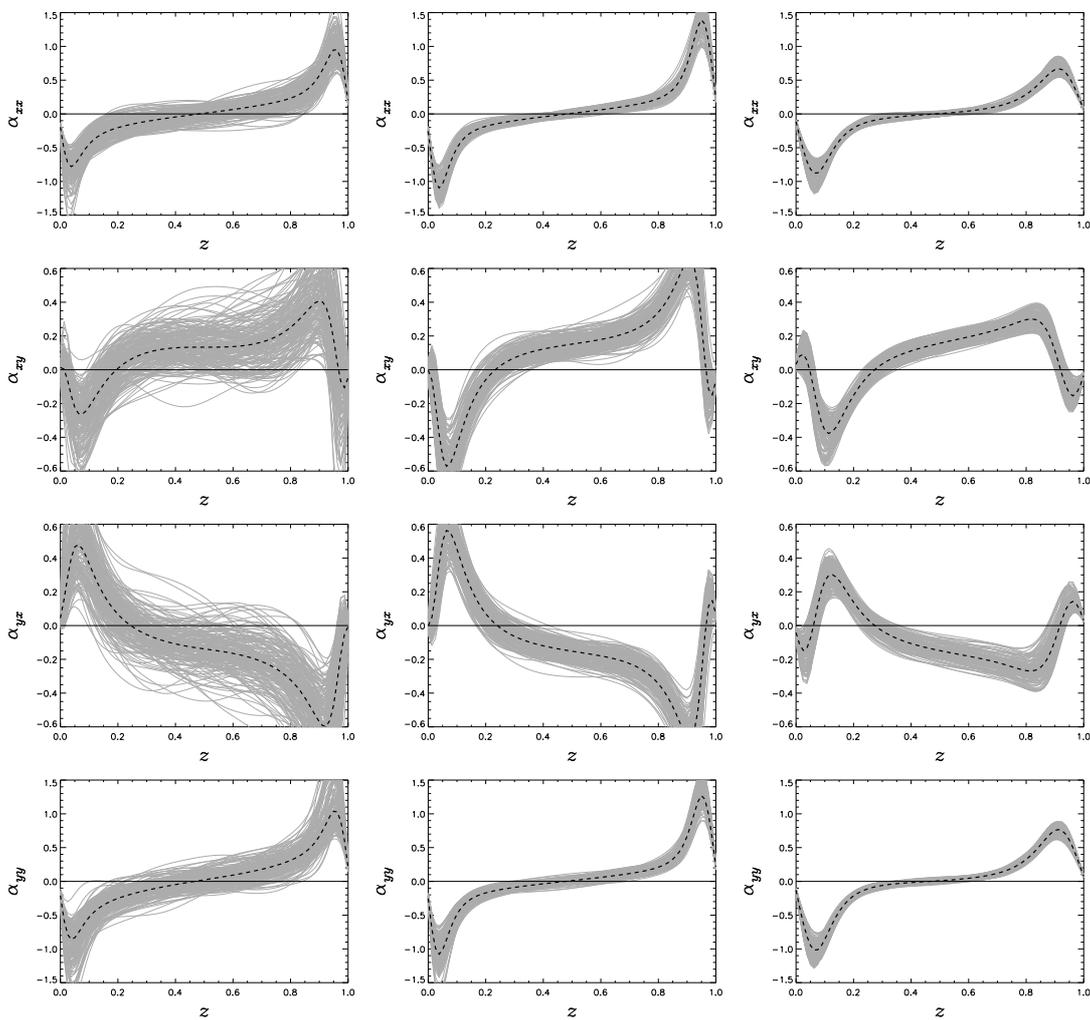


Abbildung 2.20:  $z$ -Abhängigkeit der  $\alpha$ -Koeffizienten bei  $\theta = 0^\circ$  für  $\Lambda = 0.1, 1, 10$  (von links nach rechts). Von oben nach unten:  $\alpha_{xx}$ ,  $\alpha_{xy}$ ,  $\alpha_{yx}$ ,  $\alpha_{yy}$

Unterstützung findet diese Vorgehensweise in der Plausibilität der Resultate, die in Abb. 2.20 für  $\theta = 0^\circ$  und in Abb. 2.21 für  $\theta = 45^\circ$  präsentiert werden. Insbesondere die Resultate am Nordpol zeigen, dass die aus Symmetriegründen notwendigen Beziehungen  $\alpha_{xx} = \alpha_{yy}$  und  $\alpha_{xy} = -\alpha_{yx}$  sehr gut erfüllt sind.

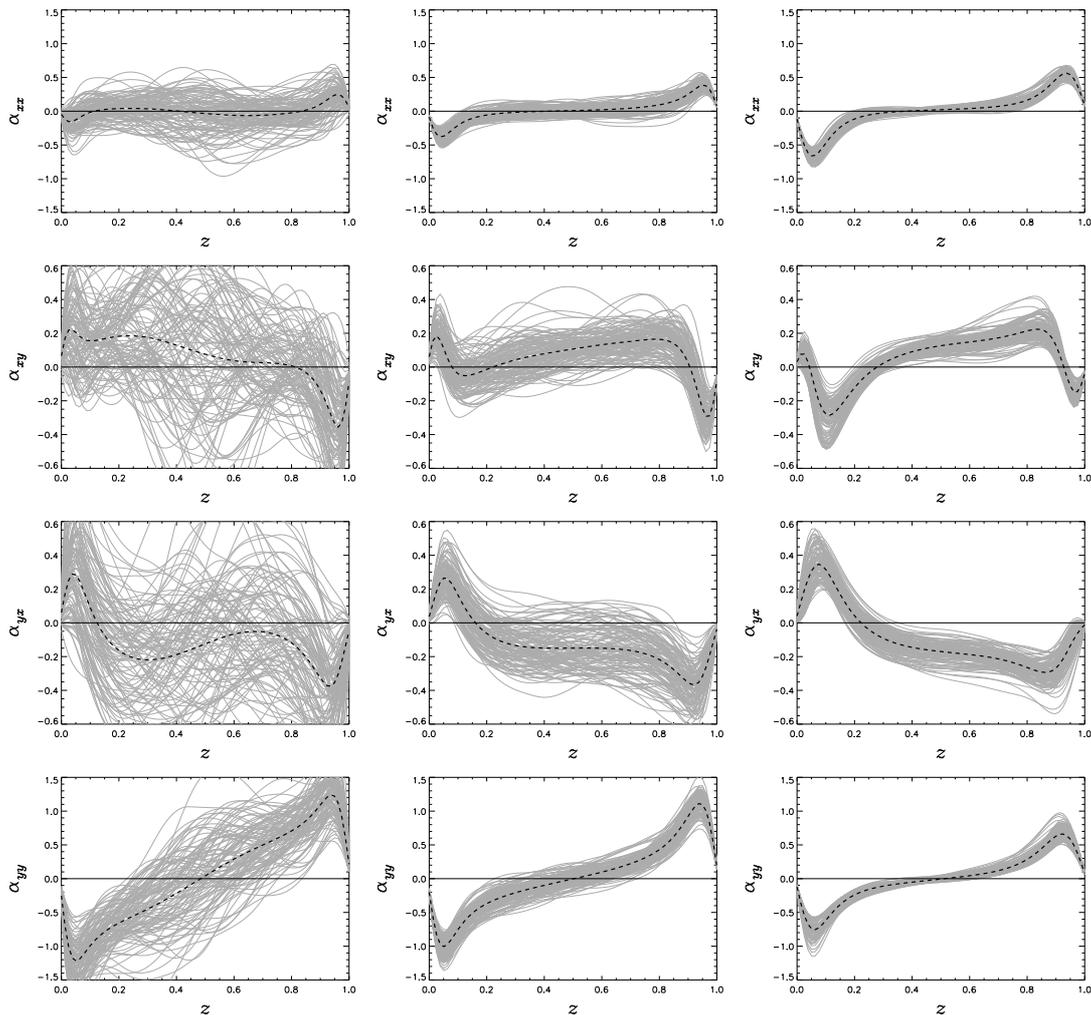


Abbildung 2.21:  $z$ -Abhängigkeit der  $\alpha$ -Koeffizienten bei  $\theta = 45^\circ$  für  $\Lambda = 0.1, 1, 10$  (von links nach rechts). Von oben nach unten:  $\alpha_{xx}, \alpha_{xy}, \alpha_{yx}, \alpha_{yy}$

Im Folgenden wird das Verhalten der Diagonalelemente des  $\alpha$ -Tensors, die für den eigentlichen Dynamo-Prozess verantwortlich sind, exemplarisch am Koeffizient  $\alpha_{yy}$  diskutiert. In allen Fällen verschwindet der  $\alpha$ -Effekt an den vertikalen Grenzflächen aufgrund der Randbedingungen.  $\alpha_{yy}$  zeigt ein nahezu perfektes antisymmetrisches Verhalten in Bezug auf die vertikale Koordinate  $z$ . Auf der Nordhalbkugel ist  $\alpha_{yy}$  stets negativ in der unteren Hälfte der Box und positiv in der oberen Hälfte der Box, wobei der Übergang von positiv nach negativ nahezu genau im Mittelpunkt, d.h. bei  $z \approx 0.5$  vollzogen wird. Man erhält dadurch zwei Zonen mit einem  $\alpha$ -Effekt und unterschiedlichen Vorzeichen mit annähernd gleicher Magnitude in der oberen bzw. unteren Teilschicht. Durch die Antisymmetrie führt eine zusätzliche Mittelung über die vertikale Koordinate  $z$  zu einem verschwindenden volumengemittelten  $\alpha$ -Koeffizienten. Ergebnisse mit vergleichbaren Eigenschaften zeigen die Lösungen  $\sim \sin(2\pi z)$  die in linearen Rechnungen von [Soward \(1974\)](#) gefunden wurden, und die den vertikalen Verlauf der Diagonalelemente

$\alpha_{xx}$  und  $\alpha_{yy}$  gut widerspiegeln. Der Verlauf bestätigt ebenfalls das durch Gleichung (2.52) beschriebene Verhalten, nach dem

$$\alpha \propto -H_{\text{kin}} \quad (2.66)$$

(siehe Abb. 2.18), wohingegen ein Zusammenhang mit der Strom-Helizität  $H_{\text{cur}} = \langle \nabla \times \mathbf{B}' \cdot \mathbf{B}' \rangle / \mu_0$ , durch den gelegentlich der Einfluss des Magnetfeldes beschrieben wird (Keinigs, 1983), nicht festgestellt werden kann.

Das hier erhaltene  $\alpha$ -Profil unterscheidet sich deutlich von Berechnungen in Konvektionsschichten mit starkem Dichtekontrast, bei denen die  $z$ -Abhängigkeit sehr viel asymmetrischer verläuft. In einem solchen Szenario kreuzt das  $\alpha$ -Profil die Null-Linie in der unteren Box-Hälfte und die Magnitude in der oberen Hälfte ist wesentlich höher als in der unteren, so dass man ein nicht-verschwindendes volumengemitteltes  $\alpha$  erhält (siehe Abb. 2.22).

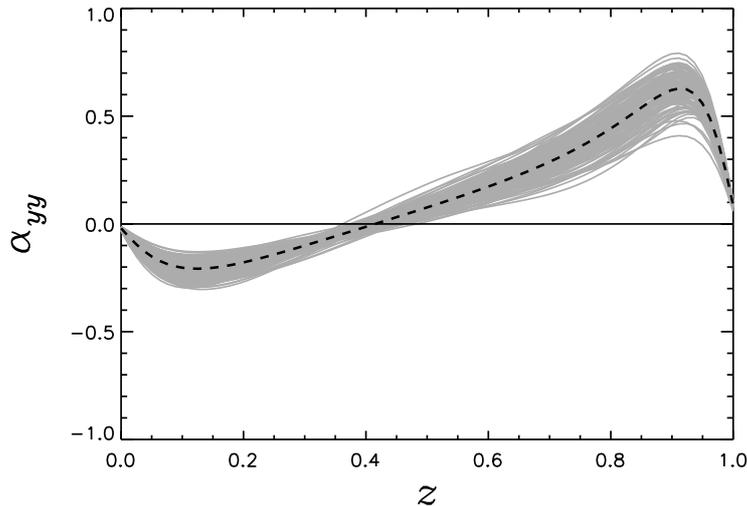


Abbildung 2.22:  $z$ -Abhängigkeit von  $\alpha_{yy}$  für eine starke Dichteschichtung ( $\rho_{\text{bot}}/\rho_{\text{top}} = 11$ ).  $\Lambda \approx 1$  und  $\theta = 45^\circ$ .

Am Nordpol gilt erwartungsgemäß – unabhängig von  $\Lambda$  – annähernd  $\alpha_{xx} = \alpha_{yy}$ , da bei  $\theta = 0^\circ$  kein Unterschied zwischen  $x$  bzw.  $y$  besteht. Anders ist der radiale Verlauf der Koeffizienten  $\alpha_{xx}$  und  $\alpha_{yy}$  bei  $\theta = 45^\circ$ . Zwar sind beide Tensor-Elemente in den meisten Fällen wiederum antisymmetrisch in Bezug auf die Boxmitte, jedoch zeigt  $\alpha_{xx}$  für sehr schwache Magnetfelder ein uneinheitliches Verhalten und verschwindet im Innern der Box nahezu völlig. Erst für mittlere Feldstärken erreicht  $\alpha_{xx}$  signifikante Magnitude und für  $\Lambda \gtrsim 10$  ( $B \gtrsim 0.65B_{\text{eq}}$ ) sind  $\alpha_{xx}$  und  $\alpha_{yy}$  von vergleichbarer Stärke. Mit zunehmender magnetischer Feldstärke nehmen die Fluktuationen des  $\alpha$ -Effektes deutlich ab, da das starke Magnetfeld die Turbulenz stärker unterdrückt und die Strömung so einen mehr laminaren Charakter erhält.

Das Verhalten der Magnitude des  $\alpha$ -Effektes in Abhängigkeit des angelegten Magnetfeldes zeigt Abb. 2.23. Die Magnitude des  $\alpha$ -Effektes wird gebildet aus dem Mittelwert

von Maximum und dem Absolutbetrag des Minimums von  $\alpha_{xx}$  und  $\alpha_{yy}$ . Die roten Kurven

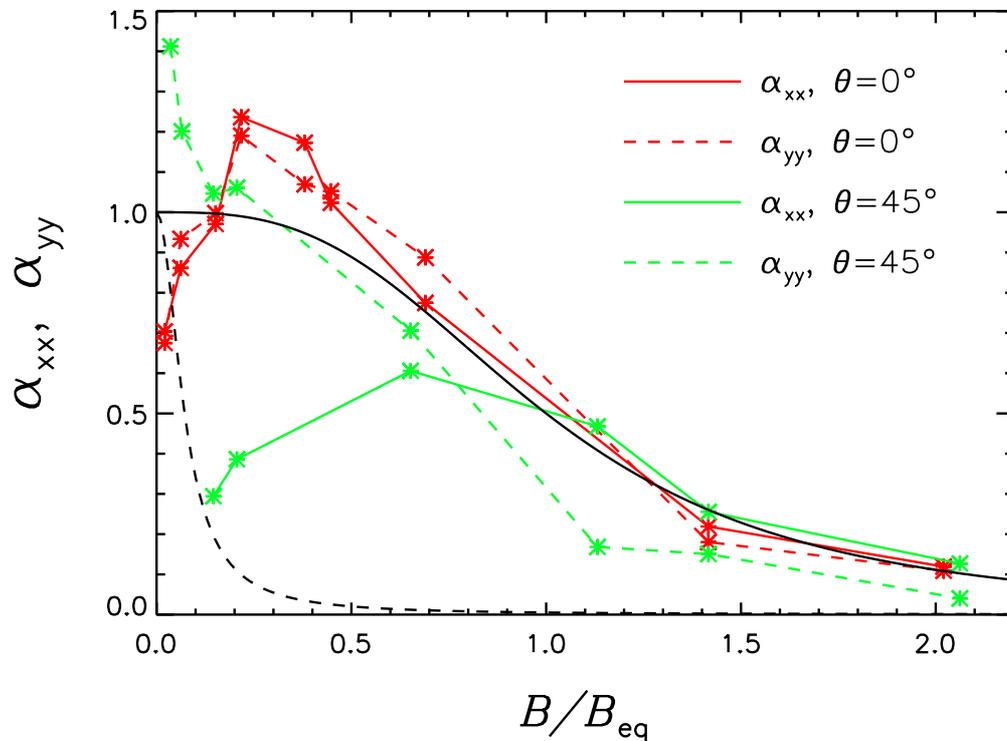


Abbildung 2.23: Quenching von  $\alpha_{xx}$  und  $\alpha_{yy}$ . Die schwarzen Kurven zeigen die analytische Quenching-Funktion (2.67) und (2.68).

zeigen  $\alpha_{xx}$  und  $\alpha_{yy}$  am Nordpol und die grünen Kurven die beiden Größen bei  $\theta = 45^\circ$ . Die schwarzen Kurven in Abb. 2.23 zeigen einfache analytische Quenching-Funktionen der Form

$$\alpha(B) = \alpha_0 \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{B_0}{B_{\text{eq}}}\right)^3} \quad (2.67)$$

(durchgezogene schwarze Kurve, „nicht-katastrophales“ Quenching) bzw.

$$\alpha(B) = \alpha_0 \cdot \frac{1}{1 + \text{Rm} \left(\frac{B_0}{B_{\text{eq}}}\right)^2}. \quad (2.68)$$

(gestrichelte schwarze Kurve, „katastrophales Quenching“). Hierbei bezeichnet  $B_0$  das ursprünglich angelegte Magnetfeld und  $B_{\text{eq}}$  stellt die Gleichgewichts-Feldstärke dar, wie sie in Gleichung (2.20) definiert wurde. Die magnetische Reynolds-Zahl  $\text{Rm}$  stammt dabei aus Rechnungen mit nicht rotierender Konvektion und verschwindendem Magnetfeld.

Für  $\theta = 0^\circ$  ist der Verlauf von  $\alpha_{xx}$  und  $\alpha_{yy}$  nahezu identisch und es existiert ein Maximum des  $\alpha$ -Effektes bei etwa  $B \approx 0.3B_{\text{eq}}$  (entspricht  $\Lambda \approx 2$ ). Dieses Maximum

koinzidiert annähernd mit dem Maximum der Turbulenz-Intensität (siehe Abb. 2.12, links unten). Bei  $\theta = 45^\circ$  ist der Verlauf der beiden Koeffizienten deutlich unterschiedlich.  $\alpha_{xx}$  weist ein Maximum bei  $B \approx 0.7B_{\text{eq}}$  (entspricht  $\Lambda \approx 10$ ) auf und nimmt für schwächere Magnetfelder stark ab. Im Gegensatz dazu ist  $\alpha_{yy}$  für kleine Feldstärken maximal und fällt mit zunehmenden Magnetfeld monoton ab.

Anders als in den Ergebnissen langsamer rotierender Konvektion bei [Ossendrijver et al. \(2001\)](#) ist das magnetische Quenching hier nicht-katastrophal. Eine Beschreibung durch die nicht-katastrophale Quenching-Funktion (2.67) ist offensichtlich eher zutreffend als durch die Funktion (2.68). Selbst für Magnetfeldstärken von der Größe der *equipartition field strength*  $B_{\text{eq}}$  ist die Magnitude des  $\alpha$ -Effektes lediglich um etwa 50% gegenüber schwachen Magnetfeldern reduziert. Dies unterscheidet sich ebenfalls deutlich von den Untersuchungen von [Cattaneo & Hughes \(1996\)](#), die für künstlich getriebene helikale Turbulenz bei Feldstärken in der Größenordnung von  $B_{\text{eq}}$  nahezu keinen  $\alpha$ -Effekt mehr feststellen konnten.

### Turbulente Advektion

Spaltet man den  $\alpha$ -Tensor in einen symmetrischen und einen antisymmetrischen Anteil:

$$\alpha_{ij}^S = \frac{\alpha_{ij} + \alpha_{ji}}{2} \quad \alpha_{ij}^A = \frac{\alpha_{ij} - \alpha_{ji}}{2}. \quad (2.69)$$

und ersetzt  $\alpha$  in der Induktionsgleichung (2.47) durch  $\alpha = \alpha^S + \alpha^A$ , so beschreibt der antisymmetrische Anteil  $\alpha^A$  eine zusätzliche Advektion von magnetischem Fluss, da

$$\alpha^A \cdot \langle \mathbf{B} \rangle = \boldsymbol{\gamma} \times \langle \mathbf{B} \rangle \quad (2.70)$$

gilt, wobei

$$\boldsymbol{\gamma} = -(\alpha_{yz}^A, \alpha_{zx}^A, \alpha_{xy}^A) \quad (2.71)$$

(siehe z.B. [Ossendrijver et al. 2002](#)). Die Linearkombination der Nichtdiagonal-Elemente  $\alpha_{xy}$  und  $\alpha_{yx}$ , gegeben durch  $(\alpha_{xy} - \alpha_{yx})/2$ , spielt folglich die Rolle von (turbulenter) Advektion in vertikaler Richtung. Aus Abb. 2.20 und 2.21 erhalten wir zumindest im inneren Bereich der Box<sup>10</sup> die näherungsweise gültige Beziehung

$$\alpha_{xy} \approx -\alpha_{yx}, \quad (2.72)$$

so dass unmittelbar gilt:  $\alpha_{xy}^S = 0$ . Damit folgt  $\alpha_{xy}^A \approx \alpha_{xy}$ , wie es nach Gleichung (2.59) auch erwartet wurde. Unabhängig von  $\Lambda$  ist das  $z$ -Profil von  $\alpha_{xy}$  überwiegend (mit Ausnahme nahe der oberen und unteren Randflächen) positiv. Daher folgt, dass die vertikale turbulente Advektion  $\gamma_z = -\alpha_{xy}$  negativ und damit abwärts orientiert ist. Ein solches Verhalten wurde in quasi-linearer Näherung von [Kitchatinov & Rüdiger \(1992\)](#) berechnet und als turbulenter Auftrieb (*turbulent buoyancy*) bezeichnet. Ein turbulenter Abwärtstransport von magnetischem Fluss ist in zahlreichen Simulationen von Magnetokonvektion bestätigt worden ([Dorch & Nordlund, 2001](#); [Ossendrijver et al., 2002](#);

<sup>10</sup>Dies gilt bei  $\theta = 0^\circ$  auch in den Randgebieten.

Ziegler & Rüdiger, 2003). Nach Untersuchungen von Weiss et al. (2004) ist dies ein essentieller Mechanismus, der Geometrie und Entwicklung des Magnetfeldes in der *Penumbra*, dem Randgebiet eines entwickelten Sonnenflecks, bestimmt. Allerdings bemerkten Ziegler & Rüdiger (2003) für ein genügend starkes Feld eine Dominanz der turbulenten Auftriebskraft durch die nicht-lineare Wechselwirkung zwischen Magnetfeld und Dichteschichtung, die eine aufwärts gerichtete Advektion von magnetischem Fluss verursacht. Ein solches Phänomen wurde auch für starke Felder in den hier durchgeführten Simulationen mit geringer Dichte-Stratifizierung nicht festgestellt.

### 2.5.3 Abhängigkeit des $\alpha$ -Effekts von der Rotationsgeschwindigkeit

Die Abhängigkeit der horizontalen Komponenten,  $\alpha_{xx}$ ,  $\alpha_{yy}$  von der Rotationsgeschwindigkeit unterscheidet sich wesentlich von der der vertikalen Komponente,  $\alpha_{zz}$ . Der Einfachheit halber beziehen sich die folgenden Ausführungen auf den Nordpol, d.h. auf den Fall  $\theta = 0^\circ$ . Im Allgemeinen besteht der  $\alpha$ -Effekt aus zwei Anteilen, die von den Gradienten der Dichteschichtung und dem Gradienten der Turbulenzintensität herrühren. Für

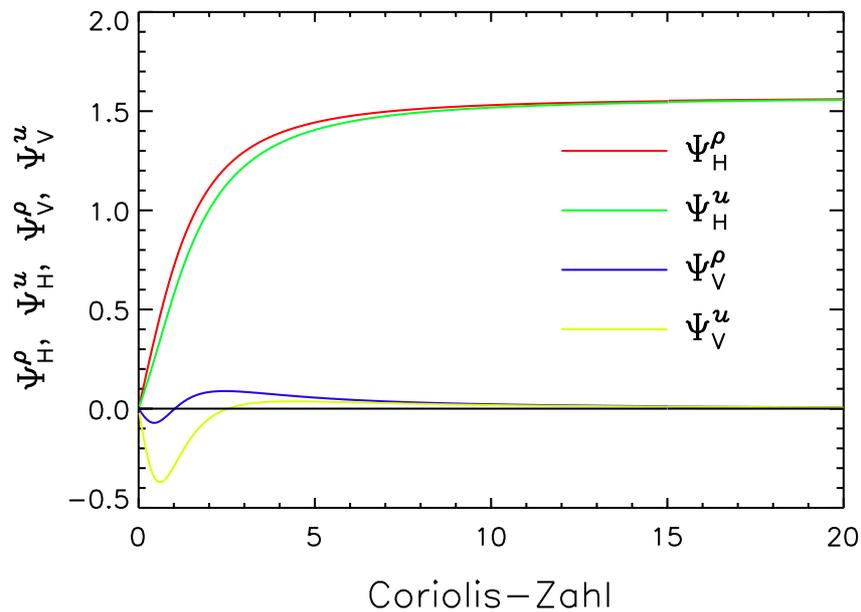


Abbildung 2.24: Abhängigkeit der Funktionen  $\Psi$  aus den Gleichungen (2.73) bzw. (2.74) von der Coriolis-Zahl  $Co = 2\Omega\tau_{\text{corr}}$ .

den horizontalen  $\alpha$ -Effekt,  $\alpha_{yy}$ , gilt für nicht zu starke Magnetfelder:

$$\alpha_{yy} = \tau_{\text{corr}} u_{\text{rms}}^2 \left( \Psi_{\text{H}}^{\rho} \frac{d}{dz} \log \rho + \Psi_{\text{H}}^u \frac{d}{dz} \log u_{\text{rms}} \right) \quad (2.73)$$

bzw. analog für den vertikalen  $\alpha$ -Effekt:

$$\alpha_{zz} = \tau_{\text{corr}} u_{\text{rms}}^2 \left( \Psi_V^\rho \frac{d}{dz} \log \rho + \Psi_V^u \frac{d}{dz} \log u_{\text{rms}} \right) \quad (2.74)$$

(Rüdiger & Kitchatinov, 1993). Der Einfluss der Rotation wird parametrisiert durch die Funktionen  $\Psi_H^\rho$  und  $\Psi_H^u$ , die in Abb. 2.24 dargestellt werden und das unterschiedliche Verhalten von vertikalem und horizontalem  $\alpha$ -Effekt in Abhängigkeit von der Coriolis-Zahl verdeutlichen. Während der horizontale  $\alpha$ -Effekt mit zunehmender Rotationsgeschwindigkeit anwächst und bei ausreichend schneller Rotation ( $\text{Co} \gg 1$ ) einen Sättigungsbereich erreicht (für  $\text{Co} \gg 1$  gilt:  $\Psi_H^\rho = \Psi_H^u \rightarrow \pi/2$ ), ist das Verhalten des vertikalen  $\alpha$ -Effekts für moderate Rotationsgeschwindigkeiten uneinheitlich. Für kleine Coriolis-Zahlen sind  $\Psi_V^{\rho,u}$  negativ, während für schnell rotierende Objekte  $\Psi_V^\rho = \Psi_V^u \rightarrow 0$  gilt, so dass  $\alpha_{zz}$  am Nordpol verschwindet. Dies ist eine direkte Konsequenz des Taylor-Proudman Theorems, das besagt, dass für schnell rotierende Kugeln die Variation der Geschwindigkeit parallel zur Rotationsachse ( $z$ ) verschwindet:  $\partial_z \mathbf{u} = 0$ . Da für  $\alpha_{zz}$  im *High-Conductivity-Limit*

$$\alpha_{zz} = -\tau_{\text{corr}} \left( u'_y \frac{\partial u'_x}{\partial z} - u'_x \frac{\partial u'_y}{\partial z} \right) \quad (2.75)$$

gilt (folgt aus den Gleichungen 2.48 und 2.49), resultiert unmittelbar  $\alpha_{zz} = 0$ .

### Horizontaler $\alpha$ -Effekt

Die Abhängigkeit von  $\alpha_{yy}$  von der Rotationsgeschwindigkeit aus den Simulationen zeigt Abb. 2.25 (parametrisiert durch die Taylor-Zahl). Die Werte für  $\alpha_{yy}$  steigen mit zunehmender Rotationsgeschwindigkeit sowohl am Pol als auch bei  $\theta = 45^\circ$  in vergleichbarer Art und Weise an. Ein Sättigungsbereich, wie er aus den quasi-linearen Betrachtungen folgt (siehe Abb. 2.24), ist hier noch nicht erreicht. Numerische Untersuchungen von Ossendrijver et al. (2001) haben ebenfalls gezeigt, dass in der solaren Konvektionszone der horizontale  $\alpha$ -Effekt am Pol mit zunehmender Rotationsgeschwindigkeit ansteigt, wohingegen der vertikale  $\alpha$ -Effekt für höhere Rotationsraten unterdrückt wird (siehe Ossendrijver et al. 2001, Abb. 5, unten). In diesen Simulationen ist die maximale Taylor Zahl allerdings mit  $\text{Ta} = 5 \cdot 10^4$  deutlich kleiner als bei den hier durchgeführten Rechnungen. Desweiteren berechnen Ossendrijver et al. den  $\alpha$ -Effekt als Volumenmittel in einem stark stratifizierten Medium getrennt in einer konvektiv instabilen und in einer konvektiv stabilen Schicht (unterhalb der eigentlichen Konvektionsschicht), so dass ein detaillierter Vergleich mit den hier präsentierten Simulationen schwierig ist.

Der Verlauf der Kurven in Abb. 2.25 lässt vermuten, dass die Coriolis-Zahl  $\text{Co} = 2\Omega\tau_{\text{corr}}$  in den Simulationen mit höchster Rotationsgeschwindigkeit ( $\text{Ta} = 10^7$ ) deutlich unterhalb von  $\text{Co} \approx 5$  liegt (Vergleiche dazu den Verlauf der Funktionen  $\Psi_{V,H}^{\rho,u}$  in Abb. 2.24. Dies steht eindeutig in Widerspruch zu den Werten für  $\text{Co}$ , wie sie sich direkt aus  $\Omega$  und  $\tau_{\text{corr}} \approx 0.5\tau_{\text{adv}}$  (aus den Untersuchungen in den Abschnitten 2.4.3 und 2.4.4) ergäben. Für eine genauere Abstimmung der im Rahmen dieser Arbeit erzielten Ergebnisse mit den quasi-linearen Ergebnissen von Rüdiger & Kitchatinov (1993) werden daher

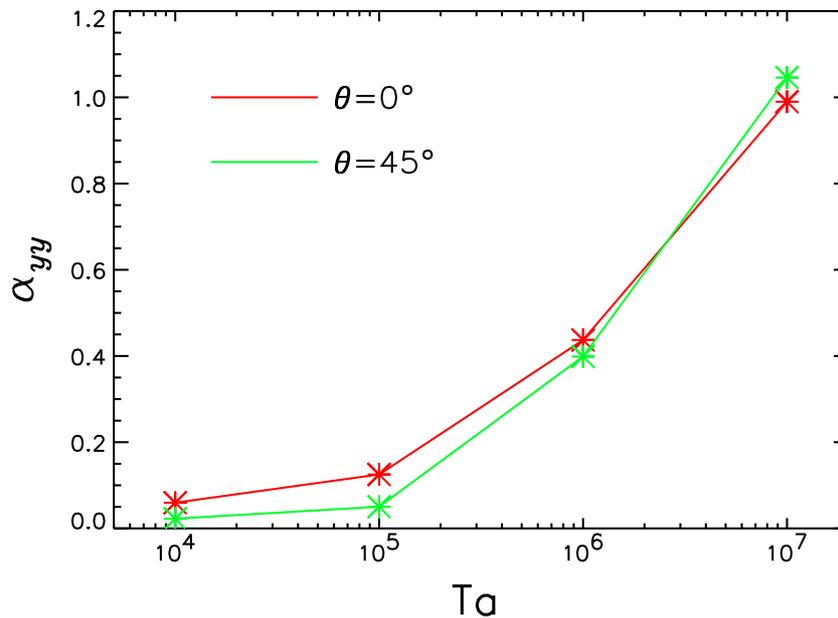


Abbildung 2.25: Abhängigkeit des  $\alpha$ -Effekts von der Rotationsgeschwindigkeit.  $B_y \approx 0.12B_{\text{eq}}$ .

Simulationen mit deutlich höherer Rotationsgeschwindigkeit benötigt, die allerdings aufgrund numerischer Einschränkungen nicht durchführbar waren. Da die Funktionen  $\Psi_{\text{H}}^{\rho,u}$  nach oben durch  $\pi/2$  begrenzt sind, kann man zumindest davon ausgehen, dass ein weiterer rotationsbedingter Anstieg von  $\alpha_{yy}$  nicht mehr übermäßig deutlich ausfallen kann.

### Vertikaler $\alpha$ -Effekt

Die Bestimmung der  $\alpha$ -Koeffizienten bei einem vertikal angelegten Magnetfeld ist wesentlich einfacher durchzuführen, da hier weder orthogonal zum Ursprungsfeld orientierte Magnetfelder auftreten noch signifikante Gradienten des Magnetfeldes zu beobachten sind. Aus den drei Komponenten der EMF ist daher über die einfache Beziehung

$$\mathcal{E}_i = \alpha_{iz} \langle B_z \rangle \quad (2.76)$$

unmittelbar die Berechnung der Koeffizienten  $\alpha_{xz}$ ,  $\alpha_{yz}$  und  $\alpha_{zz}$  möglich. Abbildung 2.26 zeigt die vertikalen Profile von  $\alpha_{zz}$  für  $B_z \approx 0.02B_{\text{eq}}$  (links) und  $B_z \approx 0.12B_{\text{eq}}$  (rechts). Die Ergebnisse für eine Reihe an weiteren Magnetfeldstärken inklusive der Koeffizienten  $\alpha_{xz}$  und  $\alpha_{yz}$  finden sich im Anhang C.3. Anhand der beiden Plots in Abb. 2.26 zeigt sich unmittelbar die im Vergleich zum horizontalen  $\alpha$ -Effekt deutlich stärkere Unterdrückung von  $\alpha_{zz}$  durch das Magnetfeld. Ein solches Resultat ergibt sich ebenfalls in den Ergebnissen von Rüdiger & Kitchatinov (1993), die für  $\alpha_{zz}$  am Nordpol ein Quenching-Verhalten  $\sim O(\beta^{-5})$  angeben.

Das rotationsbedingte Quenching von  $\alpha_{zz}$  ist lediglich für schwache Felder auf der linken Seite von Abb. 2.26 erkennbar. Für langsame Rotationsgeschwindigkeiten ( $Ta =$

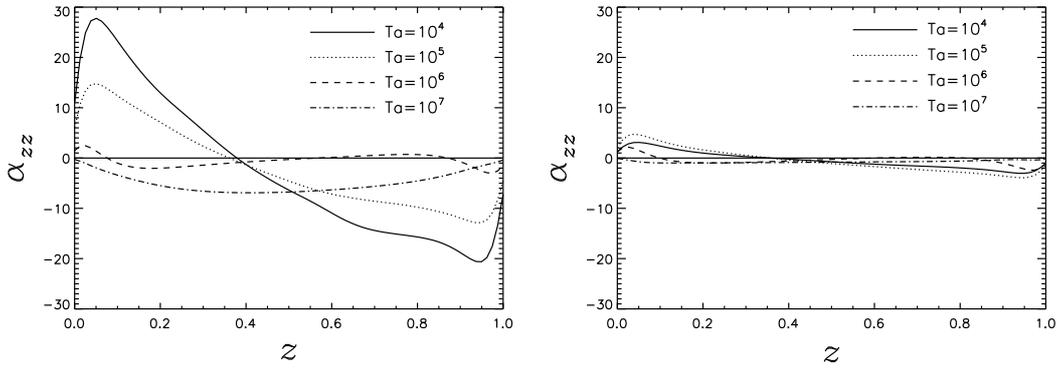


Abbildung 2.26:  $z$ -Profile von  $\alpha_{zz}$  für verschiedene Rotationsgeschwindigkeiten. Links:  $B_z \approx 0.02B_{\text{eq}}$ , rechts:  $B_z \approx 0.12B_{\text{eq}}$ ,  $\theta = 0^\circ$ .

$10^4, 10^5$ ) werden die Ergebnisse von [Ossendrijver et al. \(2001\)](#) bezüglich des Vorzeichenverhaltens bestätigt, wonach  $\alpha_{zz} \propto -\alpha_{yy}$  und daher  $\alpha_{zz} \propto +H_{\text{kin}}$ . Für  $Ta = 10^6$  (gestrichelte Kurve) ist  $\alpha_{zz}$  im Vergleich zu Rechnungen mit niedrigerer Rotationsgeschwindigkeit nahezu verschwunden und zeigt bezüglich des Vorzeichens kein eindeutiges Verhalten. Dieses Verhalten suggeriert daher zunächst, dass  $\alpha_{zz}$  für schnellere Rotationsgeschwindigkeiten am Pol erwartungsgemäß verschwindet. Eine weitere Erhöhung der Rotationsgeschwindigkeit ( $Ta = 10^7$ , gepunktet-gestrichelte Kurve in Abb. 2.26) führt allerdings zu einem erneuten – wenn auch nur geringen – Anstieg von  $\alpha_{zz}$ . Zudem ist  $\alpha_{zz}$  dann ausnahmslos negativ, und es besteht kein direkter Zusammenhang mehr zwischen  $\alpha_{zz}$  und Helizitäten (sowohl kinetischer als auch Strom-Helizität). Die Ursache für dieses Verhalten ist unklar. Eine “Verstärkung” von Turbulenz und  $\alpha$ -Effekt durch das Magnetfeld, wie sie sich in Abb. 2.23 für den horizontalen  $\alpha$ -Effekt zeigt, ist aufgrund des schwachen Magnetfeldes, das den Ergebnissen in Abb. 2.26 zu Grunde liegt, eher unwahrscheinlich. Auf den ersten Blick erscheint dies nicht besonders problematisch, da Abb. 2.26 die erwartete Reduktion mit steigender Rotationsrate recht eindeutig widerspiegelt. Zu beachten ist allerdings, dass der vertikale  $\alpha$ -Effekt für schwache Feldstärken eine deutlich größere Magnitude aufweist als die horizontalen Komponenten. Ein im Vergleich zum horizontalen  $\alpha$ -Effekt um den Faktor 3 größeres  $\alpha_{zz}$  ergibt sich ebenfalls in Simulationen von [Ossendrijver et al. \(2001\)](#)

Der direkte Vergleich von vertikalen und horizontalen  $\alpha$ -Effekt ist allerdings aus zwei Gründen problematisch. Zum einen ist – wie bereits erwähnt –  $\alpha_{zz}$  sehr stark vom extern angelegten Magnetfeld abhängig. So ist bei  $Ta = 10^7$  bereits für  $\Lambda \approx 1$  ( $B_z \approx 0.2B_{\text{eq}}$ )  $\alpha_{zz}$  deutlich kleiner als  $\alpha_{yy}$ . Zudem sind zur Bestimmung von  $\alpha_{zz}$  bzw.  $\alpha_{yy}$  unterschiedliche Konfigurationen mit unterschiedlichen Randbedingungen unvermeidbar. Den deutlichen Einfluss der Randbedingungen auf den vertikalen Verlauf des  $\alpha$ -Effekts zeigt der Vergleich der Simulationen von [Ossendrijver et al. \(2001\)](#) mit stabilen Schichten ober- und unterhalb des konvektiv instabilen Bereiches mit Simulationen ohne solche Schichten unter ansonsten gleichen Bedingungen. Untersuchungen unterschiedlicher Randbedingungen für ein horizontales Magnetfeld zeigen einerseits für den horizontalen  $\alpha$ -Effekt

nahezu identische Resultate (zumindest für  $\Lambda \approx 1$  und  $\theta = 45^\circ$ , siehe Abb. B.2). Andererseits finden sich ebenfalls deutliche Unterschiede in anderen charakteristischen Größen, wie z.B. dem mittleren Magnetfeld (siehe Abb. B.1). Diese deuten darauf hin, dass unter Umständen die Verhältnisse der Rechnungen mit horizontalen Magnetfeld nicht unbedingt vergleichbar sind mit den Simulationen, in denen ein vertikales Magnetfeld angelegt wird. Wiederum sind für eine genaue Untersuchung des Verhaltens von  $\alpha_{zz}$  im Limit schneller Rotation, Simulationen mit höherer Rotationsgeschwindigkeit und höherer Auflösung nötig.

## 2.5.4 Magnitude des $\alpha$ -Effektes für den Geodynamo

Um die Signifikanz des  $\alpha$ -Effektes für die Erde zu bestimmen, wird die Dynamo-Zahl

$$C_\alpha = \frac{\alpha d}{\eta_T} \quad (2.77)$$

für typische Werte des  $\alpha$ -Effektes aus den vorliegenden Ergebnissen abgeschätzt. Die Simulationen ergeben als typische Werte für die Magnitude von  $\alpha$  und  $\eta_T$  im Falle eines nicht zu starken Magnetfeldes ( $\Lambda \lesssim 10$  bzw.  $B \lesssim 0.7B_{\text{eq}}$ ):

$$\alpha \approx 0.1u_{\text{rms}} \quad \eta_T \approx 10\eta. \quad (2.78)$$

Diese Werte sind grobe Abschätzungen, die sich aus relativ wenigen untersuchten Parametern ergaben. Zudem zeigen die Resultate des Abschnitts 2.5.3, dass  $\alpha$  mit steigender Rotationsgeschwindigkeit ansteigt. Die Vermutung liegt nahe, dass für realistische Parameter der  $\alpha$ -Effekt größer ist als in den hier durchgeführten Simulationen. Nichtsdestotrotz stimmen die Annahmen (2.78) gut mit Angaben anderer Untersuchungen zum  $\alpha$ -Effekt (Ziegler & Rüdiger, 2000; Ossendrijver et al., 2001; Ziegler, 2002) sowie zur Bestimmung der turbulenten Diffusionszeit zur Abschätzung von  $\eta_T$  der Erde (Brandenburg et al., 1990; Hoyng et al., 2002) überein. Falls Relationen wie (2.78) auch in der Erde gelten, ergibt sich mit typischen Werten (Dicke der flüssigen Konvektionsschicht von 2200 km, typische Strömungsgeschwindigkeit  $u_{\text{rms}} \approx 5 \cdot 10^{-4} \text{m/s}$ , (molekulare) Diffusivität  $\eta \approx 2 \text{m}^2/\text{s}$ ) eine Dynamo-Zahl von  $C_\alpha \approx 5$ . Dies entspricht in etwa der kritischen Dynamozahl von  $C_\alpha^{\text{crit}} \approx 4.5$ , die Krause & Rädler (1980) als unteren Grenzwert für das Auftreten eines Dynamos in einfachen  $\alpha^2$ -Modellen erhalten.



## Kapitel 3

# Axialsymmetrisches $\alpha^2$ -Modell mit irregulären Dipol-Umkehrungen

### 3.1 Mean-Field-Theorie des Geodynamos

#### 3.1.1 Gleichungen und Grundbegriffe

Im Folgenden wird eine Kugelschale mit inneren Radius  $R_{\text{ICB}}$  und äußeren Radius  $R_{\text{CMB}}$  betrachtet, die mit einem flüssigen leitenden Medium gefüllt ist. In dem Modell existieren keine mittleren Strömungen ( $\langle \mathbf{u} \rangle = 0$ ), so dass keine Magnetfeldproduktion durch Scherung erfolgt. Ein  $\alpha$ -Effekt parametrisiert die Induktion durch nicht-spiegelsymmetrische Turbulenz, die z.B. durch Konvektion angetrieben wird. Aus der Mean-Field Induktionsgleichung (2.47) folgt mit  $\mathcal{E}_i = \alpha_{ij} \langle B_j \rangle + \beta_{ijk} \partial_k \langle B_j \rangle$  unter der Annahme von  $\beta_{ijk} = \eta_{\text{T}} \epsilon_{ijk}$  und  $\eta_{\text{T}} \gg \eta$  die Induktionsgleichung zur Beschreibung eines  $\alpha^2$ -Dynamos:

$$\frac{\partial \langle \mathbf{B} \rangle}{\partial t} = \nabla \times \left( \alpha \langle \mathbf{B} \rangle - \eta_{\text{T}} \nabla \times \langle \mathbf{B} \rangle \right). \quad (3.1)$$

$\eta_{\text{T}}$  bezeichnet die turbulente Diffusivität und bestimmt die Zeitskala, mit der induzierte elektrische Ströme durch Ohmsche Verluste zerfallen.  $\alpha$  ist im einfachsten Fall eine skalare Größe mit der Dimension einer Geschwindigkeit, die für die Dynamowirkung verantwortlich ist.

Für skalares  $\alpha$  und  $\eta_{\text{T}}$  ergeben sich analytische Lösungen von Gleichung (3.1) durch den Lösungsansatz

$$\langle \mathbf{B} \rangle = \widehat{\mathbf{B}} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)}. \quad (3.2)$$

Einen Dynamo erhält man im Falle von exponentiell wachsenden Lösungen für  $\langle \mathbf{B} \rangle$ , d.h. Lösungen mit der Eigenschaft  $\Re(-i\omega) > 0$ . Einsetzen von (3.2) in (3.1) ergibt

$$-i\omega \widehat{\mathbf{B}} = i\alpha \mathbf{k} \times \widehat{\mathbf{B}} - \eta_{\text{T}} k^2 \widehat{\mathbf{B}}. \quad (3.3)$$

In Komponenten erhält man damit:

$$[(-i\omega + \eta_{\text{T}} k^2) \delta_{ik} - i\alpha \epsilon_{ijk} k_j] \widehat{B}_k = 0. \quad (3.4)$$

Nicht-triviale Lösungen dieses Gleichungssystems existieren nur für eine verschwindende Determinante der Koeffizienten-Matrix:

$$\det | -i\omega\delta_{ik} + \eta_{\text{T}}k^2\delta_{ik} - i\alpha\epsilon_{ijk}k_j | = 0. \quad (3.5)$$

Damit ergibt sich die Dispersionsrelation

$$(-i\omega + \eta_{\text{T}}k^2)(-i\omega + \eta_{\text{T}}k^2 + \alpha k)(-i\omega + \eta_{\text{T}}k^2 - \alpha k) = 0 \quad (3.6)$$

mit den Lösungen

$$-i\omega + \eta_{\text{T}}k^2 = 0, \quad (3.7)$$

$$-i\omega + \eta_{\text{T}}k^2 = \pm\alpha k. \quad (3.8)$$

Lösung (3.7) zerfällt. Für ein hinreichend kleines  $k$  ergeben sich exponentiell wachsende Magnetfelder aus Lösung (3.8).

Zur Klassifizierung der Lösungen ist es sinnvoll, das mittlere Magnetfeld  $\langle \mathbf{B} \rangle$  in einzelne Moden zu zerlegen. Zunächst wird das Feld nach der Parität bezüglich des Äquators in symmetrische und antisymmetrische Anteile aufgespalten (gekennzeichnet durch den Buchstaben S bzw. A). Jeder dieser Anteile lässt sich weiter in longitudinale Moden  $\propto e^{im\varphi}$  zerlegen. Der axialsymmetrische Anteil wird durch den Fall  $m = 0$  beschrieben und entspricht einem Dipol (A0) bzw. Quadrupol (S0), während die nicht-axialsymmetrischen Moden durch  $m > 0$  dargestellt werden. Die Feldlinien der axialsymmetrischen Moden A0 und S0 sowie der niedrigsten nicht-axialsymmetrischen Moden A1 und S1 sind in Abb. 3.1 skizziert. In einem mit-rotierenden System entspricht die S1-Mode einem in der Äquatorialebene liegenden Dipol. Die nicht-axialsymmetrischen Moden zeigen im Allgemeinen eine Drift um die Rotationsachse.

Für einen vorgegebenen  $\alpha$ -Effekt lässt sich die Mean-Field Induktionsgleichung (3.1) in ein lineares Eigenwertproblem für die Dynamo-Zahl

$$C_{\alpha} = \frac{\alpha R}{\eta_{\text{T}}} \quad (3.9)$$

überführen. Die Lösungen des allgemeinen Problems inklusive mittlerer Scherströmungen lassen sich anhand zweier dimensionsloser Kennzahlen charakterisieren. Neben der Dynamo-Zahl  $C_{\alpha}$  ist dies eine Kennzahl zur Beschreibung des Einflusses der differentiellen Rotation:

$$C_{\Omega} = \delta\Omega \frac{R^2}{\eta}. \quad (3.10)$$

Ein  $\alpha^2$ -Dynamo liegt vor, falls  $|C_{\Omega}| \ll |C_{\alpha}|$  gilt. Die Lösungen dieses Typs haben im Allgemeinen stationäre Lösungen, d.h. ihre Eigenwerte sind real. Die poloidale und die toroidale Feldkomponente solcher Dynamos sind von vergleichbarer Größenordnung:

$$B_t/B_p \approx 1. \quad (3.11)$$

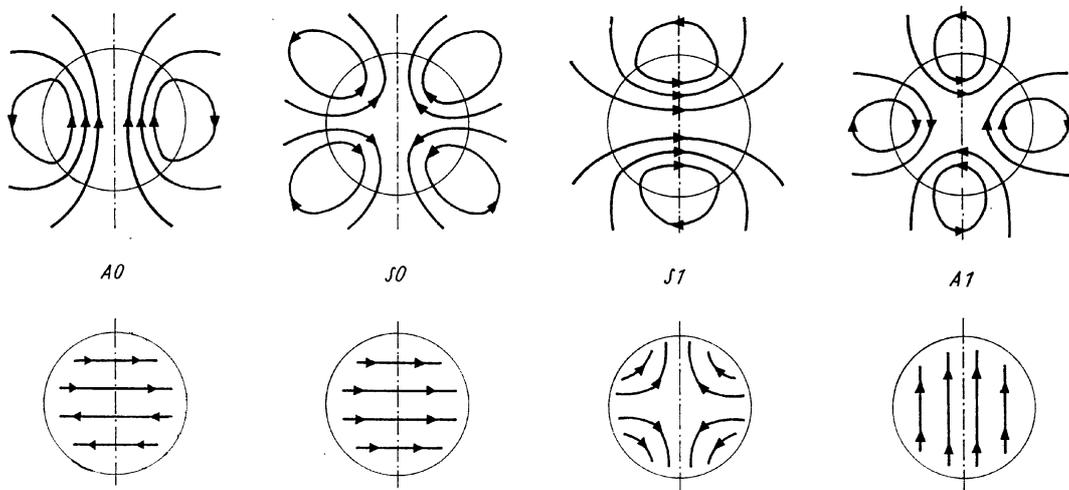


Abbildung 3.1: Schematische Darstellung der axialsymmetrischen Moden S0 und A0 (linke Hälfte) sowie der ersten nicht-axialsymmetrischen Moden S1 und A1 (rechte Hälfte). Die obere Zeile zeigt die poloidalen Komponenten in einer meridionalen Ebene und die untere Zeile zeigt die toroidale Komponente. Für die nicht-axialsymmetrischen Moden wurden ausgezeichnete Ebenen ausgewählt, die nicht von Feldlinien geschnitten werden (Abbildung entnommen aus [Rädler 1980](#)).

Für einen  $\alpha\Omega$ -Dynamo gilt hingegen:  $|C_\Omega| \gg |C_\alpha|$ . Lösungen dieses Typs sind im Allgemeinen periodisch und haben komplexe Eigenwerte. Die toroidale Feldkomponente ist bei solchen Dynamos dominierend:

$$\frac{B_p}{B_t} \approx \sqrt{\frac{C_\alpha}{C_\Omega}} \quad (3.12)$$

Für die einzelnen Moden eines  $\alpha^2$ -Dynamos existiert eine kritische Dynamo-Zahl  $C_\alpha^{\text{crit}}$ , die das Minimum der Magnitude des  $\alpha$ -Effekts bestimmt, die nötig ist, um einen Dynamo zu erhalten. In der Regel ist nur die Dynamo-Mode mit der niedrigsten  $C_\alpha^{\text{crit}}$  von Interesse. Moden mit höheren  $C_\alpha^{\text{crit}}$  sind instabil gegenüber nicht-linearen Störungen, so dass ihnen keine reale Bedeutung zukommt ([Steenbeck & Krause, 1969a](#)).

### 3.1.2 Mean-Field Modelle des Geodynamos

Bereits die ersten Mean-Field Modelle interpretierten den Geodynamo als  $\alpha^2$ -Dynamo ([Steenbeck & Krause, 1969b](#)). Aufgrund des festen Mantels und der im Vergleich zur Sonne schwachen Konvektion vernachlässigen [Steenbeck & Krause](#) differentielle Rotation. Coriolis-Kraft und ein Gradient in der Turbulenz-Intensität  $\langle u'^2 \rangle$  führen zu einem bevorzugten Schraubensinn (Helizität) der kleinskaligen Strömungen. Die Autoren beschreiben den daraus resultierenden  $\alpha$ -Effekt durch  $\alpha = -\tau\tau_{\text{corr}}\Omega \cos\theta \partial\langle u'^2 \rangle/\partial r$ . In dem Modell verschwindet die Turbulenz-Intensität  $\langle u'^2 \rangle$  an den Rändern und hat ein Maximum innerhalb der flüssigen Kugelschale, so dass der  $\alpha$ -Effekt in radialer Richtung einen Vorzeichenwechsel aufweist. Trotz der Nullstelle des  $\alpha$ -Effekts führt dies nicht zu zwei

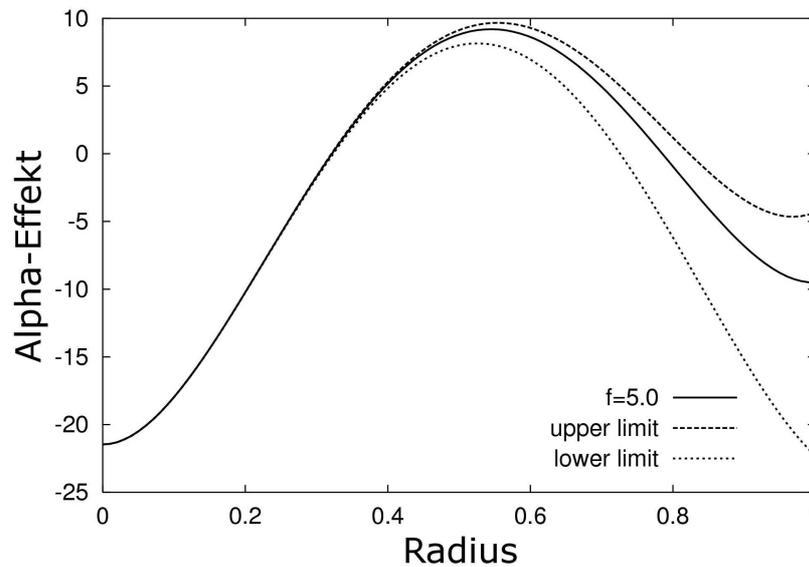


Abbildung 3.2: Radiales Profil des  $\alpha$ -Effekts, das in dem  $\alpha^2$ -Modell von Stefani & Gerbeth (2003) zu oszillierenden Lösungen führt. Entnommen aus Stefani & Gerbeth (2003).

räumlich getrennten Induktionszentren. Für einen skalaren  $\alpha$ -Effekt ergeben sich daher stationäre Lösungen, die nicht in der Lage sind, das Reversal-Phänomen zu erklären.

In der Folge entstanden eine Reihe weiterer Mean-Field Modelle des Geodynamos (siehe z.B. Rädler 1980; Jones et al. 1995; Hoyng et al. 2002). Stefani & Gerbeth (2001, 2003) haben in einem eindimensionalen Modell gezeigt, dass ein  $\alpha^2$ -Dynamo mit einer bestimmten radialen Abhängigkeit des  $\alpha$ -Effekts ebenfalls oszillierende Lösungen aufweisen kann. Unter der Nebenbedingung, dass die Dynamo-Mode mit der niedrigsten kritischen Dynamo-Zahl eine oszillierende Lösung aufweist, bestimmen sie ein isotropes radiales  $\alpha$ -Profil, das durch ein Polynom 4. Grades beschrieben wird. Alle stationäre Lösungen, die „üblicherweise“ das Verhalten von  $\alpha^2$ -Dynamos prägen, sind unterdrückt. Ein Beispiel eines solchen radialen  $\alpha$ -Profils, das zu oszillierenden Lösungen führt, zeigt Abb. 3.2. Charakteristisch für diesen  $\alpha$ -Effekt sind die Nullstellen im radialen Verlauf. Ein auf diesen Ergebnissen basierendes  $\alpha^2$ -Modell des Geodynamos wurde von Stefani & Gerbeth (2005) präsentiert. Ein fluktuierender radial variierender  $\alpha$ -Effekt – entnommen aus den Rechnungen aus Stefani & Gerbeth (2003) – führt zu irregulären *Reversals*, die bei geeigneter Parameterwahl vergleichbare statistische Eigenschaften wie die Dipolumkehrungen des Erdmagnetfelds aufweisen. Allerdings beruht der zu Grunde liegende  $\alpha$ -Effekt nicht auf (geo-)physikalischen Grundlagen.

### 3.1.3 Der Dynamo-Prozess in 3D-MHD Simulationen

Inzwischen existieren eine Vielzahl an 3D-MHD-Simulationen des Geodynamos, die auf teilweise recht unterschiedlichen Modellannahmen beruhen und dementsprechend Lösungen mit unterschiedlichen Charakteristiken liefern. An dieser Stelle kann daher nur eine

grobe Skizzierung der elementaren Prozesse, die in den Modellen zu einem Dynamo führen, gegeben werden. Details finden sich z.B. in [Hollerbach \(1996\)](#), [Kageyama & Sato \(1997a\)](#), [Roberts & Glatzmaier \(2000\)](#) und [Kono & Roberts \(2002\)](#). Die Erklärung der Dynamo-Wirkung in 3D-MHD-Modellen des Geodynamos geht zurück auf die Arbeiten von [Braginsky \(1964a,b,c\)](#), in denen das Modell des „fast symmetrischen Dynamos“ (*nearly axisymmetric dynamo*) entwickelt wurde. In dem Modell definiert der axialsymmetrische Anteil das mittlere Feld. Magnetfelder werden durch die gemeinsame Wechselwirkung von einer mittleren axialsymmetrischen Scherströmung, meridionalen Strömungen und nicht-axialsymmetrischen Strömungen produziert. Dieser Ansatz unterscheidet sich von dem Modell des turbulenten Dynamos, bei dem das mittlere Feld durch passende Mittelungen in Raum und Zeit definiert wird und daher nicht notwendigerweise axialsymmetrisch sein muss ([Krause & Rädler, 1980](#)). Der Mechanismus von [Braginsky](#) ist vergleichbar mit einem  $\alpha\Omega$ -Modell im turbulenten Dynamo. Nahezu alle Dynamos in globalen MHD-Geodynamo-Simulationen beruhen auf einem  $\alpha\Omega$ -Mechanismus. Eine Ausnahme sind die Simulationen von [Olson et al. \(1999\)](#), die für schwächer getriebene Konvektion  $\alpha^2$ -Dynamos finden, sowie die Simulationen von [Christensen & Aubert \(2006\)](#), die für einen großen Parameterbereich ausschließlich  $\alpha^2$ -Dynamos erhalten.

Ob solche Strömungen im flüssigen Erdkern tatsächlich existieren ist allerdings offen. So zeigen höher aufgelöste dreidimensionale MHD-Simulationen mit stärker getriebener Konvektion eine weitaus irregulärere Struktur und eine direkte Verknüpfung zwischen Strömung und Feld ist weniger klar erkennbar ([Roberts & Glatzmaier, 2000](#); [Kono & Roberts, 2002](#)). Aus diesem Grund wird hier das Modell eines turbulenten Dynamos vom  $\alpha^2$ -Typ untersucht, bei dem die Dynamowirkung durch kleinskalige, nichtspiegelsymmetrische turbulente Strömungen erfolgt. Gegebenenfalls vorhandene großskalige Strömungen werden nicht berücksichtigt. Der vorgegebene  $\alpha$ -Effekt beruht dabei auf den Ergebnissen, die in Abschnitt 2.5 präsentiert wurden. Die wesentlichen Resultate dieses Kapitels finden sich in [Giesecke et al. \(2005a\)](#).

## 3.2 Modell eines oszillierenden $\alpha^2$ -Dynamos

Die Mean-Field Induktionsgleichung (3.1) vom  $\alpha^2$ -Typ wird numerisch mit einem zweidimensionalen finiten Differenzen-Schema gelöst. Induktion erfolgt durch einen  $\alpha$ -Effekt innerhalb einer Kugelschale mit dem dimensionslosen äußeren Radius  $R_{\text{CMB}} = 1$  und dem inneren Radius  $R_{\text{ICB}} = 0.35$ , die den flüssigen Teil des Erdkerns repräsentiert. Die Auflösung beträgt  $64 \times 64$  Gitterzellen in radialer und latitudinaler Richtung. Simulationen mit doppelter Auflösung ergaben keine Veränderung in den Ergebnissen, so dass davon ausgegangen werden kann, dass die gewählte Gittergröße hinreichend ist. Als Randbedingung für die Grenze zum inneren Kern wurde die Bedingung für einen perfekten Leiter gewählt. Dies ist näherungsweise gerechtfertigt, da im inneren Kern ohne turbulente Strömungen die magnetische Diffusivität deutlich kleiner ist als im turbulenten flüssigen Teil des Erdkerns. Allerdings haben Simulationen von [Hollerbach & Jones \(1993\)](#) gezeigt, dass eine endliche Leitfähigkeit des inneren Kerns einen stabilisierenden Einfluss auf das Magnetfeld hat. Die endliche Leitfähigkeit des Kerns bedingt eine endliche Zeit, die das Feld benötigt, um den Kern zu durchdringen und eine umgekehrte

Polarität auszubilden. Dies verhindert das Umklappen des Dipols, bevor das Feld nicht auch den inneren Kern durchdrungen hat. Im Gegensatz dazu fand [Wicht \(2002\)](#) vergleichbare *Reversal*-Raten für Modelle mit isolierendem und mit leitendem Kern und folgerte daraus, dass der *Reversal*-Prozess nur wenig von der Leitfähigkeit des inneren Kerns abhängt.

Die Kugelschale wird von einem nicht-leitendem Medium umgeben, das den Erdmantel repräsentiert. An der Grenze zum Mantel wird ein Vakuum simuliert, indem die magnetische Diffusivität in dem Bereich von  $R_{\text{CMB}}$  bis  $1.2 \times R_{\text{CMB}}$  um einen Faktor 10 erhöht wird. Als Randbedingung bei  $r = 1.2 \times R_{\text{CMB}}$  dienen die Standard-Randbedingungen des Pseudo-Vakuums.

Das vorgegebene  $\alpha$ -Profil hängt sowohl vom Radius  $r$  als auch von  $\theta$  ab und wird charakterisiert durch die Eigenschaften, die sich aus den Simulationen in Abschnitt 2.5 ergeben. Der  $\alpha$ -Effekt innerhalb der Nordhalbkugel ist positiv in der oberen Hälfte und negativ in der unteren Hälfte der rotierenden Kugelschale, wobei die Magnituden in beiden Teilen annähernd gleich sind. Der Vorzeichenwechsel findet nahezu exakt in der Mitte der konvektiv instabilen Schicht statt. An den Übergängen zum inneren festen Kern bzw. zum Mantel verschwindet der  $\alpha$ -Effekt. Radiale Profile mit diesen Eigenschaften können idealisiert durch eine Sinus-Funktion wiedergegeben werden:

$$\alpha(r, \theta) = \alpha_0 \cos \theta \sin \left( 2\pi \frac{r - R_{\text{ICB}}}{R_{\text{CMB}} - R_{\text{ICB}}} \right) \quad (3.13)$$

([Soward, 1974](#)). Abbildung 3.3 zeigt die Verteilung eines solchen  $\alpha$ -Effektes in einer meridionalen Ebene. Gelbe und rote Farbtöne markieren einen positiven  $\alpha$ -Effekt, während blaue Farbtöne einen negativen  $\alpha$ -Effekt repräsentieren. Die Abhängigkeit  $\propto \cos \theta$  zeigt sich durch das Maximum an den Polen und den verschwindendem  $\alpha$ -Effekt am Äquator. Wird bei Anwendung eines solchen Profils die Dynamo-Zahl  $C_\alpha = \alpha R_{\text{CMB}} / \eta_{\text{T}}$  überkritisch vorgegeben, erhält man für beide axialsymmetrische Moden (A0 bzw. S0) eine oszillierende Lösung mit exponentiell wachsender Amplitude. Die zeitliche Entwicklung der radialen Magnetfeldkomponente an einer festen Stelle einer Simulation mit schwach überkritischen  $C_\alpha$  zeigt Abb. 3.4. Die vertikalen gepunkteten Linien kennzeichnen eine halbe Oszillation des Feldes, was im Folgenden als ein *Reversal* interpretiert wird. Die Zeit, die der Dipol benötigt, um seine Polarität einmal zu ändern, ist von der Größenordnung der Diffusionszeit  $\tau_{\text{diff}}$ . Bezogen auf den Geodynamo mit einer molekularen magnetischen Diffusivität von  $\eta \simeq 2\text{m}^2/\text{s}$  ergibt sich damit  $\tau_{\text{rev}} \sim \tau_{\text{diff}} \sim 10^5 \text{a}$ . Eine *Reversal*-Dauer im Bereich der Beobachtungen von 10000 Jahren erhält man durch eine turbulente magnetischen Diffusivität, die aufgrund der Turbulenz um den Faktor 10 erhöht ist:

$$\frac{\eta_{\text{T}}}{\eta} \approx O(10). \quad (3.14)$$

Die Beziehung  $\eta_{\text{T}}/\eta \approx 10$  ist durchaus plausibel und ergibt sich aus den lokalen Simulationen in Kapitel 2.5.2 (Seite 53).

Um den Einfluss geringer Variationen im radialen Verlauf des  $\alpha$ -Effektes zu untersuchen, wird Gleichung (3.13) im Folgenden leicht modifiziert. Variiert werden die Lage

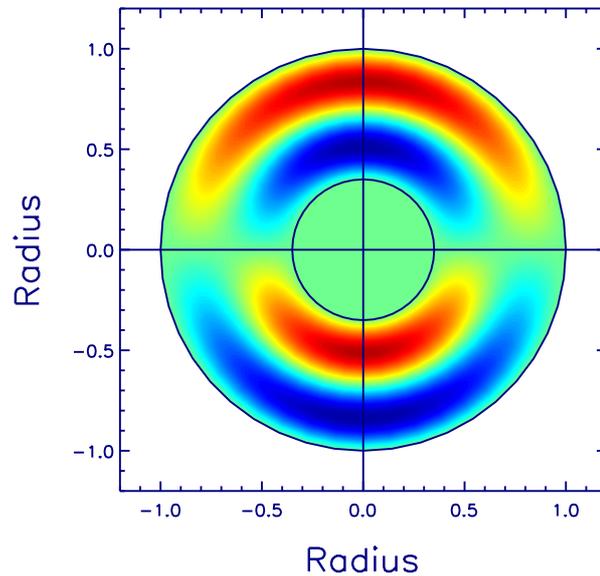


Abbildung 3.3: Verteilung des  $\alpha$ -Effekts in der meridionalen Ebene mit einem  $\alpha$ -Profil gegeben durch (3.13). Gelb bzw. rot koloriert sind Gebiete mit positiven  $\alpha$ -Effekt, blau sind Zonen mit negativen  $\alpha$ -Effekt. Die horizontale Achse entspricht dem Äquator, die vertikale Achse entspricht der (virtuellen) Rotationsachse.

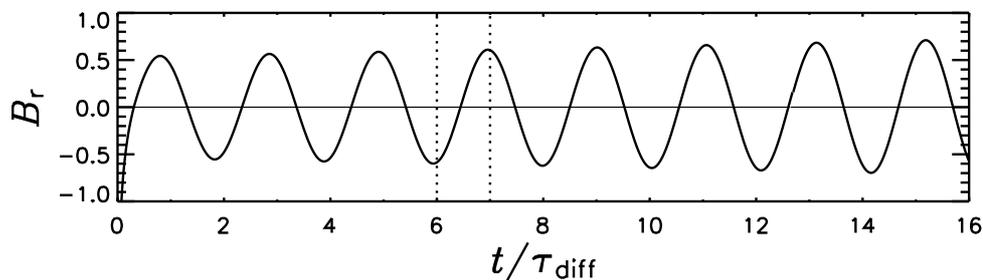


Abbildung 3.4: Radiale Magnetfeldkomponente einer A0-Mode an einer festen Stelle für ein  $\alpha$ -Profil gegeben durch (3.13).  $C_\alpha \approx C_\alpha^{\text{crit}} = 17.04$ .

der Nullstelle und die untere Magnitude. Es ergeben sich sehr restriktive Bedingungen, die das radiale Profil des  $\alpha$ -Effekts erfüllen muss, um oszillierende Lösungen zu produzieren. Die Bereiche, innerhalb dessen sich oszillierende Lösungen finden, verdeutlicht Abb. 3.5. Oszillierende Lösungen bei gleichen Amplituden in oberer und unterer Hälfte existieren lediglich, wenn die Nullstelle des  $\alpha$ -Effekts im Bereich  $R_0 = 0.67 \dots 0.70$  liegt (Abb. 3.5, links). Simulationen, bei denen das  $\alpha$ -Profil im unteren Bereich mit einem Faktor  $A$  multipliziert wird, ergeben oszillierende Lösungen in einem schmalen Intervall mit  $A \approx 0.9 \dots 1.1$  (Abb. 3.5, rechts). Ähnliche Resultate kann man für eine Variation der oberen Amplitude erwarten. Außerhalb der grau unterlegten Bereiche ergeben sich

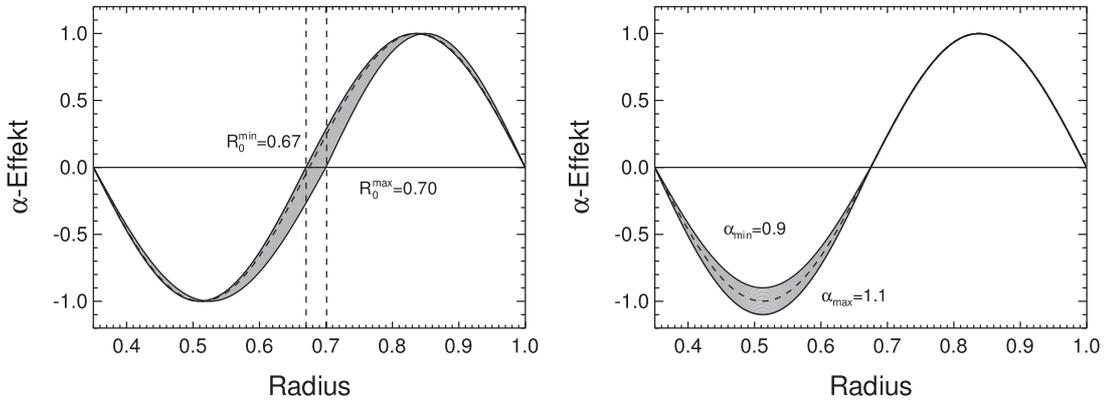


Abbildung 3.5: Kritische Bereiche für das radiale Profil des  $\alpha$ -Effekts, die zu oszillierenden Lösungen führen (grau unterlegt). Links: kritisches Intervall für variierenden Nulldurchgang, Rechts: kritisches Intervall für variierende Amplitude in der inneren Hälfte der Kugelschale. Die gestrichelte Kurve entspricht dem idealen Sinus-Profil (3.13).

stationäre Lösungen. Es ist aber nicht auszuschließen, dass weitere Klassen an radialen Profilen existieren, die ebenfalls oszillierende Lösungen erlauben.

Eine Dipolumkehr, also eine halbe Oszillation des Dynamos, findet nur dann statt, wenn das  $\alpha$ -Profil lange genug in dem kritischen Bereich liegt, der oszillierende Lösungen erlaubt. Diese minimal notwendige Zeit lässt sich aus den durchgeführten Simulationen abschätzen:

$$\tau_{\text{rev}}^{\text{crit}} \approx 0.3 \cdot \tau_{\text{diff}}. \quad (3.15)$$

Durch die starken Fluktuationen ist eine Realisierung eines  $\alpha$ -Profils innerhalb des oszillierende Lösungen erlaubenden Bereichs relativ selten und in den meisten Fällen nicht langlebig genug, damit es zu einer bzw. einer halben Oszillation kommen kann. Die Beziehung (3.15) definiert die Zeitskala, innerhalb derer sich ein  $\alpha$ -Profil notwendigerweise im kritischen Bereich aufhalten muss, um ein *Reversal* auszulösen und ist essentiell für die Entwicklung eines Mean-Field Modells mit irregulär vorkommenden Dipol-Umkehrungen.

Ein ähnliches Prinzip beschreiben Sarson & Jones (1999) in einem  $2^{1/2}$ D-Modell. Als Ursache für das Auftreten von Reversals identifizierten die Autoren allerdings das Verhalten großskaliger Strömungen in einem  $\alpha\Omega$ -Modell, in dem eine starke azimuthale Strömung sowie meridionale Zirkulationen zusammen für die Dynamo-Wirkung verantwortlich sind. Die *Reversals* werden in dem Modell durch Fluktuationen der meridionalen Strömung hervorgerufen. Bestimmte meridionale Zirkulationen – verursacht durch das Aufsteigen von *Plumes* in den polaren Gebieten innerhalb des Tangentialzylinders – bevorzugen oszillierende Lösungen, während andere Formen stationäre Lösungen ergeben. Eine Umkehr der Polarität findet statt, wenn das Geschwindigkeitsfeld der Strömung lange genug in einem Bereich ist, der oszillierende Dipolfelder erlaubt.

### 3.2.1 Feldverhalten während eines Reversals

Abbildung 3.6 zeigt die zeitliche Entwicklung der Magnetfeld-Struktur während eines Umklappvorgangs projiziert auf eine meridionale Ebene. Der  $\alpha$ -Effekt wird durch ein ungestörtes Profil (3.13) vorgegeben. Die linke Seite jedes Teil-Bildes zeigt Isokonturen des toroidalen Magnetfeldes. Durchgezogene Linien repräsentieren ein im Uhrzeigersinn orientiertes Magnetfeld und gestrichelte Linien ein entgegen des Uhrzeigersinns orientiertes Feld. Die Pfeile auf der rechten Seite jeder Abbildung zeigen die Richtung und Stärke der poloidalen Feldkomponente. Aufgrund der  $\cos\theta$ -Abhängigkeit des vorgegebenen  $\alpha$ -Effekts ist das Magnetfeld nahe der Rotationsachse konzentriert.

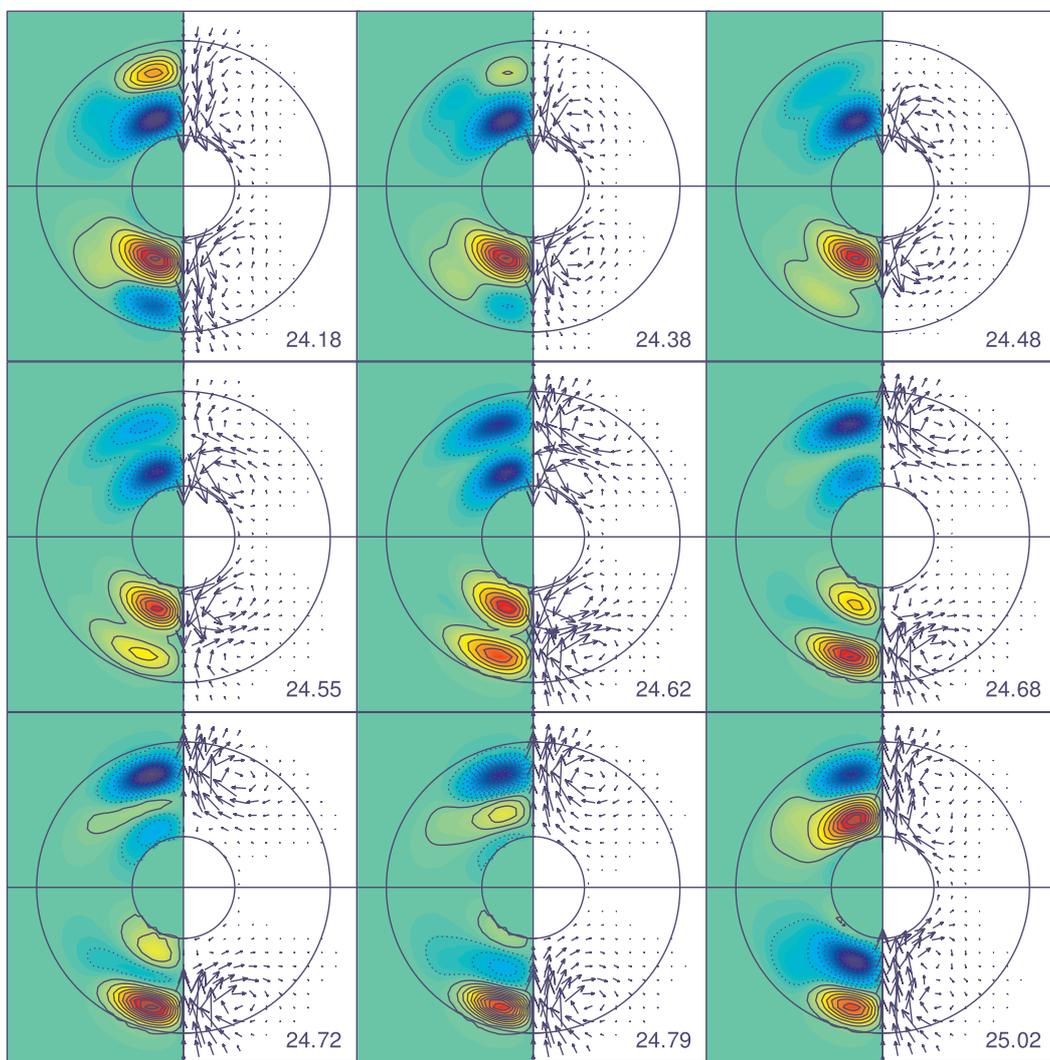


Abbildung 3.6: Feldverlauf während einer Dipolumkehr im Falle eines  $\alpha$ -Effekt mit reinem Sinus-Profil (3.13). Die Zeit ist in Einheiten der Diffusionszeit angegeben. Die linke Seite der Teilbilder zeigt die toroidale und die rechte Seite die poloidale Feldkomponente.

Im Anfangs- und Endzustand der *Reversal*-Sequenz beschreibt das Feld außerhalb der Sphäre im Wesentlichen einen Dipol. Dies entspricht der Parität der anfänglich vorgegebenen Magnetfeldstörung. Betrachtet man in der Nordhalbkugel die toroidale Komponente nahe der Rotationsachse, so beginnt der *Reversal*-Prozess in der oberen Hälfte des äußeren Kerns mit einer im Uhrzeigersinn orientierten Feldkomponente. In der inneren Hälfte besitzt die toroidale Magnetfeldkomponente ein entgegengesetztes Vorzeichen. Die außen gelegene Komponente schwächt sich ab (Bild 1 und 2) und wird ersetzt durch eine wachsende Komponente mit umgekehrter Orientierung (Bilder 2,3,4). In der Mitte des Reversal wird das toroidale Feld in der nördlichen Hemisphäre geprägt durch zwei separate Zellen, die beide gleich – entgegen des Uhrzeigersinns – orientiert sind (Bild 5 und 6). Zwischen diesen Strukturen entsteht dann eine Komponente mit entgegengesetzter Orientierung (Bild 7). Diese Komponente drückt die untere toroidale Komponente beiseite (Bild 8). Im letzten Teilbild ist das *Reversal* beendet (Bild 9) und der innere Teil der Hemisphäre ist vollständig von der neuen gegenüber der ursprünglichen Komponente entgegengesetzt orientierten Komponente ausgefüllt.

Die poloidale Komponente nimmt zu Beginn des Reversals im äußeren Bereich ab, während sich das poloidale Feld nahe des inneren Kerns zunächst kaum ändert (Bild 1-3). Es entsteht dann im äußeren Bereich eine zum Ursprungsfeld entgegengesetzt orientierte wirbelförmige Feldstruktur (Bild 5). Erst anschließend beginnt auch der nahe des inneren Kerns liegende Anteil abzunehmen (Bild 6 und 7). Die neu entstandene entgegengesetzt orientierte Komponente breitet sich schließlich von außen nach innen im gesamten Kernvolumen aus. Bemerkenswert ist, dass das poloidale Feld bereits in Teil-Bild (6) die entgegengesetzte Polarität zeigt, und in der verbleibenden Zeit lediglich kleinere Änderungen vollführt.

### 3.2.2 Oszillationsperiode und kritische Dynamo-Zahl

Abbildung 3.7 zeigt die Oszillationsperiode  $P$  (gestrichelte Kurve in Einheiten von  $\tau_{\text{diff}}$ ) und die kritische Dynamo-Zahl  $C_\alpha^{\text{crit}} = \alpha^{\text{crit}} R_{\text{CMB}} / \eta_{\text{T}}$  (durchgezogene Kurve) in Abhängigkeit der Nullstelle des  $\alpha$ -Effekts. Die vertikalen schwarz-gepunkteten Linien zeigen den Übergang zwischen oszillierenden und stationären Lösungen.  $C_\alpha^{\text{crit}}$  ist im kritischen (d.h. oszillierende Lösungen erlaubenden) Bereich nahezu unabhängig von der Position der Nullstelle und für oszillierende Lösungen stets größer als für stationäre Lösungen. Dies bestätigt die Erwartungen, da oszillierende Dynamos eine komplexere Magnetfeldstruktur aufweisen und daher auf kleineren Skalen funktionieren. Die Ohmschen Verluste sind für solche Dynamos größer als für stationäre Dynamos. Als unmittelbare Konsequenz sind die oszillierenden Lösungen für ein fest vorgegebenes  $C_\alpha > C_\alpha^{\text{crit}}$  weniger nicht-linear (weil weniger überkritisch) als die stationären Lösungen.

Die Oszillationsperiode ist im inneren Bereich des kritischen Intervalls unabhängig von der Nullstelle des  $\alpha$ -Effekts annähernd konstant und es gilt  $P \approx 2\tau_{\text{diff}}$ . An den Rändern des Intervalls, das oszillierende von nicht-oszillierenden Lösungen trennt, nimmt  $P$  stark zu. Innerhalb dieses Übergangsbereichs ist die Dauer eines *Reversals* deutlich größer als die typischerweise beobachtete Diffusionszeit. Der starke Anstieg der Oszillationsperiode

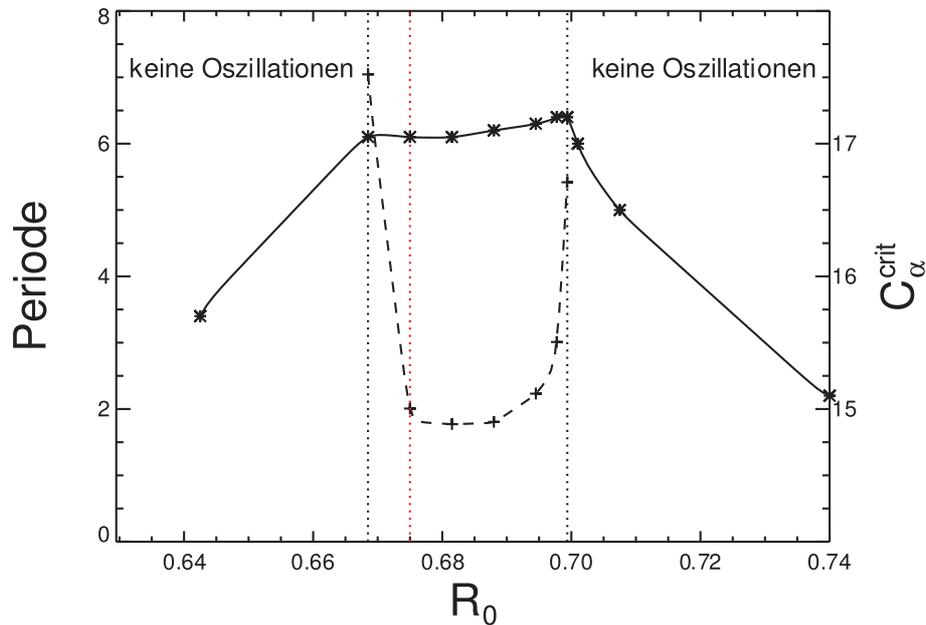


Abbildung 3.7: Oszillationsperiode (gestrichelte Kurve) und kritische Dynamo-Zahl (durchgezogene Kurve) des linearen  $\alpha^2$ -Dynamo-Modells in Abhängigkeit der radialen Nullstelle  $R_0$  des  $\alpha$ -Profils für die A0- bzw. S0-Mode (beide Werte sind nahezu identisch). Die rote gepunktete vertikale Linie bei  $R_0 = 0.675$  entspricht der Mitte der Kugelschale.

ist jedoch nur in dem sehr schmalen Übergangsbereich beobachtbar, der die stationären von den zeitabhängigen Lösungen trennt.

Die Werte der kritischen Dynamo-Zahl für die axialsymmetrische Moden (S0, A0) und für die ersten nicht axialsymmetrischen Moden (S1, A1) sind in Tabelle 3.1 aufgeführt. Die Moden mit gleichem  $m$  haben jeweils identische Werte für  $C_\alpha^{\text{crit}}$ , wo-

	A0	A1	S0	S1
$C_\alpha^{\text{crit}}$	17.04	17.67	17.04	17.67

Tabelle 3.1: Kritische Dynamozahlen der verschiedenen untersuchten Dynamo-Moden für  $\alpha$  aus Gleichung (3.13).

bei die Werte der axialsymmetrischen Moden (A0, S0) geringfügig unter denen der nicht-axialsymmetrischen Moden (A1, S1) liegen. Bereits [Steenbeck & Krause \(1969b\)](#) haben für ihr  $\alpha^2$ -Modell des Geodynamos praktisch identische Eigenwerte für Dipol- und Quadrupol-Mode erhalten. Die Autoren vermuten, dass nicht berücksichtigte Effekte in realistischeren Modellen für eine Aufspaltung der Eigenwerte sorgen. Lösungen mit fast identischen Eigenwerten finden sich ebenfalls in einfachen  $\alpha^2$ -Modellen bei [Krause & Rädler \(1980\)](#), wobei dort im Allgemeinen die A0-Mode leicht bevorzugt wird. Eine deutliche Bevorzugung einer Mode ergibt sich durch die Einführung von differentieller Rotation (und zugehörigen  $\Omega$ -Effekt). Für  $C_\Omega = \delta\Omega R^2/\eta_T > 0$  dominiert

die Dipol-Mode (A0), während sich für  $C_\Omega < 0$  die S0-Mode durchsetzt. Für kleine Werte von  $|C_\Omega|$  ist die Situation allerdings recht komplex und verschiedene Formen der Lösungen sind denkbar, bei denen auch A1/S1-Moden dominieren können (siehe z.B. [Roberts & Stix 1972](#)). Meridionale Strömungen sind ebenfalls in der Lage, für eine Aufspaltung der Eigenwerte zu sorgen.

### 3.2.3 Einfluss der Größe des inneren Kerns

Die Änderungen, die sich mit einem wachsenden inneren Kern ergeben, haben einen direkten Einfluss auf die Oszillationen des oben beschriebenen  $\alpha^2$ -Modells. Hier werden lediglich die Änderungen der geometrischen Bedingungen untersucht, die sich durch eine unterschiedliche Größe des inneren Kerns ergeben. Dies ist verbunden mit einer reduzierten Dicke der konvektiv instabilen Schicht (mit  $\alpha \neq 0$ ), die für die Dynamo-Wirkung verantwortlich ist. Änderungen im Verhalten der Turbulenz, wie sie zum Beispiel mit dem Auftreten von chemischer Konvektion assoziiert sind, werden nicht berücksichtigt.

Abbildung 3.8 zeigt die kritischen  $\alpha$ -Profile, die in Bezug auf Variationen im Nulldurchgang zu oszillierenden Lösungen führen, für verschiedene Verhältnisse  $R_{\text{CMB}}/R_{\text{ICB}}$ . Mit zunehmender Größe des inneren Erdkerns – angedeutet durch die durchgezogene vertikale Linie auf der linken Seite – wird der oszillierende Lösungen erlaubende Bereich kleiner (gestrichelte rote Kurven). Zugleich schiebt sich der Mittelpunkt des kritischen Intervalls näher an die Mitte des flüssigen Erdkerns (angedeutet durch die gepunktete Kurve). Für  $R_{\text{ICB}} = 0.1$  (unterste Kurve) liegen die kritischen Nullstellen für das  $\alpha$ -Profil deutlich in der oberen Hälfte des flüssigen Kerns, während für  $R_{\text{ICB}} = 0.7$  (oberste Kurve) das kritische Profil eine nahezu perfekte Sinus-Kurve darstellt, bei der die Nullstelle exakt in der Mitte des flüssigen äußeren Kerns liegt. Der oszillierende Lösungen erlaubende Bereich ist dann allerdings extrem schmal. Die Verkleinerung des kritischen Intervalls mit zunehmender Größe des inneren Kerns erschwert das Auftreten einer oszillierenden Lösung durch einen fluktuierenden  $\alpha$ -Effekt. Dennoch kann man vermuten, dass die Wahrscheinlichkeit für ein *Reversal* unabhängig von der Größe des inneren Kerns zumindest von Null verschieden ist, da der Mittelpunkt des kritischen Intervalls näher an die Mittelebene des flüssigen Erdkerns rückt. Dieser Bereich ist nach den Ergebnissen aus Abschnitt 2.5 die bevorzugte Position für den Vorzeichenwechsel des  $\alpha$ -Effekts.

Eine genaue Analyse der *Reversal*-Wahrscheinlichkeit macht an dieser Stelle keinen Sinn, da weitere Effekte diese Größe beeinflussen. So ändert sich durch den langsam wachsenden inneren Kern und die dadurch resultierende erhöhte Freisetzung einer leichten Flüssigkeitskomponente und latenter Wärme der Antrieb der Konvektion und damit auch die „Heftigkeit“ der Turbulenz. Zusätzlich verändert sich aufgrund des kleiner werdenden Abstandes zwischen ICB und CMB ( $R_{\text{ICB}}$  wächst, während  $R_{\text{CMB}}$  konstant bleibt) die typische Zeitskala  $\tau_{\text{adv}}$ , auf der die Fluktuationen des  $\alpha$ -Effektes stattfinden. Mit abnehmender Dicke  $d = R_{\text{CMB}} - R_{\text{ICB}}$  des flüssigen Erdkerns wird die advektive Zeitskala  $\tau_{\text{adv}} = d/u_{\text{rms}}$  verkürzt. Die gleichzeitig zunehmende Antrieb der chemischen Konvektion führt zu einer stärkeren Konvektion und damit zu einem größeren  $u_{\text{rms}}$ , so dass  $\tau_{\text{adv}}$  weiter abnimmt. Dies hat einen erheblichen Einfluss auf die *Reversal*-

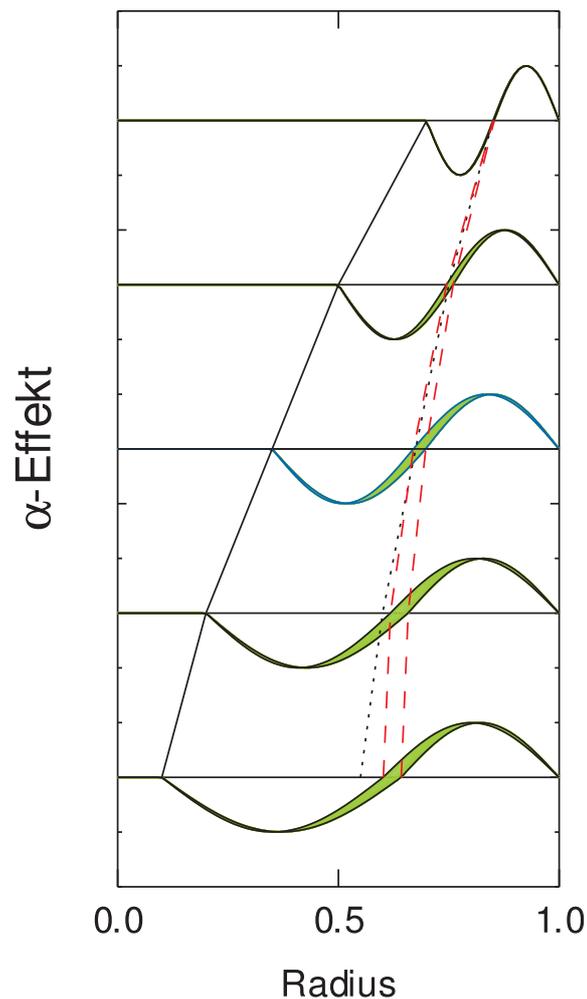


Abbildung 3.8: Kritische  $\alpha$ -Profile für oszillierende Lösungen für verschiedene Radien des inneren Kerns. Von oben nach unten:  $R_{\text{ICB}} = 0.7, 0.5, 0.35, 0.2, 0.1$ . Die gestrichelte rote Kurve zeigt die Grenzen des kritischen Intervalls und die gepunktete Kurve verweist auf die Mittelebene im flüssigen Teil des Kerns. Die mittlere (blaue) Kurve zeigt das kritische  $\alpha$ -Profil für den „gegenwärtigen“ Radius des inneren Erdkerns.

Wahrscheinlichkeit, da so die mittlere „Lebensdauer“ eines  $\alpha$ -Profils verkürzt wird (siehe Abschnitt 3.3).

### 3.3 Irreguläre Reversals mit fluktuierendem $\alpha$ -Effekt

Im Folgenden werden axialsymmetrische Dipol-Lösungen von Gleichung (3.1) betrachtet. Ein isotroper  $\alpha$ -Effekt basierend auf Gleichung (3.13) wird vorgegeben, bei dem die charakteristischen Eigenschaften Magnitude und Nullstelle auf zufällige Art und Weise variiert werden. Von vielen unterschiedlichen Arbeiten, in denen der  $\alpha$ -Effekt aus MHD-Simulationen bestimmt wurde, ist bekannt, dass die  $\alpha$ -Koeffizienten stark verrauschte Größen sind (Ziegler & Rüdiger, 2001; Ossendrijver et al., 2001). Abbildung 3.9 zeigt

die Zeitabhängigkeit des Maximums bzw. des Absolutbetrags des Minimums des  $\alpha$ -Effekts für typische Parameter ( $\Lambda \approx 1, \theta = 45^\circ$ ), wie es sich aus den Simulationen in Abschnitt 2.5.2 ergab. Die Magnituden des  $\alpha$ -Effekts im äußeren und inneren Teil der

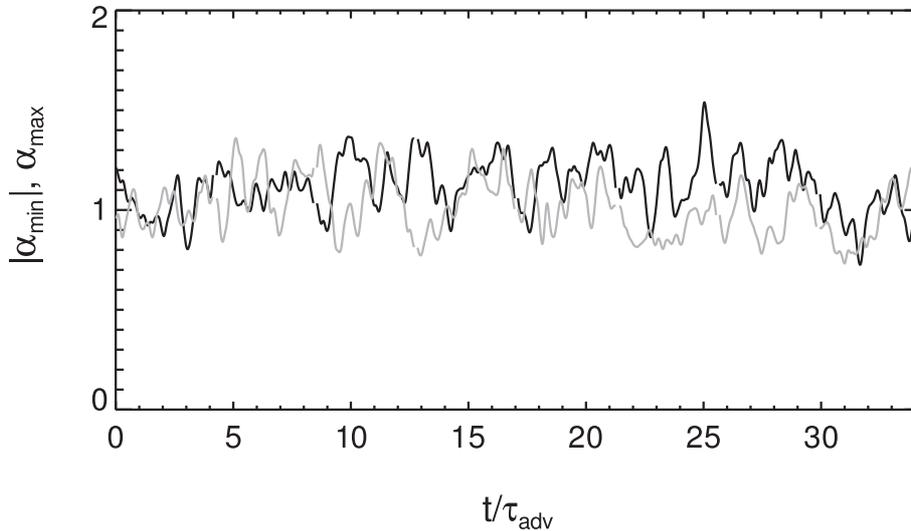


Abbildung 3.9: Fluktuationen der maximalen bzw. minimalen Werte des  $\alpha$ -Effekts in Abhängigkeit von der Zeit, entnommen aus dem Datensatz, der auf Seite 59 in Abbildung 2.21 präsentiert wurde ( $\Lambda \approx 1, \theta = 45^\circ$ ).

Kugelschale sind im zeitlichen Mittel vergleichbar. Die Amplitude der Fluktuationen – definiert als mittlere quadratische Schwankung – liegt in einer Größenordnung von 10% des Mittelwerts. Offensichtlich wird die Zeitskala der Fluktuationen durch  $\tau_{\text{adv}}$  bestimmt. Mit dem typischen Wert für die Strömungsgeschwindigkeit im flüssigen Erdkern von  $u_{\text{rms}} \approx 5 \cdot 10^{-4} \text{ m/s}$  ergibt sich eine Advektionszeit von etwa 150 Jahren. Bei einer Diffusionszeit von  $\tau_{\text{diff}} \approx 10000$  Jahren erhält man somit folgendes Verhältnis zwischen den beiden Zeitskalen:

$$\tau_{\text{adv}} \approx 0.015 \cdot \tau_{\text{diff}}. \quad (3.16)$$

Es folgt daher, dass die Dauer die der  $\alpha$ -Effekt im Bereich der kritischen Profile verweilen muss, (S. 76, Gleichung 3.15,  $\tau_{\text{rev}}^{\text{crit}} \approx 0.3\tau_{\text{diff}}$ ), etwa 20 mal länger ist, als die Zeitskala, auf der der  $\alpha$ -Effekt fluktuiert. Daher verwundert es nicht, dass ein *Reversal* ein extrem seltenes Ereignis ist<sup>1</sup>.

In den Simulationen fluktuieren Maximum bzw. Minimum des  $\alpha$ -Effekts, sowie die Nullstelle  $R_0$  unabhängig voneinander, wobei die Zufallsschwankungen durch eine Gauss-Verteilung mit einer Breite  $\delta\alpha$  bzw.  $\delta R_0$  vorgegeben werden. Entsprechend Gleichung (3.16) wird während der Simulationen das  $\alpha$ -Profil nach jedem Zeitintervall der Länge  $\tau_{\text{adv}}$  aktualisiert. Simulationen wurden für drei verschiedene Dynamo-Zahlen  $C_\alpha$  durchgeführt, die die Bereiche schwach überkritisch ( $C_\alpha = 17.5$ ), moderat überkritisch

<sup>1</sup>Man beachte, dass dies eine sehr grobe Abschätzung darstellt, die allenfalls einen Orientierungspunkt für das Verhältnis  $\tau_{\text{adv}}/\tau_{\text{diff}}$  liefern kann, da weder  $u_{\text{rms}}$  noch die Diffusionszeit  $\tau_{\text{diff}}$  genauer bekannt sind.

( $C_\alpha = 20$ ) und stark überkritisch abdecken ( $C_\alpha = 22.5$ ). Um einen unbegrenzten Anstieg der Magnetfeldenergie zu verhindern, wurde als Sättigungsmechanismus ein lokales nicht-katastrophales  $\alpha$ -Quenching angenommen:

$$\alpha(\mathbf{r}, |\mathbf{B}(\mathbf{r})|) = \alpha_0 \frac{1}{1 + |\mathbf{B}|^2(\mathbf{r})} \quad (3.17)$$

(mit  $|\mathbf{B}|$  in Einheiten von  $B_{\text{eq}}$ ). Eine solche Abhängigkeit des  $\alpha$ -Effektes für starke Magnetfelder ergab sich annäherungsweise aus den Lösungen in Abschnitt 2.5.2 (Seite 61, Abb. 2.23).

Für eine statistische Auswertung werden Kriterien benötigt, die eine Klassifizierung von stabilen Phasen und *Reversals* ermöglichen. Dazu wird ein *Reversal* definiert als der Übergang von einer Phase mit stabiler Dipol-Orientierung zu einer neuen Phase mit invertierter Orientierung. Bei stark irregulärem Verhalten der Lösung lassen sich stabile Phasen allerdings nur schwer identifizieren, so dass Start- und Endpunkt eines *Reversals* nicht exakt lokalisierbar sind. Zur statistischen Auswertung der Ergebnisse werden zwei Zeiten  $\tau_m$  und  $\tau_s$  vorgegeben. Ereignisse innerhalb von Phasen mit einer Dauer  $t < \tau_m$  werden ignoriert. Wechsel der Magnetfeld-Orientierung für eine Dauer  $\tau_m \lesssim t \lesssim \tau_s$  werden als Exkursionen interpretiert und Wechsel der Feld-Orientierung für eine Dauer  $t \gtrsim \tau_s$  werden als *Reversal* interpretiert (siehe auch Wicht 2005). Als Parameter zur Analyse der Rechnungen wurde in allen Fällen  $\tau_m = 0.2\tau_{\text{diff}}$  und  $\tau_s = \tau_{\text{diff}}$  gesetzt. Die verschiedenen Eingabeparameter und die resultierende mittlere *Reversal*-Rate (bzw. die mittlere Länge des Intervalls zwischen zwei *Reversals*) fasst Tabelle 3.2 zusammen.

Die Ergebnisse zeigen, dass es ohne weiteres möglich ist mit geeigneten, plausiblen Parametern mittlere *Reversal*-Raten zu erhalten, die in dem für den Geodynamo typischen Bereich liegen. Eine wesentliche Kenngröße ist das Verhältnis aus Advektions- und Diffusionszeit. Eine Zunahme von  $\tau_{\text{adv}}/\tau_{\text{diff}}$  führt unmittelbar zu einer Erhöhung der *Reversal*-Wahrscheinlichkeit (siehe Rechnung I – V), da sich dann die Zeitskala, auf der Fluktuationen des  $\alpha$ -Effekts stattfinden in Bezug zur diffusiven Zeitskala und somit die „Lebensdauer“ eines  $\alpha$ -Profils verlängert. Als Konsequenz steigt die Wahrscheinlichkeit, dass das  $\alpha$ -Profil lange genug innerhalb des oszillierende Lösungen erlaubenden Bereiches verläuft, und die mittlere *Reversal*-Rate nimmt zu. Eine zu starke Erhöhung des Verhältnis  $\tau_{\text{adv}}/\tau_{\text{diff}}$  führt zu vollständig irregulärem Verhalten der Lösung, bei der keine Phasen mit stabiler Dipolorientierung mehr beobachtbar sind (siehe Rechnung V).

Einen gegenteiligen Effekt verursacht eine Vergrößerung der Dynamo-Zahl  $C_\alpha$ . Ist der  $\alpha$ -Effekt im Vergleich zu den Verlusten durch (turbulente) magnetische Diffusivität zu dominant, sind umklappenden Dipol-Lösungen nicht feststellbar (Rechnung VII). Die nicht-linearen Effekte durch die Quenching-Funktion (3.17) unterdrücken folglich die *Reversal*-Wahrscheinlichkeit. Lösungen ohne *Reversals* ergeben sich auch, wenn die Mittelwerte der fluktuierenden Größen, die den  $\alpha$ -Effekt beschreiben, zu weit von dem oszillierende Lösungen erlaubenden Bereich entfernt sind (Rechnung IX). Dies zeigt, dass ein fluktuierender  $\alpha$ -Effekt nicht automatisch mit einer irregulär umklappenden Dipol-Lösung verbunden ist. Eine Verschiebung des Mittelwerts für die Nullstelle des  $\alpha$ -Effekts hat – neben direkten Auswirkungen auf die *Reversal*-Wahrscheinlichkeit auch Konsequenzen für die Symmetrie zwischen den beiden Polaritätszuständen. So sind Rechnung X und

Run	$\tau_{\text{adv}}/\tau_{\text{diff}}$	$C_\alpha$	$\pm\alpha \pm \delta\alpha$	$R_0 \pm \delta R_0$	Rev. Rate [1/10 <sup>6</sup> a]	Lebensdauer [a]
<b>I</b>	0.008	20.0	$\pm 1 \pm 0.1$	$0.683 \pm 0.065$	6.2	$1.6 \cdot 10^5$
<b>II</b>	0.009	20.0	$\pm 1 \pm 0.1$	$0.683 \pm 0.065$	8.3	$1.2 \cdot 10^5$
<b>III</b>	0.010	20.0	$\pm 1 \pm 0.1$	$0.683 \pm 0.065$	9.9	$1.1 \cdot 10^5$
<b>IV</b>	0.011	20.0	$\pm 1 \pm 0.1$	$0.683 \pm 0.065$	11.1	$0.9 \cdot 10^5$
<b>V</b>	0.015	20.0	$\pm 1 \pm 0.1$	$0.683 \pm 0.065$	$\sim 100$	$\sim \tau_{\text{diff}}$
<b>VI</b>	0.010	17.5	$\pm 1 \pm 0.1$	$0.683 \pm 0.065$	Kein Dynamo	--
<b>VII</b>	0.010	22.5	$\pm 1 \pm 0.1$	$0.683 \pm 0.065$	0.0	$\infty$
<b>VIII</b>	0.010	17.5	$\begin{matrix} +1.00 \\ -1.07 \end{matrix} \pm 0.1$	$0.683 \pm 0.045$	3.6	$2.7 \cdot 10^5$
<b>IX</b>	0.010	20.0	$\pm 1 \pm 0.1$	$0.650 \pm 0.065$	0.0	$\infty$
<b>X</b>	0.010	20.0	$\pm 1 \pm 0.1$	$0.667 \pm 0.065$	0.3	$26.0 \cdot 10^5$
<b>XI</b>	0.010	20.0	$\pm 1 \pm 0.1$	$0.671 \pm 0.065$	2.0	$4.6 \cdot 10^5$
<b>XII</b>	0.010	20.0	$\pm 1 \pm 0.1$	$0.675 \pm 0.065$	8.0	$1.3 \cdot 10^5$
<b>XIII</b>	0.010	20.0	$\pm 1 \pm 0.1$	$0.700 \pm 0.065$	$\sim 100$	$\sim \tau_{\text{diff}}$
Erde	$\sim 0.015$	?	?	?	$\sim (4 - 5)$	$\sim 5 \cdot 10^5$

Tabelle 3.2: Eingabe-Parameter der Langzeitsimulationen. Der Wert von  $R_0 = 0.675$  entspricht der Mitte der Kugelschale. Der Wert  $R_0 = 0.683$  entspricht der Mitte des kritischen Intervalls. Die beiden rechten Spalten zeigen die mittlere *Reversal*-Rate und die mittlere Zeit zwischen zwei *Reversals*. Alle Werte beruhen auf einer Diffusionszeit von  $\tau_{\text{diff}} = 10000$  Jahren. Rechnung **V** und **XIII** zeigen unmittelbar aufeinander folgende Dipolumkehrungen ohne stabile Phase zwischen den einzelnen Polaritätszuständen. Rechnung **VIII** und **X** zeigen eine asymmetrische Verteilung der beiden Polaritätszustände.

**XI**, bei der der  $\alpha$ -Effekt im Mittel an der unteren Grenze des kritischen Bereichs verläuft, charakterisiert durch eine asymmetrische Verteilung der beiden Polaritätszustände.

Abbildung 3.10 zeigt die Zeitabhängigkeit des radialen Magnetfeldes an einer festen Stelle innerhalb der sphärischen Kugelschale für die Langzeitsimulationen **II** (oben) und **X** (unten). Die Diskussion des Feldverhaltens bezieht sich im folgenden auf Rechnung **II**. Das Magnetfeld ändert seine Ausrichtung vollkommen unregelmäßig und beide Polaritätszustände kommen mit annähernd gleicher Häufigkeit und Feldstärke vor.

Die Verteilung der Zeiträume zwischen zwei aufeinanderfolgenden *Reversals* kann durch eine Exponentialverteilung  $\sim e^{-\Delta t/t}$  beschrieben werden (siehe Abb. 3.11), so dass es sich im statistischen Sinne um voneinander unabhängige Ereignisse handelt (Krause & Schmidt, 1988). Ein vergleichbares Verhalten ergibt sich ebenfalls bei den anderen Simulationen, die irreguläre Dipolumkehrungen aufweisen.

Alle Rechnungen die Dipolumkehrungen aufweisen und in Tabelle 3.2 aufgeführt sind, zeigen eine *Reversal*-Rate, die zwar nicht exakt der gegenwärtigen Rate des Erdmagnetfelds entspricht. Allerdings erscheint es problemlos möglich die Eingabeparameter so zu adjustieren, dass der gewünschte Bereich erreicht wird, ohne dass exotischen Annahmen nötig sind. Um weitere statistische Übereinstimmungen mit Paleomagnetischen Daten

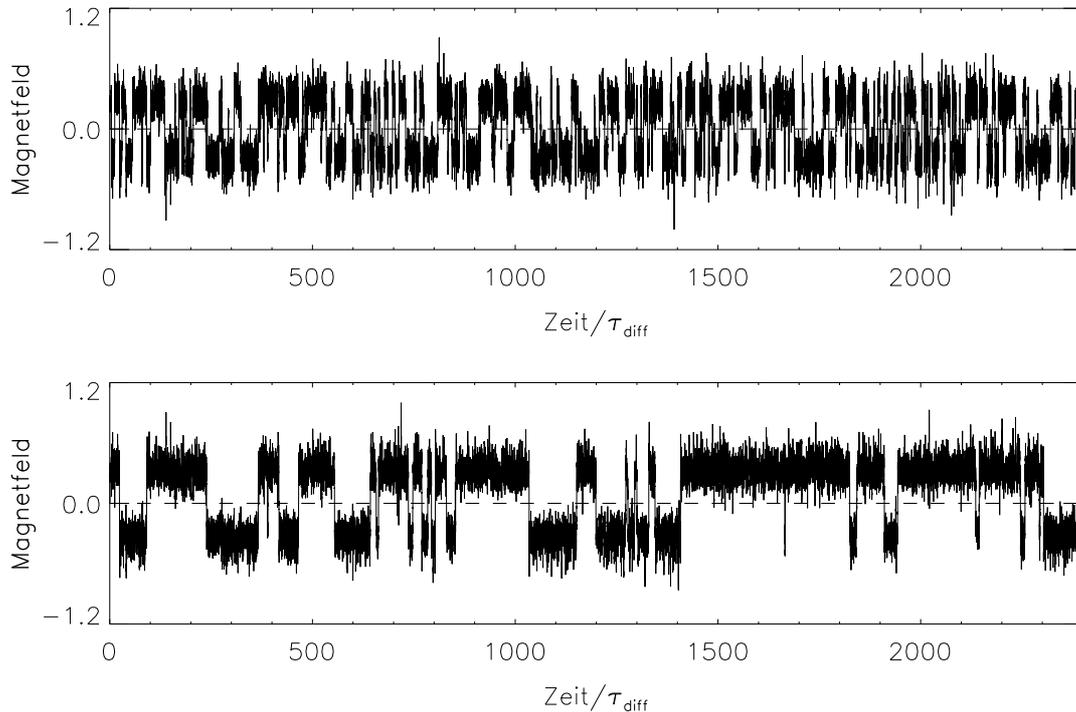


Abbildung 3.10: Typisches Verhalten der radialen Magnetfeldkomponente von Langzeitrechnungen mit fluktuierendem  $\alpha$ -Effekt (oben: Rechnung **II**, unten Rechnung **XI**). Eingabeparameter siehe Tabelle 3.2.

zu überprüfen (z.B. Verteilung des Dipolmoments, Orientierung der Dipolachse, Exkursionen etc.) sind dreidimensionale Rechnungen nötig, da es sonst nahezu unmöglich ist, nicht-axialsymmetrische Eigenschaften, wie einen Winkel zwischen Dipol- und Rotationsachse, sinnvoll zu definieren. Auch ist es notwendig, weitere Eigenschaften des

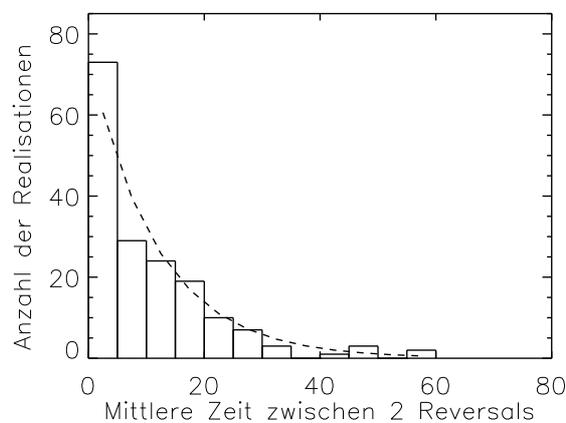


Abbildung 3.11: Verteilung der mittleren Lebensdauer eines Polaritätszustands entnommen aus Rechnung **II**.

$\alpha$ -Effekts zu berücksichtigen. Wesentlichen Einfluss auf den  $\alpha$ -Effekt hat z.B. die tensorielle Struktur, die bisher in den Simulationen nicht weiter berücksichtigt wurde. Im folgenden Abschnitt wird daher die Auswirkungen eines aufgrund der schnellen Rotation der Erde stark anisotropen  $\alpha$ -Effekts auf die nicht-axialsymmetrischen Moden untersucht.

### 3.4 Nicht-axialsymmetrische Moden

Eine Dipol-Neigung in Bezug auf die Rotationsachse lässt sich interpretieren als Überlagerung einer axialsymmetrischen Dipol-Mode (A0) und der ersten, nicht-axialsymmetrischen in Bezug auf den Äquator symmetrischen Mode (S1). Die S1-Mode entspricht einem in der Äquatorebene liegendem Dipol, der im Allgemeinen eine Drift um die Rotationsachse aufweist. Eine weitere Bedeutung erhalten höhere Dynamo-Moden durch ihre Interpretation als West-Drift einzelner Feldflecken. Den folgenden Überlegungen liegen theoretische Arbeiten zur Berechnung des  $\alpha$ -Tensors für schnell rotierende  $\alpha^2$ -Dynamos zu Grunde. Im Limit  $\Omega \rightarrow \infty$  wird der  $\alpha$ -Effekt durch einen nicht-trivialen Tensor beschrieben, für den in Zylinderkoordinaten  $\alpha_{zz}^{\text{cy1}} \rightarrow 0$  gilt<sup>2</sup> (Moffatt, 1970; Rüdiger, 1978; Busse & Miin, 1979). Für die Koeffizienten des  $\alpha$ -Tensors in der Darstellung 2.58 (siehe Abschnitt 2.5.1) gilt dann  $\alpha_1 = -\alpha_4$  und  $\alpha_2 = \alpha_3 = 0$ . In sphärischen Koordinaten ergibt sich somit folgende Struktur für den  $\alpha$ -Tensor:

$$\alpha \sim -\alpha_1 \begin{pmatrix} \cos^3\theta & 0 & \cos^2\theta \sin\theta \\ 0 & \cos\theta & 0 \\ \cos^2\theta \sin\theta & 0 & \sin^2\theta \cos\theta \end{pmatrix}. \quad (3.18)$$

Abbildung 3.12 zeigt  $C_\alpha^{\text{crit}}$  (durchgezogene Linien) und die Drift-Periode (gestrichelte Linie) für die niedrigsten nicht-axialsymmetrischen Moden (A1, S1). Wie im Abschnitt 3.2.2 sind im Rahmen der „Messgenauigkeit“ die Werte für A1- und S1-Mode identisch. Die gepunkteten vertikalen Linien zeigen das kritische Intervall für die oszillierenden Lösungen der A0- und S0-Moden für ein skalares, isotropes  $\alpha$ , wie es in Abschnitt 3.2.2 bestimmt wurde.

Die nicht-axialsymmetrischen Moden zeigen eine Drift-Bewegung, deren Richtung von der Nullstelle des  $\alpha$ -Profils abhängt. Für eine Nullstelle des  $\alpha$ -Effekts unterhalb von  $R_0 \approx 0.705$  ergeben sich westwärts driftende Moden, während oberhalb von  $R_0 \approx 0.715$  eine ostwärts gerichtete Drift resultiert. In allen Fällen mit westwärts orientierter Drift ist die charakteristische Driftzeitskala gegeben durch  $(0.2\dots 0.3)\tau_{\text{diff}}$ , während die ostwärts gerichtete Drift auf einer Zeitskala von  $(0.4\dots 0.5)\tau_{\text{diff}}$  abläuft. Dies unterscheidet sich fundamental von den Resultaten von Rüdiger et al. (2003), die in ihren Simulationen mit dominierender S1-Mode stets eine westwärts orientierte Drift mit einer Periode in der Länge der Oszillationsperiode der axialsymmetrischen Moden ( $P \approx 2\tau_{\text{diff}}$ ) erhielten. Es ist in diesem Zusammenhang bemerkenswert, dass das Verhältnis der (West-)Driftzeit ( $\sim 0.2\tau_{\text{diff}}$ ) zur *Reversal*-Zeitskala ( $\sim \tau_{\text{diff}}$ ) mit dem der Erde relativ gut übereinstimmt (Zeitskala Westwärts-Drift  $\sim 2000$  Jahre, Zeitskala *Reversal*  $\sim 10000$  Jahre).

<sup>2</sup>Hierbei gibt  $z$  die Richtung der Rotationsachse an.

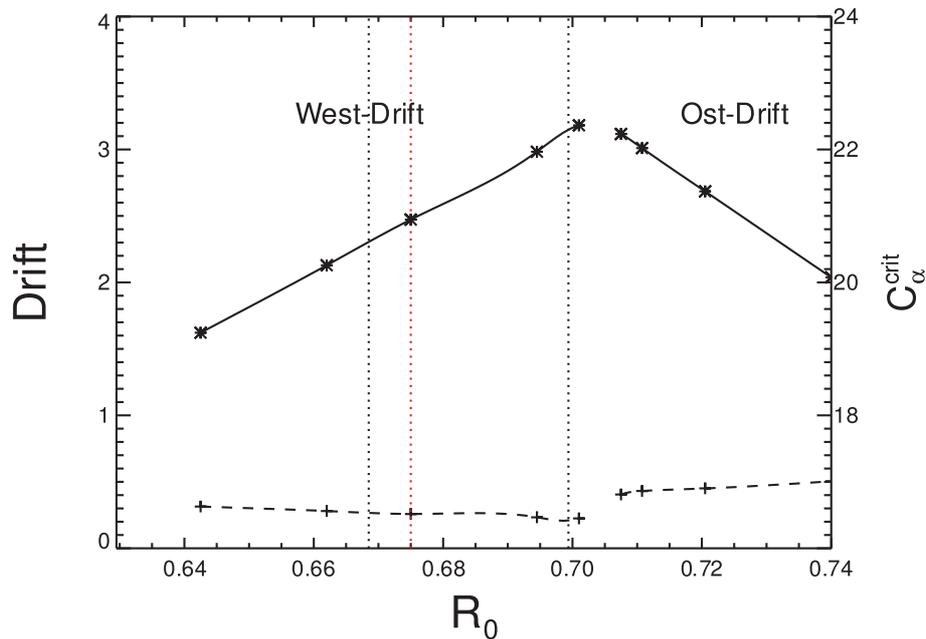


Abbildung 3.12:  $C_{\alpha}^{\text{crit}}$  der nicht-axialsymmetrischen Moden für den Fall  $\alpha_{zz}^{\text{cyl}} = 0$  (durchgezogene Linien). Die Drift-Perioden zeigt die gestrichelte Linie. Die rot gepunktete vertikale Linie bei  $R_0 = 0.675$  zeigt die Mitte der Kugelschale.

Die kritischen Dynamozahlen der axialsymmetrischen Moden S0/A0, die wie im skalaren Fall ebenfalls oszillieren, sind deutlich größer als die der A1/S1-Moden. Die Lösungen mit  $\alpha_{zz}^{\text{cyl}} = 0$  sind daher stets durch die nicht-axialsymmetrischen Moden dominiert. Ohne weiteres ist es daher nicht möglich, eine durch einen polaren Dipol dominierte Lösung zu erhalten. Eine Interpretation der Dipol-Neigung als Kombination einer A0-Mode mit einer S1-Mode wird zusätzlich noch durch die reguläre Drift der nicht-axialsymmetrischen Moden erschwert. Diese wird beim Erdmagnetfeld zwar bei einzelnen Feldflecken beobachtet, nicht jedoch bei der Lage der magnetischen Pole. Statt dessen weisen die (magnetischen) Pole eine irreguläre Bewegung auf, die vermutlich mit dem Auftreten von *Jerks* korreliert ist. Allerdings fallen die magnetischen und geographischen Pole über langen Zeiträume gemittelt ( $> 10^5$  Jahre) zusammen.

Driftende nicht-axialsymmetrische dominierte Lösungen für schnell rotierende  $\alpha^2$ -Dynamos sind ein wohlbekanntes Resultat (siehe z.B. [Rüdiger 1980](#)). Der Autor erhielt allerdings ausschließlich westwärts driftende Moden und vermutete, dass nicht-lineare Rechnungen, die die Rückwirkung des Magnetfeldes auf die Turbulenz und damit auf den  $\alpha$ -Effekt berücksichtigen, das Problem der äquatorialen Dipolfelder bei schnell rotierenden Objekten lösen. [Rädler \(1986\)](#) konnte zeigen, dass differentielle Rotation an der Kern-Mantel-Grenze dazu führen kann, dass die Dipol-Achse des externen Feldes nur eine leichte Neigung gegen die Rotationsachse aufweist.

Numerisch wurde dieses Problem von [Rüdiger et al. \(2003\)](#) erneut untersucht. Die Autoren simulieren schnell rotierende  $\alpha^2$ -Dynamos und erhielten in einzelnen Spezialfällen oszillierende axialsymmetrische Lösungen. Die Dipol- bzw. Quadrupol-Mode dominiert

allerdings nur bei einem am Äquator konzentrierten  $\alpha$ -Effekt mit stark anisotropen  $\alpha$ -Tensor und einer sehr dünnen Konvektionszone. In allen anderen Fällen erhalten die Autoren dominierende höhere Moden, die eine West-Drift aufweisen.

Einen Übergang von einer dominierenden S1-Mode zu einer A0-Mode kann [Tilgner \(2004\)](#) durch Einführung einer anisotropen turbulenten Diffusivität erreichen. Simulationen mit einer vorgegebenen rechtshändigen Strömung (*Roberts-Flow*, siehe z.B. [Roberts, 1972](#)), die entlang einer ausgezeichneten Achse nicht variiert, ergeben einen  $\alpha^2$ -Dynamo. Der  $\alpha$ -Effekt aufgrund der helikalen Strömung ist zweidimensional und wird durch einen Tensor mit  $\alpha_{zz} = 0$  beschrieben. Eine Bevorzugung der A0-Mode gegenüber der S1-Mode konnte durch eine erhöhte Diffusivität entlang der  $z$ -Achse, in deren Richtung die Strömung nicht variiert, erreicht werden.

Trotz der vielen bekannten Ansätze zur Überwindung des Problems der dominanten S1-Lösungen ist es innerhalb der für diese Arbeit durchgeführten Simulationen nicht gelungen, Lösungen mit der durch Gleichung (3.13) gegebenen radialen Abhängigkeit des  $\alpha$ -Effekts und der für schnell rotierende Dynamos gültigen Eigenschaft  $\alpha_{zz}^{cy1} = 0$  zu konstruieren, die eine dominierende A0-Mode aufweisen. Inwieweit gegebenenfalls Simulationen unter Berücksichtigung der azimuthalen Abhängigkeit das Problem der äquatorialen Dipole lösen könnten, ist allerdings noch unbekannt.

## Kapitel 4

# Schlussfolgerungen

Numerische Simulationen der MHD-Gleichungen zur Beschreibung von rotierender Magnetokonvektion in einer kartesischen Box wurden mit Hilfe des Codes NIRVANA durchgeführt. Untersucht wurden charakteristische Eigenschaften konvektiv getriebener Turbulenz und des  $\alpha$ -Effekts unter Bedingungen, die typisch für den flüssigen äußeren Erdkern sind. Volumengemittelte Größen, wie die Turbulenz-Intensität und der turbulente Wärmefluss sowie die horizontal gemittelte elektromotorische Kraft, wurden direkt aus den fluktuierenden Anteilen  $u'$ ,  $B'$  und  $T'$  berechnet. Das anisotrope Verhalten der Turbulenz-Intensität und des turbulenten Wärmetransports aufgrund von Rotation und Magnetfeld konnte qualitativ abgeschätzt werden, und die  $\alpha$ -Koeffizienten, die die Produktion eines Magnetfeldes in einem turbulenten Dynamo beschreiben, wurden berechnet.

Beim Übergang von rotierender Konvektion zu rotierender Magnetokonvektion tritt eine wesentliche Veränderung in den Eigenschaften der Turbulenz auf. Die durch schnelle Rotation verursachte Isotropisierung auf kleinen Skalen wird bereits durch ein schwaches Magnetfeld wieder aufgehoben. Die daraus resultierende Dominanz der vertikalen Komponente führt zur einer erhöhten Durchmischung der flüssigen Schicht und somit zu einer mehr isentropen Verteilung der Entropie. Als Konsequenz wird Wärme besser nach außen transportiert, was zu einem erhöhten vertikalen turbulenten Wärmefluss führt. Insbesondere am Pol nimmt der vertikale Wärmefluss in Gegenwart eines horizontalen (azimuthalen) Magnetfeldes mit steigender Magnetfeldstärke zu, so dass die Kühlung eines rotierenden Systems durch das Magnetfeld erleichtert wird. Vergleiche mit den Ergebnissen von nicht-rotierender und rotierender Magnetokonvektion zeigen, dass ein hoher vertikaler Wärmefluss für starke Magnetfelder nur in der Kombination eines horizontal orientierten Magnetfeldes und ausreichend schneller Rotation auftritt. Generell gilt, dass der vertikale Wärmefluss von einem horizontalen (azimuthalen) Magnetfeld weniger beeinflusst wird als von einem vertikalen Magnetfeld.

Die Turbulenz-Intensität am Pol wird maximal für eine Elsässer Zahl der Größenordnung  $\Lambda \approx O(1)$ . Dieser aufgrund der linearen Stabilitätsanalyse von [Chandrasekhar \(1961\)](#) erwartete Effekt existiert nicht bei mittleren Latituden bzw. nahe dem Äquator oder für zu langsame Rotationsgeschwindigkeiten. Bei einem vertikal orientierten Feld ist dieser Effekt ebenfalls vorhanden, allerdings ist er deutlich schwächer ausgeprägt.

Überraschenderweise sind die vertikalen Komponenten von Turbulenz-Intensität und Wärmefluss in der Nähe des Äquators größer als am Pol. Dieser Anstieg ist im Rahmen der gängigen Theorien nicht erklärbar. Ein vergleichbares Verhalten findet sich allerdings ebenfalls in den (lokalen) Simulationen weiterer Autoren ([Käpylä et al., 2004](#); [Rüdiger et al., 2005](#)).

Die Kombination von Rotation und horizontalem Magnetfeld erhöht ebenfalls den horizontalen turbulenten Wärmetransport. Der latitudinale Wärmefluss ist polwärts orientiert. Aus Vergleichsrechnungen mit langsamerer rotierender Magnetokonvektion, die der Übersicht halber hier nicht präsentiert wurden, lässt sich entnehmen, dass die Unterdrückung von  $\langle u'_x T' \rangle$  mit steigender Rotationsgeschwindigkeit schwächer ist als für  $\langle u'_y T' \rangle$  und  $\langle u'_z T' \rangle$ . In einem schnell rotierenden System ist es daher möglich, dass ein signifikanter Anteil des totalen turbulenten Transports von Wärme in Richtung der Pole erfolgt. In einem solchen Fall sind die Pole wärmer als der Äquator und es entsteht ein nicht-radialer großskaliger Temperaturgradient, der als Quelle für eine meridionale Zirkulation dient. Eine solche meridionale Strömung – falls sie sich als stark genug erweist – kann wesentlichen Einfluss auf den Dynamo-Prozesses im flüssigen Erdkern haben (siehe z.B. [Sarson & Jones, 1999](#), die eine fluktuierende meridionale Strömung als Erklärung für Dipol-*Reversals* in einem einfachen  $2^{1/2}D$  Modell identifizierten). Großskalige meridionale Strömungen finden sich ebenfalls in der solaren Konvektionszone und [Rüdiger et al. \(2005\)](#) konnten zeigen, dass diese notwendig sind, um eine Übereinstimmung des solaren Rotationsgesetz aus Modellrechnungen mit den Beobachtungen zu erhalten.

Neben dem Einfluss des Wärmetransports durch turbulente Strömungen wird die Temperaturverteilung an der Kern-Mantel-Grenze ebenfalls durch den Wärmefluss zwischen äußerem Kern und Mantel bestimmt. Dieser wird in der Regel in Simulationen als Randbedingung vorgegeben. Seismologische Messungen deuten darauf hin, dass der Wärmefluss ungleichmäßig über die Kern-Mantel-Grenze verteilt ist. Die Variationen bestimmen die Konvektion im flüssigen Erdkern: Konvektion ist stärker (schwächer) an den Stellen, an denen der Wärmefluss zum Mantel stärker (schwächer) ist. Durch die nicht-axialsymmetrischen Anteile der Randbedingungen an der Oberseite des flüssigen Erdkerns erhält zusätzlich der longitudinale Wärmefluss eine Bedeutung. Dieser azimuthal orientierte Wärmefluss ist in allen durchgeführten Simulationen stets negativ und nimmt zum Äquator hin zu. In der Folge entsteht ein westwärts orientierter longitudinaler Transport von Wärme, der mit den inhomogenen thermischen Bedingungen an der Kern-Mantel-Grenze wechselwirkt. Welche Auswirkungen in diesem Zusammenhang durch den westwärts orientierten turbulenten azimuthalen Wärmetransport entstehen, ist bisher noch nicht untersucht worden.

Globale Simulationen, die den Einfluss von heterogenen Randbedingungen für den Wärmefluss an der Kern-Mantel-Grenze untersuchen, wurden von [Olson & Christensen \(2002\)](#) durchgeführt. In Simulationen mit gleichförmigem Wärmefluss an der Kern-Mantel-Grenze erhalten die Autoren ein nahezu axialsymmetrisches Feld, während eine zu große Variation im Wärmefluss das Auftreten eines Dynamos vollkommen unterdrückt. Bei moderaten Inhomogenitäten treten Korrelationen zwischen den auf- und abwärts orientierten großskaligen Strömungen und Zonen mit hoher bzw. niedriger magnetischer

Flussdichte auf. Die Amplitude der nicht-axialsymmetrischen Feldkomponente ist dabei proportional zur Amplitude der Wärmefluss-Heterogenität an der Kern-Mantel-Grenze. In der Tat zeigt sich in diesen globalen Simulationen eine hier aufgrund des turbulenten meridionalen Wärmetransports vermutete erhöhte Temperatur des Nordpols (siehe Abb. 5 in [Olson & Christensen 2002](#)). Es ist aber nicht klar, ob dies eine Folge des turbulenten Transports von Wärme ist und welche Konsequenzen für eine etwaige meridionale Strömung entstehen.

Die Ergebnisse der lokalen Simulationen lassen sich teilweise gut durch quasi-lineare Zusammenhänge beschreiben. Unabhängige Bestimmungen der Korrelationszeit, die ebenfalls durch die Betrachtungen bei der Abschätzung der turbulenten Diffusivität bestätigt werden, ergeben ausnahmslos plausible Werte im Bereich von  $\tau_{\text{corr}} \approx 0.5\tau_{\text{adv}}$ . Allerdings bleibt das Verhalten bestimmter einzelner Größen, wie die Abhängigkeit des latitudinalen Wärmetransports vom Magnetfeld oder der Anstieg des radialen Wärmetransports zum Äquator hin in diesem Rahmen unverstanden. Die Orientierung und damit die Richtungsabhängigkeit der drei betrachteten Komponenten des turbulenten Wärmetransports ist aber eindeutig polwärts, entgegen der Rotationsrichtung und nach außen. Trotz dieses in der Zusammenfassung einfach erscheinenden Resultats, sind die Konsequenzen der kombinierten Auswirkungen aller Komponenten des turbulenten Wärmeflusses zu komplex, um Aussagen über die resultierende Temperaturverteilung innerhalb des flüssigen Erdkerns treffen zu können, und erfordern daher selbst-konsistente hochaufgelöste globale Simulationen in sphärischer Geometrie.

Die weiteren Untersuchungen betreffen den  $\alpha$ -Effekt, der aus der mittleren elektromotorischen Kraft  $\mathcal{E} = \langle \mathbf{u}' \times \mathbf{B}' \rangle$  bestimmt wurde. Die Berechnungen der Diagonalelemente des  $\alpha$ -Tensors, die die Produktion eines großskaligen Magnetfeldes aus nicht-spiegelsymmetrischer kleinskaliger Turbulenz beschreiben, zeigen, dass ein  $\alpha$ -Effekt unter Geodynamo-Bedingungen existiert. In Bezug auf die vertikale Mittelebene der Box weist der horizontale  $\alpha$ -Effekt eine bemerkenswerte Antisymmetrie auf.  $\alpha$  ist negativ in der unteren und positiv in der oberen Hälfte einer auf der nördlichen Hemisphäre rotierenden Box, wobei der Nulldurchgang nahezu exakt in der Mitte der Box erfolgt. Eine Mittelung über die gesamte Box ergibt daher ein annähernd verschwindendes Volumenmittel des  $\alpha$ -Effekts, so dass die realen Gegebenheiten mit einem von der vertikalen/radialen Koordinate unabhängigen  $\alpha$ -Effekt nicht richtig wiedergegeben werden. Der radiale Verlauf des horizontalen  $\alpha$ -Effekts ist eindeutig negativ korreliert mit der kinetischen Helizität.

Die Unterdrückung des horizontalen  $\alpha$ -Effekts mit steigender Magnetfeldstärke ist nicht katastrophal. Selbst für Magnetfeldstärken in der Größenordnung der *equipartition field strength*  $B_{\text{eq}}$  ist der  $\alpha$ -Effekt nicht verschwunden. Dies steht in direkten Gegensatz zu den Ergebnissen von Simulationen mit künstlich getriebener (helikaler) Turbulenz, bei der z.B. [Cattaneo & Hughes \(1996\)](#) ein katastrophales Quenching des  $\alpha$ -Effekts beobachten. Im Gegenteil zeigt der horizontale  $\alpha$ -Effekt am Pol ein Maximum analog zu dem Maximum der Turbulenz-Intensität bei  $\Lambda \approx 1..2$  ( $B \approx 0.3B_{\text{eq}}$ ). Der Verlauf des  $\alpha$ -Effektes in Abhängigkeit des Magnetfeldes ist vergleichbar mit dem Verhalten der Turbulenz-Intensität (dies gilt bei  $\theta = 45^\circ$  nur für die Komponente  $\alpha_{yy}$ ).

Der vertikale  $\alpha$ -Effekt ( $\alpha_{zz}$ ) ist für hohe Rotationsgeschwindigkeiten „beinahe“ immer negativ. Im Allgemeinen kann für  $Ta \gtrsim 10^6$  kein Zusammenhang zwischen  $\alpha_{zz}$  und  $H_{\text{kin}}$  oder  $H_{\text{cur}}$  beobachtet werden. Für langsamere Rotationsgeschwindigkeiten wird das Verhalten von  $\alpha_{zz}$  aus den Simulationen anderer Autoren bestätigt ( $\alpha_{zz} \propto -\alpha_{yy}$  und  $\alpha_{zz} \propto +H_{\text{kin}}$ ). Betrachtet man die Simulationen mit vertikal angelegtem Magnetfeld separat, so ist das die Unterdrückung des vertikalen  $\alpha$ -Effekts mit steigender Rotationsrate für schwache Magnetfeldstärken eindeutig erkennbar und die Annahme eines für große  $\Omega$  verschwindenden  $\alpha_{zz}$  erscheint gerechtfertigt. Im Vergleich mit den Simulationen mit horizontal angelegtem Feld ist  $\alpha_{zz}$  für schwache externe Felder (betragsmässig) allerdings deutlich größer als  $\alpha_{yy}$ . Inwieweit das unterschiedliche Verhalten von  $\alpha_{zz}$  für kleine Feldstärken durch die unterschiedliche Modellkonfiguration aufgrund der Randbedingungen beeinflusst wird, ist unklar. In Übereinstimmung mit den Erwartungen ist allerdings das magnetische Quenching des vertikalen  $\alpha$ -Effekts. Dieses ist deutlich stärker als für den horizontalen  $\alpha$ -Effekt, so dass bereits für  $B \gtrsim 0.2B_{\text{eq}}$  der vertikale  $\alpha$ -Effekt gegenüber dem horizontalen  $\alpha$ -Effekt vernachlässigt werden kann. Zur genaueren Untersuchung der rotationsbedingten Unterdrückung des vertikalen  $\alpha$ -Effekts sind Simulationen mit höherer Rotationsgeschwindigkeit notwendig.

Die charakteristische radiale Abhängigkeit des horizontalen  $\alpha$ -Effekts dient als Basis für ein Mean-Field Modell des Geodynamos vom  $\alpha^2$ -Typ. Die Mean-Field Simulationen erfordern für einen funktionierenden Dynamo einen um einen Faktor  $\sim 3$  größeren Wert für  $C_\alpha$  als er aus den lokalen Simulationen abgeschätzt werden kann. Dies stellt keine unüberwindbare Differenz dar, da die Abhängigkeit des  $\alpha$ -Effekts von der Rotationsrate eindeutig zeigt, dass der horizontale  $\alpha$ -Effekt in der hier untersuchten Konfiguration mit der Rotationsgeschwindigkeit zunimmt. Daher lässt sich vermuten, dass die Magnitude des  $\alpha$ -Effekts für schneller rotierende (und damit realistischere) Systeme durchaus ausreichend sein kann, um den aufgrund der Mean-Field Simulationen notwendigen kritischen Wert zu erreichen. Eine Sättigung, die aus theoretischen Betrachtungen für große Coriolis-Zahlen folgt (Rüdiger & Kitchatinov, 1993), tritt vermutlich erst bei deutlich höheren Rotationsgeschwindigkeiten und bei höherem  $\alpha$ -Effekt auf.

Das Profil des  $\alpha$ -Effekts wird in den Mean-Field Simulationen idealisiert durch eine Sinus-Funktion wiedergegeben. Dies vernachlässigt die Konzentration des  $\alpha$ -Effekts nahe der vertikalen Grenzflächen, die mit steigender Rotationsgeschwindigkeit deutlicher wird, was ebenfalls in Simulationen von Cattaneo & Hughes (2006) gefunden wird. Die resultierenden  $\alpha^2$ -Dynamos weisen eine periodische Zeitabhängigkeit auf, wobei die typische Dauer, die der Dipol benötigt, um seine Polarität einmal zu ändern, durch die Diffusionszeit  $\tau_{\text{diff}}$  gegeben wird. Allerdings führen bereits geringe Abweichungen von dem gegebenen idealisierten  $\alpha$ -Profil zu stationären Lösungen. Diese Eigenschaft wird in einem Dynamo-Modell ausgenutzt, bei dem Fluktuationen im  $\alpha$ -Profil ein reguläres Oszillieren des Dipols verhindern.

Ein vorgegebenes  $\alpha$ -Profil mit zufälligen Fluktuationen in Nullstelle und Magnitude, bei denen die zeitlichen Mittelwerte innerhalb des oszillierende Lösungen erlaubenden Bereichs liegen, führt in Langzeitsimulationen (über 25 Millionen Jahre) zu irregulären Dipolumkehrungen. Die charakteristischen Parameter, die die Fluktuationen des  $\alpha$ -Effekts

---

beschreiben, beruhen auf den Ergebnissen der lokalen Simulationen und ergeben mittlere *Reversal*-Raten, die innerhalb des für den Geodynamo typischen Bereichs liegen. Für eine aussagekräftige Bestimmung weiterer Charakteristiken, wie zum Beispiel der Verteilung der Dipolmomente, einer robusten Identifizierung von Exkursionen, oder der Neigung der Dipol-Achse sind allerdings 3D-Simulationen unter zusätzlicher Berücksichtigung der azimuthalen Abhängigkeit nötig.

Ein ungelöstes Problem bleibt die Einbeziehung nicht trivialer (nicht-diagonal) Komponenten des  $\alpha$ -Tensors. Da die Eigenwerte der einzelnen Moden sehr nahe beieinander liegen, wird erwartet, dass eine realistische Lösung von einer polaren Dipolmode dominiert wird, die allerdings nur den Anfang einer Multipolentwicklung darstellt. Die vollständige Lösung enthält zusätzlich auch höhere Ordnungen, die Dipolneigung und driftende nicht-axialsymmetrische Feldanteile repräsentieren. Mit dem einfachen Mean-Field Modell ist es nicht möglich, nicht-axialsymmetrische Beiträge zu einer dominierenden Dipol-Lösung zu erhalten, da der auf theoretische Untersuchungen basierende Ansatz  $\alpha_{zz}^{cy1} = 0$  zu Lösungen führt, die von den nicht-axialsymmetrischen Moden dominiert werden. Allerdings sind solche Konfigurationen auch nicht auszuschliessen. So zeigen Beobachtungen anderer Planeten bzw. Monde in unserem Sonnensystem, dass neben axialsymmetrischen Feldern (z.B. das nahezu perfekt axialsymmetrische Magnetfeld des Saturn) mit den Magnetfeldern der Planeten Neptun und Uranus auch Realisierungen existieren, die von den nicht-axialsymmetrischen Anteilen dominiert werden.



# Anhang A

## Der Code NIRVANA

NIRVANA ist ein in der Programmiersprache C geschriebener Code zur numerischen Integration der kompressiblen nicht-relativistischen MHD-Gleichungen inklusive viskoser/diffusiver Terme sowie der Wärmeleitung (Ziegler, 1998, 1999). Der Code beruht im Wesentlichen auf dem numerischen Algorithmus, der in Stone & Norman (1992a,b) beschrieben wird. NIRVANA ist eine gitterbasierte Implementierung, bei der die primitiven physikalischen Größen  $\rho, \mathbf{u}, \mathbf{B}, p, T, e$  auf einem *staggered mesh* definiert sind. Während skalare Größen ( $\rho, p, T, e$ ) zell-zentriert definiert sind, sind vektorielle Größen ( $\mathbf{u}, \mathbf{B}$ ) auf den Zellgrenzflächen und Hilfsgrößen, wie zum Beispiel die elektromotorischen Kräfte  $\mathbf{E} = \mathbf{u} \times \mathbf{B}$ , auf den Zellkanten lokalisiert (siehe Abb. A).

### Dimensional- und Operator-Splitting

Quellterme und Advektion werden in einem zeit-expliziten *Operator-* und *Dimensional-Split*-Verfahren gelöst, das sich schematisch wie folgt darstellen lässt:

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} = \mathcal{A}_1[\mathbf{f}] + \mathcal{A}_2[\mathbf{f}] + \dots + \mathcal{A}_P[\mathbf{f}], \quad (\text{A.1})$$

Hierbei bezeichnet  $\mathbf{f}$  den Vektor der gesuchten Größen ( $\rho, \mathbf{u}, e, \mathbf{B}$ ) und  $\mathcal{A}_i, i = 1, \dots, P$  die einzelnen Terme in den MHD-Gleichungen. Die finite Differenzen Mehrschrittverfahren kann dann folgendermaßen formuliert werden:

$$\frac{\mathbf{F}^{(1)} - \mathbf{F}^{(0)}}{\delta t} = A_1[\mathbf{F}^{(0)}], \quad (\text{A.2})$$

$$\frac{\mathbf{F}^{(2)} - \mathbf{F}^{(1)}}{\delta t} = A_2[\mathbf{F}^{(1)}], \quad (\text{A.3})$$

$$\vdots \quad (\text{A.4})$$

$$\frac{\mathbf{F}^{(p)} - \mathbf{F}^{(p-1)}}{\delta t} = A_p[\mathbf{F}^{(p-1)}]. \quad (\text{A.5})$$

Hierbei sind  $A_i$  die diskretisierten Darstellungen der Operatoren  $\mathcal{A}_i$  und  $\mathbf{F}^{(i)}$  stellt die numerische Approximation von  $\mathbf{f}$  nach dem  $i$ -ten Teilschritt dar.

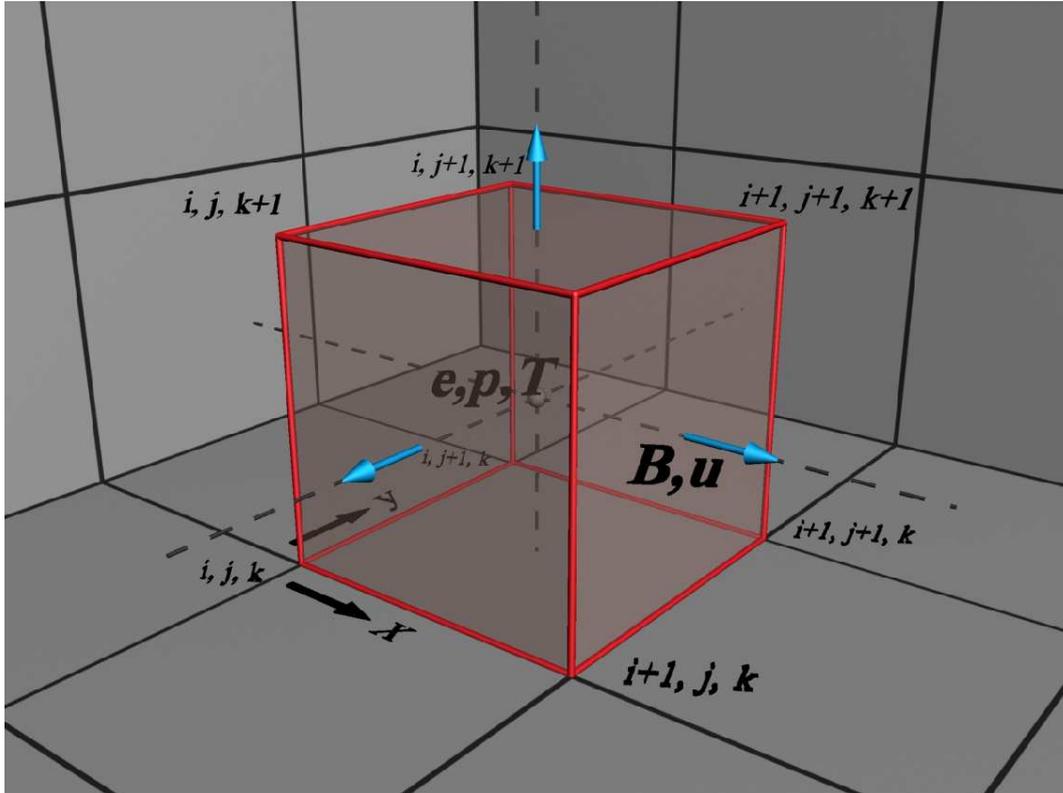


Abbildung A.1: Lokalisierung der primitiven Variablen in einem *Staggered Mesh*

Die Ausdrücke  $A_i(f)$  entsprechen den Teillösungen der einzelnen Terme in den Gleichungen. Das gesamte *Update* ergibt sich durch die Summe der Teillösungen für die einzelnen physikalischen Terme (*Operator-Split*) und wird separat für jede einzelne Raumrichtung durchgeführt (*Dimensional-Split*).

### Quellterme

Die Quellterme in der Navier-Stokes Gleichung (2.3) und in der Gleichung für die thermische Energie (2.4) werden mit einer expliziten Forward-Euler-Methode mit räumlicher Diskretisierung in zweiter Ordnung gelöst. So beträgt z.B. das *Update* durch den Druckgradienten der  $x$ -Komponente der Geschwindigkeit von Zeitschritt  $n$  auf Zeitschritt  $n+1$ :

$$u_{x,i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}^{n+1} = u_{x,i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}^n - \frac{\delta t}{\delta x} \frac{1}{\rho_{i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}} \cdot \left( p_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}^n - p_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}^n \right) \quad (\text{A.6})$$

Analoge Ausdrücke existieren für die  $y$ - und  $z$ -Komponente, den viskosen Term sowie die Quellterme, wie z.B. die Wärmeleitung  $\nabla(\kappa \nabla T)$  in Gleichung (2.4). Das Verfahren erlaubt im Prinzip räumlich variierende Koeffizienten  $\nu, \kappa, \eta$ , was in der vorliegende Studie allerdings nicht ausgenutzt wurde.

Der hydrodynamische Teil der Gleichungen wird mit einem Finite Volumen Schema zweiter Ordnung mit stückweiser linearer Rekonstruktion und monotonisierenden van-

Leer-Slope-Limiter (van Leer, 1977) gelöst. Eine detaillierte Beschreibung findet sich bei Ziegler (1998).

### Coriolis-Kraft

Eine Ausnahme vom *Forward-Euler*-Schema bildet das *Update* durch den Coriolis-Term, das durch die analytische Lösung der Gleichung

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u}. \quad (\text{A.7})$$

erfolgt. Die zugehörige (Teil-)Lösung beschreibt die Trägheitsoszillationen in einem rotierenden System und wird in diskretisierter Form durch

$$\mathbf{u}^{n+1} = (\hat{\boldsymbol{\Omega}} \cdot \mathbf{u}^n) \hat{\boldsymbol{\Omega}} + (\mathbf{u}^n \times \hat{\boldsymbol{\Omega}}) \sin(2\Omega \delta t) + (\hat{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{u}^n) \times \hat{\boldsymbol{\Omega}} \cos(2\Omega \delta t) \quad (\text{A.8})$$

gegeben. Hierbei bezeichnen  $\hat{\boldsymbol{\Omega}}$  den Einheitsvektor in Richtung der Rotationsachse und  $\delta t$  die Zeitdifferenz zwischen Zeitschritt  $n$  und Zeitschritt  $n + 1$ .

### Magnetfeld

Zur Lösung der Induktionsgleichung kommt der *Constraint Transport*-Löser von Stone & Norman (1992a,b) zur Anwendung, der auf der Charakteristikenmethode beruht, wobei  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$  auf Maschinengenauigkeit erfüllt ist. Erneut sei für die Details des Verfahrens auf Ziegler (1998) verwiesen.

### Zeitintegration

Die Zeitintegration erfolgt durch ein explizites *Forward-Euler* Verfahren, so dass der maximale Zeitschritt durch das Courant-Friedrich-Lewy(CFL)-Kriterium beschränkt ist.

$$\delta t = C \cdot \min_{\text{all cells}} \left( \frac{\delta s}{|\mathbf{u}| + (c_S^2 + c_A^2)^{1/2}}, \frac{(\delta s)^2}{\kappa}, \frac{(\delta s)^2}{\nu}, \frac{(\delta s)^2}{\eta} \right) \quad (\text{A.9})$$

$C$  bezeichnet den Courant-Faktor (in allen Rechnungen wurde  $C = 0.4$  gesetzt) und  $\delta s = \min(\delta x, \delta y, \delta z)$  das Minimum der Zellabmessungen (in allen Simulationen wird das Minimum gegeben durch  $\delta z$ ). Die Schallgeschwindigkeit  $c_S$  sowie die Alfvén-Geschwindigkeit  $c_A$  werden gegeben durch:

$$c_S^2 = \frac{\partial p}{\partial \rho} = \gamma \frac{k}{m\bar{\mu}} T \quad \text{und} \quad c_A^2 = \frac{|\mathbf{B}|^2}{\mu_0 \rho_0}. \quad (\text{A.10})$$



## Anhang B

### Einfluss numerischer Parameter

#### B.1 Randbedingungen

Um den Einfluss der Randbedingungen auf die Lösung zu untersuchen wurde exemplarisch ein Parametersatz ( $Ra = 10^6$ ,  $Ta = 10^7$ ,  $Pr = Pm = 0.5$ ,  $\Lambda = 1$ ,  $\theta = 45^\circ$ ) ausgewählt und unter Anwendung verschiedener in der Literatur üblichen Randbedingungen untersucht. Zum Vergleich herangezogen wurden die zeitlich gemittelte radialen Profile von  $u_{rms}$ , der kinetischen Helizität  $H_{kin}$ , der mittleren Magnetfelder  $\langle B_{x,y} \rangle$  und der EMF  $\langle \mathcal{E}_{x,y} \rangle$ , sowie im Falle der verschiedenen Randbedingungen für das Magnetfeld zusätzlich der  $\alpha$ -Effekt.

##### B.1.1 Magnetfeld

Die folgenden Abbildungen zeigen die zeitlich gemittelten repräsentativen Größen für drei verschiedene Randbedingungen für das Magnetfeld. Die durchgezogene Kurve repräsentiert die Lösungen für den auch im restlichen Teil dieser Arbeit angewandten Randbedingungen des *perfect conductor* ( $\partial_z B_x = \partial_z B_y = 0$ ,  $B_z = 0$ ), im folgenden mit BCI abgekürzt, die gepunktete Kurve repräsentiert die Randbedingungen, die von [Ossendrijver et al. \(2001\)](#) angewandt wurden ( $B_z = 0$ ,  $B_x = B_x^0$ ,  $B_y = B_y^0$ , BCII) und die gestrichelte Kurve zeigt die Lösungen im Fall der von [Ziegler \(2002\)](#) angewandten divergenzfreien linearen Extrapolation des Feldes (BCIII).

Aus den Abbildungen ist direkt ersichtlich, dass nahezu keinerlei Unterschiede zwischen der *perfect conductor* Bedingung und der linearen divergenzfreien Extrapolation bestehen, während Bedingung BCII zu teilweise drastischen Abweichungen führt.

Trotz dieser Differenzen zum Beispiel im Verlauf des mittleres Magnetfeldes zwischen den Randbedingungen BCI oder BCIII und BCII, ergibt sich für alle drei Untersuchten Fälle ein nahezu identischer  $\alpha$ -Effekt, wie in [Abb. B.2](#) zu sehen ist.

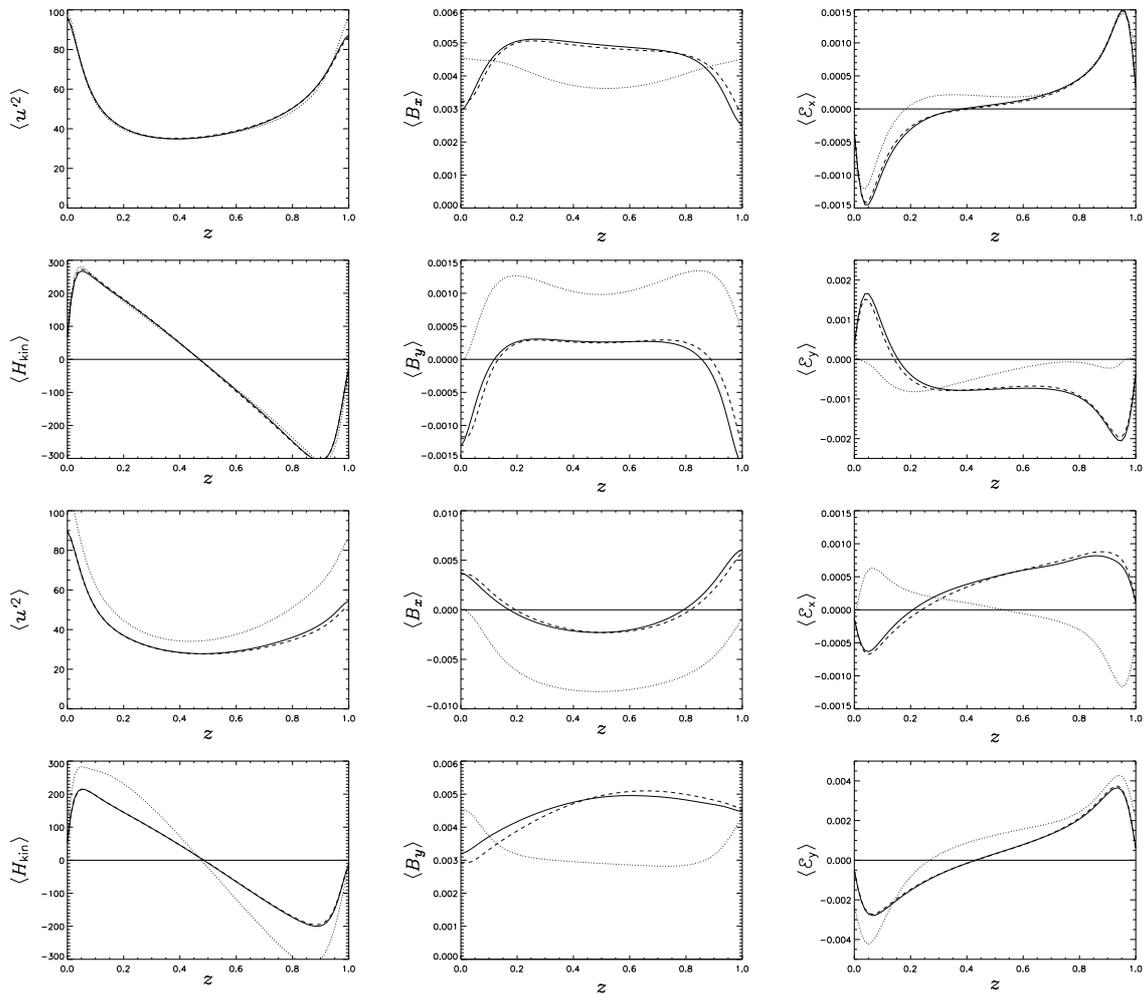


Abbildung B.1: Charakteristische Kenngrößen für verschiedene Randbedingungen (BCI: durchgezogene Linie, BCII: gepunktete Linie, BCIII: gestrichelte Linie). Zeile 1 u. 2: in  $x$ -Richtung orientiertes Magnetfeld, Zeile 3 u. 4: in  $y$ -Richtung orientiertes Magnetfeld.  $\Lambda=1$ ,  $\theta = 45^\circ$ .

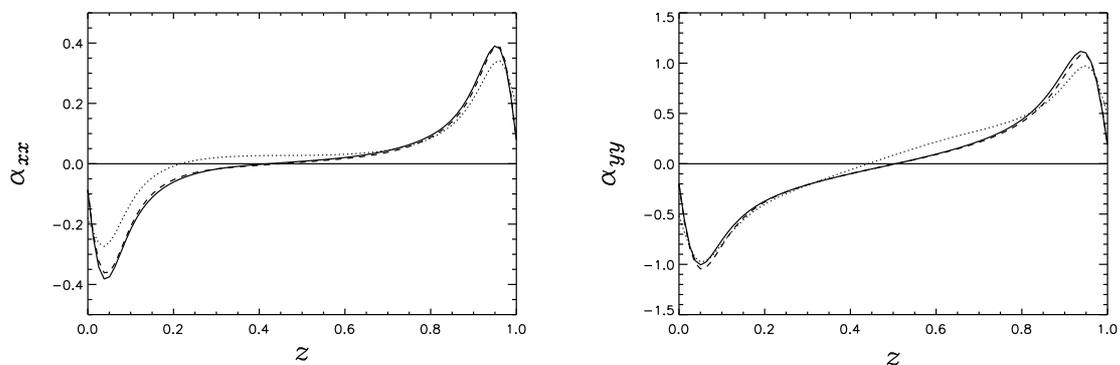


Abbildung B.2:  $\alpha$ -Effekt, berechnet aus den Simulationen für die drei verschiedenen Randbedingungen für das Magnetfeld (durchgezogene Kurve: BCI, gepunktete Kurve: BCII, gestrichelte Kurve: BCIII)

### B.1.2 Geschwindigkeit

Vergleich von  $u = 0$  und  $\partial_z u_x = \partial_z u_y = u_z = 0$

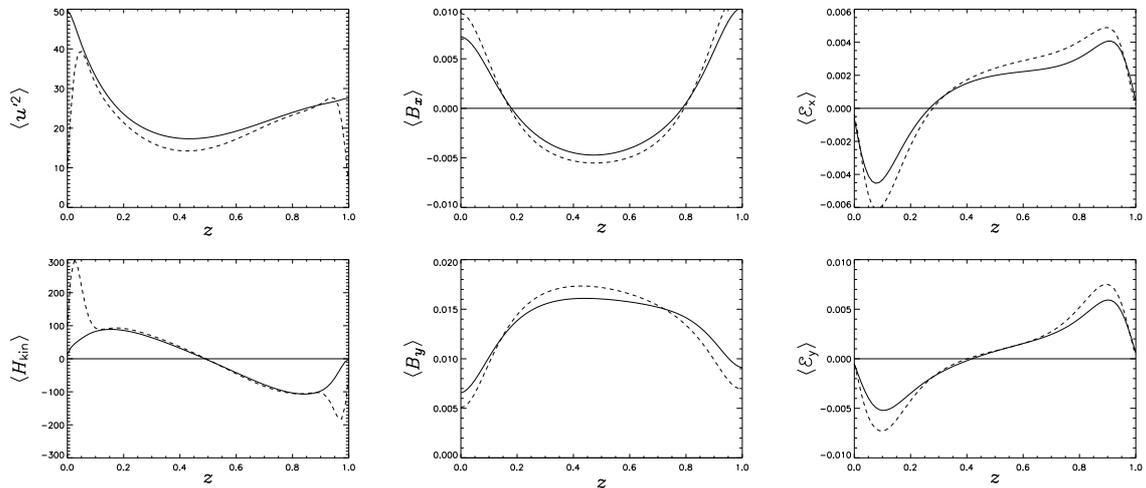


Abbildung B.3: Charakteristische Kenngrößen für ein in  $y$ -Richtung orientiertes Magnetfeld bei *rigid boundary conditions* ( $u_x = u_y = u_z = 0$ ) (gestrichelte Kurve). Durchgezogene Kurve: *Stress-Free* Randbedingungen:  $\partial_z u_x = \partial_z u_y = u_z = 0$  (standard)

## B.2 Auflösung

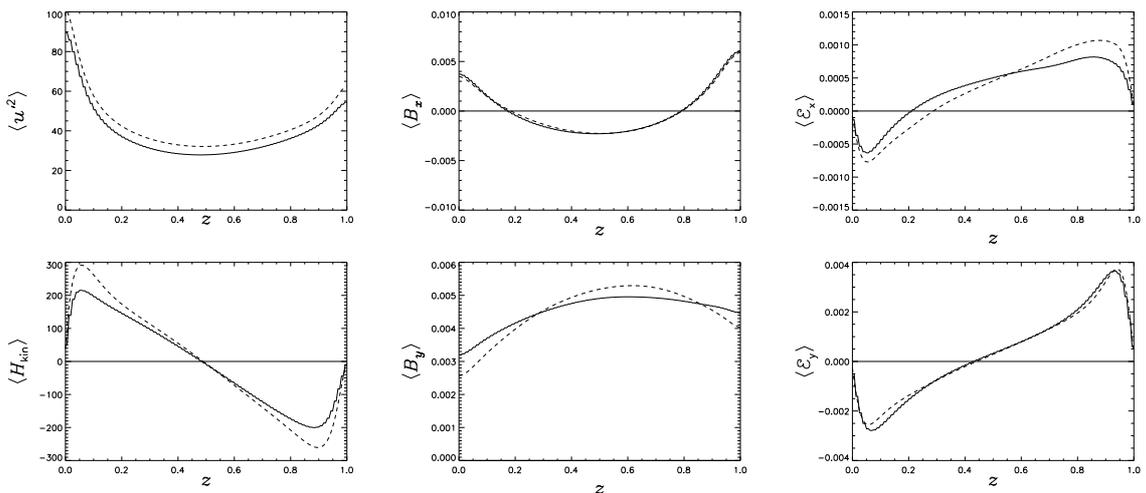


Abbildung B.4: Vergleich der charakteristische Kenngrößen für ein in  $y$ -Richtung orientiertes Magnetfeld mit Standard- und doppelter Auflösung ( $100^2 \times 80$ , durchgezogene Kurve und  $200^2 \times 160$ , gestrichelte Kurve)



# Anhang C

## $\alpha$ -Profile

### C.1 $\alpha_{xx}, \alpha_{yx}, \alpha_{yy}$ und $\alpha_{xy}$ bei $\theta = 0^\circ$

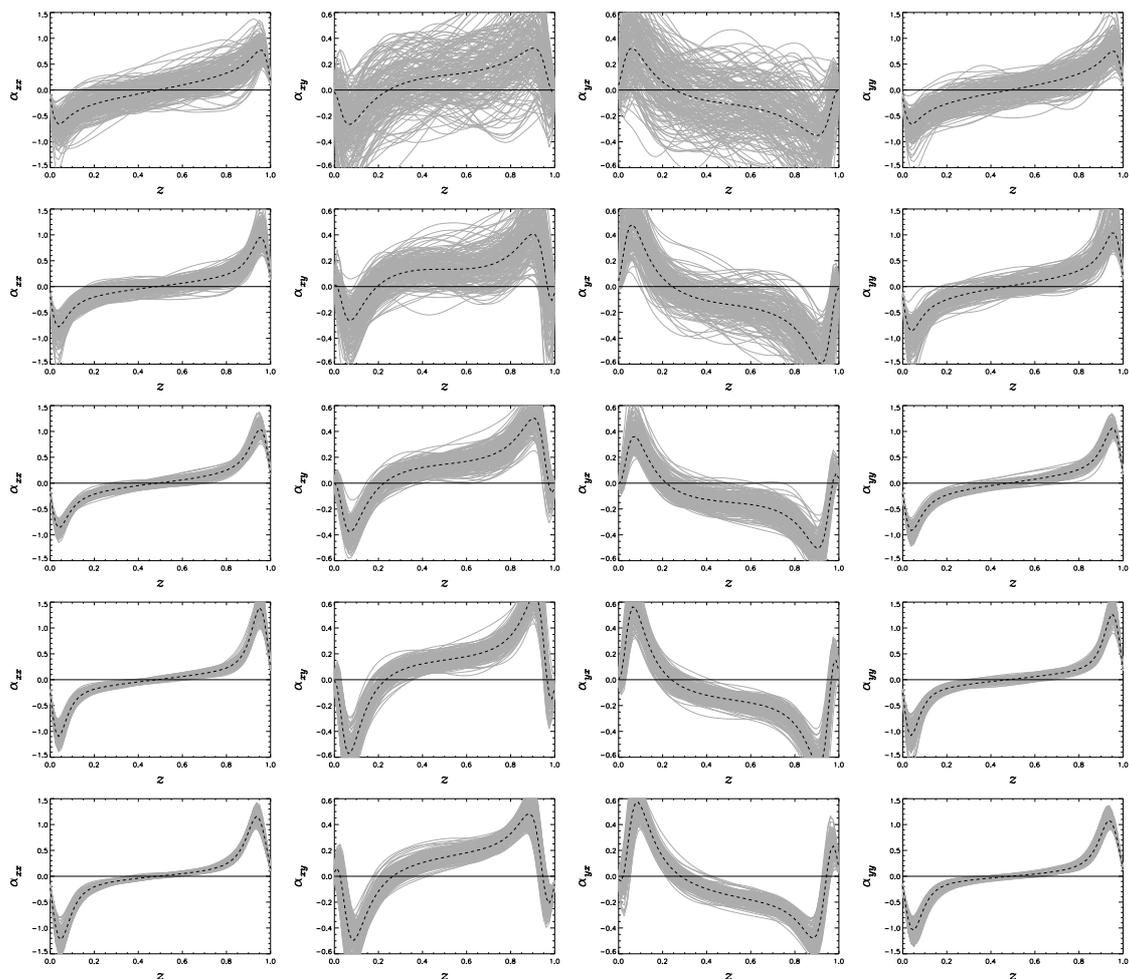


Abbildung C.1:  $z$ -Abhängigkeit der  $\alpha$ -Koeffizienten bei  $\theta = 0^\circ$  für  $\Lambda = 0.01, 0.1, 0.5, 1.0, 3.4$  (von oben nach unten). Von links nach rechts:  $\alpha_{xx}, \alpha_{xy}, \alpha_{yx}, \alpha_{yy}$

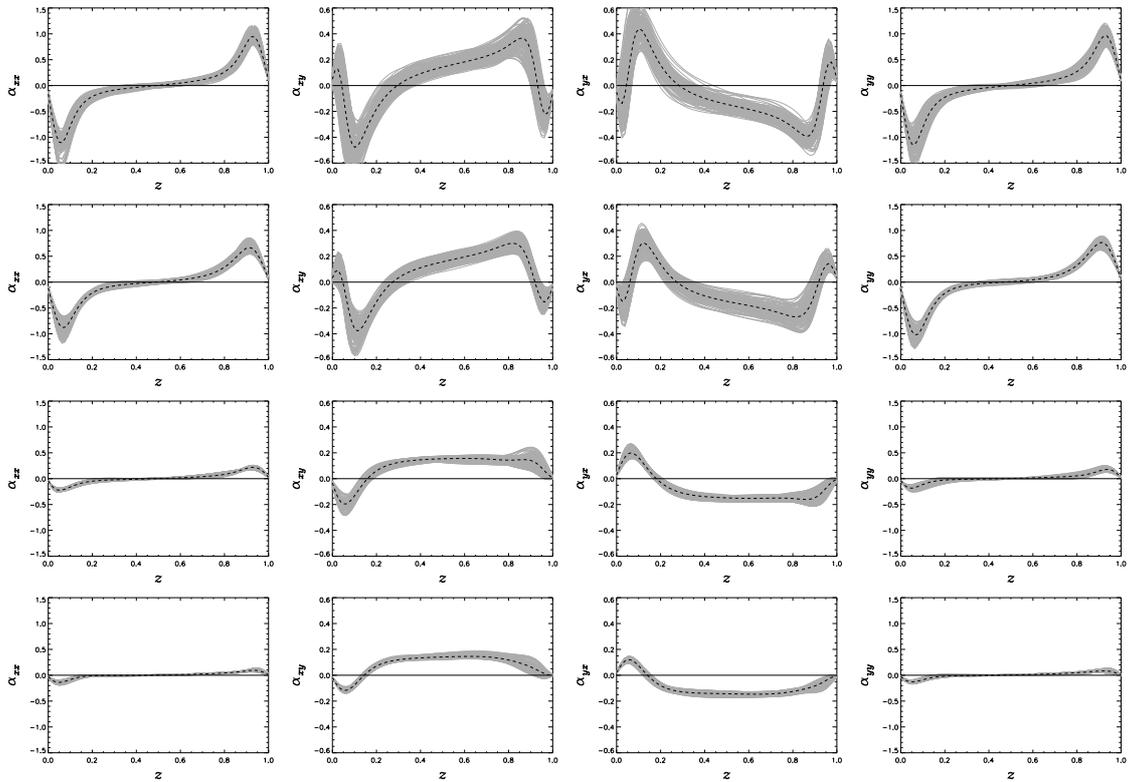


Abbildung C.2:  $z$ -Abhängigkeit der  $\alpha$ -Koeffizienten bei  $\theta = 0^\circ$  für  $\Lambda = 5, 10, 50, 100$  (von oben nach unten). Von links nach rechts:  $\alpha_{xx}, \alpha_{xy}, \alpha_{yx}, \alpha_{yy}$

## C.2 $\alpha_{xx}$ , $\alpha_{yx}$ , $\alpha_{yy}$ und $\alpha_{xy}$ bei $\theta = 45^\circ$

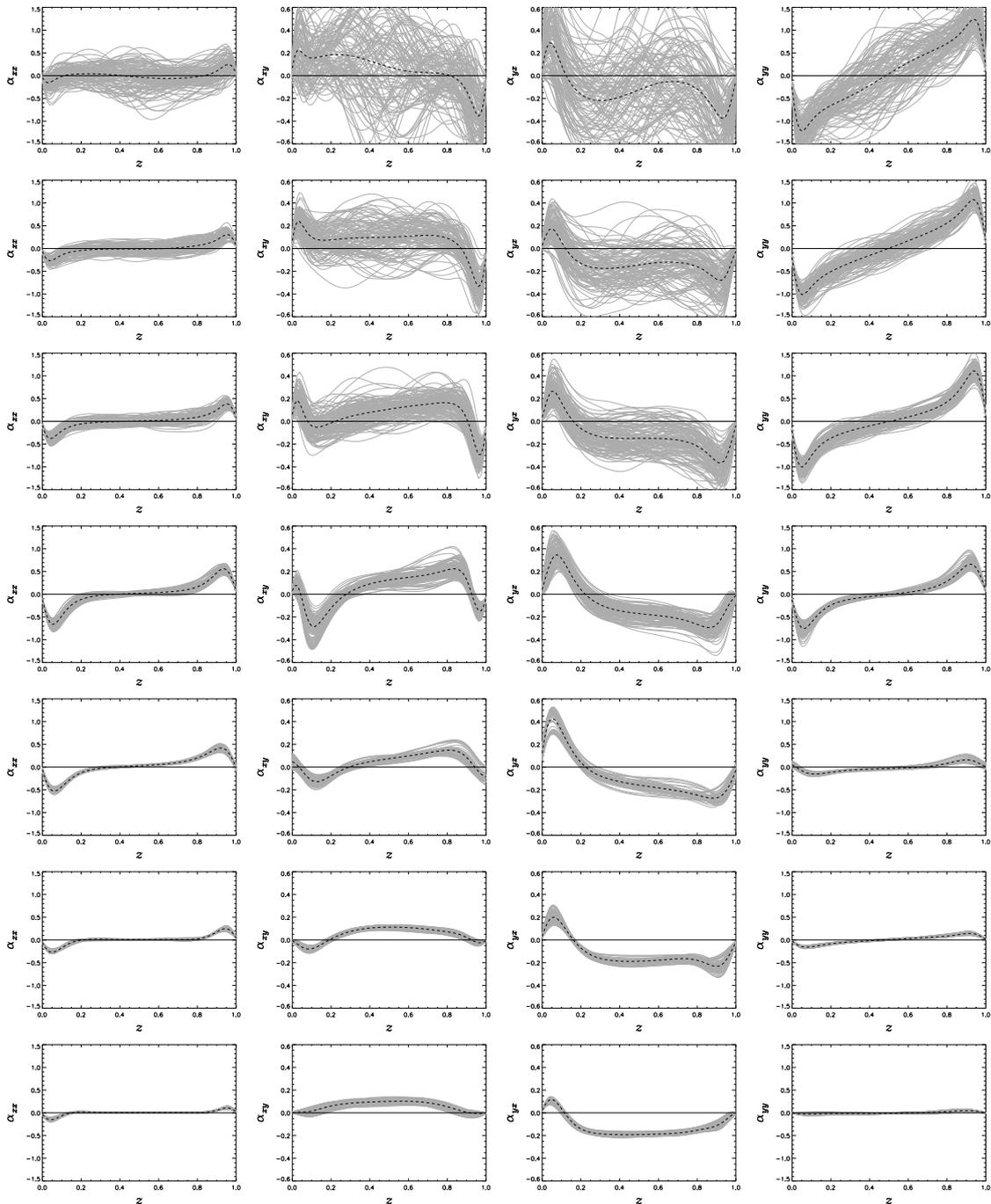


Abbildung C.3:  $z$ -Abhängigkeit der  $\alpha$ -Koeffizienten bei  $\theta = 45^\circ$  für  $\Lambda = 0.1, 0.7, 1, 10, 30, 50, 100$  (von oben nach unten). Von links nach rechts:  $\alpha_{xx}$ ,  $\alpha_{xy}$ ,  $\alpha_{yx}$ ,  $\alpha_{yy}$

### C.3 $\alpha_{xz}$ , $\alpha_{yz}$ und $\alpha_{zz}$ bei $\theta = 0^\circ$

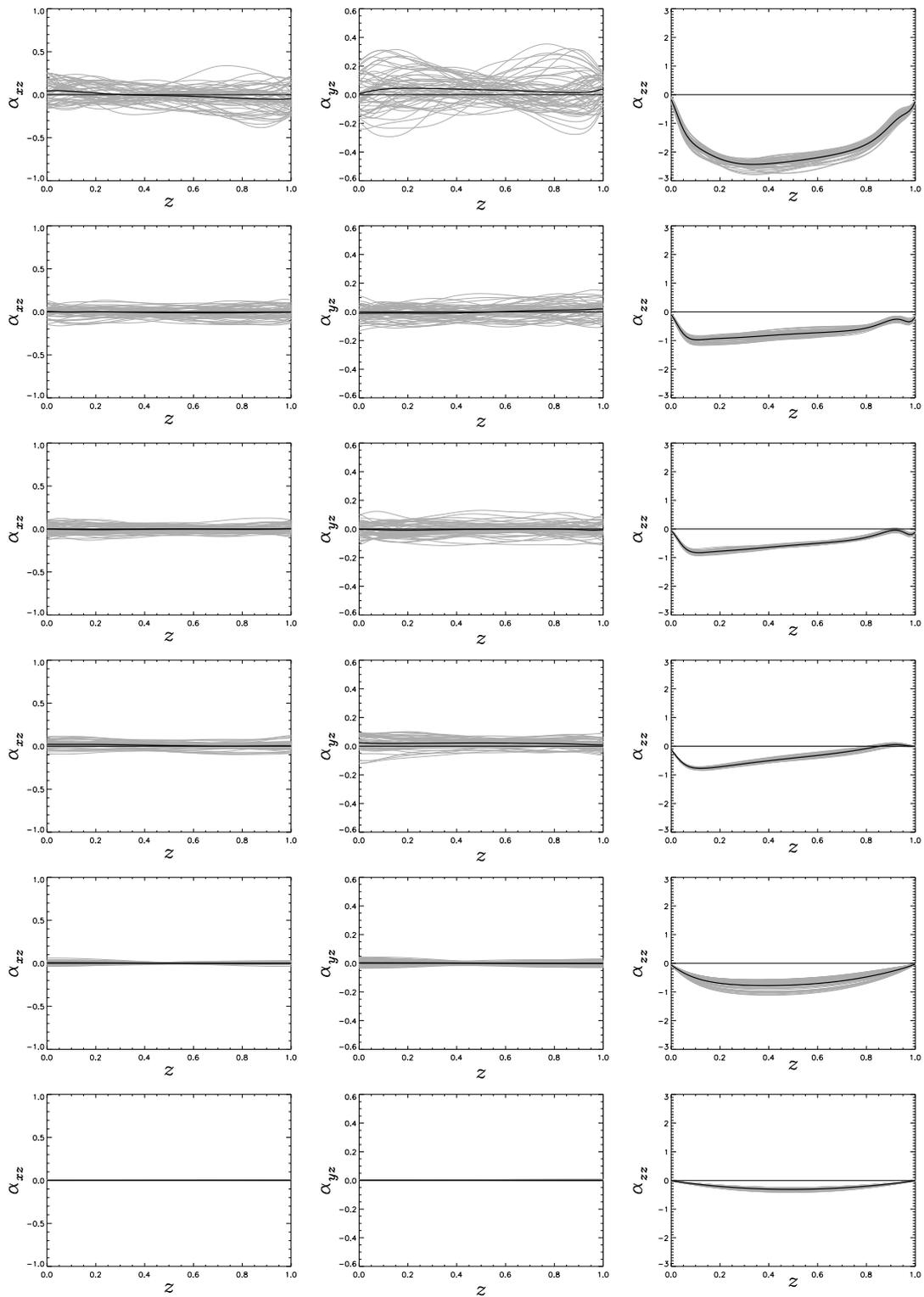


Abbildung C.4:  $z$ -Abhängigkeit der  $\alpha$ -Koeffizienten bei  $\theta = 0^\circ$  für  $\Lambda = 0.1, 0.5, 1, 4, 10, 100$  (von oben nach unten). Von links nach rechts:  $\alpha_{xz}$ ,  $\alpha_{yz}$ ,  $\alpha_{zz}$

### C.4 $\alpha_{xz}$ , $\alpha_{yz}$ und $\alpha_{zz}$ bei $\theta = 45^\circ$

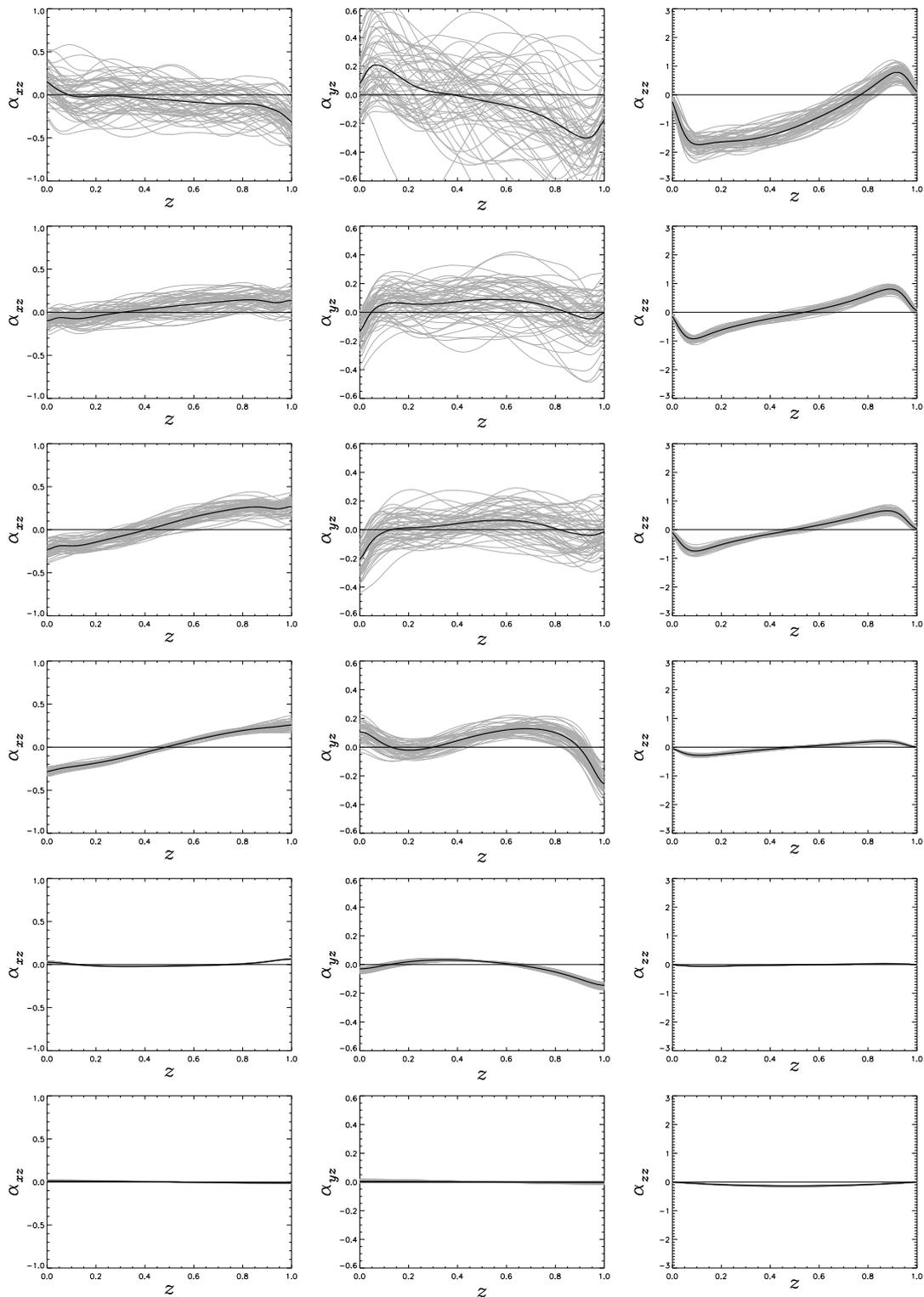


Abbildung C.5:  $z$ -Abhängigkeit der  $\alpha$ -Koeffizienten bei  $\theta = 45^\circ$  für  $\Lambda = 0.1, 0.5, 1, 4, 10, 100$  (von oben nach unten). Von links nach rechts:  $\alpha_{xz}$ ,  $\alpha_{yz}$ ,  $\alpha_{zz}$



## Danksagung

Ich möchte an dieser Stelle den Kollegen am Astrophysikalischen Institut Potsdam und an der Universität Potsdam für die Unterstützung und Hilfe bei meiner Arbeit in den letzten Jahren danken. Herausragende Unterstützung fand diese Arbeit durch Udo Ziegler, der nicht nur den Code NIRVANA, mit dem die MHD-Simulationen dieser Arbeit durchgeführt wurden, entwickelt hat, sondern auch stets sehr hilfsbereit bei allen offenen Fragen zur Seite stand. Besonderer Dank gebührt auch meinen Kollegen Rainer Arlt und Markus Gellert für die Hilfe bei der Durchsicht des Manuskripts und die Diskussion der Ergebnisse.

Bei Detlev Elstner möchte ich mich für die Bereitstellung des Codes zur Durchführung der Mean-Field Simulationen bedanken. Er hat sich ebenfalls stets viel Zeit genommen, um mir den Code und die Verfahrensweisen sowie den physikalischen Hintergrund der Mean-Field Simulationen zu erläutern. Mein Dank gilt ebenfalls meinem Betreuer Professor Günther Rüdiger.

Wesentliche Hilfe erhielt ich von Manfred Schulz bei der Durchführung der Simulationen auf den Clustern *Sanssouci* und *Octopus*. Ich möchte mich an dieser Stelle herzlich bei ihm bedanken.

Ich danke zudem allen Mitarbeitern der EDV-Abteilung, auf deren Hilfe und Rat ich mich stets verlassen konnte.

Dem Astrophysikalischen Institut Potsdam möchte ich für die mehrjährige Gewährung des Gastrechtes sowie für die Bereitstellung der Rechenzeit danken.

Weiterer Dank gilt der Deutschen Forschungsgemeinschaft, die über das DFG-Schwerpunktprogramm „Erdmagnetische Variationen: Raumzeitliche Struktur, Prozesse und Wirkungen auf das System Erde“ einen Teil dieser Arbeit förderte.

Gleichfalls bedanken möchte ich mich bei Professor Jürgen Kurths und bei Professor Matthias Holschneider von der Universität Potsdam. Sie waren zusammen mit Professor Rüdiger verantwortlich für das Projekt „Helmholtz-Institute for Supercomputational Physics“, durch das ein wesentlicher Teil dieser Arbeit gefördert wurde.

Ganz besonderer Dank gebührt meiner Freundin Diane Neumeyer für ihre Unterstützung in allen Phasen dieser Arbeit.



## Literaturverzeichnis

- [Acton et al. 2006] Acton, G.; Guyodo, Y.; Brachfeld, S.: The nature of a cryptochron from a paleomagnetic study of chron C4r.2r recorded in sediments off the Antarctic Peninsula. *Physics of the Earth and Planetary Interiors* 156 (2006), S. 213–222 [10](#)
- [Anufriev et al. 2005] Anufriev, A. P.; Jones, C. A.; Soward, A. M.: The Boussinesq and anelastic liquid approximations for convection in the Earth's core. *Physics of the Earth and Planetary Interiors* 152 (2005), S. 163–190 [16](#), [24](#), [30](#), [32](#)
- [Bloxham 1998] Bloxham, J.: Dynamics of Angular Momentum in the Earth's Core. *Annual Review of Earth and Planetary Sciences* 26 (1998), S. 501–518 [43](#)
- [Bloxham et al. 1989] Bloxham, J.; Gubbins, D.; Jackson, A.: Geomagnetic secular variation. *Phil. Trans. R. Soc. Lond.* A329 (1989), S. 415–502 [10](#)
- [Bloxham & Jackson 1989] Bloxham, J.; Jackson, A.: Simultaneous stochastic inversion for geomagnetic main field and secular variation. II - 1820-1980. *Journal of Geophysical Research* 94 (1989), Nr. .13, S. 15753–15769 [10](#)
- [Bloxham & Jackson 1992] Bloxham, J.; Jackson, A.: Time-dependent mapping of the magnetic field at the core-mantle boundary. *Journal of Geophysical Research* 97 (1992), Nr. .16, S. 19537–+ [10](#)
- [Bogue & Merrill 1992] Bogue, S. W.; Merrill, R. T.: The Character of the Field during Geomagnetic Reversals. *Annual Review of Earth and Planetary Sciences* 20 (1992), S. 181–+ [8](#)
- [Braginsky 1963] Braginsky, S. I.: Structure of the F layer and reasons for convection in the Earth's core. *Sov. Phys. Dokl.* 149 (1963), S. 8–10 [14](#)
- [Braginsky 1964a] Braginsky, S. I.: Kinematic Models of the Earth's Hydromagnetic Dynamo. *Geomagnetizm i Aeronomiia* 4 (1964), S. 572–583 [18](#), [73](#)
- [Braginsky 1964b] Braginsky, S. I.: Self excitation of a magnetic field during the motion of a highly conducting fluid. *Sov. Phys.-JETP* 20 (1964), S. 726–735 [18](#), [73](#)
- [Braginsky 1964c] Braginsky, S. I.: Theory of the hydromagnetic dynamo. *Sov. Phys.-JETP* 20 (1964), S. 1462–1471 [18](#), [73](#)
- [Braginsky & Meytlis 1990] Braginsky, S. I.; Meytlis, V. P.: Local turbulence in the Earth's core. *Geophys. Astrophys. Fluid Dynam.* 55 (1990), S. 71–87 [16](#)
- [Braginsky & Roberts 1995] Braginsky, S. I.; Roberts, P.H.: Equations governing Earth's core and the geodynamo. *Geophys. Astrophys. Fluid Dynam.* 79 (1995) [12](#), [32](#)
- [Brandenburg et al. 1990] Brandenburg, A.; Tuominen, I.; Nordlund, A.; Pulkkinen, P.; Stein, R. F.: 3-D simulation of turbulent cyclonic magneto-convection. *A&A* 232 (1990), Juni, S. 277–291 [21](#), [40](#), [41](#), [54](#), [57](#), [67](#)

- [Brummell et al. 1996] Brummell, N. H.; Hurlburt, N. E.; Toomre, J.: Turbulent Compressible Convection with Rotation. I. Flow Structure and Evolution. *ApJ*. 473 (1996), S. 494 [21](#), [35](#), [36](#), [41](#)
- [Brummell et al. 1998] Brummell, N. H.; Hurlburt, N. E.; Toomre, J.: Turbulent Compressible Convection with Rotation. II. Mean Flows and Differential Rotation. *ApJ*. 493 (1998), S. 955 [21](#)
- [Buffett 2002] Buffett, B. A.: Estimates of heat flow in the deep mantle based on the power requirements for the geodynamo. *Geophys. Res. Lett.* 29 (2002), S. 7–1 [33](#)
- [Buffett 2003] Buffett, B. A.: A comparison of subgrid-scale models for large-eddy simulations of convection in the Earth's core. *Geophysical Journal International* 153 (2003), S. 753–765 [17](#)
- [Buffett & Bloxham 2002] Buffett, B. A.; Bloxham, J.: Energetics of numerical geodynamo models. *Geophysical Journal International* 149 (2002), S. 211–224 [30](#)
- [Bushby 2003] Bushby, P. J.: Modelling dynamos in rapidly rotating late-type stars. *Mon. Not. R. Astr. Soc.* 342 (2003), S. L15–L19 [15](#)
- [Busse 1978] Busse, F. H.: Magnetohydrodynamics of the Earth's Dynamo. *Annual Review of Fluid Mechanics* 10 (1978), Januar, S. 435–462 [11](#)
- [Busse & Miin 1979] Busse, F. H.; Miin, S. W.: Spherical Dynamos with Anisotropic  $\alpha$ -Effect. *Geophys. Astrophys. Fluid Dynam.* 14 (1979), S. 167–181 [86](#)
- [Cattaneo et al. 2003] Cattaneo, F.; Emonet, T.; Weiss, N.: On the Interaction between Convection and Magnetic Fields. *ApJ*. 588 (2003), S. 1183–1198 [24](#)
- [Cattaneo & Hughes 1996] Cattaneo, F.; Hughes, D. W.: Nonlinear saturation of the turbulent  $\alpha$  effect. *Physical Review E* 54 (1996), S. 4532–+ [62](#), [91](#)
- [Cattaneo & Hughes 2006] Cattaneo, F.; Hughes, D. W.: Dynamo action in a rotating convective layer. *Journal of Fluid Mechanics* 553 (2006), April, S. 401–418 [54](#), [92](#)
- [Chandrasekhar 1961] Chandrasekhar, S.: *Hydrodynamic and hydromagnetic stability*. International Series of Monographs on Physics, Oxford: Clarendon, 1961 [37](#), [46](#), [89](#)
- [Christensen & Tilgner 2004] Christensen, U.; Tilgner, A.: Power requirement of the geodynamo from ohmic losses in numerical and laboratory dynamos. *Nature* 429 (2004), S. 169–171 [32](#)
- [Christensen & Aubert 2006] Christensen, U. R.; Aubert, J.: Scaling properties of convection-driven dynamos in rotating spherical shells and application to planetary magnetic fields. *Geophysical Journal International* 166 (2006), S. 97–114 [12](#), [18](#), [73](#)
- [Clement 2004] Clement, B.: Dependency of the duration of geomagnetic polarity reversals on site latitude. *Nature* 428 (2004), S. 537–640 [8](#)
- [Courillot & Le Mouel 1988] Courillot, V.; Le Mouel, J. L.: Time variations of the earth's magnetic field - From daily to secular. *Annual Review of Earth and Planetary Sciences* 16 (1988), S. 389–476 [7](#)
- [Dorch & Nordlund 2001] Dorch, S. B. F.; Nordlund, Å.: On the transport of magnetic fields by solar-like stratified convection. *A&A* 365 (2001), S. 562–570 [62](#)
- [Dormy et al. 2000] Dormy, E.; Valet, J. P.; Courillot, V.: Numerical models of the geodynamo and observational constraints. *Geochem. Geophys. Geosys.* 1 (2000), S. 62–103 [19](#)
- [Dziewonski & Anderson 1981] Dziewonski, A. M.; Anderson, D. L.: Preliminary reference Earth model. *Physics of the Earth and Planetary Interiors* 25 (1981), S. 297–356 [3](#)
- [Eltayeb 1972] Eltayeb, I. A.: Hydromagnetic Convection in a Rapidly Rotating Fluid Layer. *Proc. R. Soc. A* 326 (1972), Nr. 1565, S. 229–254 [46](#)

- [Fearn 1998] Fearn, D. R.: Hydromagnetic flow in planetary cores. *Reports of Progress in Physics* 61 (1998), S. 175–235 [12](#), [13](#), [15](#), [28](#), [30](#)
- [Fearn & Ogden 2000] Fearn, D. R.; Ogden, R. R.: Magnetostrophic magnetoconvection. *Physics of the Earth and Planetary Interiors* 117 (2000), S. 273–294 [19](#)
- [Gallet et al. 2003] Gallet, Y.; Genevey, A.; Courtillot, V.: On the possible occurrence of ‘archaeomagnetic jerks’ in the geomagnetic field over the past three millennia. *Earth and Planetary Science Letters* 214 (2003), S. 237–242 [8](#)
- [Gauss 1833] Gauss, C. F.: Anzeige der Abhandlung des Herrn Hofr. Gauß: Intensitas vis magneticae terrestri ad mensuram absolutam revocata. *Astronomische Nachrichten* 10 (1833), S. 349–360 [2](#)
- [Gellibrand 1635] Gellibrand, H.: *A discourse mathematical on the variation of the magnetical needle, together with its admirable diminution lately discovered*. 1635 [1](#)
- [Giesecke 2006] Giesecke, A.: Anisotropic Turbulence in weakly stratified rotating magnetoconvection. *Geophysical Journal International*, submitted (2006) [21](#)
- [Giesecke et al. 2005a] Giesecke, A.; Rüdiger, G.; Elstner, D.: Oscillating  $\alpha^2$ -dynamoes and the reversal phenomenon of the global geodynamo. *Astronomische Nachrichten* 326 (2005), Oktober, S. 693–700 [73](#)
- [Giesecke et al. 2005b] Giesecke, A.; Ziegler, U.; Rüdiger, G.: Geodynamo  $\alpha$ -effect derived from box simulations of rotating magnetoconvection. *Physics of the Earth and Planetary Interiors* 152 (2005), September, S. 90–102 [21](#)
- [Gilbert 1600] Gilbert, W.: *De Magnete, magneticisque corporibus, et de magno magnete tellure; Physiologia nova, plurimis et argumentis, et experimentis demonstrata*. London, 1600 [1](#)
- [Glatzmaier et al. 1999] Glatzmaier, G. A.; Coe, R. S.; Hongre, L.; Roberts, P. H.: The role of the Earth’s mantle in controlling the frequency of geomagnetic reversals. *Nature* 401 (1999), S. 885–890 [15](#)
- [Glatzmaier & Roberts 1995a] Glatzmaier, G. A.; Roberts, P. H.: A three-dimensional convective dynamo solution with rotating and finitely conducting inner core and mantle. *Physics of the Earth and Planetary Interiors* 91 (1995), S. 63–75 [18](#)
- [Glatzmaier & Roberts 1995b] Glatzmaier, G. A.; Roberts, P. H.: A three-dimensional self-consistent computer simulation of a geomagnetic field reversal. *Nature* 377 (1995), S. 203–209 [18](#)
- [Glatzmaier & Roberts 1996] Glatzmaier, G. A.; Roberts, P. H.: An anelastic evolutionary geodynamo simulation driven by compositional and thermal convection. *Physica D* 97 (1996), S. 81–94 [31](#)
- [Guyodo & Valet 1999] Guyodo, Y.; Valet, J.-P.: Integration of volcanic and sedimentary records of paleointensity: Constraint imposed by irregular eruption rates. *Geophys. Res. Lett.* 26 (1999), Dezember, S. 3669–3672 [57](#)
- [Harder & Hansen 2005] Harder, H.; Hansen, U.: A finite-volume solution method for thermal convection and dynamo problems in spherical shells. *Geophysical Journal International* 161 (2005), S. 522–532 [15](#)
- [Haugen et al. 2003] Haugen, N. E. L.; Brandenburg, A.; Dobler, W.: Is Nonhelical Hydro-magnetic Turbulence Peaked at Small Scales? *ApJ (Letters)* 597 (2003), November, S. L141–L144 [24](#)

- [Hollerbach 1996] Hollerbach, R.: On the theory of the geodynamo. *Physics of the Earth and Planetary Interiors* 98 (1996), S. 163–185 [73](#)
- [Hollerbach 2003] Hollerbach, R.: The range of timescales on which the geodynamo operates. *Geodynamics Series* 31 (2003), S. 181–192 [18](#)
- [Hollerbach & Jones 1993] Hollerbach, R.; Jones, C. A.: A geodynamo model incorporating a finitely conducting inner core. *Physics of the Earth and Planetary Interiors* 75 (1993), S. 317–327 [73](#)
- [Hoyng et al. 2002] Hoyng, P.; Schmitt, D.; Ossendrijver, M. A. J. H.: A theoretical analysis of the observed variability of the geomagnetic dipole field. *Physics of the Earth and Planetary Interiors* 130 (2002), S. 143–157 [57](#), [67](#), [72](#)
- [Hurlburt et al. 1995] Hurlburt, N. E.; Brummell, N. H.; Toomre, J.: Turbulent Rotating Compressible Convection in Spherical Domains. *Bulletin of the American Astronomical Society* 27 (1995), S. 955–+ [21](#)
- [Jackson 2003] Jackson, A.: Intense equatorial flux spots on the surface of Earth's core. *EGS - AGU - EUG Joint Assembly, Abstracts from the meeting held in Nice, France, 6 - 11 April 2003, abstract #9546* (2003), S. 9546–+ [15](#)
- [Jackson et al. 2003] Jackson, A.; Jonkers, A. R. T.; Manda, M.; Murray, A.: Earth's magnetic field in the early 19th century from French sources. *Geochem. Geophys. Geosys.* 4 (2003), Nr. 7, S. 1054 [10](#)
- [Jackson et al. 2000] Jackson, A.; Jonkers, A. R. T.; Walker, M. R.: Four centuries of geomagnetic secular variation from historical records. *Phil. Trans. R. Soc. Lond.* A358 (2000), S. 957–990 [10](#)
- [Jacobs 2001] Jacobs, J.: The cause of superchrons. *Astronomy and Geophysics* 42 (2001), Dezember, S. 30–+ [9](#), [10](#)
- [Jones 2000] Jones, C. A.: Convection-driven geodynamo models. *Phil. Trans. R. Soc. Lond.* A 358 (2000), S. 873–897 [39](#)
- [Jones et al. 1995] Jones, C. A.; Longbottom, A. W.; Hollerbach, R.: A self-consistent convection driven geodynamo model, using a mean field approximation. *Physics of the Earth and Planetary Interiors* 92 (1995), S. 119–141 [72](#)
- [Jones et al. 2000] Jones, C. A.; Soward, A. M.; Mussa, A. I.: The onset of thermal convection in a rapidly rotating sphere. *Journal of Fluid Mechanics* 405 (2000), S. 157–179 [19](#)
- [Kageyama & Sato 1997a] Kageyama, A.; Sato, T.: Dipole field generation by an MHD dynamo. *Plasma Physics and Controlled Fusion* 39 (1997), S. A83–AA91 [31](#), [73](#)
- [Kageyama & Sato 1997b] Kageyama, A.; Sato, T.: Generation mechanism of a dipole field by a magnetohydrodynamic dynamo. *Physical Review E* 55 (1997), S. 4617–4626 [31](#)
- [Kageyama et al. 1995] Kageyama, A.; Sato, T.; Complexity Simulation Group: Computer simulation of a magnetohydrodynamic dynamo. II. *Physics of Plasmas* 2 (1995), S. 1421–1431 [31](#)
- [Käpylä et al. 2004] Käpylä, P. J.; Korpi, M. J.; Tuominen, I.: Local models of stellar convection: Reynolds stresses and turbulent heat transport. *A&A* 422 (2004), S. 793–816 [47](#), [50](#), [90](#)
- [Keinigs 1983] Keinigs, R. K.: A new interpretation of the alpha effect. *Physics of Fluids* 26 (1983), S. 2558–2560 [60](#)

- [Kitchatinov et al. 1994] Kitchatinov, L. L.; Pipin, V. V.; Rüdiger, G.: Turbulent viscosity, magnetic diffusivity, and heat conductivity under the influence of rotation and magnetic field. *Astronomische Nachrichten* 315 (1994), S. 157–170 [43](#), [47](#)
- [Kitchatinov & Rüdiger 1992] Kitchatinov, L. L.; Rüdiger, G.: Magnetic-field advection in inhomogeneous turbulence. *A&A* 260 (1992), S. 494–498 [62](#)
- [Kono & Roberts 2002] Kono, M.; Roberts, P. H.: Recent geodynamo simulations and observations of the geomagnetic field. *Reviews of Geophysics* 40 (2002), Dezember, S. 4–1 [12](#), [18](#), [19](#), [31](#), [73](#)
- [Kono et al. 2000] Kono, M.; Tanaka, H.; Tsunakawa, H.: Spherical harmonic analysis of paleomagnetic data: The case of linear mapping. *Journal of Geophysical Research* 105 (2000), S. 5817–5834 [5](#)
- [Kono & Tanaka 1995] Kono, M.H.; Tanaka, H.: *Intensity of the geomagnetic field in geological time: A statistical study, in The Earth's Central Part: Its Structure and Dynamics*. Tokyo : T. Yukutake: Terrapub, 1995. – 75–94 S. [7](#)
- [Kotelnikova & Starchenko 2003] Kotelnikova, M. S.; Starchenko, S. V.: Liquid core's heat-mass transfer, rigid core's age and super-rotation. *EGS - AGU - EUG Joint Assembly, Abstracts from the meeting held in Nice, France, 6 - 11 April 2003, abstract #185* (2003), April, S. 185–+ [33](#)
- [Krause & Rädler 1980] Krause, F.; Rädler, K. H.: *Mean-field magnetohydrodynamics and dynamo theory*. Oxford: Pergamon Press, 1980 [51](#), [52](#), [67](#), [73](#), [79](#)
- [Krause & Schmidt 1988] Krause, F.; Schmidt, H.-J.: A low-dimensional attractor for modelling the reversals of the Earth's magnetic field. *Physics of the Earth and Planetary Interiors* 52 (1988), S. 23–29 [10](#), [84](#)
- [Kutzner & Christensen 2000] Kutzner, C.; Christensen, U.: Effects of driving mechanisms in geodynamo models. *Geophys. Res. Lett.* 27 (2000), S. 29–+ [14](#), [15](#), [30](#)
- [Labrosse et al. 2001] Labrosse, S.; Poirier, J.-P.; Le Mouél, J.-L.: The age of the inner core. *Earth and Planetary Science Letters* 190 (2001), S. 111–123 [33](#)
- [Langel & Estes 1982] Langel, R. A.; Estes, R. H.: A geomagnetic field spectrum. *Geophys. Res. Lett.* 9 (1982), S. 250–253 [7](#)
- [Larmor 1919] Larmor, J.: How could a rotating body such as the sun become a magnet? *Rep. Br. Assoc. Adv. Sci. A* (1919), S. 159–160 [2](#)
- [Layer et al. 1996] Layer, Paul W.; Kroner, Alfred ; McWilliams, Michael: An Archean Geomagnetic Reversal in the Kaap Valley Pluton, South Africa. *Science* 273 (1996), Nr. 5277, S. 943–946 [9](#)
- [Levy & Pearce 1991] Levy, E. H.; Pearce, S. J.: Steady state toroidal magnetic field at earth's core-mantle boundary. *Journal of Geophysical Research* 96 (1991), März, S. 3935–3942 [11](#)
- [Lister & Buffett 1995] Lister, J. R.; Buffett, B. A.: The strength and efficiency of thermal and compositional convection in the geodynamo. *Physics of The Earth and Planetary Interiors* 91 (1995), S. 17–30 [14](#)
- [Lund et al. 1998] Lund, S. P.; Acton, G.; Clement, B.; Hastedt, M.; Okada, M.; Williams, T.: Geomagnetic Field excursions occurred often during the last million years. *EOS Trans. Am. Geophys. Union* 79 (1998), S. 178–179 [10](#)
- [Malkus 1968] Malkus, W. V. R.: Precession of the Earth as the Cause of Geomagnetism. *Science* 160 (1968), April, S. 259–264 [13](#)

- [Matsui & Buffett 2005] Matsui, H.; Buffett, B. A.: Sub-grid scale model for convection-driven dynamos in a rotating plane layer. *Physics of the Earth and Planetary Interiors* 153 (2005), S. 108–123 [17](#)
- [Matsushima 2004] Matsushima, M.: Scale similarity of MHD turbulence in the Earth's core. *Earth, Planets, and Space* 56 (2004), Juni, S. 599–605 [17](#)
- [Matsushima 2005] Matsushima, M.: A scale-similarity model for the subgrid-scale flux with application to MHD turbulence in the Earth's core. *Physics of the Earth and Planetary Interiors* 153 (2005), November, S. 74–82 [17](#)
- [Matsushima et al. 1999] Matsushima, M.; Nakajima, T.; Roberts, P. H.: The anisotropy of local turbulence in the Earth's core. *Earth, Planets, and Space* 51 (1999), S. 277–286 [16](#)
- [Maus et al. 2006] Maus, S.; Rother, M.; Stolle, C.; Mai, W.; Choi, S.; Lühr, H.; Cooke, D.; Roth, C.: Third generation of the Potsdam Magnetic Model of the Earth (POMME). *Geochemistry, Geophysics, Geosystems* 7 (2006), S. 7008–+ [6](#)
- [McElhinny 1973] McElhinny, M. W.: *Paleomagnetism and Plate Tectonics*. Cambridge University, Cambridge, England, 1973 [8](#)
- [McMillan 2003] McMillan, D. G.: *Statistical Analyses of Geomagnetic Dipole Variations, Reversals and Geodynamo Simulations*, University of California, San Diego, Diss., 2003 [10](#)
- [Merrill & McFadden 1999] Merrill, R.; McFadden, P.: Geomagnetic polarity transitions. *Rev. Geophys.* 37 (1999), S. 201–226 [8](#)
- [Merrill et al. 1996] Merrill, R. T.; Mc Elhinny, M. W.; Mc Fadden, P. L.: *The Magnetic Field of the Earth: Paleomagnetism, the Core, and the Deep Mantle*. London : Academic Press, 1996 [7](#), [8](#), [9](#)
- [Moffatt 1970] Moffatt, H. K.: Dynamo action associated with random inertial waves in a rotating conducting fluid. *Journal of Fluid Mechanics* 44 (1970), S. 705–719 [86](#)
- [Olson 2002] Olson, P.: Estimates of the Scale of Convection in the Core. In: *American Geophysical Union, Spring Meeting 2002, abstract #U51A-05*, 2002, S. A5–+ [18](#)
- [Olson et al. 1999] Olson, P.; Christensen, U.; Glatzmaier, G. A.: Numerical modeling of the geodynamo: Mechanisms of field generation and equilibration. *Journal of Geophysical Research* 104 (1999), S. 10383–10404 [18](#), [73](#)
- [Olson & Christensen 2002] Olson, P.; Christensen, U. R.: The time-averaged magnetic field in numerical dynamos with non-uniform boundary heat flow. *Geophysical Journal International* 151 (2002), S. 809–823 [90](#), [91](#)
- [Ossendrijver et al. 2001] Ossendrijver, M.; Stix, M.; Brandenburg, A.: Magnetoconvection and dynamo coefficients: Dependence of the alpha effect on rotation and magnetic field. *A&A* 376 (2001), S. 713–726 [21](#), [62](#), [64](#), [66](#), [67](#), [81](#), [99](#)
- [Ossendrijver et al. 2002] Ossendrijver, M.; Stix, M.; Brandenburg, A.; Rüdiger, G.: Magnetoconvection and dynamo coefficients. II. Field-direction dependent pumping of magnetic field. *A&A* 394 (2002), S. 735–745 [62](#)
- [Phillips & Ivers 2001] Phillips, C. G.; Ivers, D. J.: Spectral interactions of rapidly-rotating anisotropic turbulent viscous and thermal diffusion in the Earth's core. *Physics of the Earth and Planetary Interiors* 128 (2001), Dezember, S. 93–107 [17](#)
- [Phillips & Ivers 2003] Phillips, C. G.; Ivers, D. J.: Strong field anisotropic diffusion models for the Earth's core. *Physics of the Earth and Planetary Interiors* 140 (2003), S. 13–28 [17](#)
- [Poirier 1988] Poirier, J. P.: Transport properties of liquid metals and viscosity of the earth's core. *Geophysical Journal* 92 (1988), Januar, S. 99–105 [12](#)

- [Poirier 1994] Poirier, J.-P.: Light elements in the Earth's outer core: A critical review. *Physics of the Earth and Planetary Interiors* 85 (1994), September, S. 319–337 [3](#)
- [Priest 1982] Priest, E. R.: *Solar magneto-hydrodynamics*. Dordrecht, Holland ; Boston : D. Reidel Pub. Co. ; Hingham,, 1982 [23](#), [37](#)
- [Rädler 1980] Rädler, K.-H.: Mean-field approach to spherical dynamo models. *Astronomische Nachrichten* 301 (1980), S. 101–129 [71](#), [72](#)
- [Rädler 1986] Rädler, K.-H.: Investigations of spherical kinematic mean-field dynamo models. *Astronomische Nachrichten* 307 (1986), S. 89–113 [87](#)
- [Roberts 1972] Roberts, G. O.: Dynamo Action of Fluid Motions with Two-Dimensional Periodicity. *Royal Society of London Philosophical Transactions Series A* 271 (1972), S. 411–454 [88](#)
- [Roberts & Glatzmaier 2000] Roberts, P. H.; Glatzmaier, G. A.: Geodynamo theory and simulations. *Reviews of Modern Physics* 72 (2000), S. 1081–1123 [3](#), [8](#), [12](#), [14](#), [15](#), [18](#), [30](#), [32](#), [73](#)
- [Roberts & Stix 1972] Roberts, P. H.; Stix, M.: Ac-Effect Dynamos, by the Buliard-Geffman Formalism. *A&A* 18 (1972), S. 453–+ [80](#)
- [Rüdiger 1978] Rüdiger, G.: On the alpha-effect for slow and fast rotation. *Astronomische Nachrichten* 299 (1978), S. 217–222 [53](#), [86](#)
- [Rüdiger 1980] Rüdiger, G.: Rapidly rotating alpha-squared dynamo models. *Astronomische Nachrichten* 301 (1980), S. 181–187 [87](#)
- [Rüdiger 1989] Rüdiger, G.: *Differential rotation and stellar convection. Sun and the solar stars*. Berlin: Akademie Verlag, 1989, 1989 [42](#)
- [Rüdiger et al. 2005] Rüdiger, G.; Egorov, P.; Kitchatinov, L. L.; Küker, M.: The eddy heat-flux in rotating turbulent convection. *A&A* 431 (2005), S. 345–352 [47](#), [90](#)
- [Rüdiger et al. 2003] Rüdiger, G.; Elstner, D.; Ossendrijver, M.: Do spherical  $\alpha^2$ -dynamos oscillate? *A&A* 406 (2003), S. 15–21 [86](#), [87](#)
- [Rüdiger & Hollerbach 2004] Rüdiger, G.; Hollerbach, R.: *The Magnetic Universe - Geophysical and Astrophysical Dynamo Theory*. Wiley-VCH Verlag Berlin, 2004 [43](#), [46](#)
- [Rüdiger & Kitchatinov 1993] Rüdiger, G.; Kitchatinov, L. L.: Alpha-effect and alpha-quenching. *A&A* 269 (1993), S. 581–588 [52](#), [64](#), [65](#), [92](#)
- [Sarson & Jones 1999] Sarson, G. R.; Jones, C. A.: A convection driven geodynamo reversal model. *Physics of the Earth and Planetary Interiors* 111 (1999), Februar, S. 3–20 [76](#), [90](#)
- [Secco & Schloessin 1989] Secco, R. A.; Schloessin, H. H.: The electrical resistivity of solid and liquid Fe at pressures up to 7 GPa. *Journal of Geophysical Research* 94 (1989), Mai, S. 5887–5894 [12](#)
- [Soward 1974] Soward, A. M.: A Convection-Driven Dynamo. I. The Weak Field Case. *Royal Society of London Philosophical Transactions Series A* 275 (1974), S. 611–646 [59](#), [74](#)
- [St. Pierre 1996] St. Pierre, M. G.: On the locale nature of turbulence in the Earths's outer core. *Geophys. Astrophys. Fluid Dynam.* 83 (1996) [16](#)
- [Stacey 1992] Stacey, F. D.; ed. 3rd (Hrsg.): *Physics of the Earth*. Brisbane, Australia : Brookfield, 1992 [14](#)
- [Steenbeck & Krause 1966] Steenbeck, M.; Krause, F.: The Generation of Stellar and Planetary Magnetic Fields by Turbulent Dynamo Action. *Zeitschrift für die Naturforschung Teil A* 21 (1966), S. 1285–1296 [18](#), [51](#)

- [Steenbeck & Krause 1969a] Steenbeck, M.; Krause, F.: On the Dynamo Theory of Stellar and Planetary Magnetic Fields. I. AC Dynamos of Solar Type. *Astronomische Nachrichten* 291 (1969), S. 49–84 [71](#)
- [Steenbeck & Krause 1969b] Steenbeck, M.; Krause, F.: On the Dynamo Theory of Stellar and Planetary Magnetic Fields. II. DC Dynamos of Planetary Type. *Astronomische Nachrichten* 291 (1969), S. 271–286 [71](#), [79](#)
- [Stefani & Gerbeth 2001] Stefani, F.; Gerbeth, G.: A toy model for inverse dynamo theory. *Physics of the Earth and Planetary Interiors* 128 (2001), S. 109–124 [72](#)
- [Stefani & Gerbeth 2003] Stefani, F.; Gerbeth, G.: Oscillatory mean-field dynamos with a spherically symmetric, isotropic helical turbulence parameter  $\alpha$ . *Physical Review E* 67 (2003), S. 027302 [72](#)
- [Stefani & Gerbeth 2005] Stefani, F.; Gerbeth, G.: Asymmetric Polarity Reversals, Bimodal Field Distribution, and Coherence Resonance in a Spherically Symmetric Mean-Field Dynamo Model. *Physical Review Letters* 94 (2005), Mai, Nr. 18, S. 184506–+ [72](#)
- [Stellmach & Hansen 2004] Stellmach, S.; Hansen, U.: Cartesian convection driven dynamos at low Ekman number. *Physical Review E* 70 (2004), Nr. 5, S. 056312–+ [21](#), [39](#), [40](#), [46](#), [54](#)
- [Stone & Norman 1992a] Stone, J. M.; Norman, M. L.: ZEUS-2D: A radiation magnetohydrodynamics code for astrophysical flows in two space dimensions. I - The hydrodynamic algorithms and tests. *Astrophys. J.-Suppl. Ser.* 80 (1992), S. 753–790 [95](#), [97](#)
- [Stone & Norman 1992b] Stone, J. M.; Norman, M. L.: ZEUS-2D: A Radiation Magnetohydrodynamics Code for Astrophysical Flows in Two Space Dimensions. II. The Magnetohydrodynamic Algorithms and Tests. *Astrophys. J.-Suppl. Ser.* 80 (1992), S. 791–+ [95](#), [97](#)
- [Stoner et al. 2005] Stoner, J. S.; Francus, P.; Bradley, R. S.; Patridge, W.; Abbott, M. A.; Retelle, M. J.; Lamoureux, S.; Channell, J. E.: Abrupt Shifts in the Position of the North Magnetic Pole From Arctic lake Sediments: Relationship to Archeomagnetic Jerks. *AGU Fall Meeting Abstracts* (2005) [7](#)
- [Strassmeier 2002] Strassmeier, K. G.: Doppler images of starspots. *Astronomische Nachrichten* 323 (2002), Juli, S. 309–316 [15](#)
- [Strassmeier 2006] Strassmeier, K. G.: Doppler Imaging of Rapidly-Rotating M Stars. *Astrophysics and Space Science* (2006), Juli, S. 35–+ [15](#)
- [Tauxe 1993] Tauxe, L.: Sedimentary records of relative paleointensity of the geomagnetic field: Theory and practice. *Reviews of Geophysics* 31 (1993), S. 319–354 [5](#)
- [Tilgner 2004] Tilgner, A.: Small Scale Kinematic Dynamos: Beyond the  $\alpha$ -Effect. *Geophys. Astrophys. Fluid Dynam.* 98 (2004), S. 225–234 [88](#)
- [Tilgner 2005] Tilgner, A.: Precession driven dynamos. *Physics of Fluids* 17 (2005), S. 4104–+ [13](#)
- [van Leer 1977] van Leer, B.: Towards the ultimate conservative difference scheme: IV. A new approach to numerical convection. *Journal of Computational Physics* 23 (1977), S. 276–299 [97](#)
- [Weiss et al. 2004] Weiss, N. O.; Thomas, J. H.; Brummell, N. H.; Tobias, S. M.: The Origin of Penumbral Structure in Sunspots: Downward Pumping of Magnetic Flux. *ApJ.* 600 (2004), S. 1073–1090 [63](#)

- [Wicht 2002] Wicht, J.: Inner-core conductivity in numerical dynamo simulations. *Physics of the Earth and Planetary Interiors* 132 (2002), S. 281–302 [74](#)
- [Wicht 2005] Wicht, J.: Palaeomagnetic interpretation of dynamo simulations. *Geophysical Journal International* 162 (2005), S. 371–380 [19](#), [83](#)
- [Zhang & Gubbins 2000] Zhang, K.; Gubbins, D.: Is the geodynamo process intrinsically unstable? *Geophysical Journal International* 140 (2000), S. F1–F4 [40](#)
- [Zhang & Jones 1994] Zhang, K.; Jones, C. A.: Convective motions in the Earth's fluid core. *Geophys. Res. Lett.* 21 (1994), S. 1939–1942 [28](#)
- [Ziegler 1998] Ziegler, U.: NIRVANA+: An adaptive mesh code for compressible MHD. *Computer Physics Communications* 109 (1998), S. 111 [23](#), [95](#), [97](#)
- [Ziegler 1999] Ziegler, U.: A Cartesian adaptive mesh code for compressible MHD. *Comp. Phys. Comm.* 116 (1999), S. 65 [23](#), [95](#)
- [Ziegler 2002] Ziegler, U.: Box simulations of rotating magnetoconvection. Spatiotemporal evolution. *A&A* 386 (2002), S. 331–346 [21](#), [44](#), [53](#), [67](#), [99](#)
- [Ziegler & Rüdiger 2000] Ziegler, U.; Rüdiger, G.: Angular momentum transport and dynamo-effect in stratified, weakly magnetic disks. *A&A* 356 (2000), S. 1141–1148 [67](#)
- [Ziegler & Rüdiger 2001] Ziegler, U.; Rüdiger, G.: Shear rate dependence and the effect of resistivity in magneto-rotationally unstable, stratified disks. *A&A* 378 (2001), S. 668–678 [81](#)
- [Ziegler & Rüdiger 2003] Ziegler, U.; Rüdiger, G.: Box simulations of rotating magnetoconvection. Effects of penetration and turbulent pumping. *A&A* 401 (2003), S. 433–442 [16](#), [63](#)