

Artikel erschienen in:

Jolanda Hermanns (Hrsg.)

PSI-Potsdam

Ergebnisbericht zu den Aktivitäten im Rahmen der Qualitätsoffensive Lehrerbildung (2019 – 2023)

(Potsdamer Beiträge zur Lehrkräftebildung und Bildungsforschung ; 3)

2023 – 393 S.

ISBN 978-3-86956-568-2

DOI <https://doi.org/10.25932/publishup-60187>

Empfohlene Zitation:

Ulrich Kortenkamp; Ana Kuzle; Karen Reitz-Koncebovskis: Fachdidaktisches Wissen aus dem Fachwissen generieren: Design Research zur Verknüpfung von Fachwissenschaft und Fachdidaktik in der Lehrkräftebildung Mathematik, In: Jolanda Hermanns (Hrsg.): PSI-Potsdam. Ergebnisbericht zu den Aktivitäten im Rahmen der Qualitätsoffensive Lehrerbildung (2019–2023) (Potsdamer Beiträge zur Lehrkräftebildung und Bildungsforschung 3), Potsdam, Universitätsverlag Potsdam, 2023, S. 171–191.

DOI <https://doi.org/10.25932/publishup-61760>



Soweit nicht anders gekennzeichnet, ist dieses Werk unter einem Creative-Commons-Lizenzvertrag Namensnennung 4.0 lizenziert. Dies gilt nicht für Zitate und Werke, die aufgrund einer anderen Erlaubnis genutzt werden. Um die Bedingungen der Lizenz einzusehen, folgen Sie bitte dem Hyperlink:

<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.de>

Fachdidaktisches Wissen aus dem Fachwissen generieren

Design Research zur Verknüpfung von Fachwissenschaft
und Fachdidaktik in der Lehrkräftebildung Mathematik

Ulrich Kortenkamp¹, Ana Kuzle² & Karen Reitz-Koncebovski^{3}*

¹ Universität Potsdam, 0000-0002-5577-8819

² Universität Potsdam, 0000-0001-8465-0251

³ Universität Potsdam, 0000-0002-9340-472X

ZUSAMMENFASSUNG: Das Mathematik-Teilprojekt SPIES-M zielt auf eine stärkere Professionsorientierung und die Verknüpfung von Fachwissenschaft und Fachdidaktik in der universitären Lehrkräftebildung. Zu allen großen Inhaltsgebieten der Mathematik wurden neue Lehrveranstaltungen konzipiert und in den Studienordnungen sämtlicher Lehrämter Mathematik an der Universität Potsdam implementiert. Für die Konzeption wurden theoriebasiert Gestaltungsprinzipien herausgearbeitet, die sowohl für das Design als auch für die Evaluation und Weiterentwicklung der Lehrveranstaltungen nach dem Design-Research-Ansatz genutzt werden können. Die Umsetzung der Gestaltungsprinzipien wird am Beispiel der Fundamentalen Idee der Proportionalität verdeutlicht und dabei aufgezeigt, wie Studierende dazu befähigt werden können, fachdidaktisches Wissen aus fachmathematischen Inhalten zu generieren. Die Entwicklung des Professionswissens der Studierenden wird mithilfe unterschiedlicher Instrumente untersucht, um Rückschlüsse auf die Wirksamkeit der neu konzipierten Lehrveranstaltungen zu ziehen. Für die Untersuchungen im Mixed-Methods-Design werden neben Beobachtungen in Lehrveranstaltungen eigens konzipierte Wissenstests, Gruppeninterviews, Unterrichtsentwürfe aus Praxisphasen und Lerntagebücher genutzt. Die Studierendenperspektive wird durch Befragungen zur wahrgenommenen (Berufs-)Relevanz der Lehrveranstaltungen erhoben. Weiteres wesentliches Element der Begleitforschung ist die kollegiale Supervision durch sogenannte „Spies“ (Spione), die die Veranstaltungen kriteriengeleitet beobachten und anschließend gemeinsam mit den Dozierenden reflektieren. Die bisherigen Ergebnisse werden hier präsentiert und hinsichtlich ihrer Implikationen diskutiert. Die im Projekt entwickelten Gestaltungsprinzipien als Werkzeug für Design und Evaluation sowie das Spies-Konzept der

* Alphabetische Reihenfolge, alle drei Autor:innen haben in gleichem Maße zu diesem Artikel beigetragen.

kollegialen Supervision werden für die Qualitätsentwicklung von Lehrveranstaltungen zum Transfer vorgeschlagen.

KEYWORDS: Lehrkräftebildung Mathematik, Professionswissen, Verknüpfung Fachwissenschaft und Fachdidaktik, Design Research, Gestaltungsprinzipien, kollegiale Supervision

ABSTRACT: The mathematics sub-project SPIES-M aims at a stronger professional orientation and the linking of subject-specific knowledge and subject-specific didactics in university teacher training. New courses were designed for all major mathematical content areas and implemented in the academic regulations of all mathematics teacher training programs at the University of Potsdam. For the course design, theory-based design principles were developed, which can be used both for the design, and for the evaluation and further development of the courses according to the design-research approach. The implementation of the design principles is exemplary illustrated for the fundamental idea of proportionality, by showing how students can be empowered to generate subject didactic knowledge from subject mathematical content. For this study, an explorative mixed-methods design was chosen, in which the development of the students' professional knowledge was examined with the help of different instruments in order to draw conclusions about the effectiveness of the newly designed courses. In addition to course observations, specially designed knowledge tests, group interviews, lesson plans from practical phases, and learning diaries were used. The students' perspective was examined through surveys on the perceived (professional) relevance of the courses. Another important element of the accompanying research was the collegial supervision by so-called „spies“, who observed the courses according to criteria and then reflected on them together with the course lecturers. Here, the current results are presented and discussed regarding their diverse implications. Lastly, the developed design principles as a tool for the design and evaluation of the mathematics courses as well as the spies concept of collegial supervision are proposed for transfer for the quality development of courses in general.

KEYWORDS: Teacher training mathematics, professional knowledge, linking of subject science and didactic, design research, design elements, collegial supervision

1 EINLEITUNG

Die fachwissenschaftliche Ausbildung angehender Mathematiklehrkräfte dadurch gewinnbringender zu gestalten, dass ein Fokus auf das berufsspezifische Fachwissen, modelliert als *erweitertes Fachwissen für den schulischen Kontext* (Woehlecke et al., 2017), gerichtet wird – das war Anliegen des Mathematik-Teilprojekts in der ersten Phase der Qualitätsoffensive PSI-Potsdam (Reitz-Koncebovski et al., 2018). Aufbauend auf diesen Vorarbeiten wurde 2019 für die zweite Projektphase im Rahmen des Schwerpunkts 1 Professionalisierung das fakultätsübergreifende Projekt SPIES-M – Spiralcurriculum und Erweitertes Schulwissen im Fach Mathematik gestartet; beteiligt sind die Humanwissenschaftliche und die Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät, an denen die Ausbildung der Mathematiklehrkräfte für die Primarstufe bzw. Sekundarstufe angesiedelt ist. SPIES-M

zielt, über die berufsfeldbezogene Weiterentwicklung der fachwissenschaftlichen Ausbildung hinaus, auf eine stärkere Verknüpfung von Fachwissenschaft und Fachdidaktik in neu zu entwickelnden Lehrveranstaltungen, die in den Studienordnungen aller Lehrämter Mathematik an der Universität Potsdam verankert werden sollen. Die Lehramtsstudierenden sollen stärker als dies durch die traditionell isolierte Vermittlung von mathematischem Fachwissen und fachdidaktischem Wissen möglich ist, dazu befähigt werden, das im Studium erworbene mathematische Fachwissen in der Unterrichtspraxis anzuwenden. Für die Konzeption der neuen Lehrveranstaltungen wurden theoriebasiert Gestaltungsprinzipien herausgearbeitet (Reitz-Koncebovski et al., 2020), die sowohl für das Design als auch für die Evaluation und Weiterentwicklung von Lehrveranstaltungen nach dem Design-Research-Ansatz (Prediger, 2019) nutzbar sein sollen. Die Forschung im Rahmen von SPIES-M zielt einerseits auf die Auswertung der Lehrveranstaltungen durch „Spies“ (Spione), die die Veranstaltungen kriteriengeleitet beobachten und anschließend mit den Dozierenden in kollegialer Supervision reflektieren, andererseits auf die Untersuchung der Wirksamkeit neu konzipierter Lehrveranstaltungen, indem die Entwicklung des Professionswissens der Studierenden mit geeigneten Instrumenten analysiert wird.

Im vorliegenden Beitrag stellen wir ein zentrales inhaltliches Konzept unserer Arbeit in den Mittelpunkt: die Leitlinie *fachdidaktisches Wissen aus dem Fachwissen generieren*, die die inhaltliche Struktur des in den Lehrveranstaltungen vermittelten Professionswissens wesentlich prägt. Basis unserer Arbeit sind Theorien zum Professionswissen von Lehrkräften, speziell zum berufsspezifischen Fachwissen, die wir im ersten Abschnitt thematisieren und aus denen wir Gestaltungsprinzipien für unsere Neuentwicklungen ableiten. Ein besonderer Fokus liegt dabei auf dem mit der genannten Leitlinie korrespondierenden Prinzip *Fundamentale Ideen mit Grundprinzipien der Mathematikdidaktik verknüpfen* (Reitz-Koncebovski et al., 2020). Wie fachdidaktisches Wissen aus dem Fachwissen generiert werden kann, wird im folgenden Abschnitt mit einem markanten Beispiel veranschaulicht: *Proportionalität* im Kontext von Lehrveranstaltungen zur Arithmetik, Geometrie, Stochastik und Algebra. Anschließend berichten wir Erfahrungen aus den Neukonzeptionen und deren Verankerung in den Studienordnungen verschiedener Lehrämter 2018 und 2020 sowie deren Weiterentwicklung in bis zu vier Design-Research-Zyklen während der Projektlaufzeit. Die Prozesse von Design, Evaluation und Re-Design transparent zu machen, ist Hauptanliegen des vorliegenden Buchkapitels. Die in diesem Rahmen angestoßene Forschung zur Wirksamkeit der neuentwickelten Lehrveranstaltungen, insbesondere Forschung zur Anwendung des in universitären Lehrveranstaltungen vermittelten fachlichen und fachdidaktischen Wissens in der Praxis – das heißt in der Planung, Durchführung und Reflexion von Mathematikunterricht – ist nicht abgeschlossen. Unsere bisherigen Erfahrungen bieten wir im letzten Ab-

schnitt zusammen mit den Gestaltungsprinzipien und dem SPIES-Konzept für kollegiale Supervision als Instrument zur Qualitätsentwicklung universitärer Lehre für den Transfer an.

2 THEORETISCHE BASIS

Ausgangspunkt für unsere Entwicklungen sind existierende und in Vorläuferprojekten entwickelte Theorien zum Professionswissen von Lehrkräften, die wir im Folgenden kurz darstellen. Weitere Details befinden sich in Reitz-Koncebovski et al. (2020).

Zunächst gilt es, das für Lehrkräfte relevante Wissen genauer zu spezifizieren. Für eine moderne Darstellung der Konzeptualisierungen von mathematikspezifischen Lehrkräftewissen verweisen wir auf Neubrand (2018). Die Grundlage für unsere Arbeiten bilden die Beiträge von Shulman (1986), der zwischen Fachwissen (*subject matter knowledge, SMK*) und fachdidaktischem Wissen (*pedagogical content knowledge, PCK*) unterscheidet, sowie von Ball et al. (2008), die das Konstrukt *mathematical knowledge for teaching (MKT)* einführen. Insbesondere beziehen wir uns auf Wissenskomponenten, die speziell und exklusiv für Lehrkräfte relevant sind, das *specialized content knowledge (SCK)* bei Ball et al. (2008), oder das von Heinze et al. (2016) und Dreher et al. (2018) beschriebene *school-related content knowledge (SRCK)*. Beide Konstrukte unterscheiden sich im Detail, insbesondere in der Abgrenzung zu anderen Wissenskomponenten. Ball et al. (2008) unterscheiden SCK von *common content knowledge*, welches nicht spezifisch für Lehrkräfte und Lehren benötigt wird. Dreher et al. (2018) nehmen die Unterscheidung des Niveaus zwischen schulischem und akademischem Wissen als Basis und beschreiben SRCK als das Wissen, über das Lehrkräfte verfügen müssen, um zwischen diesen Ebenen zu vermitteln. Im PSI-Projekt wurde diese Kategorie als *Erweitertes Fachwissen für den schulischen Kontext* genauer in drei Facetten aufgefächert, nämlich das (1) Wissen über Konzepte und ihre Anwendung im jeweiligen Fach, das (2) Wissen über Erkenntnisprozesse unter Einbezug von Theorie, Fachsprache, Erkenntnis- und Gültigkeitsprinzipien im Fach und das (3) Wissen, um sinnvoll und vorausschauend zu reduzieren (Woehlecke et al., 2017).

Beiden Ansätzen gemeinsam ist die Aussage, dass Lehrkräfte spezielles auf fachliche Lehr-Lern-Prozesse bezogenes Wissen benötigen, um Beziehungen zwischen verschiedenen mathematischen Inhalten zu sehen und herzustellen, mathematische Ideen auf verschiedenartigen Wegen zu repräsentieren und zu erklären und curriculare Entscheidungen zu begründen. Im Folgenden sind wir besonders an fachdidaktischem Wissen interessiert, welches aus dem Fach Mathematik selbst abgeleitet werden kann (Carrillo-Yañez et al., 2018). Wei-

ter folgen wir der von Ball et al. (2008) hinsichtlich des fachdidaktischen Wissens vorgenommenen Unterscheidung in *knowledge of content and students* und *knowledge of content and teaching*, also der getrennten Sicht auf Lernende und Lehrende.

Reitz-Koncebovski et al. (2020) übertragen die Facetten des MKT in Gestaltungsprinzipien, die für einen neuen Typus von Veranstaltungen in der universitären Lehrkräftebildung umgesetzt werden sollen, um Fachwissenschaft und Fachdidaktik zu integrieren. Das Ziel ist dabei, über die Verknüpfung dieser beiden Wissenskomponenten nicht nur beide gemeinsam zu lehren, sondern Studierende sogar in die Lage zu versetzen, selbst fachdidaktisches Wissen aus ihrem Fachwissen zu generieren. Diese Kompetenz geht über die bisherigen Anforderungen an Lehrkräfte hinaus. Dies legitimiert aber nicht nur die fachwissenschaftlichen Inhalte, sondern versetzt die Studierenden idealerweise auch in die Lage, später im Beruf im Sinne eines lebenslangen Lernens immer wieder auf neue Anforderungen und didaktische Herausforderungen zu reagieren.

Charakteristisch für die neuen Veranstaltungen ist, dass sie sich auf essentielle Inhalte sowohl der Fachdidaktik als auch der Fachwissenschaften fokussieren. Dies geschieht im Sinne eines exemplarischen Lernens und überträgt dieses Prinzip von der Unterrichtsebene (Klafki, 1958; Wagenschein, 1959) auf die universitäre Lehre. Die Auswahl der *fachlichen* Inhalte (Gestaltungsprinzip 1) orientiert sich an *Fundamentalen Ideen*. Diese verknüpfen sowohl horizontal mathematische Sachgebiete als auch vertikal verschiedene Niveaustufen. Durch eine Stabilität über die Zeit sind sie langfristig relevant und durch ihre sprachliche Verankerung und lebensweltliche Bedeutung sind sie sinnstiftend (Schreiber, 1983; Schweiger, 1992; Schwill, 1993, 1995). Diese Fundamentalen Ideen eignen sich besonders für die Umsetzung eines Spiralcurriculums (Bruner, 1977) und beantworten Fragen nach der Signifikanz der fachlichen Inhalte, zum Beispiel die Frage, warum Bruchrechnung in der Schule überhaupt noch unterrichtet wird (Dreher et al., 2018). Weiterhin liefert die Prozesssicht auf fachliche Inhalte (Gestaltungsprinzip 2), das heißt der Blick auf typische mathematische Methoden und Denkweisen (Müller et al., 2003), Anhaltspunkte für die Stoffauswahl, die Mathematik erfahrbar machen kann. Die Auswahl der *fachdidaktischen* Inhalte (Gestaltungsprinzip 3) orientiert sich an fachdidaktischen Grundprinzipien, wie zum Beispiel der Nutzung von mentalen Modellen (Prediger, 2008; vom Hofe, 1995), der Nutzung und Verknüpfung verschiedener Darstellungen und Repräsentationen, und dem Modellieren der realen Welt. Auf der Prozessebene werden zwei verschiedene methodische Ansätze verfolgt, um diese (fach-)didaktischen Prinzipien auch in der Hochschullehre zu implementieren. Zum einen (Gestaltungsprinzip 4) wird der „pädagogische Doppeldecker“ (Wahl, 2013) eingesetzt, bei dem die Lehrenden didaktische Kompetenzen nicht nur „predigen“, sondern selbst einsetzen. So kann zum Beispiel die Notwendig-

keit und Nützlichkeit des Transfers zwischen enaktiven, ikonischen und symbolischen Darstellungen (Bruner, 1977) immer wieder am Beispiel des Transfers zwischen verschiedenen Repräsentationsformen in der eigenen Lehre deutlich werden. Zum anderen (Gestaltungsprinzip 5) wird ein Prinzip genutzt, welches Lernprozesse von Schülerinnen und Schülern für Lehramtsstudierende selbst erfahrbar macht: In speziell gestalteten Lernsituationen können Studierende die Lernhürden von Schülerinnen und Schülern nacherleben. Dies geschieht durch die Beschäftigung mit fachlichen Inhalten, die für die Studierenden ähnlich herausfordernd sind wie vergleichbare schulische Inhalte für die Schülerinnen und Schüler. Dadurch wird der Rand ihrer eigenen Zone der nächsten Entwicklung (Wygotski, 1987) dem der typischen Entwicklungszonen von Schülerinnen und Schülern nachgebildet. Kortenkamp und Goral (2017) zeigen dies am Beispiel des konzeptuellen Verständnisses von Stellenwertsystemen mit Hilfe von Mehrfachüberträgen bei der Addition von Zahlen in nicht-dezimalen Basen. Diese Idee korrespondiert mit dem Bereich des *knowledge of content and learning* des PCK (Ball et al., 2008), da es Lehramtsstudierende dazu befähigt, die Lernendenperspektive einzunehmen.

In Abbildung 1 werden die so gewonnenen Gestaltungsprinzipien tabellarisch strukturiert und über ein Querschnittsprinzip miteinander weiter verknüpft: Das Explizieren aller verwendeten Gestaltungsprinzipien auf einer Metaebene. Es genügt also nicht, den fünf Gestaltungsprinzipien zu folgen, sondern zusätzlich hat die Evaluation ergeben, dass es hilfreich ist, in der Veranstaltung immer wieder darauf hinzuweisen, *dass, wie* und *warum* die fünf Gestaltungsprinzipien umgesetzt werden.

Zusammenfassend zielen die Gestaltungsprinzipien darauf ab,

- ◆ die „doppelte Diskontinuität“ (Hefendehl-Hebecker, 2013; Klein, 1908) in der Lehrkräftebildung Mathematik zu überwinden,
- ◆ durch den Fokus auf das erweiterte Fachwissen für den schulischen Kontext (Heinze et al., 2016; Woehlecke et al., 2017) die Sinnhaftigkeit des fachlichen Studiums für die Studierenden erfahrbar zu machen, und
- ◆ die Trennung von Fachwissenschaft und Fachdidaktik, die in vielen universitären Ausbildungsprogrammen für Lehrkräfte zu beobachten ist und auch explizit in studentischen Evaluationen an der Universität Potsdam genannt wurde, zu überwinden.

Schließlich wurden aus den Gestaltungsprinzipien Designrichtlinien entwickelt, anhand derer die Veranstaltungen neu konzipiert und in mehreren Zyklen überarbeitet wurden. Zudem konnten auf dieser Basis auch Testinstrumente für die Erhebung des Professionswissens der Lehramtsstudierenden entwickelt werden. Für die folgenden Überlegungen besonders relevant ist das zusätzlich entwickelte

Abbildung 1 Strukturierung der Gestaltungsprinzipien nach Inhalt, Prozess, Fachdidaktik und Fachwissenschaft

	Inhalte	Prozesse
Fachwissen- schaft	(1) Fundamentale Ideen der Mathematik verfolgen	(2) Mathematik als Handlung erfahrbar machen
Fachdidaktik	(3) Fundamentale Ideen mit Grundprinzipien der Mathematikdidaktik verknüpfen	(4) „Pädagogischen Doppeldecker“ in der Hochschullehre realisieren
		(5) Lernprozesse von Schüler:innen erfahrbar machen

(x) Querschnittsprinzip: auf einer *Metaebene* Zusammenhänge explizit machen

Instrument eines Beobachtungsbogens für die kollegiale Supervision von Veranstaltungen.

3 KONZEPTION UND IMPLEMENTIERUNG

Um das Prinzip der Verknüpfung von Fachwissenschaft und Fachdidaktik im universitären Curriculum der Lehrkräftebildung Mathematik durchgehend zu realisieren, wurden neue einführende Lehrveranstaltungen in alle großen Inhaltsgebiete der Mathematik konzipiert (Reitz-Koncebovski et al., 2020) und zunächst in den Studienordnungen 2018 für die Lehrämter Primarstufe mit Fach Mathematik sowie Primarstufe mit Schwerpunkt Inklusion verankert: die Bachelor-Lehrveranstaltungen *Arithmetik und ihre Didaktik I* und *II* sowie *Geometrie und ihre Didaktik I* und *II* und die Master-Lehrveranstaltungen *Algebra und ihre Didaktik* sowie *Stochastik und ihre Didaktik*.

In den neu eingeführten Studiengängen Förderpädagogik (mit weiterem Fach Deutsch, Englisch, Mathematik, Sachunterricht oder Sport) steht laut Studienordnungen 2020 ebenfalls die Lehrveranstaltung *Arithmetik und ihre Didaktik I* im Stundenplan des ersten Semesters. Studierende der Förderpädagogik mit Fach Mathematik absolvieren zusätzlich die Lehrveranstaltung *Arithmetik und ihre Didaktik II* als Basis für die stärker fachorientierten Lehrveranstaltungen Analysis und Lineare Algebra, die sie in den folgenden Semestern zusammen mit den Studierenden des Lehramts Mathematik für die Sekundarstufe besuchen.

In den Studienordnungen 2020 für den ebenfalls neu eingerichteten Studiengang Mathematik und Physik im Verbund sowie für die Lehrämter Mathematik für die Sekundarstufen I und II wurden die Inhalte der fachmathematischen Lehr-

veranstaltungen für die Studieneingangsphase in den Modulen *Lineare Algebra und Analysis I* und *II* neu geordnet mit dem Ziel einer stärkeren Fokussierung auf inhaltliche Querverbindungen und Bezüge zur Schulmathematik. Zudem wurde für den Abschluss des Bachelorstudiums ein neues Projektmodul eingeführt, das explizit den Titel *Erweitertes Fachwissen für den schulischen Kontext* trägt. Damit wurde die fachwissenschaftliche Ausbildung für die Sekundarstufenlehrämter deutlich in Richtung einer stärkeren Professionsorientierung weiterentwickelt. Die Verknüpfung zwischen Fachwissenschaft und Fachdidaktik bleibt nach diesen Studienordnungen Aufgabe der fachdidaktischen Lehrveranstaltungen.

4 IDEALTYPISCHE REALISIERUNG: BEISPIEL „PROPORTIONALITÄT“

Zur Verdeutlichung der Umsetzung der Gestaltungsprinzipien und der veranstaltungsübergreifenden Realisierung wählen wir die Fundamentale Idee der Proportionalität als Beispiel. An ihr kann auch für fachfremde Personen gut dargestellt werden, wie Zusammenhänge und der fachmathematische Kern des Inhalts genutzt werden können, um Studierende dazu zu befähigen, fachdidaktisches Wissen aus fachmathematischen Inhalten zu generieren.

Proportionalität ist die einfachste nicht-triviale Beziehung zwischen zwei Größen. Sie kann algebraisch durch die Gleichung $y = a \cdot x$ beschrieben werden – es handelt sich also um einen multiplikativen Zusammenhang zwischen einer Eingangsgröße x und einer Ausgangsgröße y . Diese Beschreibung geht aber bereits weit über das intuitive Begriffsverständnis hinaus und ist für Nicht-Mathematiker:innen schon schwer zugänglich. Tatsächlich gibt es auch viele deutlich sinnvollere Zugänge:

- ◆ Da es sich um eine Multiplikation handelt, können Grundvorstellungen (vom Hofe, 1995) zur Multiplikation genutzt werden: Wenn etwas a mal wiederholt wird, dann hängt das Ergebnis proportional von der einzelnen Aktion ab. Spare ich beispielsweise jede Woche einen bestimmten Betrag ein, und jemand anderes spart jede Woche das Doppelte dieses Betrages, so ist der insgesamt gesparte Betrag der anderen Person auch stets das Doppelte des selbst eingesparten Betrags.¹ Hier greifen wir auf den arithmetischen Aspekt innerhalb der Leitidee Zahlen und Operationen zurück.

1 Dieser Satz würde durch die Verwendung algebraischer Schreibweisen tatsächlich einfacher.

- ◆ In der Leitidee Größen und Messen sind proportionale Zusammenhänge allgegenwärtig, zum Beispiel bei den typischen Aufgaben zur Preisbestimmung: Wenn 1,5 kg Kartoffeln 4 € kosten – was kosten dann 6 kg Kartoffeln? Diese Zusammenhänge sind zwar meistens nicht authentisch, da sie stark vereinfachen (die Preise verändern sich üblicherweise durch Mengenrabatt oder andere Effekte) und unrealistische Situationen schaffen (niemand kauft 567 kg Kartoffeln für 1 512 €), sind aber grundlegend für spätere, komplexere Zusammenhänge. Hierbei muss aber der Effekt der sogenannten *Illusion of Linearity* (De Bock et al., 2007) beachtet werden, eine Übergeneralisierung dieses Modells auf Situationen, die nicht proportional beschrieben werden können. Eine bekannte Frage, um dieses Problem zu verdeutlichen ist: „Ein Containerschiff braucht drei Tage von Hamburg nach Casablanca – wie lange brauchen fünf Containerschiffe?“
- ◆ Proportionale Gleichungen in der Leitidee Algebra dienen der Modellierung proportionaler Zusammenhänge und dem Lösen von (Sach-)Aufgaben in diesem Kontext. Hierbei wird die rechnerische Methode des Dreisatzes mit dem Werkzeug algebraischer Umformungen zu einer allgemeineren, symbolischen Methode erweitert, mit der auch Situationen erfasst werden können, die mehrere proportionale Zusammenhänge simultan beinhalten. Diese Zugänge sind für die spätere Behandlung im Spiralcurriculum wichtig: Mit Hilfe von linearen Gleichungssystemen können weitergehende Fragen beantwortet werden. In der linearen Algebra der Sekundarstufe II bzw. im Studium entspricht die Unterscheidung von homogenen und inhomogenen Gleichungssystemen dann den proportionalen und linearen Zusammenhängen.
- ◆ In der Geometrie (und in der Kunst) steht Proportion für einen speziellen Zusammenhang zwischen verschiedenen gemessenen Längen. Proportion bedeutet, dass das Verhältnis von bestimmten Längen konstant bleibt, und damit die Form (im Gegensatz zur Größe) unverändert ist. So stehen bei einem Quadrat die Länge der Seiten und der Diagonalen immer im Verhältnis $1 : \sqrt{2}$, egal, wie groß es ist. Hinter dieser Beobachtung stecken im Wesentlichen die Strahlensätze, die für zentrische Streckungen genau diese Unveränderlichkeit der Verhältnisse besagen.

Aus diesen nicht erschöpfenden Beispielen wird ersichtlich, dass es sich bei Proportionalität tatsächlich um eine Fundamentale Idee handelt: Sie verknüpft verschiedene Sachgebiete der Mathematik, sie ist auf vielen verschiedenen Niveaustufen zugänglich und notwendig, sie ist als eine schon in der Antike bekannte Idee beständig über die Zeit, und sie erschließt den Sinn der mathematischen Operation der Multiplikation.

In einem Beispiel aus einer Kombinations-Lehrveranstaltung zu den Leitideen Größen und Messen und Daten und Zufall kann man nun gut beobachten, wie

aus dem mathematischen Wissen über Proportion ein fachdidaktischer Zugang generiert wird, der dann übertragbar auf andere fachliche Inhalte ist. Die Studierenden erhielten die Aufgabe, in einer Sitzung der Veranstaltung mit Hilfe verschiedener Messwerkzeuge (z. B. Zollstock, Lineal, Maßband, Schieblehre, Laser-Entfernungsmesser) die Durchmesser und Radien von Kreisen, die sie in der Umwelt (auf dem Campus und in den Gebäuden) finden, zu messen und in einer Tabelle festzuhalten. Nach dieser Explorationsphase wurden die gesammelten Ergebnisse zunächst in Gruppen, danach im Plenum diskutiert. Aus dem fachlichen Wissen zur Kreisumfangsformel und zum Durchmesser ist bekannt, dass beide Werte proportional zum Kreisradius sind, somit auch proportional zueinander, mit der Kreiszahl π als Proportionalitätsfaktor. Mit Hilfe der Tabellenkalkulation ist es leicht möglich, alle gemessenen Wertepaare jeweils in Beziehung zu setzen und ihr Verhältnis auszurechnen. Dieses Verhältnis sollte dann zumindest in guter Näherung immer π ergeben – was allerdings nicht der Fall ist. Die Studierenden stellen selbst fest, welche Fehlerquellen bei dieser Aktivität auftreten: Neben Messfehlern und Tippfehlern bei der Eingabe tauchen auch inhaltliche Fehler auf, bei denen die falschen Werte gemessen werden (Radius statt Durchmesser) oder nicht das Verhältnis von Umfang zu Durchmesser, sondern dessen Kehrwert berechnet wird. Die Studierenden verwenden bei der Analyse dieser Fehler ihr bereits erworbenes Fachwissen zu Kreisen und zur Proportionalität.

Aus der Analyse ihrer eigenen Erfahrungen mit dieser Aktivität schöpfen die Studierenden dann fachdidaktisches Wissen, nämlich Kenntnisse über typische Fehlvorstellungen, nützliche mentale Modelle, Aktivitäten zum systematisieren, Üben und Festigen von Fachwissen, kognitive Aktivierung über das Hervorrufen von kognitiven Konflikten, allgemeine prozessbezogene Kompetenzen wie Modellieren, Argumentieren oder das mathematische Arbeiten mit Medien (Kultusministerkonferenz, 2022), usw. Das Querschnittsprinzip (x) des Explizierens von Zusammenhängen sorgt dafür, dass dieses Generieren von fachdidaktischem Wissen bewusst geschieht und somit auf andere Situationen übertragbar wird. Studierende können diese Tätigkeit im Studium oder in ihrer weiteren Ausbildung in der zweiten Phase und in der Berufslaufbahn aufgreifen und nutzen, um ihr fachdidaktisches Wissen zu erweitern. Zum Beispiel können solche Sammel- und Diskussionstätigkeiten auf ähnliche Art und Weise mit (digitalen) Fotografien durchgeführt werden, um den Begriff der Form zu begründen. Egal, wie groß ein Foto ist – bestimmte Verhältnisse bleiben gleich. Im Bereich des Sachrechnens kann mit anderen proportionalen Zusammenhängen gearbeitet werden – Preislisten können auf gleichbleibende Verhältnisse untersucht werden, auftretende Differenzen bieten die Gelegenheit, über Modellierungsannahmen zu sprechen. Es können aber auch ganz andere Bereiche erschlossen werden, zum Beispiel mathematisches Argumentieren: Die Summe der Innenwinkel (vieler) verschiedener Dreiecke kann mit der Klasse experimentell bestimmt werden,

und darauf aufbauend ein Beweisbedürfnis für den Innenwinkelsummensatz erzeugt werden; es können aber auch viele rechtwinklige Dreiecke hergestellt und vermessen werden, so dass der Satz des Pythagoras über Messungen erkundet werden kann. Hier entstehen wiederum vielfältige Gelegenheiten, aus der fachlichen Perspektive Rückschlüsse auf didaktische Prozesse zu gewinnen.

Zusammenfassend kann hier die Generierung fachdidaktischen Wissens aus fachlichem Wissen wie folgt beschrieben werden: Die Studierenden explorieren einen ihnen fachlich bekannten Zusammenhang. Dabei nutzen sie ihr fachliches Wissen, um auf mögliche Schwierigkeiten in der Vermittlung zu stoßen, und haben durch ihr vernetztes Fachwissen eine Grundlage, reichhaltige Umgebungen zu schaffen, in denen diese Schwierigkeiten auftreten können. Aus der Rückschau auf ihren eigenen Erkenntnisprozess, der ihr ursprüngliches fachliches Bild bereichert, können sie Lernumgebungen generieren, die die fachlichen Zusammenhänge ausnutzen und den inhaltlichen Kern herausstellen. Die spätere Reflexion soll sie dann in die Lage versetzen, andere Inhaltsbereiche, die sie fachlich durchdrungen haben, selbst wieder in analoger Weise fachdidaktisch aufzubereiten.

5 DESIGN RESEARCH FÜR EVALUATION UND WEITERENTWICKLUNG IN ZYKLEN

Die methodische Grundlage für unsere Begleitforschung bildet der Design-Research-Ansatz (Prediger, 2019). Konkret werden alle genannten Lehrveranstaltungen auf theoretischer und stoffdidaktischer Basis unter Berücksichtigung der Gestaltungsprinzipien (Reitz-Koncebovski et al., 2018, 2020) entwickelt und evaluiert. Für die Evaluation der Lehrveranstaltungen nutzen wir zwei Säulen: (1) zum einen die Analyse der Entwicklung des Professionswissens der Studierenden und (2) zum anderen Beobachtungen und kollegiale Supervision durch „Spies“. Aufgrund der Ergebnisse der mehrschichtigen Evaluationen werden anschließend die Lehrveranstaltungen in iterativen Zyklen weiterentwickelt (siehe Tabelle 1).

Mithilfe der Analyse der Entwicklung des Professionswissens der Studierenden (1) untersuchen wir den Effekt der neuentwickelten Lehrveranstaltungen. Dabei nehmen wir speziell den Zuwachs an erweitertem Fachwissen für den schulischen Kontext (Woehlecke et al., 2017) sowie an verknüpftem fach- und fachdidaktischem Wissen bei den Studierenden in den Blick. Konkret wird überprüft, inwieweit die Studierenden in der Lage sind, in Hinblick auf konkrete Aufgabenstellungen ihr fachliches und fachdidaktisches (Meta-)Wissen zu aktivieren und miteinander zu verknüpfen beziehungsweise fachdidaktisches Wissen

aus ihrem fachlichen Wissen abzuleiten und beides in der Unterrichtspraxis anzuwenden. Die folgende explorative Forschungsfrage steht dabei im Fokus: Was bewirkt die Realisierung der Gestaltungsprinzipien in den Lehrveranstaltungen bei den Studierenden?

Um diese Frage aus unterschiedlichen Perspektiven zu beleuchten und schließlich (exemplarisch, bezogen auf die jeweilige Lehrveranstaltung und Design-Research-Phase) beantworten zu können, nutzen wir ein Mixed-Methods-Design, das unter anderem Wissenstests, Gruppeninterviews, Unterrichtsentwürfe aus Praxisphasen, Lerntagebücher, Beobachtungen in Lehrveranstaltungen und Befragungen zur wahrgenommenen (Berufs-)Relevanz einschließt. Die Wissenstests wurden für unterschiedliche Bereiche der Mathematik, orientiert an den betreffenden Studienordnungen 2018 bzw. 2020, entwickelt und in die Modulprüfungen (Klausuren) integriert. Dabei fordern die Testaufgaben von den Studierenden die Herstellung von Bezügen zwischen konkreten schulmathematischen Aufgaben und dem in der Lehrveranstaltung erworbenen mathematischen Fachwissen beziehungsweise fachdidaktischen Wissen (Reitz-Koncebovski et al., 2020, 2022). Hinsichtlich der Gestaltungsprinzipien zielen diese insbesondere auf die angestrebte Metakompetenz „Zusammenhänge explizit benennen und darstellen“, die in den Lehrveranstaltungen durch das Querschnittsprinzip (x) *Auf einer Metaebene Zusammenhänge explizit machen* entwickelt werden sollte. Die Ergebnisse der Wissenstests werden in ausgewählten Lehrveranstaltungen mittels Gruppeninterviews mit kleinen Gruppen von Studierenden trianguliert. Die Gruppeninterviews geben einen tiefgründigen Aufschluss über das von den Studierenden erreichte Verständnis eines mathematischen Konstrukts oder über eventuell noch vorhandene Missverständnisse bzw. Fehlvorstellungen (vgl. Piasowski, 2022). Während die ersten beiden Instrumente das erworbene Wissen in bekannten oder lehrveranstaltungsähnlichen Situationen messen, erlaubt uns die Analyse von Unterrichtsentwürfen aus Praxisphasen im Bachelor- und Masterstudium, zu messen, inwieweit die Studierenden das in den Lehrveranstaltungen erworbene Wissen auf die Schulpraxis anwenden können. In einzelnen Lehrveranstaltungen werden auf freiwilliger Basis auch Lerntagebücher eingesetzt, die dazu dienen, den eigenen Lernprozess zu reflektieren und, als Nebeneffekt, der Forschung zugänglich zu machen. Untersuchungen mithilfe dieser Instrumente verknüpfen wir mit Beobachtungen aus Lehrveranstaltungen, die wir auf Grundlage der Gestaltungsprinzipien (Reitz-Koncebovski et al., 2020) durchführen. Die Lehrveranstaltungen werden kritisch geprüft, inwiefern sie den festgelegten Kriterien entsprechen, und an welchen Stellen Entwicklungspotential aufgezeigt werden kann (vgl. Fromm, 2022). Die Ergebnisse aus den Wissenstests können im Abgleich mit den Lehrveranstaltungsbeobachtungen gedeutet werden und machen zugleich Ansatzpunkte für die Weiterentwicklung der Lehrveranstaltungen deutlich. Letztendlich erheben wir auch die Studierendenperspektive im

Rahmen von Lehrveranstaltungsevaluationen. Dafür haben wir einen gesonderten Fragebogen entwickelt, der die Studierendenperspektive hinsichtlich der erlebten „doppelten Diskontinuität“ und der wahrgenommenen (Berufs-)Relevanz der konkreten Lehrveranstaltung in den Fokus nimmt. Diese Analysen sind in einer größeren Reihe von Bachelor- und Masterarbeiten (Stand Dezember 2022: 20 abgeschlossene, 3 laufende, 3 geplante), sowie auch Beiträgen für internationale Tagungen (Reitz-Koncebovski, 2022; Reitz-Koncebovski et al., 2022) dokumentiert.

Die zweite Säule im Rahmen der Evaluationen unserer Arbeit ist die kollegiale Supervision durch die sogenannten „Spies“. Diese Spione sind externe Beobachter:innen, häufig Projektmitarbeiter:innen, die die Lehrveranstaltungen – teils bereits im Planungsprozess, teils in der Durchführung – mit dem oben schon eingeführten Instrument beobachten und in darauffolgenden Gesprächen mit den Dozierenden gemeinsam reflektieren und auswerten und dadurch Impulse für Weiterentwicklungen geben. Die zweite Säule dient also nicht nur zur Qualitätssicherung und Nachhaltigkeit der Neukonzeption der Lehrveranstaltungen, sondern auch zur Quervernetzung innerhalb der Fächer und als Bindeglied zwischen den Fakultäten.

6 ERGEBNISSE

Insgesamt sechs Lehrveranstaltungen, davon vier (hauptsächlich) in der Humanwissenschaftlichen, zwei in der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät angesiedelt, wurden innerhalb der Projektlaufzeit durch „Spies“ weiterentwickelt (siehe Tab. 1). Die Beobachtungsprotokolle aus allen sechs Lehrveranstaltungen jeweils über den kompletten Verlauf (1–2 Semester) wurden von den Dozierenden für die Überarbeitung von Materialien, Folien und Videos genutzt. Der regelmäßige Austausch in den Spies-Runden bewirkte eine stärkere Fokussierung der Lehrveranstaltungen im Sinne der Gestaltungsprinzipien, insbesondere hinsichtlich der Ziele: Fundamentale Ideen der Mathematik verfolgen, Berufsfeldbezüge herstellen, die Sinndimension ansprechen und diskutieren sowie Zusammenhänge explizit machen.

In Hinblick auf die Entwicklung des Professionswissens der Lehramtsstudierenden lassen die Ergebnisse der Auswertungen, die im Rahmen der oben genannten Abschlussarbeiten (u. a. Piaskowski, 2022) stattgefunden haben, erste Verallgemeinerungen zu (Reitz-Koncebovski, 2022; Reitz-Koncebovski et al., 2022).

Bezüglich des Fachwissens fällt auf, dass eine beträchtliche Anzahl an Studierenden (teils mehr als ein Viertel der Gesamtheit) eklatante Wissenslücken

Tabelle 1 Impact im Rahmen unterschiedlicher Lehrveranstaltungen

Lehrveranstaltung	2018/19	2019/20	2020/21	2021/22
Arithmetik und ihre Didaktik I und II	Neuentwicklung & DR-Zyklus 1: Beobachtung	DR-Zyklus 2: Beobachtung Produktion von Vorlesungsvideos	DR-Zyklus 3: Beobachtungen (BA-/MA-Arbeiten), Weiterentwicklung: Selbsttests, Produktion von Vorlesungsvideos	DR-Zyklus 4: Beobachtungen (BA-/MA-Arbeiten), Weiterentwicklung der Übungen, Dokumentation als OER: OpenMoodle-Kurs
Geometrie und ihre Didaktik I und II		Neuentwicklung Produktion von Vorlesungsvideos	DR-Zyklus 1: Beobachtung, regelmäßige Spies-Treffen, Produktion von Vorlesungsvideos	DR-Zyklus 2: Beobachtungen (BA-/MA-Arbeiten)
Algebra und ihre Didaktik		Neuentwicklung Produktion von Vorlesungsvideos DR-Zyklus 1: Beobachtung	DR-Zyklus 2: Weiterentwicklung: Selbsttests	DR-Zyklus 3: Weiterentwicklung: Inverted Classroom
Stochastik und ihre Didaktik		Neuentwicklung & DR-Zyklus 1: Beobachtung	DR-Zyklus X: Regelmäßige Gesprächsrunden	DR-Zyklus X: Regelmäßige Gesprächsrunden
Elementargeometrie (Sek)		Begleitung durch Beobachtungen und Gesprächsrunden		
Lineare Algebra (Sek und FöPä)	Begleitung Tutorium durch Gesprächsrunden	Begleitung Tutorium durch Gesprächsrunden		Begleitung durch Beobachtungen und Gesprächsrunden

Anmerkungen. DR = Design Research, BA = Bachelor, MA = Master, OER = Open Educational Ressource, Sek = Sekundarstufe, FöPä = Förderpädagogik

und Verständnisprobleme aus der Schulmathematik mitbringt, insbesondere im Bereich der Bruchrechnung und Schulalgebra, die nicht im Laufe der ersten Studiensemester geschlossen werden können. Zwar ist im Vergleich der Ergebnisse mehrerer Design-Research-Zyklen eine positive Tendenz erkennbar, aber die Ergebnisse sind nach wie vor nicht zufriedenstellend. Hinsichtlich des fachdidaktischen Wissens schneiden die Studierenden in Aufgaben, die zur Einnahme der Lernendenperspektive auffordern (z. B. „Erläutern Sie Schwierigkeiten, die Lernende haben könnten, ...“), besser ab als in Aufgaben, in denen die Einnahme der Lehrendenperspektive gefordert ist („Erklären Sie einem Schüler/einer Schülerin...“).

Besonders schwer fällt es den Studierenden, das eigene Wissen aus einer Meta-Perspektive zu betrachten, worauf Fragestellungen wie „Erläutern Sie wesentliche mathematische Ideen, die Sie zur Lösung der (schulmathematischen) Aufgabe brauchen.“ oder „Analysieren Sie die (schulmathematische) Aufgabe hinsichtlich des zentralen fachdidaktischen Modells ...“ zielen. Als Konsequenz aus den schwachen Ergebnissen der Studierenden bei solchen Aufgaben wurde in der Weiterentwicklung der Lehrveranstaltungen zum einen das noch häufigere und deutlichere Explizitmachen von Zusammenhängen fokussiert, und zum anderen wurden ähnlich strukturierte Aufgaben im Rahmen von Übungen und Hausaufgaben integriert. Durch mehrere Design-Research-Zyklen ist eine Verbesserung der Wissenstestergebnisse erkennbar, aber es bleibt Luft nach oben.

Wenn wir die angerissenen Ergebnisse auf die oben dargestellten Gestaltungsprinzipien für die Lehrveranstaltungen zurückbeziehen, so stellen sich zwei Prinzipien als besonders wichtig für die weiteren Entwicklungen heraus: zum einen, wie bereits angedeutet, das Querschnittsprinzip (x) *Auf einer Metaebene Zusammenhänge explizit machen*, zum anderen das Prinzip (4) *den Pädagogischen Doppeldecker in der Hochschullehre realisieren*. Wie wir Interviewaussagen von Studierenden entnehmen können, unterstützt der pädagogische Doppeldecker die Studierenden dabei, die wesentlichen mathematischen Konzepte selbst besser zu verstehen, und gibt ihnen zugleich ein Modell dafür, wie sie diese im Unterricht gut vermitteln können. Die stärkere Berücksichtigung beider Prinzipien sollte für die Studierenden auch bei der Behebung von Schulwissenslücken förderlich sein. Das ist von essentieller Bedeutung, denn für den Lehrberuf genügen naive Vorstellungen mathematischer Konzepte nicht, sondern es braucht ein Verständnis der Entwicklung dieser Konzepte durch das Spiralcurriculum.

Weitere wichtige Aufschlüsse zur Wirksamkeit der Lehrveranstaltungen, die Fachwissenschaft und Fachdidaktik verbinden und/oder in der fachwissenschaftlichen Ausbildung das *erweiterte Fachwissen für den schulischen Kontext* fokussieren, erwarten wir aus den erst kürzlich begonnenen Forschungen im Rahmen des Praxissemesters, das die Lehramtsstudierenden in der Regel im 2. oder 3. Semester ihres Masterstudiums absolvieren. Hier können wir den gesamten

Prozess der Planung, Durchführung und Reflexion von Mathematikunterricht beobachten und durch Interviews begleiten. Dadurch sind sehr detaillierte Rückschlüsse darauf zu erwarten, an welchen Stellen in diesem Prozess die Studierenden in welcher Weise auf das durch die Lehrveranstaltungen erworbene fachliche und fachdidaktische Wissen zurückgreifen und wie sie dieses in der Praxis anwenden.

7 AUSBLICK UND TRANSFER

Die Erfahrungen aus der dreijährigen Projektlaufzeit von SPIES-M lassen sich auf zwei Punkte zuspitzen:

- ◆ Die Gestaltungsprinzipien haben sich als nützliches Werkzeug für das Design und die Evaluation von Lehrveranstaltungen, die Fachwissenschaft und Fachdidaktik verknüpfen, erwiesen. Auch für die kollegiale Supervision von fachwissenschaftlichen Lehrveranstaltungen, die einen Fokus auf das *erweiterte Fachwissen für den schulischen Kontext* richten, konnten sie gewinnbringend eingesetzt werden.
- ◆ Die „Spies“-Runden schaffen eine niederschwellige Gelegenheit zum interdisziplinären Austausch zwischen Fachwissenschaftler:innen und Fachdidaktiker:innen, der von den Beteiligten als sehr wertvoll empfunden wurde.

Diese Erfahrungen ermutigen uns dazu, die Gestaltungsprinzipien und das „Spies“-Konzept für den Transfer vorzuschlagen. Mit Vorträgen auf den oben benannten internationalen Tagungen sowie im Rahmen fachübergreifender Kolloquien (u. a. PSI, ZeLB, ALL-MINT, Tag der Lehre) an der Universität Potsdam haben wir diese Ideen auch fachübergreifend zur Diskussion gestellt. Von Fachdidaktiker:innen auch anderer Fächer als der Mathematik wurden insbesondere der Fokus auf die fundamentalen Ideen des jeweiligen Fachs und das Querschnittsprinzip (x) der Explikation von Zusammenhängen und Begründungen auf einer Metaebene mit großem Interesse aufgegriffen und als nützlich für offenbar ähnliche Herausforderungen benannt. Derartige Rückmeldungen lassen die Schlussfolgerung zu, dass der Transfer sowohl fachintern als auch fachübergreifend denkbar ist und fruchtbringend sein könnte.

Für den Transfer auf andere Fächer in der Lehrkräftebildung schlagen wir die Gestaltungsprinzipien in fachneutraler Formulierung vor (siehe Abb. 2). Dabei ist für das jeweilige Fach zu diskutieren, was (1) die fundamentalen Ideen und (2) die typischen Arbeitsweisen sind, die in der fachwissenschaftlichen Ausbildung fokussiert werden sollen, und ob es in dem Fach das Konzept „nature of ...“

Abbildung 2 Die Gestaltungsprinzipien in fachneutraler Formulierung

	Inhalte	Prozesse
Fachwissen- schaft	(1) Fundamentale Ideen des Faches verfolgen	(2) „Nature of ...“/typische Arbeitsweisen des Faches als Handlung erfahrbar machen
Fachdidaktik	(3) Fundamentale Ideen mit Grundprinzipien der Fachdidaktik verknüpfen	(4) „Pädagogischen Doppeldecker“ in der Hochschullehre realisieren
		(5) Lernprozesse von Schüler:innen erfahrbar machen

(x) Querschnittsprinzip: auf einer *Metaebene* Zusammenhänge explizit machen

überhaupt gibt. Hierbei beziehen wir uns auf Erweiterungen der Konzepte „Nature of Science“ (Ledermann, 1992) oder „Nature of History“ (Günther-Arndt, 2006), wie durch Woehlecke et al. (2017) diskutiert. Des Weiteren ist zu prüfen, ob die Verknüpfung von Fachwissenschaft und Fachdidaktik ähnlich gewinnbringend erscheint, wie wir sie in der Mathematik erlebt haben, und ob damit (3) das Prinzip der Ableitung des fachdidaktischen Wissens aus dem Fachwissen Bestand haben kann. Mit Sicherheit gehen wir davon aus, dass (4) der pädagogische Doppeldecker und (5) das Erfahrbarmachen von Lernprozessen der Schüler:innen für die fachdidaktische Lehre qualitätssteigernd sind. Aber auch für rein fachwissenschaftliche Lehrveranstaltungen könnten die das Fachwissen betreffenden Gestaltungsprinzipien (1) und (2) einschließlich des Querschnittsprinzips (x) nützlich sein – und zwar nicht nur innerhalb der Lehrkräftebildung: Auch Studierende in den Fachstudiengängen Bachelor und Master of Science sollten davon profitieren können.

Besonders hervorheben möchten wir in diesem Zusammenhang das Querschnittsprinzip (x) *Auf einer Metaebene Zusammenhänge explizit machen*, denn es erscheint uns als Schlüssel für eine in die Schulpraxis übertragbare fachliche Ausbildung von Lehrkräften. Unsere Erfahrungen zeigen, dass es sinnvoll ist, bei der Vermittlung fachlicher Inhalte immer wieder die Sinnfrage zu diskutieren: „Wozu brauche ich dieses Wissen als zukünftige Lehrkraft?“, „Welche Rolle spielen diese Inhalte im fachlichen Zusammenhang?“, „Wie lassen sich diese Inhalte mit anderem Wissen verknüpfen?“. Wenn sich die Dozierenden derartigen Fragen seitens der Studierenden stellen, erhöht das die Motivation der Studierenden. Zugleich gibt es den Dozierenden Anlass, die fachlichen Inhalte neu zu fokussieren und in einen Kontext zu stellen: Indem sie selbst immer wieder über die Sinnfrage nachdenken, können sie den Stellenwert der einzelnen fachlichen

Inhalte im Zusammenhang des erwarteten Professionswissens zukünftiger Lehrkräfte und (möglichst auch) in Verbindung zum schulischen Fachwissen klarer erkennen. Dann kann es ihnen gelingen, sowohl horizontale (innerfachliche) als auch vertikale Querverbindungen (entlang des Spiralcurriculums) explizit herauszustellen und gegebenenfalls aufzuzeigen, wie fachdidaktisches Wissen aus dem Fachwissen generiert werden kann. Dies wiederum sollte es den angehenden Lehrkräften erleichtern, ihr fachliches und fachdidaktisches Wissen für die (zukünftige) Schulpraxis nutzbar zu machen.

Sowohl in rein fachlichen Lehrveranstaltungen als auch in solchen, die Fachwissenschaft und Fachdidaktik verknüpfen, wurden die Gestaltungsprinzipien als Grundlage für Beobachtungen durch „Spies“ genutzt. Die Beobachtungsergebnisse waren Gegenstand gemeinsamer Auswertungsgespräche mit den Dozierenden. Die „Spies“ hatten in der Regel einen eher fachdidaktischen Hintergrund und insbesondere die Berufsrelevanz im Blick. Bei der Begleitung fachwissenschaftlicher Lehrveranstaltungen ergab sich dadurch in den Gesprächsrunden ein interdisziplinärer Austausch zwischen Fachwissenschaftler:in und Fachdidaktiker:in, der für beide Seiten gewinnbringend war und sich in Weiterentwicklungen in Richtung einer stärkeren Professionsorientierung der begleiteten Lehrveranstaltung niederschlug.

Das „Spies“-Konzept für die kollegiale Supervision durch kriteriengeleitete Beobachtungen mit anschließenden Austauschrunden zwischen „Spies“ und Dozierenden zur gemeinsamen Reflexion ist naturgemäß fachunabhängig. Da es für die Qualitätsentwicklung von Lehrveranstaltungen für Lehramtsstudierende äußerst vielversprechend erscheint, schlagen wir die Schaffung geeigneter Strukturen und Ressourcen für eine breite Implementierung dieses Formates in der universitären Lehrkräftebildung vor.

Literaturverzeichnis

- Ball, D. L., Thames, M. H. & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, 59(5), 389–407. <https://doi.org/10.1177/0022487108324554>
- De Bock, D., Van Dooren, W., Janssens, D. & Verschaffel, L. (2007). *The illusion of linearity* (Bd. 41). Springer US. <https://doi.org/10.1007/978-0-387-71164-5>
- Bruner, J. (1977). *The process of education* (2. Aufl.). Harvard University Press.
- Carrillo-Yañez, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L. C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar-González, Á., Ribeiro, M. & Muñoz-Catalán, M. C. (2018). The mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK) model*. *Research in Mathematics Education*, 20(3), 236–253. <https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1479981>

- Dreher, A., Lindmeier, A., Heinze, A. & Niemand, C. (2018). What kind of content knowledge do secondary mathematics teachers need? *Journal für Mathematik-Didaktik*, 39(2), 319–341. <https://doi.org/10.1007/s13138-018-0127-2>
- Fromm, S. (2022). *Professionswissen von Lehramtsstudierenden: Lehren und Lernen zu notwendigen Vorstellungsumbrüchen bei der Multiplikation/Division von Brüchen in der Lehrveranstaltung „Arithmetik und ihre Didaktik II“* [Masterarbeit, Universität Potsdam]. <https://doi.org/10.25932/publishup-55948>
- Günther-Arndt, H. (2006). Conceptual Change-Forschung: Eine Aufgabe für die Geschichtsdidaktik? In H. Günther-Arndt & M. Sauer (Hrsg.), *Geschichtsdidaktik empirisch. Untersuchungen zum historischen Denken und Lernen* (S. 251–277). LIT.
- Hefendehl-Hebecker, L. (2013). Doppelte Diskontinuität oder die Chance der Brückenschläge. In C. Ableitinger, J. Cramer & S. Prediger (Hrsg.), *Zur doppelten Diskontinuität in der Gymnasiallehrerbildung* (S. 1–15). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-658-01360-8_1
- Heinze, A., Dreher, A., Lindmeier, A. & Niemand, C. (2016). Akademisches versus schulbezogenes Fachwissen – ein differenzierteres Modell des fachspezifischen Professionswissens von angehenden Mathematiklehrkräften der Sekundarstufe. *Zeitschrift für Erziehungswissenschaft*, 19(2), 329–349. <https://doi.org/10.1007/s11618-016-0674-6>
- Klafki, W. (1958). Didaktische Analyse als Kern der Unterrichtsvorbereitung. In H. Roth & A. Blumenthal (Hrsg.), *Grundlegende Aufsätze aus der Zeitschrift Die Deutsche Schule* (S. 450–471). Schroedel.
- Klein, F. (1908). *Elementarmathematik vom Höheren Standpunkte aus Arithmetik · Algebra · Analysis. Vorlesung gehalten im Wintersemester 1907–08* (Bd. 1). Teubner.
- Kortenkamp, U. & Goral, J. (2017). Investigating future elementary school teachers conceptual understanding of place value through multi-digit carries in non-decimal bases. In B. Kaur, W. K. Ho, T. L. Toh & B. H. Choy (Hrsg.), *Proceedings of the 41st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Bd. 1, S. 228). PME.
- Kuntze, S., Lerman, S., Murphy, B., Kurz-Milcke, E., Siller, H.-S. & Winbourne, S. (2011). Professional knowledge related to big ideas in mathematics – an empirical study with pre-service teachers. In M. Pytlak, T. Rowland & E. Swoboda (Hrsg.), *Proceedings of the Seventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (S. 2717–2726). University of Rzeszów.
- Kultusministerkonferenz (2022). *Bildungsstandards für das Fach Mathematik. Erster Schulabschluss (ESA) und Mittlerer Schulabschluss (MSA)*. https://www.kmk.org/fileadmin/Dateien/veroeffentlichungen_beschluesse/2022/2022_06_23-Bista-ESA-MSA-Mathe.pdf
- Lederman, N. G. (1992). Students' and teachers' conceptions of the nature of science: A review of the research. *Journal of Research in Science Teaching*, 29(4), 331–359.

- Neubrand, M. (2018). Conceptualizations of professional knowledge for teachers of mathematics. *ZDM Mathematics Education*, 50(4), 601–612. <https://doi.org/10.1007/s11858-017-0906-0>
- Müller, G., Wittmann, E. C. & Steinbring, H. (2003). *Arithmetik als Prozess*. Kallmeyer.
- Piaskowski, B. (2021). *Denkhürden in den rationalen Zahlen: Eine Analyse des Professionswissens von Lehramtsstudierenden* [Masterarbeit, Universität Potsdam]. <https://doi.org/10.25932/publishup-53277>
- Prediger, S. (2008). Discontinuities for mental models: A source for difficulties with the multiplication of fractions. In D. De Bock, B. Søndergaard, B. A. Gómez & C. C. L. Chen (Hrsg.), *Proceedings of ICME-11 – Topic Study Group 10, Research and Development of Number Systems and Arithmetic* (S. 29–37).
- Prediger, S. (2019). Design-Research in der gegenstandsspezifischen Professionalisierungsforschung – Ansatz und Einblicke in Vorgehensweisen und Resultate. In T. Leuders, E. Christophel, M. Hemmer, F. Korneck & P. Labudde (Hrsg.), *Fachdidaktische Forschung zur Lehrerbildung* (S. 11–34). Waxmann.
- Reitz-Koncebovski, K. (2022). Simultaneously developing CK and PCK – Design research of courses for pre-service teachers. In C. Fernández, S. Llinares, A. Gutiérrez & N. Planas (Hrsg.), *Proceedings of the 45th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Bd. 4, S. 394). PME.
- Reitz-Koncebovski, K., Kortenkamp, U. & Goral, J. (2018). Gestaltungsprinzipien für fachwissenschaftliche Einführungsveranstaltungen in den Lehramtsstudiengängen Mathematik. In A. Borowski, A. Ehlert & H. Prechtel (Hrsg.), *PSI-Potsdam: Ergebnisbericht zu den Aktivitäten im Rahmen der Qualitätsoffensive Lehrerbildung (2015–2018)* (S. 175–188). Universitätsverlag Potsdam.
- Reitz-Koncebovski, K., Hermanns, J., Kortenkamp, U. & Kuzle, A. (2020). Qualitätsoffensive Lehrerbildung an der Universität Potsdam. Projekt SPIES zur Professionalisierung der Lehrerbildung Mathematik. *Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik*, 46(109), 26–30.
- Reitz-Koncebovski, K., Kuzle, A. & Kortenkamp, U. (2022). Is there a number in-between, and if so, how many? Analysis of prospective primary teachers' knowledge of rational numbers. *Twelfth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME12)*, Feb 2022, Bozen-Bolzano, Italy. <https://hal.science/hal-03744858>
- Schreiber, A. (1983). Bemerkungen zur Rolle universeller Ideen im mathematischen Denken. *mathematica didactica*, 6, 65–76.
- Schweiger, F. (1992). Fundamentale Ideen. Eine geistesgeschichtliche Studie zur Mathematikdidaktik. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 13, 199–214.
- Schwill, A. (1993). Fundamentale Ideen der Informatik. *ZDM*, 25(1), 20–31.

- Schwill, A. (1995). Fundamentale Ideen in Mathematik und Informatik. In H. Hischer & M. Weiß (Hrsg.), *Fundamentale Ideen – Erörterungen zur Zielorientierung eines künftigen Mathematikunterrichts unter Berücksichtigung der Informatik* (S. 18–25). Franzbecker.
- Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15(2), 4–14. <https://doi.org/10.3102/0013189X015002004>
- vom Hofe, R. (1995). *Grundvorstellungen mathematischer Inhalte*. Spektrum Akademischer Verlag.
- Wagenschein, M. (1959). *Zum Begriff des exemplarischen Lehrens* (Durchges. und im Literaturverz. erg. 2. Aufl.). Beltz.
- Wahl, D. (2013). *Lernumgebungen erfolgreich gestalten* (3. Aufl.). Klinkhardt.
- Woehlecke, S., Massolt, J., Goral, J., Hassan-Yavuz, S., Seider, J., Borowski, A., Fenn, M., Kortenkamp, U. & Glowinski, I. (2017). Das erweiterte Fachwissen für den schulischen Kontext als fachübergreifendes Konstrukt und die Anwendung im universitären Lehramtsstudium. *Beiträge zur Lehrerinnen- und Lehrerbildung*, 35(3), 413–426.
- Wygotski, L. (1987). Das Problem der Altersstufen. In J. Lompscher (Hrsg.), *Lew Wygotski. Ausgewählte Schriften. Teil 2: Arbeiten zur psychischen Entwicklung der Persönlichkeit* (S. 53–90). Pahl-Rugenstein.